



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PENDIENTES TOROIDALES SEGÚN EL GÉNERO DEL NUDO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. EN C. ARACELI GUZMÁN TRISTÁN

TUTOR PRINCIPAL
DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

COMITÉ TUTOR
DRA. LORENA ARMAS SANABRIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

DR. MAX NEUMANN COTO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL DE 2017.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco a la UNAM por abrirme sus puertas y permitirme realizar este trabajo. A mi Tutor, el Dr. Mario Eudave por su amistad, paciencia, entrega, disponibilidad y confianza. Quiero agradecer también a los miembros de mi Comité Tutor y a mis Sinodales, pues además de su amistad, dieron seguimiento a mi avance en los estudios y por los valiosos comentarios en la revisión de la tesis: Dra. Lorena Armas, Dr. Max Neumann, Dra. Fabiola Manjarrez, Dr. Enrique Ramírez Losada y Dr. Francisco González Acuña.

Gracias a quienes con amor endulzan mis días, mi Memo y mi Santi. A mi mamá, hermanas y sobrinas que siempre me reciben con los brazos abiertos y dan ánimo a mis pasos. A mis amigos ... por ser amigos.

Finalmente, agradezco al Conacyt por una beca durante mis estudios de doctorado y al proyecto PAPIIT-UNAM IN102814 por una beca de obtención del grado de doctorado.

CON MUCHO CARIÑO, PARA MI FAMILIA.

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares.	7
2.1. Nudos y 3-variedades.	7
2.2. Geometría en variedades.	11
2.3. Cirugía de Dehn.	12
2.4. Gráficas de Intersección	14
3. Caso general.	19
3.1. Pendiente semi-entera.	19
3.2. Pendiente entera.	25
3.2.1. $t \geq 4$	26
3.2.2. $t = 2$	27
4. Género 3.	47
4.1. El caso $t \geq 6$	48
4.2. El caso $t = 4$	48
4.3. El caso $t = 2$	65
4.3.1. Si existe un cuadrado en G_S rodeado por 3 bígonos . . .	71
4.3.2. Si los cuadrados en G_S están rodeados por a lo más 2 bígonos.	74

Capítulo 1

Introducción

Una forma de obtener 3-variedades cerradas a partir de un nudo en S^3 , es la llamada *cirugía de Dehn*, que consiste en remover una vecindad regular $N(k)$ del nudo k y rellenarlo con un toro sólido pegado de manera distinta.

Las diferentes formas de hacer cirugía en el nudo k , están parametrizadas por *pendientes*, clases de isotopía de curvas esenciales cerradas en $\partial N(k)$ y las cuales es posible identificar como valores en $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ (ver [30]).

Se sabe que cualquier 3-variedad cerrada y orientable se puede obtener por medio de cirugía de Dehn en algún enlace en S^3 ([39]) y ([21]).

Uno de los resultados recientes más importantes en la teoría de 3-variedades, conjeturado por Thurston y probado por Perelman asegura que toda 3-variedad cerrada y orientable está compuesta de piezas que admiten una de 8 posibles geometrías. De estas geometrías, la más importante es la hiperbólica.

Una 3-variedad se dice que es *hiperbólica* si admite una métrica Riemanniana de curvatura constante -1 . Un nudo k en S^3 es hiperbólico si su complemento, $S^3 \setminus k$ es una 3-variedad hiperbólica.

El teorema de cirugía hiperbólica de Dehn, probado por Thurston ([36]), asegura que todas las cirugías de Dehn en un nudo hiperbólico, salvo un número finito, producen variedades hiperbólicas. Además si una 3-variedad cerrada y orientable no es hiperbólica, entonces cumple con una de las siguientes condiciones: (i) contiene una esfera esencial, (ii) es un espacio fibrado de Seifert ó (iii) contiene un toro incompresible. En particular, si k es un nudo hiperbólico, entonces solamente un número finito de cirugías en k producen una 3-variedad que contiene un toro incompresible (ver [6] ó [37]).

Trataremos el caso en que la cirugía de Dehn en un nudo hiperbólico resulta no ser una 3-variedad hiperbólica debido a que contiene un toro incompresible. Tales cirugías y sus pendientes se llaman *toroidales* y han sido de gran interés.

