



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUPERFICIES DE RIEMANN COMO
FOLIACIONES ASOCIADAS A ECUACIONES
DIFERENCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:
GUADALUPE MARTÍNEZ SALGADO

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.
NOVIEMBRE DE 2017





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. Datos del alumno | 1. Datos del alumno |
| Apellido paterno | Martínez |
| Apellido materno | Salgado |
| Nombre | Guadalupe |
| Teléfono | 55 67 57 44 08 |
| Universidad Nacional | Universidad Nacional |
| Autónoma de México | Autónoma de México |
| Facultad de Ciencias | Facultad de Ciencias |
| Carrera | Matemáticas |
| Número de cuenta | 412000634 |
| 2. Datos del tutor | 2. Datos del tutor |
| Grado | Dra. |
| Nombre | Laura |
| Apellido paterno | Ortiz |
| Apellido materno | Bobadilla |
| 3. Datos del sinodal 1 | 3. Datos del sinodal 1 |
| Grado | Dr. |
| Nombre | Marcelo Alberto |
| Apellido paterno | Aguilar |
| Apellido materno | González de la Vega |
| 4. Datos del sinodal 2 | 4. Datos del sinodal 2 |
| Grado | Dr. |
| Nombre | Petr |
| Apellido paterno | Makienko |
| 5. Datos del sinodal 3 | 5. Datos del sinodal 3 |
| Grado | Dr. |
| Nombre | Adolfo |
| Apellido paterno | Guillot |
| Apellido materno | Santiago |
| 6. Datos del sinodal 4 | 6. Datos del sinodal 4 |
| Grado | Dr. |
| Nombre | Xavier |
| Apellido paterno | Gómez Mont |
| Apellido materno | Ávalos |
| 7. Datos del trabajo escrito. | 7. Datos del trabajo escrito. |
| Título | Superficies de Riemann como foliaciones asociadas a ecuaciones diferenciales |
| Número de páginas | 157 |
| Año | 2017 |

Agradecimientos.

Esta tesis fué realizada con el apoyo del proyecto CB-2013-1219722 financiado por CONACYT y con el apoyo del proyecto IN302413 financiado por PAPIIT.

Índice general

Agradecimientos.	III
Introducción.	V
1. Superficies de Riemann	1
1.1. El género topológico	6
1.1.1. Triangulaciones	6
2. Funciones y mapeos	25
2.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz.	31
2.2. Curvas algebraicas	39
3. Continuación analítica	44
3.1. Superficie de Riemann de una función	53
3.2. Superficie de una función algebraica	67
4. La función algebraica de una superficie compacta	85
5. El teorema de Riemann-Roch	96
5.1. Divisores	97
5.2. Formas diferenciales en una superficie de Riemann	101
5.3. Divisores de Laurent	105
5.3.1. El problema de Mittag-Leffler y espacios $H^1(D)$	107
5.4. La dualidad de Serre	115
5.4.1. La función residuo	116
Apéndices	122
A. Topología.	123
B. Álgebra.	128
C. Variable compleja.	130

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

D.	134
E. Formas diferenciales.	142
Bibliografía.	150

Introducción.

En esta tesis se presentan tres resultados principales relacionados con superficies de Riemann. A continuación se explica brevemente en qué consiste cada uno.

Consideremos un campo vectorial holomorfo F definido en un abierto de \mathbb{C}^2 . Este campo define una ecuación diferencial ordinaria analítica, cuyas soluciones son curvas holomorfas parametrizadas por un abierto de \mathbb{C} , por ello resultan ser superficies de Riemann. Al conjunto formado por estas curvas, se le llama la foliación asociada al campo vectorial F , y a cada solución se le llama una hoja de la foliación.

Un caso especial es cuando las soluciones de la ecuación diferencial parametrizan a las curvas de nivel de una función H de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C} . A esta clase de ecuaciones se les llama hamiltonianas. Nuestro primer objetivo es demostrar que cuando la función H es polinomial, las hojas de la foliación son superficies de Riemann compactas. Para demostrar este resultado es que empezamos a incursionar en la teoría de superficies de Riemann, que surgió como una manera de solucionar el problema de multivaluación que tenían algunas funciones de variable compleja; la forma de arreglar este problema fue cambiar el dominio en el que las funciones están definidas.

Para obtener este nuevo dominio es que se desarrolla una herramienta, la continuación analítica de una función f a lo largo de una curva, que consiste en ir expandiendo el dominio original de la función para obtener una superficie, llamada la superficie de Riemann de f , y la función definida en este nuevo espacio deja de ser multivaluada. Cuando la función f satisface una ecuación polinomial $P(z, f(z)) = 0$, su superficie de Riemann es compacta. De este hecho deducimos que la foliación definida por una ecuación diferencial hamiltoniana (cuando la función H es polinomial) está formada por superficies de Riemann compactas. La bibliografía en la que se basa esta parte es [2] y [3].

Una vez que hemos visto que la superficie de Riemann de una función algebraica es compacta, podríamos hacernos la pregunta siguiente: dada una superficie de Riemann compacta X , ¿existirá alguna función algebraica tal que su superficie de Riemann asociada sea X ? La respuesta es afirmativa. Este es el segundo resultado importante de la tesis, y lo demostramos utilizando dos propiedades que cumple el conjunto de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ definidas en X , una de ellas es que para cualquier número finito de puntos en la superficie, podemos

hallar una función $f \in \mathcal{M}(X)$ que le asocie a cada punto un valor diferente (decimos entonces que $\mathcal{M}(X)$ separa puntos), y la otra propiedad es que para cualquier punto $p \in X$, existe una función $g \in \mathcal{M}(X)$ que tenga un polo en p (en este caso decimos que $\mathcal{M}(X)$ separa tangentes). Cuando $\mathcal{M}(X)$ cumple estas dos propiedades, a X se le llama curva algebraica.

Resulta que en una curva algebraica, dado un número finito de puntos p_1, \dots, p_n y enteros k_1, \dots, k_n , podemos construir una función meromorfa en X que tenga en cada p_i orden k_i , y la existencia de este tipo de funciones nos permitirá construir explícitamente la función algebraica f cuya superficie de Riemann es X . Para este segundo resultado nos apoyamos en [6] y [7], siendo [6] la referencia principal para el resto de la tesis.

La propiedad de las curvas algebraicas que describimos en el párrafo anterior nos lleva a nuestro tercer resultado, que surge de preguntarnos acerca del comportamiento en el resto de los puntos de X de las funciones que construimos, es decir, si son holomorfas, meromorfas, cuántos ceros o polos tienen, y de qué orden son. Este es un caso particular de un problema llamado *el problema de Mittag-Leffler* que busca responder a la siguiente pregunta: dado un número finito de puntos p_1, \dots, p_n en X y polinomios r_1, \dots, r_n , ¿existe alguna función meromorfa en X tal que su serie en cada punto p_i empiece con el polinomio r_i y sea holomorfa en $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$? El teorema que nos dice cuándo este problema tiene solución es el de Riemann-Roch, pues muestra que la obstrucción para que exista esta función está determinada por la relación que existe entre el género de la superficie y la suma de los grados de los polinomios r_1, \dots, r_n . Es por esta razón que en la última parte de la tesis nos dedicamos a demostrar el teorema de Riemann-Roch.

Capítulo 1

Superficies de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann fue un matemático que nació en Alemania el 27 de septiembre de 1826 y murió en Italia el 20 de julio de 1866. Hizo muchas aportaciones a las matemáticas, entre ellas está la teoría de superficies de Riemann.

En su tesis doctoral *Fundamentos para una teoría general de funciones de variable compleja*, escrita en 1851, introdujo a las superficies que llevan su nombre como objetos topológicos que ayudaban a entender el comportamiento de las funciones multivaluadas, sin embargo las técnicas analíticas necesarias para hacer las demostraciones rigurosas de sus resultados aún no se habían desarrollado.

Con el paso de los años y gracias a las contribuciones de otros matemáticos como Karl Weierstrass, sus ideas se fueron formalizando, y fue hasta 1913 cuando Herman Weyl introdujo la definición formal de superficie de Riemann en su libro *El concepto de una superficie de Riemann*.



Figura 1.1. Bernhard Riemann, litografía después de un retrato, artista desconocido, 1863. Archivo de arte e historia, Berlin.

Definición 1.1. Una *superficie de Riemann* es un espacio topológico (X, \mathcal{T}) Hausdorff, provisto de una cubierta abierta \mathcal{U} tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un homeomorfismo z definido en U y $z(U)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . A la pareja (U, z) le llamamos *carta coordenada* y al conjunto de cartas coordenadas $\mathcal{A} = \{(U, z) : U \in \mathcal{U}\}$ le llamamos un *atlas* de X . La superficie X cumple que si (U, z) y (V, w) son dos cartas coordenadas tales que $U \cap V \neq \emptyset$ entonces la función $w \circ z^{-1} : z(U \cap V) \rightarrow w(U \cap V)$ llamada *función de transición*, es analítica (Figura 1.2). Si p es un punto en X y (U, z) es una carta tal que $p \in U$, decimos que (U, z) es una carta en p , si además $z(p) = 0$, entonces decimos que la carta está centrada en p .

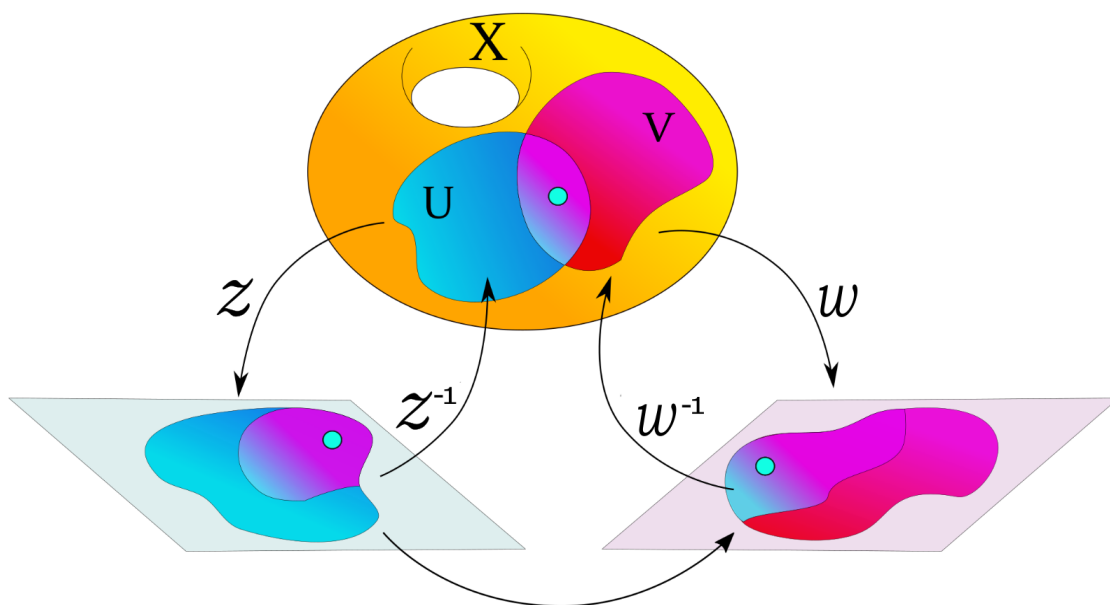


Figura 1.2. Función de transición entre dos cartas coordenadas.

Ejemplo 1.2. Supongamos que X es una superficie de Riemann y $Y \subseteq X$ es un subconjunto abierto. Con la topología de subespacio que hereda de X , Y es un espacio Hausdorff y la intersección de cada abierto de X con Y es un abierto en Y . En particular, si $\mathcal{A} = \{(U, z) : U \in \mathcal{U}\}$ es un atlas para X , para cada $U \in \mathcal{U}$, $Y \cap U$ es un abierto de Y y $\tilde{z} = z|_{Y \cap U}$ es un homeomorfismo, por lo que $\tilde{\mathcal{A}} = \{(U \cap Y, \tilde{z}) : U \in \mathcal{U}\}$ es un atlas para Y .

Ejemplo 1.3. Consideremos a la esfera unitaria de dimensión 2 como subespacio de \mathbb{R}^3 , $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : |x| \leq 1\}$. Al plano $x_3 = 0$ lo identificamos con el plano complejo mediante la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $F(x_1, x_2, 0) = x_1 + ix_2$. Con la topología de subespacio de \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^2 es un espacio topológico Hausdorff. Para darle estructura de superficie de Riemann notemos que los conjuntos $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ forman una cubierta

de \mathbb{S}^2 .

La función $P_N : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $P_N(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}$ es continua pues $x_3 \neq 1$ para cualquier punto $(x_1, x_2, x_3) \in U$. A P_N se le conoce como *proyección estereográfica* desde el Polo Norte. Su inversa $P_N^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U$ dada por

$$P_N^{-1}(\xi) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(\xi)}{|\xi|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(\xi)}{|\xi|^2 + 1}, \frac{|\xi|^2 - 1}{|\xi|^2 + 1} \right)$$

es también continua, así que U es homeomorfo a \mathbb{C} . Por otro lado, la función $P_S : V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $P_S(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1+x_3} - i \frac{x_2}{1+x_3}$ es continua, ya que para todo punto $(x_1, x_2, x_3) \in V$, $x_3 \neq -1$. A P_S se le conoce como *proyección estereográfica* desde el Polo Sur. Su inversa $P_S^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow V$ está dada por

$$P_S^{-1}(\xi) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(\xi)}{|\xi|^2 + 1}, \frac{-2\operatorname{Im}(\xi)}{|\xi|^2 + 1}, \frac{1 - |\xi|^2}{|\xi|^2 + 1} \right)$$

y es también una función continua, por lo tanto V es homeomorfo a \mathbb{C} . La intersección de U y V es $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ y la imagen de este conjunto bajo ambas funciones, P_N y P_S , es $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Luego, la función de transición $P_S \circ P_N^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ está dada por $P_S \circ P_N^{-1}(\xi) = 1/\xi$ y es analítica en su dominio de definición. De este modo, tenemos que la esfera puede ser dotada de una estructura de superficie de Riemann. Observemos además que por el teorema de Heine Borel es un espacio topológico compacto, ya que es un subespacio cerrado de \mathbb{R}^3 y es acotado. A esta superficie se le conoce como la *esfera de Riemann*.

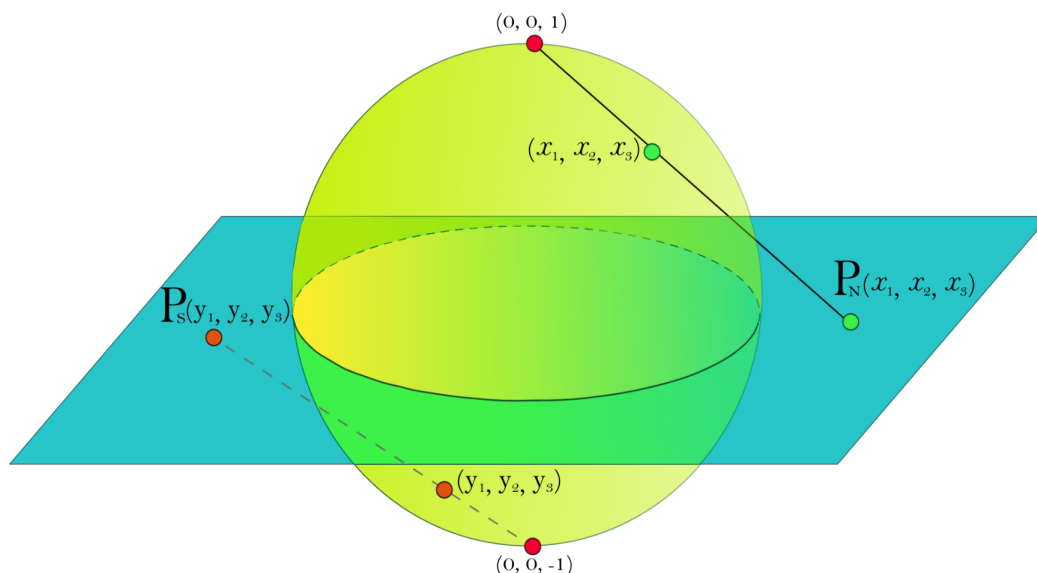


Figura 1.3. Proyección estereográfica desde el Polo Norte y desde el Polo Sur.

Ejemplo 1.4. Consideremos al conjunto de los números complejos \mathbb{C} y sea ∞ un punto que no representa a ningún elemento de \mathbb{C} . Definimos el conjunto $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sea $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ la topología usual de \mathbb{C} . La colección $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbb{C}} \cup \{A \subset \hat{\mathbb{C}} : \infty \in A \text{ y } \hat{\mathbb{C}} \setminus A \text{ es un subespacio compacto de } \mathbb{C}\}$ es una topología para $\hat{\mathbb{C}}$.

Lema 1.5. $\hat{\mathbb{C}}$ es homeomorfo a \mathbb{S}^2 y se le puede dar una estructura de superficie de Riemann.

Demostración. Para demostrar que $\hat{\mathbb{C}}$ y \mathbb{S}^2 son homeomorfos vamos a extender la proyección estereográfica desde el Polo Norte $P_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definiendo $P_N(0, 0, 1) = \infty$ y extendemos también su inversa $P_N^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ definiendo $P_N^{-1}(\infty) = (0, 0, 1)$. Dado que la topología de $\hat{\mathbb{C}}$ coincide con la usual de los números complejos en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, para ver que estas funciones extendidas son continuas, basta checar la continuidad en los puntos ∞ y $(0, 0, 1)$ respectivamente. Tomemos primero un abierto A que tenga a $P_N(0, 0, 1) = \infty$, sin pérdida de generalidad supongamos que $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r, r > 1\}$. Consideremos el conjunto $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 > \frac{r^2-1}{r^2+1}\}$. Si $(x_1, x_2, x_3) \in B$, por un lado este punto cumple que $x_3 > \frac{r^2-1}{r^2+1}$ y por otro lado, al pertenecer a \mathbb{S}^2 , $1 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_3 > \frac{r^2-1}{1+r^2} &\Rightarrow x_3(1+r^2) > r^2-1 \Rightarrow x_3 + r^2x_3 > r^2-1 \\ \Rightarrow 1+x_3 > r^2-r^2x_3 &\Rightarrow 1+x_3 > r^2(1-x_3) \Rightarrow \frac{(1+x_3)}{(1-x_3)} > r^2 \\ \Rightarrow \frac{(1-x_3)(1+x_3)}{(1-x_3)(1-x_3)} > r^2 &\Rightarrow \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} > r^2 \Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2} > r^2 \\ \Rightarrow \left[\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2} \right]^{\frac{1}{2}} &= |P_N[(x_1, x_2, x_3)]| > r. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $P_N(x_1, x_2, x_3) \in A$, por lo tanto $P_N(B) \subseteq A$ y así P_N es continua. Para demostrar la continuidad de P_N^{-1} supongamos que G es un abierto que contiene a $P_N^{-1}(\infty) = (0, 0, 1)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 > k, 0 < k < 1\}$. El conjunto $H = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi|^2 > \frac{k+1}{1-k}\} \cup \{\infty\}$ es un abierto de la topología de $\hat{\mathbb{C}}$ que contiene a ∞ . Para que $P_N^{-1}(\xi) \in G$, con $\xi \in H$, basta que $(|\xi|^2 - 1)/(|\xi|^2 + 1) > k$, pero esto sucede pues

$$\begin{aligned} |\xi|^2 > \frac{k+1}{1-k} &\Rightarrow |\xi|^2(1-k) > k+1 \Rightarrow |\xi|^2 - 1 > k|\xi|^2 + k \\ \Rightarrow |\xi|^2 - 1 > k(|\xi|^2 + 1) &\Rightarrow \frac{|\xi|^2 - 1}{|\xi|^2 + 1} > k \end{aligned}$$

entonces $P_N^{-1}(H) \subseteq G$ y por lo tanto P_N^{-1} es continua. De este modo hemos demostrado que la proyección estereográfica extendida es un homeomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y \mathbb{S}^2 .

Para darle a $\hat{\mathbb{C}}$ una estructura de superficie de Riemann, hagamos la siguiente observación: si X es una superficie de Riemann y $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entre X y Y , entonces

Y es una superficie de Riemann. En efecto, supongamos que $\mathcal{A} = \{(U, z) : U \in \mathcal{U}\}$ es un atlas para X . Entonces la colección $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\varphi(U), z \circ \varphi^{-1}) : U \in \mathcal{U}\}$ es un atlas para Y y las funciones de transición son analíticas (Figura 1.4). Por lo tanto Y es una superficie de Riemann. De acuerdo a esta observación, $\hat{\mathbb{C}}$ tiene una estructura de superficie de Riemann inducida por el homeomorfismo que existe entre este espacio y la esfera de Riemann.

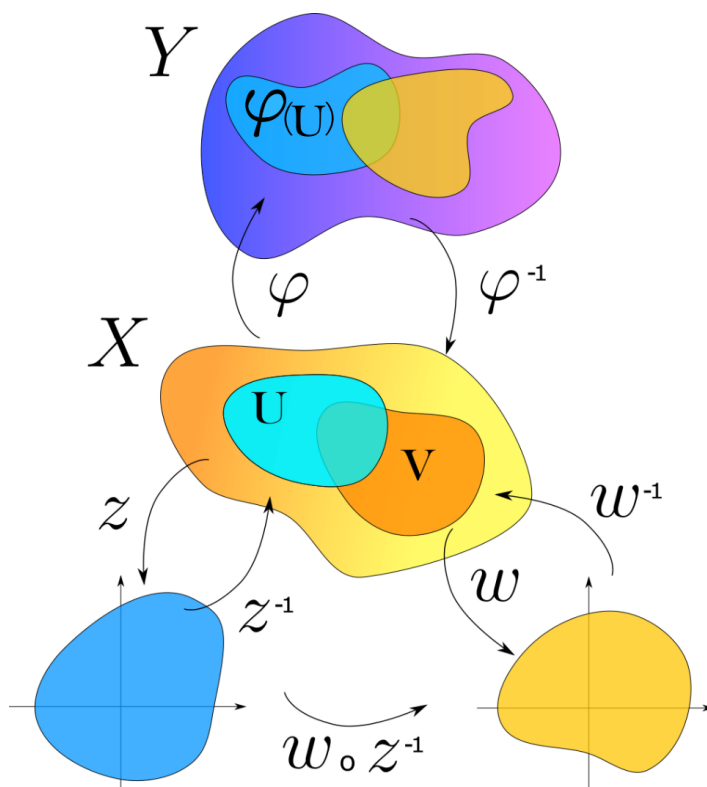


Figura 1.4.

□

Es conveniente extender también la proyección estereográfica desde el Polo Sur, $P_S : \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definiendo $P_S(0, 0, -1) = \infty$ y a su inversa $P_S^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ definiendo $P_S^{-1}[(0, 0, 1)] = \infty$. Estas funciones también son continuas, la demostración es análoga a lo que hemos hecho. Definamos la función $\mathfrak{J} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como $\mathfrak{J}(\xi) = P_S \circ P_N^{-1}$, donde P_N y P_S son las proyecciones estereográficas extendidas. Esta función tiene inversa $\mathfrak{J}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por $\mathfrak{J}^{-1}(\xi) = P_N \circ P_S^{-1}$. Notemos que esta función coincide con la función $f(\xi) = 1/\xi$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y en los dos puntos que faltan está definida como $\mathfrak{J}(\infty) = 0$ y $\mathfrak{J}(0) = \infty$. Esta función nos será de gran utilidad y la retomaremos mas adelante.

1.1. El género topológico

El género de una superficie de Riemann es un invariante topológico muy importante, pues nos proporciona información geométrica y algebraica muy interesante sobre la superficie, un ejemplo de ello lo veremos en el teorema de Riemann-Hurwitz y más adelante, en el teorema Riemann Roch. Definiremos el género de una superficie en términos de sus grupos de homología, y para entender estos últimos, necesitamos el concepto de triangulación, que es lo que intuitivamente nos imaginamos, dividir a la superficie en triángulos.

1.1.1. Triangulaciones

Definición 1.6. Un *triángulo* en una superficie de Riemann X es un conjunto $t \subseteq X$ tal que existe un homeomorfismo $f : T \rightarrow t$ donde T es un triángulo en \mathbb{R}^2 . Los subconjuntos de t que son imagen bajo f de los vértices y aristas de T , también serán llamados los vértices y aristas, respectivamente, del triángulo t (Figura 1.5). Una *triangulación* de la superficie X

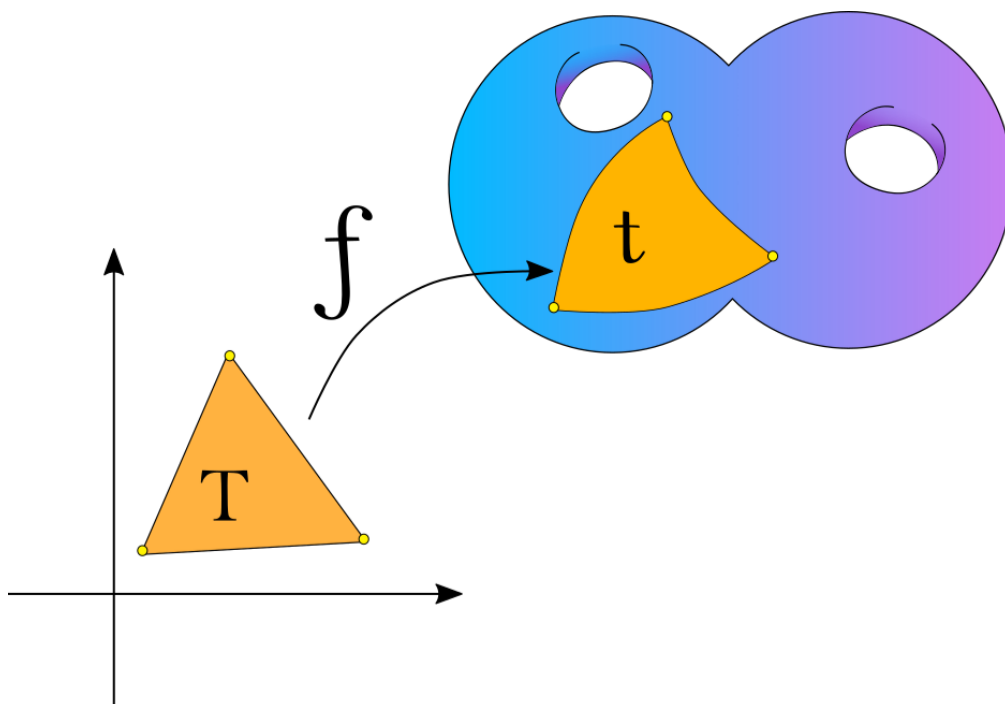


Figura 1.5.

es un conjunto triángulos $\{t_j : j \in J\}$ que cumple las siguientes condiciones: $\cup_{j \in J} t_j = X$; si un punto $p \in X$ no pertenece a ninguna arista, entonces pertenece al interior de un único triángulo, dicho triángulo es entonces una vecindad de p (Figura 1.6(a)), si p pertenece a una arista a pero no a un vértice, entonces pertenece a exactamente dos triángulos t_i y t_j cuya intersección es la arista a y $t_i \cup t_j$ es una vecindad de p (Figura 1.6(b)); si p es un vértice,

entonces pertenece sólo a un número finito de triángulos t_1, t_2, \dots, t_k , los cuales tienen a p como vértice y la unión $\cup_{i=1}^k t_i$ es una vecindad de p , además dos triángulos consecutivos t_i y t_{i+1} (i módulo k), tienen exactamente una arista en común (Figura 1.6(c)). Diremos que

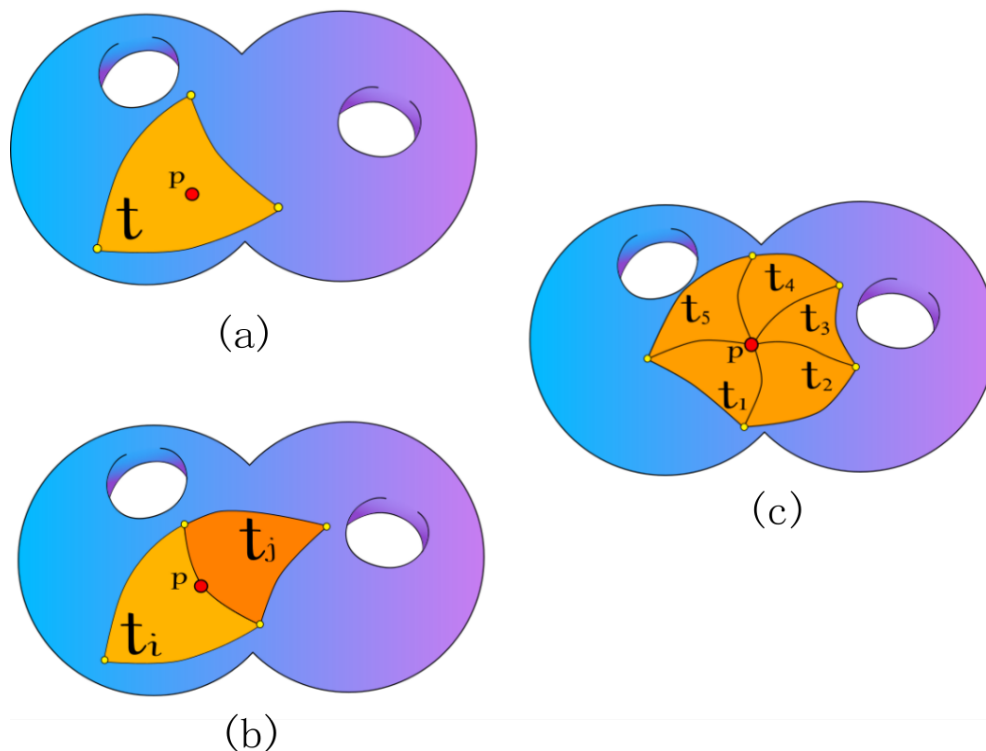


Figura 1.6.

la superficie X es *triangulable* si admite una triangulación. Un resultado que asumiremos es que toda superficie de Riemann es triangulable, la demostración de este hecho se puede consultar en [4], página 239. La siguiente observación es de mucha utilidad, pues tiene como consecuencia que toda triangulación de una superficie compacta debe contener sólo un número finito de triángulos.

Observación 1.7. Supongamos que K es un subconjunto compacto de una superficie X y sea Δ una triangulación de X . Entonces K interseca sólo a un número finito de triángulos de Δ . En efecto, si K tiene intersección no vacía con un número infinito de triángulos, podemos seleccionar un punto de K perteneciente a cada triángulo que interseca, dicho conjunto, llamémoslo H , es entonces infinito, por lo que debido a la compacidad de K , debe tener un punto de acumulación x_0 . Al ser x_0 un punto de acumulación de H , tiene la propiedad de que cualquier abierto al que pertenezca, contiene una cantidad infinita de elementos de H . Ya que la unión de los triángulos a los que pertenece x_0 (que es un número finito) es una vecindad de x_0 , existe un abierto U contenido en dicha vecindad y a su vez, U contiene un número infinito de puntos, cada uno perteneciente a un triángulo diferente, lo cual no puede

sucedier, porque U interseca sólo a un número finito de elementos de la triangulación. Por lo tanto, K interseca sólo a un número finito de elementos de Δ .

Superficies orientables

Ahora introducimos el concepto de orientación de una superficie, pues nos servirá para dar una clasificación topológica de las superficies de Riemann.

Definición 1.8. Un espacio topológico X es una *superficie diferenciable* si posee un atlas $\mathcal{A} = \{(U, f) : U \in \mathcal{U}\}$ donde \mathcal{U} es una cubierta abierta de X , $f : U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo con un abierto de \mathbb{R}^2 y si dos elementos de la cubierta U y V se intersecan, entonces las *funciones de transición* $g \circ f^{-1} : f(U \cap V) \rightarrow g(U \cap V)$ son diferenciables. Si además el jacobiano de cada función de transición es positivo, decimos que X es una *superficie orientable*.

Lema 1.9. *Toda superficie de Riemann es orientable.*

Demostración. Identifiquemos al plano complejo con \mathbb{R}^2 y consideremos una superficie de Riemann X con un atlas $\mathcal{A} = \{(U, z) : U \in \mathcal{U}\}$. Cada función de transición $f = w \circ z^{-1} : z(U \cap V) \rightarrow w(U \cap V)$ es una función cuyo dominio e imagen son abiertos de \mathbb{R}^2 , así que es de la forma $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Su jacobiano es el determinante de la matriz

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

y como f es analítica satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

entonces

$$\det(J_f) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0$$

pero mas aún, como f tiene inversa $g = z \circ w^{-1}$ tenemos que

$$\det(J_g) \det(J_f) = \det(J_{g \circ f}) = \det(Id) = 1$$

por lo tanto en $z(U \cap V)$

$$\det(J_f) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} > 0.$$

□

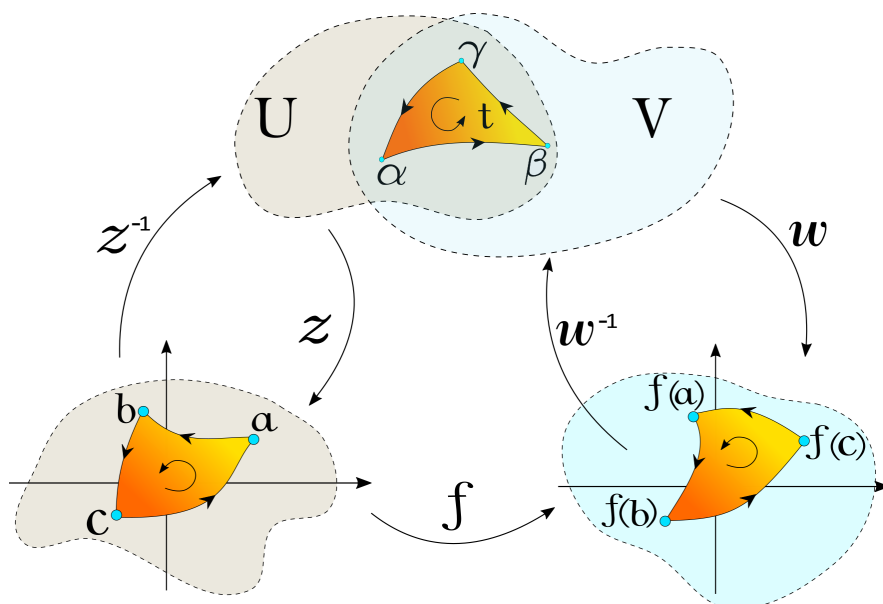


Figura 1.7.

Ahora consideremos una triangulación Δ de X suficientemente fina para que cada triángulo esté contenido en una carta coordenada. Fijemos nuestra atención en una carta (U, z) que contenga uno de los triángulos t . Con el homeomorfismo $z : U \rightarrow z(U)$ tenemos un triángulo en \mathbb{R}^2 cuya frontera podemos orientar en el sentido de las manecillas del reloj. Con esa orientación le podemos dar un orden a los vértices, que denotaremos $\langle a, b, c \rangle$ y luego, con z^{-1} llevamos ese orden a los vértices del triángulo en X que denotamos como $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ donde $\alpha = z^{-1}(a)$, $\beta = z^{-1}(b)$ y $\gamma = z^{-1}(c)$. Este orden de los vértices de t nos da una manera de recorrer su frontera y en consecuencia, una manera de recorrer las aristas.

Debemos ver que esa orientación que tiene el triángulo t no depende de la carta que escojamos, para ello supongamos que hay otra carta (V, w) tal que $t \subset V$. Dado que $f = w \circ z^{-1}$ es una función analítica, preserva la orientación de la frontera de $z(t)$ entonces la frontera de $f(z(t)) = w(t)$ también está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (Figura 1.7). En consecuencia, el orden de los vértices de $w(t)$ es $\langle f(a), f(b), f(c) \rangle$ y al llevar este orden al triángulo t con la función w^{-1} , coincide con el que le habíamos dado al considerarlo contenido en U . De este modo le damos una orientación a la frontera de cada triángulo de Δ .

Notemos que si una arista m pertenece a dos triángulos t_1 y t_2 , al ser considerada como arista de t_1 se recorre en un sentido y al ser considerada como arista de t_2 se recorre en sentido contrario. Esto es consecuencia de que en \mathbb{R}^2 , la frontera de ambos triángulos se toma orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, ocasionando que la arista que comparten se recorra en sentidos contrarios (Figura 1.8(a)).

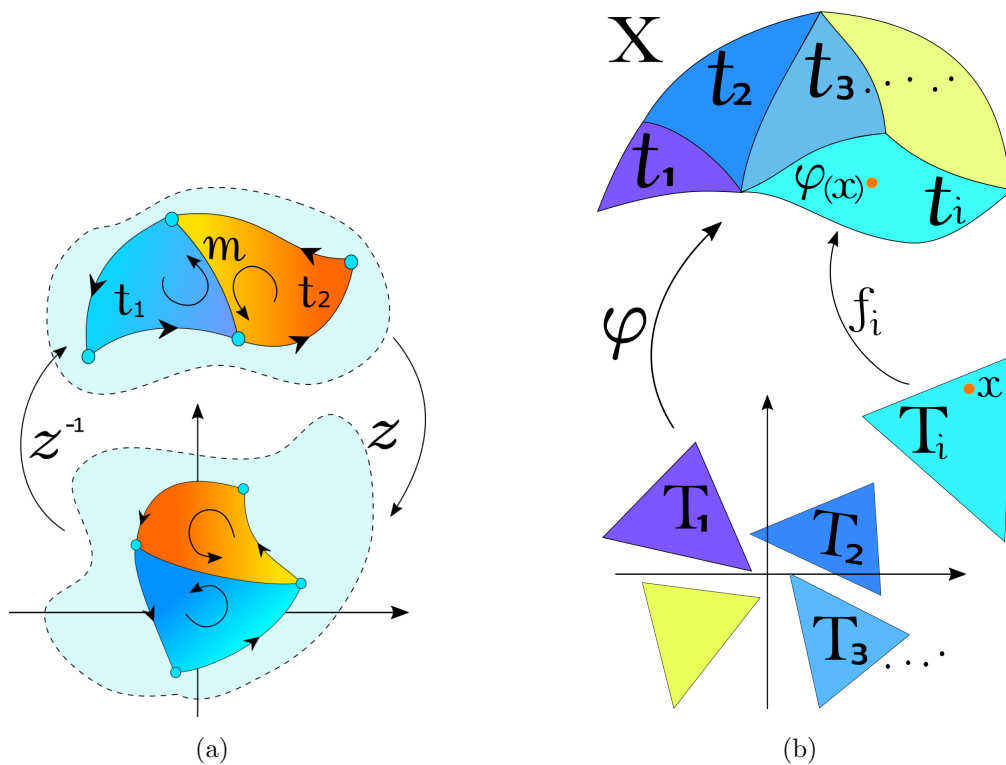


Figura 1.8.

Teorema 1.10. *Toda superficie de Riemann compacta es homeomorfa a la esfera S^2 o a un polígono de $4k$ lados cuyas aristas se identifican por pares.*

Demostración. Sea X una superficie de Riemann orientable y supongamos que $\Delta = \{f_i : T_i \rightarrow t_i | i = 1, \dots, n\}$ es una triangulación de X , la cual podemos elegir finita debido a la compacidad de la superficie. Supongamos que t_1, \dots, t_n están enumerados de manera que cada dos triángulos consecutivos tienen una arista en común y que $T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (si esto no sucede, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tomamos una traslación adecuada $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que $g_i[T_i] \cap g_j[T_j] = \emptyset$). Consideremos ahora al conjunto $A = \cup_{i=1}^n T_i$ y definamos a la función $\varphi : A \rightarrow X$ de la siguiente forma: dado $x \in A$, sabemos que existe un único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in T_i$ (la unicidad se debe a que los triángulos son ajenos dos a dos) entonces $\varphi(x) = f_i(x) \in X$ (Figura 1.8(b)). Notemos que φ es continua, ya que su dominio es la unión ajena y finita de conjuntos cerrados y en cada uno de estos conjuntos es continua porque cada f_i lo es. Tenemos además que φ es suprayectiva, y al ser A un espacio compacto y X un espacio Hausdorff, φ es una función cociente.

Sea Q el conjunto de aristas de los triángulos T_1, \dots, T_n . Recordemos que la triangulación de X está tomada de tal forma que cada dos triángulos consecutivos tienen una arista en común. Llamemos a_{ij} a la arista que comparten los triángulos t_i y t_j , para $i = 1, \dots, n-1$ y $j = 2, \dots, n$, formamos así la colección $\{a_{12}, a_{23}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{(n-1)n}\}$. Luego, como cada arista

de la triangulación Δ pertenece a exactamente dos triángulos, en la colección de triángulos T_1, \dots, T_n hay $2n$ aristas que llamaremos $b_1, c_1, \dots, b_n, c_n$ y su imagen bajo φ son a las aristas $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{(n-1)n}$ (Figura 1.9).

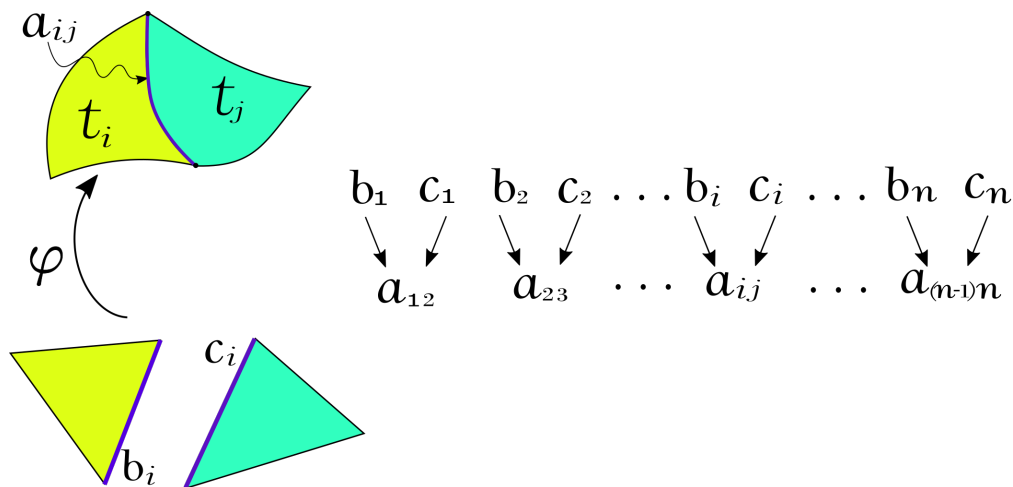


Figura 1.9.

Definimos los conjuntos $Q_1 = \{b_1, c_1, \dots, b_i, c_i, \dots, b_n, c_n\}$, $Q_2 = Q \setminus Q_1$ y la relación de equivalencia \sim en $A = \cup_{i=1}^n T_i$ como $x \sim y$ si $\varphi(x) = \varphi(y)$. Observemos que si un punto x pertenece al interior de un triángulo T_i , entonces $x \sim x$, y si x pertenece a una de sus aristas, entonces $x \sim y$ para algún punto y en otro triángulo T_j que cumple que $\varphi(T_j) = t_j$ tienen una arista en común con $\varphi(T_i) = t_i$. Entonces con la relación \sim identificamos por pares a las aristas de $Q = Q_1 \cup Q_2$. La partición que induce esta relación de equivalencia es $D = \{\varphi^{-1}(x) : x \in X\}$ y el hecho de que φ sea una función cociente implica que X es homeomorfo a A/\sim .

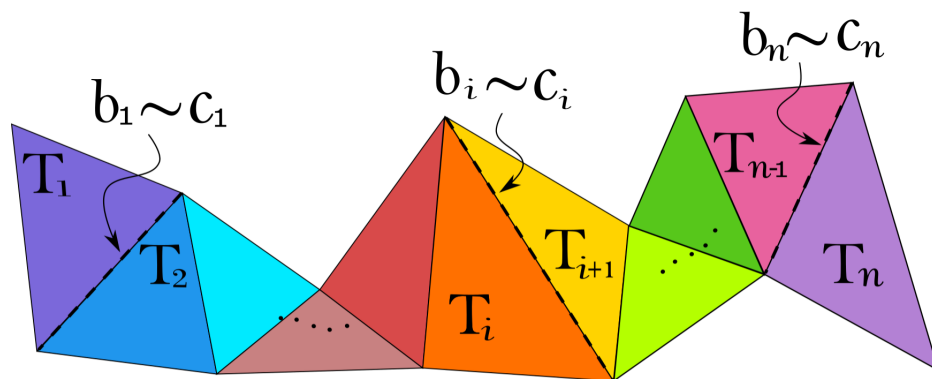


Figura 1.10.

Ahora consideremos la función φ restringida al interior de los triángulos T_1, \dots, T_n y al conjunto de aristas Q_1 . El espacio $A = \cup_{i=1}^n T_i$ módulo la relación de equivalencia que induce esta restricción de φ son los triángulos T_1, \dots, T_n en donde sólo identificamos a las aristas de $Q_1 = \{b_1, c_1, \dots, b_i, c_i, \dots, b_n, c_n\}$. Dicho espacio es homeomorfo a un polígono P en \mathbb{R}^2 (Figura 1.10). Para obtener el espacio completo A/\sim debemos ver de que manera se identifican las aristas del conjunto Q_2 , que en el polígono P de la figura 1.10 corresponden a las aristas del perímetro. Dichas aristas tienen una orientación inducida por la de los triángulos de Δ y bajo la relación \sim cada arista $a \in Q_2$ se identifica con otra arista a^{-1} del mismo conjunto pero que tiene una orientación contraria a la de a . Denotaremos por a y a^{-1} a cada par de aristas de Q_2 que se tengan que identificar, el exponente -1 denota la orientación contraria de la arista sin exponente (Figura 1.11).

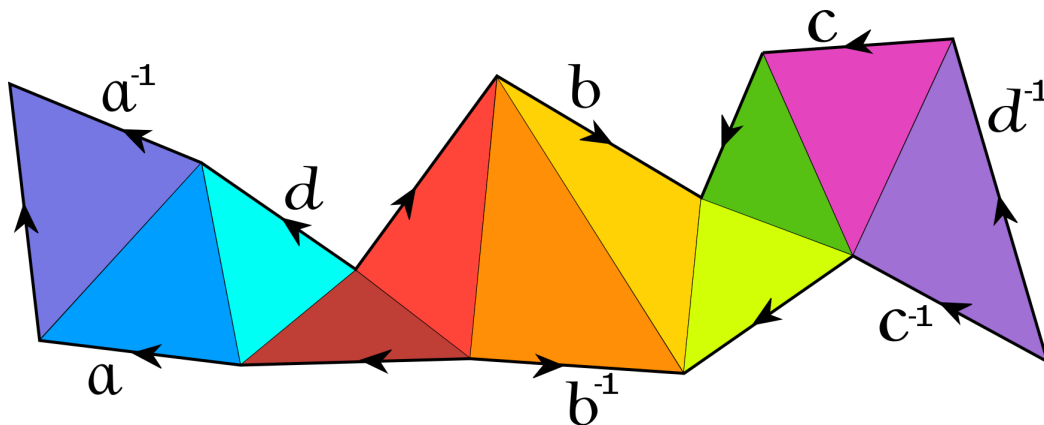


Figura 1.11.

Vamos a realizar 3 pasos para obtener el polígono del enunciado del teorema. **Paso 1:** Eliminar aristas adyacentes. Si dos aristas adyacentes se tienen que identificar, al hacerlo eliminamos de la frontera de P ese par de aristas. Repetimos este paso tantas veces como sea posible. Si al final de este paso nos quedan sólo dos aristas, las cuales se deben identificar, entonces la superficie es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 (Figura 1.12). Si después de efectuar el paso 1 quedan 4 o más aristas, realizamos el siguiente paso.

Paso 2: Obtener un polígono en el cual todos los vértices se tienen que identificar. Diremos que dos vértices son equivalentes si se tienen que identificar en uno solo. Supongamos que existen al menos dos clases de vértices, entonces el polígono P tiene dos vértices adyacentes, digamos V y W , que no se identifican (Figura 1.13 (a)). Llamemos b a la arista VW . Entonces la arista adyacente a b , llamémosle a , tiene a V como vértice y no se identifica con b (pues en el paso 1 hemos eliminado todos los pares de aristas adyacentes que se tienen que identificar). Sea Z el otro vértice de a y c la línea que une a Z con W . Cortamos el polígono a lo largo de c (Figura 1.13 (b)) e identificamos las aristas a y a^{-1} (Figura 1.13 (c)). De esta manera le quitamos un vértice a la clase de V y le agregamos uno a la clase de W . Luego

verificamos si la arista adyacente a b que también tiene como vértice a V es b^{-1} , si es así, identificamos estas aristas y de este modo eliminamos a la clase de V . De no ser así, repetimos el paso 2 hasta lograr que b y b^{-1} sean adyacentes y así poder eliminar a la clase de V . Luego repetimos este paso con las demás clases de vértices hasta que sólo queden vértices que se tengan que identificar. Luego repetimos el paso 1, para eliminar las aristas adyacentes que hayan surgido.

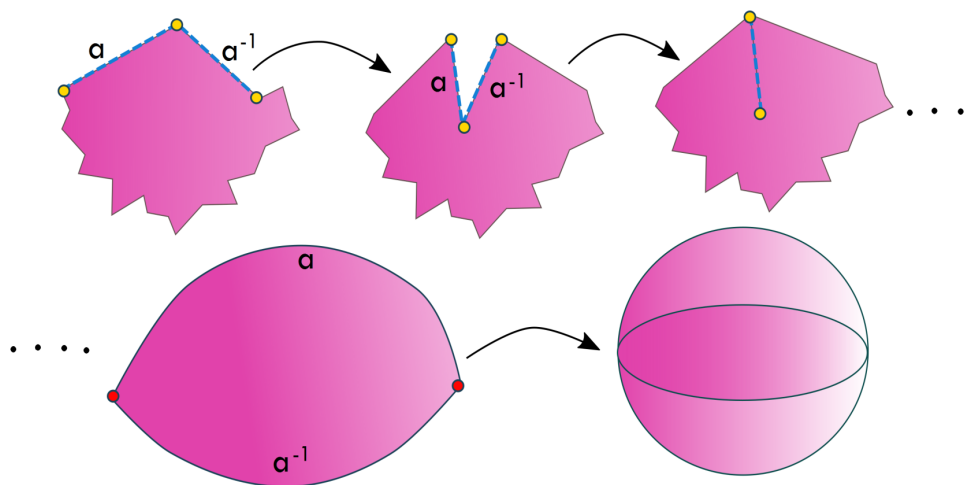


Figura 1.12.

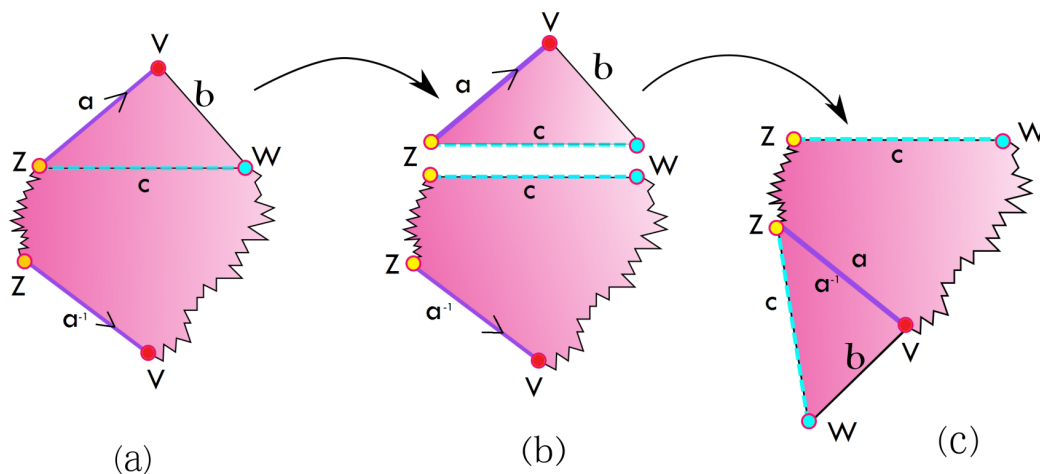


Figura 1.13.

Paso 3: Obtener un polígono que tenga $4k$ aristas de forma que cada cuarteto haya dos pares de aristas que se tengan que identificar y que además, cada dos aristas inversas no sean

adyacentes, es decir, dichas aristas constituyen una palabra de la forma $cdc^{-1}d^{-1}$ (Figura 1.14 (a)). Para efectuar el paso 3, hagamos primero la siguiente observación: Sean a y a^{-1} un par de aristas que se tienen que identificar, llamemos V, W a los vértices de a , y R, S a los de a^{-1} . Dado que dichas aristas no son adyacentes (pues ya las habríamos eliminado), existen dos conjuntos de aristas \mathcal{F} y \mathcal{G} que las separan (Figura 1.14 (b)). Afirmamos que existe otro par de aristas b y b^{-1} que se tienen que identificar, de forma que $b \in \mathcal{F}$ y $b^{-1} \in \mathcal{G}$. Para demostrar esta afirmación supongamos por el contrario que en el conjunto \mathcal{F} no hay aristas que se tengan que identificar con aristas del conjunto \mathcal{G} . Tenemos entonces dos clases de vértices, a saber, la clase de V y la clase de W , pero esto no es posible por que ya hemos efectuado el paso 2.

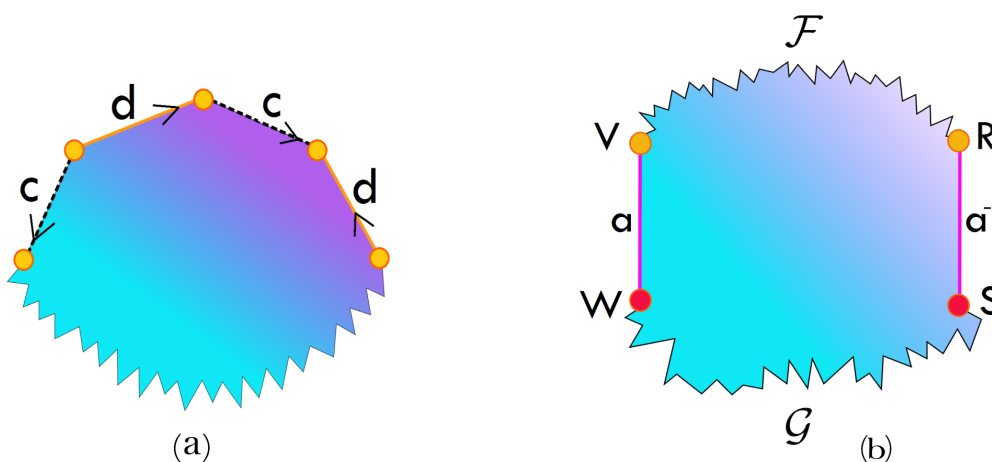


Figura 1.14.

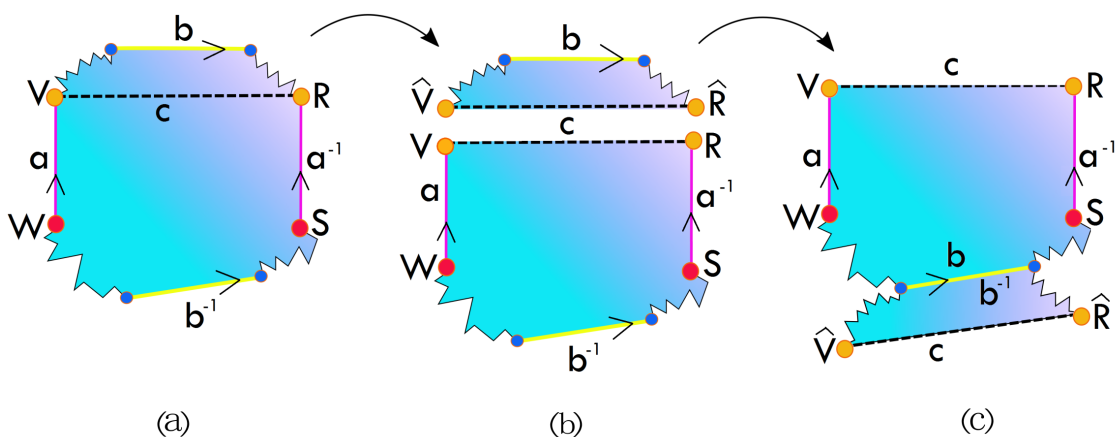


Figura 1.15.

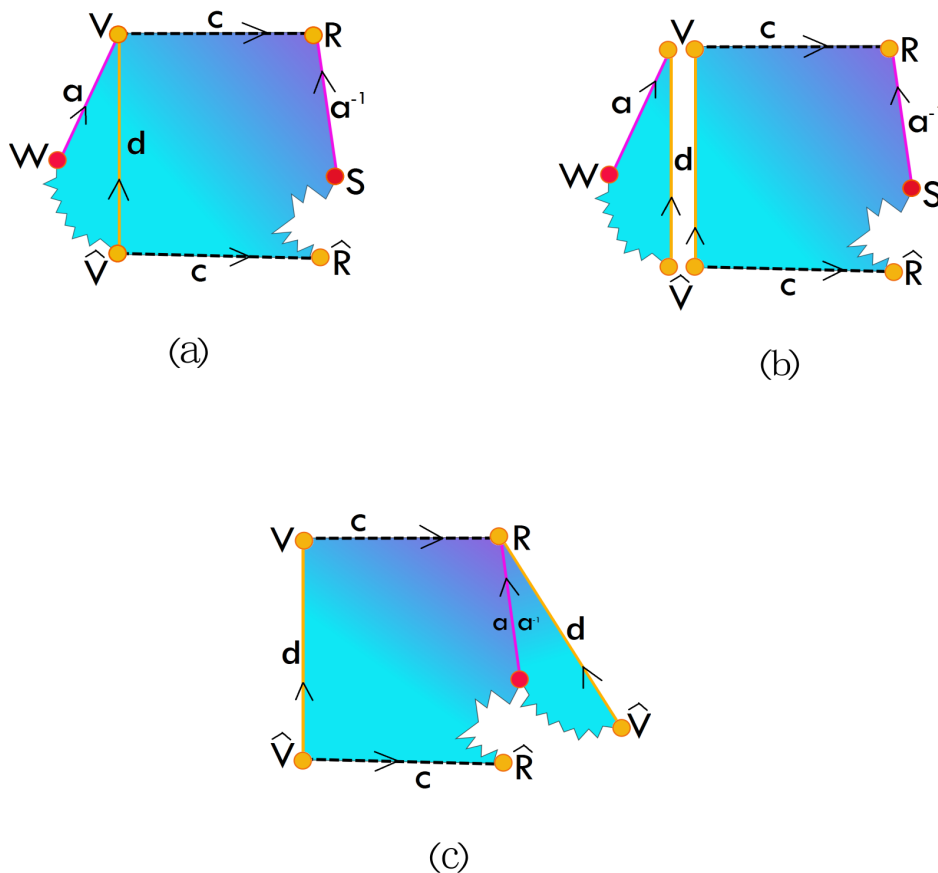


Figura 1.16.

Sea c la línea entre V y R (Figura 1.15 (a)). Cortamos a P a lo largo de C (Figura 1.15 (b)) e identificamos las aristas b y b^{-1} . (Figura 1.15 (c)). Llamemos ahora d a la línea que une a los vértices V y \hat{V} (Figura 1.16 (a)). Cortamos a lo largo de la arista d (Figura 1.16 (b)) e identificamos las aristas a y a^{-1} (Figura 1.16 (c)). Obtenemos así un conjunto de 4 aristas con las características deseadas. Lo que sigue es verificar si se puede efectuar el paso 1 para eliminar las aristas adyacentes que hayan surgido. Luego volvemos a hacer el paso 3 con las aristas restantes. De esta forma, obtenemos el polígono con $4k$ aristas que se identifican por pares.

□

Si en el teorema anterior tomamos $k = 1$, obtenemos un 1-toro (Figura 1.17). Al polígono de $4k$ lados de la demostración anterior se le conoce como forma normal de X y se representa como una palabra de la siguiente forma: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$. Cuando trabajamos con un polígono de $4k$ lados, obtenemos un k -toro. Intuitivamente podemos pensar a

un k -toro como una esfera a la que le hemos pegado k “asas” de dimensión dos, obteniendo de esta manera los k “hoyos” que caracterizan al k -toro (Figura 1.18). Esta idea de “hoyos” se formaliza al introducir el género de una superficie, para lo cual necesitamos hablar de los grupos de homología.

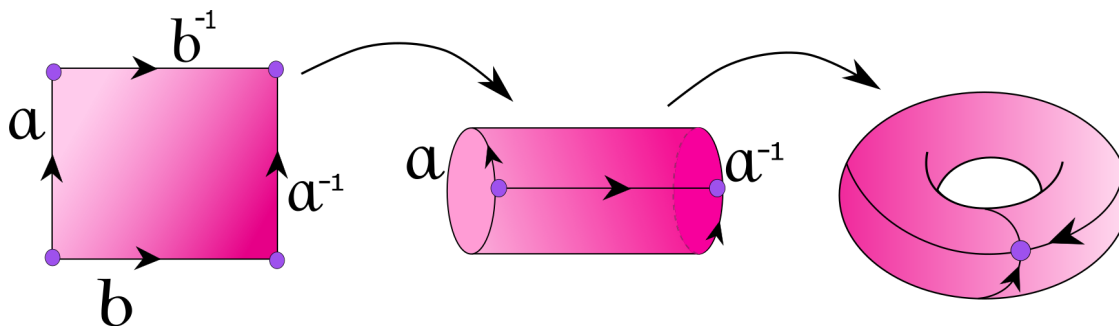


Figura 1.17.

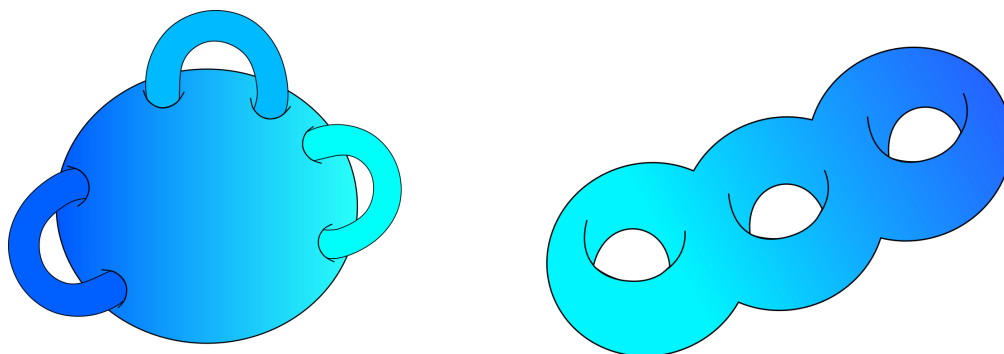


Figura 1.18.

Definición 1.11. Sea $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ un conjunto de $m + 1$ puntos en \mathbb{R}^n tales que los vectores $p_1 - p_0, p_2 - p_1, \dots, p_m - p_0$ son linealmente independientes. El m -simplejo determinado por $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ es el conjunto

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Recordemos que en \mathbb{R}^n un conjunto de vectores linealmente independiente a lo mas puede tener n vectores, por tal motivo en dicho espacio sólo podemos tener 0-simplejos, 1-simplejos, \dots , y n -simplejos. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 un punto es un 0-simplejo, un segmento de recta es un 1-simplejo, un triángulo es un 2-simplejo y un tetraedro (relleno) es un 3-simplejo (Figura

1.19) y ya no hay 4-simplejos, pues para ello necesitaríamos cuatro vectores linealmente independientes.