Gordon y Luecke [7] probaron que cualquier pendiente toroidal $r = p/q$ es entera ó semi-entera, esto es $|q| = 1$ ó 2 . Por otro lado, Eudave-Muñoz [3] construyó una familia infinita de nudos hiperbólicos que tienen cirugías toroidales semi-enteras. Sorpresivamente, Gordon y Luecke, probaron que si k admite cirugías toroidales semi-enteras, entonces k es alguno de los nudos de Eudave-Muñoz [9], lo que caracteriza las cirugías toroidales semi-enteras. Sin embargo parece difícil determinar completamente las cirugías toroidales enteras.

Teragaito obtuvo varios resultados concernientes a cirugías toroidales enteras. Mostró que cada entero es una pendiente toroidal de cirugía para algún nudo hiperbólico [33]. También probó que cualesquiera dos pendientes enteras toroidales r y s para un nudo hiperbólico k satisfacen que $|r - s| \leq 4$ salvo cuando k es el nudo figura ocho [35] que tiene pendientes toroidales ± 4 .

Tratando de acotar el valor de una pendiente toroidal, Teragaito propuso la siguiente conjetura en [34], la cual la relaciona con el género g del nudo k (definido como el mínimo de los géneros de las superficies orientables en S^3 cuya frontera es k).

Conjetura (Teragaito, 2003). Si un nudo hiperbólico k en S^3 tiene una pendiente toroidal r , entonces $|r| \leq 4g(k)$.

Teragaito probó que su conjetura es cierta para nudos de género uno y para nudos alternantes ([34]). Por otro lado S. Lee [19] probó que la conjetura es cierta también para nudos de género dos.

El presente trabajo, representa un acercamiento a la conjetura de Teragaito, probaremos los siguientes:

Teorema 1. *Sea $k \subset S^3$ un nudo hiperbólico de género g y r una pendiente toroidal para k . Sea t el mínimo número de intersecciones entre el corazón del toro de cirugía y un toro incompresible. Entonces:*

- *Si r es semi-entera, entonces $|r| \leq 4g - 3/2$.*

- Si r es entera y $t \geq 4$, entonces $|r| \leq 6g - 3$.
- Si r es entera y $t = 2$, entonces $|r| \leq 4g + 8$.

Teorema 2. Sea $k \subset S^3$ un nudo hiperbólico de género 3 y r una pendiente toroidal para k , entonces $|r| \leq 13$.

En el capítulo 2, comenzamos con el desarrollo de los conceptos y resultados básicos sobre 3-variedades, incluyendo la descripción de una útil herramienta en la cual se basan nuestras demostraciones, llamada *gráficas de intersección*. En el tercer capítulo se da la prueba del Teorema 1, mientras que en el capítulo 4, se aborda el caso particular de los nudos de género 3 y se demuestra el Teorema 2.

Capítulo 2

Preliminares.

2.1. Nudos y 3-variedades.

El estudio y clasificación de las variedades tridimensionales constituye uno de los campos más interesantes de las matemáticas.

Los nudos y enlaces son objetos unidimensionales que nos permiten tratar las 3-variedades aunque su estudio, constituye una materia interesante por sí sola. Un *nudo* $k \subset S^3$ es un subespacio homeomorfo a S^1 . Un *enlace* de n componentes $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ es la unión disjunta de un número finito de nudos. Dos enlaces $L, L' \subset S^3$ son *equivalentes* si existe un homeomorfismo del espacio ambiente $h: S^3 \rightarrow S^3$ tal que $h(L) = L'$.

Un resultado importante que emplearemos es que todo nudo en S^3 es frontera de una superficie compacta, conexa y orientable contenida en S^3 . Este teorema fue establecido por Seifert en 1934 ([31]). Dichas superficies se llaman *superficies de Seifert* del nudo. Definimos entonces el *género del nudo* como el género mínimo de las superficies de Seifert para el nudo.