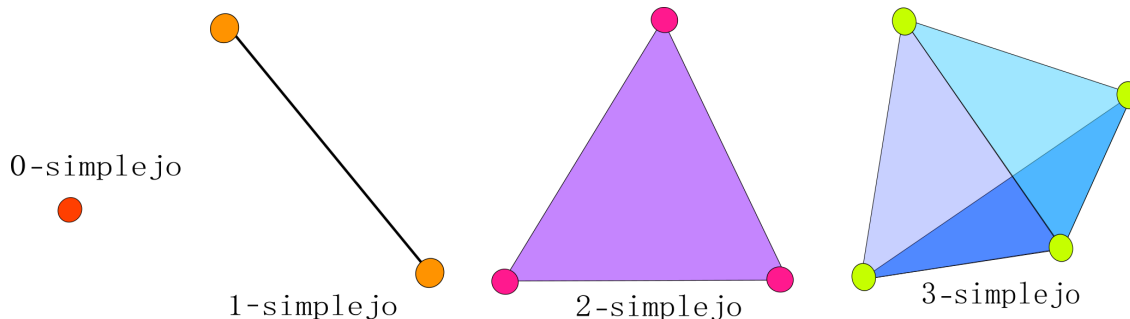


Figura 1.19.

Denotaremos por $s = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ al m -simplejo generado por los puntos p_0, p_1, \dots, p_n . El grupo de las m -cadenas en \mathbb{R}^n es el grupo abeliano libre generado por los m -simplejos $C_m(\mathbb{R}^n) = \{ \sum_{i=1}^k s_i a_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, s_i \text{ es un } m\text{-simplejo} \}$. La frontera de un m -simplejo $s = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ se define como $\partial(s) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m \rangle$ donde $\langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m \rangle$ es el $(m - 1)$ -simplejo generado por los puntos $p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m$. Por ejemplo, si $s = \langle p_0, p_1, p_2 \rangle$ es un 2-simplejo en \mathbb{R}^2 , su frontera es $\partial(s) = \partial(\langle p_0, p_1, p_2 \rangle) = \langle p_1, p_2 \rangle - \langle p_0, p_2 \rangle + \langle p_0, p_1 \rangle$ (Figura 1.20). Definimos el operador frontera $\partial : C_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ como $\partial(\sum_{i=1}^k s_i a_i) = \sum_{i=1}^k \partial(s_i) a_i$.

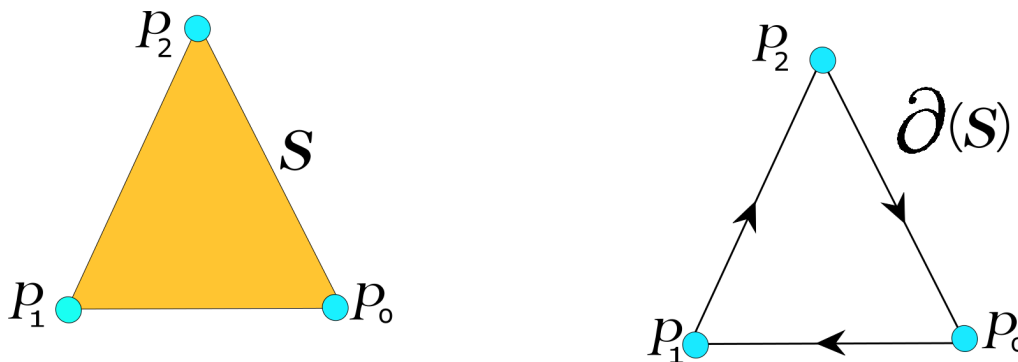


Figura 1.20.

Consideremos ahora una superficie de Riemann X . Un m -simplejo en X es la imagen bajo un homeomorfismo de un m -simplejo en \mathbb{R}^2 . Por ejemplo, si Δ es una triangulación de X , cada triángulo t en Δ está definido por un homeomorfismo $f : T \rightarrow t$ donde T

es un triángulo (un 2-simplejo) en \mathbb{R}^2 , por ello, t es un 2 simplejo en X . La imagen bajo ese mismo homeomorfismo de las aristas y vértices de T son 1-simplejos y 0-simplejos en X , respectivamente. El grupo de las m -cadenas en X es el grupo abeliano libre sobre los m -simplejos en X ($m = 1, 2, 3$)

$$C_0(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k z_i s_i : z_i \in \mathbb{Z} \text{ y } s_i \text{ es un 0-simplejo en } X \right\}$$

$$C_1(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k z_i s_i : z_i \in \mathbb{Z} \text{ y } s_i \text{ es un 1-simplejo en } X \right\}$$

$$C_2(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k z_i s_i : z_i \in \mathbb{Z} \text{ y } s_i \text{ es un 2-simplejo en } X \right\}$$

Si s es un m -simplejo en X , entonces existe un homeomorfismo φ entre s y un m -simplejo \hat{s} en \mathbb{R}^2 . Definimos la *frontera* de s como $\partial(s) = \varphi(\partial(\hat{s}))$. Podemos ahora definir el *operador frontera* $\partial : C_m(X) \rightarrow C_{m-1}(X)$ como

$$\partial \left(\sum_{i=1}^k s_i a_i \right) = \sum_{i=1}^k \partial(s_i) a_i.$$

Denotamos a la imagen de este homomorfismo como B_{m-1} , este conjunto consta de las $(m-1)$ -cadenas que son frontera de alguna m -cadena. Al núcleo lo denotaremos como Z_m y consta de las m -cadenas tales que su frontera es cero. A estas m -cadenas las llamaremos *ciclos*. La composición de el operador frontera con sigo mismo es el operador cero, $\partial \circ \partial \equiv 0$, por tanto toda frontera es un ciclo.

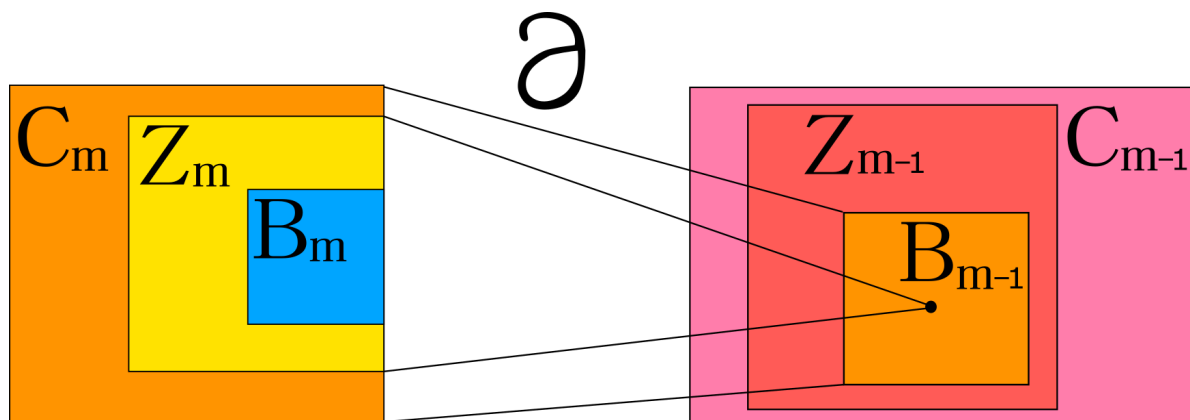


Figura 1.21.

Definición 1.12. El cociente $\frac{Z_m(X)}{B_m(X)}$ es el m -ésimo grupo de homología de X y lo denotamos por $H_m(X)$. El rango de $H_i(X)$ se denota por b_i y es llamado el i -ésimo número de Betti. El

número $g = b_1/2$ es llamado el *género topológico* de X y la *característica de Euler* de X se define como $\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2$.

Recordemos que un elemento g en un grupo G es un conmutador si $g = fhf^{-1}h^{-1}$ con $f, h \in G$ y el subgrupo conmutador de G (también llamado el subgrupo derivado de G) es el grupo generado por todos los conmutadores de G , a dicho subgrupo lo denotamos por $[G, G]$. Como consecuencia de esta definición, si G es abeliano, entonces para cualquier par de elementos f y h en G se tiene que $e_G = fhf^{-1}h^{-1}$, donde e_G es el elemento neutro de G , y entonces $[G, G] = \{e_G\}$. Un resultado muy útil¹ es que

$$H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

a $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ se le conoce como la abelianización de $\pi_1(X)$. Por otro lado, si $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$ es la forma normal de una superficie de Riemann, entonces $\pi_1(X)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^{2k} (la demostración de este hecho se puede consultar en [8], página 99) de donde obtenemos que el rango de $\pi_1(X)$ es $2k$, además de que al ser este un grupo abeliano, $[\pi_1(X), \pi_1(X)] = e$. Podemos entonces concluir que

$$H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] \cong \pi_1(X)/e = \pi_1(X).$$

Así, el rango de $H_1(X)$ es $2k$ y por ello, el genero topológico de X es $g = 2k/2 = k$, pero de acuerdo a la proposición 1.10, k es el número de “hoyos” que tiene la superficie X . Tenemos de este modo, una interpretación geométrica del género topológico de una superficie de Riemann compacta y orientable. Nuestro propósito ahora es dar una relación entre la característica de Euler y el género de una superficie de Riemann.

Proposición 1.13. *Sea X una superficie de Riemann compacta y conexa. Entonces $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ y $\chi(X) = 2 - 2g$.*

Demostración. Demostraremos primero la siguiente afirmación: si p es un vértice fijo de la triangulación, entonces cualquier otro vértice q se escribe como $q = p + \partial C$, donde C es una 1-cadena que une a p con q . En efecto: sea t_p un triángulo que contiene a p y t_q un triángulo que contiene a q . Como X es conexo, existe una trayectoria γ cuyos extremos son p y q , al ser γ un subconjunto compacto, interseca sólo a un conjunto finito de triángulos, llamemos Q a ese conjunto. Enumeramos dichos triángulos de forma que dos triángulos consecutivos sean adyacentes, dicha enumeración existe ya que si existiera un triángulo en Q que no es adyacente a ningún otro triángulo de Q , entonces γ no sería conexa (Figura 1.22). Ahora podemos dar una 1-cadena $C = \sum_{i=1}^m s_i$ que une a p con q , donde cada $s_i = \langle p_{i-1}, p_i \rangle$ es una arista perteneciente a algún triángulo de Q y que además cumple que s_i es adyacente a s_{i+1} , con $i = 1, \dots, m-1$. La frontera de C es entonces $\partial C = p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + \cdots + p_2 - p_1 + p_1 - p_0 = p_m - p_0$. Pero como C une a p con q , tenemos que $p_m = q$ y $p_0 = p$, entonces $\partial C = q - p_0$, de donde $q = \partial C + p$, lo cual demuestra la afirmación.

¹[4], página 130.

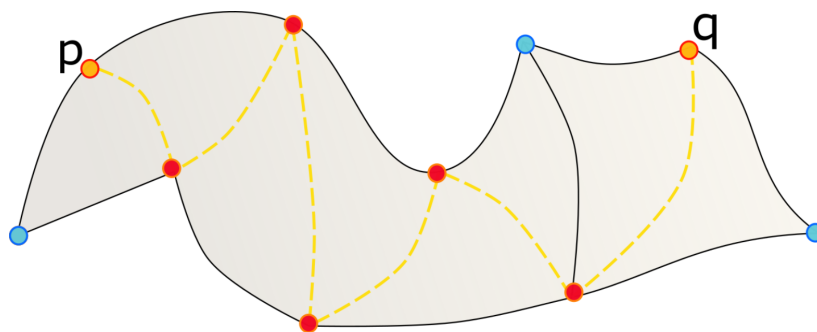


Figura 1.22.

Para demostrar que $b_0 = 1$ recordemos que B_0 consta de las 0-cadenas, es decir, de las combinaciones con coeficientes enteros de vértices que son frontera de alguna 1-cadena, y como $C_0/B_0 = \{a + B_0 : a \in C_0\}$ la clase de p es $p + B_0 = \{p + \partial C : C \in C_1(X)\}$. Por la afirmación anterior, cualquier punto $q \in C_0$ es de la forma $p + \partial C$ con $C \in C_1$, lo cual quiere decir que todos los vértices de la triangulación pertenecen a la clase de p , entonces $C_0/B_0 = \{p + B_0\}$, por lo que el rango de C_0/B_0 es 1. Ya que la frontera de cualquier 0-cadena es cero, tenemos que $C_0 = Z_0$ y esto implica que $H_0 = Z_0/B_0 = C_0/B_0$. Por lo tanto $b_0 = 1$.

Demostremos ahora que $b_2 = 1$, para ello verifiquemos primero que si $C = \sum_{i=1}^k z_i t_i$ es una 2-cadena perteneciente a $Z_2(X)$, entonces $z_i = z_j$ si t_i y t_j tienen una arista en común. En efecto, al ser X una superficie orientable, tenemos que la arista que comparten t_i y t_j es recorrida en un sentido al ser considerada como elemento de t_i y es recorrida en el sentido opuesto al ser considerada como elemento de t_j , por lo que dicha arista en ∂C aparece con coeficiente $z_i - z_j$, pero al pertenecer C a Z_2 , se tiene que $\partial C = 0$, y la única forma de que esto suceda es que cada coeficiente de los 1-simplejos (las aristas) que aparecen en ∂C sea cero, entonces $z_i - z_j = 0$, de donde concluimos que $z_i = z_j$.

Observación: si un triángulo t pertenece a una 2-cadena cuya frontera es cero, entonces cada una de sus aristas pertenece también a otro triángulo de la cadena, de lo contrario a la hora de sacar su frontera, no se podrían cancelar todas las aristas y su frontera no sería cero. Esto implica que si p es un vértice en la 2-cadena, cada triángulo al que pertenezca p , aparece como sumando en la 2-cadena.

Veamos ahora que el rango de Z_2 es 1: ya que X es compacta, la suma de todos los 2-simplejos es una 2-cadena de frontera cero, por lo que Z_2 tiene rango al menos uno; ahora bien, si suponemos que existen al menos dos 2-cadenas en la base de Z_2 , entonces éstas no pueden tener triángulos, aristas ni vértices en común (por la observación anterior, entonces concluimos que X tiene al menos dos componentes conexas, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis X es un espacio conexo. Por lo tanto el rango de $Z_2 = 1$.

Finalmente, como $C_3 = \{0\}$, la imagen B_2 del operador frontera $\partial C_3 \rightarrow C_2$ es cero. Entonces $H_2 = Z_2/B_2 = Z_2$, pero ya vimos que la dimensión de z_2 es 1. Por lo tanto $b_2 = 1$. Para obtener la fórmula de la característica de Euler que estamos buscando, recordemos que $g = b_1/2$, entonces $b_1 = 2g$. Además $\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2$, así que sustituyendo los valores que hemos calculado, tenemos que $\chi(X) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$. \square

Concluimos este capítulo con una forma alternativa de calcular la característica de Euler de una superficie.

Proposición 1.14. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Si X tiene una triangulación con V vértices, A aristas y C caras, entonces $\chi(X) = C - A + V$.*

Demostración. Sea $rg(Z_n)$ el rango de Z_n . Sabemos por el primer teorema de isomorfismos que $B_n = C_{n+1}/Z_{n+1}$, entonces $rg(B_n) = rg(C_{n+1}) - rg(Z_{n+1})$ y por definición, $H_n = Z_n/B_n$, por lo que $rg(H_n) = rg(Z_n) - rg(B_n)$. Tenemos entonces que

$$b_n = rg(H_n) = rg(Z_n) - rg(B_n) = rg(Z_n) - rg(C_{n+1}) + rg(Z_{n+1}) \quad (1.1)$$

Por otro lado, los n -simplejos forman una base de C_n (ya que por definición, C_n es el grupo abeliano libre sobre los n -simplejos) entonces el rango de C_n es el número de n -simplejos. Ya que los 2-simplejos, 1-simplejos y 0-simplejos en X son los triángulos, aristas y vértices respectivamente, entonces $rg(C_3) = 0$, $rg(C_2) = C$, $rg(C_1) = A$ y $rg(C_0) = V$, por lo que de la ecuación 1.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} b_2 &= rg(Z_2) - rg(C_3) + rg(Z_3) = rg(Z_2) + rg(Z_3) = rg(Z_2) \\ b_1 &= rg(Z_1) - rg(C_2) + rg(Z_2) = rg(Z_1) - C + rg(Z_2) \quad \text{y} \\ b_0 &= rg(Z_0) - rg(C_1) + rg(Z_1) = rg(Z_0) - A + rg(Z_1). \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo estos valores en la característica de Euler de X , $\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2 = rg(Z_0) - A + rg(Z_1) - rg(Z_1) + C - rg(Z_2) + rg(Z_2) = rg(Z_0) - A + C$, pero hemos observado antes que $C_0 = Z_0$, entonces $rg(Z_0) = rg(C_0) = V$. De este modo concluimos que $\chi(X) = V - A + C$. \square

Foliaciones

En esta sección planteamos el problema que dio origen al nombre de la tesis, asociarle a una ecuación diferencial con parámetro complejo una familia de superficies de Riemann, que resultarán ser las soluciones de la ecuación. Para ponernos en contexto, necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.15. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{C}^2 . Un *campo vectorial holomorfo* en U es una transformación $F : U \rightarrow \mathbb{C}^2$, $F(\mathbf{z}) = (F_1(\mathbf{z}), F_2(\mathbf{z}))$, donde $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas. La *ecuación diferencial* holomorfa en U definida por F es un sistema de ecuaciones

$$\frac{dz_1}{dt} = F_1(\mathbf{z}), \quad \frac{dz_2}{dt} = F_2(\mathbf{z}), \quad \text{donde } \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2. \quad (1.2)$$

Si $\mathbf{z}_0 \in U$, la *solución* a la ecuación diferencial (1.2) que pasa por el punto \mathbf{z}_0 en el tiempo t_0 es una curva $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, con φ_1 y φ_2 holomorfas definidas en una vecindad V del punto t_0 , que cumple las siguientes condiciones:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = F_1(\varphi), \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = F_2(\varphi), \quad \text{y} \quad \varphi(t_0) = \mathbf{z}_0.$$

Denotaremos a la ecuación diferencial (1.2) como $\dot{\mathbf{z}} = F$. La imagen de la función φ es llamada *curva integral* de la ecuación (1.2). Un *punto singular* de (1.2) es un punto $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in U$ tal que $F(\mathbf{z}) = (0, 0)$. En este caso la función $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow U$ definida como $\varphi(t) = (z_1, z_2)$ es una solución pues $\dot{\varphi} = 0 = F(\varphi(t))$ para todo $t \in \mathbb{C}$.

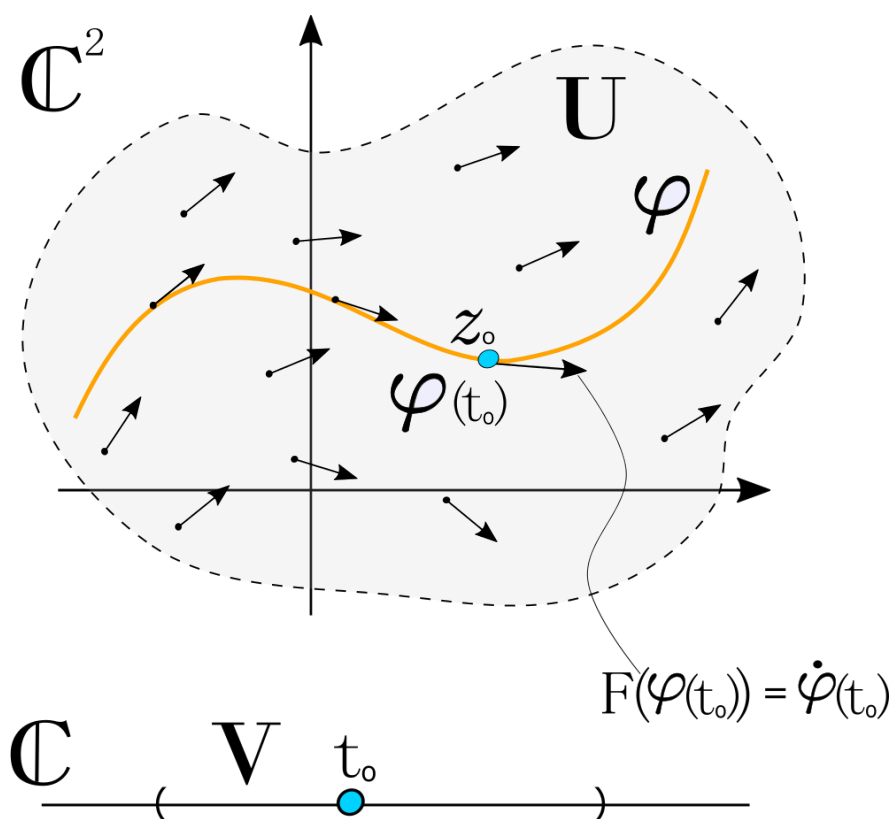


Figura 1.23.

El conjunto de curvas integrales de una ecuación diferencial forma una partición del espacio en donde está definida la ecuación. Al conjunto \mathcal{F} de estas curvas integrales lo llamamos *foliación* asociada a la ecuación diferencial y a cada curva la llamamos una *hoja* de la foliación (Figura 1.24). El objetivo ahora es analizar las foliaciones definidas por una clase de ecuaciones llamadas hamiltonianas (que definimos a continuación) pues las soluciones de estas ecuaciones son la motivación para estudiar las superficies de Riemann compactas.

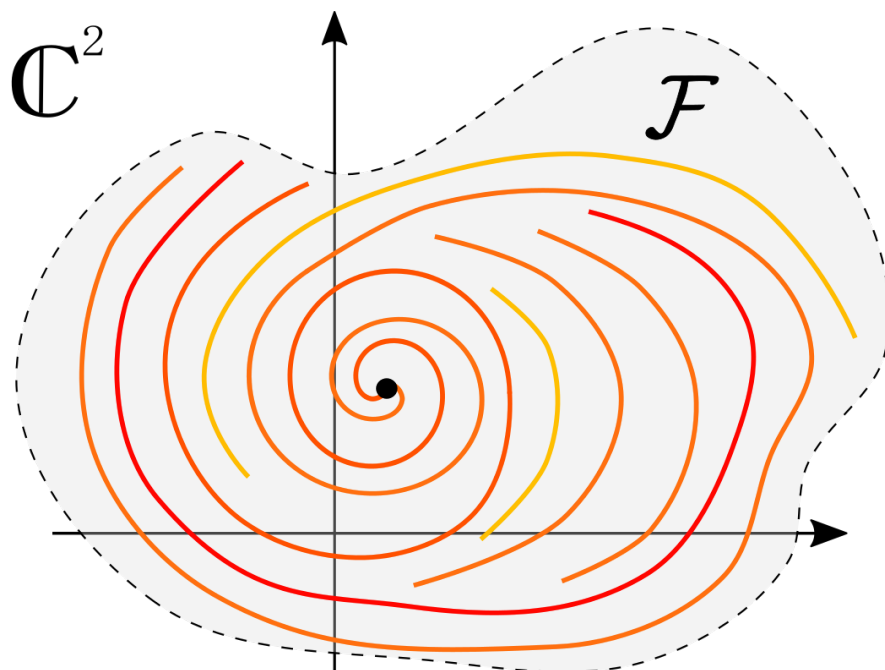


Figura 1.24.

Definición 1.16. Sea $\dot{z} = F$ una ecuación diferencial holomorfa definida en un abierto U de \mathbb{C}^2 por un campo vectorial holomorfo $F = (F_1, F_2)$. Decimos que esta ecuación es *hamiltoniana* si existe una función $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{C}^2(U)$ tal que

$$F_1 = \frac{\partial H}{\partial z_2} \quad \text{y} \quad F_2 = -\frac{\partial H}{\partial z_1}$$

A la función H se le conoce como *primera integral* de la ecuación diferencial.

Proposición 1.17. Si $\dot{z} = F$ es una ecuación hamiltoniana, sus soluciones parametrizan localmente a las curvas de nivel de H .

Demostración. Sea $C_k = \{z \in U : H(z) = k\}$ la curva de nivel k de H , $p \in C_k$ y $\varphi : V \rightarrow U$ la solución que pasa por p en el tiempo t_0 . Veamos que φ parametriza a C_k en una vecindad de p , y para hacerlo demostraremos primero que H es constante a lo largo de φ , esto último es equivalente a demostrar que

$$\frac{d(H \circ \varphi)}{dt}$$

es la función cero, pues esto implica que $H \circ \varphi$ es constante. Sea pues $s \in V$.

$$\begin{aligned} \frac{d(H \circ \varphi)}{dt}(s) &= \frac{dH}{dt} \Big|_{\varphi(s)} \cdot \frac{d\varphi}{dt}(s) = \frac{\partial H}{\partial z_1} \Big|_{\varphi(s)} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}(s) + \frac{\partial H}{\partial z_2} \Big|_{\varphi(s)} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt}(s) \\ &= \frac{\partial H}{\partial z_1} \Big|_{\varphi(s)} \cdot \frac{\partial H}{\partial z_2} \Big|_{\varphi(s)} - \frac{\partial H}{\partial z_2} \Big|_{\varphi(s)} \cdot \frac{\partial H}{\partial z_1} \Big|_{\varphi(s)} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

la última igualdad es porque al ser la ecuación hamiltoniana se tiene que

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(s) = \frac{\partial H}{\partial z_2} \Big|_{\varphi(s)} \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi_2}{dt}(s) = -\frac{\partial H}{\partial z_1} \Big|_{\varphi(s)}.$$

Ya sabemos que H es constante a lo largo de φ y para saber cuál es esa constante evaluamos H en un punto de la curva, por ejemplo en p , pero p está en la curva de nivel k de H , así que $H(p) = k$. Hemos demostrado entonces que φ está contenida en la curva de nivel k de H , por lo tanto es una parametrización local de dicha curva alrededor del punto p . \square

La proposición 1.17 nos da una manera de organizar las soluciones de una ecuación diferencial hamiltoniana, a saber, agrupandolas de acuerdo a la curva de nivel en la que están contenidas, y esto es posible ya que la ecuación (1.3) nos dice que cada solución está contenida en una curva de nivel. Mas aún, cada curva de nivel de H puede ser cubierta por un conjunto de soluciones. Lo que hemos notado entonces es que las hojas de la foliación son las mismas (como conjunto de \mathbb{C}^2) que las curvas de nivel de H . Ahora fijaremos nuestra atención en el caso cuando H está dada por un polinomio y vamos a demostrar que cada curva de nivel es una superficie de Riemann compacta menos un número finito de puntos.

Ecuaciones diferenciales hamiltonianas polinomiales

Una ecuación diferencial hamiltoniana $\dot{\mathbf{z}} = F$ es *polinomial* si su primera integral es un polinomio $H(z, w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z)$. En este caso la curva de nivel k de H es el conjunto $C_k = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) - k = 0\}$ es decir, los ceros del polinomio $P(z, w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) - k$. Para ver que esta curva es una superficie de Riemann necesitamos analizar una clase de funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen que su gráfica está contenida en el conjunto de ceros de P . Definimos tales funciones a continuación.

Definición 1.18. Una *función algebraica* es una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface la igualdad $P(z, f(z)) = 0$ donde $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio

$$P(z, w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z)$$

y cada coeficiente $a_k(z)$ es un polinomio en z con coeficientes en \mathbb{C} .

Ejemplo 1.19. Consideremos a la función $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ y el polinomio $P(z, w) = w^3 - z$. La función f es algebraica ya que

$$P(z, f(z)) = f(z)^3 - z = (z^{\frac{1}{3}})^3 - z = z - z = 0.$$

Recordemos que si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z^b := e^{b \log(z)}$. En nuestro caso $z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \log(z)}$, esto quiere decir que f es la composición de las funciones $z \mapsto \log(z)$, $z \mapsto \frac{1}{3}z$ y $z \mapsto e^z$, pero sabemos que el valor del logaritmo depende de la rama que se elija, por lo tanto existe una ambigüedad con los valores que toma la función. Esto motiva el capítulo 3, dedicado a la continuación analítica, pero antes necesitamos definir los mapeos entre superficies de Riemann y analizar algunas de sus propiedades, lo cual haremos en el capítulo 2.

Capítulo 2

Funciones y mapeos

Definición 2.1. Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es *holomorfa* ó que tiene una *singularidad removible* ó un *polo* ó una *singularidad esencial* en p si existe una carta (U, z) en p tal que la composición $f \circ z^{-1}$ es holomorfa ó tiene una singularidad removible ó un polo ó una singularidad esencial en $z(p)$, respectivamente (Figura 2.1). En cualquiera de estos casos, f es una función *meromorfa* en p . Diremos que f es meromorfa en X si es meromorfa en cada uno de sus puntos.

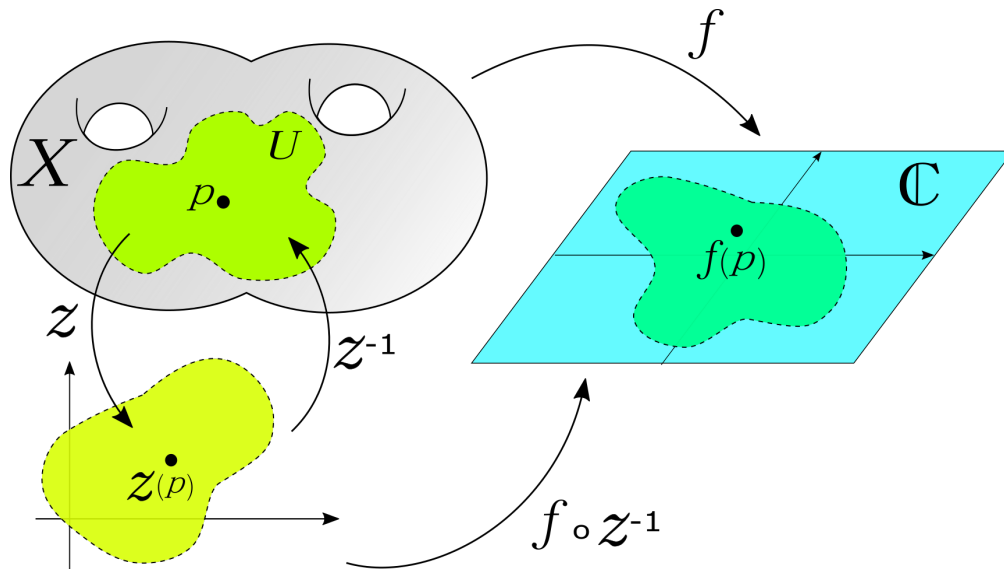


Figura 2.1.

Examinando el comportamiento de f en una vecindad de p podemos saber qué tipo de singularidad tiene esta función en dicho punto:

1. Si $|f(x)|$ es acotada en una vecindad de p , entonces f tiene una singularidad removible en p . Además, en este caso el límite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe y si definimos $f(p)$ como este límite, entonces f es holomorfa en p .

2. Si $|f(x)|$ se aproxima a ∞ cuando x se aproxima a p , entonces f tiene un polo en p .
3. Si $|f(x)|$ no tiene límite cuando x se aproxima a p , entonces f tiene una singularidad esencial en p .

Si f es holomorfa en $X \setminus \{p\}$, entonces podemos expresar a la función $\tilde{f} = f \circ z^{-1}$ como una serie que converge en una vecindad agujerada de $z_p = z(p)$

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_p)^n \quad (2.1)$$

y es llamada *la serie de Laurent de f alrededor del punto p en la coordenada z* . El *orden de f en p* (en la coordenada z) denotado por $Ord_p(f)$, es el mínimo exponente n_0 tal que el coeficiente a_{n_0} es diferente de cero.

Lema 2.2. *La definición de orden en un punto p no depende de la carta que se elija.*

Demostración. Supongamos que (U, z) y (V, w) son dos cartas tales que $p \in U \cap V$. Sea $z_0 = z(p)$ y $w_0 = w(p)$. Sabemos que la función de transición $T = w \circ z^{-1} : z(U \cap V) \rightarrow w(U \cap V)$ es analítica, mas aún tiene derivada diferente de cero; en efecto, si $S = z \circ w^{-1}$, para cualquier punto $z \in z(U \cap V)$ tenemos que, $S(T(z)) = z$. Luego $S'(T(z)) \cdot T'(z) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, en una vecindad de z_0 tiene una expresión de la forma

$$w = T(z) = w_0 + a_1(z - z_0) + \phi(z) \quad (2.2)$$

donde $w_0 = T(z_0)$, $a_1 = T'(z_0) \neq 0$ y $\phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Supongamos que la serie de f alrededor de p en la coordenada w es

$$(f \circ w^{-1})(w) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n \quad (2.3)$$

La serie de f alrededor de p en la coordenada z es la composición

$$(f \circ w^{-1})(T(z)) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (T(z) - w_0)^n = a_{n_0} (T(z) - w_0)^{n_0} + \psi(z) \quad (2.4)$$

donde $\psi(z) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (T(z) - w_0)^n$. Luego, sustituyendo 2.2 en 2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} (f \circ w^{-1})(T(z)) &= a_{n_0} [(w_0 + a_1(z - z_0) + \phi(z)) - w_0]^{n_0} + \psi(z) \\ &= a_{n_0} [a_1(z - z_0) + \phi(z)]^{n_0} + \psi(z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

y el término con exponente mas pequeño de 2.5 es $a_{n_0} (a_1)^{n_0} (z - z_0)^{n_0}$. Por lo tanto el orden de f en el punto p en la coordenada z es n_0 . De este modo, concluimos que el orden es independiente de la carta que se elija. \square

Observación 2.3. El orden de una función f en un punto p nos permite saber la naturaleza de la singularidad que f tenga en p examinando su serie en este punto:

- (1) $Ord_p(f) = n_0 < 0$ si y sólo si f tiene un polo de orden $-n_0$ en p .
- (2) $Ord_p(f) = n_0 > 0$ si y sólo si $f(p) = 0$ pues $f(p) = (f \circ z^{-1})(z(p)) = (f \circ z^{-1})(z_0) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. En este caso, f es holomorfa en p y tiene en este punto un cero de orden n_0 .
- (3) $Ord_p(f) = 0$ si y sólo si f es holomorfa en p y $f(p) \neq 0$.

Notemos que el orden de f es diferente de cero sólo en su conjunto de ceros y polos.

La siguiente proposición establece una relación entre el orden de dos funciones y el orden de las funciones que podemos obtener al operarlas (sumarlas, multiplicarlas, dividir las).

Proposición 2.4. Sea X una superficie de Riemann, $f, g \in \mathcal{M}(X)$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ y p un punto arbitrario en X .

1. $Ord_p(f.g) = Ord_p(f) + Ord_p(g)$
2. $Ord_p(1/g) = -Ord_p(g)$
3. $Ord_p(f/g) = Ord_p(f) - Ord_p(g)$
4. $Ord_p(f + g) \geq \min \{Ord_p(f), Ord_p(g)\}$

Demostración. Sea (U, z) una carta en X tal que $p \in U$. Por simplicidad en la notación, asumiremos que $z(p) = 0$. Supongamos que $Ord_p(f) = n_0$ y $Ord_p(g) = m_0$. Entonces las series de f y g alrededor del punto p en la coordenada z son $a_{n_0}z^{n_0} + \varphi(z)$ y $b_{m_0}z^{m_0} + \psi(z)$ respectivamente, donde $\varphi(z) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n$ y $\psi(z) = \sum_{m=m_0+1}^{\infty} b_m z^m$.

1. La serie de $f.g$ alrededor de p es $(f.g)(z) = a_{n_0}b_{m_0}z^{n_0+m_0} + a_{n_0}z^{n_0}.\psi(z) + \varphi(z).(b_{m_0}z^{m_0} + \psi(z))$, por lo tanto $Ord_p(f.g) = n_0 + m_0 = Ord_p(f) + Ord_p(g)$.
2. Supongamos que la serie de $1/g$ es $c_{k_0}z^{k_0} + \Phi(z)$ con $\Phi(z) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_k z^k$. Luego, $g(z).(1/g(z)) = [b_{m_0}z^{m_0} + \psi(z)].[c_{k_0}z^{k_0} + \Phi(z)] = b_{m_0}c_{k_0}z^{m_0+k_0} + \dots = 1$ entonces $c_{k_0} = 1/b_{m_0}$ y $m_0 + k_0 = 0$, esto implica que $k_0 = -m_0$. Por lo tanto $Ord_p(1/g) = -Ord_p(g)$.
3. Utilizando las propiedades anteriores tenemos que $Ord_p(f/g) = Ord_p(f \cdot \frac{1}{g}) = Ord_p(f) + Ord_p(\frac{1}{g}) = Ord_p(f) - Ord_p(g)$.
4. La serie de $f + g$ es $(f + g)(z) = a_{n_0}z^{n_0} + b_{m_0}z^{m_0} + \varphi(z) + \psi(z)$. Notemos ahora que los términos de $\varphi(z)$ son de grado mayor que $Ord_p(f)$ y los términos de $\psi(z)$ son de grado mayor que $Ord_p(g)$, por ello tenemos lo siguiente: si $m_0 \neq n_0$ entonces $Ord_p(f + g) = \min \{Ord_p(f), Ord_p(g)\}$; si $m_0 = n_0$ y $a_{n_0} \neq -b_{m_0}$, entonces $Ord_p(f + g) = m_0 = n_0$ y finalmente, la desigualdad se da si y sólo si $m_0 = n_0$ y $a_{n_0} = -b_{m_0}$.

□

Los teoremas que a continuación demostramos son una generalización de los correspondientes para funciones definidas en \mathbb{C} y serán utilizados posteriormente. El primero de ellos es de gran utilidad por que nos da condiciones bajo las cuales dos funciones definidas en una superficie son iguales.

Teorema 2.5 (de la identidad). *Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas definidas en una región ¹ R de una superficie de Riemann X . Si f coincide con g en un conjunto infinito que tiene un punto de acumulación en R , entonces $f = g$ en R .*

Demostración. Sea G el conjunto de puntos en R que tienen una vecindad abierta $W \subset R$ en la cual f y g coinciden. Vamos a demostrar que G es abierto, cerrado y no vacío, luego utilizaremos la conexidad de R para concluir que $G = R$, de donde se seguirá el resultado que queremos. Por definición, G es un conjunto abierto en R . Para ver que es cerrado, demostraremos que contiene a todos sus puntos de acumulación. Sea pues b un punto de acumulación de G en R , entonces existe una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en G que converge a b . Al pertenecer cada x_n a G , se tiene que $f(x_n) = g(x_n)$. Luego, como f y g son continuas, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(b)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(b)$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$, por lo tanto $g(b) = f(b)$.

Ahora tomemos una carta (U, z) en b y otra (V, w) en $f(b) = g(b)$ y supongamos que $f(U)$ y $g(U)$ están contenidas en V . Como b es un punto de acumulación de G y U es un abierto que tiene a b , entonces $U \cap G \neq \emptyset$. Sea y un punto en esa intersección. Como $y \in G$, existe una vecindad abierta $W \subseteq R$ de y en donde f y g son iguales, y entonces en $U \cap W$ también coinciden. Tenemos de este modo que las funciones $w \circ f \circ z^{-1}$ y $w \circ g \circ z^{-1}$ coinciden en $z(U \cap W)$, así que por el teorema de la identidad (para el caso de funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} , estas funciones coinciden en todo $z(U)$, lo cual quiere decir que f y g coinciden en U . Esto a su vez implica que $b \in G$, pues hemos hallado una vecindad abierta de b (que podemos suponer contenida en R , si no, la intersecamos con este) en la cual f y g son iguales. Por lo tanto G contiene a todos sus puntos de acumulación, por ello es un conjunto cerrado en R .

Por hipótesis existe un conjunto en R en el cual f y g son iguales que tiene un punto de acumulación en R , llamémosle a . Utilizando un argumento análogo, ahora con una carta en a , podemos demostrar que a tiene una vecindad abierta en donde f y g son iguales, lo que implica que $a \in G$. Como G es no vacío, abierto y cerrado en R , y R es conexo, concluimos que $G = R$ y en consecuencia $f = g$ en todo punto de R . □

Teorema 2.6. *Sea f una función meromorfa definida en una región W de una superficie de Riemann X . Si $f \neq 0$, entonces sus ceros y polos forman un subconjunto discreto de W .*

Demostración. Este teorema se sigue de que las funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} tienen esta propiedad. □

¹Una región es un conjunto no vacío, conexo por trayectorias y abierto.

Corolario 2.7. *Sea $f \neq 0$ una función meromorfa definida en una superficie de Riemann compacta. Entonces f tiene un número finito de ceros y polos.*

Una clase muy importante de funciones son las de la forma $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, y su importancia radica en que ellas nos permitirán construir nuevas superficies de Riemann ². Si $a \in \hat{\mathbb{C}}$ y $a \neq \infty$, entonces la definición de que f sea holomorfa o meromorfa en a coincide con la definición usual para funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} , por otro lado, que f sea holomorfa o meromorfa en ∞ significa que la función $f \circ \mathfrak{J}$ tiene la correspondiente propiedad en 0, donde \mathfrak{J} está definida como $\mathfrak{J}(\xi) = 1/\xi$ si $\xi \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{J}(0) = \infty$ y $\mathfrak{J}(\infty) = 0$. La siguiente proposición nos da una caracterización de las funciones meromorfas en la esfera de Riemann.

Proposición 2.8. *Una función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es meromorfa si y sólo si es racional.*

Demostración. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa. Como $\hat{\mathbb{C}}$ es una superficie compacta, tiene un número finito de polos. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los polos de f que pertenecen a \mathbb{C} , es decir, $\lambda_i \neq \infty$ y llamemos k_i al orden de f en λ_i ($i = 1, \dots, n$). Veamos que la función $g(z) = f(z) \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{k_i}$ es analítica en \mathbb{C} y para hacer esto, dado un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, consideremos $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z)$. Primero supongamos que $z_0 = \lambda_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Como λ_i es un polo de orden k_i de f , tenemos que existe el límite $\lim_{z \rightarrow \lambda_i} (z - \lambda_i)^{k_i} f(z)$ y además $\lim_{z \rightarrow \lambda_i} (z - \lambda_i)^{k_i+1} f(z) = 0$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \lambda_i} (z - \lambda_i)g(z) &= (z - \lambda_i)f(z) \prod_{j=1}^n (z - \lambda_j)^{k_j} \\ &= \lim_{z \rightarrow \lambda_i} (z - \lambda_i)f(z)(z - \lambda_i)^{k_i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (z - \lambda_j)^{k_j} \\ &= \lim_{z \rightarrow \lambda_i} (z - \lambda_i)^{k_i+1} f(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (z - \lambda_j)^{k_j} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

y esto quiere decir que λ_i es una singularidad removible de g . Por otro lado, si z_0 no es un polo de f , entonces $f(z_0) \in \mathbb{C}$ y $\prod_{j=1}^n (z_0 - \lambda_j)^{k_j} \in \mathbb{C}$, por lo que existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = f(z_0) \prod_{j=1}^n (z_0 - \lambda_j)^{k_j}$$

y nuevamente, esto significa que z_0 es una singularidad removible de g . Por lo tanto g es analítica en cualquier punto de \mathbb{C} y esto demuestra la afirmación.

Como g es analítica en \mathbb{C} , tiene una expresión como serie de Taylor convergente

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

²De hecho, fué con esta clase de funciones con las que se originó la teoría de superficies de Riemann.

y al ser f una función meromorfa en ∞ y $\prod_{j=1}^n (z - \lambda_j)^{k_j}$ un polinomio, se tiene que g es meromorfa en ∞ , esto quiere decir que la función

$$(g \circ \mathfrak{J})(z) = g(\mathfrak{J}(z)) = g(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (2.7)$$

es meromorfa en el cero, pero esto pasa sólo si la serie (2.7) tiene un número finito de términos, es decir

$$(g \circ \mathfrak{J})(z) = g(\mathfrak{J}(z)) = g(1/z) = \sum_{n=0}^m \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_m}{z^m}$$

para alguna $m \in \mathbb{N}$, por lo tanto g es un polinomio de grado m

$$g(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

entonces

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^n (z - \lambda_j)^{k_j}}$$

es una función racional.

Consideremos ahora una función racional f . Queremos ver que f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, es decir, que en cada punto de \mathbb{C} tiene un polo, o una singularidad removible o es holomorfa y que en infinito pasa lo mismo, es decir, que la función $f \circ \mathfrak{J}$ es holomorfa, o tiene un polo o una singularidad removible en el cero. Escribamos a f como

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

con p y q primos relativos. Si b_1, \dots, b_r son los ceros de q , entonces f es diferenciable en todo punto de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{b_1, \dots, b_r, \infty\}$, pues ahí existe la derivada

$$f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - q'(z)p(z)}{(q(z))^2}.$$

Por lo tanto f es analítica en este conjunto. Por otro lado, en cada b_j , f tiene un polo de orden β_j , así que nos queda analizar el comportamiento de f en el infinito. Supongamos que $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ y $q(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$, entonces

$$f(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0} \quad \text{y} \quad f(1/z) = \frac{a_n \frac{1}{z^n} + \dots + a_1 \frac{1}{z} + a_0}{b_m \frac{1}{z^m} + \dots + b_1 \frac{1}{z} + b_0} = \frac{p(1/z)}{q(1/z)}.$$

Notemos ahora que el orden de $p(1/z)$ es $-n$ y el orden de $q(1/z)$ es $-m$, así que por la proposición (2.4) tenemos que el orden de $f(1/z)$ es $-n - (-m) = m - n$. Por lo tanto, si $0 \leq m - n$, $f \circ \mathfrak{J}$ tiene en el cero un cero de orden $m - n$ y si $m - n \leq 0$, tiene un polo de orden $n - m$. Por lo tanto $f \circ \mathfrak{J}$ es meromorfa en ∞ , y de este modo hemos demostrado que f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$. □

2.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz.

En esta sección vamos a definir y analizar a las transformaciones entre dos superficies de Riemann. El resultado mas importante es el teorema de Riemann-Hurwitz que nos permite, dada una función $f : X \rightarrow Y$ entre dos superficies de Riemann compactas, calcular el género de Y conociendo el de X .

Definición 2.9. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre dos superficies de Riemann es *holomorfa* en un punto p de X si existe un par de cartas (U, z) y (V, w) en X y Y respectivamente, con $p \in U$ y $f(p) \in V$, tal que la composición $\tilde{f} = w \circ f \circ z^{-1} : z(U) \rightarrow w(V)$ es holomorfa (Figura 2.2). En tal caso \tilde{f} se puede expresar como una serie convergente en una vecindad de $z_p = z(p)$

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_p)^n. \quad (2.8)$$

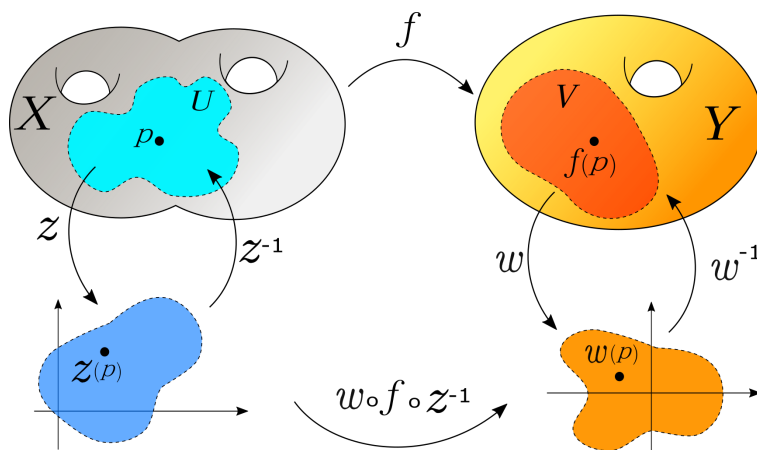


Figura 2.2.

Diremos que (2.8) es la *serie de f alrededor del punto p* en las coordenadas z y w . Si existe la función inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ y es holomorfa, diremos que f es un *biholomorfismo*. Dos superficies son *isomorfas* si existe un biholomorfismo entre ellas. De esta definición se sigue que si (U, z) es una carta en una superficie X , entonces $z : U \rightarrow z(U)$ es un isomorfismo. Recordemos que los coeficientes de la serie (2.8) están definidos como

$$a_0 = \tilde{f}(z_p), \quad a_1 = \frac{\tilde{f}'(z_p)}{1!}, \quad a_2 = \frac{\tilde{f}''(z_p)}{2!}, \quad a_3 = \frac{\tilde{f}'''(z_p)}{3!} \quad \dots \quad a_n = \frac{\tilde{f}^{(n)}(z_p)}{n!} \quad \dots$$

entonces si $a_n \neq 0$ significa que la derivada de orden n de \tilde{f} en el punto z_p es diferente de cero. Si las cartas en (U, z) y (V, w) están centradas, $a_0 = \tilde{f}(0) = 0$ y entonces la serie \tilde{f} empieza en un natural $n_0 \geq 1$, es decir

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_p)^n. \quad (2.9)$$

Al número n_0 en la serie (2.9) se le llama *índice de ramificación*, *grado de ramificación*, o *multiplicidad* de f en el punto p y se le denota por $e_p(f)$. Si $n_0 > 1$ diremos que p es un punto de ramificación de orden $n_0 - 1$.

Lema 2.10. *El grado de ramificación es independiente de las cartas elegidas.*

Demostración. Sean (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) dos cartas centradas en x_0 y (V_1, ψ_1) , (V_2, ψ_2) dos cartas centradas en y_0 . Llamemos $\Phi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y $\Psi = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ a las funciones de transición. Ya que estas funciones son analíticas, tienen desarrollos como series de Taylor en una vecindad del origen

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m, \quad \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

Sabemos que para algún $n_0 \geq 1$, $(\psi_1 \circ f \circ \psi_1^{-1})(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$, pues las cartas en cuestión están centradas en los puntos correspondientes. Notemos ahora que $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \Psi \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ \Phi$, es decir

$$(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(z) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right) \circ \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n \right) \circ \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m \right) \quad (2.10)$$

Luego, el primer término diferente de cero de (2.10) es $(c_1 a_{n_0} b_1^{n_0}) z^{n_0}$, lo cual muestra que el grado de ramificación de f en x_0 es independiente de la elección de las cartas. □

En el siguiente ejemplo vemos como dada una función meromorfa definida en una superficie de Riemann, podemos definir una nueva transformación con valores en $\hat{\mathbb{C}}$ que resulta ser holomorfa. Recurriremos a esta extensión de una función muy frecuentemente, pues de este modo podemos utilizar varios resultados que son válidos cuando las superficies del dominio y el contradominio de la función son compactas.

Ejemplo 2.11. Sea X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Entonces la función $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida como

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p \text{ no es un polo de } f \\ \infty & \text{si } p \text{ es un polo de } f \end{cases}$$

es una transformación holomorfa entre superficies de Riemann.

El siguiente resultado nos da una útil caracterización local de la función f en términos de su multiplicidad en un punto.

Proposición 2.12. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una transformación holomorfa entre superficies de Riemann, $x_o \in X$ y $f(x_o) = y_o$. Dada una carta (V, ψ) centrada en y_o existe una carta (U, φ) centrada en x_o tal que*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^{n_o} \quad \text{con} \quad n_o = e_{x_o}(f)$$

Diremos que $f = z^{n_o}$ en una vecindad de x_o .

Demostración. Consideremos una carta (V, ψ) centrada en y_o y otra (U, ϕ) centrada en x_o . Para $\phi(x) = w$ en una vecindad A del origen tenemos que

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(w) = \sum_{n=n_o}^{\infty} a_n w^n = w^{n_o} \left(\sum_{n=n_o}^{\infty} a_n w^{n-n_o} \right) = w^{n_o} S(w)$$

con $S(w) = a_{n_o} + a_{n_o+1} w + \dots$. La serie $S(w)$ es convergente en A y $S(0) = a_{n_o} \neq 0$. Consideremos ahora una de las n_o raíces n_o -ésimas de S , $S^{\frac{1}{n_o}}$ y definamos $\mu(w) = w S^{\frac{1}{n_o}}(w)$. Esta es una función holomorfa y su derivada es

$$\mu'(w) = w' S^{\frac{1}{n_o}}(w) + w [S^{\frac{1}{n_o}}(w)]' = S^{\frac{1}{n_o}}(w) + w [S^{\frac{1}{n_o}}(w)]'.$$

Notemos que $\mu'(0) = S^{\frac{1}{n_o}}(0) \neq 0$ ya que $[S^{\frac{1}{n_o}}(0)]^{n_o} = S(0) \neq 0$, así que por el teorema de la función implícita μ es invertible en una vecindad del cero, entonces la función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ definido como $\varphi = \mu \circ \phi$ es un homeomorfismo y define una carta centrada en x_o . Finalmente observemos que un punto en la imagen de φ es de la forma $z = \mu(w) = \mu(\phi(x))$ y

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) &= \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \mu^{-1}(z) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(\mu^{-1}(z)) \\ K &= \psi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w^{n_o} S(w) = \mu(w)^{n_o} = z^{n_o} \end{aligned}$$

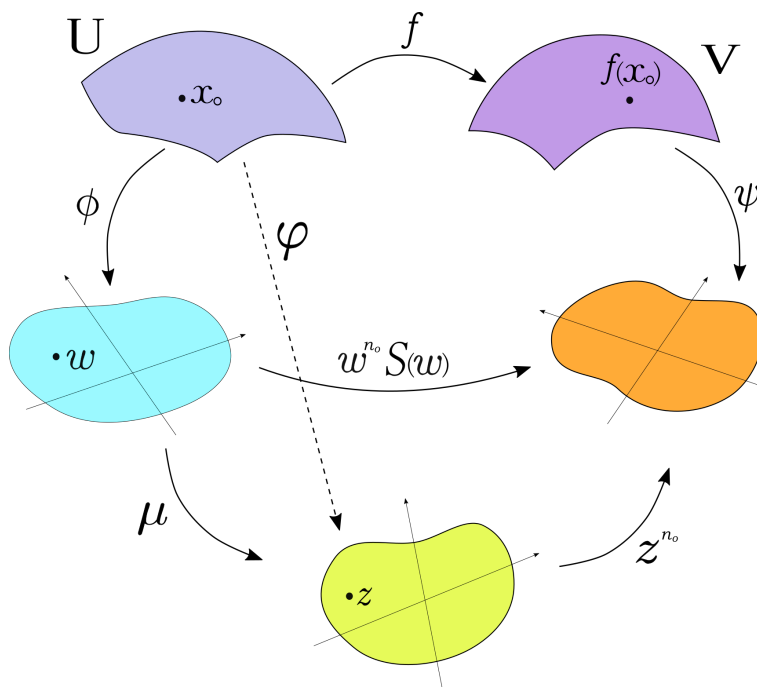


Figura 2.3.

□

Teorema 2.13. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces*

- (1) *f tiene un número finito de puntos de ramificación x_1, \dots, x_k*
- (2) *Fuera de las fibras $f^{-1}(f(x_i))$, f define una cubierta de fibras finitas de cardinalidad constante n . Se dice que f es una cubierta ramificada de grado n .*
- (3) *Para todo punto y de Y se cumple que $\sum_{f(x)=y} e_x(f) = n$.*

Demostración. Para demostrar que el conjunto de puntos de ramificación es finito, vamos a fijarnos en el comportamiento de la derivada de f . Denotemos por $e_x(f) = e_x$ a la multiplicidad de f en un punto $x \in X$. De acuerdo a la proposición 2.12, para todo punto $x \in X$ existe una vecindad de x en la cual f se expresa como $f(z) = z^{e_x}$ por lo tanto su derivada en esa vecindad es $f'(z) = e_x z^{e_x-1}$. Si x no es un punto de ramificación entonces $e_x = 1$ y $f(z) = z$ así que $f'(z) \equiv 1$ y por tanto la derivada nunca se anula. Por otro lado cuando x es un punto de ramificación, tenemos que $e_x > 1$ y en este caso el único punto que anula a la derivada es el origen, pero éste es la imagen bajo la carta coordenada del punto de ramificación (pues estamos considerando cartas centradas). Así que de manera global, los únicos puntos que anulan a la derivada de f son los puntos de ramificación. Si el conjunto de puntos de ramificación fuera infinito tendría un punto de acumulación (pues X es compacto) y por teorema de la identidad f' sería la función constante cero, lo cual implicaría que f es una función constante, pero esto es una contradicción. Por lo tanto el conjunto de puntos de ramificación es finito.

Ahora demostremos la parte (2) del teorema. Un espacio topológico es *localmente compacto* si es Hausdorff y todo punto tiene una vecindad compacta. En particular una superficie de Riemann compacta X es un espacio Hausdorff y además es vecindad de todos sus puntos, por lo tanto X es localmente compacto. Una transformación continua entre dos espacios localmente compactos es *propia* si la preimagen de todo subconjunto compacto es compacta. Veamos que f es propia, y para ello sea $K \subset Y$ un subconjunto compacto. K es un subconjunto cerrado ya que que todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado, entonces el complemento $Y \setminus K$ es abierto, y debido a la continuidad de f , el conjunto $f^{-1}(Y \setminus K) = X \setminus f^{-1}(K)$ es abierto en X , pero esto implica que $f^{-1}(K)$ es cerrado. Dado que X es una superficie de Riemann compacta y que todo subconjunto cerrado en un espacio compacto es compacto, concluimos que $f^{-1}(K)$ es compacto.

Una aplicación entre dos espacios topológicos es *cerrada* si la imagen de cualquier conjunto cerrado es cerrado. Veamos que f es una aplicación cerrada, para ello supongamos que $C \subset X$ es un subconjunto cerrado, nuevamente por la compacidad de X tenemos que C es compacto, pero la imagen continua de un espacio compacto es compacta, por lo cual $f(C)$ es compacto en Y . Finalmente como Y es Hausdorff, $f(C)$ es cerrado. Por lo tanto f es cerrada.

Definamos ahora los siguientes conjuntos: $E = \{x \in f^{-1}(f(x_i)) : i \in \{1, \dots, k\}\}$, $M = X \setminus E$ y $N = Y \setminus \{f(x_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$. Notemos que en M no hay puntos de ramificación, y como en los puntos que no son de ramificación la derivada es constante 1, por el teorema de la función inversa, $f|_M : M \rightarrow Y$ es un isomorfismo local. Además observemos que para cada punto $y \in Y$, la fibra de y es finita, de lo contrario, por la compacidad de X dicha fibra tendría un punto de acumulación y esto implicaría (por el teorema de la identidad) que f es constante.

Sea $y \in N$ y supongamos que su fibra tiene n elementos. Para cada $x_j \in f^{-1}(y)$ con $j \in \{1, \dots, n\}$, f es un isomorfismo local, por lo que existen vecindades U_j abiertas y ajenas (porque la fibra es finita) tal que $f|_{U_j}$ es un isomorfismo. Observemos que $\cup_{j=1}^n U_j$ es un abierto porque cada U_j lo es, entonces $M \setminus \cup_{j=1}^n U_j$ es cerrado. Luego como f es cerrada, $f(M \setminus \cup_{j=1}^n U_j)$ es cerrado y además no contiene a y . Notemos que $V = N \setminus f(M \setminus \cup_{j=1}^n U_j)$ es una vecindad abierta de y y $f^{-1}(V) \subset \cup_{j=1}^n U_j$. Entonces $f^{-1}(V) = \coprod_{j=1}^n (U_j \cap f^{-1}(V))$. Por lo tanto, fuera de las fibras de las imagenes de los puntos de ramificación (es decir en M) f es una cubierta de fibras finitas.

Veamos que la cardinalidad de las fibras es constante, para ello consideremos la función $c : N \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $c(y) = \text{cardinalidad de } f^{-1}(y)$. Observemos que para cada punto $y \in N$ podemos construir una vecindad V de y tal que su imagen inversa bajo f consta de tantos abiertos ajenos como la cardinalidad de la fibra de y . Por lo tanto la cardinalidad de todos los puntos de V es igual, esto quiere decir que la función c es localmente constante en abiertos de N . Consideremos a la colección S de abiertos de N en los cuales la función c es constante. Tomemos $A \in S$ y un punto $y_0 \in A$. En A la función c es constante, por lo que todos los puntos ahí tienen el mismo número de preimágenes. Definamos los conjuntos $N_1 = \{y \in N : c(y) = c(y_0)\}$ y $N_2 = \{y \in N : c(y) \neq c(y_0)\}$ y notemos son abiertos en N porque es unión de elementos de S , además $N = N_1 \cup N_2$ y $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, pero esto implica que N es disconexo, lo cual es una contradicción, pues al ser Y conexo también N lo es. Por lo tanto ya sea N_1 o N_2 es vacío, pero como $y_0 \in N_1$ entonces $N_2 = \emptyset$, y esto implica que $N = N_1$. De este modo tenemos que la cardinalidad de las fibras es constante. Por lo tanto f restringida a M es una cubierta de cardinalidad constante n .

Demostremos ahora la parte (3) del teorema. Sea y un punto en Y y supongamos que su preimagen consta de k puntos $\{x_1, \dots, x_k\}$. Consideremos un punto $x_i \in f^{-1}(y)$. Sabemos que existen una carta (U, z) centrada en x_i y otra (V, w) centrada en y tales que $w \circ f \circ z^{-1}(z) = z^{e_{x_i}}$. Además podemos suponer que U no contiene mas puntos de la preimagen de y , y tampoco puntos de ramificación (excepto quizás x_i) pues tanto las fibras como los puntos de ramificación son finitos. De acuerdo al teorema C.4, y dado que en U no hay mas puntos de ramificación (excepto quizás x_i), cada punto w en una vecindad de $w = 0$ tiene exactamente e_{x_i} preimágenes en una vecindad de $z = 0$. Ya que z y w son homeomorfismos (en particular son biyectivos) podemos concluir que cada punto en una vecindad de y tiene exactamente e_{x_i} preimágenes no ramificadas en una vecindad, llamémosle U_i , de x_i . Como

esto pasa para todo $x_i \in f^{-1}(y)$ con $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces existe una vecindad abierta V de y ($\cap_{i=1}^k f(U_i)$) en la cual todos los puntos tienen al menos $\sum_{i=1}^k e_{x_i}(f)$ preimágenes.

Afirmación: Existe una vecindad \hat{V} de y (posiblemente mas pequeña que V), en la cual todos los puntos tienen exactamente $\sum_{i=1}^k e_{x_i}(f)$ preimágenes. Demostremos esta afirmación por contradicción, para ello supongamos que para toda vecindad de y siempre existe un punto y^* que tiene una preimagen que no pertenece a ninguna de las vecindades U_i anteriormente mencionadas. Entonces tenemos una sucesión de puntos en X que no pertenece a ningún U_i . Ya que X es compacto podemos extraer una subsucesión que tiene la propiedad de que converge a algún punto x_0 en X y la sucesión de sus imágenes converge a y . Debido a la continuidad de f debería ocurrir que $f(x_0) = y$, lo cual no es posible ya que x_0 no pertenece a ninguna de las vecindades U_i en las cuales yacen los puntos de la preimagen de y . Por lo tanto existe una vecindad \hat{V} de y tal que todos los puntos en esa vecindad tienen exactamente $\sum_{i=1}^k e_{x_i}(f)$ preimágenes. Entonces la función $\nu : Y \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $\nu(y) = \sum_{f(x)=y} e_x(f)$ es localmente constante, pero ya vimos en (2) que una función localmente constante en un espacio conexo es globalmente constante. Para saber cuál es esa constante, observemos que si y no es imagen de ningún punto de ramificación, entonces tiene n preimágenes con grado de ramificación igual a 1, por lo que en la vecindad V de y todos los puntos tienen $\sum_{i=1}^n e_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^n 1 = n$ preimágenes. Por lo tanto $\nu \equiv n$, es decir, para todo $y \in Y$ se tiene que $\sum_{f(x)=y} e_x(f) = n$. □

Corolario 2.14. *Sea X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Entonces f tiene el mismo número de ceros que de polos (contados con multiplicidad).*

Demostración. Consideremos la función $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ asociada a f definida en el ejemplo 2.11, es decir

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p \text{ no es un polo de } f \\ \infty & \text{si } p \text{ es un polo de } f \end{cases}$$

Observemos que F es una transformación holomorfa entre superficies de Riemann compactas, así que por el teorema anterior, la suma de las multiplicidades de las preimágenes de cualquier punto es constante, en particular, las del cero y el infinito, pero las del infinito son justamente los polos de f . Por lo tanto f tiene el mismo número de ceros que de polos, contando sus multiplicidades. □

Corolario 2.15. *Sea X una superficie de Riemann compacta y f una función holomorfa en X . Entonces f es constante.*

Demostración. Consideremos la extensión de f al plano complejo extendido, $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Esta es una función holomorfa entre dos superficies de Riemann compactas. Si f no fuera constante, por el teorema anterior debería suceder que la suma de las multiplicidades $e_x(f)$ de las preimágenes de cualquier punto de $\hat{\mathbb{C}}$ es constante, en particular si el punto que tomamos es el infinito, pero como f es holomorfa no tiene polos, así que esta suma debería ser cero, pero esto no puede suceder, porque la imagen de f es diferente del vacío, es decir, existe

al menos un punto ξ en \hat{C} cuya preimagen es no vacía y ello implica que la suma de las multiplicidades de los puntos en la preimagen de ξ es diferente de cero. Por lo tanto f debe ser constante. \square

El siguiente teorema es una de las herramientas mas importantes que utilizamos en esta tesis, pues será clave para demostrar el teorema de Riemann-Roch (en el capítulo 5). Esta fórmula llamada de Riemann-Hurwitz relaciona el género de dos superficies de Riemann compactas mediante el grado de una función holomorfa no constante entre ellas, lo cual supone una ventaja ya que si conocemos el género de sólo una de las superficies y el grado de la función, podemos inmediatamente saber el género de la otra superficie.

Teorema 2.16 (de Riemann-Hurwitz). *Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante de grado n (como cubierta ramificada) entre dos superficies de Riemann compactas. Denotemos por g_X y g_Y a los géneros de X y Y . Entonces*

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} [e_x(f) - 1] \quad (2.11)$$

Demostración. Sea Δ una triangulación de Y de forma que la imagen de cada punto de ramificación sea un vértice de la triangulación y que cada triángulo esté contenido en la imagen bajo f de una carta en X , en la cual f sea de la forma $z \mapsto z^n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. La colección $\{f^{-1}(t) : t \in \Delta\}$ es una triangulación para X (Figura 2.4). Sean $A_X, A_Y, C_X, C_Y, V_X, V_Y$ las aristas, caras y vértices de X y Y respectivamente.

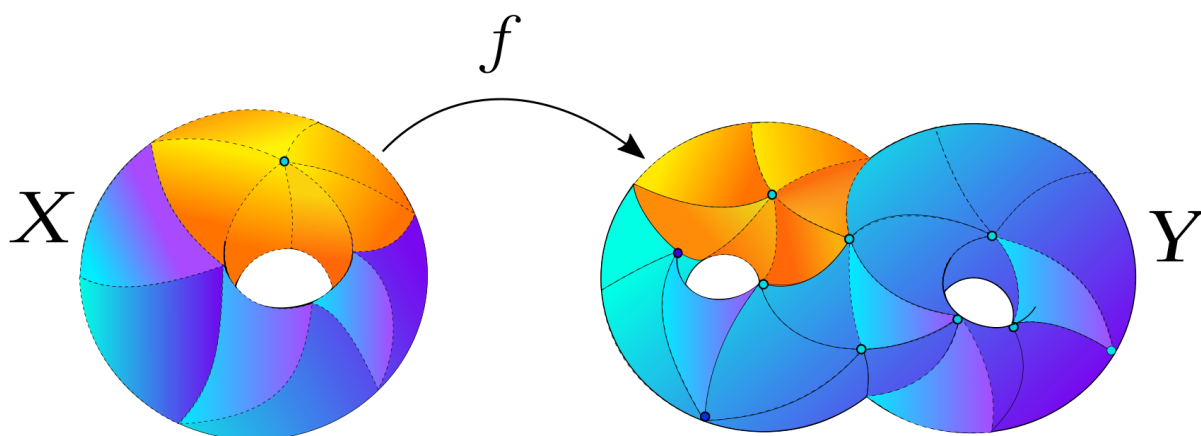


Figura 2.4.

Si un punto $y \in Y$ pertenece al interior de un triángulo t de la triangulación Δ , entonces no es la imagen de ningún punto de ramificación (pues las imágenes de los puntos de ramificación son vértices de la triangulación) así que para cualquier punto p en la imagen inversa de y se tiene que $e_p(f) = 1$. Por otro lado, sabemos que $\sum_{p \in f^{-1}(y)} e_p(f) = n$, entonces debe haber necesariamente n puntos en $f^{-1}(y)$. Esto implica que cada triángulo en Y tiene exactamente

n preimágenes (Figura 2.5) por lo cual el número de triángulos de $f^{-1}(\Delta)$ es n veces el número de triángulos en Δ , y sucede lo mismo para las aristas, es decir, $C_X = nC_Y$ y $A_X = nA_Y$.

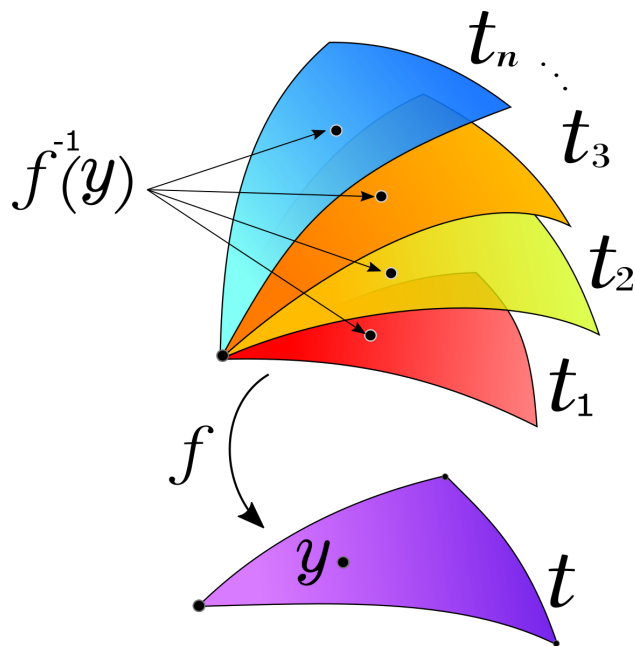


Figura 2.5.

Ahora vamos a contar los vértices de X . Sabemos que la suma de las multiplicidades de las imágenes inversas de cada vértice de X es n , pero si un punto y es imagen de algún punto de ramificación en X , entonces ese punto tiene multiplicidad mayor que uno, lo cual implica que la cardinalidad de los puntos en la preimagen de y sea estrictamente menor que n . Por esta razón tenemos que $V_X = nV_Y + \sum\{1 - e_p(f) : p \text{ es un vértice de } X\}$. Notemos que $1 - e_p(f)$ es negativo si p es un punto de ramificación (por lo tanto estamos restando los vértices que contamos de más en cada punto de ramificación) y es cero en caso contrario, así que podemos tomar la suma sobre todos los puntos de X , es decir

$$V_X = nV_Y + \sum_{p \in X} [1 - e_p(f)]$$

Finalmente, por las proposiciones 1.14 y 1.13 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2 - 2g_X &= V_X - A_x + C_X = nV_Y + \sum_{p \in X} [1 - e_p(f)] - nA_Y + nC_Y \\ &= n(V_Y - A_Y + C_Y) + \sum_{p \in X} [1 - e_p(f)] \\ &= n(2 - 2g_Y) + \sum_{p \in X} [1 - e_p(f)] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por lo tanto

$$2 - 2g_X = n(2 - 2g_Y) + \sum_{p \in X} [1 - e_p(f)]$$

y multiplicando esta igualdad por -1 obtenemos que

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} [e_x(f) - 1].$$

□

2.2. Curvas algebraicas

En esta sección definiremos una clase de superficies con las cuales trabajaremos para demostrar en el capítulo 4, el teorema de Riemann-Roch, estas son las curvas algebraicas.

Definición 2.17. Sea S un conjunto de funciones meromorfas en una superficie de Riemann compacta X . Decimos que S *separa puntos* de X si para todo par de puntos distintos p y q en X existe una función meromorfa en S tal que $f(p) \neq f(q)$, y decimos que *separa tangentes* si para cualquier punto $p \in X$ existe una función meromorfa $f \in S$ que cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. f tiene un polo simple en p
2. f es holomorfa en p y $\text{Ord}_p(f - f(p)) = 1$.

Una superficie de Riemann compacta X es una *curva algebraica*³ si el campo $\mathcal{M}(X)$ de funciones meromorfas en X separa puntos y tangentes de X .

Sabemos que las funciones constantes son elementos de $\mathcal{M}(X)$, pero para que X sea una curva algebraica es necesario que su campo de funciones meromorfas tenga más elementos además de las constantes. Se puede demostrar que cualquier superficie de Riemann compacta es una curva algebraica, pero no demostraremos ese resultado en esta tesis. Lo que si haremos es ver que la propiedad de ser una curva algebraica es equivalente a que en X se cumpla el teorema de Riemann Roch. El problema de encontrar funciones con un orden determinado en un número finito de puntos y que sean holomorfas en el complemento de dichos puntos es conocido como el problema de Mittag-Leffler (el cual explicaremos detalladamente en el capítulo 4) y el teorema de Riemann-Roch nos dice cuándo este problema tiene solución.

³Normalmente una curva algebraica se define como el conjunto de ceros de un polinomio $P(z, w)$ en dos variables complejas. La definición que damos es poco usual, pero será justificada en el capítulo 3, donde demostraremos que cualquier curva algebraica (como la hemos definido nosotros) es la superficie de Riemann construida mediante la continuación analítica de una función $f(z)$ que satisface una ecuación polinomial $P(z, f(z)) = 0$, es decir, una función algebraica.

Aproximación de funciones

El primer paso para lograr nuestro objetivo es, dada una curva algebraica X , un conjunto finito de puntos p_1, \dots, p_n en X construir una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que en cada punto p_i su serie de Laurent empiece con un polinomio preestablecido $a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_{k+r} z^{k+r}$, en particular, podemos establecer el orden de esta función en cada uno de estos puntos. Observemos que no estamos poniendo ninguna condición sobre el resto de puntos de la superficie, es decir, no sabemos nada del comportamiento de f en $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, de momento sólo nos bastará tener control sobre un conjunto finito de puntos.

Lema 2.18. *Sea X una curva algebraica y $p \in X$. Entonces para cualquier entero N existe una función global meromorfa f en X con $\text{Ord}_p(f) = N$*

Demostración. Sea $h \in \mathcal{M}(X)$ una función meromorfa que separa tangentes en p . Si h es holomorfa en p , tomamos $g = h - h(p)$, y si h tiene un polo simple en p , tomamos $g = 1/h$. Entonces g tiene orden 1 en p y la función $f = g^N$ tiene orden N en p . \square

Definición 2.19. Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y (U, z) una carta centrada en p . Un *polinomio de Laurent* alrededor de p en la coordenada z es un polinomio $r_p = \sum_{i=n}^m c_i z^i$ con $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \leq m$. y $c_i \in \mathbb{C}$. Decimos que r_p tiene orden n .

Lema 2.20. *Sea X una curva algebraica, fijemos un punto $p \in X$, una coordenada local z centrada en p y un polinomio de Laurent $r_p \in R$. Entonces existe una función meromorfa global f tal que su serie alrededor de p inicia con el polinomio r_p .*

Demostración. Escribimos $r(z) = \sum_{i=n}^m c_i z^i$ con c_n y c_m diferentes de cero. Entonces r tiene $(m - n) + 1$ términos. Vamos a proceder por inducción en el número de términos.

BASE DE INDUCCIÓN: si r tiene un solo término $c_m z^m$ por el lema 2.18 existe una función f que tiene orden m en p , por lo que en una vecindad de $z(p)$ la función f se expresa como $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$, con $a_m \neq 0$. Tomemos $g = \frac{c_m}{a_m} f$. Entonces el primer término de g es r . HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: sea $l \in \mathbb{N}$ y supongamos que para todo $k \leq l$ se cumple la propiedad, es decir, que existe una función meromorfa f tal que su serie alrededor de p inicia con el polinomio $r(z) = \sum_{i=n}^k c_i z^i$.

Ahora supongamos que $r(z) = \sum_{i=n}^{k+1} c_i z^i$. Utilizando nuevamente el lema 2.18, podemos construir una función h_1 que inicia con el polinomio de Laurent de un sólo término $c_n z^n$, es decir $h_1(z) = c_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$. Consideremos a la serie $h_1(z) - r(z) = (a_{n+1} - c_{n+1}) z^{n+1} + \dots + (a_k - c_k) z^k + (a_{k+1} - c_{k+1}) z^{k+1} + \dots$. Sea $s(z)$ el polinomio de Laurent asociado a $h_1 - r$ truncado en el término de grado $k + 1$, es decir, $s(z) = (a_{n+1} - c_{n+1}) z^{n+1} + \dots + (a_{k+1} - c_{k+1}) z^{k+1}$.

Notemos que s tiene al menos un término menos que r , por lo que le podemos aplicar la hipótesis de inducción. Entonces existe una función h_2 tal que su serie alrededor de p inicia con el polinomio s , esto es $h_2(z) = (a_{n+1} - c_{n+1}) z^{n+1} + \dots + (a_{k+1} - c_{k+1}) z^{k+1} + d_{k+2} z^{k+2} + \dots$. Tomemos $f = h_1 - h_2$. Esta función inicia con el polinomio r . \square

Hasta ahora hemos visto que podemos aproximar hasta un cierto orden a una serie de Laurent en un punto determinado. A continuación haremos algo similar pero simultáneamente en un número finito de puntos.

Lema 2.21. *Sea X una curva algebraica, entonces para cualesquiera dos puntos p y q en X existe una función meromorfa global f en X con un cero en p y un polo en q .*

Demostración. Ya que $\mathcal{M}(X)$ separa puntos de X , existe una función $g \in \mathcal{M}(X)$ tal que $g(p) \neq g(q)$. Supongamos que p no es un polo de g (si lo es, consideramos $\frac{1}{g}$). Notemos que $h = g - g(p)$ tiene un cero en p . Si q es un polo de h , entonces tomamos $f = h$. Si q no es un polo de h , entonces $f = \frac{h}{h(q)-h}$ tiene las propiedades que queremos, ya que $f(p) = \frac{h(p)}{h(q)-h(p)} = 0$ y $f(q) = \frac{h(q)}{h(q)-h(q)} = \infty$. \square

Ahora, por inducción, extendemos el lema anterior a un número finito de puntos.

Lema 2.22. *Sea X una curva algebraica, entonces para cualquier número finito de puntos p, q_1, \dots, q_n en X existe una función meromorfa global f en X con un cero en p y un polo en cada q_i .*

Demostración. Haremos la demostración por inducción en el conjunto $\{q_1, \dots, q_n\}$. El caso $n = 1$ es el lema anterior. HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ existe una función $g \in \mathcal{M}(X)$ que tiene un cero en p y un polo en q_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sea h una función que tiene un cero en p y un polo en q_{n+1} . Tomemos m mayor que el orden de g en cada q_i . Afirmamos que para esta m la función $f = g + h^m$ cumple las condiciones que queremos.

En efecto: f tiene un cero en p , ya que h y g se anulan en p . Sea $q_i \in \{q_1, \dots, q_n\}$. Si h es holomorfa en q_i entonces $g + h^m$ tiene un polo en q_i , pues dicho punto es un polo de g . Si h tiene también un polo en q_i , podría suceder que la suma $h + g$ ya no tenga un polo ahí, es decir, que se cancele, por esta razón elegimos m mayor que el orden del polo que g tiene en cada q_i , de esta forma, el orden del polo de h^m es mayor que el orden del polo de g , por lo que la suma tendrá un polo en q_i .

Finalmente, consideremos el punto q_{n+1} en donde h tiene un polo. Si g es holomorfa en ese punto, f tiene un polo ahí. Si g tiene un polo, podemos tomar, si fuera necesario, un m_1 mayor que el orden de dicho polo, de tal forma que la suma de g y h^{m_1} tenga un polo en q_{n+1} . Entonces no importa que comportamiento tenga g en q_{n+1} , para m suficientemente grande, $g + h^m$ tendrá un polo ahí. \square

Podemos ser más específicos respecto al orden que la función f del lema anterior tiene en una colección de puntos.

Lema 2.23. *Sea X una curva algebraica, entonces para cualquier número finito de puntos p, q_1, \dots, q_n en X y cualquier $N \geq 1$, existe una función meromorfa global f en X con $\text{Ord}_p(f-1) \geq N$ y $\text{Ord}_{q_i}(f) \geq N$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostración. Sea g una función en $\mathcal{M}(X)$ tal tiene un cero en p y un polo en cada q_i (g existe por el lema anterior). Consideremos a la función $f = \frac{1}{1+g^N}$. Entonces tenemos que

$$f - 1 = \frac{1}{1+g^N} - 1 = \frac{1 - 1 - g^N}{1+g^N} = \frac{-g^N}{1+g^N}$$

y de esta expresión podemos notar que $(f - 1)^{(k)}(p) = 0$ para $n < N$ (pues $g(p) = 0$) y $(f - 1)^{(N)}(p) \neq 0$ para $k = N$. Dado que $(f - 1)^{(k)}(p)$ es el coeficiente de $(z - z(p))^N$ en la serie de $f - 1$ alrededor de p , concluimos que $Ord_p(f - 1) \geq N$. Para demostrar que $Ord_{q_i}(f) \geq N$, utilizaremos las propiedades que cumple el orden de una función (ver la proposición 2.4). Tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} Ord_{q_i}(f) &= Ord_{q_i}\left(\frac{1}{1+g^N}\right) = Ord_{q_i}(1) - Ord_{q_i}(1+g^N) \\ &= 0 - Ord_{q_i}(1+g^N) = -Ord_{q_i}(1+g^N) \\ &= -\min\{Ord_{q_i}(1), Ord_{q_i}(g^N)\} = -\min\{0, Ord_{q_i}(g^N)\} \\ &= -Ord_{q_i}(g^N) = N(-Ord_{q_i}(g)) \geq N \end{aligned}$$

la última desigualdad se da por que como g tiene un polo el q_i , entonces su orden en este punto es estrictamente negativo, en consecuencia $(-Ord_{q_i}(g))$ es mayor o igual que 1, de donde obtenemos que $N(-Ord_{q_i}(g)) \geq N$. \square

Este lema se puede generalizar para producir una función que coincide con un número finito de polinomios en un conjunto finito de puntos. Esta es una generalización del lema 2.20 a un conjunto finito de puntos.

Lema 2.24. *Aproximación de series de Laurent.*

Sea X una curva algebraica y $\{p_1, \dots, p_n\}$ un número finito de puntos fijos. Elegimos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ una carta coordenada z_i en p_i y un polinomio de Laurent $r_i(z_i)$. Entonces existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, la serie de f en p_i inicia con el polinomio r_i .

Demostración. Sea N un número natural mayor que cualquier exponente de cualquiera de los polinomios r_1, \dots, r_n , de forma que los términos de estos polinomios tengan grado menor que N . Queremos encontrar una f tal que su serie en cada punto p_i coincida con el polinomio r_i , esto es equivalente a pedir que $Ord_{p_i}(f - r_i) \geq N$.

Por el lema 2.20, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe una función meromorfa en X , g_i , tal que en p_i su serie de Laurent inicia con el polinomio r_i . Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Como g_i es meromorfa, para cada punto $p \in X$, existe una vecindad abierta U_p de p en la que g_i se expresa como un aserie de Laurent que converge en $U_p \setminus \{p\}$. Notemos que la colección $\{U_p : p \in X\}$ es una cubierta abierta de X , y como esta superficie es compacta, existe una subcubierta finita $\{U_{p_1}, \dots, U_{p_r}\}$. Sea $M_i = \min \{Ord_{p_k}(g_i) : k = 1, \dots, r\}$ y tomemos $M = \min\{M_1, \dots, M_n\}$. Dado que la serie

de g_i en p_i comienza con el polinomio r_i , tenemos que $M \leq M_i \leq \text{Ord}_{p_i} r_i$. Tenemos además que $N - M > 0$. Utilizando ahora el lema 2.23, existen funciones meromorfas h_1, \dots, h_n en X tales que para cada i , $\text{Ord}_{p_i}(h_i - 1) \geq N - M$ y $\text{Ord}_{p_j}(h_j) \geq N - M$ para $j \neq i$. Proponemos a la función $f = \sum_{i=1}^n h_i g_i$. Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $j \neq i$, sabemos que $\text{Ord}_{p_i}(h_j) \geq N - M$ y $\text{Ord}_{p_i}(g_j) \geq M$, por lo que $\text{Ord}_{p_i}(h_j g_j) = \text{Ord}_{p_i}(h_j) + \text{Ord}_{p_i}(g_j) \geq N - M + M = N$, es decir, todos los términos de la suma $\sum_{i \neq j} h_j g_j$ son de grado mayor o igual que N .

Ahora analicemos el producto $h_i g_i$. Sabemos que $\text{Ord}_{p_i}(h_i - 1) \geq N - M$, esto quiere decir que la serie de Laurent de $h_i - 1$ alrededor de p_i es de la forma $h_i(z) - 1 = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^k$ con $k_0 \geq N - M$, o equivalentemente $h_i(z) = 1 + \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^k$ y multiplicando por g_i obtenemos que $g_i(z) h_i(z) = g_i(z) + g_i(z) \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^k$. Sabemos también que $\text{Ord}_{p_i}(g_i) \geq M$, es decir, la serie de g_i en p_i es de la forma $g_i(z) = \sum_{l=l_0}^{\infty} b_l z^l$ con $l_0 \geq M$. Luego, el término de menor grado del producto $g_i(z) \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^k$ es $(a_{k_0} b_{l_0}) z^{k_0+l_0}$, y el grado de este término es $k_0 + l_0 \geq N - M + M = N$. Así, los primeros términos de la serie de Laurent de f en el punto p_i son exactamente los de la serie g_i , pues $f(z) = \sum_{i=1}^n h_i(z) g_i(z) = h_i(z) g_i(z) + \sum_{i \neq j} h_j(z) g_j(z) = g_i(z) + (g_i(z) \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^k) + (\sum_{i \neq j} h_j(z) g_j(z))$, de donde concluimos que la serie de f en p_i inicia con el polinomio r_i . \square

Como corolario del lema 2.24 tenemos el siguiente resultado, que es justamente el objetivo que nos habíamos fijado para esta sección.

Corolario 2.25. *Sea X una curva algebraica. Fijemos un número finito de puntos $\{p_1, \dots, p_n\}$ y sea $m_i \in \mathbb{Z}$. Entonces existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Ord}_{p_i}(f) = m_i$.*

Demostración. Basta tomar para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ un polinomio de Laurent r_i alrededor del punto p_i que tenga orden m_i , y luego aplicamos el lema anterior. \square

Capítulo 3

Continuación analítica

En el estudio de las funciones de variable compleja nos encontramos con funciones que en su definición involucran a la función logaritmo, por ejemplo todas las de la forma $f(z) = e^{\frac{1}{k} \log(z)} = z^{\frac{1}{k}}$ con k entero. Pero sabemos que la función logaritmo toma diferentes valores dependiendo de la rama que elijamos, por ello existe cierta ambigüedad en esta clase de funciones, que algunas veces son llamadas *funciones multivaluadas*. Para entender su comportamiento se les define un nuevo dominio y de esta manera es que surgen las *superficies de Riemann*. En este capítulo estudiaremos con detalle este proceso y para comenzar nos viene bien recordar la geometría de las funciones exponencial y logaritmo.

La función exponencial y el logaritmo

Para cualquier número complejo $z = x + iy$ la función exponencial está definida como $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Entonces si tomamos la parte imaginaria en un intervalo de la forma $[y_0, y_0 + 2\pi)$ y dejamos correr x en \mathbb{R} , la imagen de esta región bajo la exponencial habrá cubierto a todo el plano complejo, salvo al cero.

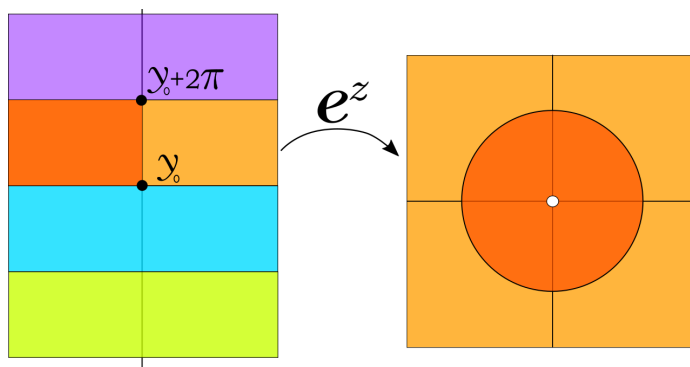


Figura 3.1.

Dado que existe una infinidad de regiones como la que acabamos de describir, la función exponencial cubre una infinidad de veces al plano complejo menos el cero, por lo tanto no es inyectiva y no es posible definir una inversa¹ (Figura 3.1). Sin embargo, si restringimos el dominio de la exponencial a un conjunto de la forma $B_{y_0} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [y_0, y_0 + 2\pi)\}$, entonces ya es inyectiva y podemos definir su inversa, la función logaritmo $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow B_{y_0}$ dada por $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ (Figura 3.2). A la función que obtenemos con cada

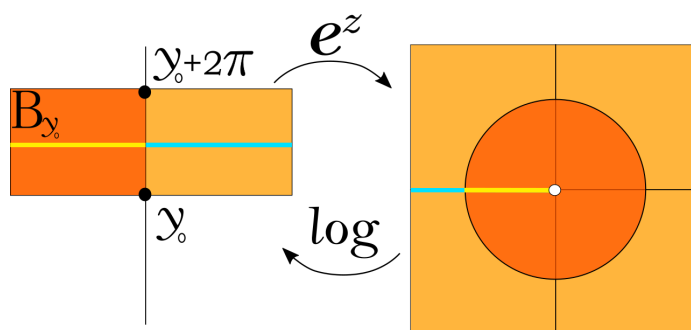


Figura 3.2.

elección de la región B_{y_0} se le llama una *rama del logaritmo* complejo. Es claro ahora que el logaritmo está bien definido sólo si escogemos una rama, y como su valor cambia con cada elección, se le conoce como *función multivaluada*². Esta ambigüedad se hereda a todas las funciones que en su definición involucran al logaritmo complejo y también son llamadas *funciones multivaluadas*, por ejemplo las potencias $f(z) = e^{\frac{1}{k}\log(z)}$ con $k \in \mathbb{Q}$. El problema con estas funciones es que son inversas de funciones no inyectivas (pues están definidas como composición de la exponencial con otras funciones, y hemos visto que la exponencial no es inyectiva). Fijemos esta idea con un ejemplo concreto.

Ejemplo 3.1. Consideremos la función $f(z) = z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log(z)}$ y sea g la función dada por $g(z) = \frac{1}{3}z$, entonces $f = \exp \circ g \circ \log$ (Figura 3.3). Si elegimos la rama del logaritmo $B_0 = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi)\}$, esta función mapea a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en la región B_0 , luego la función g es una homotecia que multiplica por $\frac{1}{3}$ la norma de cada punto de B_0 y finalmente la exponencial mapea a este nuevo conjunto en la región $\{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in [0, \frac{2\pi}{3})\}$. Si ahora elegimos la rama $B_{2\pi} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [2\pi, 4\pi)\}$, entonces el logaritmo lleva a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en la región $B_{2\pi}$, este conjunto bajo la función g se mapea en $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})\}$ y la exponencial manda a este conjunto en $\{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})\}$. Finalmente, si elegimos la rama $B_{4\pi} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [4\pi, 6\pi)\}$, la imagen de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bajo la función $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ es el conjunto $\{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in [\frac{4\pi}{3}, 2\pi)\}$. Decimos entonces que la función f es multivaluada ya que el valor de cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene 3 valores diferentes dependiendo

¹Pues sólo se les puede definir una inversa a las funciones inyectivas.

²Este nombre es un abuso de notación, ya que por definición una función no puede tener varios valores para un solo punto de su dominio.

de la rama de logaritmo que se escoja, cada una de esas elecciones da lugar a una rama de la función f (Figura 3.3).

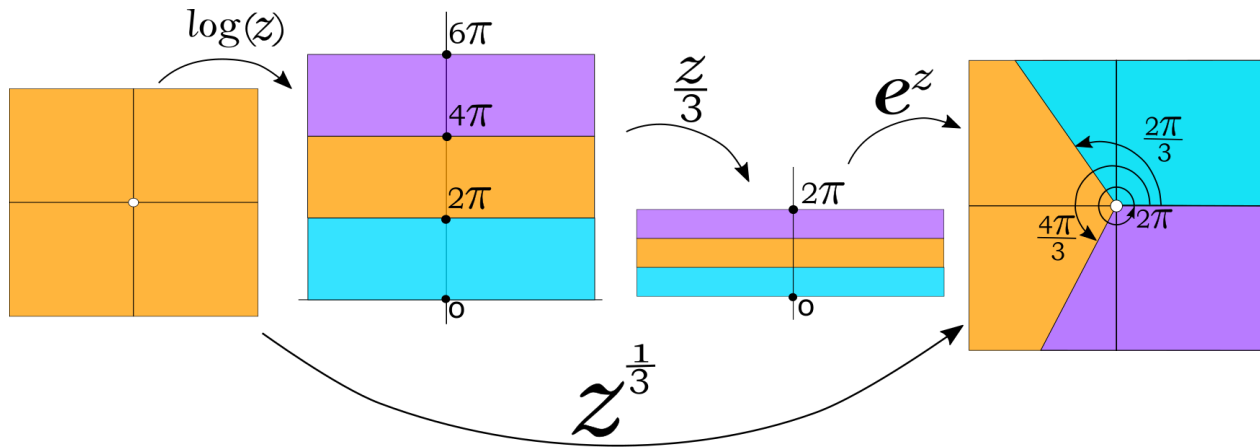


Figura 3.3.

Para solucionar el problema de multivaluación de f tenemos dos opciones, la primera es elegir una rama fija de logaritmo y la segunda, que fue la idea que tuvo Riemann y que ahora haremos nosotros, es cambiar el dominio de la función. La forma de hacer esto es ir expandiendo el dominio de la función mediante la continuación analítica. Para el caso de $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ la idea intuitiva es “pegar” tres copias del plano complejo sin el cero para que no haya necesidad de elegir ramas del logaritmo, de este modo en este nuevo dominio la función f estará bien definida y no tendrá problemas de multivaluación (Figura 3.4).

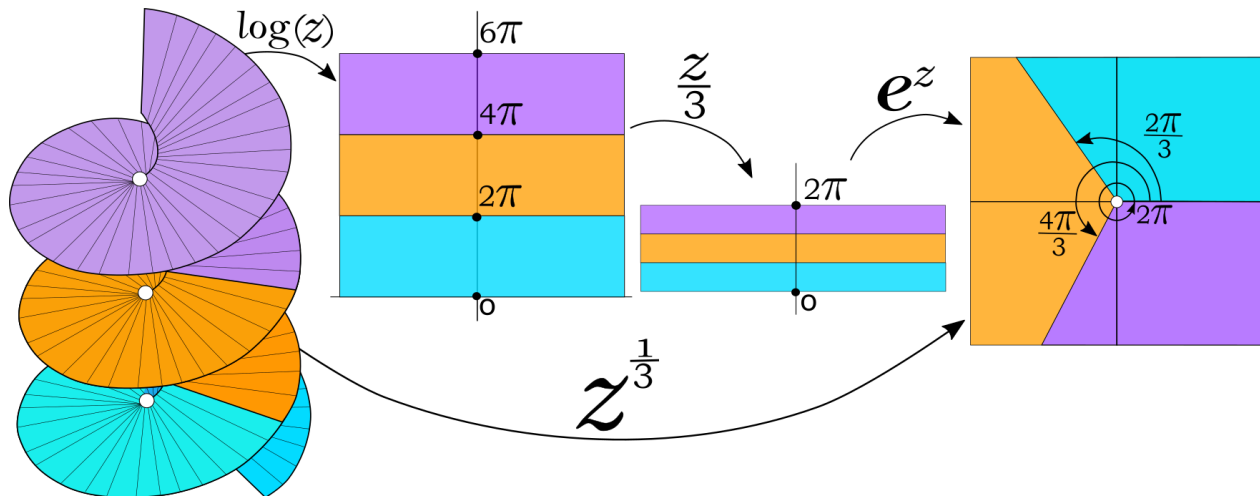


Figura 3.4.

Lo que resta de este capítulo será dedicado a analizar el proceso de continuación analítica de una función.

Definición 3.2. Una región es un subconjunto no vacío, abierto y conexo por trayectorias de $\hat{\mathbb{C}}$. Definimos un *elemento de función* como una pareja (D, f) , donde D es una región y $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa en D .

Por ejemplo, si $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, entonces (D, f) es un elemento de función, pues el radio de convergencia de f es 1 y entonces es analítica en D .

Definición 3.3. Si (D, f) y (E, g) son elementos de función tales que $D \cap E \neq \emptyset$ y $f = g$ en $E \cap D$, entonces decimos que (E, g) es *continuación analítica directa* de (D, f) y denotamos este hecho como $(D, f) \sim (E, g)$. Además obtenemos un nuevo elemento de función $(E \cup D, h)$ (Figura 3.5 (a)) donde $h(z) = f(z)$ si $z \in D$ y $h(z) = g(z)$ si $z \in E$.

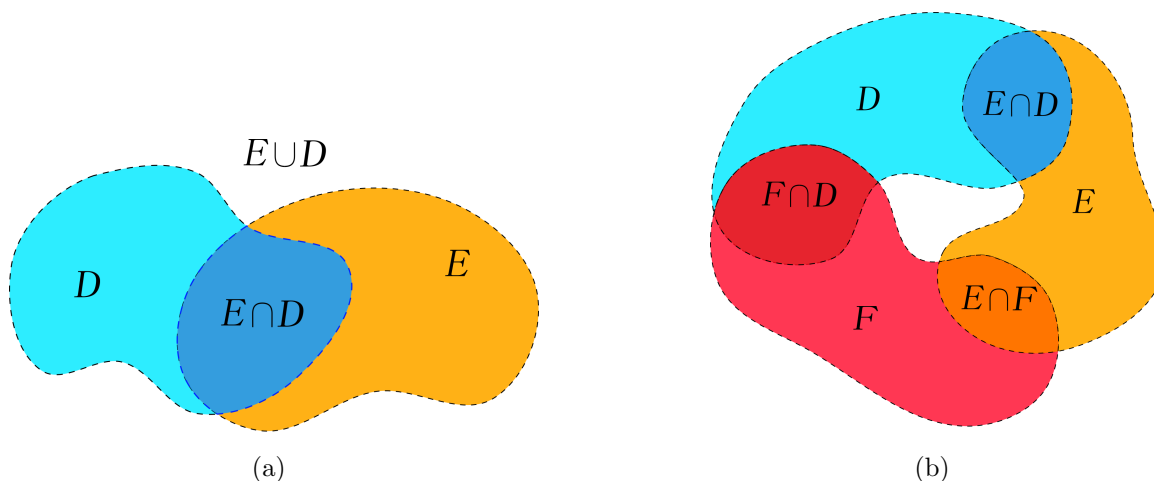


Figura 3.5.

Si (D, f) , (E, g) y (F, h) son elementos de función tales que $(D, f) \sim (E, g)$ y $(D, f) \sim (F, h)$, no es necesariamente cierto que $(F, h) \sim (E, g)$, ya que en principio podría suceder que $E \cap F = \emptyset$ y aún si $E \cap F \neq \emptyset$, podría suceder que $g \neq h$ en $E \cap F$ (Figura 3.5 (b)). Ilustramos este fenómeno en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4. Consideremos los elementos de función (D, f) , (E, g) , (F, h) y (G, k) donde las regiones son las siguientes: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$, $F = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 1\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < 1\}$ (Figura 3.6). Las funciones f, g, h , y k están dadas por la regla $z \mapsto \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log(z)}$ pero vamos a tomar diferentes ramas del logaritmo: para f la rama $[-\pi, \pi)$; para g la rama $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; para h la rama $[0, 2\pi)$ y para k la rama $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$. Tomadas de esta manera las ramas tenemos que $(D, f) \sim (E, g) \sim (F, h) \sim (G, k)$, sin embargo (G, k) no es continuación analítica de (D, f) pues $f \neq k$ en $D \cap G$, debido a que en el argumento del logaritmo hay una diferencia de 2π .

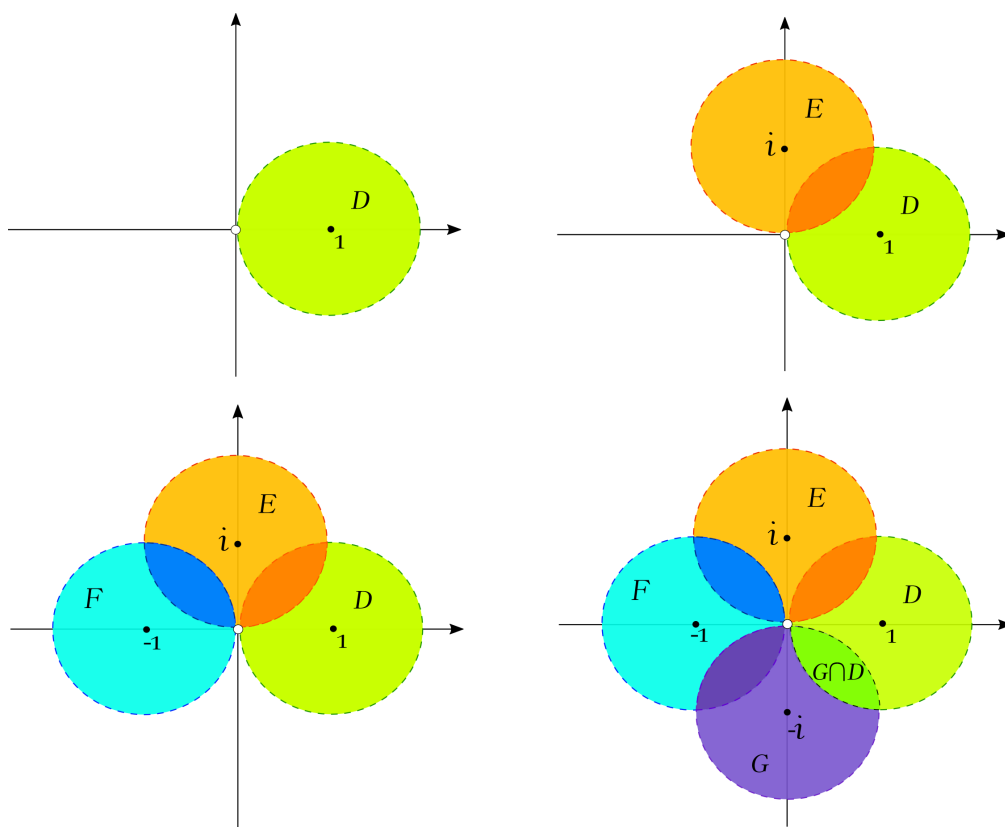


Figura 3.6.

Continuación analítica a lo largo de una curva

Nos interesa ahora hacer la continuación analítica de funciones en donde los elementos de función utilizados serán la cubierta de una curva, de esta manera vamos a conocer propiedades importantes de la función que estamos continuando analíticamente. Para esta nueva clase de continuación, vamos a considerar las regiones en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ y las funciones podrán ser meromorfas.

Definición 3.5. Sea (D, f) un elemento de función, $a \in D$ y $\gamma : I \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una curva que une a a con un punto $b \in \hat{\mathbb{C}}$. Una *continuación analítica de (D, f) a lo largo de γ* es una colección finita de continuaciones analíticas directas $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ que satisfacen las siguientes condiciones (Figura 3.7):

1. Cada región D_i es un disco abierto³ y el punto a pertenece al primer disco D_1 , el cual está contenido en D .

³Un disco abierto con centro en un punto $a \in \mathbb{C}$ es un conjunto $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z - a| < r, r > 0\}$, y si $a = \infty$ entonces un disco con centro en ∞ es un conjunto $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > r, r > 0\}$

2. Existe una partición del intervalo I , $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ de forma que $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq D_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

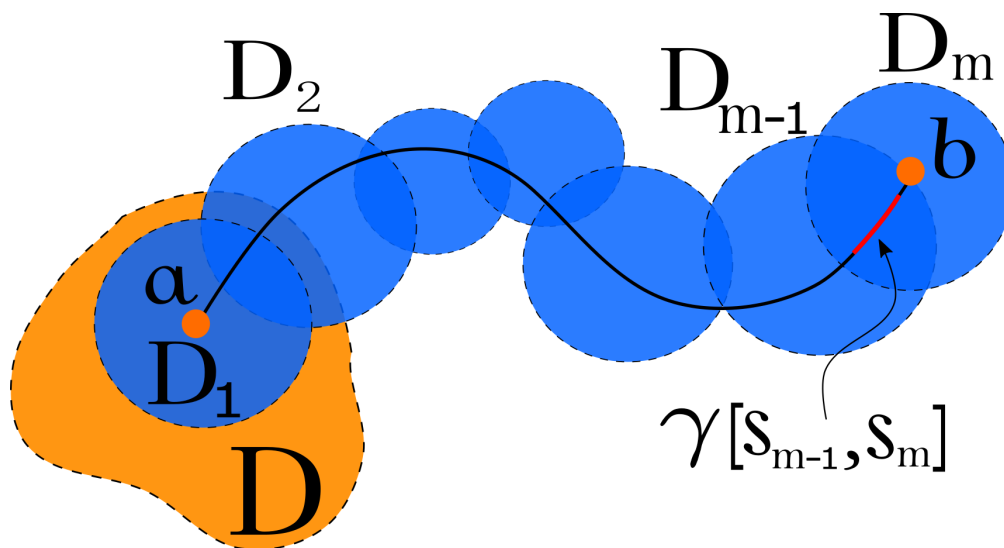


Figura 3.7.

En la definición 3.5 pedimos que las regiones sean discos porque tienen la propiedad de que su intersección es un conjunto conexo, lo que nos permitirá usar después el teorema de la identidad. A partir de ahora, cada vez que hablemos de un elemento de función (D, f) asumiremos que D es un disco abierto. Si es necesario, escribiremos D_a para hacer notar que a es el centro de D . Diremos que dos elementos de función (D_a, f) y (D_b, g) son iguales si $a = b$ y $f = g$ en algún disco abierto con centro en a . Un elemento de función (E, g) está relacionado con otro (D, f) si existe una continuación analítica de (D, f) a lo largo de una curva que tiene como elemento final a (E, g) . Esta es una relación de equivalencia que denotamos como $(D, f) \sim \dots \sim (E, g)$.

Lema 3.6. Sean $(D, f) \sim (D_{a_1}, f_1) \sim \dots \sim (D_{a_m}, f_m)$ y $(D, f) \sim (D_{b_1}, g_1) \sim \dots \sim (D_{b_n}, g_n)$ dos continuaciones analíticas de un elemento de función (D, f) a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces $f_m = g_n$ en una vecindad de $\gamma(1)$.

Demostración. Sean $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ las particiones del intervalo $[0, 1]$ correspondientes a las continuaciones $(D, f) \sim (D_{a_1}, f_1) \sim \dots \sim (D_{a_m}, f_m)$ y $(D, f) \sim (D_{b_1}, g_1) \sim \dots \sim (D_{b_n}, g_n)$ respectivamente. Supongamos que $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset$, esto implica que $D_i \cap E_j \neq \emptyset$ pues contiene a $\gamma([s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j])$. Como tenemos un número finito de índices, podemos tomar i y j de forma que $i+j$ sea mínimo con la propiedad de que $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset$. Como estos intervalos tienen intersección no vacía, entonces

$t_{j-1} \leq s_{i-1}$ o $s_{i-1} \leq t_{j-1}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $t_{j-1} \leq s_{i-1}$. Haremos la demostración por contradicción, entonces asumamos que $f_i \neq g_j$ en $D_i \cap E_j$.

Lo mínimo que pueden sumar i y j es dos, y esto pasa sólo si $i = 1 = j$, pero notemos que como $f = f_1$ en $D \cap D_1$ y $f = g_1$ en $D \cap E_1$, entonces $f = f_1 = g_1$ en $D \cap D_1 \cap E_1$, y como este último conjunto es un abierto contenido en $D_1 \cap E_1$, por el teorema de la identidad, $f_1 = g_1$ en $D_1 \cap E_1$. Como estamos suponiendo que $t_{j-1} \leq s_{i-1}$, entonces necesariamente $i > 1$ (pues $i = 1 \Rightarrow s_{i-1} = s_0 = 0 = t_0 > t_{j-1} \geq t_0 \Rightarrow t_{j-1} = t_0 \Rightarrow j - 1 = 0 \Rightarrow j = 1$).

Luego, como $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset$ y $t_{j-1} \leq s_{i-1}$, entonces $s_{i-1} \in [t_{j-1}, t_j]$. Como $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq E_j$, entonces $\gamma(s_{i-1}) \in E_j$, además, $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subset D_i$ y $\gamma([s_{i-2}, s_{i-1}]) \subset D_{i-1}$, así que $\gamma(s_{j-1}) \in D_{i-1} \cap D_i$, de esto obtenemos que $s_{i-1} \in (E_j \cap D_{i-1} \cap D_i) \neq \emptyset$. Observemos también que $[s_{i-2}, s_{i-1}] \cap [t_{j-1}, t_j]$ es no vacío porque tiene a s_{i-1} y esto implica que $D_{i-1} \cap E_j \neq \emptyset$. Luego, por la minimalidad de $i + j$ sucede que $f_{i-1} = g_j$ en $D_{i-1} \cap E_j$, y como $(E_j \cap D_{i-1} \cap D_i) \subseteq D_{i-1} \cap E_j$, entonces

$$f_{i-1} = g_j \quad \text{en} \quad (E_j \cap D_{i-1} \cap D_i) \quad (3.1)$$

Por otro lado $f_{i-1} = f_i$ en $D_{i-1} \cap D_i$, y esto implica que $f_{i-1} = f_i$ en $(E_j \cap D_{i-1} \cap D_i)$ pues $(E_j \cap D_{i-1} \cap D_i) \subseteq D_{i-1} \cap D_i$, así que

$$f_{i-1} = f_i \quad \text{en} \quad (E_j \cap D_{i-1} \cap D_i) \quad (3.2)$$

De (3.1) y (3.2) obtenemos que $f_i = g_j$ en $E_j \cap D_{i-1} \cap D_i$ y al ser este último un subconjunto abierto de $D_i \cap E_j$, el teorema de la identidad nos garantiza que $f_i = g_j$ en $D_i \cap E_j$, lo cual contradice nuestra suposición de que $f_i \neq g_j$ en $D_i \cap E_j$. Concluimos entonces que $(D_i, f_i) \sim (E_j, g_j)$ siempre que $[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset$, en particular tomando $i = m$ y $j = n$ tenemos que $(D_m, f_m) \sim (E_n, g_n)$, lo cual quiere decir que $f_m = g_n$ en $D_m \cap E_n$, y al ser esta intersección una vecindad de b , $f_m(b) = g_n(b)$. \square

Antes de enunciar el teorema de monodromía recordemos que dos curvas $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{C}$ que comparten extremos a y b son homótopas si existe una función continua $G : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $G(s, 0) = \gamma(s)$, $G(s, 1) = \beta(s)$ y para cada $t \in I$, $G(s, t) := \delta_t(s)$ es una curva con extremos a y b .

Teorema 3.7 (de Monodromía). *Sea $X \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, $a, b \in X$ y $\gamma, \beta : I \rightarrow X$ dos curvas diferentes que unen a los puntos a y b . Supongamos que γ es homótopa a β . Sea $G : I \times I \rightarrow X$ una homotopía entre ellas, y llamemos $\delta_t : I \rightarrow X$ a las curvas definidas por tal homotopía. Si (D, f) es un elemento de función que puede ser continuado analíticamente a lo largo de cada δ_t , entonces existe una vecindad de b en la cual las funciones finales obtenidas mediante la continuación analítica de f a lo largo de γ y de β son iguales.*

Demostración. Diremos que dos puntos t y r en el intervalo $I = [0, 1]$ están relacionados si y sólo si existe una vecindad de b en la cual las funciones obtenidas mediante las continuaciones analíticas a lo largo de δ_r y δ_t (que por hipótesis existen) son iguales. Notemos que esta

relación es de equivalencia. Entonces la demostración del teorema se traduce en verificar que 0 está relacionado con 1 y la forma de hacerlo será demostrar que cada clase de equivalencia es abierta y cerrada en I , luego utilizaremos la conexidad de dicho intervalo para concluir que sólo existe una clase, a saber, todo I , de donde se seguirá que 0 y 1 están relacionados.

Demostremos primero que cada clase de equivalencia es abierta, y una vez hecho esto, tendremos que cada clase es también cerrada, pues su complemento es la unión de las otras clases y por lo tanto es abierto. Sea $[t]$ una clase de equivalencia bajo la relación que hemos definido. Para demostrar que $[t]$ es un abierto consideramos un punto $t_0 \in [t]$ y vamos a demostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ está contenido en $[t] = [t_0]$. Utilizamos ahora la hipótesis de que que el elemento de función (D, f) se puede continuar analíticamente a lo largo de la curva δ_{t_0} , entonces existe una colección finita de continuaciones analíticas directas $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ que satisfacen las condiciones de la definición 3.5, así que existe una partición del intervalo I , $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ de forma que $\delta_{t_0}([s_{i-1}, s_i]) \subseteq D_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Fijemos un índice $i \in \{1, \dots, m\}$ y consideremos $s \in [s_{i-1}, s_i]$. Entonces el punto $\delta_{t_0}(s) \in D_i$. Como D_i es un abierto y la homotopía G es una función continua, existen intervalos abiertos $A, B \subseteq I$ tales que $G(A \times B) \subseteq D_i$ y $(s, t_0) \in A \times B$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A = (s - \epsilon_s, s + \epsilon_s)$ y $B = (t_0 - \epsilon_s, t_0 + \epsilon_s)$ donde ϵ_s es un real positivo que depende del punto s y es tal que $A \subseteq [s_{i-1}, s_i]$. Además, si $r \in (t_0 - \epsilon_s, t_0 + \epsilon_s)$, entonces $\delta_r((s - \epsilon_s, s + \epsilon_s)) \subseteq D_i$ (Figura 3.8). Como el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ es compacto, lo

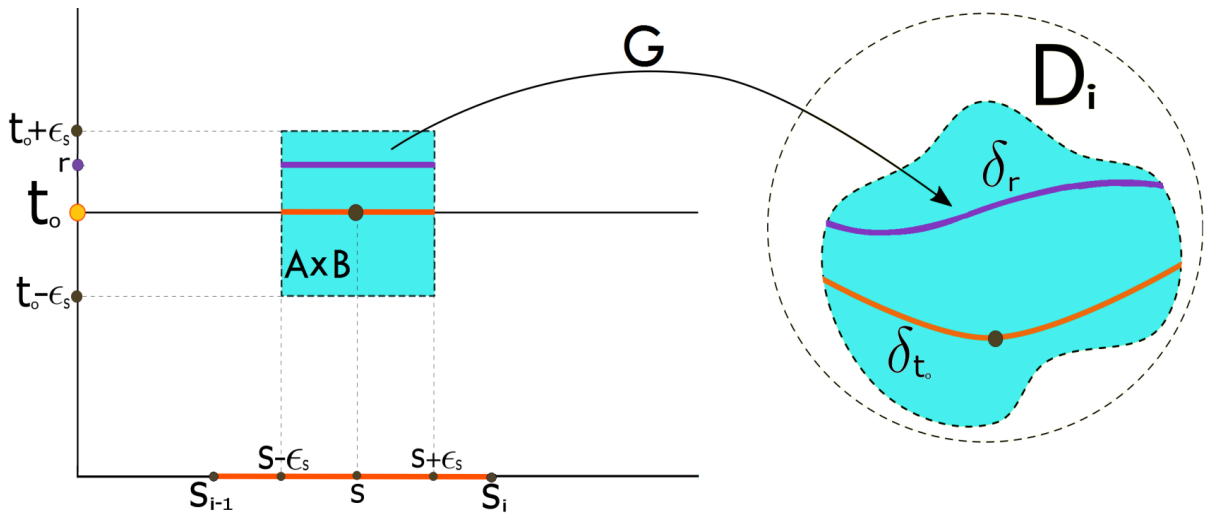


Figura 3.8.

podemos cubrir con un número finito, digamos n , de intervalos de la forma $(s - \epsilon_{s_k}, s + \epsilon_{s_k})$ con $s_k \in [s_{i-1}, s_i]$ y $k = 1, \dots, n$. Sea $\epsilon_i = \min\{\epsilon_{s_k} : k = 1, \dots, n\}$, entonces tenemos que $\epsilon_i > 0$ y si $r \in (t_0 - \epsilon_i, t_0 + \epsilon_i)$, entonces $\delta_r([s_{i-1}, s_i]) \subseteq D_i$ (Figura 3.9).

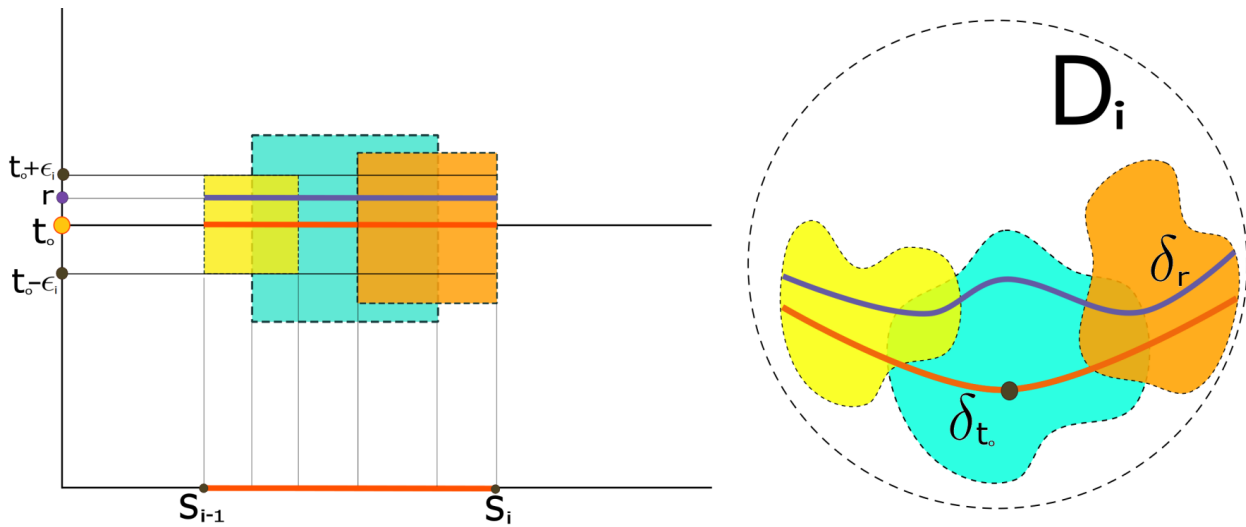


Figura 3.9.

Como tenemos un número finito de discos D_i , elegimos $\epsilon = \min\{\epsilon_i : i = 1, \dots, m\}$, este número es mayor que cero y cumple que si $r \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, entonces $\delta_r([s_{i-1}, s_i]) \subseteq D_i$ para todo $i = 1, \dots, m$, por lo tanto hemos construido una continuación analítica del elemento (D, f) a lo largo de δ_r dada por $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ y la partición del intervalo I es $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$ (Figura 3.10).

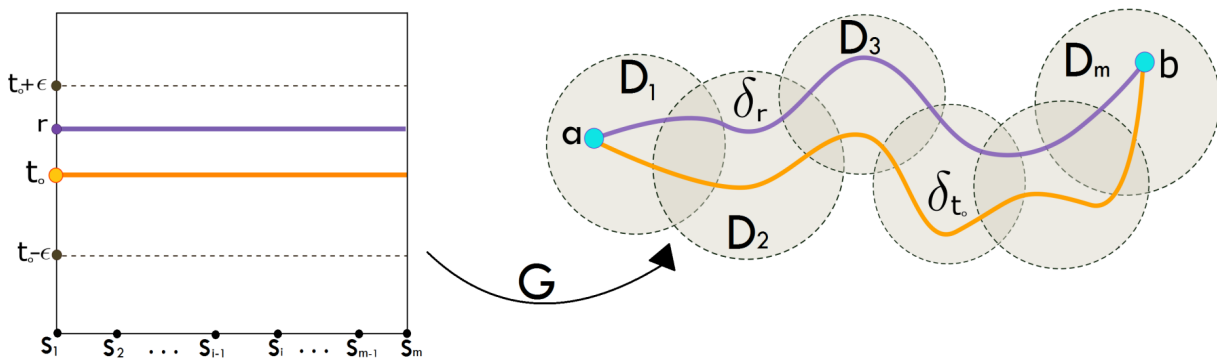


Figura 3.10.

Por hipótesis sabemos que existe una continuación analítica del elemento (D, f) a lo largo de δ_r , digamos $(D, f) \sim (E_1, g_1) \sim \dots \sim (E_k, g_k)$, que no necesariamente es la que acabamos de obtener. Sea $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_k = 1$ la partición del intervalo I asociada a esta

continuación analítica. Notemos que la intersección de los intervalos $[s_{m-1}, s_m]$ y $[q_{k-1}, q_k]$ es no vacía porque $s_m = q_k = b$ pertenece a ella, entonces utilizando el lema 3.6 tenemos que $(D_m, f_m) \sim (E_k, g_k)$, esto significa que $f_m = g_k$ en $D_m \cap E_k$, pero este último conjunto es una vecindad de b , por lo tanto r pertenece a la clase de t_0 . De este modo tenemos que $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq [t_0]$, lo que concluye la demostración. \square

3.1. Superficie de Riemann de una función

En esta sección definimos la superficie de Riemann de una función sobre una región de $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 3.8. Sea $a \in \hat{\mathbb{C}}$ y f una función meromorfa en una vecindad de a .

- (a) El *germen* de f en a es el conjunto de funciones meromorfas que coinciden con f en una vecindad de a y lo denotamos como $[f]_a$.
- (b) Llamaremos \mathfrak{M} al conjunto de gérmenes de funciones meromorfas en $\hat{\mathbb{C}}$, es decir

$$\mathfrak{M} = \{[f]_a \mid a \in \hat{\mathbb{C}}\}.$$

- (c) Si D es un disco con centro en a , entonces el conjunto $[D, f]_a = \{[f]_b \in \mathfrak{M} : b \in D\}$ es un *disco abierto* con centro en $[f]_a$ (Figura 3.11).
- (d) Definimos la función proyección $\psi : \mathfrak{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como $\psi([f]_a) = a$.

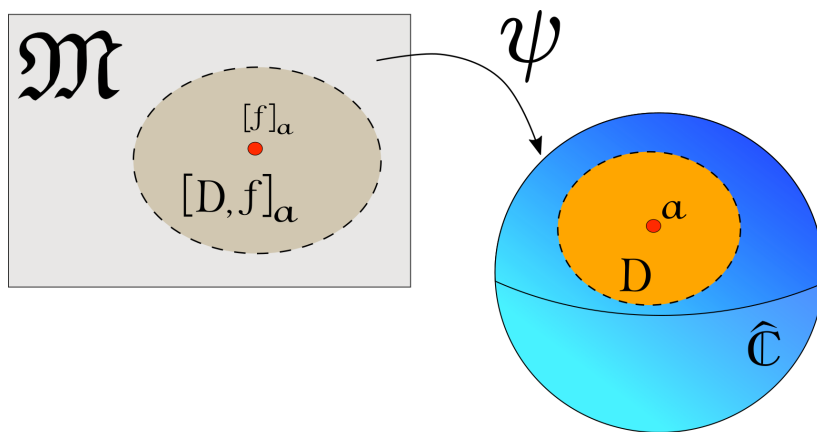


Figura 3.11.

Lema 3.9. La colección $\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathfrak{M} : \forall [f]_a \in A \exists [D, f]_a \subseteq A\}$ es una topología en \mathfrak{M} y con esta topología \mathfrak{M} es un espacio Hausdorff.

Demostración. Tomemos un elemento $[f]_a \in \mathfrak{M}$. Si D es cualquier disco en \mathbb{C} con centro en a entonces $[D, f]_a \in \mathfrak{M}$, por lo tanto $\mathfrak{M} \in \mathcal{T}$. Sean A y B dos elementos de \mathcal{T} tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $[f]_a \in A \cap B$, entonces existen dos discos abiertos en $\hat{\mathbb{C}}$, D_1 y D_2 con centro en a tales que $[D_1, f]_a \subseteq A$ y $[D_2, f]_a \subseteq B$. Como D_1 y D_2 están centrados en a , entonces $D_1 \subseteq D_2$ o $D_2 \subseteq D_1$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $D_1 \subseteq D_2$, entonces $[D_1, f]_a \subseteq [D_1, f]_a \cap [D_2, f]_a \subseteq A \cap B$, por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{T}$. Ahora tomemos una colección $\{A_i : i \in I\}$ de elementos de \mathcal{T} y sea $[f]_a \in \cup_{i \in I} A_i$, entonces debe existir un índice $i \in I$ tal que $[f]_a \in A_i$ y como $A_i \in \mathcal{T}$, existe un disco $[D, f]_a \subseteq A_i$ y ya que $A_i \subseteq \cup_{i \in I} A_i$, entonces $[D, f]_a \subseteq \cup_{i \in I} A_i$, por lo tanto la unión de los elementos A_i pertenece a \mathcal{T} . Así, \mathcal{T} es una topología para \mathfrak{M} .

Para demostrar que \mathfrak{M} es Hausdorff, tomemos dos elementos diferentes $[f]_a$ y $[g]_b$ en \mathfrak{M} . Si $a \neq b$, utilizamos el hecho de que $\hat{\mathbb{C}}$ es Hausdorff para obtener dos discos abiertos ajenos D_1 y D_2 centrados en a y b , contenidos en los dominios de f y g respectivamente. Entonces $[D_1, f]_a \cap [D_2, g]_b = \emptyset$, ya que si existiera un elemento $[h]_c \in [D_1, f]_a \cap [D_2, g]_b$, entonces c sería un elemento en $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Por otro lado, si $a = b$, entonces debe ocurrir que f es diferente de g en cualquier vecindad de a pues los elementos $[f]_a$ y $[g]_b$ son diferentes. Sea D un disco con centro en $a = b$. Veamos que $[D, f]_a \cap [D, g]_b = \emptyset$.