Un *toro* T^2 es un espacio homeomorfo a $S^1 \times S^1$, un elemento importante en nuestro estudio. El grupo fundamental del toro es $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y está generado por las clases de homotopía de dos curvas simples cerradas l y m que se tocan transversalmente en un punto. La clase de homotopía de cualquier curva simple cerrada en $\pi_1(T^2)$ se puede escribir entonces como $p[m] + q[l]$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos.

Una *3-variedad* M es un espacio métrico separable tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^3 (puntos del interior) ó a

$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$ (puntos de la frontera ∂M).

Entre los ejemplos de 3-variedades, destacamos los siguientes que aparecerán a lo largo de nuestro trabajo:

- \mathbb{R}^3 .
- La 3-bola $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$.
- La 3-esfera $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$, que se puede pensar como la compactación de \mathbb{R}^3 con un punto (infinito) ó también como la unión de dos 3-bolas pegadas a lo largo de sus fronteras.
- Una 3-variedad homeomorfa al producto $S^1 \times D^2$ se llama *toro sólido*. Siendo V un toro sólido, definimos un *sistema meridiano - longitud* (m, l) en V como la imagen de la pareja $(S^1 \times x, y \times \partial D^2)$ para $x \in \partial D^2, y \in S^1$ bajo un homeomorfismo $S^1 \times D^2 \rightarrow V$. Dado un sistema de meridiano-longitud (m, l) en V y una curva esencial simple cerrada c en ∂V , existe una pareja de enteros primos relativos p, q tales que $[c] = p[l] + q[m]$ en $H_1(\partial V)$.
- El *cubo con asas de género n* , es una 3-variedad homeomorfa a $S \times I$, donde S es un disco con n agujeros, $n \geq 0$.
- $S^2 \times S^1$.
- El *exterior de un nudo $k \subset S^3$* , $E(k) = S^3 \setminus N(k)$, donde $N(k)$ denota una vecindad regular abierta del nudo.
- Los *espacios lente $L(p, q)$* . Tomando dos toros sólidos V_1, V_2 y un homeomorfismo $h: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$, construimos una 3-variedad cerrada, llamada *espacio lente*, mediante la identificación de cada punto en ∂V_1 con su imagen en ∂V_2 . Se puede probar que para construir un espacio lente, no es necesario conocer toda la imagen del homeomorfismo h , basta con conocer la imagen de un meridiano de V_1 , la cual es una curva cerrada simple en ∂V_2 y los enteros p, q (primos relativos) representan su clase de homotopía con respecto a una base de $H_1(\partial V_2)$.
- Un *toro sólido fibrado* se obtiene del cilindro $D^2 \times I$ al rotarlo en un ángulo de $2\pi(p/q)$ e identificar las tapas $D^2 \times \{0\}$ y $D^2 \times \{1\}$. Las fibras de un toro sólido fibrado son: el corazón $\{\bar{0}\} \times I$ y los segmentos de la forma $\{\bar{x}\} \times I$ que al pegarse forman curvas cerradas simples que dan p vueltas en forma de meridiano y q vueltas en forma de longitud.

- Un *espacio fibrado de Seifert* es una 3-variedad con una descomposición en curvas simples cerradas disjuntas (llamadas *fibras*) tal que cada fibra tiene una vecindad tubular homeomorfa a un toro sólido fibrado.
- Una *esfera homológica* M es una 3-variedad que tiene los mismos grupos de homología que la 3-esfera, es decir $H_0(M) \cong H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_n(M) \cong 0$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

Distinguiremos dos curvas especiales en la frontera de los toros sólidos. Si V es un toro sólido encajado en S^3 , existe un único par de generadores longitud y meridiano l, m de $\pi_1(\partial V)$ de forma que l sea homológicamente nula en $S^3 \setminus V$ y m interseque transversalmente una sola vez a l . Llamaremos a este par (l, m) *base preferente* de V o ∂V . Cuando el toro sólido está encajado en S^3 de manera no canónica (por ejemplo la vecindad de un nudo no trivial), la longitud preferente no es la estándar. Para construir esta base, tomamos un meridiano estándar del toro sólido, y la longitud de modo que tenga número de enlace cero con el *corazón* del toro sólido (es decir $S^1 \times \{0\}$). Aprovechamos para introducir las nociones de *nudo toroidal* y de *nudo satélite*. Un nudo toroidal es aquel nudo que vive en un toro canónico y que representa una curva no trivial en dicho toro, mientras que un nudo es satélite si vive en el interior de un toro sólido que a su vez está anudado y que no está en el interior de una 3 bola dentro del toro sólido.