Para llegar a una contradicción supongamos que existe un elemento $[h]_c \in [D, f]_a \cap [D, g]_b$, entonces por definición de los discos en \mathfrak{M} tenemos que $[h]_c = [f]_c = [g]_c$ con $c \in D$, pero esto implica que f coincide con g en una vecindad abierta V de c , luego $V \cap D$ es un abierto contenido en D y ahí f y g son iguales, entonces por el teorema de la identidad tenemos que $f = g$ en D , lo cual no puede suceder por que D es una vecindad de a . Por lo tanto $[D, f]_a \cap [D, g]_b = \emptyset$ y esto demuestra que $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ es Hausdorff. \square

Estructura de superficie de Riemann de \mathfrak{M}

Observemos que la colección de discos $[D, f]_a$ con $[f]_a \in \mathfrak{M}$, forma una cubierta abierta de \mathfrak{M} . En el siguiente lema demostraremos que la función proyección restringida a cada disco en \mathfrak{M} es un homeomorfismo y podremos entonces dar un atlas para \mathfrak{M} .

Lema 3.10. *La restricción a cada disco $[D, f]_a$ de la función $\psi : \mathfrak{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida como $[f]_a = a$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para verificar la continuidad de ψ , tomemos un germen $[f]_a \in \mathfrak{M}$ y un abierto U que tenga $\psi([f]_a) = a$. Como U es abierto, existe un disco D con centro en a contenido en U y en el dominio de definición de f , entonces el disco $[D, f]_a$ en \mathfrak{M} es un abierto y cumple que $\psi([D, f]_a) = D \subseteq U$, por lo tanto ψ es continua.

Ahora vemos que $\psi|_{[D, f]_a} : [D, f]_a \rightarrow D$ es biyectiva. Si $[f]_c$ y $[f]_d$ son elementos del disco $[D, f]_a = \{[f]_c : c \in D\}$ tales que $\psi([f]_c) = c = d = \psi([f]_d)$, entonces $[f]_c = [f]_d$, por lo tanto $\psi|_{[D, f]_a}$ es inyectiva. Sea ahora un punto $\xi \in D$, sabemos que f está definida en todo punto de D , en particular existe el germen $[f]_\xi$ y este cumple que $\psi([f]_\xi) = \xi$, por lo tanto ψ es

suprayectiva. De este modo tenemos que ψ es biyectiva y por tanto existe la función inversa $\psi^{-1} : D \rightarrow [D, f]_a$ dada por $\psi^{-1}(d) = [f]_d$. Nos resta ver que esta inversa es continua.

Sea $d \in D$ y A un abierto de \mathfrak{M} que contenga a $\psi^{-1}(d) = [f]_d$. Como A es un abierto de la topología de \mathfrak{M} , por definición de ésta, existe un disco $[E, f]_d$ con centro en $[f]_d$ contenido en A , donde E es un disco en $\hat{\mathbb{C}}$ con centro en d , en el cual f está definida y es meromorfa. Notemos ahora que $\psi^{-1}(E) \subseteq [E, f]_b = \{[f]_c : c \in E\}$, ya que si $c \in E$ entonces $\psi^{-1}(c) = [f]_c \in [E, f]_b \subseteq A$. Por lo tanto ψ^{-1} es continua. \square

Ahora ya podemos definir las cartas coordenadas que conformarán un atlas para \mathfrak{M} . Tomemos un germe $[f]_a \in \mathfrak{M}$. Si $a \in \mathbb{C}$, entonces una carta en el punto $[f]_a$ es la pareja $([D, f]_a, \psi|_{[D, f]_a})$, donde $[D, f]_a$ es un disco abierto de la topología de \mathfrak{M} con centro en $[f]_a$. Si $a = \infty$ debemos considerar a la función $\mathfrak{J} \circ \psi|_{[D, f]_a}$ ⁴ pues esta composición es un homeomorfismo entre el disco $[D, f]_\infty$ y un disco abierto en \mathbb{C} con centro en 0, y así $([D, f]_\infty, \mathfrak{J} \circ \psi|_{[D, f]_a})$ es una carta en ∞ .

Nos falta verificar que las funciones de transición son analíticas. Supongamos que dos discos en \mathfrak{M} , $[D, f]_a$ y $[E, g]_b$ tienen intersección no vacía. Entonces D y E son discos abiertos en $\hat{\mathbb{C}}$ con centro en a y b respectivamente. Si $a, b \in \mathbb{C}$ entonces D y E tienen radio finito y por ello $\infty \notin D \cap E$, así que podemos tomar a la identidad en \mathbb{C} como función de transición, y ésta es analítica. Si $a = b = \infty$ entonces alguno de los discos está contenido en el otro, digamos $E \subseteq D$, por tanto $(\mathfrak{J} \circ \psi)([E, g]_\infty) \subseteq (\mathfrak{J} \circ \psi)([D, f]_\infty)$, es decir, $\mathfrak{J}(E) \subseteq \mathfrak{J}(D)$ y nuevamente podemos utilizar a la identidad en \mathbb{C} como función de transición, pues $\mathfrak{J}(E)$ y $\mathfrak{J}(D)$ son dos discos en \mathbb{C} con centro en 0. Finalmente, si $a = \infty$ y $b \in \mathbb{C}$ entonces D no tiene al cero y E no tiene a ∞ , así que $(\mathfrak{J} \circ \psi)(D) \cap \psi(E) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ y podemos utilizar a la función $z \mapsto 1/z$ la cual es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hemos demostrado así que \mathfrak{M} es una superficie de Riemann.

Conjuntos suficientes para la continuación analítica.

La propiedad que definimos a continuación es para subconjuntos de \mathfrak{M} (la colección de gérmenes de funciones meromorfas) y nos da una condición suficiente para poder hacer la continuación analítica de una función sobre una región de la esfera de Riemann.

Definición 3.11. Sea $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ es una región y \mathcal{G} un conjunto de gérmenes en \mathfrak{M} . Decimos que \mathcal{G} es *suficiente* para hacer continuación analítica en Ω si cumple las siguientes condiciones para cada punto a de Ω :

- (i) El conjunto $\mathcal{G}_a = \mathcal{G} \cap \psi^{-1}(a) \neq \emptyset$, es decir, \mathcal{G} tiene elementos de la forma $[f]_a$.
- (ii) Existe un disco abierto $D_a \subseteq \Omega$ con centro en a tal que si $[f]_a \in \mathcal{G}_a$, entonces f es meromorfa en D_a , es decir, los gérmenes en \mathcal{G}_a tienen un dominio en común.

⁴la función $\mathfrak{J} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se define como $\mathfrak{J}(z) = 1/z$ si $z \neq 0, \infty$, $\mathfrak{J}(0) = \infty$ y $\mathfrak{J}(\infty) = 0$

$$(iii) \cup\{\mathcal{G}_b : b \in D_a\} = \cup\{[D_a, f]_a : [f]_a \in \mathcal{G}_a\}$$

Proposición 3.12. *Si \mathcal{G} es suficiente para la continuación dentro de Ω , entonces todo germen $[f]_a$ en \mathcal{G} se puede continuar a lo largo de cualquier curva γ en Ω y cada uno de los gérmenes $[f]_{\gamma(t)}$ pertenece a \mathcal{G} .*

Demostración. Tomemos un germen $[f]_p \in \mathcal{G}_p$ y una curva $\gamma : I \rightarrow \Omega$ tal que $p = \gamma(0)$ (Figura 3.12). Como \mathcal{G} satisface la condición (ii), existe un disco D_p tal que f es meromorfa en D_p , y como la curva γ empieza en p , un segmento de esta se queda contenido en D_p , es decir, existe un punto $t \in I$ tal que $\gamma([0, t]) \subseteq D_p$. Entonces $[f]_p$ se puede continuar analíticamente hasta el punto $\gamma(t)$.

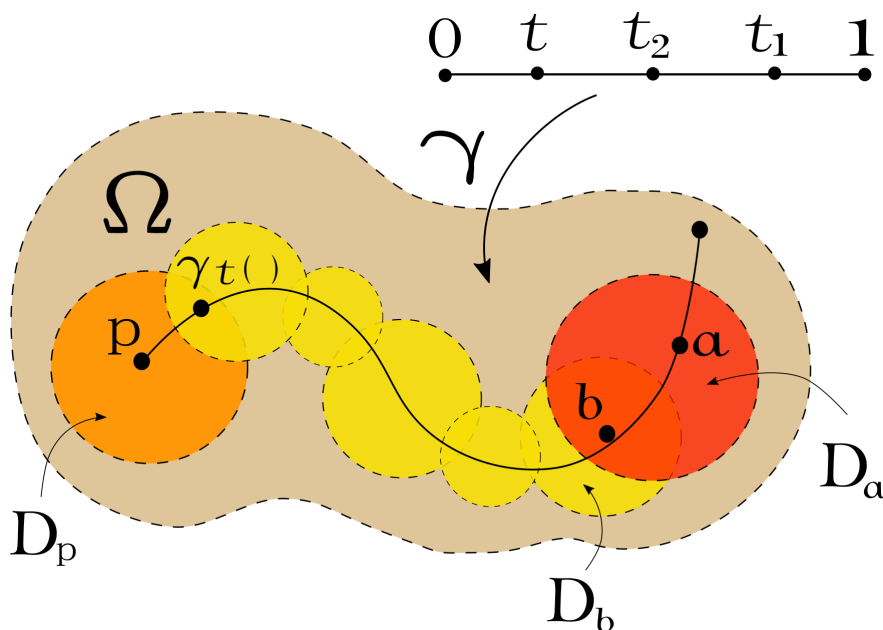


Figura 3.12.

Consideremos ahora el conjunto $K \subseteq I$ formado por los puntos $t \in I$ tales que $[f]_p$ se puede continuar analíticamente hasta $\gamma(t)$ utilizando gérmenes en \mathcal{G} . Hemos visto que K es diferente del vacío (pues contiene al intervalo $[0, t]$) y además está acotado por 1, así que existe su supremo, al cual llamaremos t_1 y sea $a = \gamma(t_1)$.

Por la condición (ii), tenemos que los gérmenes en \mathcal{G}_a tienen un dominio común $D_a \subseteq \Omega$, y por la continuidad de γ , existe un punto t_2 tal que $t_2 < t_1$ tal que $\gamma([t_2, t_1]) \subseteq D_a$. Llamemos $b = \gamma(t_2)$. Como t_1 es el supremo de K y $t_2 < t_1$, entonces $t_2 \in K$, así que el germen $[f]_p$ se puede continuar analíticamente a lo largo de γ hasta b utilizando gérmenes en \mathcal{G} , en particular, el germen resultante en b , llamémosle $[g]_b$ pertenece a \mathcal{G} , y existe su correspondiente disco D_b dado por la condición (ii). Luego, por la condición (iii), $[g]_b$ es igual a algún germen $[f]_b$

en un disco $[D_a, f]_a$ centrado en algún punto $[f]_a$ en \mathcal{G}_a . Entonces $f = g$ en $D_a \cap D_b$ y podemos usar el elemento de función (D_a, f) para extender la continuación de $[f]_p$ hasta el punto a .

Afirmamos que $t_2 = 1$. Demostremos esta afirmación por contradicción, para lo cual suponemos que $t_2 < 1$. Utilizando de nuevo la continuidad de γ , podemos hallar un punto $t_3 > t_1$ de forma que $\gamma(t_3) \in D_a$, pero esto implica que $[f]_p$ se puede continuar también hasta $\gamma(t_3)$ utilizando gérmenes en \mathcal{G} , lo cual no es posible ya que t_2 era el supremo con esta propiedad y es menor estricto que t_2 . Por lo tanto $t_2 = 1$ y de esta forma hemos demostrado que se puede continuar el germen $[f]_p$ a lo largo de toda la curva γ . \square

Corolario 3.13. *Si adicionalmente a las hipótesis de la proposición anterior se tiene que Ω es una región simplemente conexa, entonces cada germen en \mathcal{G} se extiende en toda la región Ω , a una función f , que cumple que para todo $a \in \Omega$, el germen de f en a , $[f]_a$ pertenece \mathcal{G} .*

Demostración. Sea $[f]_p$ un germen en \mathcal{G} . Dado que Ω un conjunto conexo por trayectorias (pues por definición un espacio simplemente conexo es conexo por trayectorias), para todo punto $q \in \Omega$ existe una curva γ en Ω que une a p con q . Por el lema anterior, el germen $[f]_p$ se puede continuar analíticamente a lo largo de γ definiendo así una extensión de f a un subconjunto de Ω que contiene a q . Dado que Ω es una región simplemente conexa, podemos recurrir al teorema 3.7 para asegurar que la extensión de f que hemos obtenido no depende de la curva γ , y como q fue un punto arbitrario en Ω , concluimos que se puede extender f a toda la región Ω .

Para ver que la función obtenida no es multivaluada, supongamos, para llegar a una contradicción, que existe un germen $[f]_a$ y una curva cerrada γ tal que al hacer la continuación de este a lo largo de γ , obtenemos un germen diferente en a , digamos $[\hat{f}]_a$. Eso implica que rodeamos con la curva al menos un punto de ramificación. Por otro lado, dado que los puntos de ramificación son aislados, podemos hallar una curva cerrada σ que empiece y termine en a , y que no rodee a ningún punto de ramificación, entonces al hacer la continuación del germen $[f]_a$ a lo largo de ella, obtenemos el mismo germen. Por el teorema de monodromía, las dos continuaciones producen el mismo germen, pues al ser la región simplemente conexa, γ y σ son homótopas. Por lo tanto $[f]_a = [\hat{f}]_a$, lo cual es una contradicción. \square

La proposición 3.12 y su corolario son útiles para decir cuándo una función admite continuación analítica sobre una región y las utilizaremos mas adelante. Ahora vamos a definir la superficie de riemann de una función f sobre una región en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 3.14. Sea $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una región, $D \subseteq \Omega$ un disco con centro en a y (D, f) un elemento de función. Para obtener la *superficie de Riemann no ramificada de f sobre Ω* hacemos lo siguiente:

1. Consideramos todas las continuaciones analíticas de (D, f) a lo largo de curvas γ_i ($i \in I$) contenidas en Ω , con extremos a y a_i (Figura 3.13).
2. Con cada continuación obtenemos un elemento de función (D_i, f_i) y el disco D_i es homeomorfo vía la función ψ al disco $[D_i, f_i]_{a_i}$.

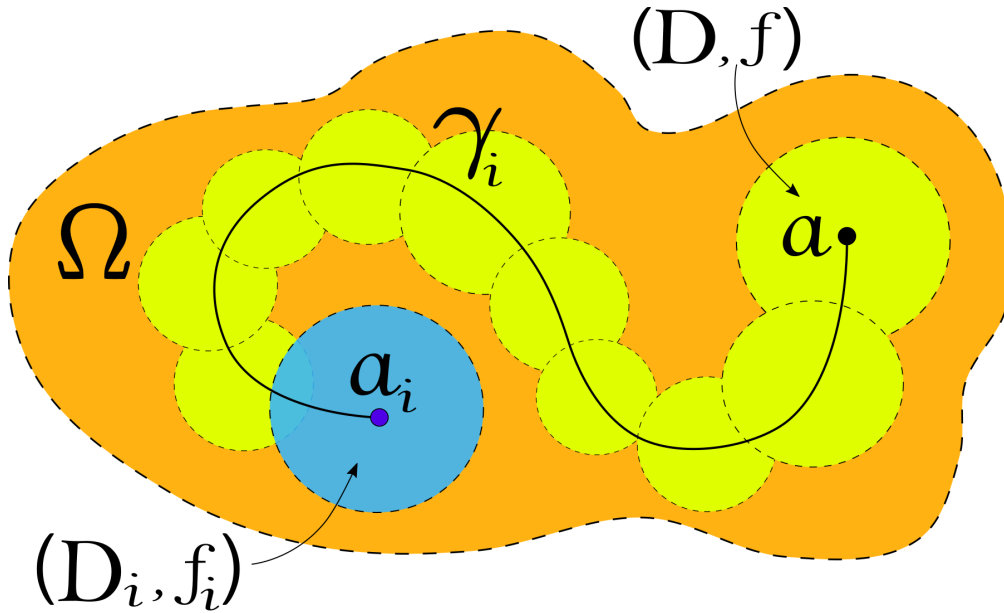


Figura 3.13.

3. La unión de los discos $[D_i, f_i]_{a_i}$ ($i \in I$) obtenidos de esta manera, es la *superficie de Riemann no ramificada de f sobre Ω* y la denotamos por $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a)$, es decir

$$\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a) = \bigcup_{i \in I} [D_i, f_i]_{a_i} \tag{3.3}$$

Este conjunto $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a)$ es un abierto contenido en \mathfrak{M} y por lo tanto es, en efecto, una superficie de Riemann, además está únicamente determinado por el germen de f en a , $[f]_a$, y algunas veces será necesario especificarlo, entonces diremos que $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a)$ es la superficie de Riemann no ramificada de f sobre Ω *partiendo de $[f]_a$* . Dado un punto $x \in \Omega$, al conjunto de gérmenes en x que pertenecen a la superficie $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a)$ lo llamamos la *fibra de x* .

Para tener una imagen en mente, recordemos que cada disco $[D_i, f_i]_{a_i}$ en \mathfrak{M} es homeomorfo al disco abierto $D_i \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, consideremos entonces el espacio $X = \sqcup_{i \in I} D_i$ que es la unión ajena⁵ de los discos D_i y definamos en él una relación \mathcal{R} de la siguiente manera: para $a \in D_i$ y $b \in D_j$, $a \mathcal{R} b$ si $[f_i]_a = [f_j]_b$. Esta es una relación de equivalencia en X y al hacer el cociente de X por esta relación obtenemos la manera clásica de representar a una superficie de Riemann, que es una colección de abiertos pegados en donde vamos a redefinir la función f que antes era “multivaluada” (Figura 3.14 (a)).

⁵Consideramos la unión ajena porque podría suceder que dos discos indexados con índices diferentes D_i y D_j sean iguales como conjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$.

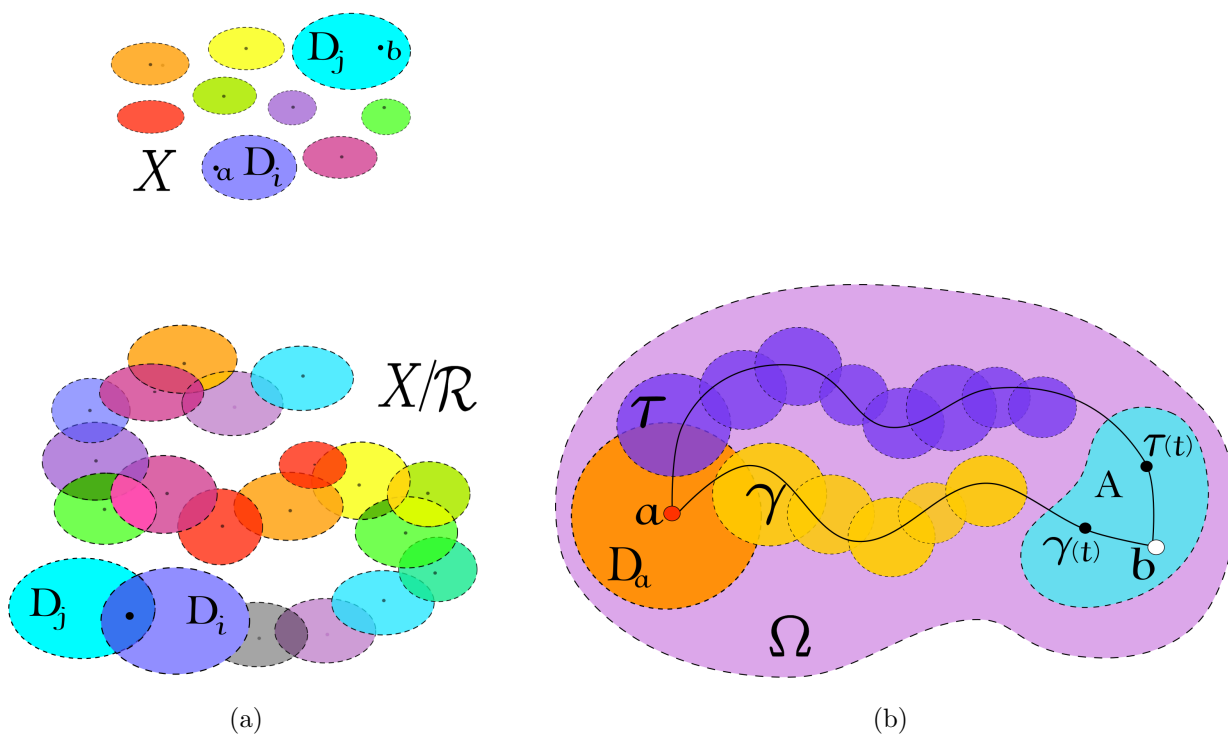


Figura 3.14.

Una vez definida la superficie de Riemann no ramificada de una función meromorfa sobre una región, lo que sigue es definir las singularidades de la función para poder dar la superficie de Riemann Ramificada de f .

Definición 3.15. Sea $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una región, (D_a, f) un elemento de función con $D_a \subseteq \Omega$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva que inicia en a y termina en b . Decimos que γ conduce a f a una singularidad si f admite una continuación analítica a lo largo de $\gamma|_{[0, 1-\varepsilon]}$ para todo $\varepsilon > 0$, pero no a lo largo de γ . Si τ es otra curva con los mismos extremos que γ (Figura 3.14 (b)) decimos que τ conduce a f hacia la misma singularidad si para cualquier vecindad A de b existe un $t \in [0, 1)$ tal que $\gamma(t), \tau(t) \in A$ y las superficies $\mathfrak{M}(A, [f]_{\gamma(t)})$ y $\mathfrak{M}(A, [f]_{\tau(t)})$ son iguales. En este caso diremos que γ está relacionada con τ . Esta relación es de equivalencia y a cada clase la llamaremos *singularidad de f en Ω definida por γ* . Denotamos como f_γ a la clase de γ . Decimos que $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a)$ es una *superficie regular* sobre Ω si f no tiene singularidades en Ω , es decir, el elemento (D_a, f) admite continuación analítica a lo largo de cualquier curva $\gamma \subseteq \Omega$ que empiece en a .

Ejemplo 3.16. El logaritmo complejo admite continuación analítica a lo largo de cualquier curva en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ excepto si la curva tiene como extremo final a $z = 0$ pues en este punto el logaritmo no está definido. Por lo tanto esta función es regular en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definición 3.17. Sea $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una región, (G, f) un elemento de función con $G \subseteq \Omega$ y f_γ una singularidad de f en Ω .

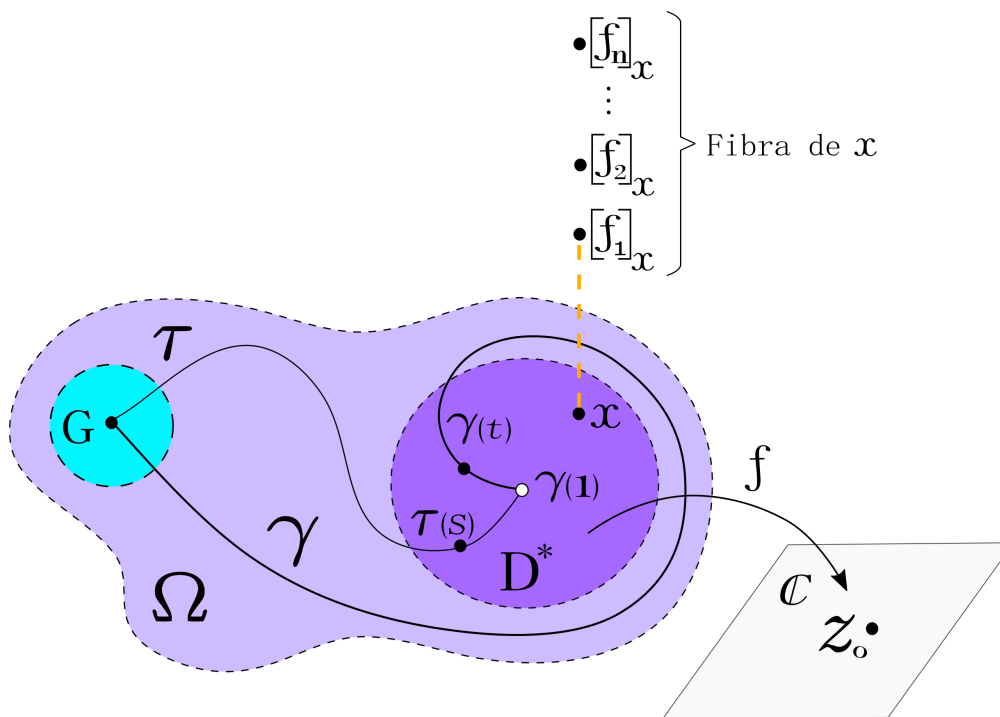


Figura 3.15.

1. Decimos que la singularidad f_γ es *aislada* si existe un disco D con centro en $\gamma(1)$ tal que la superficie de Riemann no ramificada de f sobre el disco agujerado $D^* = D \setminus \{\gamma(1)\}$ partiendo de un punto $\gamma(t) \in D^*$ es regular⁶ sobre D^* (Figura 3.15).
2. Si $z_o \in \hat{\mathbb{C}}$, decimos que la singularidad f_γ admite a z_o como límite si para cualquier curva τ en la clase de f_γ se tiene que $\lim_{s \rightarrow 1} f(\tau(s)) = z_o$.
3. La singularidad f_γ es *algebraica* si es aislada, admite un límite en $\gamma(1)$ y la fibra de cada punto x en D^* es finita⁷.

Puntos de ramificación

Sea Ω una región en $\hat{\mathbb{C}}$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva con extremos $\gamma(0)$ y $\gamma(1) = b$. Supongamos que f es una función analítica definida en $\Omega \setminus \{b\}$ y que γ conduce a f a una singularidad algebraica, esto implica entre otras cosas, que existe un disco D con centro en b tal que la superficie de Riemann no ramificada de f sobre $D^* = D \setminus \{b\}$ es regular. Nos

⁶Ver definición 3.15.

⁷Aquí D es el disco con centro en $\gamma(1)$ que existe por ser f_γ una singularidad aislada y la fibra de x es el conjunto de gérmenes en x que pertenecen a la superficie de Riemann no ramificada de f sobre D^* .

interesa analizar el comportamiento de la fibra de los puntos de la forma $\gamma(t)$ que están en el disco agujerado. Fijemos pues un punto $\gamma(t) = x \in D^*$ y observemos que su fibra se obtiene al hacer la continuación analítica de f a lo largo de una curva cerrada que empieza y terminan en x , llamémosla β . Si β no rodea al centro del disco, entonces es homótopa a la curva constante de valor x y la continuación analítica de f a lo largo de β no produce ningún germen nuevo (por el teorema de monodromía). Supongamos entonces que β rodea a b y sea $[f]_x$ el germen con el que empezamos a hacer la continuación.

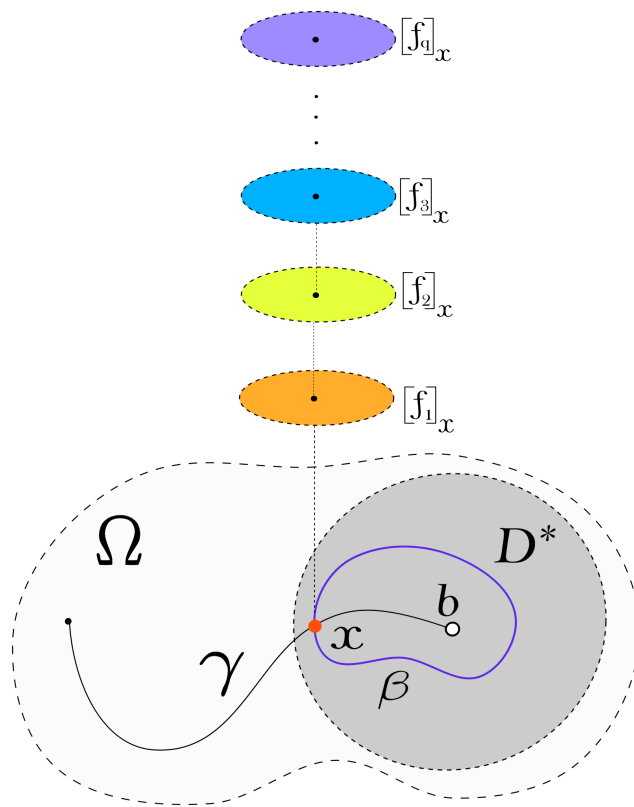


Figura 3.16.

Realizando sucesivas continuaciones de $[f]_x$ a lo largo de β obtenemos una colección de gérmenes en x que pertenecen a $\mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$ (esto es la superficie de Riemann no ramificada de f sobre D^* , partiendo de $[f]_x$) digamos $[f]_1, [f]_2, \dots, [f]_n, \dots$ pero como los germenes en x que pertenecen a $\mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$ son finitos⁸ existe algún natural q tal que $[f]_x = [f]_q$. Supongamos que q es el menor natural con esta propiedad (Figura 3.16). Dado que β genera al grupo fundamental de D^* , cualquier otra curva α que rodee a b será homótopa a β y los germenes que obtengamos haciendo la continuación analítica de $[f]_x$ a lo largo de α serán exactamente $[f]_1, [f]_2, \dots, [f]_q$. Por lo tanto la fibra de x es el conjunto $\mathcal{F}_x = \{[f]_1, [f]_2, \dots, [f]_q = [f]_x\}$.

⁸pues supusimos que la superficie de Riemann no ramificada de f es regular sobre D^*

Observación 3.18. Con el fin de ver que todas las fibras tienen el mismo número de elementos, elijamos otro punto $z \in D^*$ y sea σ una curva simple que empiece en x y termine en z y que no rodee al centro del disco. La continuación de cada germen $[f_i]_x$ a lo largo de σ nos da un germen $[g_i]_z$ en la fibra de z y de este modo obtenemos q gérmenes diferentes⁹ en z .

Ahora supongamos que $[h]_z$ es un germen en la fibra de z . Entonces ese germen se obtuvo de hacer la continuación analítica de algún $[g_i]_z$ a lo largo de una curva cerrada μ que empieza y acaba en z y que rodea a b . Sea $[k]_x$ el germen que obtenemos de hacer la continuación analítica de $[h]_z$ a lo largo de σ^{-1} . Notemos ahora que $\rho = \sigma * \mu * \sigma^{-1}$ es una curva cerrada que empieza en x , acaba en x y rodea a b , además la continuación analítica del germen $[f_i]_x$ a lo largo de ρ nos da el germen $[k]_x$, por lo tanto es uno de los gérmenes de la fibra de x , digamos $[f_j]_x$ pero como la continuación de este germen a lo largo de σ es único, entonces $[h]_z = [g_j]_z$. Concluimos entonces que la fibra de z tiene exactamente q elementos.

Como la singularidad f_γ es algebraica, entonces existe un número $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que para cualquier curva τ en la clase de γ el límite $\lim_{t \rightarrow 1} f(\tau(t))$ es igual a z_0 . Usando este hecho y la observación 3.18, vamos a definir un nuevo germen en el punto b , para hacerlo consideremos el conjunto de gérmenes formado por las fibras de cada punto en D^* , esto es $\bigcup_{x \in D^*} \mathcal{F}_x = \mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$. El siguiente lema nos dice que esta superficie es homeomorfa a un disco abierto en \mathbb{C} .

Lema 3.19. *Sea D un disco abierto en \mathbb{C} con centro en b y f una función definida en el disco agujerado D^* . La superficie no ramificada de f sobre D^* partiendo de un germen $[f]_x$, $\mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$, es homeomorfa a un disco abierto en $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Lo primero que haremos es organizar de alguna manera a los gérmenes de $\mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$. Sea q la cardinalidad de la fibra \mathcal{F}_z de cada punto $z \in D^*$. Consideremos un segmento de línea m que una a b con un punto en la frontera de D y llamemos M al disco D menos este segmento, es decir, $M = D \setminus m$. Ahora fijemos un punto $x_o \in M$ y sea $\{[f_1]_{x_o}, [f_2]_{x_o}, \dots, [f_q]_{x_o}\}$ la fibra de x_o (Figura 3.17 (a)). Notemos que M es una región simplemente conexa y la colección de gérmenes $\{[f]_c : c \in M\}$ es suficiente para la continuación analítica en M (ver definición 3.11) así que por el corolario 3.13 tenemos que cada germen en la fibra de x_o se puede extender a una función definida en toda la región M . Llamemos h_1, h_2, \dots, h_q a estas q funciones (Figura 3.17 (b)).

Si y es otro punto en M , entonces hay q gérmenes en la fibra de y : $[f_1]_y, [f_2]_y, \dots, [f_q]_y$, y cada germen $[f_i]_y$ coincide con alguna de las funciones h_1, h_2, \dots, h_q en una vecindad de y , pues estas últimas fueron construidas usando exactamente a los gérmenes en las fibras de los puntos de M , así que sin pérdida de generalidad podemos decir que la fibra de y es el conjunto de gérmenes $[h_1]_y, [h_2]_y, \dots, [h_q]_y$, donde h_1, h_2, \dots, h_q son las funciones obtenidas a partir de la fibra de x_o . De este modo hemos organizado en q paquetes a los gérmenes en los puntos de M .

⁹Si estos gérmenes no fueran diferentes dos a dos, entonces la continuación analítica a lo largo de la curva σ^{-1} no sería única

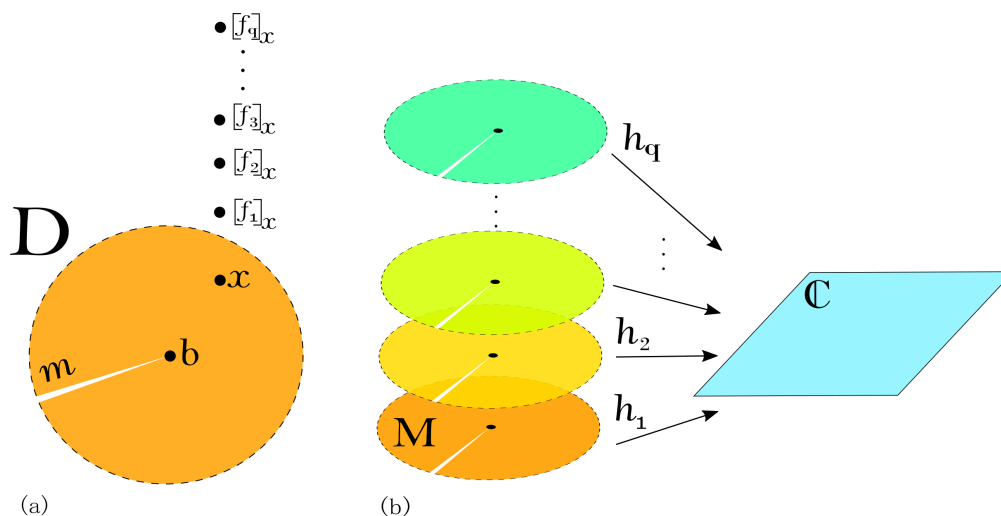


Figura 3.17.

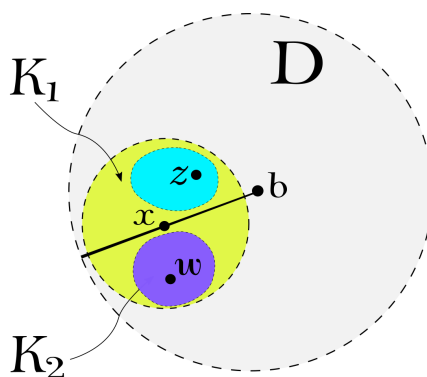


Figura 3.18.

Ahora vamos a organizar a los gérmenes en la fibra de los puntos del segmento $m \setminus b$. Sea $x \in m \setminus b$ y $[f_i]_x$ un germen en la fibra de x . Tomemos un disco K con centro en x en donde esté definida la función f_i , pero de un radio suficientemente pequeño para que su intersección con M sean dos abiertos ajenos K_1 y K_2 (Figura 3.18). Sea z un punto en K_1 y observemos que uno de los gérmenes en la fibra de z es $[f_i]_z$, pero como $z \in M$, entonces $f_i = h_j$ para alguna $j \in \{1, \dots, q\}$, esto quiere decir que $f_i = h_j$ en una vecindad de z y por el teorema de la identidad, estas dos funciones son iguales en toda la región K_1 . Si ahora tomamos un punto $w \in K_2$ y consideramos el germen $[f_i]_w$, también tenemos que f_i es igual a alguna función h_s en una vecindad de w y por el teorema de la identidad, estas dos funciones serán iguales en toda la región K_2 .

Vamos a renombrar al germen $[f_i]_x$ como $[f_{j_s}]_x$ y hacemos esto con los demás gérmenes de

la fibra de x para que queden etiquetados de la siguiente manera: $[f_{12}]_x, [f_{23}]_x, \dots, [f_{q1}]_x$. De este modo organizamos a los gérmenes en los puntos del segmento $m \setminus b$. Ahora ya podemos empezar a construir el homeomorfismo entre $\mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$ y un disco abierto de $\hat{\mathbb{C}}$, este mapeo será la composición de otros tres. Vamos a distinguir dos casos, uno cuando $b \in \mathbb{C}$ y el otro cuando $b = \infty$. Supongamos primero que $b \in \mathbb{C}$. El primer es la función proyección definida anteriormente $\psi : \mathfrak{M}(D^*, [f]_x) \rightarrow D^*$ dada por $[f]_c \mapsto c$. El segundo mapeo es simplemente trasladar el disco D al origen, es decir $z \mapsto z - b$. La tercera función está dada por la regla $z \mapsto e^{\frac{1}{q} \log(z)} = z^{\frac{1}{q}}$. Supongamos que ε es el radio de D y sea E^* el disco agujerado con centro en cero de radio $\varepsilon^{\frac{1}{q}}$. Definimos entonces la transformación $\Phi : \mathfrak{M}(D^*, [f]_x) \rightarrow E^*$ como $\Phi([f]_c) = (c - b)^{\frac{1}{q}}$.

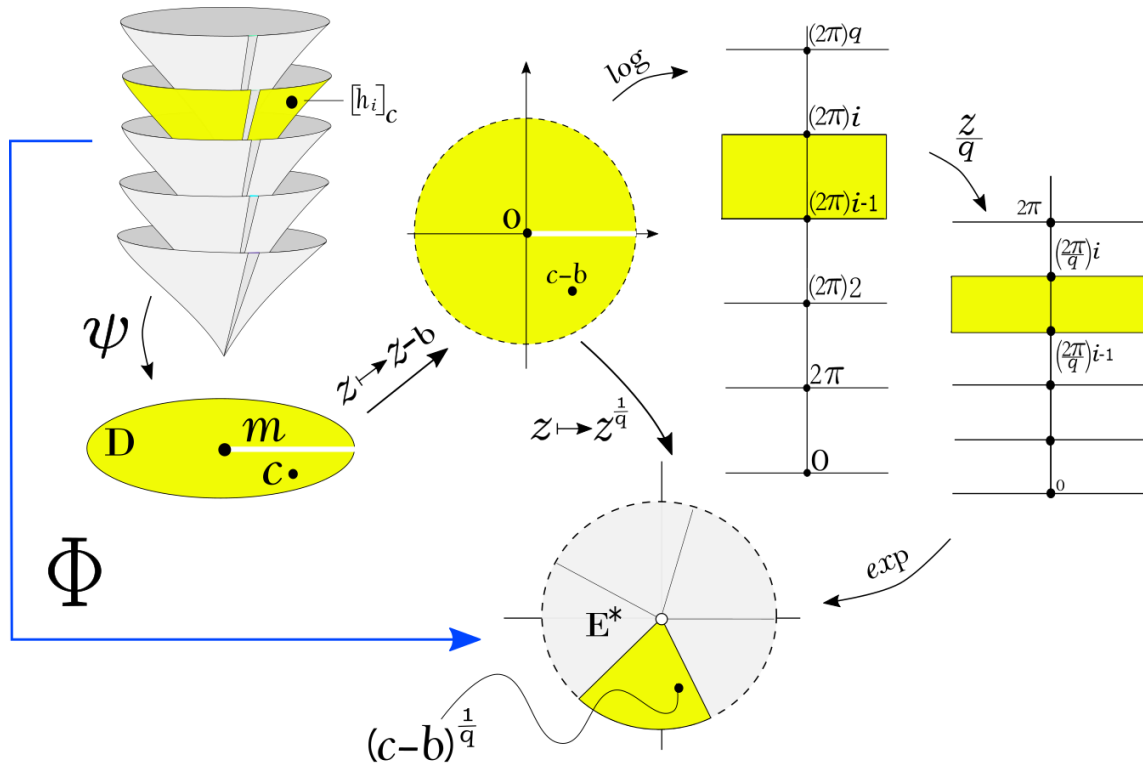


Figura 3.19.

Para ver que Φ es un homeomorfismo es necesario especificar las ramas del logaritmo que vamos a utilizar en la función $z \mapsto z^{\frac{1}{q}}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que el conjunto $m - b$ es una recta contenida en \mathbb{R} . Sea $[f]_c$ un germen en $\mathfrak{M}(D^*, [f]_x)$.

- Si $c \notin m$, sabemos que $[f]_c = [h_i]_c$ para alguna $i \in \{1, \dots, q\}$, entonces

$$\Phi([h_i]_c) = e^{\frac{1}{q} \log(c-b)} \quad \text{usando la rama del logaritmo } [2\pi(i-1), 2\pi i)$$

- Si $c \in m$, entonces $[f]_c = [f_{(i-1)i}]_c$ y utilizaremos la rama $[2\pi(i-1) - \pi, 2\pi i - \pi)$

De este modo la función Φ es continua, biyectiva y podemos definir su inversa, que también será una función continua. Si $c = \infty$ el único cambio que hay que hacer es que en lugar de la función $z \mapsto z - b$ usamos $z \mapsto \frac{1}{z}$ y de este modo obtenemos un disco centrado en el origen y lo demás funciona igual. \square

Series de Puiseux

Ahora recordemos que empezamos con una singularidad algebraica f_γ y esto implica que existe un número $z_o \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{t \rightarrow 1} f(\tau(t)) = z_o = f(b)$ para cualquier curva τ que conduzca a f hacia la misma singularidad que γ . Usando la notación del lema anterior, vamos a definir un germen en el punto b . Definamos la función $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente forma (Figura 3.20)

$$F(\xi) = \begin{cases} h_i(\xi^q + b) & \text{si } \arg(\xi) \in \left(\frac{2\pi(i-1)}{q}, \frac{2\pi i}{q}\right) \\ f_{i(i+1)}(\xi^q + b) & \text{si } \arg(\xi) = \frac{2\pi(i-1)}{q} \end{cases}$$

Como nuestra función inicial f es analítica en D^* , cada función h_i (ó $f_{i(i+1)}$) es analítica en

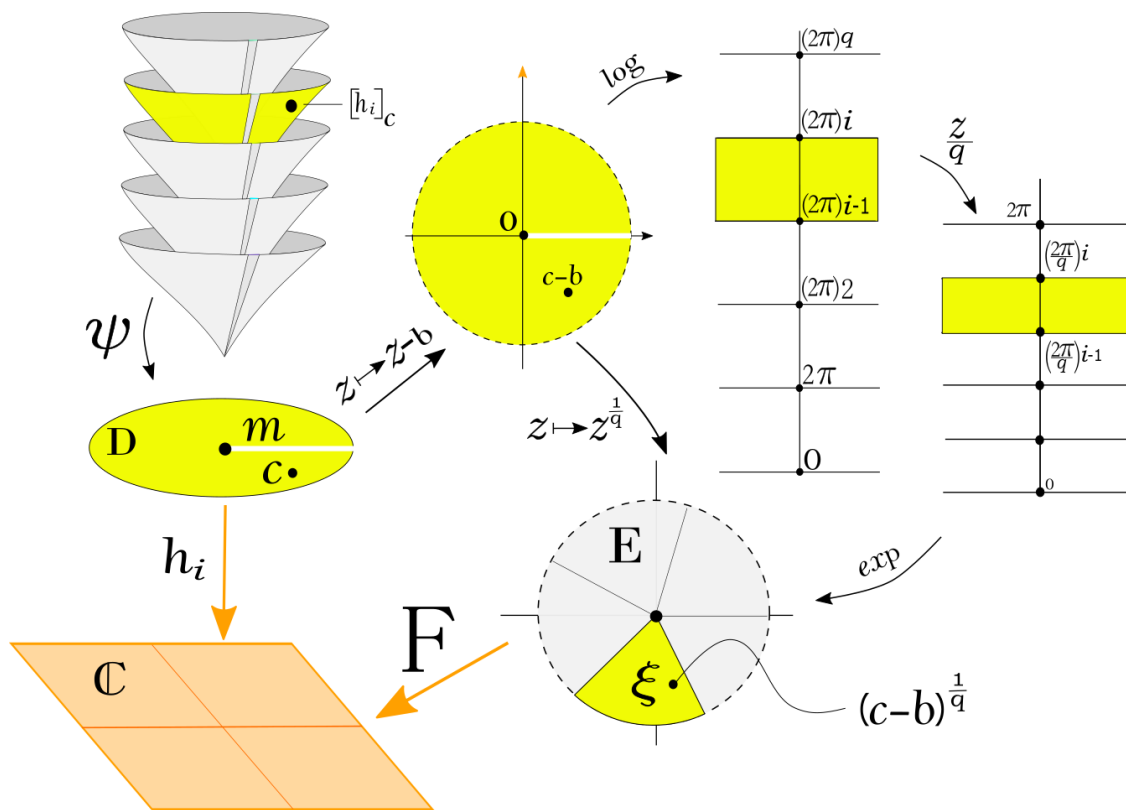


Figura 3.20.

D^* , entonces F es analítica el disco agujerado E^* y podemos expresarla como una serie de Laurent $F(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \xi^n$ y usando esta expresión podemos dar una para cada función h_i haciendo el cambio de variable $\xi = (z - b)^{\frac{1}{q}}$

$$h_i(z) = F\left((z - b)^{\frac{1}{q}}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - b)^{\frac{n}{q}}$$

Observemos que la función $(z - b)^{\frac{1}{q}}$ tiene q valores dependiendo de la rama del logaritmo que escojamos, y cada una de estas elecciones (o equivalentemente, cada uno de estos valores) representa una de las funciones h_i . A este tipo de series con exponentes racionales se le conoce como series de Puiseux. Si $b = \infty$ entonces esta serie se escribe como

$$h_i(z) = F\left(\frac{1}{z^{1/q}}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n/q}}$$

Para extender la función F al punto $\xi = 0$ veamos que el $\lim_{z \rightarrow b} h_i(z)$ existe y es el mismo para todas las funciones h_i . Consideremos una curva ρ que empiece en $x \in D^*$ y acabe en b . Dado que $\lim_{t \rightarrow 1} \rho(t) = b$, es equivalente analizar el $\lim_{t \rightarrow 1} h_i(\rho(t))$. Ahora, el germen $[h_i]_x$ se obtuvo de hacer la continuación analítica del germen $[f]_x$ a lo largo de una curva β que empieza y termina en x (o alguna potencia de β) y que rodea a b . Luego, la concatenación $\beta * \rho$ es una curva que empieza en x y acaba en b , y conduce a f hacia la misma singularidad que γ , además $z_o = \lim_{t \rightarrow 1} f(\beta * \rho(t)) = \lim_{t \rightarrow 1} h_i(\rho(t))$. Por lo tanto para cada $i = 1, \dots, q$, $\lim_{z \rightarrow b} h_i(z) = z_o$. Definimos entonces $F(0) = z_o$.

Observemos que F es una función meromorfa definida en todo E , entonces podemos considerar el germen $[F]_0$. Vamos a definir el germen de f en b como $[f]_b = [F]_0$, es decir, todas las funciones que coinciden con F en una vecindad de $\xi = 0$. El germen $[f]_b$ es llamado un *germen de ramificación de orden $q - 1$ asociado a la singularidad f_γ* . Es muy importante observar aquí que si δ define otra singularidad algebraica f_δ diferente a f_γ , entonces obtendremos otro germen de ramificación $[\widehat{f}]_b$ diferente al germen $[f]_b$, pues las superficies de Riemann no ramificadas de f en D^* partiendo de dos gérmenes de la forma $[f]_{\gamma(t)}$ y $[f]_{\delta(t)}$ (para un t suficientemente cerca de 1) son diferentes porque γ y δ no están en la misma clase de equivalencia.

Definición 3.20. Sea Ω una región en $\widehat{\mathbb{C}}$, (D, f) un elemento de función, donde D es un disco con centro en a contenido en Ω . Supongamos que todas las singularidades de f en Ω son algebraicas. Para obtener la *superficie de Riemann de f sobre Ω* hacemos lo siguiente:

1. Construimos la superficie de Riemann no ramificada de f sobre Ω , que hemos denotado como $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a)$ y consideramos todas las curvas γ_i en Ω que conducen a f a alguna singularidad algebraica.
2. Sabemos que cada singularidad algebraica γ_i tiene asociado el germen de ramificación $[f]_{\gamma_i(1)}$. Llamemos \mathfrak{R} al conjunto de gérmenes de ramificación.

3. Definimos la *superficie de Riemann de f sobre Ω* como $\mathfrak{M}(\Omega, [f]_a) \cup \mathfrak{N}$, es decir, la unión de la superficie de Riemann no ramificada de f sobre Ω con todos los gérmenes de ramificación que obtuvimos en el paso anterior. Denotamos a esta superficie como $\mathcal{S}(\Omega, f)$.

La *fibra* de un punto $z \in \Omega$ es el conjunto de gérmenes en z (incluyendo los de ramificación) que pertenecen a la superficie $\mathcal{S}(\Omega, f)$ y la denotamos como \mathcal{F}_z . Para demostrar que $\mathcal{S}(\Omega, f)$ es en efecto una superficie de Riemann debemos darle una topología, luego una cubierta de abiertos de esta topología y después un homeomorfismo entre cada elemento de la cubierta y un abierto de \mathbb{C} de modo que las funciones de transición sean analíticas. Comencemos tomando un germen $[f]_x$ en $\mathcal{S}(\Omega, f)$ y D un disco abierto con centro en x . Si $[f]_x$ es de ramificación, definimos un disco con centro en $[f]_x$ como $[D, f]_x = \{[f]_z \in \mathfrak{M}(D^*, [f]_x)\} \cup [f]_x$, esto es, todos los gérmenes de la superficie de Riemann no ramificada de f sobre el disco agujerado D^* junto con el germen $[f]_x$. Si $[f]_x$ no es de ramificación, seguimos considerando los discos de la forma $[D, f]_x = \{[f]_a : a \in D\}$. La colección $\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathcal{S}(\Omega, f) : \forall [f]_x \in A \exists [D, f]_x \subseteq A\}$ es una topología para $\mathcal{S}(\Omega, f)$ y con ella es un espacio Hausdorff. Ahora para cada germen $[f]_x$ en $\mathcal{S}(\Omega, f)$ elijamos un disco $[D, f]_x$ con centro en este germen de modo que no contenga ningún germen de ramificación, salvo quizás $[f]_x$. La colección $\mathcal{A} = \{[D, f]_x : [f]_x \in \mathcal{S}(\Omega, f)\}$ es una cubierta abierta para esta superficie y cada uno de sus elementos es homeomorfo¹⁰ a un disco abierto de \mathbb{C} , Por lo tanto sólo nos queda verificar que las funciones de transición son analíticas.

Supongamos que dos discos $[D, f]_a$ y $[E, f]_b$ se intersecan y son tales que a lo mas su centro es un germen de ramificación. Si $a = b$ entonces $D \subseteq E$ o $E \subseteq D$ y los gérmenes $[f]_a$ y $[f]_b$ son iguales, por lo que la función de transición es la identidad. Supongamos entonces que $a \neq b$. En la intersección de los discos $[D, f]_a$ y $[E, f]_b$ sólo puede haber puntos que no sean de ramificación (de lo contrario, en cada disco habría mas de un punto de ramificación, pero tomamos cada disco de la cubierta de forma que esto no sucediera). Supongamos que el grado de ramificación de $[f]_a$ es q y el grado de ramificación de $[f]_b$ es r (la función que vamos a dar es válida para cuando $q = 1$ o $r = 1$, es decir, cuando sólo uno de los puntos, o ninguno, es de ramificación). Sea $[f]_c$ un punto en la intersección de los dos discos. Supongamos primero que $a \neq \infty$ y $b \neq \infty$. En este caso la función de transición está dada por $z \mapsto [(z^q + a) - b]^{1/r}$. Si $a = \infty$ y $b \neq \infty$, la función de transición es $z \mapsto (\frac{1}{z^q} - b)^{1/r}$, y si $a \neq \infty$ y $b = \infty$, la función de transición es $\frac{1}{(z+a)^{q/r}}$. En cualquier caso la función de transición es analítica.

3.2. Superficie de una función algebraica

Recordemos que una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es algebraica si satisface la igualdad $P(z, f(z)) = 0$ donde $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de la forma $P(z, w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z)$,

¹⁰Vía la proyección ψ o el mapeo Φ definido en el lema 3.19 extendido al germen de ramificación como $\Phi([f]_x) = 0$.

en el cual cada coeficiente $a_k(z)$ es a su vez un polinomio en z con coeficientes en \mathbb{C} . Decimos que f es una *función algebraica asociada al polinomio P* . El siguiente lema nos dice que las funciones que obtenemos de hacer la continuación analítica de una función algebraica, son también funciones algebraicas.

Lema 3.21. *Sea (D, f) un elemento de función tal que $P[z, f(z)] = 0$ para toda $z \in D$. Si $(D, f) \sim (D_1, g_1) \sim \cdots \sim (D_k, g_k)$ es una continuación analítica de (D, f) entonces $P[z, g_k(z)] = 0$ para toda $z \in D_k$.*

Demostración. Definamos la función $H(z) = P[z, f(z)] : D \rightarrow \mathbb{C}$. Notemos que esta es la función constante cero. Podemos definir también las funciones $H_j(z) = P[z, g_j(z)]$ en cada disco D_j . Luego, en $D_j \cap D_{j+1}$ tenemos que $g_j = g_{j+1}$, esto implica que en esas intersecciones $H_j = H_{j+1}$ y como $H = H_1$ en $D \cap D_1$ entonces H_1 es la función constante cero (por el teorema de la identidad) y esto implica que cada función $H_j \equiv 0$, en particular $H_k(z) = P[z, g_k(z)] = 0$ para todo $z \in D_k$. \square

Sea P un polinomio de grado n en w . En general para $z \in \hat{\mathbb{C}}$ fija, la ecuación $P(z, w) = 0$ es una ecuación polinomial con n raíces diferentes en w ; a tales valores de z los llamamos **puntos regulares** de P . Los valores excepcionales de z conforman el conjunto C_P de **puntos críticos** y satisfacen alguna de las siguientes condiciones:

1. $z = \infty$
2. $a_0(z) = 0$
3. $P(z, w) = 0$ tiene una raíz repetida w .

Lema 3.22. *El conjunto de puntos críticos de cualquier polinomio $P(z, w)$ irreducible es finito.*

Demostración. Notemos que sólo hay un número finito de puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ que satisfacen 1 o 2, a saber, los ceros de $a_0(z)$ y el infinito. Con el fin de mostrar que los puntos que satisfacen la tercera condición también son un número finito, consideremos a la derivada P_w de P respecto a la variable w y veamos que ella y P son primos relativos¹¹. Supongamos que estos polinomios tienen un factor S en común, entonces $P = ST$ y $P_w = SU$. Como P es irreducible, alguno de los polinomios S o T es constante. Si T es constante, entonces S tiene el mismo grado en w que P , lo cual implica que el grado de P_w en w es al menos n , pero esto no pasa, por que el grado en w de P_w es $n - 1$. Entonces S es constante. Así, los únicos factores en común de P y P_w son constantes, por lo tanto estos polinomios son primos relativos.

Utilizando ahora el teorema B.5, tenemos que P y P_w tienen raíces en común sólo para una cantidad finita de puntos $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto el conjunto de puntos críticos C_P es finito. \square

En un punto regular $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ la ecuación $P(a, w) = 0$ tiene n raíces diferentes w_1, \dots, w_n . El siguiente resultado muestra que para todo z en una vecindad de a las raíces de $P(z, w) = 0$ son simples y diferentes.

¹¹Dos polinomios $P(z, w)$ y $Q(z, w)$ son primos relativos (o coprimos) si no tienen ningún factor en común, excepto por constantes.

Lema 3.23. Sea $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ y sean w_1, \dots, w_n la raíces de $P(a, w) = 0$, entonces existe un disco D con centro en a y elementos de funciones analíticas $(D, f_1), \dots, (D, f_n)$ tales que:

1. $f_i(a) = w_i$ para $i = 1, \dots, n$
2. Para cada $z \in D$ las soluciones de $P(z, w) = 0$ son $w = f_i(z)$ con $i = 1, \dots, n$, todas simples y diferentes.

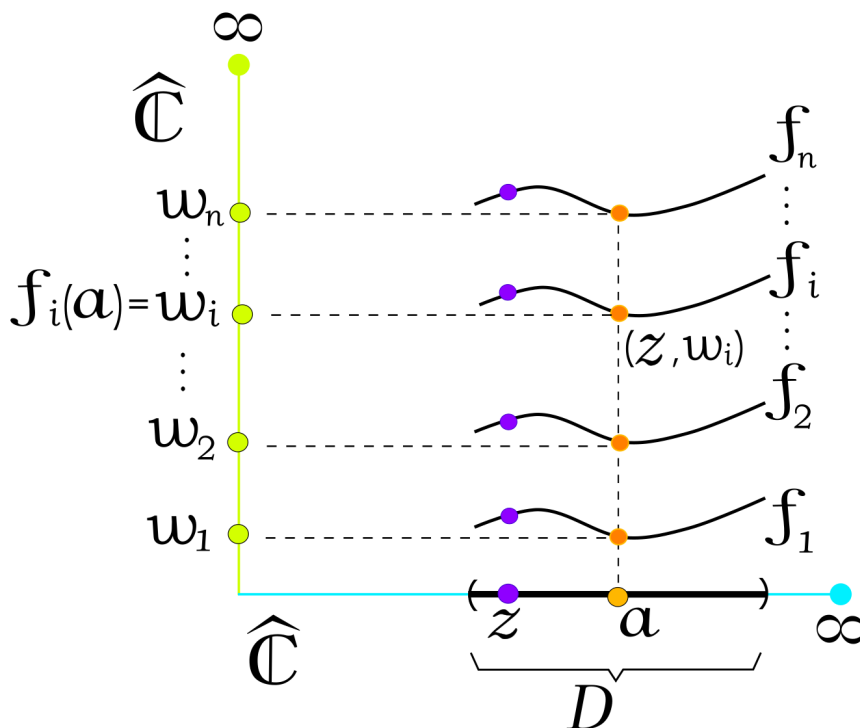


Figura 3.21.

Demostración. Sea γ_i una curva cerrada en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $I(\gamma_i, w_i) = 1$, $I(\gamma_i, w_j) = 0$ y $w_j \notin \gamma_i$ para $i \neq j$. Por el teorema del conteo de raíces y polos (teorema C.2) tenemos que

$$G_i(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{P_w(z, w)}{P(z, w)} dw = \left[\sum_{j=1}^n I(\gamma_i, a_j) - \sum_{l=1}^m I(\gamma_i, b_l) \right]$$

donde $P_w = \frac{\partial P}{\partial w}$, a_j son los ceros de $P(z, w)$ y b_l sus polos.

Sea x un punto en γ_i . Como γ_i no contiene a ninguno de los puntos w_1, \dots, w_n , entonces $P(a, x) \neq 0$. Sea $B \subset \mathbb{C}$ una vecindad de $P(a, x)$ que no contenga al cero. Dado que el polinomio $P(z, w)$ es continuo en todo punto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, (en particular es continuo en (a, x)

) existen vecindades U_x de a y V_x de x tales que $P(U_x \times V_x) \subseteq B$, por lo tanto, para todo $(z, w) \in U_x \times V_x$, $P(z, w) \neq 0$. Ahora, como la colección $\{V_x : x \in \gamma_i\}$ es una cubierta abierta de γ_i y esta curva es compacta, existe un número finito de puntos en γ_i , x_1, \dots, x_k tales que la colección de abiertos $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_k}\}$ la cubren, y para estos puntos existen las respectivas vecindades de a , U_{x_1}, \dots, U_{x_k} , en las que $P(z, w)$ es diferente de cero (Figura 3.22).

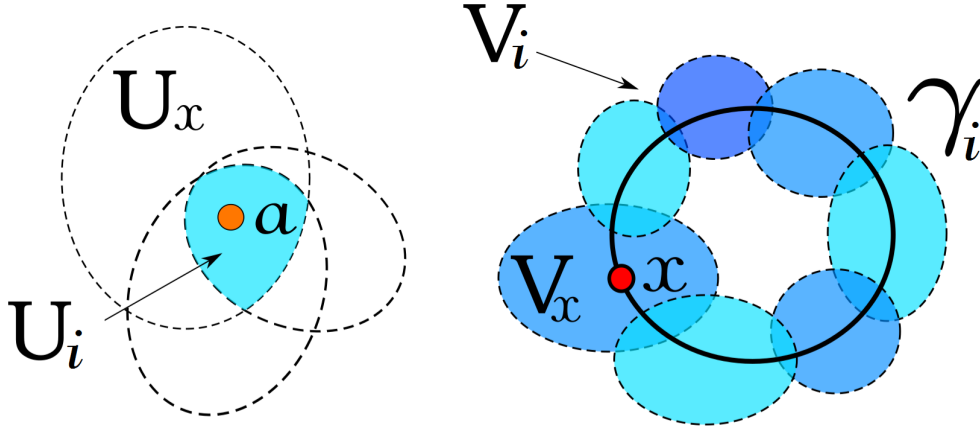


Figura 3.22.

Notemos que $N_i = \cap_{i=1}^k U_i$ es una vecindad abierta de a y $V_i = \cup_{i=1}^k V_i$ es un abierto que contiene a γ_i , y en $N_i \times V_i$ se tiene que $P(z, w) \neq 0$. Por lo tanto en este abierto está definida y es continua la función

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{P_w(z, w)}{P(z, w)}$$

Ahora derivando con respecto a z a la función h , obtenemos lo siguiente:

$$h_z(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{P_{wz}(z, w)P(z, w) - P_w(z, w)P_z(z, w)}{[P(z, w)]^2}$$

y esta función es continua en $U \times V$, por que los ceros de $[P(z, w)]^2$ son los mismos que los de $P(z, w)$, y en $U \times V$, $P(z, w) \neq 0$. Se cumplen entonces las hipótesis del teorema C.6, por lo tanto la función

$$G_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{P_w(z, w)}{P(z, w)} dw$$

es analítica en N_i y por lo tanto continua en esta vecindad. Ahora, como $P(z, w)$ es una función polinomial, no tiene polos, entonces $G_i(z)$ es el número de ceros de $P(z, w)$ (como función de w) que encierra la curva γ_i . Como esta función G_i es continua y con valores en \mathbb{N} , debe ser constante. Evaluando en $z = a$ tenemos que $G_i(a) = 1$ pues elegimos a γ_i de forma que sólo rodeara a una raíz de $P(a, w) = 0$. Por lo tanto $G_i \equiv 1$ en N_i , esto implica que γ_i solo encierra a una raíz w de $P(z, w) = 0$ (para $z \in N_i$) a la cual vamos a denotar como $w = f_i(z)$. Por la unicidad de esta solución tenemos que $f_i(a) = w_i$.