Decimos que una 3-variedad es *cerrada* si es compacta y no tiene frontera.

Una superficie es *no-orientable* si contiene una banda de Möbius. Diremos también que una 3-variedad es *no-orientable* si contiene una copia de $F \times I$, donde F es una banda de Möbius e I denota un intervalo.

Dadas dos 3-variedades M_1 y M_2 podemos construir una nueva 3-variedad, llamada *suma conexa* $M = M_1 \sharp M_2$ de la siguiente manera: removemos el interior de una 3-bola en cada M_i ($i = 1, 2$); nos quedan dos 3-variedades cuya frontera es una esfera y pegamos entonces dichas 3-variedades por estas esferas.

Se dice que una 3-variedad M es *prima* si cada vez que podamos ver a M como suma conexa de dos 3-variedades, alguna de ellas es S^3 . Se sabe que cualquier 3-variedad orientable se puede expresar como suma conexa de 3-variedades primas (Kneser [18]) y que dicha factorización es única salvo difeomorfismo (Milnor [25]). Una descomposición análoga se tiene para los cubos con asas, es decir que cualquier 3-variedad cerrada se puede obtener

mediante la identificación de dos cubos con asas del mismo género por sus fronteras. Estas descomposiciones se denominan *Descomposiciones de Heegaard* y se siguen del hecho de que toda 3-variedad admite una triangulación.

Una 3-variedad se dice que es *irreducible* si cualquier esfera encajada en M es frontera de una 3-bola. También se dice que una 3-variedad es *reducible* si no es irreducible, es decir si contiene una esfera esencial (que no es frontera de una 3-bola). Note que una 3-variedad irreducible es prima. Inversamente, si M es una 3-variedad prima, entonces M es irreducible ó $M = S^2 \times S^1$. Esto significa que es lo mismo primo que irreducible, salvo el caso de $S^2 \times S^1$.

Sea M una 3-variedad y $S \subset M$ una superficie propiamente encajada, es decir, tal que $S \cap \partial M = \partial S$. Decimos que S es *compresible* en M si existe una curva γ , esencial en S y un disco D en M tal $D \cap S = \partial D = \gamma$. Si no existe tal curva γ entonces decimos que S es *incompresible*. De manera equivalente, por el Teorema del Lazo, si S es de dos lados, tenemos que $S \subset M$ es incompresible si el morfismo inducido $i_*: \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ es inyectivo.

Una superficie S propiamente encajada en una 3-variedad M es *esencial* si S es incompresible, no paralela a ∂M y no es una esfera; ó S es una esfera que no acota una 3-bola en M . Las superficies esenciales juegan un papel muy importante en la teoría de 3-variedades, por ejemplo en el teorema de Kneser-Milnor, descrito anteriormente, el cual implica el corte de la variedad a lo largo de esferas esenciales para obtener piezas canónicas. Un resultado similar se tiene para los toros esenciales en la llamada *Descomposición de Jaco-Shalen y Johannson* ([16] y [17]). Con esta misma idea, se tiene el resultado que se describe a continuación.

Decimos que una 3-variedad M es *Haken* si es irreducible y contiene una superficie incompresible. Haken probó que todas las variedades Haken se pueden descomponer cortando por superficies incompresibles hasta llegar a una colección de cubos con asas ([13]). Esto lo utilizó Waldhausen para probar que las variedades Haken cerradas están determinadas por su grupo fundamental, es decir, si sus grupos fundamentales son isomorfos, entonces las variedades son homeomorfas ([38]).

2.2. Geometría en variedades.

En los años 70 el matemático William Thurston ([36]) introdujo la utilización de métodos geométricos en dimensión 3 en analogía con la situación existente en superficies. La idea de geometrización se expresa en la siguiente definición.

Sea X una variedad Riemanniana orientada y G su grupo de isometrías que conservan la orientación. Una variedad M^n se dice que *admite una (X, G) -geometría*, o que es una *(X, G) -variedad* si tiene un atlas con cartas en X , donde los cambios de cartas son restricciones de elementos de G .