Sea D un disco con centro en a y contenido en $\cap_{i=1}^n N_i$. Entonces para todo z en D , la ecuación $P(z, w) = 0$ tiene n raíces diferentes, cada una encerrada en una curva que rodea a los puntos w_1, \dots, w_n (Figura 3.23).

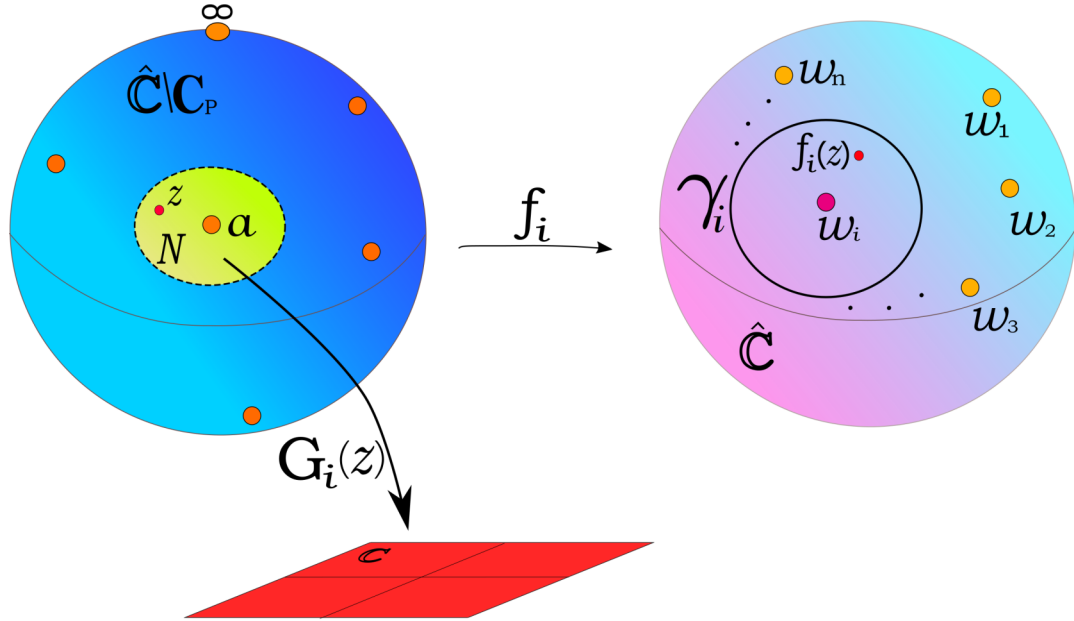


Figura 3.23.

Nos resta demostrar que la función $f_i : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida anteriormente es analítica. Por la proposición C.3, aplicada a la función de w , $P(z, w)$, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{w P_w(z, w)}{P(z, w)} dw = \sum a_j k_j - \sum b_l r_l \tag{3.4}$$

donde a_j son los ceros de $P(z, w)$ que encierra γ_i (con multiplicidades k_j) y b_l son los polos de $P(z, w)$ que encierra γ_i (con multiplicidades r_j). Ahora bien, la curva γ_i no encierra polos de $P(z, w)$ (el infinito es el único polo de $P(z, w)$ pero podemos elegir γ_i de forma que no encierre a ∞), hemos visto que sólo encierra a uno de los ceros de $P(z, w)$, al cual hemos denotado como $f_i(z)$, y este cero es una raíz simple, así que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{w P_w(z, w)}{P(z, w)} dw = f_i(z)$$

Notemos ahora que la función

$$\tilde{h}(z, w) = \frac{1}{2\pi i} w \frac{P_w(z, w)}{P(z, w)}$$

es continua en $N_i \times V_i$, (pues en ese abierto $P(z, w) \neq 0$) y su derivada respecto a z

$$h_z(z, w) = w \frac{1}{2\pi i} \frac{P_{wz}(z, w)P(z, w) - P_w(z, w)P_z(z, w)}{[P_z(z, w)]^2}$$

también es continua en $N_i \times V_i$, así que utilizando nuevamente el teorema C.6 tenemos que la función

$$f_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} w \frac{P_w(z, w)}{P(z, w)} dw$$

es analítica en N_i . □

Observación 3.24. El lema 3.23 nos dice que si fijamos un punto $z \in \mathbb{C} \setminus C_P$ entonces podemos escribir al polinomio $P(z, w)$ como

$$P(z, w) = P_z(w) = \prod_{i=1}^n w - f_i(z)$$

Observación 3.25. Recordemos que si $E \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ y \mathcal{G} es un conjunto de gérmenes en \mathfrak{M} , decimos que \mathcal{G} es suficiente para hacer continuación analítica en E si cumple las siguientes condiciones para cada punto a de E :

- (i) El conjunto $\mathcal{G}_a = \mathcal{G} \cap \psi^{-1}(a) \neq \emptyset$, es decir, \mathcal{G} tiene elementos de la forma $[f]_a$.
- (ii) Existe un disco abierto $D_a \subseteq E$ con centro en a tal que si $[f]_a \in \mathcal{G}_a$, entonces f es meromorfa en D_a , es decir, los gérmenes en \mathcal{G}_a tienen un dominio en común.
- (iii) $\cup\{\mathcal{G}_b : b \in D_a\} = \cup\{[D_a, f]_a : [f]_a \in \mathcal{G}_a\}$

La colección $\mathcal{G} = \{\mathcal{F}_a : a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P\}$ es un conjunto suficiente para la continuación analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$. Como consecuencia de este hecho y del corolario 3.13, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.26. *Si E es una región simplemente conexa en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$, entonces existen n funciones f_1, \dots, f_n en E tales que para cualquier $z \in E$, las soluciones de la ecuación $P(z, w) = 0$ son $w = f_i(z)$ ($i = 1, \dots, n$) todas simples y diferentes.*

Demostración. Tomemos un punto $a \in E$. Sabemos que la fibra de a , \mathcal{F}_a consta de n elementos de función $[f_1]_a, \dots, [f_n]_a$ y estos gérmenes son elementos del conjunto $\mathcal{G} = \{\mathcal{F}_a : a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P\}$, el cual es suficiente para la continuación analítica en E , y como E es una región simplemente conexa, el corolario 3.13 implica que cada germen $[f_i]_a \in \mathcal{F}_a$ se puede extender en todo E a una función f_i que satisface la ecuación $P[z, f_i(z)] = 0$ para todo $z \in E$ (pues para hacer la extensión usamos elementos del conjunto \mathcal{G}). □

Sabemos que el conjunto de puntos críticos del polinomio P es finito c_1, \dots, c_r . Si β es una curva en $\hat{\mathbb{C}}$, sin autointersecciones, que contiene a los puntos críticos y $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \beta$, entonces Ω es una región simplemente conexa, y por el teorema anterior existen n funciones $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación $P(z, f_i(z)) = 0$, es decir, n funciones algebraicas asociadas al polinomio P . Si fijamos una de ellas, digamos f_1 , decimos que las otras funciones f_2, \dots, f_n son *ramas de la función* f_1 . Para poder construir la superficie de Riemann de una de estas funciones algebraicas, necesitamos analizar su comportamiento en los puntos críticos de P .

Análisis del comportamiento de una función algebraica en los puntos críticos

Sea $c \in C_P$. Como los puntos críticos son finitos, podemos tomar un real $\varepsilon > 0$ tal que el disco D con centro en c y radio ε no contiene más puntos críticos. Tomemos un punto a en $E = D \setminus \{c\}$, entonces tenemos n gérmenes $[f_1]_a, \dots, [f_n]_a$ en a que son las funciones algebraicas que satisfacen la ecuación $P(z, w) = 0$ para z en una vecindad de a y pueden ser continuados analíticamente a lo largo de cualquier curva γ en E . Si γ es una curva cerrada que empieza y termina en a y que rodea una vez a c (Figura 3.24) entonces la continuación de cualquier germen $[f_i]_a$ a lo largo de γ produce un germen $[f_j]_a$ en $a = \gamma(1)$. Además este germen es único debido a la unicidad de la continuación a lo largo de la curva γ^{-1} , así que podemos definir una función en la fibra de a , $\vartheta : \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_a$ como $\vartheta([f_i]_a) = [f_j]_a$. Notemos que ϑ es una permutación de los gérmenes y sabemos que siempre podemos descomponer una permutación como producto de ciclos ajenos, así que cada germen está contenido en un ciclo $([f_1]_a, \dots, [f_q]_a)$ de longitud $q \leq n$. Cada uno de estos gérmenes se extiende en una vecindad de c a una función representada por una serie de Puiseux

$$f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}} \quad \text{si } c \neq \infty \quad \text{o bien} \quad (3.5)$$

$$f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \frac{1}{z^{\frac{m}{q}}} \quad \text{si } c = \infty \quad (3.6)$$

usando la rama del logaritmo $[2\pi(i-1), 2\pi i)$. Si $q < n$ entonces ϑ tiene más de un ciclo y para cada uno tenemos series similares, lo que cambia es la longitud del ciclo y eso se refleja en el denominador del exponente de cada término de la serie. Tenemos tres casos para c y analizaremos cada uno por separado.

Caso 1 $c = \infty$. Sea M el máximo de los grados de los polinomios a_0, \dots, a_n . Tomemos $i \in \{0, \dots, n\}$ y supongamos que $a_i(z) = z^k \alpha_0 + \dots + \alpha_k$. Dividiendo este polinomio entre z^M obtenemos

$$g_i(z) = \frac{a_i(z)}{z^M} = \frac{z^k \alpha_0}{z^M} + \dots + \frac{\alpha_k}{z^M} = \frac{\alpha_0}{z^{M-k}} + \dots + \frac{\alpha_k}{z^M}$$

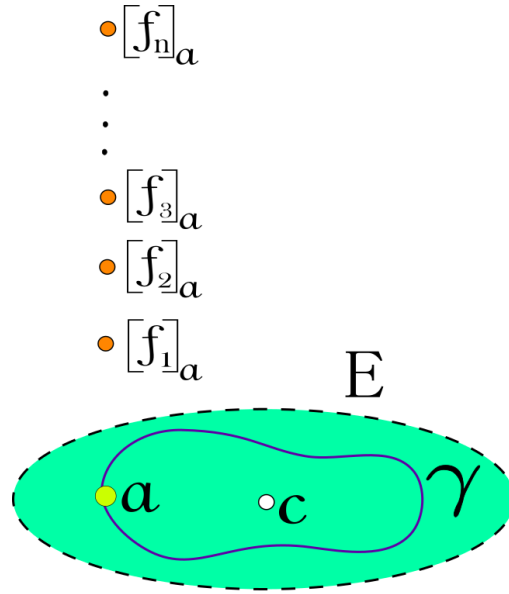


Figura 3.24.

Observemos que $g_i(c) \in \mathbb{C}$ pues

$$g_i(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } M > k \\ \alpha_0 & \text{si } M = k \end{cases}$$

y además es una función continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, así que existe una vecindad U_i de ∞ en la que esta función es continua y acotada¹². Como esto sucede para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, entonces tomando $V = \cap_{i=1}^n U_i$ tenemos que todas las funciones g_i son acotadas en la vecindad V de ∞ (Figura 3.25). Por otro lado, también sucede lo mismo para la función $1/a_0(z)$, pues al evaluarla en c nos da cero y es continua en todo punto diferente de cero, así que existe otra vecindad A de ∞ en donde esta función es continua y acotada. Lo anterior implica que cada función

$$g_i(z) \frac{1}{a_0(z)} = \frac{a_i(z)}{z^M} \frac{1}{a_0(z)} = \frac{a_i(z)}{z^M a_0(z)}$$

es continua y acotada en $V \cap A$. Consideremos ahora un punto $z \in V \cap A$. Sea w una raíz de $P(z, w) = 0$ y supongamos que su norma es mayor que 1. Como w es raíz de $P(z, w)$ tenemos que $P(z, w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z)w + a_n(z) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{P(z, w)}{a_0(z)w^{n-1}} = \frac{a_0(z)w^n}{a_0(z)w^{n-1}} + \frac{a_1(z)w^{n-1}}{a_0(z)w^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}(z)w}{a_0(z)w^{n-1}} + \frac{a_n(z)}{a_0(z)w^{n-1}} \\ &= w + \frac{a_1(z)}{a_0(z)} + \dots + \frac{a_{n-1}(z)}{a_0(z)} \frac{1}{w^{n-2}} + \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \frac{1}{w^{n-1}} \end{aligned}$$

¹²pues podemos suponer que $g_i(U_i)$ se queda contenido en un disco con centro en $g_i(\infty)$.

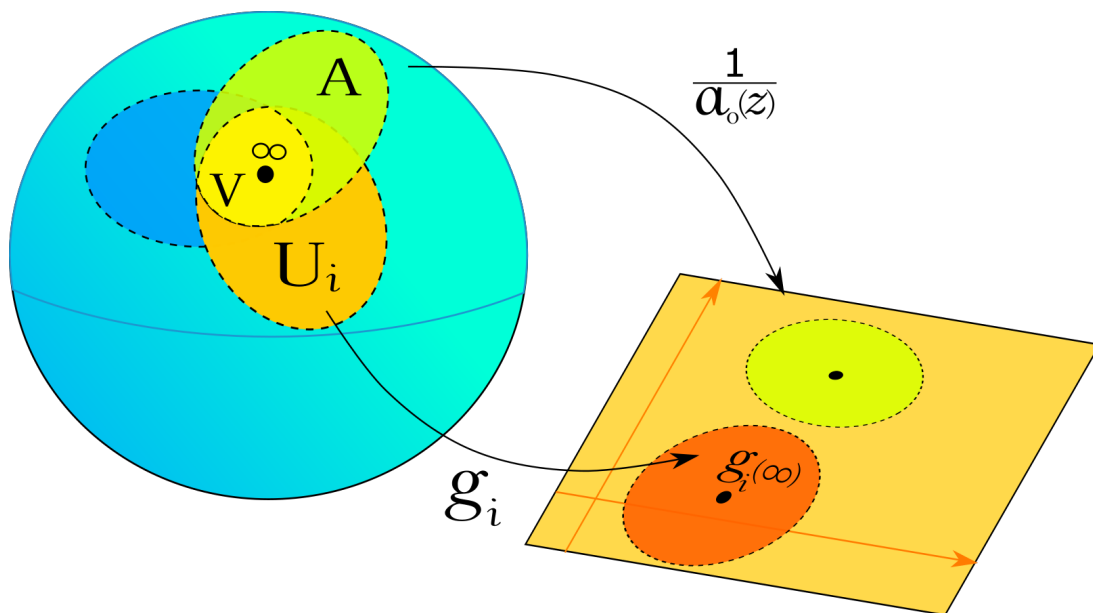


Figura 3.25.

Esto implica que

$$-w = \frac{a_1(z)}{a_0(z)} + \dots + \frac{a_{n-1}(z)}{a_0(z)} \frac{1}{w^{n-2}} + \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \frac{1}{w^{n-1}}$$

Tomando la norma de este vector y tenemos que

$$|w| = \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)} \right| + \dots + \left| \frac{a_{n-1}(z)}{a_0(z)} \right| \frac{1}{|w^{n-2}|} + \left| \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \right| \frac{1}{|w^{n-1}|}$$

Ahora, como $|w| > 1$, entonces $|w^k| > 1$ lo cual implica que $\frac{1}{|w^k|} < 1$ para $k > 1$, esto implica que

$$|w| \leq \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)} \right| + \dots + \left| \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i(z)}{a_0(z)} \right|$$

y dividiendo esta ecuación entre $|z^M|$ obtenemos

$$\frac{|w|}{|z^M|} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i(z)}{z^M a_0(z)} \right| < \infty$$

Por lo tanto $\frac{|w|}{|z^M|} \leq \max\{1, \sum_{i=1}^n |g_i|\}$.

Ahora retomemos la función (3.6) $f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \frac{1}{z^{\frac{m}{q}}}$, que satisface la ecuación $P[z, f_i(z)] = 0$ (es decir, $f_i(z)$ es una raíz de P) entonces cuando z tiende a ∞ la función $\frac{1}{z^M} f_i(z)$ es acotada

y haciendo el cambio $\xi = 1/z^{\frac{1}{q}}$ tenemos que $\frac{1}{z^M} = \xi^{qM}$, entonces la función

$$\xi^{qM} F(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \xi^{qM} \xi^m$$

es acotada cuando ξ tiende a cero, pero esto es equivalente a que $\xi^{qM} F(\xi)$ tenga una singularidad removible en $\xi = 0$ lo cual implica que F tiene una parte principal¹³ de orden mayor o igual que $-qM$. Por lo tanto la serie de f_i en una vecindad de ∞ es

$$f_i(z) = \sum_{m=-qM}^{\infty} a_m \frac{1}{z^{\frac{m}{q}}}$$

y esto quiere decir que f_i es meromorfa en ∞ y en este punto tiene un polo de orden a lo más qM .

Caso 2 $a_0(c) = 0$, es decir, c es una raíz de $a_0(z)$. Supongamos que la multiplicidad de c como raíz de $a_0(z)$ es $k \geq 1$. Entonces $a_0(z) = \lambda(z)(z-c)^k$ donde $\lambda(z)$ es un polinomio que no se anula en c , (por que si se anulara entonces se escribiría como $\lambda(z) = \beta(z)(z-c)^r$ con $r \geq 1$, pero entonces tendríamos que $a_0(z) = \beta(z)(z-c)^{k+r}$ contradiciendo que la multiplicidad de c como raíz de $a_0(z)$ es k).

Como $\lambda(z) = \frac{a_0(z)}{(z-c)^k}$ no se anula en c , entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la función

$$\frac{a_i(z)}{\lambda(z)} = \frac{a_i(z)(z-c)^k}{a_0(z)} = \frac{a_i(z)}{a_0(z)}(z-c)^k = h_i(z)$$

es continua y diferente de ∞ en c , la continuidad implica que para cualquier disco D centrado en $h_i(c)$ existe una vecindad U_i de c tal que $h_i(U_i) \subseteq D$, pero esto implica que en U_i , la función h_i es acotada. Luego, tomando $V = \cap_{i=1}^n U_i$ se tiene que para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, la función h_i es acotada en V . Ahora, si w es una raíz de norma mayor o igual que uno del polinomio $P(z, w) = 0$ con $z \in V$, entonces

$$|w| \leq \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)} \right| + \dots + \left| \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \right|$$

y multiplicando esta ecuación por $|(z-c)^k|$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |w(z-c)^k| &\leq \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)}(z-c)^k \right| + \dots + \left| \frac{a_n(z)}{a_0(z)}(z-c)^k \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |h_i(z)| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

¹³La parte principal de una serie de Laurent es la suma de los términos con grado negativo.

Tenemos entonces que si $|w| > 1$, la función $w(z - c)^k$ es acotada en V . Por otro lado, si tomamos w de norma menor que 1, entonces dicha función también permanece acotada, pues c es un número diferente de ∞ .

Consideremos ahora a la función (3.5) $f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}}$ que sabemos que satisface la ecuación $P[z, f_i(z)] = 0$. Como $f_i(z)$ es una raíz de P , la función $f_i(z) (z - c)^k$ es acotada en la vecindad V de c entonces la serie

$$f_i(z) (z - c)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}} (z - c)^k$$

es acotada en V . Haciendo ahora el cambio $(z - c)^{\frac{1}{q}} = \xi$ tenemos que $\xi^{kq} = (z - c)^k$ y la función

$$\xi^{kq} F(\xi) = \xi^{kq} \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \xi^m \quad (3.7)$$

es acotada cuando ξ tiende a 0, lo cual pasa solo si la parte principal de la serie (3.7) es de la forma

$$\frac{c_{qk} \xi^{qk}}{\xi^{qk}} + \frac{c_{qk-1} \xi^{qk}}{\xi^{qk-1}} + \dots + \frac{c_2 \xi^{qk}}{\xi^2} + \frac{c_1 \xi^{qk}}{\xi}$$

y esto quiere decir que F es meromorfa en $\xi = 0$ y tiene orden mayor o igual que $-qk$, por lo tanto su serie es de la forma

$$F(\xi) = \sum_{m=-qk}^{\infty} a_m \xi^m$$

y entonces la serie de f en c es

$$f_i(z) = \sum_{m=-qk}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}}$$

por lo tanto f_i es meromorfa en ∞ y tiene en este punto un polo de orden a lo más kq .

Caso 3 $P(c, w)$ tiene raíces repetidas. En este caso podemos suponer que $a_0(c) \neq 0$ y que $c \neq \infty$ porque esos casos ya los analizamos. Como $a_0(c) \neq 0$, para cada $i = 0, \dots, n$ la función $a_i(z)/a_0(z)$ es continua en una vecindad de c , entonces si D_i es un disco con centro en $a_i(c)/a_0(c)$, existe una vecindad U_i de c tal que $\frac{a_i}{a_0}(U_i) \subseteq D_i$, por lo tanto en U_i la función a_i/a_0 es acotada. Lo anterior implica que en $V = \bigcap_{i=1}^m V_i$ todas esas funciones racionales están acotadas y por lo tanto $\sum_{i=1}^m |a_i(z)/a_0(z)|$ es un número finito. Si w es una raíz de

$P(z, w) = 0$ con $z \in V$ y $|w| \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) \\
 &= \frac{a_0(z)}{a_0(z)}w^n + \frac{a_1(z)}{a_0(z)}w^{n-1} + \dots + \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \quad (\text{al dividir entre } a_0(z)) \\
 &= \frac{w^n}{w^{n-1}} + \frac{a_1(z)}{a_0(z)}\frac{w^{n-1}}{w^{n-1}} + \dots + \frac{a_n(z)}{a_0(z)w^{n-1}} \quad (\text{al dividir entre } w^{n-1}) \\
 &= w + \frac{a_1(z)}{a_0(z)} + \dots + \frac{a_n(z)}{a_0(z)w^{n-1}}, \text{ esto implica que} \\
 -w &= \frac{a_1(z)}{a_0(z)} + \dots + \frac{a_n(z)}{a_0(z)w^{n-1}} \quad \text{y tomando la norma obtenemos}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |w| = |-w| &= \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)} + \dots + \frac{a_n(z)}{a_0(z)w^{n-1}} \right| \\
 &\leq \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)} + \dots + \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \right| \quad (\text{pues } |w| \geq 1) \\
 &\leq \left| \frac{a_1(z)}{a_0(z)} \right| + \dots + \left| \frac{a_n(z)}{a_0(z)} \right| \quad (\text{utilizando la desigualdad del triángulo})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $|w| \leq \max\{1, \sum_{i=1}^n |a_i(z)/a_0(z)|\}$. □

Ahora, como $f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}}$ satisface la ecuación $P[z, f_i(z)] = 0$, $f(z)$ es una raíz de P , entonces cuando z tiende a c $f(z)$ permanece acotada. Haciendo el cambio $(z - c)^{\frac{1}{q}} = \xi$, la función

$$F(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \xi^m$$

es acotada cuando $\xi \rightarrow 0$, lo cual implica que $a_m = 0$ para toda $m \leq -1$, por lo tanto F es analítica en $\xi = 0$. Luego, la serie de f_i es de la forma

$$f_i(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}}$$

y esto significa que f_i es analítica en c .

Superficie de una función algebraica

Una vez que terminamos el análisis del comportamiento en los puntos críticos de las funciones algebraicas asociadas al polinomio P , podemos concluir que en estos puntos dichas funciones son meromorfas. Utilizaremos este resultado para demostrar la siguiente proposición, que nos dice que las singularidades de una función algebraica son algebraicas.

Proposición 3.27. *Sea $P(z, w)$ un polinomio irreducible de grado n en w y f_i una de las n funciones algebraicas asociada al polinomio P . Entonces las singularidades de f_i son todas algebraicas.*

Demostración. Primero observemos que f_i se puede continuar analíticamente a lo largo de cualquier curva en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$, entonces las posibles singularidades de f_i son curvas que empiezan en un punto $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ y terminan en algún punto crítico. Sea γ una de estas curvas con extremos a y $c \in C_P$.

Tomemos un disco E con centro en c que no contenga mas puntos críticos de P . Entonces la superficie de Riemann no ramificada f_i sobre E^* es regular, pues f_i admite continuación analítica lo largo de cualquier curva en E^* . Ahora tomemos una curva α que empiece en a , termine en c y conduzca a f_i hacia la misma singularidad¹⁴. Dado que f_i es meromorfa en $c = \alpha(1)$ entonces existe el límite $\lim_{t \rightarrow 1} f_i(\alpha(t))$. Finalmente consideremos un punto $z \in E^*$ y sea $\tilde{\mathcal{F}}_z$ su fibra en la superficie no ramificada de f_i sobre E^* . Cada germen en $\tilde{\mathcal{F}}_z$ se obtuvo de hacer la continuación analítica de f_i a lo largo de alguna curva cerrada que empieza y acaba en z , entonces por el lemma 3.21 tenemos que cada germen $[g]_z \in \tilde{\mathcal{F}}_z$ satisface la ecuación $P[z, g(z)] = 0$ pero esta ecuación tiene sólo un número finito de raíces, por lo tanto la fibra de z es finita. Podemos concluir entonces que γ conduce a f_i a una singularidad algebraica. \square

Definición 3.28. *Sea P un polinomio irreducible, f_i una función algebraica asociada al polinomio P y $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$. La *superficie de Riemann S de la función algebraica f_i* consta de los gérmenes no ramificados que podamos obtener como continuación analítica de $[f_i]_a$ junto con los gérmenes de ramificación originados a partir de las singularidades algebraicas de f_i , que están dadas por curvas que acaban en los puntos críticos.*

¿Cómo se ven los gérmenes de ramificación?

Sabemos que si c es un punto crítico, entonces tiene una vecindad agujerada D en donde están definidas las n funciones algebraicas asociadas a P , las cuales son meromorfas en c y se agrupan en ciclos de longitud menor o igual que n para dar origen a los gérmenes de ramificación. Sea $[f]_c$ uno de estos gérmenes y supongamos que su grado de ramificación es $q - 1$, entonces para su definición utilizamos a un ciclo de q funciones algebraicas f_1, \dots, f_q que satisfacen la ecuación $P[z, f_i(z)] = 0$ y este germen está representado por una serie de Puiseux

$$f(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m (z - c)^{\frac{m}{q}} \quad \text{si } c \neq \infty \quad \text{ó} \quad f(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^{-\frac{m}{q}} \quad \text{si } c = \infty.$$

Recordemos ahora que el $\lim_{z \rightarrow c} f_j(z)$ de cada una de las funciones f_1, \dots, f_q que conforman un ciclo es el mismo y es así como está definido el valor $f(c)$. Esto nos sirve para demostrar que $[f]_c$ también cumple la ecuación $P[c, f(c)] = 0$. En efecto, supongamos para llegar a una contradicción que $P[c, f(c)] \neq 0$ y sea A una vecindad de $P[c, f(c)]$ que no tenga al cero. Como P es una función continua, existen dos discos D_1 con centro en c y D_2 con centro en

¹⁴esto quiere decir que para cualquier vecindad A de c existe un $t \in [0, 1]$ tal que la superficie de Riemann de f_i sobre A empezando con el germen $[f_i]_{\alpha(t)}$ es la misma que si empezamos con el germen $[f_i]_{\gamma(t)}$.

$f(c)$ tales que $P(D_1 \times D_2) \subseteq A$. Como $\lim_{z \rightarrow c} f_j(z)$, podemos escoger un punto $z_o \in D_1$ tal que $f_j(z_o) \in D_2$, entonces $(z_o, f_j(z_o)) \in D_1 \times D_2$ y $P[z_o, f_j(z_o)] = 0 \in A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $P[c, f(c)] = 0$.

Recordemos ahora que para $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ fijo, el polinomio $P(z, w)$ se escribe como $P(z, w) = P_z(w) = \prod_{i=1}^n w - f_i(z)$ donde f_1, \dots, f_n son las n funciones algebraicas asociadas al polinomio P , pero como cada función f_i está definida en el conjunto de puntos críticos, entonces para $c \in C_P$ tenemos que

$$P(c, w) = P_c(w) = \prod_{i=1}^n w - f_i(c)$$

entonces $f(c)$ es una raíz de multiplicidad q de $P_c(w)$.

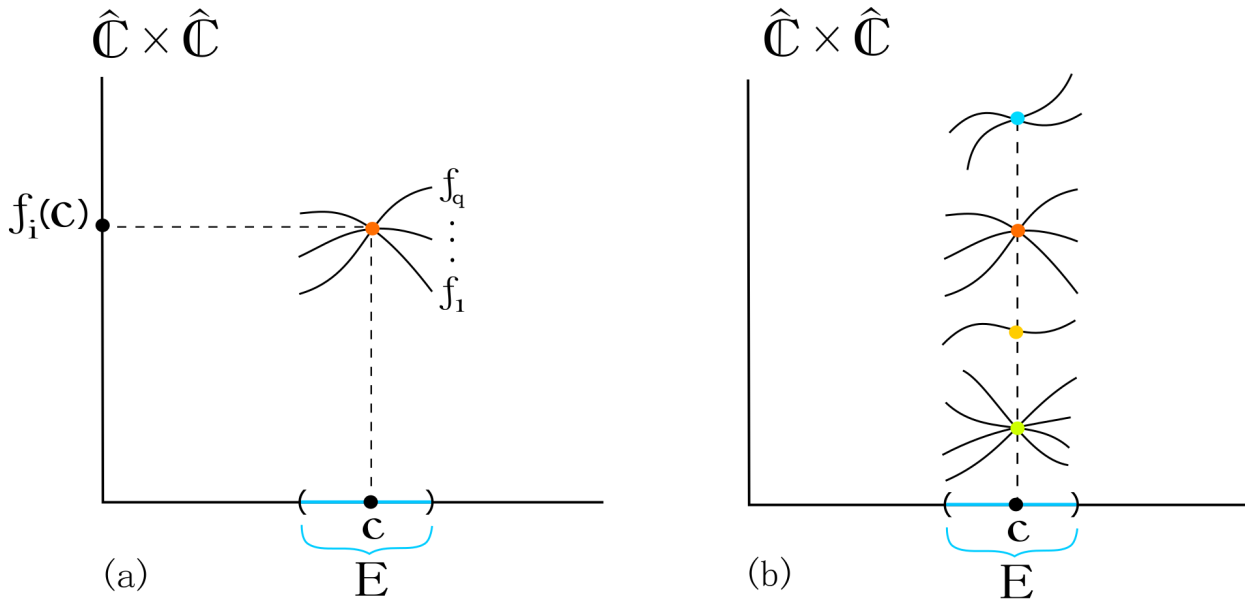


Figura 3.26.

Para dar una representación gráfica del germen de ramificación $[f]_c$ ponemos en el mismo plano $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ a las gráficas de f_1, \dots, f_q restringidas a la región E , obtenemos entonces la gráfica de la Figura 3.26 (a) y al considerar los posibles ciclos en c obtenemos la gráfica representada en la Figura 3.26 (b). De este modo tenemos que cada punto singular da origen a un número finito de gérmenes de ramificación, y como C_P es un conjunto finito de puntos, entonces la superficie de Riemann de una función algebraica tiene sólo un número finito de gérmenes de ramificación que satisfacen la ecuación $P[z, f(z)] = 0$ (Figura 3.27). La imagen anterior nos dice cómo se ve localmente la superficie de Riemann de una función algebraica. El siguiente lema nos da un poco más de información, pues nos dice que estas porciones que hemos dibujado en realidad están conectadas.

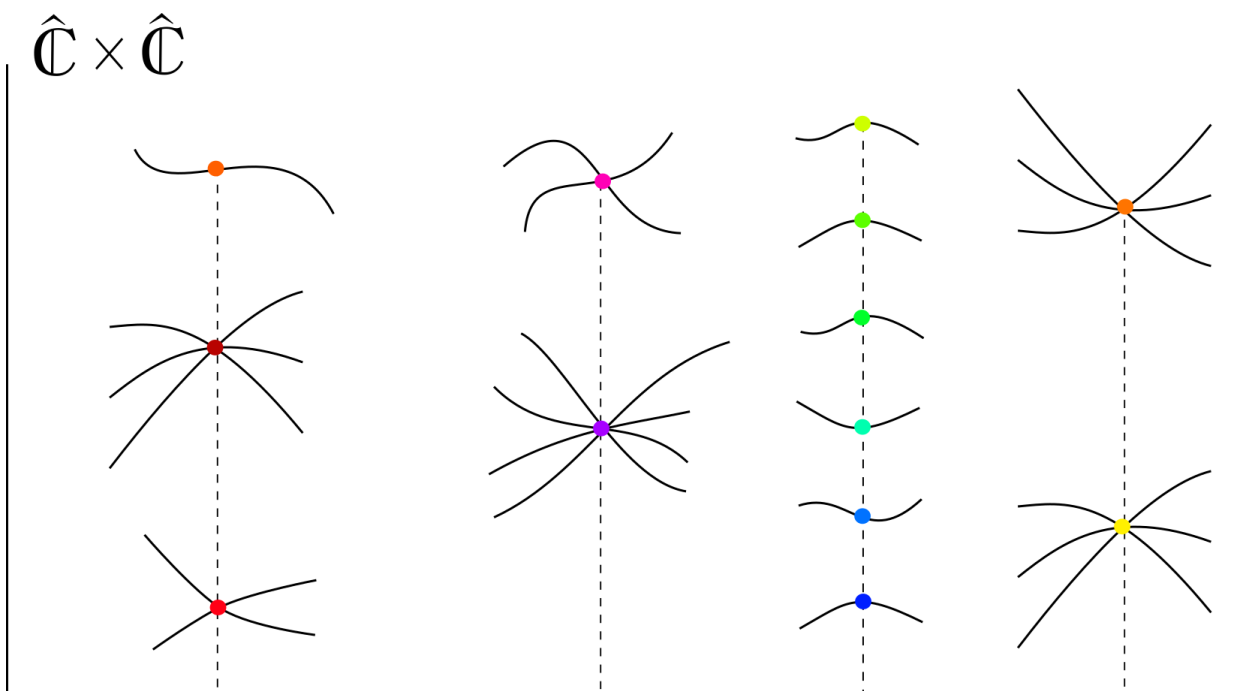


Figura 3.27.

Lema 3.29. Sea $P(z, w)$ un polinomio irreducible de grado n en w y f_{i_0} una de las n funciones algebraicas que satisfacen la ecuación $P[z, f(z)] = 0$. Entonces la superficie de Riemann de f_{i_0} sobre $\hat{\mathbb{C}}$ es conexa.

Demostración. Llamemos S a la superficie de Riemann de f_{i_0} . Tomemos un punto $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ y sean $G_a = \{[f_1]_a, \dots, [f_n]_a\}$ el conjunto formado por los n gérmenes en a que satisfacen la ecuación $P[a, f_i(a)] = 0$. Uno de estos gérmenes es $[f_{i_0}]_a$. Recordemos que la fibra de un punto z es el conjunto $\mathcal{F}_z \subset S$ formado por los gérmenes de función definidos en z que pertenecen a la superficie S .

Afirmación 3.30. Cualquier germen en S que pertenezca a la fibra \mathcal{F}_a de a , es un elemento de $G_a = \{[f_1]_a, \dots, [f_n]_a\}$.

En efecto, supongamos que $[g_k]_a$ es un germen en la fibra de a , entonces se obtuvo de hacer la continuación analítica de (D, f_{i_0}) a lo largo de una curva cerrada γ en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ que empieza y termina en a (aquí D es un disco con centro en a). Sea $(D, f_{i_0}) \sim (D_1, g_1) \sim \dots \sim (D_k, g_k)$ tal continuación (a también es el centro del último disco D_k). Por el lema 3.21 tenemos que $P[z, g_k(z)] = 0$ para todo $z \in D_k$, entonces la función g_k coincide en D_k con alguna de las funciones f_1, \dots, f_n , pues el grado en w de P es n y $P(a, w)$ no puede tener más de n raíces. Por lo tanto $[g_k]_a \in G_a$.

Afirmación 3.31. Todos los gérmenes en G_a se pueden obtener como continuación analítica de $[f_{i_0}]_a$ a lo largo de alguna curva en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$.

Vamos a demostrar esta afirmación por contradicción, suponiendo que sólo un cierto número de gérmenes en G_a se pueden obtener mediante la continuación analítica de $[f_{i_0}]_a$, pero no todos. Sin pérdida de generalidad supongamos que dichos gérmenes son $[f_1]_a, \dots, [f_k]_a$ con $1 \leq k < n$. Consideremos ahora el polinomio $\prod_{i=0}^k w - f_i(z)$. Desarrollando este producto obtenemos una expresión de la forma

$$w^k + \sigma_1(z) w^{k-1} + \sigma_2(z) w^{k-2} + \dots + \sigma_k(z)$$

donde a_1, \dots, a_k son las funciones simétricas de f_1, \dots, f_k y están definidas de la siguiente manera

$$\sigma_1(z) = - \sum_{j=1}^k f_j(z), \quad \sigma_2(z) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} f_{j_1}(z) f_{j_2}(z), \dots, \sigma_k(z) = (-1)^k \prod_{j=1}^k f_j(z)$$

Como cada una de las funciones f_1, \dots, f_k se puede continuar analíticamente a lo largo de cualquier curva en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ y es meromorfa en los puntos críticos, entonces también las funciones simétricas se pueden continuar analíticamente a lo largo de cualquier curva en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C_P$ y en los puntos críticos son meromorfas. Ahora, las funciones meromorfas en $\hat{\mathbb{C}}$ son las funciones racionales, entonces cada función simétrica $\sigma_i(z)$ es de la forma $\frac{p_i(z)}{q_i(z)}$ donde $p_i(z)$ y $q_i(z)$ son polinomios. Si $r(z)$ es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_k entonces para cada $i = 1, \dots, k$ existe un polinomio $s_i(z)$ tal que $r(z) = q_i(z) s_i(z)$. Ahora multiplicando por r el polinomio $\prod_{i=0}^k w - f_i(z)$ obtenemos un polinomio en z y w

$$\begin{aligned} r \prod_{i=0}^k w - f_i(z) &= r \left(w^k + \sigma_1(z) w^{k-1} + \sigma_2(z) w^{k-2} + \dots + \sigma_k(z) \right) \\ &= r w^k + r \frac{p_1}{q_1} w^{k-1} + r \frac{p_2}{q_2} w^{k-2} + \dots + r \frac{p_k}{q_k} \\ &= r w^k + q_1 s_1 \frac{p_1}{q_1} w^{k-1} + q_2 s_2 \frac{p_2}{q_2} w^{k-2} + \dots + q_k s_k \frac{p_k}{q_k} \\ &= r w^k + p_1 s_1 w^{k-1} + p_2 s_2 w^{k-2} + \dots + p_k s_k \\ &= Q(z, w) \end{aligned}$$

Q es un polinomio de grado k en w y P es irreducible de grado n en w , por lo tanto P y Q son primos relativos, entonces por el teorema B.5 existe sólo un número finito de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que las ecuaciones $P(z, w) = 0$ y $Q(z, w) = 0$ tienen raíces en común. Sin embargo sabemos que a es el centro de un disco D en donde todas las funciones algebraicas f_1, \dots, f_n están definidas y si $z \in D$ entonces $P[z, f_i(z)] = 0$, por lo tanto $f_i(z)$ es una raíz común de $P(z, w)$ y $Q(z, w)$, pero D tiene un número infinito de puntos, lo cual contradice el teorema B.5. Esta contradicción vino de suponer que $k < n$. Concluimos entonces que todos los gérmenes $[f_1]_a, \dots, [f_n]_a$ se obtienen de continuar analíticamente a $[f_{i_0}]_a$, esto quiere decir

que todos estos gérmenes de G_a pertenecen a la superficie S .

Usaremos ahora las dos afirmaciones anteriores para demostrar que S es conexa por trayectorias (y por lo tanto conexa). Sean $[h]_x$ y $[g]_y$ dos gérmenes en esta superficie y tomemos dos discos $[D_1, h]_x$ y $[D_2, g]_y$ con centro en $[h]_x$ y $[g]_y$ respectivamente, tales que no tengan gérmenes de ramificación excepto quizás $[h]_x$ y $[g]_y$, entonces podemos elegir dos gérmenes en estos discos que no sean de ramificación y por la afirmación 3.30 sabemos que son de la forma $[f_i]_{a_1}$ y $[f_j]_{a_2}$, con $a_1 \in D_1$, $a_2 \in D_2$ y f_i, f_j funciones algebraicas asociadas al polinomio P . Por la afirmación 3.31 existe una curva cerrada α que empieza y acaba en a_1 tal que al hacer la continuación analítica de $[f_i]_{a_1}$ a lo largo de α_1 obtenemos el germen $[f_j]_{a_1}$. Ahora tomemos una curva γ que una a a_1 con a_2 y que esté contenida en una región

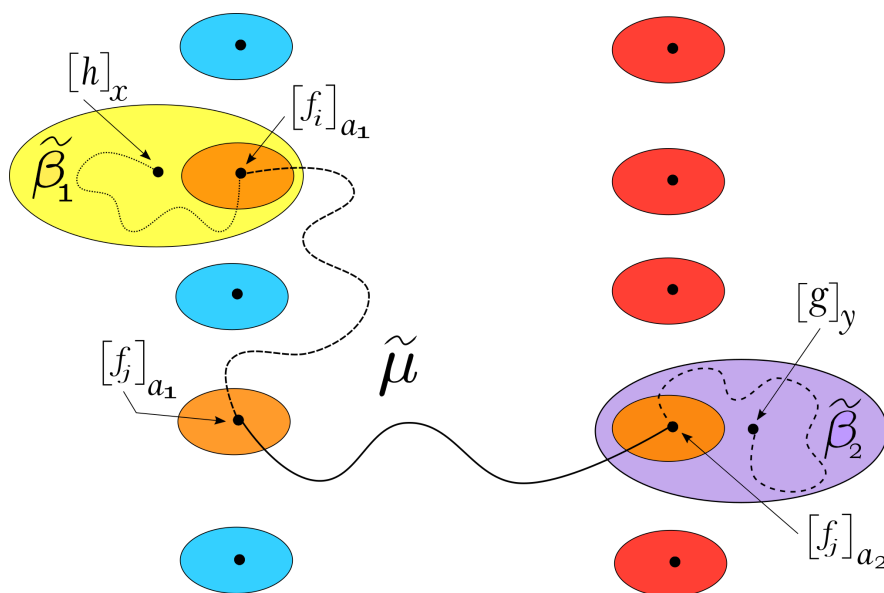


Figura 3.28.

$A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ simplemente conexa que no contenga puntos críticos. Entonces por el teorema 3.26 podemos extender $[f_j]_{a_1}$ a una función f_j en A y la continuación analítica de $[f_j]_{a_1}$ a lo largo de γ nos dará el germen $[f_j]_{a_2}$. De esta manera obtenemos el germen $[f_j]_{a_2}$ de la continuación analítica de $[f_j]_{a_1}$ a lo largo de la curva $\mu = \alpha * \gamma$. Esta continuación define en cada punto $\mu(t)$ un germen $[f]_{\mu(t)}$ y la aplicación $\tilde{\mu}(t) = [f]_{\mu(t)}$ es una curva en \mathfrak{M} que une a los gérmenes $[f_i]_{a_1}$ y $[f_j]_{a_2}$ (Figura 3.28). Finalmente, como $[D_1, h]_x$ y $[D_2, g]_y$ son conexos por trayectorias existen dos trayectorias, una $\tilde{\beta}_1$ en $[D_1, h]_x$ que une a $[f_i]_{a_1}$ con $[h]_x$ y otra $\tilde{\beta}_2$ en $[D_2, g]_y$ que une a $[f_j]_{a_2}$ con $[g]_y$. Por lo tanto, $\tilde{\beta}_1 * \tilde{\mu} * \tilde{\beta}_2$ es una trayectoria en \mathfrak{M} que une a nuestros dos gérmenes iniciales $[h]_x$ y $[g]_y$.

□

Finalmente estamos listos para demostrar que una superficie de Riemann es compacta.

Teorema 3.32. *Sea $P(z, w)$ un polinomio irreducible de grado n en w y f una función algebraica asociada a P . Entonces la superficie de Riemann S de f es compacta.*

Demostración. Sea $[f]_x$ un germen en S y E un disco con centro en x que no contenga puntos críticos de P , salvo quizás x . La imagen inversa de E bajo ψ es el conjunto de discos $[E, f_1]_x, \dots, [E, f_m]_x$ con centro en los puntos de la fibra de x , que es un conjunto finito $\mathcal{F}_x = \{[f_1]_x, \dots, [f_m]_x\}$ de m gérmenes con $m \leq n$. Cada uno de estos discos es homeomorfo a un disco abierto E_i en $\hat{\mathbb{C}}$ con centro en x vía una función $G_{i,x}$ que es la proyección ψ cuando $[f_i]_x$ no es de ramificación o la función Φ definida en el lema 3.19 compuesta con una traslación¹⁵ cuando $[f_i]_x$ es un germen de ramificación. Sea D_x un disco con centro en x tal que $\bar{D}_x \subset \cap E_i$. Entonces $G_{i,x}^{-1}(\bar{D}_x)$ es un compacto en $[E, f_i]_x$ que contiene a $[f_i]_x$. \square

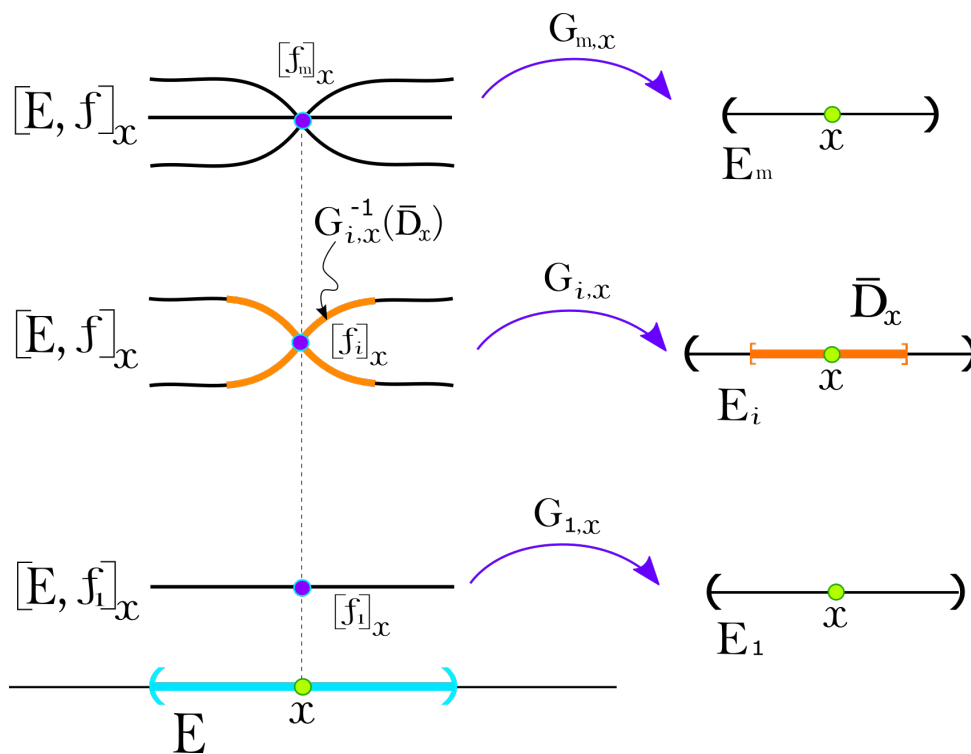


Figura 3.29.

¹⁵o la función $z \mapsto 1/z$ si $x = \infty$.

Capítulo 4

La función algebraica de una superficie compacta

En el capítulo anterior vimos cómo asociar a cada función algebraica una superficie de Riemann compacta para que ésta sea su nuevo dominio, y ahí definida ya no sea multivaluada. Resulta que para cada curva algebraica ¹ X podemos hallar un polinomio $P(z, w)$ de forma que la superficie de Riemann ramificada de la ecuación polinomial $P(z, w) = 0$ es X , este es el segundo resultado importante que tratamos en tesis y para demostrarlo necesitamos usar una importante propiedad de las curvas algebraicas, y es que en cualquiera de ellas podemos hallar funciones meromorfas además de las constantes. De momento asumiremos que existen tales funciones y en el capítulo 5 nos dedicaremos a analizar este hecho. A lo largo de este capítulo utilizaremos frecuentemente los siguientes tres resultados sobre funciones entre superficies de Riemann que ya hemos demostrado anteriormente:

Proposición 2.12. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una transformación holomorfa entre superficies de Riemann, $x_0 \in X$ y $f(x_0) = y_0$. Dada una carta (V, ψ) centrada en y_0 existe una carta (U, φ) centrada en x_0 tal que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^m$, donde $m = e_{x_0}(f)$ es el grado de ramificación de f en el punto x_0 .*

Teorema 2.13. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces*

- (1) *f tiene un número finito de puntos de ramificación x_1, \dots, x_k*
- (2) *Fuera de las fibras $f^{-1}(f(x_i))$, f define una cubierta de fibras finitas de cardinalidad constante n . Se dice que f es una cubierta ramificada de grado n .*
- (3) *Para todo punto y de Y se cumple que $\sum_{f(x)=y} e_x(f) = n$.*

¹Una curva algebraica es una superficie de Riemann compacta que cumple que su campo de funciones meromorfas separa puntos y tangentes (ver la definición 2.17 en el capítulo 2).

Corolario 2.25. Sea X una curva algebraica. Fijemos un número finito de puntos $\{p_1, \dots, p_n\}$ y sea $m_i \in \mathbb{Z}$. Entonces existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Ord}_{p_i}(f) = m_i$.

Ahora comenzamos con el primer resultado que nos llevará a alcanzar el objetivo de este capítulo, y es una proposición que nos da la manera de construir un polinomio en dos variables $P(z, w)$ a partir de dos funciones meromorfas definidas en una superficie de Riemann X .

Proposición 4.1. Sea X una curva algebraica y $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones meromorfas no constantes. Si el grado de g es n , entonces existe un polinomio $P(z, w)$ de grado n en w , $P(z, w) = w^n + \sigma_1(z)w^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1}(z)w + \sigma_n(z)$, (donde los coeficientes $\sigma_i(z)$ son funciones racionales) tal que para cada punto $p \in X$ se satisface la ecuación algebraica $P(g(p), f(p)) = 0$.

Demostración. Consideremos a g y a f como funciones de X en $\hat{\mathbb{C}}$. De este modo ambas son funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann compactas. Sea C el conjunto formado por el infinito y todos los puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ que son imagen bajo g de algún punto de ramificación en X . A estos puntos se les conoce como valores de ramificación de g . Sabemos por el teorema 2.13 (1) que el conjunto de puntos de ramificación es finito, lo cual implica que los valores de ramificación forman también un conjunto finito, digamos c_1, \dots, c_m . Sea γ una curva simple en $\hat{\mathbb{C}}$ que empiece en x_1 , acabe en x_m y que contenga a los demás valores de ramificación. La región $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ es simplemente conexa y por el teorema 2.13 (2) sabemos que cada punto $a \in E$ tiene exactamente n preimágenes que llamemos $p_1(a), \dots, p_n(a)$ (Figura 4.1).

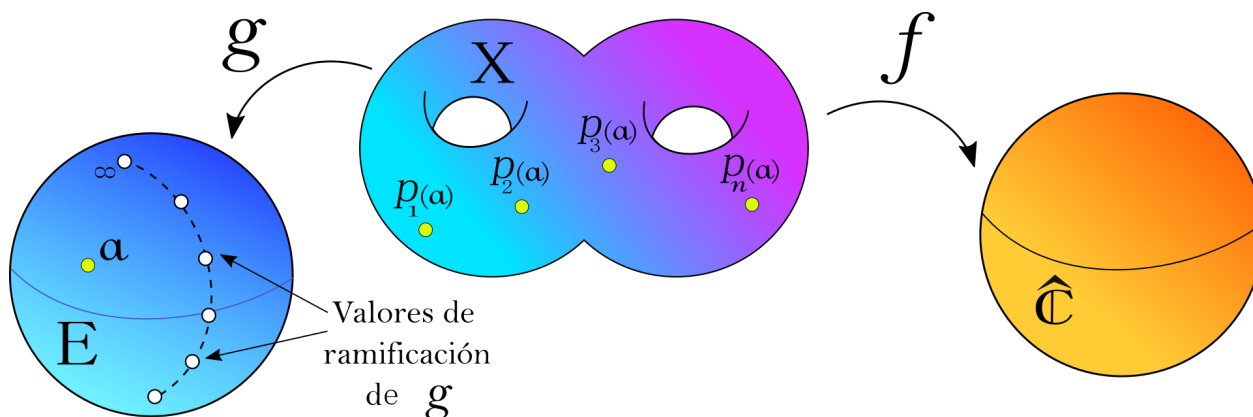


Figura 4.1.

Como el grado de ramificación $e_a(g)$ de g en cada punto $a \in E$ es 1, la derivada de g no se anula en a y por el teorema de la función inversa g es localmente invertible y esta inversa es holomorfa, entonces existe un disco abierto $D_a \subseteq \mathbb{C}$ con centro en a y una vecindad $U_i \subseteq X$ de cada $p_i(a)$ tal que $g : U_i \rightarrow D_a$ es un biholomorfismo local. Llamemos $h_{i,a} : D_a \rightarrow U_i$, $i = 1, \dots, n$ a las inversas locales de g . Notemos que la colección de discos obtenidos de esta

manera $\{D_a : a \in E\}$ es una cubierta abierta de E . Ahora enunciaremos el lema² que nos va a servir para extender estos biholomorfismos locales.

Lema 4.2. *Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa y $\{D_j : j \in J\}$ una cubierta de X formada por abiertos conexos y no vacíos. Supongamos que para cada $j \in J$ existe una familia F_j de funciones analíticas $f : D_j \rightarrow Y$ a otra superficie de Riemann Y tal que si $f \in F_j$ y $q \in D_j \cap D_k$, existe $g \in F_k$ tal que $f = g$ en una vecindad de q . Entonces dado $i \in J$ y $f \in F_i$, existe una función analítica $H_i : X \rightarrow Y$ tal que $H_i = f$ en D_i .*

Vamos a usar este lema con la región E , que es una superficie de Riemann conexa, la cubierta será la colección de discos $\{D_a : a \in E\}$ y la familia F_a de funciones analíticas será el conjunto $\{h_{i,a} : D_a \rightarrow U_i | i = 1, \dots, n\}$. Sólo nos falta verificar que se cumple la condición que pide el lema, es decir que si $h_{i,a} \in F_a$ y $q \in D_a \cap D_b$, entonces existe una función $h_{j,b} \in F_b$ que coincide con $h_{i,a}$ en una vecindad de q .

Tomemos un punto $q \in D_a \cap D_b$. Como $q \in D_a$ le podemos aplicar la función $h_{i,a}$. Llamemos $x = h_{i,a}(q) \in X$. Como $q \in D_b$, y x es una preimagen bajo g de q existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $h_{j,b}(q) = x$, donde $h_{j,b} : D_b \rightarrow U_j$. Notemos entonces que $h_{i,a}(q) = h_{j,b}(q)$. Vamos a demostrar que $h_{i,a} = h_{j,b}$ en $D_a \cap D_b$. Dado que $h_{i,a}(D_a) = U_i$ y $h_{j,b}(D_b) = U_j$ son abiertos en X , su intersección es un abierto, que además es no vacío porque x pertenece a ella, (Figura 4.2). Sea y otro punto en $h_{i,a}(D_a) \cap h_{j,b}(D_b)$. Entonces existen dos puntos $\xi_1 \in D_a$ y $\xi_2 \in D_b$ tales que $h_{i,a}(\xi_1) = y$ y $h_{j,b}(\xi_2) = y$. Observemos ahora que $g(h_{i,a}(\xi_1)) = g(y) = \xi_1$ y $g(h_{j,b}(\xi_2)) = g(y) = \xi_2$, por lo tanto $\xi_1 = \xi_2 \in D_a \cap D_b$, y en este punto $h_{i,a}$ y $h_{j,b}$ coinciden. Esto muestra que $g(U_i \cap U_j) \subseteq D_a \cap D_b$, y que las funciones $h_{i,a}$ y $h_{j,b}$ coinciden en este abierto, y como g es una función abierta entonces $g(U_i \cap U_j)$ es un abierto. Por el teorema de la identidad (Teorema 2.5) concluimos entonces que $h_{i,a}$ y $h_{j,b}$ coinciden en $D_a \cap D_b$, que es una vecindad de q .

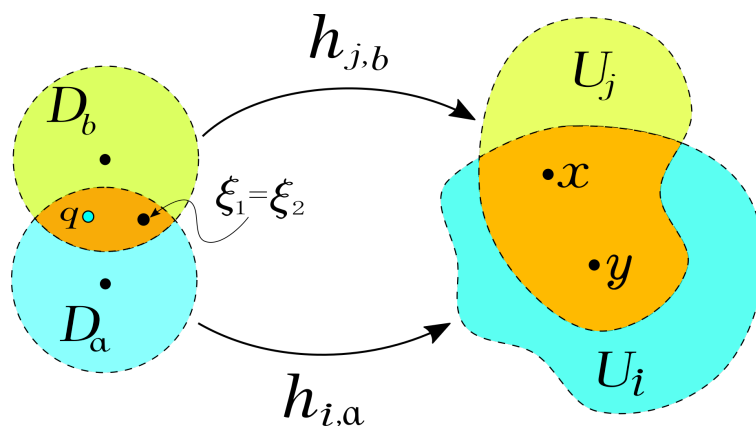


Figura 4.2.

²La demostración de este lema se encuentra en el apéndice A.

Ahora fijamos uno de los discos D_a de la cubierta de E y con ayuda del lema A.5 extendemos cada una de las n funciones $h_{i,a} : D_a \rightarrow U_i$ a una función holomorfa $h_i : E \rightarrow X$. Usando las funciones h_1, \dots, h_n definimos las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_0(z) &= 1, \quad \sigma_1(z) = \sum_{i=1}^n f \circ h_i(z), \quad \sigma_2(z) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} f \circ h_{i_1}(z) \cdot f \circ h_{i_2}(z) \cdots \\ \cdots \sigma_n(z) &= \prod_{i=1}^n f \circ h_i(z) \end{aligned}$$

que son las funciones simétricas de $f \circ h_1, \dots, f \circ h_n$. También definimos estas funciones para los puntos de $z \in \gamma \setminus C$ como

$$\begin{aligned} \sigma_0(z) &= 1, \quad \sigma_1(z) = \sum_{i=1}^n f(p_i(z)), \quad \sigma_2(z) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} f(p_{i_1}(z)) \cdot f(p_{i_2}(z)) \cdots \\ \cdots \sigma_n(z) &= \prod_{i=1}^n f(p_i(z)) \end{aligned}$$

donde $p_1(z), \dots, p_n(z)$ son las n preimágenes de z bajo g . El polinomio que buscamos está dado como

$$P(z, w) = w^n \sigma_0(z) + \dots + w \sigma_{n-1}(z) + a_n(z) = \prod_{i=1}^n (w - f \circ h_i(z)) \quad (4.1)$$

y por construcción cumple la ecuación $P(g(p), f(p)) = 0$ para cada $p \in X$.

Finalmente veamos que cada coeficiente del polinomio (4.1), es decir cada función simétrica es una función racional. Como cada h_i es analítica en E y f es meromorfa, entonces $f \circ h_i : E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es meromorfa y por lo tanto las funciones simétricas $\sigma_i : E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ también lo son. Si hacemos la continuación analítica de una función simétrica σ_j a lo largo de una curva cerrada alrededor de algún punto de C , lo único que puede pasar es que se permuten las funciones h_i , pero esto deja invariante a σ_j debido a que es simétrica, por lo tanto es una función no ramificada definida en $\hat{\mathbb{C}} \setminus C$. Luego, las posibles singularidades de σ_j son los puntos de C y si $c \in C$ entonces $f \circ h_i$ es acotada en una vecindad de este punto (porque f es meromorfa en todo X) y esto implica que cada función simétrica σ_j también es acotada en una vecindad de c . Concluimos entonces que σ_j es una función meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, pero las funciones meromorfas son precisamente las funciones racionales, por lo tanto σ_j es una función racional. \square

La siguiente proposición establece la existencia de una función meromorfa f en X que hace que el polinomio P que acabamos de construir sea irreducible.

Proposición 4.3. *Sea $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa de grado $n \geq 1$ en una curva algebraica X . Entonces existe una función meromorfa f en X que satisface la ecuación*

polinomial $P(g(p), f(p)) = 0$, donde $P(z, w) = w^n + \sigma_1(z)w^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1}(z)w + \sigma_n(z)$ es irreducible, es decir, no se puede expresar como producto de dos polinomios $P_1(z, w)$ y $P_2(z, w)$ de grado mayor que 1 en w y con coeficientes racionales en z .

Demostración. Primero observemos que si $n = 1$ entonces el polinomio que construimos en la proposición 4.1 es de la forma $P(z, w) = w - \sigma_1(z)$, el cual ya es irreducible. Entonces supongamos que $n > 1$. Elegimos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ de modo que $g^{-1}(z_0)$ tenga n elementos, digamos $\{p_1, \dots, p_n\}$. Por el corolario ?? sabemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una función T_i meromorfa en X que tiene un polo simple en p_i y ceros simples en los puntos p_k , para $k \neq i$. Sean w_1, \dots, w_n números diferentes en \mathbb{C} y definamos

$$f := \frac{\sum_{i=1}^n T_i w_i}{\sum_{i=1}^n T_i}$$

Esta es una función meromorfa en X y además cumple que

$$f(p_j) := \frac{\sum_{i=1}^n T_i(p_j)w_i}{\sum_{i=1}^n T_i(p_j)} = \frac{T_j(p_j)w_j}{T_j(p_j)} = w_j$$

esto quiere decir que f separa los puntos p_1, \dots, p_n . Por la proposición 4.1 sabemos que existe un polinomio $P(z, w)$ tal que $P(g(p), f(p)) = 0$ para todo punto $p \in X$. Veamos que P es irreducible. Para llegar a una contradicción, supongamos que podemos expresar a P como producto de dos polinomios cuyo grado en w es menor que n , $P(z, w) = P_1(z, w)P_2(z, w)$. Sabemos que existe un disco D con centro en z_0 y para cada $i = 1, \dots, n$, una carta (U_i, λ_i) centrada en el punto p_i tal que la función $g : U_i \rightarrow D$ es un isomorfismo, llamemos $h_{i, z_0} : D \rightarrow U_i$ a su inversa. Como g restringida a U_i es un isomorfismo, entonces es suprayectiva, así que cualquier $z \in D$ es de la forma $g(x)$ para algún punto $x \in U_i$. Luego, por la forma en que construimos el polinomio P , tenemos que $P(g(x), f(x)) = P(z, f(h_1(z))) = 0$, entonces $P_1(z, f(h_1(z)))P_2(z, f(h_1(z))) = 0$. Notemos que $P_1(z, f(h_1(z)))$ y $P_2(z, f(h_1(z)))$ son funciones de D en $\hat{\mathbb{C}}$ y su producto se anula para cualquier punto en D , entonces necesariamente alguna de ellas se anula en un número infinito de puntos en D . Sin pérdida de generalidad supongamos que es $P_1(z, f \circ h_1(z))$ la que se anula, entonces por el teorema de la identidad, es la constante cero en D .