La situación en superficies es que cada superficie cerrada admite una (X, G) -geometría donde X es S^2, \mathbb{R}^2 ó \mathbb{H}^2 . Estamos pensando a S^2 y \mathbb{R}^2 equipados con sus métricas usuales de curvatura constante $+1$ y 0 , respectivamente y denotamos por \mathbb{H}^2 al conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con la métrica de curvatura constante -1 dada por $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$, el cual se llama *plano hiperbólico*. Se tiene entonces que cada superficie cerrada soporta una estructura Riemanniana de curvatura constante positiva, cero ó negativa según sea su característica de Euler (positiva, cero ó negativa).

En dimensión 3, las variedades simplemente conexas de curvatura constante: la esfera S^3 , el espacio Euclideo \mathbb{R}^3 y el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , no son suficientes para dotar de una estructura geométrica a cada 3-variedad. Por ejemplo $S^2 \times S^1$ no admite una estructura geométrica de curvatura constante. Thurston probó que son necesarias ocho geometrías para dotar a todas las 3-variedades cerradas y orientables de una estructura geométrica. Las variedades modeladas en 7 de esas 8 geometrías están clasificadas gracias al Teorema de Geometrización probado por Perelman ([26], [27], [28]):

Teorema de Geometrización. Sea M una 3-variedad irreducible con frontera vacía ó toroidal. Entonces existe una colección disjunta de toros incompresibles T_1, T_2, \dots, T_k tal que cada componente de M al cortar por $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$ es hiperbólica ó un espacio fibrado de Seifert. Además cualquiera tal colección con un número mínimo de componentes es única salvo isotopía.

Al cortar una 3-variedad M por esferas y toros incompresibles, las piezas resultantes son hiperbólicas o Seifert fibradas. De entre las piezas que son espacios fibrados de Seifert, las que tienen grupo fundamental finito son Esféricas, las que tienen grupo fundamental abeliano infinito son Euclidia-

nas y las que tienen grupo fundamental infinito no-abeliano no admiten una métrica de curvatura constante, pero tienen una de 5 posibles geometrías.

A pesar de que el punto de vista geométrico es muy bonito, en la práctica estas geometrías se estudian muy poco pues finalmente corresponden a espacios fibrados de Seifert los cuales son bien entendidos. Las únicas 3-variedades geométricas que no han sido bien entendidas son las 3-variedades hiperbólicas.

Por otro lado, en contraste con las superficies, es difícil probar directamente que una 3-variedad es hiperbólica. Históricamente el primer ejemplo de una 3-variedad hiperbólica se dio en 1933 por Seifert y Weber ([32]). Luego en 1974 Riley probó que el nudo figura 8 es hiperbólico ([29]). Estos ejemplos y sus cubiertas finitas eran los únicos ejemplos conocidos de 3-variedades hiperbólicas hasta mediados de los 70's.

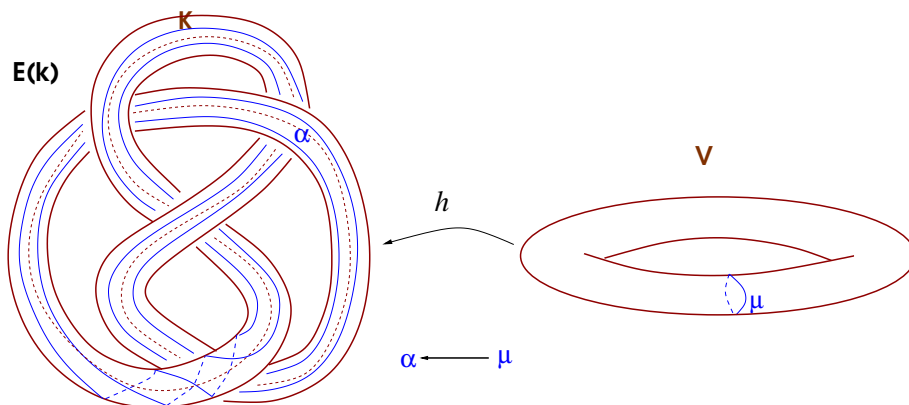
En este trabajo emplearemos la siguiente equivalencia para trabajar con las 3-variedades hiperbólicas: el Teorema de Geometrización implica que *una 3-variedad cerrada y orientable es hiperbólica si y sólo si, es irreducible, atoroidal y no fibrado de Seifert.*