Para cada $i = 1, \dots, n$, consideremos la función $G_i(z) = P_1(z, f \circ h_i(z))$ definida en D . Hasta ahora sabemos que $G_1 \equiv 0$ en D , en particular $G_1(z_0) = P_1(z_0, f \circ h_1(z_0)) = P_1(z_0, f(p_1)) = P_1(z_0, w_1) = 0$. Ahora tomemos una curva simple $\tilde{\alpha}$ en X que una a los puntos p_1 y p_2 y que no contenga a ningún punto de ramificación de g . La función $\alpha = g \circ \tilde{\alpha}$ es una curva cerrada en $\hat{\mathbb{C}}$ que empieza y termina en z_0 . Al hacer la continuación analítica del germen $[G_1]_{z_0}$ a lo largo de la curva α , obtenemos el germen $[G_2]_{z_0}$, pero como G_1 era la constante cero, entonces también $G_2 \equiv 0$ en D . Por lo tanto $G_2(z_0) = P_1(z_0, f \circ h_2(z_0)) = P_1(z_0, f(p_2)) = P_1(z_0, w_2) = 0$. Repitiendo el proceso anterior, ahora con una curva que una al punto p_2 con p_3 , obtenemos que $P_1(z_0, w_3) = 0$ y de la misma manera concluimos que $P_1(z_0, w_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Pero recordemos que $P_1(z, w)$ es un polinomio cuyo grado en w es menor estricto que n , así que

si fijamos a z , lo que queda es un polinomio en w que no puede tener n raíces diferentes, pero eso es lo que acabamos de demostrar tomando $z = z_0$. Dado que esta contradicción vino de suponer que $P(z, w)$ era reducible, concluimos que $P(z, w)$ es irreducible. □

Teorema 4.4. *Sea X una curva algebraica. Entonces existe un polinomio $P(z, w)$ tal que X es la superficie de Riemann de una función algebraica.*

Demostración. Como X es una curva algebraica podemos encontrar una función meromorfa no constante $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ de grado n . Luego, por la proposición 4.3 existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple una ecuación polinomial $P(g(p), f(p)) = 0$ para todo $p \in X$, donde $P(z, w)$ es un polinomio irreducible de grado n en w . Podemos considerar entonces a la superficie de Riemann de una función algebraica asociada al polinomio P , que llamaremos \mathcal{S}_P . Vamos a construir un isomorfismo entre \mathcal{S}_P y X , la construcción está dividida en dos partes.

Parte 1

Sea C el conjunto formado por los valores de ramificación de g . Consideremos un punto $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C$ y sean p_1, \dots, p_n sus preimágenes bajo g . Cada uno de estos puntos p_i tiene una vecindad U_i tal que $g : U_i \rightarrow D_a$ es un isomorfismo, donde D_a es un disco con centro en a . Llamamos $h_{i,a} : D_a \rightarrow U_i$ a las inversas locales de g . Dado que estas funciones $h_{i,a}$ son isomorfismos y la función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa, entonces las composiciones $f \circ h_{i,a}$ son funciones meromorfas en a , además cumplen la ecuación $P(a, f \circ h_{i,a}(a)) = 0$, por ello los gérmenes $[f \circ h_{i,a}]_a$ pertenecen a la fibra $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{S}_P$ de a . Mas aún, estos son los únicos gérmenes en a que pertenecen a \mathcal{S}_P ya que las únicas raíces de $P(a, w) = \prod_{i=1}^n (w - (f \circ h_i)(a))$ son los puntos $(f \circ h_i)(a)$. Así que la fibra \mathcal{F}_a de $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C$ consta de los n gérmenes $[f \circ h_{i,a}]_a$ que no son de ramificación.

Por otro lado, también sabemos que ψ es un homeomorfismo local, entonces existe para cada $a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus C$ un disco abierto, que podemos suponer que es $D_a \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus C$ tal que $\psi_i := \psi : [D_a, f \circ h_i]_a \rightarrow D_a$ es un homeomorfismo ($i = 1, \dots, n$) y por lo tanto un isomorfismo. Su inversa $\psi_i^{-1} : D_a \rightarrow [D_a, f \circ h_i]_a$ está dada por $\psi_i^{-1}(a) = [f \circ h_i]_a$.

Sea γ una curva simple en $\hat{\mathbb{C}}$ con extremos en C y que contenga a todos los puntos de este conjunto. Definimos $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, este es un abierto simplemente conexo. Observemos ahora que la colección $\{D_a : a \in E\}$ es una cubierta de E y si $D_a \cap D_b \neq \emptyset$, las funciones $\psi_i^{-1} : D_a \rightarrow [D_a, f \circ h_i]_a$ y $\psi_j^{-1} : D_b \rightarrow [D_b, f \circ h_j]_b$ coinciden en $D_a \cap D_b$, pues su imagen en un punto c en esta intersección es el germen $[f \circ h_i]_c$. De acuerdo al lema A.5, para $a_o \in E$ fijo cada isomorfismo $\psi_i^{-1} : D_{a_o} \rightarrow [D_{a_o}, f \circ h_i]_{a_o}$ se extiende a todo E , tenemos por lo tanto n isomorfismos $\psi_i^{-1} : E \rightarrow \psi_i^{-1}(E) \subseteq \mathcal{S}_P$ definidos como $\psi_i^{-1}(a) = [f \circ h_i]_a$ y su inversa es $\psi_i([f \circ h_i]_a) = a$.

Observación 4.5. $\psi_i^{-1}(E) \cap \psi_j^{-1}(E) = \emptyset$ si $i \neq j$. En efecto, supongamos para llegar a una contradicción que existe un punto $q \in \psi_i^{-1}(E) \cap \psi_j^{-1}(E)$, con $i \neq j$. Éste es un germe de la forma $[f \circ h_i]_a$ para algún $a \in E$, pues está en la imagen de $\psi_i^{-1}(E)$, pero también se escribe como $[f \circ h_j]_a$ por pertenecer a $\psi_j^{-1}(E)$, es decir, $[f \circ h_j]_a = [f \circ h_i]_a$. Esto implica que a tiene menos de n preimágenes bajo la función ψ , lo cual no es posible, pues sabemos que todos los puntos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus C$ tienen exactamente n . Así que $\psi_i^{-1}(E) \cap \psi_j^{-1}(E) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Lo que vamos a hacer ahora es relacionar los isomorfismos h_1, \dots, h_n y ψ_1, \dots, ψ_n para definir uno global de S_P en X . Definamos los conjuntos $\hat{X} \subseteq X$ y $\hat{S}_P \subseteq S_P$ de la siguiente forma

$$\hat{X} = \bigcup_{i=1}^n h_i(E) \quad \text{y} \quad \hat{S}_P = \bigcup_{i=1}^n \psi_i^{-1}(E)$$

y la función $\hat{\Phi} : \hat{S}_P \rightarrow \hat{X}$ como $\hat{\Phi}([f \circ h_i]_a) = (h_i \circ \psi_i)([f \circ h_i]_a) = h_i(a)$. Dado que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, h_i y ψ_i son isomorfismos, entonces $\hat{\Phi}$ es un isomorfismo. Nos ocuparemos ahora de extender $\hat{\Phi}$ a los puntos $[g]_b \in S_P$ tales que $b \in \gamma$, (entre ellos están los puntos de C) es decir, definiremos una función $\Phi : S_P \rightarrow X$ que coincida con $\hat{\Phi}$ en $S_P \setminus \psi^{-1}(\gamma)$.

Parte 2

Primero extenderemos $\hat{\Phi}$ a los gérmenes de la forma $[g]_b$ con $b \in \gamma \setminus C$. Consideremos pues un punto $b \in \gamma \setminus C$ y sea D un disco con centro en b en donde estén definidos los isomorfismos $h_{j,b} : D \rightarrow h_{j,b}(D)$ y $\psi_j^{-1} : D \rightarrow [D, f \circ h_{j,b}]_b$. Observemos que las composiciones $\Phi_j = h_{j,b} \circ \psi_j : [D, f \circ h_{j,b}]_b \rightarrow h_{j,b}(D)$ son isomorfismos. Definamos, para un germe $[f \circ h_{j,b}]_c \in [D, f \circ h_{j,b}]_b$, a la función Φ como $\Phi([f \circ h_{j,b}]_c) = \Phi_j([f \circ h_{j,b}]_c) = h_{j,b}(c)$. Definiendo Φ de este modo, tenemos que es un isomorfismo en b . Ahora tenemos que ver que en los puntos $[f \circ h_{j,b}]_c$ tales que $c \in D \cap E$, las funciones $\hat{\Phi}$ y $\Phi = \Phi_j$ coinciden.

Notemos que $D \cap E$ es un conjunto formado por dos abiertos conexos y ajenos, que llamaremos D_1 y D_2 . Tomemos un punto $a \in D_1$. Como $a \in E$, los puntos en $\psi^{-1}(a)$ son $[f \circ h_1]_a, \dots, [f \circ h_n]_a$. Luego, en el disco $[D, f \circ h_{j,b}]_b$ existe únicamente un elemento de $\psi^{-1}(a)$, porque ψ restringida a este disco es un isomorfismo. Sea $[f \circ h_i]_a$ dicho elemento. Sabemos que $\hat{\Phi}([f \circ h_i]_a) = h_i(a)$. Por otro lado, tenemos definido el isomorfismo $\psi_j^{-1} : D \rightarrow [D, f \circ h_{j,b}]_b$ como $\psi_j^{-1}(c) = [f \circ h_{j,b}]_c$ así que se lo podemos aplicar al punto a , obteniendo el germe $[f \circ h_{j,b}]_a$. Sabemos además que $\Phi([f \circ h_{j,b}]_a) = h_{j,b}(a)$.

Tenemos que demostrar que $h_{j,b}(a) = h_i(a)$, pero observemos que los gérmenes $[f \circ h_{j,b}]_a$ y $[f \circ h_i]_a$ son iguales, esto quiere decir que $f \circ h_{j,b} = f \circ h_i$ en una vecindad W de a . Notemos ahora que $h_{j,b}(a)$ es una preimagen de a bajo la función g , y sabemos que las preimágenes de a son $h_1(a), \dots, h_n(a)$ (pues $a \in E$) por lo tanto $h_{j,b}(a) = h_k(a)$ para alguna $k \in \{1, \dots, n\}$. Queremos ver que $k = i$. Para llegar a una contradicción supongamos que $i \neq k$. Como $h_{j,b}(a) = h_k(a)$, entonces $h_{j,b}(W) \cap h_k(W)$ es un abierto no vacío. Tomemos un punto $x \in h_{j,b}(W) \cap h_k(W)$ que sea diferente de $h_{j,b}(a) = h_k(a)$. Entonces existen dos puntos

$c, d \in W$ tales que $h_k(c) = x$ y $h_{j,b}(d) = x$. Luego, $g(x) = g(h_k(c)) = c$ y $g(x) = g(h_{j,b}(d)) = d$, de donde concluimos que $c = d$. Así, podemos formar un conjunto infinito en W en donde $h_{j,b}$ sea igual a h_k , y por el teorema de la identidad tendremos que $h_k = h_{j,b}$ en W , lo cual a su vez implica que $f(h_k(W)) = f(h_{j,b}(W))$ es decir, $f \circ h_k = f \circ h_{j,b}$ en la vecindad W de a , por lo que $[f \circ h_k]_a = [f \circ h_{j,b}]_a$, pero recordemos que $[f \circ h_{j,b}]_a = [f \circ h_i]_a$, así que $[f \circ h_k]_a = [f \circ h_i]_a$, lo cual quiere decir que a tiene menos de n preimágenes bajo ψ , lo cual no puede ser, ya que $a \in \hat{C} \setminus C$. Por lo tanto $i = k$ y así, $h_{j,b}(a) = h_i(a)$. Esto demuestra que $\hat{\Phi}$ y Φ coinciden en los gérmenes $[f \circ h_{j,b}]_a$ del disco $[D, f \circ h_{j,b}]_b$ tales que $a \in D_1$. Análogamente demostramos que $\hat{\Phi}$ y Φ coinciden en los gérmenes $[f \circ h_{j,b}]_a$ del disco $[D, f \circ h_{j,b}]_b$ tales que $a \in D_2$. De este modo definimos Φ en los puntos de $\gamma \setminus C$.

Nos resta finalmente definir Φ para los gérmenes $[g]_c \in \mathcal{S}_P$ tales que $c \in C$. Para hacer esto veamos que existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de ramificación de g y los de ψ con igual grado de ramificación. Sea a un punto en C , x_1, \dots, x_m sus preimágenes bajo la función g y $[F_1]_a, \dots, [F_k]_a$ sus preimágenes bajo ψ . Sea q_i el orden de ramificación de x_i y r_j el orden de ramificación de $[F_j]_a$, con $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, k\}$. Sabemos que para cada punto x_i existe una carta (U_i, λ_i) tal que $z \circ \lambda^{-1}(\lambda(x)) = \lambda^{q_i}(x) + a$. Entonces cada punto en $g(U_i \setminus \{x_i\})$ tiene exactamente q_i preimágenes en U_i . Supongamos que los abiertos U_i son ajenos dos a dos y conexos (los podemos tomar ajenos por que X es Hausdorff y conexos por que X es localmente conexo). Vamos a elegir un disco abierto D de radio ε con centro en a que cumpla lo siguiente:

1. $D \cap C = \{a\}$, es decir, D no contiene mas puntos de C , excepto a a .
2. Los discos $[D, F_j]_a$ en \mathcal{S}_P , con $j \in \{1, \dots, k\}$, son ajenos dos a dos, y salvo quizás $[F_j]_a$, no tienen mas gérmenes de ramificación.
3. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $D \subseteq g(U_i)$.

De este modo, $g^{-1}(D)$ (la preimagen en X del disco D) consta de m abiertos ajenos, cada uno contenido en un U_i y todo punto en $D \setminus \{a\}$ tiene q_i preimágenes en U_i (en total tendrá n preimágenes). Por otro lado, las preimágenes bajo ψ de cada punto en D están contenidas en la unión de los discos $[D, F_1]_a, \dots, [D, F_k]_a$ y también son n en total. Ya hemos definido la función Φ para cada punto de $[D, F_j]_a \setminus [F_j]_a$.

Lema 4.6. .

- (i) Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ existe una $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que el orden de ramificación r_j de $[F_j]_a$ es igual al orden de ramificación de x_i .
- (ii) La imagen bajo Φ del disco agujerado $[D, F_j]_a \setminus [F_j]_a$ está contenido en algún U_i .
- (iii) Si $j \neq j'$, entonces $\Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a) \cap \Phi([D, F_{j'}]_a \setminus [F_{j'}]_a) = \emptyset$
- (iv) Para cada i existe j tal que U_i contiene a $\Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a)$.

Demostración. (i) Sea b un punto en $D \cap E$. Sabemos que b tiene q_i preimágenes en el abierto $\lambda_i(U_i)$ que están dispuestas como en la Figura 4.3 (a). Consideremos una curva σ contenida en D que rodee una vez al punto a y que su punto inicial y final sea b . Tomemos un índice $j \in \{1, \dots, k\}$ y consideremos un germen de la forma $[f \circ h_{l_1}]_b$ que pertenezca al disco $[D, F_j]_a$. Como $b \in D$, existe alguna $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que el punto $h_{l_1}(b)$ pertenece a U_i . Como $(g \circ \lambda_i^{-1}) + a : \lambda_i(U_i \setminus x_i) \rightarrow D \setminus \{a\}$ es una aplicación cubriente, podemos levantar la curva σ en el punto $\lambda_i(h_{l_1}(b))$, llamemos $\tilde{\sigma}$ a ese levantamiento y notemos que como σ es una curva cerrada, el punto final de $\tilde{\sigma}$ debe pertenecer a la fibra de b , y ese punto es $\lambda_i(h_{l_2}(b))$ (o $\lambda_i(h_{l_{q_i}}(b))$) (Figura 4.3, (b)). Si no fuera uno de los puntos adyacentes a $\lambda_i(h_{l_1}(b))$ entonces la proyección de $\tilde{\sigma}$ al disco D cubriría mas de una vez a la curva σ .

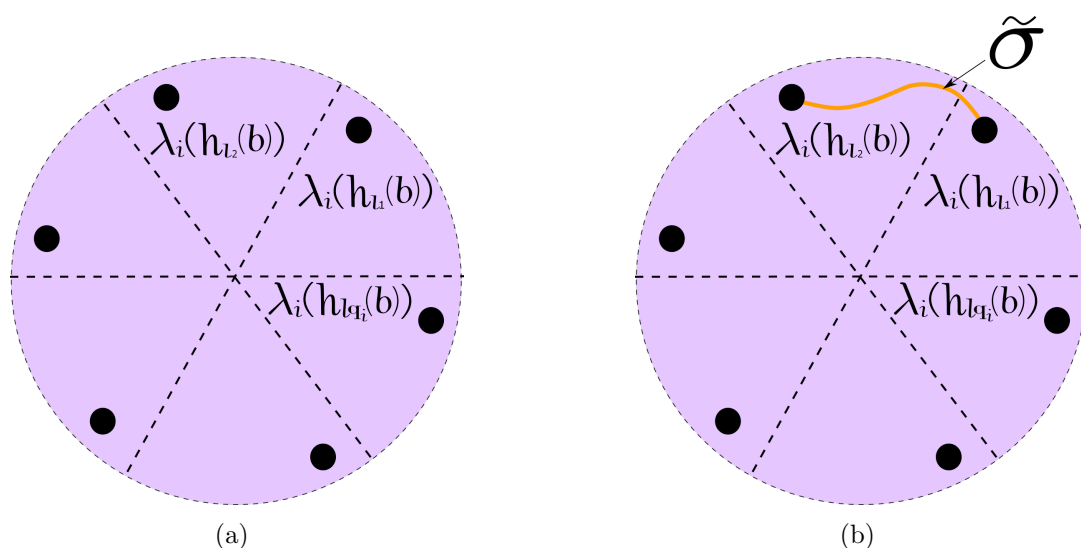


Figura 4.3.

Esto a su vez quiere decir que si hacemos la continuación analítica del germen $[f \circ h_{l_1}]_b$ a lo largo de la curva σ , obtenemos el germen $[f \circ h_{l_2}]_b$. Volvemos a hacer el levantamiento de σ pero ahora en el punto $\lambda_i(h_{l_2}(b))$ y ese debe terminar en punto $\lambda_i(h_{l_3}(b))$. Y al mismo tiempo, al hacer la continuación analítica del germen $[f \circ h_{l_2}]_b$ a lo largo de la curva σ , obtenemos el germen $[f \circ h_{l_3}]_b$. Al repetir q_i veces este proceso de levantar la curva σ en los puntos finales del levantamiento anterior regresamos al punto $\lambda_i(h_{l_1}(b))$, pues recordemos que al ser x_i un punto de ramificación de orden q_i , cualquier punto en $D \setminus \{a\}$ tiene exactamente q_i preimágenes bajo la función $(z \circ \lambda_i^{-1}) + a$. Esto implica que al hacer q_i veces la continuación analítica del germen $[f \circ h_{l_1}]_b$ a lo largo de la curva σ , regresamos a dicho germen, lo cual quiere decir que $[F_j]_a$ es un germen de ramificación de orden q_i , es decir, $r_j = q_i$.

- (ii) Tomemos el germen $[f \circ h_l]_b \in [D, F]_a$ del inciso a, entonces $h_l(b) \in U_i$ y consideremos otro $[g]_c \in [D, F]_a \setminus [F]_a$. Sea $\hat{\gamma} : I \rightarrow [D, F]_a$ una curva que una a los gérmenes $[f \circ h_l]_b$ y $[g]_c$. Sabemos que $\gamma = \psi(\hat{\gamma})$ es una curva en D que une a b con c . Consideremos el

levantamiento de γ a $U_i \setminus \{x_i\}$ en el punto $h_l(b)$ y llamemos $\tilde{\gamma}$ a este levantamiento. Como $\tilde{\gamma}$ es conexo y pertenece a la preimagen de D bajo z , debe estar totalmente contenido en uno de los abiertos U_1, \dots, U_m , pero sabemos que $\tilde{\gamma}(0) = h_l(b) \in U_i$, por lo tanto $\tilde{\gamma} \subseteq U_i$.

Dado que $\hat{\gamma}$ une a $[f \circ h_l]_b$ y $[g]_c$, entonces $[g]_c$ es de la forma $[f \circ h_l]_c$ y por definición, Φ manda a este germen al punto $h_l(c)$, pero este es el punto que obtenemos como extremo final del levantamiento de γ a $U_i \setminus \{x_i\}$ en el punto $h_l(b)$, por lo tanto $\Phi([g]_c) \in U_i$. De este modo hemos demostrado que si tomamos cualquier germen en $[D, F_j]_a \setminus [F_j]_a$, entonces la imagen bajo Φ de dicho germen pertenece a U_i , por lo tanto $\Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a) \subseteq U_i$.

- (iii) Sabemos que Φ es un isomorfismo en $\mathcal{S}_P \setminus \psi^{-1}(C)$. Supongamos que existe un punto $x \in \Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a) \cap \Phi([D, F_{j'}]_a \setminus [F_{j'}]_a)$, entonces existen dos gérmenes $[g]_c \in [D, F_j]_a \setminus [F_j]_a$ y $[\hat{g}]_{\hat{c}} \in [D, F_{j'}]_a \setminus [F_{j'}]_a$ (estos gérmenes son diferentes por que al ser $j \neq j'$, tenemos que $[D, F_j]_a \cap [D, F_{j'}]_a = \emptyset$) tales que $\Phi([g]_c) = \Phi([\hat{g}]_{\hat{c}})$, pero esto implica que Φ no es inyectiva, lo cual no puede suceder porque es un isomorfismo en $\mathcal{S}_P \setminus \psi^{-1}(C)$. Por lo tanto $\Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a) \cap \Phi([D, F_{j'}]_a \setminus [F_{j'}]_a) = \emptyset$. Observemos que (ii) y (iii) implican que $m \geq k$.

- (iv) Consideremos una reenumeración de los abiertos U_1, \dots, U_m de forma que $\Phi([D, F_1]_a \setminus [F_1]_a) \subseteq U_1, \dots, \Phi([D, F_k]_a \setminus [F_k]_a) \subseteq U_k$. Supongamos que existe algún índice $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que para ningún $j \in \{1, \dots, k\}$ se cumple que $\Phi([F_j]_a \setminus [F_j]_a) \subseteq U_i$. . . (*). Sin pérdida de generalidad supongamos que $i = m$. Tomemos un punto $b \in (D \setminus \{a\}) \cap E$ y una de sus preimágenes $h_l(b)$ en U_m . Entonces el germen $[f \circ h_l]_b \in \mathcal{S}_P$ debe pertenecer a algún disco $[D, F_j]_a$, con $j \in \{1, \dots, k\}$.

Luego, por definición tenemos que $\Phi([f \circ h_l]_b) = h_l(b)$, pero $h_l(b) \in U_m$, esto implica que la imagen bajo Φ de cualquier germen en $[D, F_j]_a \setminus [F_j]_a$ pertenece a U_m , (para convencerse de esto basta revisar de nuevo la demostración de (ii)) entonces $\Phi([F_j]_a \setminus [F_j]_a) \subseteq U_m$, pero esto contradice nuestra suposición (*). Por lo tanto para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a) \subseteq U_i$. Notemos que esto implica que $m = k$. □

En el lema 4.6 demostramos que existe una biyección entre las preimágenes de a en X bajo la función g y las preimágenes de a en \mathcal{S}_P bajo la función ψ . Definimos para un punto $[F_j]_a \in \psi^{-1}(a)$ a la función Φ como $\Phi([F_j]_a) = x_i$, donde x_i es la preimagen bajo g de a que está en U_i , y U_i es el único abierto tal que $\Phi([D, F_j]_a \setminus [F_j]_a) \subseteq U_i$ (ver la demostración de (ii)). Por el inciso (i) del lema 4.6 sabemos que el orden de ramificación de $[F_j]_a$ y de $\Phi([F_j]_a) = x_i$ es el mismo. De este modo definimos Φ en los puntos de $\psi^{-1}(C)$. Ya habíamos demostrado que Φ en $\mathcal{S}_P \setminus \psi^{-1}(C)$ es un isomorfismo, ahora veamos que en los puntos de ramificación también es holomorfa y con inversa holomorfa, esto lo haremos hallando un par de cartas en donde la función de transición sea biholomorfa. Consideremos pues un punto

$a \in C$, un germe $[F_j]_a \in \psi^{-1}(a)$ y su imagen $\Phi([F_j]_a) = x_i \in U_i$ (con la misma notación del lema 4.6). Sea q_i el orden de ramificación de estos puntos. Para $x_i \in U_i$ vamos a usar la carta (U_i, λ_i) , que cumple que $((g \circ \lambda_i^{-1}) - a)(\lambda_i(x)) = \lambda_i^{q_i}(x)$, y para el punto $[F_j]_a$ vamos a usar la carta que construimos en la afirmación 2.22 de la sección 2.4, capítulo 2, esta es $([D, F_j]_a, \eta)$, donde $\eta : [D, F_j]_a \rightarrow D_{\varepsilon^{1/q_i}}$ (el disco con centro en cero y radio ε^{1/q_i}) está definida como $\eta([g]_c) = (c - a)^{1/q_i}$, figura (4.4).

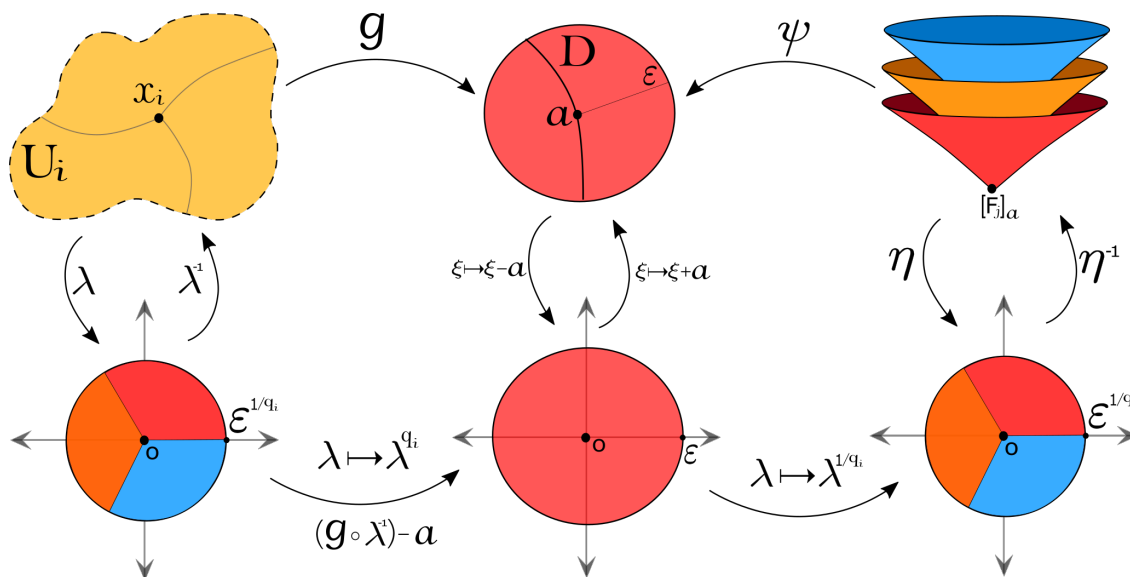


Figura 4.4.

La función Φ es continua en $[F_j]_a$, ya que la imagen bajo Φ de una sucesión en el disco $[D, F_j]_a$ que converja a $[F_j]_a$, converge a una de las preimágenes de a bajo g , es decir, a alguno de los puntos x_1, \dots, x_m , pero esta sucesión está contenida en el abierto U_i , entonces el punto al que converge la imagen de la sucesión es $x_i = \Phi([F_j])$. Ahora bien, la función T de transición entre las cartas es holomorfa salvo en el cero, pero en este punto es continua. Luego, el cero es la imagen de la curva constante de valor cero, y esta curva es suave, entonces por el teorema C.5 tenemos que T es holomorfa en todo el disco con centro en cero y radio $1/\varepsilon$. Aplicado el mismo argumento a la función T^{-1} concluimos que T es biholomorfa. Así, La función Φ es un isomorfismo en $[D, F_j]_a$.

□

Capítulo 5

El teorema de Riemann-Roch

En este último capítulo analizaremos la propiedad que tienen las curvas algebraicas ¹ de poseer funciones meromorfas no constantes. Recordemos que esta característica fue clave para demostrar que cualquier curva algebraica es la superficie de Riemann de una ecuación polinomial. En la última sección del capítulo dos hicimos un primer acercamiento a las curvas algebraicas, y uno de los resultados que obtuvimos fué el lema 2.24, que dice lo siguiente:

Supongamos que X es una curva algebraica y tenemos fijos n puntos p_1, \dots, p_n en X . Además tenemos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ un polinomio $r_i = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_{k+l} z^{k+l}$ (que llamamos polinomio de Laurent²). Entonces existe una función meromorfa f tal que su serie de Laurent en cada punto p_i empieza exactamente con el polinomio r_i (Figura 5.1).

En particular el lema 2.24 implica que podemos tener control sobre el orden de f en los puntos p_1, \dots, p_n , sin embargo no sabemos que pasa con f en los demás puntos de X , podría suceder que alguno de ellos sea un polo₂ o un cero. Esto nos lleva a preguntarnos si podemos construir ahora una función, digamos \tilde{f} , tal que su serie de Laurent en cada p_i empiece con el polinomio r_i pero que además sea holomorfa en el resto de los puntos. Este es un problema conocido como *el problema de Mittag-Leffler* y la respuesta dependerá de una característica geométrica que clasifica a las superficies de Riemann compactas, el género.

Cabe hacer notar que la misma definición de curva algebraica implica la existencia de funciones meromorfas no constantes, de hecho eso fué lo que utilizamos para dar la construcción de f , sin embargo no parece claro que en cualquier superficie de Riemann compacta pueda haber funciones meromorfas no constantes. Este es un resultado que es cierto, es decir, cualquier superficie de Riemann compacta es una curva algebraica, pero no haremos la demostración aquí ³. Lo que si haremos es demostrar un resultado equivalente que tiene muchas

¹Una curva algebraica es una superficie de Riemann compacta que cumple que su campo de funciones meromorfas separa puntos y tangentes (ver la definición 2.17 en el capítulo 2).

²Si X es una superficie de Riemann y $p \in X$, (U, z) una carta centrada en p , un polinomio de Laurent alrededor de p en la coordenada z es un polinomio $r_p = \sum_{i=n}^m a_i z^i$ con $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \leq m$. y $a_i \in \mathbb{C}$. Decimos que r_p tiene orden n .

³En el libro *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*, Eric Reyssat, se puede encontrar la demostración.

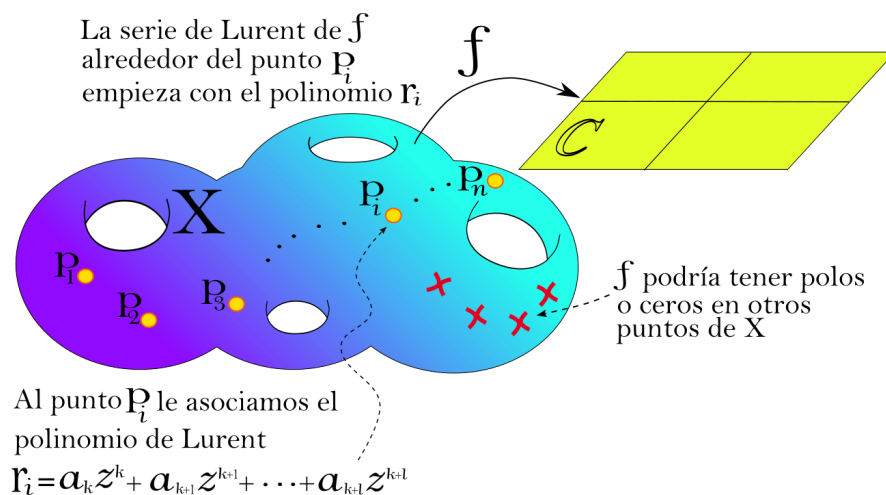


Figura 5.1.

implicaciones geométricas, el teorema de Riemann-Roch.

Demostrar el teorema de Riemann-Roch es el objetivo de este último capítulo. De este teorema podremos deducir que si la suma de los órdenes de los polinomios de Laurent r_1, \dots, r_n es mayor o igual que $2g - 1$, donde g es el género de X , entonces existe la función \tilde{f} que cumple que su serie de Laurent en cada p_i empieza con el polinomio r_i y que además es holomorfa en $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$.

Como podemos darnos cuenta, partimos de una pregunta geométrica que tiene que ver con un conjunto finito de puntos en una superficie de Riemann compacta y para resolver este problema, es decir, para demostrar el teorema de Riemann-Roch, vamos a poner esta pregunta en términos algebraicos para así poder utilizar las herramientas del álgebra. La manera de lograr esto será definiendo una nueva clase de objetos llamados divisores que guardaran la información que necesitamos para encontrar la \tilde{f} , eso es, los puntos p_1, \dots, p_n y los órdenes de los polinomios de Laurent r_1, \dots, r_n .

5.1. Divisores

Definición 5.1. Un *divisor* D en una superficie de Riemann X es una combinación lineal formal $D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$ donde $D(p) \in \mathbb{Z}$ y $D(p) \neq 0$ sólo para un número finito de puntos. El conjunto $\{p \in X : D(p) \neq 0\}$ es el *soporte* del divisor D y lo denotamos por $Supp(D)$. Un divisor D es *efectivo* o *positivo* si para todo $p \in X$, $D(p) \geq 0$. Si D y \hat{D} son divisores en X tales que $D - \hat{D} \geq 0$, entonces decimos que $D \geq \hat{D}$. El conjunto de divisores es un grupo aditivo llamado el *grupo de divisores de X* y se denota por $Div(X)$. Siempre podemos descomponer un divisor D en la suma de dos divisores positivos $D = P - N$ donde $P = \sum_{D(p) > 0} D(p) \cdot p$

y $N = \sum_{D(p)<0} -D(p) \cdot p$. A P le llamamos la parte positiva de D y a N la parte negativa de D .

Ejemplo 5.2. Tomemos $X = \mathbb{C}$ y consideremos los puntos $p_1 = 0$, $p_2 = i$, $p_3 = 1 + i$ y $p_4 = -1 - i$ y $p_5 = 1 + i$. Entonces un divisor en $\hat{\mathbb{C}}$ es $D = 5p_1 + 7p_2 - 9p_3 + 2p_4 - 23p_5$. En este caso tenemos que $D(p_1) = 5$, $D(p_2) = 7$, $D(p_3) = -9$, $D(p_4) = 2$ y $D(p_5) = 23$.

Divisor asociado a una función meromorfa

Denotamos por $\mathcal{M}(X)$ al conjunto de funciones meromorfas de una superficie de Riemann X . El divisor asociado a una función $f \in \mathcal{M}(X)$, $f \neq 0$ se define como $\text{div}(f) = \sum_{p \in X} \text{Ord}_p(f) \cdot p$. Las partes positiva y negativa de $\text{div}(f)$, llamadas *divisor de ceros* y *divisor de polos* respectivamente, son los divisores

$$\text{div}_0(f) = \sum_{\text{Ord}_p(f) > 0} \text{Ord}_p(f) \cdot p \quad \text{y} \quad \text{div}_\infty(f) = \sum_{\text{Ord}_p(f) < 0} -\text{Ord}_p(f) \cdot p.$$

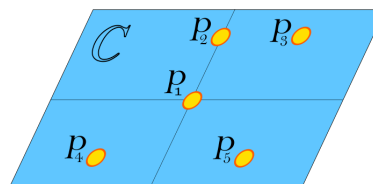


Figura 5.2.

Ejemplo 5.3. Consideremos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{-5}{(p_1 - z)^7(p_2 - z)^6} + \frac{9}{(p_3 - z)^2} + 3(p_4 - z)^8 - 15(p_5 - z)^4$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 son los puntos del ejemplo 5.2, (figura 5.2)). Observemos que f tiene un polo de orden 7 en p_1 , un polo de orden 6 en p_2 , un polo de orden 2 en p_3 , un cero de orden 8 en p_4 y un cero de orden 4 en p_5 . Entonces el divisor de ceros de f es $\text{div}_0(f) = 8p_4 + 4p_5$, su divisor de polos es $\text{div}_\infty(f) = 7p_1 + 6p_2 + 2p_3$ y el divisor de f es $\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f) = 8p_4 + 4p_5 - 7p_1 - 6p_2 - 2p_3$.

El grado de un divisor

A cada divisor en una superficie le podemos asociar un entero mediante la operación $\text{deg} : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definida como

$$\text{deg} \left(\sum_{p \in X} D(p) \cdot p \right) = \sum_{p \in X} D(p)$$

Ejemplo 5.4. Consideremos la función f del ejemplo 5.3. El grado del divisor de f es $\text{deg}(\text{div}(f)) = \text{deg}(8p_4 + 4p_5 - 7p_1 - 6p_2 - 2p_3) = 8 + 4 - 7 - 6 - 2 = -3$

Observaciones:

1. Recordemos que una función meromorfa tiene orden cero en todos los puntos de la superficie donde está definida, salvo los puntos que son ceros o polos. Por lo tanto el grado de su divisor asociado es en efecto un entero.
2. Si D y \hat{D} son dos divisores, entonces $\text{deg}(D + \hat{D}) = \text{deg}(D) + \text{deg}(\hat{D})$.

3. Sea X una superficie de Riemann compacta. Recordemos que en este tipo de superficies, la suma de los ceros y polos de cualquier función meromorfa f (contados con multiplicidad) es cero, por ello $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

Por ejemplo, consideremos la función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = 1/z$ si $z \neq \infty$ y $f(\infty) = 0$. Esta función tiene un cero de orden 1 en ∞ y un polo de orden 1 en el cero, por lo que su divisor de ceros es $\operatorname{div}_0(f) = (1)\infty$, su divisor de polos es $\operatorname{div}_\infty(f) = (1)0$ y su divisor es $\operatorname{div}(f) = (1)\infty - (1)0$, así, el grado de este divisor es $\deg(\operatorname{div}(f)) = \deg[(1)\infty - (1)0] = 1 - 1 = 0$.

Espacio vectorial asociado a un divisor

Definición 5.5. Sea D un divisor en una superficie de Riemann X . El espacio vectorial (sobre \mathbb{C}) asociado a este divisor es

$$\mathcal{L}(D) = \{0\} \cup \{f \in \mathcal{M}(X) : f \neq 0, \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}$$

Notemos que $f \in \mathcal{L}(D) \Leftrightarrow \operatorname{div}(f) + D \geq 0$, esto significa que para todo punto $p \in X$, $-D(p) \leq \operatorname{Ord}_p(f)$. Es entonces el coeficiente $D(p)$ que cada punto $p \in X$ tiene en el divisor D el que determina el comportamiento de cualquier función f en $\mathcal{L}(D)$, tenemos tres casos:

1.- Si $D(p)$ es negativo, una función $f \in \mathcal{L}(D)$ debe tener en p orden positivo y mayor o igual que $-D(p)$, es decir, debe tener un cero de orden mayor o igual que $-D(p)$.

2.- Si $D(p)$ es positivo, entonces f puede tener orden negativo, pero no menor a $-D(p)$, es decir, en p f puede ser holomorfa, o tener un cero de orden mayor o igual que 1, o un polo de orden a lo más $-D(p)$.

3.- Si $D = 0$ entonces f debe ser holomorfa en p , pudiendo tener en este punto un cero de cualquier multiplicidad. Por ejemplo, $\mathcal{L}(0)$ consta de las funciones f tales que $\operatorname{div}(f) + 0 = \operatorname{div}(f) \geq 0$, entonces todos los coeficientes de $\operatorname{div}(f)$ deben ser no negativos, así que f no puede tener polos, por lo tanto f debe ser holomorfa. Si la superficie X es compacta, entonces $\mathcal{L}(0)$ es el conjunto de funciones constantes⁴ y por lo tanto $\dim \mathcal{L}(0) = 1$.

La siguiente tabla muestra el análisis del divisor D del ejemplo 5.2 con una función f que si pertenece a $\mathcal{L}(D)$ y una función g que no pertenece a $\mathcal{L}(D)$.

Lema 5.6. Sea X una superficie de Riemann compacta y $D \in \operatorname{Div}(X)$ tal que $\deg(D) < 0$. Entonces $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ y por lo tanto $\dim \mathcal{L}(D) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\deg(D) < 0$ y que existe $f \neq 0$ en $\mathcal{L}(D)$. Como $f \in \mathcal{L}(D)$, entonces $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$ por ello, $\deg(\operatorname{div}(f) + D) = \deg(\operatorname{div}(f)) + \deg(D) \geq 0$, pero sabemos que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$, entonces $\deg(D) \geq 0$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ \square

⁴En una superficie de Riemann compacta, las únicas funciones holomorfas son las constantes.

Puntos en el soporte de D	D(p)	Orden mínimo que una función en $\mathcal{L}(D)$ debe tener en este punto	Ejemplo de una función f que sí pertenece a $\mathcal{L}(D)$		Ejemplo de una función g que NO pertenece a $\mathcal{L}(D)$	
			$\text{Ord}_p(f)$	$D(p) + \text{Ord}_p(f)$	$\text{Ord}_p(g)$	$D(p) + \text{Ord}_p(g)$
P_1	5	-5	-5	0	7	12
P_2	7	-7	3	10	8	15
P_3	-9	9	10	1	9	0
P_4	2	-2	0	2	-2	0
P_5	-23	23	70	47	20	-3
Puntos fuera del soporte de D						
q	0	0	5	5	-4	-4
Los otros puntos de \mathbb{C}	0	0	0	0	0	0

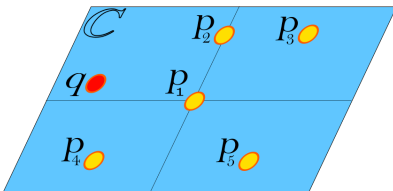


Figura 5.3.

Ejemplo 5.7. Si q_1, q_2 y q_3 son puntos en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, para el divisor $D = -7q_1 + 2q_2 + 3q_3$ tenemos que $\mathcal{L}(D) = \{0\}$, ya que $\text{deg}(D) = -2$. En particular, todos los divisores negativos tienen asociado el espacio vectorial $\{0\}$.

Observación 5.8. Supongamos que D_1 y D_2 son dos divisores en una superficie X , tales que $D_1 \leq D_2$. Consideremos una función $f \in \mathcal{L}(D_1)$, entonces para todo $p \in X$ se tiene que $-D_1(p) \leq \text{Ord}_p(f)$ pero $D_1 \leq D_2$ implica que $-D_2 \leq -D_1$, entonces tenemos también que $-D_2(p) \leq \text{Ord}_p(f)$, por lo tanto $f \in \mathcal{L}(D_2)$. Concluimos que $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$.

Por ejemplo, tomemos los divisores $D_1 = 5p$ y $D_2 = 7p + 12q$, donde p y q son puntos en una superficie X . Notemos que $D_1(p) = 5 < 7 = D_2(p)$; $D_1(q) = 0 < 12 = D_2(q)$ y $D_1(x) = 0 = D_2(x)$ para cualquier otro punto x de X , es decir, $D_1 \leq D_2$. Luego, el espacio $\mathcal{L}(D_1)$ consta de la función cero y las funciones que en p tienen orden mayor o igual que -5 , y son holomorfas en los otros puntos; $\mathcal{L}(D_2)$ consta de la función cero y las funciones que en p tienen orden mayor o igual que -7 , en q tienen orden mayor o igual que -12 , y son holomorfas en los demás puntos de X . Así, una función en $\mathcal{L}(D_1)$ cumple con tener en p orden mayor que -7 , al ser holomorfa en q tiene orden no negativo y por tanto mayor que -12 , y en el resto de los puntos de X es holomorfa. Por lo tanto dicha función pertenece a $\mathcal{L}(D_2)$.

Cuando tenemos una superficie de Riemann compacta, la dimensión del espacio vectorial asociado a cualquier divisor D es finita, y podemos dar una cota: $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \text{deg}(D)$, donde P es la parte positiva de D . En particular, si D es un divisor efectivo (es decir, que sus coeficientes son todos no negativos), entonces $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \text{deg}(D)$. La demostración de este resultado se hace en el apéndice D, (ver proposición D.3).

5.2. Formas diferenciales en una superficie de Riemann

Otra herramienta que necesitamos para demostrar el teorema de Riemann-Roch son las formas diferenciales.

Definición 5.9. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{A} = \{(U, z) : U \in \mathcal{U}\}$ un atlas para X . Una 1-forma meromorfa en X es un conjunto $\omega = \{\omega_U : U \in \mathcal{U}\}$ donde cada $\omega_U = f dz$ es una 1-forma meromorfa en $z(U) \subseteq \mathbb{C}$ ⁵ (por lo tanto f es una función meromorfa en $z(U)$). Este conjunto de 1-formas debe cumplir la siguiente condición de compatibilidad: si (U, z) y (\tilde{U}, \tilde{z}) son dos cartas tales que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, $\omega_U = f dz$ y $\omega_{\tilde{U}} = g d\tilde{z}$ las 1-formas correspondientes en $z(U)$ y $\tilde{z}(\tilde{U})$, y $T = \tilde{z} \circ z^{-1}$ la función de transición entre ambas cartas, entonces $g(T(z)).T'(z) = f(z)$. Si p es un punto en X , (U, z) una carta en p y $\omega_U = f dz$ la 1-forma en $z(U)$, diremos que $\omega = f dz$ es la expresión de ω en p . Al conjunto de 1-formas meromorfas en X lo vamos a denotar como $\mathcal{M}^{(1)}(X)$.

Lema 5.10. *El cociente de dos 1-formas meromorfas es una función meromorfa.*

Demostración. Sean η y ω dos 1-formas meromorfas en X . Sea p un punto en X y (U, z) una carta centrada en p . Si $\omega_U = f(z) dz$ y $\eta_U = g(z) dz$ son las expresiones de dichas 1-formas en el punto p , definimos el cociente de ω y η como la función $h : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(p) = f(z(p))/g(z(p))$.

Veamos que esta definición no depende de la carta elegida, para ello supongamos que (V, w) es otra carta centrada en p y que $\omega_V = \tilde{f}(w) dw$ y $\eta_V = \tilde{g}(w) dw$ son las expresiones de las 1 formas en esta otra carta coordenda. Por hipótesis sabemos que $\tilde{f}(w) = \tilde{f}(T(z)).T'(z) = f(z)$ y $\tilde{g}(w) = \tilde{g}(T(z)).T'(z) = g(z)$, esto implica que

$$h(p) = \frac{\tilde{f}(w(p))}{\tilde{g}(w(p))} = \frac{f(z(p))}{g(z(p))}$$

lo cual muestra que el valor de h no depende de la carta que tomemos. □

Definición 5.11. Sea ω una 1-forma en una superficie de Riemann X y p un punto en X . Si $\omega = f(z) dz$ es la expresión de ω en p , definimos el *orden* de ω en p como $\text{Ord}_p(\omega) = \text{Ord}_p(f)$. El divisor de ω se define como $\text{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \text{Ord}_p(\omega).p$, y su grado es $\text{deg}(\omega) = \sum_{p \in X} \text{Ord}_p(\omega)$.

La siguiente proposición establece una relación entre el grado de cualquier 1-forma en una superficie compacta y la característica de Euler de la superficie.

Proposición 5.12. *Sea ω una 1-forma en una superficie de Riemann compacta X de género g . Entonces $\text{deg}(\text{div}(\omega)) = 2g - 2$.*

⁵En el apéndice E definimos las 1-formas en abiertos de \mathbb{C} .

Demostración. Por el lema 5.10 sabemos que si ω y η son dos 1-formas meromorfas en X , entonces $h = \omega/\eta$ es una función meromorfa definida localmente en cada punto de X y que no depende de la carta elegida. Además, el grado del divisor de cualquier función en una superficie de Riemann compacta es cero, pero $\deg(\operatorname{div}(h)) = \deg(\operatorname{div}(\omega))/\deg(\operatorname{div}(\eta)) = \deg(\operatorname{div}(\omega)) - \deg(\operatorname{div}(\eta))$, por lo tanto $\deg(\operatorname{div}(\omega)) = \deg(\operatorname{div}(\eta))$.

Ahora que sabemos que el grado del divisor de cualquier 1-forma en X es el mismo, vamos a demostrar la proposición para una conveniente. Consideremos una función meromorfa no constante⁶ $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ y sea $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ su función holomorfa asociada. Supongamos que F tiene grado n .

Si las preimágenes de ∞ son puntos de ramificación, consideramos la función $g(z) = 1/(F - \xi)$ donde $\xi \in \mathbb{C}$ es un punto que tiene n preimágenes x_1, \dots, x_n (por tanto ningún punto x_i es de ramificación), entonces la imagen de estos puntos bajo g es ∞ . Podemos suponer entonces que los polos de f son simples, de lo contrario consideramos a la función $1/(f - \xi)$.

Vamos a calcular el grado del divisor de la 1-forma expresada localmente alrededor de cada punto $p \in X$ como

$$\omega_p = df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_p dz = f'(p) dz$$

Sea \mathfrak{P} el conjunto de polos de f . Observemos que

$$\deg(\operatorname{div}(\omega)) = \sum_{p \in X} \operatorname{Ord}_p(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{Ord}_p(f') = \sum_{p \in \mathfrak{P}} \operatorname{Ord}_p(f') + \sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} \operatorname{Ord}_p(f')$$

Calculemos primero

$$\sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} \operatorname{Ord}_p(f') \tag{5.1}$$

Cuando $p \in (X \setminus \mathfrak{P})$, $F(p) = f(p)$, por lo tanto $\operatorname{Ord}_p(F') = \operatorname{Ord}_p(f')$. Sea (U, z) una carta en p y

$$F(z) = F(z(p)) + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$$

la serie de F alrededor de p , donde $n_0 = e_p(F) \geq 1$ es la multiplicidad de F en p . Derivando esta serie tenemos que

$$F'(z) = \sum_{n=e_p(F)}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

y de esta última igualdad podemos ver que $\operatorname{Ord}_p(F') = e_p(F) - 1$. Sustituyendo esto en (5.1) obtenemos que $\sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} \operatorname{Ord}_p(f') = \sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} \operatorname{Ord}_p(F') = \sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} e_p(F) - 1$. Notemos

⁶En una superficie de Riemann compacta siempre existe una función meromorfa no constante, la demostración de este resultado se puede consultar en *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*, Eric Reyssat (Teorema 3.4, capítulo 3, sección 4).

ahora que si $p \in \mathfrak{P}$, $\text{Ord}_p(f) = -1$ (pues f sólo tiene polos simples) pero $\text{Ord}_p(F) = -e_p(F)$, entonces $e_p(F) = 1$, por ello $\sum_{p \in \mathfrak{P}} e_p(F) - 1 = 0$, así que

$$\sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} \text{Ord}_p(f') = \sum_{p \in X} e_p(F) - 1$$

Como F es una función holomorfa no constante entre dos superficies de Riemann compactas, podemos usar el teorema de Riemann-Hurwitz para obtener que

$$2g - 2 + 2n = 2g - 2 - n(2g_{\hat{C}} - 2) = \sum_{p \in X} [e_p(F) - 1] = \sum_{p \in (X \setminus \mathfrak{P})} [e_p(f) - 1]$$

Ahora calculemos $\sum_{p \in \mathfrak{P}} \text{Ord}_p(f')$. Sea $p \in \mathfrak{P}$ un polo de f . Como f tiene sólo polos simples, $\text{Ord}_p(f) = -1$, en consecuencia $\text{Ord}_p(f') = \text{Ord}_p(f) - 1 = -2$, y como hay exactamente n polos, entonces

$$\sum_{p \in \mathfrak{P}} \text{Ord}_p(f') = \sum_{p \in \mathfrak{P}} -2 = -2n$$

De este modo, concluimos que $\deg(K) = -2n + 2g - 2 + 2n = 2g - 2$. \square

A continuación asignamos a cada divisor D en una superficie, un espacio vectorial de 1-formas meromorfas.

Definición 5.13. (Espacio de funciones asociado a una 1-forma.)

Sea X una superficie de Riemann, $D \in \text{Div}(X)$ y ω una 1-forma meromorfa en X . Definimos

$$\mathcal{L}^{(1)}(D) = \{0\} \cup \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)} : \omega \neq 0 \text{ y } -D \leq \text{div}(\omega)\}$$

donde $\text{Div}(X)$ es el grupo de divisores de X (ver definición 5.1) y $\text{div}(\omega) = \sum \text{Ord}_p(\omega)$, (ver definición 5.11).

Proposición 5.14. *Sea X una superficie de Riemann, $D \in \text{Div}(X)$, ω una 1-forma diferencial meromorfa en X . Entonces el espacio vectorial $\mathcal{L}(D + \text{div}(\omega))$ es isomorfo a $\mathcal{L}^{(1)}(D)$.*

Demostración. Consideremos la función $\varphi : \mathcal{L}(D + \text{div}(\omega)) \rightarrow \mathcal{L}^{(1)}(D)$ dada por $\varphi(f) = f\omega$. Primero veamos que $\varphi(f) \in \mathcal{L}^{(1)}(D)$. Como $f \in \mathcal{L}(D + \text{div}(\omega))$, entonces para todo punto $p \in X$ se cumple que $-D(p) - \text{Ord}_p(\omega) \leq \text{Ord}_p(f)$, entonces $-D(p) \leq \text{Ord}_p(f) + \text{Ord}_p(\omega) = \text{Ord}_p(f\omega)$, por lo tanto $\varphi(f) = f\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(D)$.

Notemos ahora que φ es inyectiva, pues si $f\omega = 0$ necesariamente $f \equiv 0$, pues ω es una 1-forma arbitraria. Para verificar que φ es suprayectiva tomemos una 1-forma η en $\mathcal{L}^{(1)}(D)$. Entonces se cumple que $0 \leq \text{div}(\eta) + D$, es decir, para todo $p \in X$, $0 \leq \text{Ord}_p(\eta) + D(p)$. Consideremos un punto $p \in X$ y una coordenada (U, z) en p . Supongamos que en esta carta η y ω se expresan como $\omega = h(z) dz$ y $\eta = g(z) dz$, entonces $f(z) = g(z)/h(z)$ es una función meromorfa bien definida en una vecindad de p y no depende de la carta que se elija (esto es por el lema 5.10). Finalmente observemos que $\text{Ord}_p(f) = \text{Ord}_p(g) - \text{Ord}_p(h)$, pero $\text{Ord}_p(h) = \text{Ord}_p(\omega)$ y $\text{Ord}_p(g) = \text{Ord}_p(\eta)$, así que $\text{Ord}_p(f) = \text{Ord}_p(\eta) - \text{Ord}_p(\omega)$, esto implica que $\text{Ord}_p(f) + \text{Ord}_p(\omega) + D(p) = \text{Ord}_p(\eta) + D(p) \geq 0$, es decir, $\text{div}(f) + \text{div}(\omega) + D \geq 0$, por lo tanto $f \in \mathcal{L}(D + \text{div}(\omega))$. Ya que $\varphi(f) = \omega f = \eta$, concluimos que φ es suprayectiva. \square

Integral de una 1-forma

Sea ω una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann X y $\gamma : I \rightarrow X$ una curva en X . Sea $\{t_0 = 0 < \dots < t_n\}$ una partición de I de tal que $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ esté contenido en una carta coordenada (U_i, z_i) y supongamos que $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ es analítica. Sea $\omega_i = f_i(z_i) dz_i$ la expresión de ω en cada una de estas cartas y $\gamma_i = z_i(\gamma([t_{i-1}, t_i]))$. Definimos la integral de ω a lo largo de γ como $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f_i dz_i$. En una superficie de Riemann es válido el siguiente teorema:

Teorema 5.15 (de Stokes). *Sea ω una 1-forma en una superficie de Riemann X y $D \subseteq X$ un dominio relativamente compacto con frontera analítica. Entonces $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.*

El residuo de una 1-forma

Definición 5.16. Sea ω una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann X , $p \in X$ y (U, z) una carta en p . Si $\omega = f(z) dz$ es la expresión de ω en la carta U , definimos el *residuo* de ω en p como $Res_p(\omega) = Res_{z(p)}(f)$.

Proposición 5.17. *Si X es una superficie de Riemann compacta y ω es una 1-forma meromorfa en X , entonces*

$$\sum_{p \in X} Res_p(\omega) = 0.$$

Demostración. Como los polos de ω son aislados y X es compacta, entonces son un número finito, digamos p_1, \dots, p_k . Sea p_j un polo de ω , (U, z) una carta centrada en p_j y $\omega = f(z) dz$ la expresión de ω en esa carta. Como $Res_{p_j}(\omega) = Res_0(f)$, por el teorema del residuo tenemos que

$$Res_{p_j}(\omega) = Res_0(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f dz$$

donde γ_j es un círculo que rodea 1 vez a $z(p_j) = 0$. Llamemos D_j a la región en X que rodea la curva $z^{-1}(\gamma_j)$ y consideremos el conjunto $D = X \setminus \cup_{j=1}^k D_j$, este conjunto es un dominio de X relativamente compacto y su frontera es una curva analítica, entonces por el teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k Res_{p_j} \omega &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup \gamma_j} f dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup \gamma_j} f dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup \gamma_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int \int_D d\omega = 0 \end{aligned}$$

pues en D ω es holomorfa, entonces $d\omega = 0$. □

5.3. Divisores de Laurent

Sea X una superficie de Riemann. Para cada punto $p \in X$ fijemos una carta (U, z) centrada en p . Recordemos que un *polinomio de Laurent* alrededor de p en la coordenada z es un polinomio de la forma $r_p = \sum_{i=n}^m c_i z^i$ con $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \leq m$ y $c_i \in \mathbb{C}$. Diremos que m es el *orden* de r_p en p y lo denotaremos como $\text{Ord}_p(r_p)$.

Definición 5.18. Un *divisor de Laurent* es una suma formal $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$ donde r_p es un polinomio de Laurent en el punto p y $r_p \neq 0$ sólo para un número finito de puntos. El conjunto $\text{Supp}(\mathfrak{D}) = \{p \in X : r_p \neq 0\}$ es llamado el *soporte* de \mathfrak{D} .

Si $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$ y $\mathfrak{M} = \sum_{p \in X} s_p \cdot p$ son dos polinomios de Laurent, definimos su suma formal como $\mathfrak{D} + \mathfrak{M} = \sum_{p \in X} (r_p + s_p) \cdot p$ donde $(r_p + s_p)$ es la suma usual de polinomios en $\mathbb{C}[z]$. Los divisores de Laurent en X forman un grupo bajo la suma formal y lo denotamos por $T(X)$. Para darle a $T(X)$ estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{C} , definimos la multiplicación por escalares $\cdot : \mathbb{C} \times T(X) \rightarrow T(X)$ como $a \cdot \mathfrak{D} = a \cdot \sum_{p \in X} r_p \cdot p = \sum_{p \in X} (a \cdot r_p) \cdot p$ donde $a \cdot r_p = \sum_{i=n}^m (a \cdot c_i) z^i$.

Grupo de divisores de laurent asociado a un divisor

Dado un divisor $D = \sum_{p \in X} D(p) p$ en X , nos interesa considerar al subconjunto de divisores de Laurent formado por los elementos $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$ tales que en los puntos en donde $r_p \neq 0$, el orden (dado por el exponente de z) de cada término de r_p es menor estricto que $-D(p)$. Llamaremos $T[D]$ a este conjunto, el cual con la suma formal de divisores y la multiplicación escalar que hemos definido, es un subespacio vectorial de $T(X)$.

Ejemplo 5.19. Si $D = 0$, entonces $T[0]$ es el subgrupo de divisores de Laurent $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$ tal que el grado de cada r_p es estrictamente negativo.

Observación 5.20. Supongamos que D_1 y D_2 son dos divisores tales que $D_1 \leq D_2$, entonces $T[D_2] \subseteq T[D_1]$. Efectivamente: si $\sum_{p \in X} r_p \cdot p = \mathfrak{D} \in T[D_2]$, entonces el grado de cada $r_p \in \text{Supp}(\mathfrak{D})$ es menor estricto que $-D_2(p)$, pero $D_1 \leq D_2 \Leftrightarrow -D_2(p) \leq -D_1(p)$, por ello el grado de cada $r_p \in \text{Supp}(\mathfrak{D})$ es también menor estricto que $-D_1(p)$ y por lo tanto $\mathfrak{D} \in T[D_1]$.

Truncamiento de un divisor de Laurent

Existe una operación natural $t_{D_2}^{D_1} : T[D_1] \rightarrow T[D_2]$ entre los subgrupos que acabamos de definir llamada la operación *truncamiento* dada de la siguiente forma: para $\sum_{p \in X} r_p \cdot p = \mathfrak{D} \in T[D_1]$

$$t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) = \sum_{p \in X} s_p \cdot p \quad (5.2)$$

donde s_p es r_p sin los términos de grado $-D_2(p)$ en adelante. El divisor 5.2 es llamado el truncamiento de \mathfrak{D} . Notemos que esta operación es lineal, además satisface la siguiente

propiedad: si D_1 , D_2 , y D_3 son divisores en X tales que $D_1 \leq D_2 \leq D_3$, entonces $t_{D_3}^{D_1} = t_{D_3}^{D_2} \circ t_{D_2}^{D_1}$.

Divisor de Laurent asociado a una función meromorfa

Sea $D \in \text{Div}(X)$ un divisor fijo. Para asociarle a cada función meromorfa en X un divisor de Laurent en $T[D]$, definimos el operador $\alpha_D : \mathcal{M}(X) \rightarrow T[D]$ de la siguiente forma

$$\alpha_D(f) = \sum_{p \in X} f_p \cdot p$$

donde f_p es la serie de Laurent de f alrededor del punto p sin los términos de grado $-D(p)$ en adelante, entonces f_p es un polinomio de Laurent de grado $-D(p) - 1$. A continuación hacemos algunas observaciones importantes sobre el divisor $\alpha_D(f)$.

Observación 5.21.

(a) Lo primero que debemos observar es que es efectivamente un divisor de Laurent, es decir, que su soporte es finito. Como X es una superficie compacta, el conjunto de ceros y polos de f es finito. Llamemos \mathcal{F} a este conjunto. Entonces para todo punto p en $X \setminus \mathcal{F}$, la función f es holomorfa y diferente de cero, por ello su serie alrededor de estos puntos es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (5.3)$$

Por otro lado, sabemos que $\text{Supp}(D)$ es también un conjunto finito. Por lo tanto $\mathcal{F} \cup \text{Supp}(D)$ es un subconjunto finito de X . Veamos que para todo p en el complemento de $\mathcal{F} \cup \text{Supp}(D)$, se tiene que $f_p \equiv 0$. En efecto: sea $p \in X \setminus (\mathcal{F} \cup \text{Supp}(D))$. Por un lado $p \notin \mathcal{F}$, lo cual implica que f es holomorfa y diferente de cero en p entonces su serie alrededor de p es como (5.3). Por otro lado, $p \notin \text{Supp}(D)$ implica que $D(p) = -D(p) = 0$. Ya que f_p es la serie de f alrededor de p sin los términos de grado $-D(p) = 0$ en adelante, concluimos que $f_p \equiv 0$ pues dicha serie no tiene términos con grado negativo. Por lo tanto $\text{Supp}(\alpha_D(f))$ es un conjunto finito, pues está contenido en $\mathcal{F} \cup \text{Supp}(D)$. Entonces $\alpha_D(f)$ es en efecto un divisor de Laurent.

(b) Cada $f_p \in \text{Supp}(\alpha_D(f))$ es un polinomio de Laurent cuyo grado, por definición, es menor estricto que $-D(p)$. Por lo tanto $\alpha_D(f)$ pertenece a $T[D]$.

(c) Supongamos que $f \in \mathcal{L}(D)$, esto sucede si y sólo si para todo punto $p \in X$, $-D(p) \leq \text{Ord}_p(f)$. Sea $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ la serie de f alrededor de p . Recordemos que $\text{Ord}_p(f)$ es el menor exponente n_0 tal que $a_{n_0} \neq 0$. Entonces, si $\alpha_D(f) = \sum_{p \in X} f_p \cdot p$, tenemos que para todo $p \in X$, $f_p \equiv 0$ y por lo tanto $\alpha_D(f) \equiv 0$. Concluimos entonces que $\text{Ker}(\alpha_D) = \mathcal{L}(D)$.

(d) El operador α_D es lineal.

Lema 5.22. *Supongamos que D_1 y D_2 son dos divisores tales que $D_1 \leq D_2$. Entonces $t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1} = \alpha_{D_2}$*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ y p cualquier punto en X . Supongamos que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ es la serie de Laurent de f alrededor de p , donde $n_0 = \text{Ord}_p(f)$. Ya que $D_1 \leq D_2$, entonces $-D_2(p) - 1 \leq -D_1(p) - 1$. Sean $\tilde{f}_p = \sum_{n=n_0}^{-D_2(p)-1} a_n z^n$ y $f_p = \sum_{n=n_0}^{-D_1(p)-1} a_n z^n$ los truncamientos de la serie de f en los términos de grado $-D_2(p)$ y $-D_1(p)$ respectivamente. Tenemos entonces que $\alpha_{D_1}(f) = \sum_{p \in X} f_p \cdot p$ y $\alpha_{D_2}(f) = \sum_{p \in X} \tilde{f}_p \cdot p$. Notemos ahora que $(t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1})(f) = t_{D_2}^{D_1}(\sum_{p \in X} f_p \cdot p) = \sum_{p \in X} \tilde{f}_p \cdot p$. Por lo tanto $(t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1})(f) = \alpha_{D_2}(f)$. \square

5.3.1. El problema de Mittag-Leffler y espacios $H^1(D)$

Supongamos que nos dan una superficie de Riemann compacta X , un número finito de puntos p_1, \dots, p_m en ella y un polinomio de Laurent r_{p_i} para cada punto p_i . Luego nos preguntan si existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, la serie de Laurent de f alrededor de p_i empieza precisamente con el polinomio r_{p_i} y además, nos piden que f sea holomorfa en $X \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$. Este problema lo planteó el matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler en 1876.

Para resolver este problema consideramos el divisor especial $D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$ donde $D(p) = 0$ si $p \notin \{p_1, \dots, p_m\}$ y si $p = p_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces $D(p_i) = D(p) = -(k_i + 1)$ donde k_i es el grado del polinomio r_{p_i} . Definiendo de esta manera al divisor D , tenemos que el divisor de Laurent $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$ pertenece a $T[D]$, pues en primer lugar, $\text{Supp}(D) = \text{Supp}(\mathfrak{D}) = \{p_1, \dots, p_m\}$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, el grado de r_{p_i} es menor estricto que $-D(p_i)$ pues $k_i < (k_i + 1) = -D(p_i)$.

Nuestro problema ahora es encontrar una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_D(f) = \sum_{p \in X} f_p \cdot p = \sum_{p \in X} r_p \cdot p = \mathfrak{D}$. En otras palabras, nos preguntamos si \mathfrak{D} pertenece a la imagen de α_D . Si tal función existe, entonces cumple que para todo $p \in \{p_1, \dots, p_m\}$, su serie alrededor de p comienza precisamente con el polinomio de Laurent r_{p_i} y es holomorfa en cualquier punto p que pertenezca a $X \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$, pues en esos puntos tenemos que $-D(p) = 0$ y $r_p = f_p \equiv 0$, lo cual significa que la serie de f alrededor de p no tenía términos de grado negativo.

El problema de construir funciones meromorfas con polinomios de Laurent específicos en un número finito de puntos y sin polos en los demás puntos es llamado el problema de *Mittag-Leffler* para la superficie de Riemann X . Algebraicamente, este problema se mide en términos de la dimensión del espacio

$$H^1(D) := \frac{T[D](X)}{\text{Im } \alpha_D} \quad (5.4)$$

Por definición, un divisor de Laurent $\mathfrak{D} \in T[D](X)$ pertenece a la imagen de α_D si y sólo si su clase en $H^1(D)$ es cero. Por lo tanto la dimensión de este espacio mide que tanto falta para que el problema de Mittag-Leffler en X tenga solución.

Dimensión de $H^1(D)$

El primer paso para averiguar bajo qué condiciones se puede resolver el problema de Mittag-Leffler es analizar a la dimensión de los espacios $H^1(D)$. Resulta que en una curva algebraica, esa dimensión siempre es finita. En esta sección lo vamos a demostrar. Recordemos que $\mathcal{M}(X)$ denota el conjunto de funciones meromorfas en X y $\mathcal{L}(D)$ es el espacio vectorial asociado al divisor D (definición 5.5). Para cualquier divisor D en X tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(D) \xrightarrow{i} \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\alpha_D} T[D](X) \xrightarrow{\pi} H^1(D) \rightarrow 0,$$

donde i es la inclusión de $\mathcal{L}(D)$ en $\mathcal{M}(X)$ y π es la proyección canónica. Definiendo $\sigma : \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D) \rightarrow T[D]$ como $\sigma(f + \mathcal{L}(D)) = \beta(f)$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{M}(X)}{\mathcal{L}(D)} \xrightarrow{\sigma} T[D](X) \xrightarrow{\pi} H^1(D) \rightarrow 0.$$

Sean $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ tales que $D_1 \leq D_2$. Para cada uno de estos divisores, tenemos la correspondiente sucesión exacta. Definamos la transformación $\psi : \frac{\mathcal{M}(X)}{\mathcal{L}(D_1)} \rightarrow \frac{\mathcal{M}(X)}{\mathcal{L}(D_2)}$ como

$$\psi[f + \mathcal{L}(D_1)] = f + \mathcal{L}(D_2) \quad (5.5)$$

y también la transformación $\Phi_{D_1 D_2} : H^1(D_1) \rightarrow H^1(D_2)$ como

$$\Phi_{D_1 D_2}(\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_1}) = t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) + \text{Im } \alpha_{D_2} \quad (5.6)$$

Veamos que ψ y $\Phi_{D_1 D_2}$ no dependen del representante de la clase.

Supongamos que f y g pertenecen a la misma clase, entonces $f = g + h$ para alguna función $h \in \mathcal{L}(D_1)$. Pero al ser $D_1 \leq D_2$, tenemos que $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$ entonces $h \in \mathcal{L}(D_2)$ y por ello, $f \in [g + \mathcal{L}(D_2)]$, es decir, las clases $g + \mathcal{L}(D_2)$ y $f + \mathcal{L}(D_2)$ son iguales. Por lo tanto ψ no depende del representante de la clase. Además, el hecho de que $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$ implica que ψ es suprayectiva.

Sean $\mathfrak{D} \in T[D_1]$ y supongamos que $\hat{\mathfrak{D}}$ pertenece a la clase $\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_1}$, entonces $\hat{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} + \mathfrak{M}$ para algún divisor $\mathfrak{M} \in \text{Im } \alpha_{D_1}$. Luego, $\Phi_{D_1 D_2}(\mathfrak{M} + \text{Im } \alpha_{D_1}) = \Phi_{D_1 D_2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{M} + \text{Im } \alpha_{D_1}) = t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D} + \mathfrak{M}) + \text{Im } \alpha_{D_2} = t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) + t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{M}) + \text{Im } \alpha_{D_2}$.

Basta entonces notar que el truncamiento $t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{M}) \in \text{Im } \alpha_{D_2}$ (pues en ese caso, $\Phi_{D_1 D_2}(\mathfrak{M} + \text{Im } \alpha_{D_1}) = t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) + \text{Im } \alpha_{D_2} = \Phi_{D_1 D_2}(\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_1})$). Dado que $\mathfrak{M} \in \text{Im } \alpha_{D_1}$, entonces existe una función $g \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_{D_1}(g) = \mathfrak{M}$. Utilizando el lema 5.22 tenemos que $t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{M}) = t_{D_2}^{D_1}(\alpha_{D_1}(g)) = (t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1})(g) = \alpha_{D_2}(g)$. Por lo tanto $t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{M}) \in \text{Im } \alpha_{D_2}$.

La transformación $\Phi_{D_1 D_2}$ es además suprayectiva. En efecto, si $D_1 \leq D_2$ entonces $T[D_2] \subseteq T[D_1]$ (ver la observación 5.20), por lo que si $\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_2}$ pertenece a $H^1(D_2)$, entonces $\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_1}$ es un elemento en la preimagen de $\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_2}$.

Afirmación 5.23. El diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \frac{\mathcal{M}(X)}{\mathcal{L}(D_1)} & \xrightarrow{\alpha_{\hat{D}_1}} & T[D_1] & \xrightarrow{\pi_1} & H^1(D_1) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \psi & & \downarrow t_{D_2}^{D_1} & & \downarrow \Phi_{D_1 D_2} \\
0 & \longrightarrow & \frac{\mathcal{M}(X)}{\mathcal{L}(D_2)} & \xrightarrow{\alpha_{\hat{D}_2}} & T[D_2] & \xrightarrow{\pi_2} & H^1(D_2) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Demostremos primero que $\alpha_{\hat{D}_2} \circ \psi = t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{\hat{D}_1}$, para ello tomemos un elemento $f + \mathcal{L}(D_1)$ en $\mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_1)$. Por un lado, $(\alpha_{\hat{D}_2} \circ \psi)(f + \mathcal{L}(D_1)) = \alpha_{\hat{D}_2}(\psi(f + \mathcal{L}(D_1))) = \alpha_{\hat{D}_2}(f + \mathcal{L}(D_2)) = \alpha_{D_2}(f)$. Por otro lado $(t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{\hat{D}_1})(f + \mathcal{L}(D_1)) = t_{D_2}^{D_1}(\alpha_{\hat{D}_1}(f + \mathcal{L}(D_1))) = t_{D_2}^{D_1}(\alpha_{D_1}(f)) = (t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1})(f) = \alpha_{D_2}(f)$ esta última igualdad es por el lema 5.22. Por lo tanto $\alpha_{\hat{D}_2} \circ \psi = t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{\hat{D}_1}$. Demostremos ahora que $\Phi_{D_1 D_2} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ t_{D_2}^{D_1}$, para ello tomemos \mathfrak{D} en $T[D_1]$. Por un lado tenemos que $(\Phi_{D_1 D_2} \circ \pi_1)(\mathfrak{D}) = \Phi_{D_1 D_2}(\pi_1(\mathfrak{D})) = \Phi_{D_1 D_2}(\mathfrak{D} + \text{Im } \alpha_{D_1}) = t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) + \text{Im } \alpha_{D_2}$ y por otro lado, $(\pi_2 \circ t_{D_2}^{D_1})(\mathfrak{D}) = \pi_2(t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D})) = t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) + \text{Im } \alpha_{D_2}$. Por lo tanto $\Phi_{D_1 D_2} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ t_{D_2}^{D_1}$.

Por el teorema del kernel-cokernel (teorema B.4) existen transformaciones lineales λ y γ tales que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\psi) \xrightarrow{\lambda} \text{Ker}(t_{D_2}^{D_1}) \xrightarrow{\gamma} \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

La exactitud de (5.7) implica que λ es inyectiva y γ es suprayectiva. Utilizando ahora el teorema de las dimensiones ⁷ tenemos que

$$\dim \text{Ker}(\psi) = \dim \text{Im}(\lambda) + \dim \text{Ker}(\lambda) = \dim \text{Im}(\lambda) + 0 = \dim \text{Im}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
\text{y } \dim \text{Ker}(t_{D_2}^{D_1}) &= \dim \text{Im}(\gamma) + \dim \text{Ker}(\gamma) \\
&= \dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) + \dim \text{Ker}(\gamma) \\
&= \dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) + \dim \text{Im}(\lambda) \\
&= \dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) + \dim \text{Ker}(\psi)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) = \dim \text{Ker}(t_{D_2}^{D_1}) - \dim \text{Ker}(\psi) \quad (5.8)$$

Utilizando esta última igualdad, establecemos en la siguiente proposición, la dimensión del kernel de la transformación $\Phi_{D_1 D_2}$ en términos de los grados de los divisores D_1 y D_2 .

Proposición 5.24. *dim Ker($\Phi_{D_1 D_2}$) = deg(D_2) - dim $\mathcal{L}(D_2)$ - deg(D_1) + dim $\mathcal{L}(D_1$), donde $D_1 \leq D_2$ y Φ se define como en (5.6).*

⁷Si $F : U \rightarrow W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales, entonces $\dim(U) = \dim \text{Im}(F) + \dim \text{Ker}(F)$

Demostración. Basta demostrar que $\dim \text{Ker}(t_{D_2}^{D_1}) = \deg(D_2) - \deg(D_1)$ y $\dim \text{Ker}(\psi) = \dim \mathcal{L}(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_1)$ (donde ψ es la transformación definida en (5.5), pues sustituyendo estos valores en (5.8) obtenemos el resultado deseado.

Sea $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$ un divisor de Laurent en $T[D_1]$. Entonces para todo $p \in \text{Supp}(\mathfrak{D})$, el grado de r_p es menor estricto que $-D_1(p)$. Supongamos que \mathfrak{D} pertenece al kernel de $t_{D_2}^{D_1}$, entonces $t_{D_2}^{D_1}(\mathfrak{D}) = \sum_{p \in X} s_p \cdot p = 0$ (el divisor de Laurent cero), esto quiere decir que para todo p en X , $s_p \equiv 0$, pero recordemos que s_p es el polinomio de Laurent r_p sin los términos de grado $-D_2(p)$ en adelante, es decir, si $r_p = \sum_{i=n}^m a_i z^i$ con $n \leq m < -D_1(p)$, $s_p = \sum_{i=n}^{-D_2(p)-1} a_i z^i$.

Entonces $s_p \equiv 0$, lo cual sucede si y sólo si $-D_2(p) \leq n$. Por lo tanto, para todo $p \in \text{Supp}(\mathfrak{D})$, $r_p \cdot p$ es generado por el conjunto de polinomios de Laurent $\{z^{-D_2(p)} \cdot p, \dots, z^{-D_1(p)-1} \cdot p\}$ y este conjunto tiene $(-D_1(p)-1) - (-D_2(p)) + 1 = D_2(p) - D_1(p)$ elementos.

Notemos ahora que esto sucede también para los puntos que no pertenecen al soporte de \mathfrak{D} , pues para ellos $r_p \equiv 0$ y podemos escribir a este polinomio como $r_p = \sum_{i=-D_2(p)}^{-D_1(p)-1} a_i z^i$ tomando todos los coeficientes $a_i = 0$. Así que el kernel de $t_{D_2}^{D_1}$ está generado por $\sum_{p \in X} D_2(p) - D_1(p) = \sum_{p \in X} D_2(p) - \sum_{p \in X} D_1(p) = \deg(D_2) - \deg(D_1)$ polinomios de Laurent. Por lo tanto $\dim \text{Ker}(t_{D_2}^{D_1}) = \deg(D_2) - \deg(D_1)$.

Demostremos ahora que $\dim \text{Ker}(\psi) = \dim \mathcal{L}(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_1)$, para ello tomemos un elemento $f + \mathcal{L}(D_1)$ en el kernel de ψ . Entonces $\psi(f + \mathcal{L}(D_1)) = f + \mathcal{L}(D_2) = \mathcal{L}(D_2)$ pero $f + \mathcal{L}(D_2) = \mathcal{L}(D_2)$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}(D_2)$, por lo tanto $\text{Ker}(\psi) = \{f + \mathcal{L}(D_1) : f \in \mathcal{L}(D_2)\}$ pero este conjunto es el espacio $\mathcal{L}(D_2)/\mathcal{L}(D_1)$ y como la dimensión de $\mathcal{L}(D)$ es finita para cualquier divisor D , tenemos que $\dim \text{Ker}(\psi) = \dim (\mathcal{L}(D_2)/\mathcal{L}(D_1)) = \dim \mathcal{L}(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_1)$. \square

Observación 5.25. Notemos que la proposición anterior implica que si D_1 y D_2 son dos divisores tales que $D_1 \leq D_2$, entonces la dimensión de $\text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2})$ es finita.

Proposición 5.26. *Sea X una curva algebraica, $f \in \mathcal{M}(X)$, $D = \text{div}_\infty(f)$ el divisor de polos de f . Entonces existe un entero $m_0 > 0$ tal que para todo $m \geq m_0$, $\dim \text{Ker}(\Phi_{0, mD})$ es constante.*

Demostración. Sabemos por la proposición D.9 que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D)$, y por el lema D.6, existe un natural $m_0 > 0$ tal que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq m_0$, $(m - m_0 + 1) \deg(D) \leq \dim \mathcal{L}(mD)$, esto último implica que $-\dim \mathcal{L}(mD) \leq -(m - m_0 + 1) \deg(D)$, y utilizando la proposición 5.24, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dim \text{Ker}(\Phi_{0, mD}) &= \deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD) - \deg(0) + \dim \mathcal{L}(0) \\
&= \deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD) + 1 \\
&\leq \deg(mD) - (m - m_0 + 1) \deg(D) + 1 \\
&\leq m \deg(D) - (m - m_0 + 1) \deg(D) + 1 \\
&= \deg(D) (m - (m - m_0 + 1)) + 1 \\
&= \deg(D) (m_0 - 1) + 1 = C
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Entonces $\dim \text{Ker}(\Phi_{0, mD}) \leq C$ y C es una cota independiente de m .

Ahora notemos que si m_1 y m_2 son dos números naturales tales que $0 < m_1 < m_2$, entonces $0 < m_1D < m_2D$, lo cual implica que $t_{m_2D}^0 = t_{m_2D}^{m_1D} \circ t_{m_1D}^0$, por ello tenemos que

$$H^1(0) \xrightarrow{\Phi_{0, m_1D}} H^1(m_1D) \xrightarrow{\Phi_{m_1D, m_2D}} H^1(m_2D) = H^1(0) \xrightarrow{\Phi_{0, m_2D}} H^1(m_2D)$$

y como consecuencia $\text{Ker}(\Phi_{0, m_1D}) \subseteq \text{Ker}(\Phi_{0, m_2D})$, así que

$$\dim \text{Ker}(\Phi_{0, m_1D}) \leq \dim \text{Ker}(\Phi_{0, m_2D}).$$

Por lo tanto la sucesión $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ dada por $a_m = \dim \text{Ker}(\Phi_{0, mD})$ es creciente y además es acotada superiormente por C (cuando $m \geq m_0$), entonces converge, pero como es una sucesión cuya imagen es un subconjunto de los números naturales, existe un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq k$, a_m es constante, digamos M . Entonces para toda $m \geq k$, $\dim \text{Ker}(\Phi_{0, mD}) = M$.

Observación 5.27. El hecho de que la sucesión $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ sea creciente implica que para toda $m \in \mathbb{N}$, $a_m \leq M$, es decir, para toda $m \in \mathbb{N}$, $\dim \text{Ker}(\Phi_{0, mD}) \leq M$.

□

Recordemos que el objetivo de esta sección es demostrar que la dimensión de los espacios $H^1(D)$ son de dimensión finita. La siguiente proposición y el teorema que le sigue nos llevarán a concluir el resultado que buscamos y finalmente a enunciar una primera versión del teorema de Riemann-Roch.

Proposición 5.28. *Sea X una curva algebraica.*

- (a) *Existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $A \in \text{Div}(X)$, $\deg(A) - \dim \mathcal{L}(A) \leq N$.*
- (b) *Existe un divisor A_0 tal que para todo divisor D en X*

$$\deg(D) - \dim \mathcal{L}(D) \leq \deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)$$

y para este divisor se tiene que $H^1(A_0) = 0$.

Demostración. (a) Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ una función fija y sea D su divisor de polos. Tomemos un divisor arbitrario A en $\text{Div}(X)$. Por el lema D.4, existe un entero $n > 0$ y una función meromorfa g en X tal que $A - \text{div}(g) \leq nD$, y por la proposición 5.26, para toda $m \in \mathbb{N}$, $\dim \text{Ker}(\Phi_{0,mD}) \leq M$ donde $M \in \mathbb{N}$ es constante e independiente de m , en particular, $\dim \text{Ker}(\Phi_{0,nD}) \leq M$.

Luego, por la proposición 5.24, sabemos que

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(\Phi_{0,nD}) &= \deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) - \deg(0) + \dim \mathcal{L}(0) \\ &= \deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) + 1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Entonces $\deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) + 1 \leq M$. Definamos $N = M - 1$, de este modo tenemos que

$$\deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) \leq N. \quad (5.11)$$

Definaos ahora $B = A - \text{div}(g)$. Entonces $\deg(B) = \deg(A) - \deg[\text{div}(g)]$, pero el grado del divisor de una función meromorfa en una superficie compacta siempre es cero (pues la suma de los ceros y polos, contados con multiplicidad, es cero), así que

$$\deg(B) = \deg(A) \quad (5.12)$$

Afirmación 5.29. Definamos la transformación $\lambda : \mathcal{L}(B) \rightarrow \mathcal{L}(A)$ como $\lambda(f) = f/g$. Entonces λ es un isomorfismo.

Demostración de la afirmación:

- Primero veamos que λ es inyectiva. Tomemos una función $f \in \mathcal{L}(B)$ en el kernel de λ , entonces $\lambda(f) = f/g \equiv 0$, lo cual pasa su y sólo si $f \equiv 0$. Por lo tanto λ es inyectiva.
- Ahora veamos que λ es suprayectiva. Sea $h \in \mathcal{L}(A)$, entonces para todo punto $p \in X$ se tiene que $-A(p) \leq \text{Ord}_p(h)$ (donde $A(p)$ es el coeficiente del punto p en el divisor A). Luego $-A(p) + \text{Ord}_p(g) \leq \text{Ord}_p(h) + \text{Ord}_p(g) = \text{Ord}_p(hg)$, es decir $-[A(p) - \text{Ord}_p(g)] = -B(p) \leq \text{Ord}_p(hg)$ lo cual quiere decir que $hg \in \mathcal{L}(B)$. Notemos ahora que $\lambda(hg) = g$, por lo tanto λ es suprayectiva y con esto terminamos de demostrar la afirmación.

La afirmación anterior implica que $\dim \mathcal{L}(B) = \dim \mathcal{L}(A)$, y utilizando (5.12) tenemos que

$$\deg(A) - \dim \mathcal{L}(A) = \deg(B) - \dim \mathcal{L}(B) \quad (5.13)$$

Notemos ahora que como $B = A - \text{div}(g) \leq nD$, la proposición 5.24 implica que $\dim \text{Ker}(\Phi_{B,nD}) = \deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) - \deg(B) + \dim \mathcal{L}(B)$, entonces $\deg(B) - \dim \mathcal{L}(B) = \deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) - \dim \text{Ker}(\Phi_{B,nD})$. Esta última igualdad, (5.13) y (5.11) implican que

$$\begin{aligned} \deg(A) - \dim \mathcal{L}(A) &= \deg(B) - \dim \mathcal{L}(B) \\ &= \deg(nD) - \dim \mathcal{L}(nD) - \dim \text{Ker}(\Phi_{B,nD}) \\ &\leq N - \dim \text{Ker}(\Phi_{B,nD}) \\ &\leq N \quad (\text{pues } \dim \text{Ker}(\Phi_{B,nD}) \geq 0) \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (a).

Demostración de (b).

Por la proposición 5.26 sabemos que existe un natural k tal que para todo $m \geq k$, $\dim \text{Ker}(\Phi_{0,mD}) = M$, donde D es el divisor de polos de una función meromorfa en X . Pero $\dim \text{Ker}(\Phi_{0,mD}) = \deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD) + 1$, entonces $\deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD) = M - 1 = N$, esto quiere decir que para todos esos divisores (los de la forma mD con $m \geq k$) el número $\deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD)$ es maximal, pues sabemos por el inciso (a) que para cualquier divisor A en X , $\deg(A) - \dim \mathcal{L}(A) \leq N$.

Consideremos el divisor $A_0 = mD$, con $m \geq k$. Demostraremos por contradicción que $H^1(A_0) = 0$. Supongamos entonces que $H^1(A_0) = \frac{T[A_0]}{\text{Im } \alpha_{A_0}} \neq 0$, esto quiere decir que existe un divisor $\mathfrak{D} \in T[A_0]$ que no pertenece a la imagen de α_{A_0} (esto en particular implica que $\mathfrak{D} \neq 0$). Supongamos que $\mathfrak{D} = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$. Definamos el divisor $B = \sum_{p \in X} B(p) \cdot p$ donde

$$B(p) = \begin{cases} -\text{Ord}_p(r_p) + 1 & \text{si } r_p \neq 0 \\ A_0(p) + 1 & \text{si } r_p \equiv 0 \end{cases}$$

y definido de esta forma, tenemos que $A_0 \leq B$, pues como $\mathfrak{D} \in T[A_0]$, entonces para todo punto p en el soporte de \mathfrak{D} , se tiene que $\text{Ord}_p(r_p) < -A_0(p)$, lo cual implica que $-\text{Ord}_p(r_p) + 1 = B(p) > A_0(p)$, y si p no pertenece al soporte de \mathfrak{D} , entonces $B(p) = A_0(p) + 1 > A_0(p)$. Además $t_B^{A_0}(\mathfrak{D}) = 0$, pues $t_B^{A_0}(\mathfrak{D}) = \sum_{p \in X} s_p \cdot r_p$ donde s_p es r_p sin los términos de grado $-B(p)$ en adelante, pero $-B(p) = \text{Ord}_p(r_p) - 1$, entonces $s_p \equiv 0$. Al ser $A_0 \leq B$, podemos considerar a la función $\Phi_{A_0,B} : H^1(A_0) \rightarrow H^1(B)$, y el párrafo anterior implica que $\mathfrak{D} \in \text{Ker}(\Phi_{A_0,B})$, porque $\Phi_{A_0,B}(\mathfrak{D}) = t_B^{A_0} + \text{Im } \alpha_B = \text{Im } \alpha_B =$ la clase del cero en $T[B]$. Luego, al ser $\mathfrak{D} \neq 0$, se tiene que $\dim \text{Ker}(\Phi_{A_0,B}) \geq 1$, pero

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim \text{Ker}(\Phi_{A_0,B}) \\ &= \deg(B) - \dim \mathcal{L}(B) - \deg(A_0) + \dim \mathcal{L}(A_0) \\ &= [\deg(B) - \dim \mathcal{L}(B)] - [\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la maximalidad de A_0 respecto a la propiedad de que $[\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)] \geq [\deg(E) - \dim \mathcal{L}(E)]$. Pero $1 \leq 0$ es una contradicción, que vino de suponer que $H^1(A_0) \neq 0$. Por lo tanto $H^1(A_0) = 0$. □

Podemos ahora demostrar el resultado que nos interesa en esta sección, la dimensión finita de los espacios $H^1(D)$.

Teorema 5.30. *Sea X una curva algebraica. Para cualquier divisor $D \in \text{Div}(X)$, el espacio vectorial $H^1(D)$ tiene dimensión finita.*

Demostración. Sea D un divisor arbitrario en X y tomemos un divisor A_0 que cumpla que $H^1(A_0) = 0$ (en la proposición anterior vimos que un tal divisor existe). Expresemos al divisor $D - A_0$ como $D - A_0 = P - N$, donde P es su parte positiva y N su parte negativa. Notemos que $A_0 \leq A_0 + P$, pues P es un divisor no negativo, entonces podemos considerar a la función $\Phi_{A_0, A_0+P} : H^1(A_0) \rightarrow H^1(A_0 + P)$, que es suprayectiva, es decir, $\text{Im}(\Phi_{A_0, A_0+P}) = H^1(A_0 + P)$ y al ser $H^1(A_0) = 0$, se tiene que $H^1(A_0 + P) = 0$. Ahora observemos que $A_0 + P - N \leq A_0 + P$, porque $-N$ es un divisor negativo, entonces existe la función $\Phi_{A_0+P-N, A_0+P} : H^1(A_0 + P - N) \rightarrow H^1(A_0 + P)$.

Por otro lado, por el teorema de las dimensiones, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim H^1(A_0 + P - N) &= \dim \text{Im}(\Phi_{A_0+P-N, A_0+P}) + \dim \text{Ker}(\Phi_{A_0+P-N, A_0+P}) \\ &= \dim H^1(A_0 + P) + \dim \text{Ker}(\Phi_{A_0+P-N, A_0+P}) \\ &= 0 + \dim \text{Ker}(\Phi_{A_0+P-N, A_0+P}) \\ &= \dim \text{Ker}(\Phi_{A_0+P-N, A_0+P}) \end{aligned} \tag{5.14}$$

pero sabemos que la dimensión de $\text{Ker}(\Phi_{A_0+P-N, A_0+P})$ es finita (ver la observación 5.25), así que la dimensión de $H^1(A_0 + P - N)$ es finita.

Finalmente notemos que $D = A_0 + P - N$. Por lo tanto $H^1(D)$ tiene dimensión finita. \square

Teorema 5.31 (de Riemann-Roch versión 1). *Sea X una curva algebraica y $D \in \text{Div}(X)$. Entonces*

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0)$$

Demostración. Para cualquier divisor $D \in \text{Div}(X)$ definimos el número

$$\Gamma(D) = \dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) - \deg(D)$$

Afirmación 5.32. Si D_1 y D_2 divisores en X tales que $D_1 \leq D_2$, entonces $\Gamma(D_1) = \Gamma(D_2)$.

Demostración de la afirmación:

Sean D_1 y D_2 divisores en X tales que $D_1 \leq D_2$. Consideremos la aplicación $\Phi_{D_1 D_2} : H^1(D_1) \rightarrow H^1(D_2)$ definida anteriormente. Por la proposición 5.24 tenemos que $\dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) = \deg(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_2) - \deg(D_1) + \dim \mathcal{L}(D_1)$.

Por otro lado $\dim H^1(D_1) = \dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) + \dim \text{Im}(\Phi_{D_1 D_2})$, pero $\Phi_{D_1 D_2}$ es suprayectiva, por ello $\dim H^1(D_1) = \dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2}) + \dim H^1(D_2)$. Sabemos además que $\dim H^1(D_2) < \infty$ (por el teorema 5.30) entonces $\dim H^1(D_1) - \dim H^1(D_2) = \dim \text{Ker}(\Phi_{D_1 D_2})$. Por lo tanto $\dim H^1(D_1) - \dim H^1(D_2) = \deg(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_2) - \deg(D_1) + \dim \mathcal{L}(D_1)$. y reacomodando los términos tenemos que $\dim \mathcal{L}(D_2) - \dim H^1(D_2) - \deg(D_2) = \dim \mathcal{L}(D_1) - \dim H^1(D_1) - \deg(D_1)$. De este modo, tenemos que $\Gamma(D_1) = \Gamma(D_2)$, lo cual demuestra la afirmación.

Consideremos ahora dos divisores en X arbitrarios D y G . Escribamos a estos divisores como $D = P_D - N_D$ y $G = P_G - N_G$ donde P_D y P_G son las partes positivas de D y G respectivamente y N_D y N_G sus partes negativas. Notemos ahora que $D \leq P_D \leq P_D + P_G$ y $G \leq P_G \leq P_D + P_G$. Por la afirmación anterior, $\Gamma(D) = \Gamma(P_D + P_G)$ y $\Gamma(G) = \Gamma(P_D + P_G)$. Por lo tanto $\Gamma(D) = \Gamma(G)$. Tomando $G = 0$ tenemos que $\dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) - \deg(D) = \dim \mathcal{L}(0) - \dim H^1(0) - \deg(0)$. Luego, al ser X una superficie compacta (pues es una curva algebraica) $\dim \mathcal{L}(0) = 1$, y como $\deg(0) = 0$, entonces $\dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) - \deg(D) = 1 - \dim H^1(0)$. Por lo tanto

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0).$$

□

5.4. La dualidad de Serre

En esta sección haremos el vínculo (dado por la dualidad de Serre) entre los espacios $H^1(D)$ y los espacios vectoriales asociados a formas diferenciales, y de este modo llegaremos al enunciado final del teorema de Riemann-Roch.

En una curva algebraica X , tomemos un divisor cualquiera D y el espacio de 1-formas meromorfas asociado a $-D$, $\mathcal{L}^{(1)}(-D) = \{0\} \cup \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)} : \omega \neq 0 \text{ y } 0 \leq \text{div}(\omega) - D\}$. Consideremos una 1-forma $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$. Tomemos un punto $p \in X$, una carta (U, z) centrada en p y supongamos que $\omega = g dz$ es la expresión de ω en p . Ya que g es una función meromorfa en p , tiene una serie de Laurent $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n z^n$ alrededor de p , donde $n_0 = \text{Ord}_p(g)$, y por definición, $\text{Ord}_p(\omega) = n_0$. Luego, el hecho de que $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$ implica que $D(p) \leq \text{Ord}_p(\omega) = n_0$. Por lo tanto, podemos expresar a ω alrededor de p como $\omega = (\sum_{n=D(p)}^{\infty} b_n z^n) dz$.

Supongamos ahora que f es una función meromorfa en p y sea $\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^m$ su serie alrededor de p . Vamos a calcular el residuo de $f \cdot \omega$ en el punto p , para ello debemos multiplicar las series $(\sum_{n=D(p)}^{\infty} b_n z^n)$ y $(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^m)$ y hallar el coeficiente de $1/z$ en dicha multiplicación.

Haciendo la multiplicación tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=D(p)}^{\infty} b_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^m \right) &= b_{D(p)} z^{D(p)} \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^m \right) \\ &\quad + b_{D(p)+1} z^{D(p)+1} \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^m \right) + \dots \\ &= \sum_{n=D(p)}^{\infty} \left(b_n z^n \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m z^m \right) \right) \\ &= \sum_{n=D(p)}^{\infty} \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} (b_n \cdot a_m) z^{m+n} \right) \end{aligned}$$

y de esta suma, debemos rescatar los sumandos de la forma $(b_n \cdot a_m)z^{m+n}$ tal que $m+n = -1$, pues el residuo que buscamos es la suma de esos coeficientes. Pero $m+n = -1$ implica que $m = -n - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Res}_p(f \cdot \omega) &= \sum_{n=D(p)}^{\infty} b_n(a_{-n-1}) \\ &= b_{D(p)}(a_{-D(p)-1}) + b_{D(p)+1}(a_{-D(p)-2}) + \dots + b_{-1-m_0}(a_{m_0}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Res}_p(f \cdot \omega)$ depende únicamente de los coeficientes a_i de la serie de Laurent de f alrededor de p tales que $i < -D(p)$. Notemos que esos coeficientes son exactamente los coeficientes del polinomio de Laurent $f_p = \sum_{m=m_0}^{-D(p)-1} a_m z^m$, por ello tenemos que $\text{Res}_p(f \cdot \omega) = \text{Res}_p(f_p \cdot \omega)$. Como todo lo anterior pasa para cada punto de la superficie, podemos concluir entonces que

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(f \cdot \omega) = \sum_{p \in X} \text{Res}_p(f_p \cdot \omega) \quad (5.15)$$

5.4.1. La función residuo

Para un divisor D en una superficie de Riemann X y una 1-forma $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$, definimos la función *residuo* $\text{Res}_\omega : T[D] \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\text{Res}_\omega \left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p \right) = \sum_{p \in X} \text{Res}_p(r_p \cdot \omega)$$

El análisis anterior nos muestra que si f es una función meromorfa en X y $\alpha_D(f) = \sum_{p \in X} f_p \cdot p$ es su divisor de Laurent asociado (en términos del divisor D) entonces

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(f \cdot \omega) = \sum_{p \in X} \text{Res}_p(f_p \cdot \omega) = \text{Res}_\omega(\alpha_D(f))$$

Recordemos ahora que en una superficie de Riemann compacta, la suma de los residuos de cualquier 1-forma meromorfa es cero, así que $\text{Res}_\omega(\alpha_D(f)) = 0$. Por lo tanto para toda $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$ tenemos que $\text{Im } \alpha_D \subseteq \text{Ker}(\text{Res}_\omega)$. Como consecuencia de esto último, la aplicación $\widehat{\text{Res}}_\omega : H^1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{\text{Res}}_\omega \left(\left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p \right) + \text{Im } \alpha_D \right) = \text{Res}_\omega \left(\sum_{p \in X} r_p \cdot p \right)$$

está bien definida (es decir, no depende del representante de la clase). En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo

Teorema 5.33 (Dualidad de Serre). *Sea X una curva algebraica y $D \in \text{Div}(X)$. La aplicación $\text{Res} : \mathcal{L}^{(1)}(-D) \rightarrow H^1(D)^*$ definida como $\text{Res}(\omega) = (\widehat{\text{Res}}_\omega : H^1(D) \rightarrow \mathbb{C})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

$$\begin{array}{ccc}
T[D] & \xrightarrow{\text{Res}_\omega} & \mathbb{C} \\
\downarrow \pi & \curvearrowright & \nearrow \widehat{\text{Res}}_\omega \\
\frac{T[D]}{\text{Im } \alpha_D} = H^1(D) & &
\end{array}$$

Demostración de la inyectividad de la aplicación Res .

Para demostrar la inyectividad, veremos que $\text{Ker}(\text{Res}) = \{0\}$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe una 1-forma $\omega \in \text{Ker}(\text{Res})$, con $\omega \neq 0$. Entonces $\text{Res}(\omega) = \text{Res}_\omega \equiv 0$, esto quiere decir que para cualquier divisor de Laurent $\sum_{p \in X} r_p \cdot p$, se tiene que $\sum_{p \in X} \text{Res}_p(r_p \cdot \omega) = 0$.

Fijemos un punto $p \in X$ y una coordenada z en el punto p . Sea $m = \text{Ord}_p(\omega)$. Como $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$, entonces $0 \leq \text{Ord}_p(\omega) - D(p)$, es decir, $0 \leq m - D(p)$ lo cual implica que $-m \leq -D(p)$, por lo que $-m - 1 = -(m + 1) < -D(p)$ y esto equivale a que el divisor de Laurent definido como

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{z^{m+1}} \cdot p$$

pertenezca a $T[D]$, pues el único polinomio de Laurent en su soporte es $\frac{1}{z^{m+1}}$ y tiene orden $-(m + 1)$. Sea

$$\omega = \left(\sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n \right) \text{ con } c_m \neq 0$$

la expresión local de ω en una vecindad de p . Aplicando la función Res_ω al divisor \mathfrak{D} , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Res}_\omega \left(\frac{1}{z^{m+1}} \cdot p \right) &= \text{Res}_p \left(\omega \cdot \frac{1}{z^{m+1}} \right) \\
&= \text{Res}_p \left(c_m \frac{z^m}{z^{m+1}} + c_{m+1} \frac{z^{m+1}}{z^{m+1}} + \dots \right) \\
&= \text{Res}_p \left(\frac{c_m}{z} + c_{m+1} + \dots \right) \\
&= c_m
\end{aligned}$$

pero por un lado $c_m \neq 0$, lo cual es una contradicción, ya que Res_ω es la función constante cero. Por lo tanto $\omega \equiv 0$, lo cual demuestra la inyectividad de Res .

Demostración de la suprayectividad de la aplicación Res .

La demostración de que la aplicación Res es suprayectiva requiere de un poco más de trabajo. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 5.34. Dada cualquier función meromorfa f y un divisor D , definimos el operador $\mu_f : T[D] \rightarrow T[D - \text{div}(f)]$ de la siguiente forma:

$$\mu_f(\mathfrak{D}) = \mu_f\left(\sum_{x \in X} r_p \cdot p\right) = \sum_{x \in X} (\widetilde{f \cdot r_p}) \cdot p \quad (5.16)$$

donde $(\widetilde{f \cdot r_p})$ es la serie $f \cdot r_p$ sin los términos de grado $-D(p) + \text{Ord}_p(f)$ en adelante.

Los siguientes dos lemas son un poco técnicos, pero serán clave para demostrar que la aplicación Res es suprayectiva.

Lema 5.35. Sean D_1 y D_2 divisores en X tales que $D_1 \leq D_2$ y ω una 1-forma meromorfa en $\mathcal{L}^{(1)}(-D_1)$. Si Res_ω se anula en el kernel del truncamiento $t_{D_2}^{D_1} = t : T[D_1] \rightarrow T[D_2]$, entonces $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$.

Demostración. Para llegar a una contradicción, supongamos que $\omega \notin \mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$, es decir, existe un punto p_0 en X tal que $\text{Ord}_{p_0}(\omega) - D_2(p_0) < 0$ (recordemos que ω pertenece a $\mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$ si y sólo si para todo punto p de X , $0 \leq \text{Ord}_p(\omega) - D_2(p)$). Denotando por m al orden de ω en p_0 , tenemos que $m - D_2(p_0) < 0$, por ello $-D_2(p_0) < -m$ y la desigualdad estricta implica que $-D_2(p_0) \leq -m - 1$.

Por otro lado, tenemos por hipótesis que $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D_1)$, entonces $0 \leq m - D_1(p_0)$ por lo que $-m \leq -D_1(p_0)$ y restando 1 al orden de ω en p_0 , obtenemos la desigualdad estricta $-m - 1 < -D_1(p_0)$. De este modo tenemos que $-D_2(p_0) \leq -m - 1 < -D_1(p_0)$.

Notemos ahora que el divisor de Laurent

$$\mathfrak{D} = r_{p_0} \cdot p_0 \text{ donde } r_{p_0} = \frac{1}{z^{m+1}} = z^{-m-1}$$

pertenece al kernel de t , así que por hipótesis,

$$\text{Res}_\omega(r_{p_0} \cdot p_0) = \text{Res}_{p_0}(\omega \cdot r_{p_0}) = 0.$$

Finalmente, si $w = (\sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n) dz$ es la expresión de ω en p_0 , con $c_m \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p_0}(\omega \cdot r_{p_0}) &= \text{Res}\left(\sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n\right) \cdot \frac{1}{z^{m+1}} \\ &= \text{Res}\left(c_m \frac{z^m}{z^{m+1}} + \dots\right) \\ &= \text{Res}\left(c_m \frac{1}{z} + \dots\right) = c_m \neq 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$. \square

$$\begin{array}{ccccc}
& & T[A - C - \text{div}(f_1)] & \xrightarrow{t_1} & T[A] & & \\
& \nearrow^{\mu_{f_1}} & & & & \searrow^{\Phi_1} & \\
T[A - C] & & & & & & \mathbb{C} \\
& \searrow_{\mu_{f_2}} & & & & \nearrow_{\Phi_2} & \\
& & T[A - C - \text{div}(f_2)] & \xrightarrow{t_2} & T[A] & &
\end{array}$$

Lema 5.36. *Sea A cualquier divisor en X y supongamos que $\Phi_1 : H^1(A) \rightarrow \mathbb{C}$ y $\Phi_2 : H^1(A) \rightarrow \mathbb{C}$ son transformaciones lineales. Entonces existe un divisor positivo C y funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(C)$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:*

Demostración. Demostraremos este lema por contradicción. Supongamos que no existe el divisor C ni las funciones f_1 y f_2 . Tomemos un divisor positivo D arbitrario y consideremos la transformación lineal

$$\psi : \mathcal{L}(D) \times \mathcal{L}(D) \rightarrow H^1(A - D)^*$$

dada por

$$\psi(f_1, f_2) = \varphi_1 \circ t_1 \circ \mu_{f_1} - \varphi_2 \circ t_2 \circ \mu_{f_2}$$

donde $t_1 = t_A^{A-D-\text{div}(f_1)}$ y $t_2 = t_A^{A-D-\text{div}(f_2)}$. Debido a nuestra suposición, tenemos que ψ es inyectiva, entonces

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{L}(D) \times \mathcal{L}(D)) &= \dim \text{Ker}(\psi) + \dim \text{Im}(\psi) \\
&= \dim \text{Im}(\psi) \\
&\leq \dim H^1(A - D)
\end{aligned}$$

entonces

$$2 \dim \mathcal{L}(D) \leq \dim H^1(A - D) \tag{5.17}$$

Por otro lado, el teorema de Riemann-Roch (la primera versión) aplicado al divisor $A - D$ nos da lo siguiente: $\dim \mathcal{L}(A - D) - \dim H^1(A - D) = \deg(A - D) + 1 - \dim H^1(0)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\dim H^1(A - D) &= \dim \mathcal{L}(A - D) - \deg(A - D) + \dim H^1(0) - 1 \\
&= \dim \mathcal{L}(A - D) - \deg(A) + \deg(D) + \dim H^1(0) - 1 \\
&\leq \dim \mathcal{L}(A) - \deg(A) + \deg(D) + \dim H^1(0) - 1
\end{aligned}$$

la última desigualdad se tiene por que como D es positivo, entonces $A - D \leq A$ y esto implica que $\mathcal{L}(A - D) \subseteq \mathcal{L}(A)$ por lo que $\dim \mathcal{L}(A - D) \leq \dim \mathcal{L}(A)$.

Notemos que como A es un divisor fijo, el número $\xi = \dim \mathcal{L}(A) - \deg(A) + \dim H^1(0) - 1$ es constante. Entonces tenemos que

$$\dim H^1(A - D) \leq \xi + \deg(D) \quad (5.18)$$

Aplicando ahora el teorema de Riemann-Roch a D obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) &= \deg(D) + 1 - \dim H^1(0) \\ \text{entonces } \dim \mathcal{L}(D) &= \deg(D) + 1 - \dim H^1(0) + \dim H^1(D) \\ &\geq \deg(D) + 1 - \dim H^1(0) \quad (\text{pues } \dim H^1(D) \geq 0) \end{aligned}$$

por tanto

$$2 \deg(D) + \eta \leq 2 \dim \mathcal{L}(D) \quad (5.19)$$

donde $\eta = 2 - 2 \dim H^1(0)$ es constante. Juntando las desigualdades (5.17), (5.18) y (5.19) obtenemos que

$$2 \deg(D) + \eta \leq 2 \dim \mathcal{L}(D) \leq \dim H^1(A - D) \leq \xi + \deg(D)$$

entonces $\deg(D) \leq \xi - \eta$ es constante, pero esto es una contradicción, pues el divisor D fue un divisor positivo arbitrario y por lo tanto su grado puede ser tan grande como se quiera. Esto demuestra el lema. \square

Observación 5.37. Sea f una función meromorfa en una curva algebraica X , D un divisor en X y $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$. Entonces $f\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D - \text{div}(f))$ y $\text{Res}_\omega \circ \mu_f = \text{Res}_{f\omega}$, donde μ es el operador (5.16).

Podemos ahora demostrar que la función Res es suprayectiva. Fijemos un divisor D en X . Ya que $H^1(D)^*$ se puede identificar con el espacio de transformaciones lineales de $T[D]$ en \mathbb{C} cuyo kernel contiene a $\text{Im}(\alpha_D)$, basta demostrar que $\text{Res} : \mathcal{L}^{(1)}(-D) \rightarrow \{\phi \in T[D]^* : \text{Im}(\alpha_D) \subseteq \text{Ker}\phi\}$ dada por $\text{Res}(\omega) = \text{Res}_\omega : T[D] \rightarrow \mathbb{C}$, es suprayectiva. Sea $\Phi : H^1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ una función lineal (que vamos a considerar como una función lineal de $T[D]$ en \mathbb{C} tal que su kernel contiene a $\text{Im}(\alpha_D)$), ω una 1-forma diferencial en X diferente de cero y $K = \text{div}(\omega)$. Tomemos un divisor A tal que $A \leq D$ y $A \leq K$. Notemos que $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-A)$, por ello, la función Res_ω está bien definida en $T[A]$. Sea $\Phi_A = \Phi \circ t : T[A] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $t = t_D^A$. Entonces Φ_A y Res_ω son transformaciones lineales de $T[A]$ en \mathbb{C} , así que por el lema 5.36, existe un divisor positivo C y dos funciones meromorfas f_1 y f_2 en $\mathcal{L}(C)$ tales que $\Phi_A \circ t_1 \circ \mu_{f_1} = \text{Res}_\omega \circ t_2 \circ \mu_{f_2}$ donde $t_1 = t_A^{A-C-\text{div}(f_1)}$ y $t_2 = t_A^{A-C-\text{div}(f_2)}$. Ahora $\text{Res}_\omega \circ t_2$ es la función $\text{Res}_\omega : T[A - C - \text{div}(f_2)] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\text{Res}_\omega \circ \mu_{f_2}$ es la aplicación $\text{Res}_{f_2\omega} : T[A - C] \rightarrow \mathbb{C}$, por lo tanto, tenemos que $\Phi_A \circ t_1 \circ \mu_{f_1} = \text{Res}_{f_2\omega}$. Componiendo con μ_{1/f_1} , que es la inversa de μ_{f_1} , tenemos que

$$\Phi_A \circ t_1 = \text{Res}_{f_2\omega} \circ \mu_{1/f_1} = \text{Res}_{(f_2/f_1)(\omega)}. \quad (5.20)$$

Notemos que $(f_2/f_1)\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-A + C + \text{div}(f_1))$ y la igualdad (5.20) muestra que $\text{Res}_{(f_2/f_1)(\omega)}$ se anula en el kernel de t_1 . Por lo tanto, por el lema 5.35, tenemos que $(f_2/f_1)\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-A)$

y esto implica que $\Phi_A = \text{Res}_{(f_1/f_2)(\omega)}$.

Por otro lado, como $\Phi_A = \Phi \circ t_D^A$, entonces $\text{Res}_{(f_1/f_2)(\omega)}$ se anula en el kernel de t_D^A , por ello $(f_1/f_2)(\omega) \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$, lo cual implica que $\Phi = \text{Res}_{(f_1/f_2)(\omega)} = \text{Res}((f_1/f_2)(\omega))$. Por lo tanto la función Res es suprayectiva. Concluimos así la demostración de que la función $\text{Res} : \mathcal{L}^{(1)}(-D) \rightarrow H^1(D)^*$ es un isomorfismo. Ahora estamos listos para demostrar la versión final del teorema de Riemann-Roch.

Teorema 5.38 (de Riemann-Roch). *Sea X una curva algebraica de género g , $D \in \text{Div}(X)$, ω una 1-forma meromorfa en X y $K = \text{div}(\omega)$. Entonces*

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{L}(K - D) = \deg(D) + 1 - g \quad (5.21)$$

Demostración. La primera versión del teorema de Riemann-Roch (teorema 5.31) nos dice que

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0) \quad (5.22)$$

Luego, por el teorema de la dualidad de Serre tenemos que $\mathcal{L}^{(1)}(-D)$ es isomorfo a $H^1(D)^*$ el cual a su vez es isomorfo a $H^1(D)$, pues este último tiene dimensión finita. Además, por la proposición 5.14 sabemos que $\mathcal{L}^{(1)}(-D)$ y $\mathcal{L}(K - D)$ son isomorfos. Por tanto, existe un isomorfismo entre $H^1(D)$ y $\mathcal{L}(K - D)$, por lo que sus dimensiones coinciden, es decir, $\dim H^1(D) = \dim \mathcal{L}(K - D)$. Cuando $D = 0$ obtenemos que

$$\dim H^1(0) = \dim \mathcal{L}(K - 0) = \dim \mathcal{L}(K) \quad (5.23)$$

y cuando $D = K$

$$\dim H^1(K) = \dim \mathcal{L}(0) = 1 \quad (5.24)$$

pues $\mathcal{L}(0) = 1$ en cualquier superficie de Riemann compacta.

Afirmación 5.39. $\dim H^1(0) = g$

Para demostrar esta afirmación aplicamos la primera versión del teorema de Riemann-Roch al divisor K y obtenemos que $\dim \mathcal{L}(K) - \dim H^1(K) = \deg(K) + 1 - \dim H^1(0)$ pero $\deg(K) = 2g - 2$, por tanto

$$\dim \mathcal{L}(K) - \dim H^1(K) = 2g - 2 + 1 - \dim H^1(0)$$

Por (5.23) tenemos que $\dim \mathcal{L}(K) = \dim H^1(0)$, y por (5.24), $\dim H^1(K) = \dim \mathcal{L}(0) = 1$, así que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(K) - \dim H^1(K) &= \dim H^1(0) - 1 = 2g - 2 + 1 - \dim H^1(0) \\ \Rightarrow 2 \dim H^1(0) - 1 &= 2g - 2 + 1 \\ \Rightarrow 2 \dim H^1(0) &= 2g - 2 + 2 = 2g \\ \Rightarrow \dim H^1(0) &= g \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de $\dim H^1(0)$ y $\dim \mathcal{L}(K - D)$ en la ecuación (5.22) obtenemos el resultado que buscamos:

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{L}(K - D) &= \dim \mathcal{L}(D) - \dim H^1(D) \\ &= \deg(D) + 1 - \dim H^1(0) \\ &= \deg(D) + 1 - g\end{aligned}$$

□

Apéndice A

Topología.

Proposición A.1. *Si X es un espacio topológico localmente conexo por trayectorias y conexo, entonces es conexo por trayectorias.*

Demostración. Supongamos que X es conexo y localmente conexo por trayectorias. Sea $x_o \in X$ y G la componente conexa por trayectorias de x_o . Primero observemos que G no es vacío, porque $x_o \in G$, en efecto, la trayectoria constante de valor x_o constata que x_o está unido a si mismo por una trayectoria. Vamos a demostrar que G es abierto y cerrado, entonces utilizando la conexidad de X obtendremos el resultado.

Primero veamos que G es abierto, para ello tomemos un elemento $x \in G$. Como X es localmente conexo por trayectorias, x tiene una vecindad V que es conexa por trayectorias, y esta vecindad está contenida en G , pues G es el mayor subconjunto de X conexo por trayectorias que contiene a x . Dado que $V \subseteq G$, concluimos que G es abierto en X .

Ahora veamos que G es cerrado en X , para ello demostraremos que G contiene a sus puntos de acumulación. Sea pues y un punto de acumulación de G y U una vecindad de y conexa por trayectorias (que existe porque X es localmente conexo por trayectorias), entonces $U \cap G \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar un punto z en dicha intersección. Ahora bien, como U es conexa por trayectorias, existe una trayectoria $\gamma : I \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = z$. Por otro lado, existe una trayectoria $\beta : I \rightarrow G$ tal que $\beta(0) = z$ y $\beta(1) = x_o$, pues z y x_o pertenecen a G , el cual es conexo por trayectorias. Resulta entonces que la trayectoria $\gamma * \beta$ une a y con x_o , por lo tanto $y \in G$. Así, G contiene a todos sus puntos de acumulación y por lo tanto es cerrado.

Dado que G es abierto, cerrado, no vacío y X es conexo, se tiene que $G = X$, por lo tanto X es conexo por trayectorias. \square

Proposición A.2. *Cualquier superficie es localmente conexa por trayectorias.*

Demostración. Si tomamos un punto p en una superficie X , entonces p tiene una vecindad V que es homeomorfa a un abierto de \mathbb{C} . Si ahora tomamos dos puntos a y b en la vecindad

V , y nos fijamos en sus imágenes bajo el homeomorfismo antes mencionado, llamémosle ϕ , sabemos que existe una trayectoria γ en $\phi(V)$ que une a $\phi(a)$ con $\phi(b)$, luego, la imagen inversa de γ bajo ϕ , es decir $\phi^{-1}(\gamma)$ es una curva en V que une a a con b , concluimos entonces que V es conexa por trayectorias y así, la superficie X es localmente conexa por trayectorias.

Ahora bien, como en un espacio localmente conexo por trayectorias la conexidad y la conexidad por trayectorias son equivalentes, para demostrar alguna de estas dos propiedades de una superficie, es suficiente demostrar que se cumple la otra, es decir, si queremos ver que X es conexa por trayectorias, basta demostrar la conexidad y si queremos demostrar la conexidad, basta demostrar la conexidad por trayectorias. \square

Las proposiciones A.1 y A.2 implican que toda superficie de Riemann conexa es conexa por trayectorias.

Aplicaciones cubrientes.

Definición A.3. Sean X y Y espacios topológicos. Una aplicación continua $p : Y \rightarrow X$ se llama *aplicación cubriente* si cumple las siguientes condiciones:

(a) Todo punto de X tiene una vecindad abierta U tal que

$$p^{-1}U = \bigcup_{j \in J} V_j \text{ con } V_j \cap V_{j'} = \emptyset \text{ si } j \neq j'$$

(b) Para todo $j \in J$, $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

A la pareja (Y, p) le llamamos espacio cubriente de X .

Decimos que una aplicación continua $p : Y \rightarrow X$ tiene la *propiedad de levantamiento de curvas* si para toda curva $u : [0, 1] \rightarrow X$ y todo punto $y_0 \in Y$ con $p(y_0) = u(0)$ existe un levantamiento $\hat{u} : [0, 1] \rightarrow Y$ de u tal que $\hat{u}(0) = y_0$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \hat{u} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Toda aplicación cubriente $p : Y \rightarrow X$ entre espacios topológicos X y Y tiene la propiedad de levantamiento de curvas.

Teorema A.4 (Unicidad del levantamiento). Sean X y Y espacios Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Supongamos que Z es un espacio topológico simplemente conexo, arco-conexo y localmente arco-conexo y $f : Z \rightarrow X$ es una aplicación continua. Entonces para cualquier elección de puntos $z_0 \in Z$ y $y_0 \in Y$ tales que $f(z_0) = p(y_0)$, existe exactamente un levantamiento $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

Lema A.5. Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa y $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta de X formada por abiertos conexos y no vacíos. Supongamos que para cada $\alpha \in A$ existe una familia F_α de funciones analíticas $f : D_\alpha \rightarrow Y$ (donde Y es otra superficie de Riemann) que cumple la siguiente propiedad: si $f \in F_\alpha$ y $p \in D_\alpha \cap D_\beta$, existe $g \in F_\beta$ tal que $f = g$ en una vecindad de p . Entonces dado $\gamma \in A$ y $f \in F_\gamma$, existe una función analítica $H_\gamma : X \rightarrow Y$ tal que $H_\gamma = f$ en D_γ . En particular un isomorfismo local se extiende a uno global.

Demostración. Sea $\mathcal{U} := \{(p, f) : p \in D_\alpha, f \in F_\alpha, \alpha \in A\} / \sim$, donde $(p, f) \sim (q, g)$ si y sólo si $p = q$ y $f = g$ en una vecindad de p . Es como un germen con los que habíamos trabajado antes, la diferencia es que ahora la imagen de las funciones que estamos considerando está en una superficie de Riemann que no necesariamente es $\hat{\mathbb{C}}$. Denotaremos a la clase de (p, f) como $[f]_p$. Definimos para cada $f \in F_\alpha$ al conjunto $[D_\alpha, f] = \{[f]_p : p \in D_\alpha\}$ y la función $\pi : [D_\alpha, f] \rightarrow D_\alpha$ como $\pi([f]_p) = p$. Notemos que esta función es biyectiva¹. Definimos ahora una topología \mathcal{T}_α en $[D_\alpha, f]$ de la siguiente manera: $B \subseteq [D_\alpha, f]$ es abierto si $\pi(B)$ es abierto en D_α , donde D_α tiene la topología de subespacio de X .

Afirmación A.6. La colección \mathcal{T} formada por los subconjuntos $B \subseteq \mathcal{U}$ tales que para todo $\alpha \in A$ y $f \in F_\alpha$, $B \cap [D_\alpha, f] \in \mathcal{T}_\alpha$ (es decir $\pi(B \cap [D_\alpha, f])$ es abierto en D_α) es una topología para \mathcal{U} .

Demostración de la afirmación:

Primero observemos que $\mathcal{U} \cap [D_\alpha, f] = [D_\alpha, f]$ y $\pi([D_\alpha, f]) = D_\alpha$ es abierto en U_α , por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Ahora supongamos que B y C son elementos de \mathcal{T} tales que $B \cap C \neq \emptyset$. Sabemos que para cada $\alpha \in A$ y $f \in F_\alpha$, $\pi(B \cap [D_\alpha, f])$ y $\pi(C \cap [D_\alpha, f])$ son abiertos de D_α y al ser $\pi : [D_\alpha, f] \rightarrow D_\alpha$ una función biyectiva tenemos que $\pi(B \cap C \cap [D_\alpha, f]) = \pi(B \cap [D_\alpha, f]) \cap \pi(C \cap [D_\alpha, f])$, y este conjunto es abierto en D_α . Finalmente, si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una colección de elementos de \mathcal{T} , entonces para todo $\alpha \in A$ y $f \in F_\alpha$, $\pi(B_i \cap [D_\alpha, f])$ es abierto en D_α , por ello $\pi((\cup_{i \in I} B_i) \cap [D_\alpha, f]) = \pi(\cup_{i \in I} B_i \cap [D_\alpha, f]) = \cup_{i \in I} \pi(B_i \cap [D_\alpha, f])$ es un abierto de D_α , lo cual quiere decir que $\cup_{i \in I} B_i$ pertenece a \mathcal{T} .

Con esta topología \mathcal{U} es un espacio Hausdorff: si $[f]_p \in [D_\alpha, f]$ y $[g]_q \in [D_\beta, g]$ son dos elementos diferentes de \mathcal{U} , entonces $p \neq q$ o $p = q$ y $f \neq g$. En el primer caso podemos separar a p de q con dos abiertos ajenos $V \subseteq D_\alpha$ y $W \subseteq D_\beta$ por que X es hausdorff, entonces $\{[f]_x : x \in V\}$ y $\{[g]_y : y \in W\}$ son dos abiertos ajenos en \mathcal{T} y contienen a $[f]_p$ y $[g]_q$ respectivamente. En el segundo caso tenemos que $p = q \in D_\alpha \cap D_\beta$ y este conjunto es abierto en D_α y D_β , por lo que los conjuntos $P = \{[f]_x : x \in D_\alpha \cap D_\beta\}$ y $Q = \{[g]_y : y \in D_\alpha \cap D_\beta\}$ son elementos de \mathcal{T} que contienen a $[f]_p$ y $[g]_q$ respectivamente. Además al ser $f \neq g$, existe al menos un punto $t \in D_\alpha \cap D_\beta$ tal que $f(t) \neq g(t)$, esto implica que $[f]_t \neq [g]_t$. Como

¹Inyectividad: Supongamos que $[f]_p$ y $[f]_q$ son dos elementos de $[D_\alpha, f]$ tales que $\pi([f]_p) = \pi([f]_q)$, entonces $p = q$ y por lo tanto $[f]_p = [f]_q$. Suprayectividad: si $p \in D_\alpha$ entonces existe el germen $[f]_p$, pues f está definida en todo el disco D_α , y $\pi([f]_p) = p$.

$[f]_t \in P \setminus Q$, concluimos que P y Q son ajenos.