2.3. Cirugía de Dehn.

Consiste en un método de construcción de 3-variedades a partir de un nudo o enlace. Fue introducido por el matemático alemán M. Dehn en 1910 [2], con el objeto de construir esferas homológicas. Aunque es posible definirla para cualquier enlace en una 3-variedad, daremos la descripción solamente para nudos en S^3 que es la que aplicaremos en este trabajo.

Sea k un nudo en S^3 . A la 3-variedad que se obtiene al identificar los conjuntos $E(k) = S^3 \setminus N(k)$ y un toro sólido V por sus fronteras se le llama *cirugía de Dehn* en el nudo k . La cirugía de Dehn es muy importante en el estudio de 3-variedades pues cualquier 3-variedad cerrada y orientable se puede obtener por medio de cirugía en algún enlace en S^3 . Este resultado fue obtenido en 1962 de manera independiente por Wallace ([39]) y Lickorish ([21]).

Podemos pegar un toro sólido $S^1 \times D^2$ a $E(k)$, pegando primero una vecindad de un disco meridiano $\{x\} \times D^2$ y luego pegando una 3-bola. Solamente importa cómo se pega el disco meridiano, pues el pegado de la 3-bola es inde-



pendiente del homeomorfismo. Para especificar cómo se pega este disco, basta con indicar la curva con la cual se identifica su frontera y en un toro esta curva es, salvo isotopía, p -veces un meridiano más q -veces una longitud para alguna pareja (p, q) de enteros primos relativos, la cual veremos convenientemente como una fracción p/q , siendo posiblemente $1/0$. Esta (p, q) -curva se llama *pendiente de la cirugía* y la identificamos con el número racional que determina. Denotaremos por $k(p/q)$ a la 3-variedad obtenida por medio de la cirugía de k con pendiente p/q .

Para estudiar los posibles resultados al hacer cirugía en un nudo, nos fijaremos en las superficies esenciales en la 3-variedad que surgen mediante este método. En particular, partiremos de un nudo hiperbólico y veremos qué pendientes de cirugía producen 3-variedades no hiperbólicas. Dichas pendientes se llaman *excepcionales* y han sido de gran interés. Thurston demostró que un nudo hiperbólico solamente tiene un número finito de pendientes excepcionales ([36]), también probó que el nudo figura 8 tiene 10 pendientes excepcionales. Finalmente Meyerhoff y Lackenby ([24]), logran probar que una 3-variedad hiperbólica con frontera un toro tiene a lo más 10 pendientes excepcionales.

Una forma de caracterizar las pendientes excepcionales es por medio de la *distancia* $\Delta(\alpha, \beta)$, es decir el número de intersecciones geométricas entre las pendientes α y β . Por ejemplo, Gordon y Luecke demostraron que si $k(\alpha)$ y $k(\beta)$ son 3-variedades reducibles (en cuyo caso las pendientes se llaman *reductoras*), entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 1$ ([12]). En particular $k(r)$ es reducible a lo más para 3 pendientes r . Sin embargo analizar cuando $k(\alpha)$ y $k(\beta)$ son fibrados de Seifert, es un problema difícil.

En este trabajo abordaremos el caso en que $k(r)$ contenga un toro incompresible, se dice entonces que la pendiente r es *toroidal*. Se han obtenido muchos resultados para pendientes toroidales. Gordon y Luecke ([7]) probaron que si p/q es una pendiente toroidal, entonces $|q| = 1$ ó $|q| = 2$ (en cuyo caso se dice que la pendiente es *semi-entera*). Por otro lado, M. Eudave Muñoz construyó una familia infinita de nudos hiperbólicos que admiten cirugías toroidales semi-enteras ([3]). Sorpresivamente, Gordon y Luecke probaron que un nudo que admite una cirugía toroidal semi-entera, es un nudo de M. Eudave ([9]). Sin embargo parece difícil determinar completamente las pendientes toroidales enteras. En este sentido, Teragaito demostró que cualquier entero es pendiente toroidal para algún nudo hiperbólico ([33]). También probó que si α y β son pendientes toroidales enteras para algún nudo hiperbólico, entonces $|\alpha - \beta| \leq 4$ ([35]), salvo el caso del nudo figura 8. Para más información sobre cirugías toroidales, véase [5].

Otra forma de acotar las pendientes excepcionales es mediante el género del nudo de cirugía. Si $0/1$ denota a la pendiente longitudinal y p/q es cualquier pendiente, entonces $\Delta(p/q, 0/1) = |p|$. En particular si r es entera, entonces $\Delta(r, 0/1) = |r|$, y si r es semi-entera $\Delta(r, 0/1) = 2|r|$. Matignon y Sayari demostraron ([23]) que si r es una pendiente reductora para el nudo hiperbólico k , que no es un nudo cable, entonces $|r| \leq 2g - 1$, donde g es el género de k . En cuanto a pendientes toroidales, Teragaito conjeturó que si r es una pendiente toroidal para el nudo hiperbólico k , entonces $|r| \leq 4g$. Teragaito probó que su conjetura es válida para nudos de género uno y para nudos alternantes ([34]). Por otro lado, S. Lee ([19]) demostró que la conjetura es válida también para nudos de género dos.

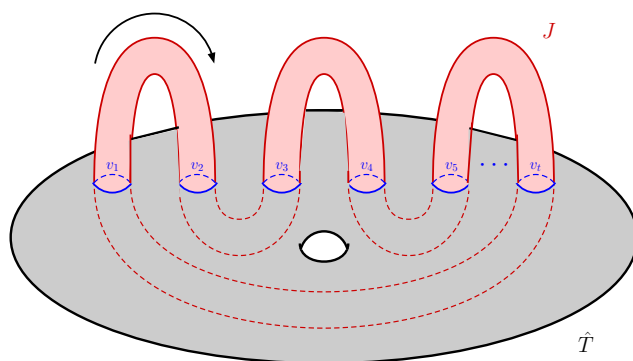
En este trabajo encontraremos una cota para pendientes toroidales que se acerca a la conjetura de Teragaito, tanto en el caso general como en el caso de nudos de género tres. Para la prueba, emplearemos principalmente ciertas gráficas que se obtienen de la intersección de una superficie de Seifert del nudo con el toro incompresible que surge en la cirugía. La descripción y algunas propiedades de estas gráficas, se da a continuación.

2.4. Gráficas de Intersección

Es una técnica muy utilizada en cirugía de Dehn, introducida por Litherland ([22]) en 1980 y desarrollada por muchos otros. Tiene como objetivo el comparar dos cirugías en un mismo nudo (ó 3-variedad) al fijarnos en las

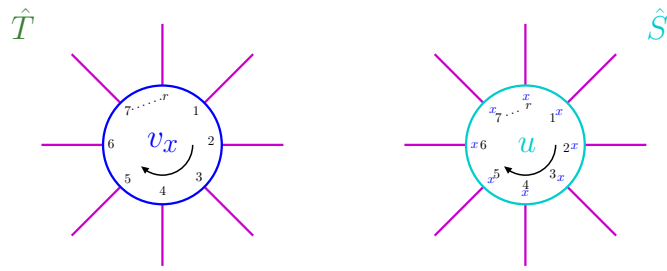
intersecciones que se dan entre las pendientes que las definen, así como en las superficies esenciales que surgen. Aunque es posible definirla para cualquier pareja de cirugías de Dehn en una 3-variedad, para los fines de este trabajo, solamente emplearemos la siguiente definición.

Sea k un nudo hiperbólico en S^3 y $r \subset \partial E(k)$ una pendiente toroidal entera. Supongamos que $k(r) = E(k) \cup_h J$, donde $h: \partial J \rightarrow \partial E(k)$ es un homeomorfismo que envía la frontera de un disco meridiano de J a r . De entre todos los toros incompresibles en $k(r)$, elegimos \hat{T} de forma que intersecte al toro sólido J en una unión mínima disjunta de discos meridianos v_1, v_2, \dots, v_t , numerados sucesivamente a lo largo de J . Hacemos $T = \hat{T} \cap E(k)$.