Afirmación A.7. Si \tilde{X} es una componente conexa de \mathcal{U} , entonces $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación cubriente.

Demostración de la afirmación:

Primero vamos a demostrar que π es suprayectiva, para ello veremos que $\pi(\tilde{X}) \subseteq X$ es un conjunto abierto y cerrado, y luego utilizaremos la conexidad ² de X para concluir que $\pi(\tilde{X}) = X$.

• $\pi(\tilde{X})$ es abierto en X .

Sea $[f]_p \in \tilde{X}$, entonces $\pi([f]_p) = p$. Tenemos que demostrar que existe un abierto V de X tal que $p \in V \subseteq \pi(\tilde{X})$. Dado que $[f]_p \in \tilde{X}$, entonces existe un elemento D_α de la cubierta $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $p \in D_\alpha$ y $f \in F_\alpha$. Notemos ahora que $\tilde{X} \cap [D_\alpha, f] \neq \emptyset$, pues $[f]_p$ pertenece a dicha intersección. Luego, el conjunto $[D_\alpha, f]$ es conexo ³, entonces está contenido en \tilde{X} , y esto implica que $\pi([D_\alpha, f]) = D_\alpha \subseteq \pi(\tilde{X})$. Tomando $V = D_\alpha$ tenemos que $p \in V \subseteq \pi(\tilde{X})$, lo cual quiere decir que $\pi(\tilde{X})$ es abierto en X .

• $\pi(\tilde{X})$ es cerrado en X .

Vamos a demostrar que $X \setminus \pi(\tilde{X})$ es abierto en X . Consideremos un punto $p \in X \setminus \pi(\tilde{X})$. Como $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ es una cubierta de X , existe $\alpha \in A$ tal que $p \in D_\alpha$. Si $D_\alpha \cap \pi(\tilde{X}) = \emptyset$ ya podemos concluir que $X \setminus \pi(\tilde{X})$ es abierto. Supongamos entonces que $D_\alpha \cap \pi(\tilde{X}) \neq \emptyset$ y tomemos un punto $q \in D_\alpha \cap \pi(\tilde{X})$. Como $q \in \pi(\tilde{X})$ entonces existe un punto en \tilde{X} de la forma $[f]_q$, esto a su vez implica que existe $\beta \in A$ tal que $q \in D_\beta$ y $f \in F_\beta$. Observemos ahora que $D_\alpha \cap D_\beta \neq \emptyset$, así que podemos utilizar la hipótesis para obtener una función $g \in D_\alpha$ tal que $f = g$ en $D_\alpha \cap D_\beta$. Ahora, como $q \in D_\alpha$, entonces $[g]_q \in [D_\alpha, g]$, pero este último conjunto es conexo, y como tiene intersección no vacía con \tilde{X} ($[g]_q$ pertenece a esa intersección), tenemos que $[D_\alpha, g] \subseteq \tilde{X}$. Finalmente notemos que $[g]_p \in [D_\alpha, g]$, por lo que $p = \pi([g]_p) \in \pi([D_\alpha, g]) \subseteq \pi(\tilde{X})$, lo cual es una contradicción ya que tomamos $p \in X \setminus \pi(\tilde{X})$. Por lo tanto $X \setminus \pi(\tilde{X})$ es abierto, lo cual implica que $\pi(\tilde{X})$ es cerrado en X .

Como X es conexo, los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados son X y el vacío, pero $\pi(\tilde{X})$ es abierto y cerrado en X y diferente del vacío. Concluimos entonces que $\pi(\tilde{X}) = X$, lo que demuestra que π es suprayectiva.

Ahora vamos a demostrar que π es una aplicación cubriente, para ello consideremos un punto $x \in X$ arbitrario. Nuevamente utilizando el hecho de que $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ es una cubierta

²Al ser X simplemente conexo, es conexo por trayectorias y por tanto conexo.

³Si $[D_\alpha, f]$ no fuera conexo, existirían dos abiertos ajenos U y W tales que $U \cup W = [D_\alpha, f]$, luego, $\pi(U)$ y $\pi(W)$ serían dos abiertos ajenos en D_α tales que $\pi(U) \cup \pi(W) = D_\alpha$, pero esto implicaría que D_α no es conexo, lo cual es una contradicción porque por hipótesis todos los elementos de la cubierta $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ son conexos.

de X , podemos encontrar un índice $\alpha \in A$ tal que $x \in D_\alpha$, y la imagen inversa de D_α son precisamente los conjuntos $[D_\alpha, f]$ con $f \in F_\alpha$, es decir

$$\pi^{-1}(D_\alpha) = \bigcup_{f \in F_\alpha} [D_\alpha, f] = \bigcup_{f \in F_\alpha} \{[f]_p : p \in D_\alpha\}.$$

Demostremos ahora que la unión anterior es ajena, para ello consideremos dos abiertos $[D_\alpha, f] = \{[f]_q : q \in D_\alpha\}$ y $[D_\alpha, g] = \{[g]_s : s \in D_\alpha\}$, donde $f, g \in F_\alpha$. Supongamos que existe $[h]_p \in [D_\alpha, f] \cap [D_\alpha, g]$, entonces $[h]_p = [f]_q$, pues $[h]_p \in [D_\alpha, f]$ y $[h]_p = [g]_s$, pues $[h]_p \in [D_\alpha, g]$, ahora bien, como $[h]_p = [f]_q = [g]_s$, entonces $p = q = s$ y $f = g$ en una vecindad V de p , que podemos pensar que es abierta. Luego $V \cap D_\alpha$ es un abierto contenido en D_α en donde f y g coinciden, entonces por el teorema de la identidad tenemos que $f = g$ en D_α , por lo tanto $[D_\alpha, f] = [D_\alpha, g]$. Esto nos permite concluir que si $[D_\alpha, f] \neq [D_\alpha, g]$, entonces $[D_\alpha, f] \cap [D_\alpha, g] = \emptyset$.

Para terminar de demostrar que π es una aplicación cubriente, nos resta verificar que para cada $f \in F_\alpha$, $\pi : [D_\alpha, f] \rightarrow D_\alpha$ es un homeomorfismo. Ya hemos notado que π restringida a $[D_\alpha, f]$ es biyectiva, entonces basta demostrar que $\pi \upharpoonright_{[D_\alpha, f]}$ es continua y abierta.

Para demostrar la continuidad consideremos un punto $p \in D_\alpha$ y una vecindad abierta U de p en D_α . Notemos que $U \subseteq D_\alpha$ y $\tilde{U} = \{[f]_q : q \in U\}$ es un subconjunto abierto de $[D_\alpha, f]$ que contiene a $[f]_p$ y cumple que $\pi(\tilde{U}) = U$. Por lo tanto $\pi \upharpoonright_{[D_\alpha, f]}$ es continua. Finalmente, $\pi \upharpoonright_{[D_\alpha, f]}$ es abierta porque si \tilde{B} es un abierto de $[D_\alpha, f]$, por definición de la topología de $[D_\alpha, f]$ sabemos que $\pi(\tilde{B}) = B$ es abierto en D_α .

Ahora vamos a demostrar el lema, para ello tomemos un índice $\gamma \in A$ fijo. Consideremos el disco D_γ y una función $f \in F_\gamma$. Queremos demostrar que existe una función analítica H_γ de X en Y que coincida con f en D_γ . Sea \tilde{X} la componente conexa de \mathcal{U} que contiene a $[D_\gamma, f]$ (recordemos que $[D_\gamma, f] = \{[f]_p : p \in D_\gamma\}$). Como X es una superficie simplemente conexa, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ es un homeomorfismo, por lo tanto la fibra de cada x en X consta de un sólo punto, $\pi^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$. Luego, \tilde{x} es un germen de la forma $[g]_x$ donde g es una función en F_α y α es tal que $x \in D_\alpha$. Definimos entonces $H_\gamma(x) = g(x)$. Notemos que H es una función analítica por que en cada punto está dada por una función analítica.

Veamos que esta función está bien definida: si y es un punto en X que pertenece a dos abiertos D_α y D_β , entonces $\pi^{-1}(y) = \tilde{y}$ es un germen que por un lado es de la forma $[g]_y$ para alguna g en F_α y por otro lado es de la forma $[h]_y$ para alguna h en F_β , es decir, $\tilde{y} = [g]_y = [h]_y$, pero esto quiere decir que $h = g$ en una vecindad de y , en particular, $g(y) = h(y)$. Por lo tanto H_γ está bien definida.

Finalmente, verifiquemos que $H_\gamma = f$ en D_γ , para ello tomemos un punto $x \in D_\gamma$. Como \tilde{X} contiene a $[D_\gamma, f]$, entonces x tiene un a preimagen bajo π en $[D_\gamma, f]$ de la forma $[f]_x$, pero esta es la única, pues π es un isomorfismo, así que $H_\gamma(x) = f(x)$. Por lo tanto H_γ coincide con f en D_γ . \square

Apéndice B

Álgebra.

Definición B.1. Un polinomio $P(z, w)$ en dos variables es *irreducible* si no se puede expresar como producto de dos polinomios no constantes. Dos polinomios $P(z, w)$ y $Q(z, w)$ son *primos relativos* (o *coprimos*) si no tienen ningún factor en común, excepto por constantes.

Por ejemplo, si $P(z, w) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_{n-1}w + a_n$ es un polinomio irreducible de grado n en w y P_w es su derivada con respecto a w , entonces ellos son primos relativos. En efecto, supongamos que tienen un factor S en común, entonces $P = ST$ y $P_w = SU$. Como P es irreducible, alguno de los polinomios S o T es constante. Si T es constante, entonces S tiene el mismo grado en w que P , lo cual implica que el grado de P_w en w es al menos n , pero esto no pasa, por que el grado en w de P_w es $n - 1$. Entonces S es constante. Así, los únicos factores en común de P y P_w son constantes, por lo tanto estos polinomios son primos relativos.

Criterios de irreducibilidad de polinomios de dos variables

Teorema B.2. Sea K un campo de característica cero, $f(w)$ y $g(z)$ dos polinomios. El polinomio $P(z, w) = f(w) - g(z)$ es reducible si y sólo si existen polinomios F, G, S y T sobre K tales que $f(w) = (F \circ G)(w)$, $g(z) = (S \circ T)(z)$ y $F(u) - S(v)$ es reducible sobre el mismo campo. En particular, si no podemos escribir a f y g como composición de polinomios no triviales, es decir con grado al menos dos, entonces P es irreducible.

Two Problems Concerning Polynomials, J. Reine. Angew. Math, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Volume 1964, Issue 214-215 (Jan. 1964).

Ejemplo B.3. Sean $f(w) = w^n$ ($n \in \mathbb{N}$) y $g(z) = z$. Entonces el polinomio $P(z, w) = f(w) - g(z) = w^n - z$ es irreducible, pues si $g(z) = (S \circ T)(z)$, estos polinomios no pueden tener grado mayor que 1, pues g es de grado 1.

Teorema B.4 (de la serpiente o del kernel-cokernel). Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de R -módulos, cuyos renglones son sucesiones exactas, (es decir, f_1, g_1

son inyectivas, f_2, g_2 son suprayectivas, $\text{Im}(f_1) = \text{Ker}(f_2)$ y $\text{Im}(g_1) = \text{Ker}(g_2)$.

Entonces existen dos únicos homomorfismos α_1 y α_2 tales que la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 \longrightarrow 0 \\ & & \varphi_1 \downarrow & \curvearrowright & \varphi_2 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \varphi_3 \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi_1) \xrightarrow{\alpha_1} \text{Ker}(\varphi_2) \xrightarrow{\alpha_2} \text{Ker}(\varphi_3) \longrightarrow 0$$

Robert Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, página 52.

Teorema B.5.

- (a) Sea $P(z)$ un polinomio de grado k en $\mathbb{C}[z]$, entonces $P(z)$ tiene una raíz repetida si y sólo si comparte un factor con su derivada.
- (b) Sean $P(z, w)$ y $Q(z, w)$ polinomios coprimos en $\mathbb{C}[z, w]$. Entonces hay a lo mas una cantidad finita de números $z \in \mathbb{C}$ para los cuales las ecuaciones $P(z, w) = 0$ y $Q(z, w) = 0$ tienen una raíz común $w \in \mathbb{C}$.

Gareth A. Jones, David Singerman, *Complex functions*, página 327.

Apéndice C

Variable compleja.

Definición C.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable por tramos y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. El *índice* de γ con respecto a z_0 se define como

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \quad (\text{C.1})$$

El índice de una curva respecto a un punto es el número de veces que la curva rodea al punto, este número es siempre un número entero y si dos curvas cerradas son homótopas en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, entonces tienen el mismo índice con respecto a z_0 .

Teorema C.2 (del conteo de raíces y polos). Sea f una función meromorfa definida en una región abierta $A \subset \mathbb{C}$. Supongamos que b_1, \dots, b_m son los polos de f y a_1, \dots, a_n sus ceros, contados con multiplicidad (esto quiere decir que si a_j es un cero de orden k entonces aparecerá k veces en la lista de ceros y si b_i es un polo de orden k entonces aparecerá k veces en la lista de polos). Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva cerrada tal que $\gamma \cap \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^n I(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^m I(\gamma, b_l) \right] \quad (\text{C.2})$$

Demostración. Sea $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Consideremos un cero a_j de f y supongamos que tiene orden k , luego escribimos a f como una serie convergente alrededor de a_j

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{l=k}^{\infty} \xi_l (z - a_j)^l \quad \text{donde } \xi_k \neq 0 \\ &= (z - a_j)^k \left(\xi_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_l (z - a_j)^l \right) \end{aligned}$$

Llamando $\phi(z) = \xi_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_l (z - a_j)^l$ tenemos que $\phi(a_j) \neq 0$ (pues $\xi_k \neq 0$) y reescribiendo a f como $f(z) = (z - a_j)^k \phi(z)$ obtenemos la siguiente expresión de g :

$$g(z) = \frac{k(z - a_j)^{k-1} \phi(z)}{(z - a_j)^k \phi(z)} + \frac{(z - a_j)^k \phi'(z)}{(z - a_j)^k \phi(z)} = \frac{k}{z - a_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}.$$

Por lo tanto g tiene en a_j un polo simple con residuo k . Podemos concluir entonces que el residuo de g en cada polo a_j es igual al orden del cero de f en a_j .

Supongamos ahora que f tiene en b_i un polo de orden k y escribamos su serie de Laurent alrededor de este punto

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\delta_k}{(z - b_i)^k} + \frac{\delta_{k-1}}{(z - b_i)^{k-1}} + \dots + \frac{\delta_1}{(z - b_i)} + \sum_{l=0}^{\infty} \xi_l (z - b_i)^l \quad \text{donde } \delta_k \neq 0 \\ &= \frac{1}{(z - b_i)^k} \left(\delta_k + \delta_{k-1}(z - b_i) + \dots + \delta_1(z - b_i)^{k-1} + \sum_{l=0}^{\infty} \xi_l (z - b_i)^{l+k} \right) \end{aligned}$$

Llamemos $\phi(z) = \delta_k + \delta_{k-1}(z - b_i) + \dots + \delta_1(z - b_i)^{k-1} + \sum_{l=0}^{\infty} \xi_l (z - b_i)^{l+k}$. Tenemos entonces que ϕ es analítica, $\phi(b_i) \neq 0$ (pues $\delta_k \neq 0$) y

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - b_i)^k} \quad \text{entonces} \quad g(z) = \frac{-k}{z - b_i} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

Por lo tanto b_i es un polo simple de g con residuo $-k$, de donde concluimos que el residuo de g en cada polo b_i es igual a menos el orden del polo.

Utilizamos ahora el teorema del residuo para obtener que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{\tilde{n}} (\text{Res}(g, a_j)) \cdot I(\gamma, a_j) + \sum_{l=1}^{\tilde{m}} (\text{Res}(g, b_l)) \cdot I(\gamma, b_l) \right]$$

donde \tilde{n} es el número de ceros sin contar la multiplicidad y \tilde{m} es el número de polos sin contar la multiplicidad, entonces como $\text{Res}(g, a_j)$ es el orden del cero a_j (que es la multiplicidad de a_j) y $\text{Res}(g, b_i)$ es menos el orden del polo b_i (que es menos la multiplicidad de b_j), al considerar las sumas contando las multiplicidades de los ceros y polos de f se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^n I(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^m I(\gamma, b_l) \right]$$

□

El siguiente teorema es sutilmente distinto al anterior y tiene la ventaja de que eligiendo una curva adecuada, podemos saber exactamente cuales son los ceros y polos simples de una función. Su utilidad quedará mas clara cuando recurramos a él un par de secciones mas adelante.

Teorema C.3. Sea f una función meromorfa definida en una región abierta $A \subset \mathbb{C}$, a_j sus ceros con multiplicidades k_j , b_l sus polos con multiplicidades r_l , y $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva cerrada con índice uno respecto a cada cero y polo de f . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \sum k_j a_j - \sum r_l b_l$$

donde que encierra γ y b_l son los polos de f (con multiplicidades r_l) que encierra γ .

Demostración. Si a_j es uno de los ceros de f con multiplicidad k_j , podemos expresar a f en una vecindad de a_j como $f(z) = (z - a_j)^{k_j} \phi(z)$, con ϕ una función analítica que no se anula en a , entonces

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{zf'(z)}{f(z)} = z \left[\frac{k_j(z - a_j)^{k_j-1} \phi(z)}{(z - a_j)^{k_j} \phi(z)} + \frac{(z - a_j)^{k_j} \phi'(z)}{(z - a_j)^{k_j} \phi(z)} \right] \\ &= z \left[\frac{k_j}{z - a_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right] = \frac{zk_j}{z - a_j} + \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \end{aligned}$$

De la ecuación anterior podemos observar que en el punto $z = a_j$ el residuo de g es $k_j a_j$.

Por otro lado, si b_l es un polo de f orden r_l , $f(z) = \phi(z)/(z - b_l)^{r_l}$, con ϕ una función analítica que en b_l es diferente de cero. Entonces

$$g(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{-r_l z}{z - b_l} + \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}$$

de donde concluimos que g tiene residuo $-r_l b_l$ en $z = b_l$.

Ahora, por el teorema del residuo sabemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g = \sum \text{Res}(g, a_j) I(\gamma, a_j) + \sum \text{Res}(g, b_l) I(\gamma, b_l)$$

pero como $\text{Res}(g, a_j) = k_j a_j$, $\text{Res}(g, b_l) = -r_l b_l$ y además γ tiene índice uno con respecto a cada cero y polo, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \sum k_j a_j - \sum r_l b_l$$

□

Teorema C.4 (del mapeo). Sea f analítica y no constante en una región A y sea $z_0 \in A$. Suponga que $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden $k \geq 1$ en z_0 . Entonces existe $\eta > 0$ tal que para toda $\epsilon \in (0, \eta]$, existe $\delta > 0$ tal que si $|w - w_0| < \delta$, entonces $f(z) - w$ tiene exactamente k raíces (contadas con multiplicidad) en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$. Mas aún, existe $\lambda > 0$ tal que para toda $\epsilon \in (0, \lambda]$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |w - w_0| < \delta$, entonces $f(z) - w$ tiene exactamente k raíces en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$.

Jerrold E. Marsden, Michael J. Hofman, Análisis básico de variable compleja, página 418.

Teorema C.5. *Si f es una función continua en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ y holomorfa en $D \setminus S$, donde S es una hipersuperficie real suave (para $n = 1$ es una curva suave), entonces f es holomorfa en D .*

B. V. Shabat, Introduction to Complex Analysis, Part II, Functions of Several Variables , página 132.

Teorema C.6 (Diferenciación bajo el signo de integral). *Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{C} y $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ una curva diferenciable a trozos. Sea $f(z, w) : A \times U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que la derivada de f con respecto a z existe para toda $z \in A$ y es una función continua de z y w . Sea $G(z) = \int_{\gamma} f(z, w) dw$. Entonces G es analítica en A y $G'(z) = \int_{\gamma} f_z(z, w) dw$.*

Serge Lang, Complex Analysis, página 287.

Apéndice D

Cota de la dimensión de los espacios $\mathcal{L}(D)$

Este apartado está dedicada a demostrar que la dimensión de los espacios $\mathcal{L}(D)$ es finita.

Lema D.1. *Sea X una superficie de Riemann, D un divisor en X y $p \in X$. Entonces $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$ o $\mathcal{L}(D - p)$ tiene codimensión uno en $L(D)$.*

Demostración. Sea z una carta centrada en p y $n = -D(p)$. Sabemos que si una función g pertenece a $\mathcal{L}(D)$ entonces $n \leq \text{Ord}_p(g)$, por lo que la serie de g alrededor de p es de la forma $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$.

Definamos la aplicación $\alpha : \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera: sea f una función en $\mathcal{L}(D)$ y consideremos la serie de f alrededor del punto p , $f(z) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k z^k$, entonces $\alpha(f) = c_n$, es decir, $\alpha(f)$ es el coeficiente del término z^n en la serie de f (que podría ser cero). Esta es una transformación lineal y a continuación veremos cuál es el núcleo de α .

Afirmación D.2. $\text{Ker}(\alpha) = \mathcal{L}(D - p)$

Demostración de la afirmación: Sea $f \in \text{Ker}(\alpha)$. Sabemos que $f \in \mathcal{L}(D - p)$ si y sólo si para todo $x \in X$ se tenemos que $-(D - p)(x) \leq \text{Ord}_x(f)$, pero $-(D - p)(x) = -D(x) + 1$ si $p = x$ y $-(D - p)(x) = -D(x)$ si $p \neq x$, entonces $f \in \mathcal{L}(D - p)$ si y sólo si $-D(p) + 1 \leq \text{Ord}_p(f)$ (*) y $-D(x) \leq \text{Ord}_x(f)$ para $x \neq p$ (**). Notemos que por el hecho de pertenecer a $\mathcal{L}(D)$ se tiene que $-D(x) \leq \text{Ord}_x(f)$ para todo $x \in X$, entonces f cumple la condición (**) y además, $-D(p) = n \leq \text{Ord}_p(f)$, pero como $\alpha(f) = 0$, entonces la desigualdad es estricta, es decir, $-D(p) = n < \text{Ord}_p(f)$; esto pasa si y sólo si $-D(p) + 1 \leq \text{Ord}_p(f)$, por lo tanto f cumple la condición (*). Así, $f \in \mathcal{L}(D - p)$.

Si ahora tomamos $g \in \mathcal{L}(D - p)$, entonces g cumple la condición (*), es decir, $-D(p) + 1 = n + 1 \leq \text{Ord}_p(g)$. De aquí se sigue que la serie de g alrededor de p es de la forma $\sum_{k>n} c_k z^k$, así que el coeficiente $c_n = 0$, es decir $\alpha(g) = 0$, por lo tanto $g \in \text{Ker}(\alpha)$. \square

Notemos que si $\alpha \equiv 0$, entonces todo su dominio es su núcleo, es decir, $\text{Ker}(\alpha) = \mathcal{L}(D)$ y por ello $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - p)$ (usando la afirmación anterior). Ahora bien, si $\alpha \neq 0$, entonces $\dim \text{Im}(\sigma) > 0$, pero sabemos también que $\dim \text{Im}(\alpha) \leq 1 = \dim \mathbb{C}$, por lo que $\dim \text{Im}(\alpha) = 1$. Usando ahora el teorema de las dimensiones obtenemos que $\dim \mathcal{L}(D) =$

$\dim \text{Ker}(\sigma) + \dim \text{Im}(\sigma) = \dim \mathcal{L}(D - p) + 1$, por lo tanto $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D) - 1$, lo cual quiere decir que $\mathcal{L}(D - p)$ tiene codimensión 1 en $\mathcal{L}(D)$. \square

Ahora vamos a usar este lema para dar una cota de la dimensión de los espacios $\mathcal{L}(D)$ cuando tenemos una superficie compacta.

Proposición D.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en X . Entonces el espacio de funciones $\mathcal{L}(D)$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Si escribimos $D = P - N$ con P y N divisores no negativos con soporte ajeno, entonces $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \deg(P)$. En particular, si D es un divisor no negativo, entonces $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \deg(D)$.*

Demostración. Si $D = 0$, entonces $\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) + D \geq 0\} = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) \geq 0\}$, pero sabemos que las únicas funciones meromorfas en una superficie de Riemann compacta son las constantes, entonces $\mathcal{L}(D) = \mathbb{C}$ y por lo tanto $\dim \mathcal{L}(D) = 1$.

Tomemos ahora un divisor D diferente de cero y lo escribimos como la suma de su parte positiva menos su parte negativa, $D = P - N$. Vamos a hacer la demostración por inducción en el grado de la parte positiva de D .

Base de inducción: si el grado de la parte positiva es cero, es decir, $\deg(P) = 0$, al ser P un divisor positivo, entonces $P \equiv 0$ y en este caso ya hemos visto que $\dim \mathcal{L}(P) = 1$. Observemos que $D \leq P$ (basta notar que en cada punto $D(p) = P(p) - N(p) \leq P(p)$, pues $N(p)$ es un entero no negativo), y cuando tenemos una relación de este tipo entre dos divisores, entonces $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(P)$, por ello $\dim \mathcal{L}(D) \leq \dim \mathcal{L}(P) = 1 = 1 + 0 = 1 + \deg(P)$.

Hipótesis de inducción: supongamos que $\deg(P) = k - 1$ y que $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \deg(P) = 1 + k - 1 = k$.

Ahora supongamos que $\deg(P) = k$ con $k \geq 1$. Tomemos un punto p en el soporte de P , es decir, $P(p) \geq 1$ y consideremos el divisor $D - p$. Notemos que la parte positiva de $D - p$ es el divisor $P - p$ y tiene grado $k - 1$, así que podemos usar la hipótesis de inducción y obtenemos que $\dim \mathcal{L}(D - p) \leq \deg(P - p) + 1 = (k - 1) + 1 = k = \deg(P)$.

Ahora, por el lema anterior sabemos que $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D)$ si $\alpha \equiv 0$ y $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D) - 1$ si $\alpha \not\equiv 0$, es decir,

$$\dim \mathcal{L}(D) = \begin{cases} \dim \mathcal{L}(D - p) & \text{si } \alpha \equiv 0 \\ \dim \mathcal{L}(D - p) + 1 & \text{si } \alpha \not\equiv 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\dim \mathcal{L}(D) = \begin{cases} \dim \mathcal{L}(D - p) \leq \deg(P) \leq \deg(P) + 1 & \text{si } \alpha \equiv 0 \\ \dim \mathcal{L}(D - p) + 1 \leq \deg(P) + 1 & \text{si } \alpha \not\equiv 0 \end{cases}$$

Concluimos así que $\dim \mathcal{L}(D) \leq \deg(P) + 1 < \infty$. \square

El grado del divisor de polos de una función

Vamos a describir el grado del divisor de polos de una función f en una superficie de Riemann X en términos del conjunto de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ y el campo de expresiones racionales en la función f .

Lema D.4. *Sea A un divisor en una superficie de Riemann compacta X y sea D el divisor de polos de una función f meromorfa en X . Entonces existe un entero $m > 0$ y una función meromorfa g en X tal que $A - \text{div}(g) \leq mD$. Además, g puede ser tomada como una función polinomial en f , es decir, $g = r(f)$ para algún polinomio $r(t) \in \mathbb{C}[t]$.*

Demostración. Sean p_1, \dots, p_k los puntos en el soporte de A que no son polos de f y para los cuales se tiene que $A(p_i) \geq 1$. Como ningún punto p_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ es un polo de f , entonces $f(p_i)$ es un número complejo y podemos considerar a la función $f - f(p_i)$, la cual tiene un cero en p_i de orden mayor o igual a 1, por lo que la función $[f - f(p_i)]^{A(p_i)}$ tiene en p_i un cero de orden mayor o igual que $A(p_i)$. Notemos también que los polos de $f - f(p_i)$ son los mismos que los polos de f y lo mismos que los polos de $[f - f(p_i)]^{A(p_i)}$. Definamos $g := [f - f(p_1)]^{A(p_1)} \cdot [f - f(p_2)]^{A(p_2)} \cdot \dots \cdot [f - f(p_k)]^{A(p_k)}$. Los ceros de g son precisamente los ceros de cada factor, es decir, los puntos p_1, \dots, p_k y sus polos son los mismos que los polos de f , además g es una función polinomial en f . Recordemos que el divisor de polos de f es $D = \sum_{\text{Ord}_p(f) < 0} -\text{Ord}_p(f) \cdot p$.

Sea $\{q_1, \dots, q_r\}$ el conjunto de polos de f y tomemos un punto q_j en ese conjunto. Entonces se tiene que $\text{Ord}_{q_j}(f) < 0$. Por la propiedad arquimediana, existe un entero positivo m_j tal que $A(p) - \text{Ord}_{q_j}(g) \leq m_j \text{Ord}_{q_j}(f)$. Sea $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$. Entonces para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ sucede que $A(p) - \text{Ord}_{q_j}(g) \leq m_j \text{Ord}_{q_j}(f) \leq m \cdot \text{Ord}_{q_j}(f)$, por ello en los polos de f tenemos que $A - \text{div}(g) \leq mD$.

Ahora consideremos un punto p_i en los ceros de g . Ya que el orden de g en p_i es mayor o igual que $A(p_i)$, $A(p_i) - \text{Ord}_{p_i}(g) \leq 0$. Por otro lado, como los ceros de g son ajenos a sus polos (que son los mismos que los polos de f) entonces $D(p_i) = 0$, es decir, los ceros de g no están en el soporte de D , por ello $A(p_i) - \text{Ord}_{p_i}(g) \leq 0 = D(p_i) = mD(p_i)$. Así que también para los ceros de g tenemos que $A - \text{div}(g) \leq mD$.

Finalmente tomemos un punto x que no sea un cero ni un polo de f . Notemos que en este caso $A(x) \leq 0$ y x no pertenece al soporte de D , así que $D(x) = 0 = mD(x)$ y por definición de orden, $\text{Ord}_x(g) = 0$, entonces tenemos que $A(x) - \text{Ord}_x(g) = A(x) \leq 0 = mD(x)$. De este modo, concluimos que para cualquier punto p de X , $A(p) - \text{Ord}_p(g) \leq mD(p)$, es decir, $A - \text{div}(g) \leq mD$. \square

Corolario D.5. *Sea X una superficie de Riemann compacta, f y h funciones meromorfas en X . Entonces existe un polinomio $r(t) \in \mathbb{C}[t]$ tal que la función $r(f) \cdot h$ no tiene polos fuera de los polos de f . En este caso, existe un entero m tal que $r(f)h \in \mathcal{L}(mD)$ donde D es el divisor de polos de f .*

Demostración. Apliquemos el lema D.4 con $A = -\text{div}(h)$. Definimos a la función

$$r(f) = [f - f(p_1)]^{A(p_1)} \cdot [f - f(p_2)]^{A(p_2)} \cdot \dots \cdot [f - f(p_k)]^{A(p_k)}$$

donde $\{p_1, \dots, p_k\}$ es el conjunto de puntos en el soporte de $-\text{div}(h)$ que no son polos de f y en los que $-\text{Ord}_{p_i}(h) \geq 1$, esto implica que $\text{Ord}_{p_i}(h) \leq -1$, así que dichos puntos son los polos de h que no pertenecen a los polos de f y además son los ceros de la función $r(f)$, por

ello $(r(f).h)(p_i) = 0$. Entonces los polos de $r(f).h$ son puntos pertenecientes a los polos de $r(f)$, que son los mismos que los polos de f , y los puntos que eran originalmente polos de h y que pertenecen también a los polos de f , es decir, $r(f).h$ no tiene polos fuera de los polos de f .

Sabemos, por el lema D.4, que existe un entero positivo m tal que $-div(h) - div(r(f)) \leq mD$, esto implica que $-[div(h) + div(r(f))] \leq mD$ y ya que en cada punto $p \in X$, $Ord_p(h) + Ord_p(r(f)) = Ord_p(r(f).h)$, tenemos que $-div(r(f).h) \leq mD$, entonces $0 \leq mD + div(r(f).h)$ lo cual significa que $r(f).h \in \mathcal{L}(mD)$. \square

Sea f una función meromorfa fija en una superficie de Riemann compacta y sea D el divisor de polos de f . Sea $\mathbb{C}(f)$ el campo de expresiones racionales en la función f . El conjunto de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ es una extensión de $\mathbb{C}(f)$ y denotamos el grado de esta extensión como $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)]$.

Lema D.6. *Si $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$, entonces existe una constante m_0 tal que para toda $m \geq m_0$, $dim \mathcal{L}(mD) \geq (m - m_0 + 1)k$.*

Demostración. Recordemos que el grado de la extensión $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)]$ de $\mathbb{C}(f)$ por $\mathcal{M}(X)$ es la dimensión de $\mathcal{M}(X)$ como $\mathbb{C}(f)$ -espacio vectorial, y como estamos suponiendo que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$, entonces existen g_1, \dots, g_k elementos de $\mathcal{M}(X)$ que son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}(f)$.

Por el corolario D.5, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe una función polinomial $r_i(t)$ en $\mathbb{C}[t]$ tal que la función $r_i(f).g_i$ tiene polos sólo en los puntos donde f tiene polos. Notemos que las funciones $r_1(f).g_1, \dots, r_k(f).g_k$ también son linealmente independientes, ya que si existiera una combinación lineal de estas con coeficientes en $\mathbb{C}(f)$, entonces tendríamos una combinación lineal entre las funciones g_1, \dots, g_k . Además, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe un entero m_i tal que $r_i(f).g_i \in \mathcal{L}(m_i D)$, es decir, para todo punto $p \in X$, $-(m_i D(p)) = -m_i D(p) \leq Ord_p(r_i(f).g_i)$. Sea $m_0 = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$. Entonces $-m_0 D(p) \leq -m_i D(p) \leq Ord_p(r_i(f).g_i)$. Consideremos ahora un entero m tal que $m_0 \leq m$ y tomemos un natural n tal que $0 \leq n \leq m - m_0$.

Afirmación D.7. $f^n.r_i(f).g_i \in \mathcal{L}(mD)$.

Efectivamente:

Como $0 < n \leq m - m_0$, entonces $n + m_0 \leq m$, lo cual implica que $-m \leq -n - m_0$. Luego, como el divisor de polos de una función es no negativo, para cada punto $p \in X$ tenemos que $-m D(p) \leq -n D(p) - m_0 D(p) \dots (*)$.

Observación: Para cualquier entero a tenemos que $Ord_p(f^a) = a Ord_p(f)$, además $-D(p) \leq Ord_p(f)$ (pues si p es un polo de f , $-D(p) = Ord_p(f)$ y si p es un cero de f , $-D(p) = 0 < Ord_p(f)$). Así que $-a D(p) \leq a Ord_p(f) = Ord_p(f^a)$. Utilizando esta observación con n , tenemos que $-n D(p) \leq Ord_p(f^n)$. Luego, como para toda $i \in \{1, \dots, k\}$ tenemos que $-m_0 D(p) \leq Ord_p(r_i(f).g_i)$, entonces $-m_0 D(p) - n D(p) \leq Ord_p(r_i(f).g_i) + Ord_p(f^n) = Ord_p[f^n.r_i(f).g_i]$ y utilizando (*) tenemos que $-m D(p) \leq Ord_p[f^n.r_i(f).g_i]$, pero esto

pasa si y sólo si $f^n.r_i(f).g_i \in \mathcal{L}(mD)$. \boxtimes

Notemos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ hay $m - m_0 + 1$ funciones de la forma $f^n.r_i.g_i$, (tomando $n \in \{0, 1, \dots, m - m_0\}$) y al hacer variar la i en $\{1, \dots, k\}$, obtenemos $k(m - m_0 + 1)$ funciones.

Afirmación D.8. Esta colección de funciones es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

En efecto: Supongamos que existe una combinación lineal

$$f^{n_0}.r_j.g_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{m-m_0} \lambda_{ni}(f^n.r_i.g_i) \quad \text{con } \lambda_{ni} \in \mathbb{C}.$$

Definamos $\sigma_{ni} = \lambda_{ni}f^n.h_i$ y $\sigma = f^{n_0}.r_j$, tenemos entonces que

$$\sigma.g_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{m-m_0} \sigma_{ni}.g_i$$

lo cual implica que

$$g_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{m-m_0} \frac{\sigma_{ni}}{\sigma}.g_i$$

Pero notemos que cada σ_{ni}/σ es un elemento de $\mathbb{C}(f)$, lo cual quiere decir que g_j es combinación lineal de las restantes funciones g_i , pero esto no puede suceder, ya que por hipótesis las funciones g_1, \dots, g_k eran linealmente independiente sobre $\mathbb{C}(f)$. Por lo tanto la colección de funciones $\{f^n.r_i.g_i : i = 1, \dots, k, \text{ y } n = 0, \dots, m - m_0\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} . \boxtimes

De este modo hemos encontrado, para cada $m \geq m_0$, un conjunto de $k(m - m_0 + 1)$ funciones linealmente independientes que pertenecen al espacio vectorial $\mathcal{L}(mD)$, por lo tanto $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(mD) \geq k(m - m_0 + 1)$. \square

La siguiente proposición establece el resultado que estamos buscando en este apartado, a saber, la descripción del grado del divisor de polos de una función f en términos del conjunto de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ y el campo de expresiones racionales en la función f .

Proposición D.9. *Sea f una función meromorfa en una curva algebraica X y D el divisor de polos de f . Entonces $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D)$.*

Demostración. Demostraremos primero que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$. Para llegar a una contradicción, supongamos que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq 1 + \deg(D)$. Por el elma D.6 (tomando $k = 1 + \deg(D)$) tenemos que existe un entero m_0 tal que para todo $m \geq m_0$, $\dim \mathcal{L}(mD) \geq (m - m_0 + 1)(1 + \deg(D)) \dots (*)$

Por otro lado sabemos que $\dim \mathcal{L}(mD) \leq 1 + \deg(P)$, donde P es la parte positiva de D (esto es por la proposición D.3), pero como D es positivo y también m , entonces el divisor mD es positivo, así que $\dim \mathcal{L}(mD) \leq 1 + \deg(mD) = 1 + m \deg(D)$ (**). Usando ahora (*) y (**) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (m - m_0 + 1)(1 + \deg(D)) &\leq \dim \mathcal{L}(mD) \leq 1 + m \deg(D) \\ \Rightarrow m - m_0 + 1 + m \deg(D) - m_0 \deg(D) + \deg(D) &\leq 1 + m \deg(D) \quad (\text{D.1}) \\ \Rightarrow m &\leq m_0 + m_0 \deg(D) - \deg(D) \end{aligned}$$

pero esto es una contradicción ya que $m_0 + m_0 \deg(D) - \deg(D)$ es una constante y m puede ser tan grande como se quiera. Por lo tanto $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$.

Ahora vamos a encontrar $\deg(D)$ funciones linealmente independientes. Sean p_1, p_2, \dots, p_k los polos de f y fijemos $i \in \{1, \dots, k\}$. Recordemos que el coeficiente $n_i = D(p_i)$ es un número positivo. Sabemos que para cada $j \in \{1, 2, 3, \dots, n_i\}$ existe una función meromorfa, la cual denotaremos por G_{ij} que tiene un polo de orden j en el punto p_i y orden cero en los demás puntos $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k$ (esto es por el corolario 2.25). De estas funciones hay n_i por cada i , entonces en total hay $n_1 + n_2 + \dots + n_k = \deg(D)$, y vamos a demostrar que estas funciones son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}(f)$. Esto nos bastará para demostrar que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D)$ pues hemos visto que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$.

Haremos la demostración por contradicción, entonces supongamos que existe una relación lineal entre ellas con coeficientes $c_{ij} = \frac{s_{ij}}{t_{ij}} \in \mathbb{C}(f)$

$$\frac{s_{11}}{t_{11}} \cdot G_{11} + \dots + \frac{s_{1n_1}}{t_{1n_1}} \cdot G_{1n_1} + \dots + \frac{s_{k1}}{t_{k1}} \cdot G_{k1} + \dots + \frac{s_{kn_k}}{t_{kn_k}} \cdot G_{kn_k} \equiv 0$$

Multiplicando cada término de esta suma por el común denominador de los coeficientes c_{ij} obtenemos una combinación lineal cuyos coeficientes C_{ij} son polinomios en f :

$$C_{11} \cdot G_{11} + \dots + C_{1n_1} \cdot G_{1n_1} + \dots + C_{k1} \cdot G_{k1} + \dots + C_{kn_k} \cdot G_{kn_k} \equiv 0$$

Notemos que en esta expresión, los únicos polos de C_{ij} son los polos de f , es decir, los puntos p_1, p_2, \dots, p_k y además sabemos exactamente cuál es ese orden, porque como f tiene en p_i un polo de orden n_i , si d_{ij} es el grado del polinomio C_{ij} , entonces $\text{Ord}_{p_i}(C_{ij}) = d_{ij} \cdot n_i$

Ahora elegimos i_0 y j_0 tales que el grado del coeficiente $C_{i_0j_0}$ sea menor o igual que el de los demás coeficientes y si existen varios coeficientes con dicho grado, elegimos el que tenga la j mas grande.

Dividiendo cada coeficiente entre $C_{i_0j_0}$ obtenemos la siguiente expresión:

$$\Phi = \frac{C_{11}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{11} + \dots + \frac{C_{1n_1}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{1n_1} + \dots + \frac{C_{k1}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{k1} + \dots + \frac{C_{kn_k}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{kn_k} \equiv 0 \quad (\text{D.2})$$

Observemos que el coeficiente $\frac{C_{i_0j_0}}{C_{i_0j_0}} = 1$ y por ello, su grado es cero. Por otro lado, cada coeficiente de esta nueva expresión es una función racional en $\mathbb{C}(f)$ que tiene las siguientes propiedades:

1. El denominador tiene grado menor o igual que el numerador.
2. Los polos de $\frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}}$ son los puntos en donde $C_{i_0j_0}$ tenga ceros, pero en los puntos p_1, \dots, p_k , $C_{i_0j_0}$ tiene polos, porque esos son los polos de f , así que $\frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}}$ no tiene polos ahí. Entonces el orden de estas funciones en dichos puntos es no negativo, mas aún, es un múltiplo no negativo del orden de f , en efecto:

$$\begin{aligned} \text{Ord}_{p_k} \frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}} &= \text{Ord}_{p_k} C_{ij} - \text{Ord}_{p_k} C_{i_0j_0} = (d_{ij} \cdot n_k) - (d_{i_0j_0} \cdot n_k) \\ &= n_k (d_{ij} - d_{i_0j_0}) \geq 0 \quad (\text{por la propiedad 1}). \end{aligned}$$

La función Φ definida por la ecuación (D.2) debe ser la función constante cero, sin embargo vamos a encontrar un punto en la superficie en el que sea diferente de cero (esta será la contradicción a la que llegaremos).

Afirmación D.10. $\Phi(p_{i_o}) \neq 0$

Demostración de la afirmación:

Analicemos el orden de cada sumando de Φ en el punto p_{i_o} . Sabemos que el orden de $C_{ij}/C_{i_0j_0}$ en cualquier punto es no negativo y

$$\text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}} G_{ij} = \text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}} + \text{Ord}_{p_{i_o}} G_{ij}$$

Además $\text{Ord}_{p_{i_o}} G_{ij} = 0$ si $i \neq i_o$, por ello

$$\text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}} G_{ij} = \text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{ij}}{C_{i_0j_0}} \geq 0 \quad \text{si } i \neq i_o$$

es decir, los sumandos de la función Φ que ponemos en azul en la siguiente ecuación, tienen orden mayor o igual que cero:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{C_{11}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{11} + \dots + \frac{C_{1n_1}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{1n_1} + \dots \\ &\quad + \frac{C_{i_o1}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{i_o1} + \dots + \frac{C_{i_on_{i_o}}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{i_on_{i_o}} + \dots \\ &\quad + \frac{C_{k1}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{k1} + \dots + \frac{C_{kn_k}}{C_{i_0j_0}} \cdot G_{kn_k} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Veamos cual es el orden de los sumandos puestos en anaranjado. Sabemos que $G_{i_o j}$ tiene un polo de orden j en el punto p_{i_o} , por lo que $\text{Ord}_{p_{i_o}} G_{i_o j} = -j < 0$, así que

$$\begin{aligned} \text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{i_o j}}{C_{i_o j_o}} G_{i_o j} &= \text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{i_o j}}{C_{i_o j_o}} + \text{Ord}_{p_{i_o}} G_{i_o j} \\ &= \text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{i_o j}}{C_{i_o j_o}} - j \\ &= n_{i_o}(d_{i_o j} - d_{i_o j_o}) - j \geq 0 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Notemos que la única forma en la que el orden de algún sumando (anaranjado) de Φ sea negativo es cuando $(d_{i_o j} - d_{i_o j_o}) = 0$ y esto pasa para $j = j_o$, es decir

$$\text{Ord}_{p_{i_o}} \frac{C_{i_o j_o}}{C_{i_o j_o}} G_{i_o j_o} = -j_o$$

y éste es el único término de Φ que tiene orden negativo, esto quiere decir que este sumando tiene un polo de orden j_o en p_o , por lo tanto $\Phi(p_{i_o}) \neq 0$ ya que este polo no se puede cancelar con ningún otro término de los que aparecen en la expresión de Φ . Esto demuestra la afirmación \boxtimes .

Podemos concluir entonces que no es posible hallar una combinación lineal no trivial con coeficientes en $\mathbb{C}(f)$ de las funciones G_{ij} , así que el grado de la extensión $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)]$ es mayor o igual que $\deg(D)$, pero hemos visto antes que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$. Por lo tanto $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D)$.

□

Apéndice E

Formas diferenciales.

Cuando queremos hacer cálculos en una superficie (y en general, en una variedad) la técnica es trabajar en las cartas coordenadas y usar las propiedades que cumplan las funciones de transición (en nuestro caso, que son analíticas) para hacer que las cosas estén bien definidas. Así que para definir y trabajar con formas diferenciales en una superficie de Riemann, necesitamos primero definir estos objetos en un abierto de \mathbb{C} .

Funciones con valores reales de clase \mathcal{C}^∞

Sea $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que ϕ es de clase $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty$ en $(x_0, y_0) \in V$ si existen las derivadas parciales de ϕ con respecto a x y y y son continuas en (x_0, y_0) . Decimos que ϕ es de clase $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty$ en V si lo es en cada punto de V . Denotamos por $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(V)$ a las funciones de clase $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty$ en V . Esta colección de funciones forma un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Una derivación en un punto $z_0(x_0, y_0) \in V$ es una transformación \mathbb{R} -lineal $D : \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibnitz $D(f.g)(z_0) = D(f).g(z_0) + f(z_0)D(g)$. Las derivaciones en un punto z_0 forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con la suma dada por $(D + \hat{D})(f)(z_0) = D(f)(z_0) + \hat{D}(f)(z_0)$ y la multiplicación por escalares definida como $(\rho D(f))(z_0) = \rho.D(f)(z_0)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Este es el espacio tangente a V en z_0 y se denota como $T_{z_0}(V)$.

Las transformaciones

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{z_0}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{z_0} : \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(V) \rightarrow \mathbb{C}$$

definidas en cada $\phi \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(V)$ como

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z_0}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{z_0}$$

son \mathbb{R} -lineales y satisfacen la regla de Leibnitz, por tanto son derivaciones en z_0 .

Afirmación E.1. $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{z_0}$ y $\left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{z_0}$ son una base para $T_{z_0}(V)$.

Demostración de la afirmación:

Primero veamos que $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0}$ y $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$r \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0} + s \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0} = 0$$

con $r, s \in \mathbb{R}$. Consideremos a las funciones $\mathbf{x}, \mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\mathbf{x}(x, y) = x$ y $\mathbf{y}(x, y) = x$. Notemos ahora que

$$r \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\Big|_{z_0} + s \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y}\Big|_{z_0} = r \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\Big|_{z_0} = r x_0 = 0$$

y esto pasa si y sólo si $r = 0$. Análogamente demostramos que $s = 0$. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0}$ y $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}$ son linealmente independientes.

Ahora veamos que estos dos elementos generan a $T_{z_0}(V)$. Sea D una derivación en el punto z_0 . Queremos demostrar que existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$D = r \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0} + s \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}$$

es decir, para cualquier función $\phi \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}(V)$,

$$D(\phi) = r \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0} + s \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0}$$

Ya que ϕ es de clase $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}(V)$, en una vecindad de z_0 se expresa como

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi((x, y)) = \phi(z_0) + x \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0} + y \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0} \\ &= \phi(z_0) + \mathbf{x}(z) \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0} + \mathbf{y}(z) \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0} \end{aligned}$$

Evaluando D en ϕ y utilizando el hecho de que D es una derivación obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} D(\phi) &= D\left(\phi(z_0) + \mathbf{x} \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0} + \mathbf{y} \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0}\right) \\ &= D(\phi(z_0)) + D\left(\mathbf{x} \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0}\right) + D\left(\mathbf{y} \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0}\right) \\ &= D(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0} + D(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0} \end{aligned}$$

Si tomamos $r = D(\mathbf{x})$ y $s = D(\mathbf{y})$, entonces $D(\phi) = r \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z_0} + s \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{z_0}$. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0}$ y $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}$ generan a $T_{z_0}(V)$.

Funciones con valores complejos de clase \mathcal{C}^∞

Sea $V \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Sean $u, v : V \rightarrow \mathbb{R}$ las partes real e imaginaria de f . Decimos que f es de clase \mathcal{C}^∞ en un punto $z_0 \in V$ si las funciones u y v tienen derivadas continuas con respecto a x y y de todos los órdenes en z_0 (es decir, $u, v \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(V)$), y si esto pasa para todo punto en V , diremos que f es de clase \mathcal{C}^∞ en V . Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(V)$ a la colección de funciones de clase \mathcal{C}^∞ en V , el cual es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

Una transformación \mathbb{C} -lineal $D : \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface la regla de Leibnitz

$$D(f.g)(z_0) = D(f).g(z_0) + f(z_0)D(g)$$

es llamada una derivación en el punto $z_0 \in V$.

Las derivaciones en un punto z_0 forman un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con la suma dada por $(D + \hat{D})(f)(z_0) = D(f)(z_0) + \hat{D}(f)(z_0)$ y la multiplicación por escalares definida como $(\lambda D(f))(z_0) = \lambda.D(f)(z_0)$. Este espacio se denota como $T_{z_0}(V)$ y es llamado el espacio tangente a V en z_0 .

Las funciones

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{z_0}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{z_0} : \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathbb{C}$$

definidas en cada $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{z_0}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{z_0}$$

son transformaciones lineales que satisfacen la regla de Leibnitz, por lo tanto son elementos del espacio $T_{z_0}(V)$.

Proposición E.2. $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{z_0}$ y $\left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{z_0}$ son una base para $T_{z_0}(V)$.

Demostración. Sea D una derivación en el punto z_0 y $f = u + iv$ una función de clase \mathcal{C}^∞ en V . Usando la afirmación E.1 y las propiedades que cumple D por ser una derivación obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} D(f) &= D(u + iv) = D(u) + iD(v) \\ &= \left(D(\mathbf{x}) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z_0} + D(\mathbf{y}) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{z_0} \right) + i \left(D(\mathbf{x}) \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{z_0} + D(\mathbf{y}) \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{z_0} \right) \\ &= D(\mathbf{x}) \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z_0} + i \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{z_0} \right) + D(\mathbf{y}) \left(\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{z_0} + i \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{z_0} \right) \\ &= D(\mathbf{x}) \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z_0} \right) + D(\mathbf{y}) \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z_0} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0}$ y $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}$ generan a $T_{z_0}(V)$. Demostremos ahora que son linealmente independientes. Supongamos que existen escalares λ y μ en \mathbb{C} tales que

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0}\right) + \mu\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}\right) = 0$$

Observemos que la función \mathbf{x} dada por $\mathbf{x}(x + iy) = x$ puede ser vista como una función de V en \mathbb{C} y cumple con ser de clase $\mathcal{C}^\infty(V)$. Para esta función se tiene que su parte real es $u(x + iy) = x$ y su parte imaginaria es $v(x + iy) = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\Big|_{z_0}\right) + \mu\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y}\Big|_{z_0}\right) &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{z_0} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{z_0} \\ &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{z_0} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \end{aligned}$$

Análogamente vemos que $\mu = 0$ usando la función $\mathbf{y}(x + iy) = y$. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{z_0}$ y $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{z_0}$ son linealmente independientes. \square

El espacio tangente a V es la unión de los espacios tangentes a V en cada punto y se denota por $T(V)$, es decir

$$T(V) = \bigcup_{z \in V} T_z(V).$$

1-formas diferenciales

Una 1-forma diferencial en V es una transformación

$$\omega : \bigcup_{z \in V} T_z(V) \rightarrow \mathbb{C}$$

que es lineal en cada espacio tangente $T_z(V)$. El conjunto de 1-formas diferenciales en V , con la suma definida como $(\omega + \eta)(D) = \omega(D) + \eta(D)$ y la multiplicación por escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ dada por $(\lambda\omega)(D) = \lambda \omega(D)$, forma un espacio vectorial sobre \mathbb{C} que se denota como $\Omega^1(V, \mathbb{C})$.

Ejemplo E.3. Sea $f_o \in \mathcal{C}^\infty(V)$ una función fija y consideremos la transformación $df_o : T_z(V) \rightarrow \mathbb{C}$ definida en cada elemento $D \in T_z(V)$ como

$$df_o(D) = D(f_o)$$

Observemos que esta transformación es lineal, ya que si $\lambda \in \mathbb{C}$ y D, \tilde{D} son dos derivaciones en el punto $z \in V$ (elementos de $T_z(V)$), entonces usando el hecho de que las derivaciones en z son un espacio vectorial sobre \mathbb{C} obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} df_o(\lambda D + \tilde{D}) &= (\lambda D + \tilde{D})(f_o) \\ &= (\lambda D)(f_o) + \tilde{D}(f_o) \\ &= \lambda D(f_o) + \tilde{D}(f_o) \\ &= \lambda df_o(D) + df_o(\tilde{D}) \end{aligned}$$

Sabemos que el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x}|_z, \frac{\partial}{\partial y}|_z\} \subset T_z(V)$ es una base para $T_z(V)$, por lo que toda derivación $D \in T_z(V)$ se expresa como una combinación lineal de estos elementos, a saber

$$D = D(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right) \quad (\text{E.1})$$

Aplicando el operador df_o a D obtenemos que

$$\begin{aligned} df_o(D) &= df_o\left[D(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right)\right] \\ &= D(\mathbf{x})\,df_o\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\,df_o\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right) \\ &= D(\mathbf{x})\left(\frac{\partial f_o}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\left(\frac{\partial f_o}{\partial y}\Big|_z\right) \end{aligned}$$

En el caso particular cuando $f_o = \mathbf{x}$, la transformación $df_o = d\mathbf{x}$ actúa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(D) &= d\mathbf{x}\left[D(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right)\right] \\ &= D(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right) \\ &= D(\mathbf{x})\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\Big|_z\right) + D(\mathbf{y})\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y}\Big|_z\right) \\ &= D(\mathbf{x})\,1 = D(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

y análogamente $d\mathbf{y}(D) = D(\mathbf{y})$. Entonces las diferenciales $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ aplicadas a una derivación $D \in T_z(V)$ nos dan los coeficientes $D(\mathbf{x})$ y $D(\mathbf{y})$ respectivamente, de la combinación lineal (E.1).

Analicemos ahora el efecto que tienen las 1-formas diferenciales $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ en los vectores de la base de $T_z(V)$.

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) &:= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\Big|_z = 1 & d\mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right) &:= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y}\Big|_z = 0 \\ d\mathbf{y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) &:= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}\Big|_z = 0 & d\mathbf{y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_z\right) &:= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y}\Big|_z = 1 \end{aligned}$$

Proposición E.4. *Las 1-formas diferenciales $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ son un conjunto linealmente independiente de $\Omega(V, \mathbb{C})$.*

Demostración. Supongamos que existen λ y μ en \mathbb{C} tales que $\lambda\,d\mathbf{x} + \mu\,d\mathbf{y} \equiv 0$. Consideremos la derivación $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z \in T_z(V)$. Notemos que

$$\begin{aligned} (\lambda\,d\mathbf{x} + \mu\,d\mathbf{y})\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) &= \lambda\,d\mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) + \mu\,d\mathbf{y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_z\right) \\ &=: \lambda\,\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\Big|_z + \mu\,\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}\Big|_z = \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

y análogamente demostramos que $\mu = 0$. Por lo tanto $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ son linealmente independientes. \square

Proposición E.5. Sea $\omega : \cup_{z \in V} T_z(V) \rightarrow \mathbb{C}$ una 1-forma diferencial en V . Entonces en cada punto $z \in V$, ω se expresa como combinación lineal de las 1-formas $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$.

Demostración. Queremos demostrar que para cada derivación $D \in T_z(V)$, existen números α y β en \mathbb{C} tales que $\omega_z(D) = \alpha d\mathbf{x}(D) + \beta d\mathbf{y}(D)$. Sabemos que

$$D = D(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) + D(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right)$$

Como ω_z es lineal, $d\mathbf{x}(D) = D(\mathbf{x})$, y $d\mathbf{y}(D) = D(\mathbf{y})$, entonces

$$\begin{aligned} \omega_z(D) &= \omega_z \left[D(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) + D(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right) \right] \\ &= \omega_z \left[D(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) \right] + \omega_z \left[D(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right) \right] \\ &= D(\mathbf{x}) \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) + D(\mathbf{y}) \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right) \\ &= d\mathbf{x}(D) \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) + d\mathbf{y}(D) \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right) \end{aligned}$$

Definamos

$$\alpha = \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) \quad \text{y} \quad \beta = \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right)$$

De este modo tenemos que

$$\omega_z(D) = \alpha d\mathbf{x}(D) + \beta d\mathbf{y}(D) \tag{E.3}$$

Por lo tanto $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ generan a $\Omega^1(V, \mathbb{C})$. \square

Las dos proposiciones anteriores muestran que $\{d\mathbf{x}, d\mathbf{y}\}$ es una base de $\Omega(V, \mathbb{C})$. Sea $\omega \in \Omega(V, \mathbb{C})$ una 1-forma diferencial en V . Consideremos las funciones $\alpha, \beta : V \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\alpha(z) = \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_z \right) \quad \text{y} \quad \beta(z) = \omega_z \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right)$$

Entonces podemos expresar a ω en el punto z como

$$\begin{aligned} \omega_z &= \alpha(z) d\mathbf{x} + \beta(z) d\mathbf{y} \\ &= \alpha d\mathbf{x} + \beta d\mathbf{y} \end{aligned} \tag{E.4}$$

Ahora vamos a buscar una expresión de ω_z en términos de las diferenciales de las funciones $z \mapsto z$ y $z \mapsto \bar{z}$, es decir, en términos de dz y $d\bar{z}$. Primero veamos como expresar a dz y $d\bar{z}$

como combinación lineal de $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$. Sabemos que cualquier 1-forma en V se escribe en un punto $p \in V$ como $\eta_p = \eta_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)d\mathbf{x} + \eta_p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)d\mathbf{y}$, entonces

$$\begin{aligned} dz &= dz\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + dz\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial x}{\partial y} + i\frac{\partial y}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} = d\mathbf{x} + i d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} \text{y } d\bar{z} &= d\bar{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + d\bar{z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} = \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial -y}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial x}{\partial y} + i\frac{\partial -y}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} = d\mathbf{x} - i d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

de (E.5) y (E.6) obtenemos lo siguiente:

$$i d\mathbf{y} = dz - d\mathbf{x} = d\mathbf{x} - d\bar{z} \Rightarrow 2 d\mathbf{x} = dz + d\bar{z} \Rightarrow d\mathbf{x} = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \quad (\text{E.7})$$

$$d\mathbf{x} = dz - i d\mathbf{y} = d\bar{z} + i d\mathbf{y} \Rightarrow 2 i d\mathbf{y} = dz - d\bar{z} \Rightarrow d\mathbf{y} = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \quad (\text{E.8})$$

Sustituyendo lo que obtuvimos en (E.7) y (E.8) en la ecuación (E.4)

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \beta \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \left(\frac{\alpha - i\beta}{2}\right)dz + \left(\frac{\alpha + i\beta}{2}\right)d\bar{z} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Definamos las funciones $f, g : V \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$f(z) = \frac{\alpha(z) - i\beta(z)}{2} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{\alpha(z) + i\beta(z)}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} \omega_z &= f(z) dz + g(z) d\bar{z} \\ &= f dz + g d\bar{z} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Ejemplo E.6. La diferencial de una función.

Consideremos una función $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ definida en un abierto de \mathbb{C} . Sabemos que el operador $d\Phi : T_p(V) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $d\Phi(D) = D(\Phi)$ es una 1-forma diferencial en V y la podemos expresar como combinación lineal de las 1-formas diferenciales $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} d\Phi_p &= \alpha(p) d\mathbf{x} + \beta(p) d\mathbf{y} = d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_p\right)d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_p\right)d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Entonces $f(p) = \frac{1}{2}(\alpha(p) - i\beta(p))$ y $g(p) = \frac{1}{2}(\alpha(p) + i\beta(p))$, es decir

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_p - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_p \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_p + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_p \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}$$

Por lo tanto

$$d\Phi_p = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_p \right) dz + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \Big|_p \right) d\bar{z} \quad (\text{E.11})$$

Si Φ es holomorfa, entonces $\partial\Phi/\partial\bar{z} = 0$ (pues esto equivale a que cumpla las ecuaciones de Cauchy-Riemann) así que en este caso se tiene que

$$d\Phi_p = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_p \right) dz$$

Definición E.7. Una 1-forma diferencial en V es *meromorfa* si se expresa en cada punto $z \in V$ como $\omega_p = f(p) dz$ con $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en z .

Un ejemplo de forma diferencial meromorfa (de hecho, holomorfa) es la diferencial de una función holomorfa (ver el ejemplo anterior).

La derivada exterior

Sea $\omega = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ una 1-forma en un abierto V de \mathbb{C} . Definimos

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \quad \text{y} \quad d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}$$

Notemos que si ω es una 1-forma meromorfa, entonces se escribe como $\omega = f dz$, por lo que $\partial\omega/\partial z = 0$. Si además ω es holomorfa, es decir, f es holomorfa, entonces $\partial f/\partial\bar{z} = 0$ y por lo tanto $\partial\omega/\partial\bar{z} = 0$. Concluimos entonces que $d\omega = 0$ para cualquier 1-forma holomorfa.

Bibliografía

- [1] B. V. Shabat, Introduction to Complex Analysis, Part II, Functions of Several Variables, American Mathematical Society.
- [2] Frank Loray, Sur les Théoremes I et II de Painlevé. James Eells, Etienne Ghys, Mikhail Lyubich, Jacob Palis, José Seade. Geometry and Dynamics, International conference in honour of the 60th Anniversary of Alberto Verjovsky, 2005, Cuernavaca, México. AMS, pp. 165-190, 2005, Contemporary Mathematics 389. < hal – 00001191 >.
- [3] Gareth A. Jones, David Singerman, Complex functions, Cambridge University Press, 1987.
- [4] George Springer, Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley, 1957.
- [5] Lars V. Ahlfors, Leo Sario, Riemann Surfaces, Princeton University Press, 1960.
- [6] Rick Miranda, Algebraic Curves And Riemann Surfaces, American Mathematical Society.
- [7] Wilhelm Schlag, A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces, American Mathematical Society.
- [8] William S. Massey, A Basic Course in Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1991.