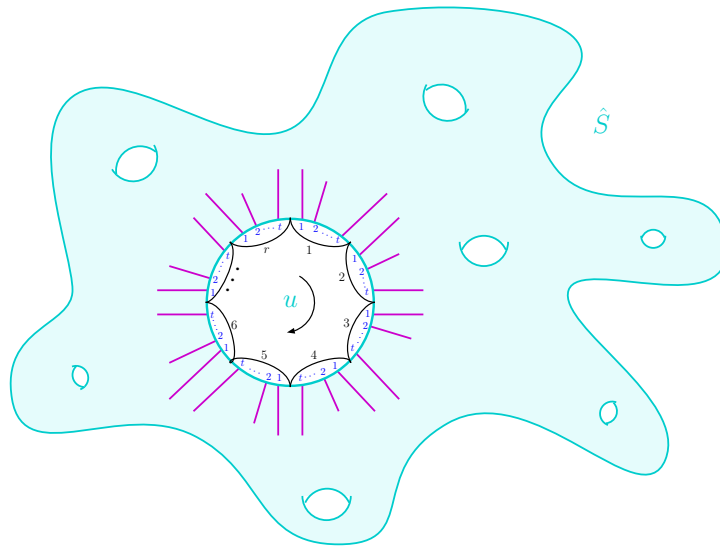


Ahora tomemos una superficie de Seifert S de género mínimo para k . Isotopando S , podemos asumir que $S \cap \partial E(k) = \partial S$. En $k(0/1)$, es posible tapar ∂S con un disco u para obtener una superficie cerrada \hat{S} . Luego isotopamos T de tal forma que $S \cap T$ consista de arcos y círculos esenciales tanto en S como en T .

Definimos las gráficas indexadas G_S en \hat{S} y G_T en \hat{T} como sigue. La gráfica G_S tiene un único vértice gordo u , mientras que la gráfica G_T tiene t vértices gordos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_t$. En cada gráfica G_S y G_T , las aristas son las arco-componentes de $S \cap T$. Para cada $x = 1, \dots, t$ existen r puntos en $\partial u \cap \partial v_x$ los cuales son extremos de aristas en $G_S(G_T)$. Etiquetamos esos r puntos con “ x ” en G_S .



Entonces las etiquetas $1, \dots, t$ aparecen en orden alrededor del vértice de G_S repetidamente r veces.

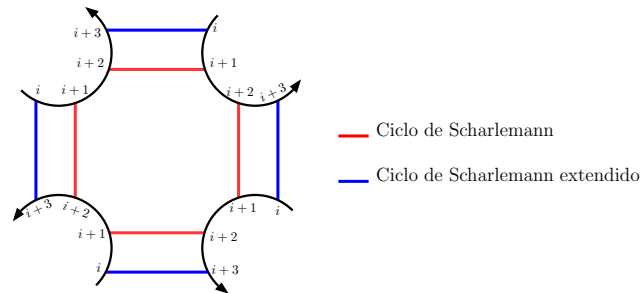


Notemos que el número de aristas en G_S (o G_T) es $|r|t/2$. Cada arista de G_S tiene dos etiquetas x y y en sus extremos y esta misma arista conecta v_x con v_y en G_T . Como S y T son superficies orientables, un arco componente de $S \cap T$ une puntos de intersección de ∂S con ∂T de paridades opuestas, por la regla de paridad [1].

Una arista de G_S se llama x -arista si tiene etiqueta x en uno de sus extremos y se llama (x, y) -arista si tiene etiqueta y en el otro extremo. Note que el número de x -aristas en G_S es $|r|$ para cada $x = 1, \dots, t$.

Si la subgráfica de G_S consistente de todas las x -aristas contiene discos cara, los llamamos x -caras. Si una x -cara es también un disco cara de G_S , entonces todas las aristas en la frontera de la x -cara tienen la misma pareja

de etiquetas $\{x, y\}$ en sus extremos, donde $|x - y| = 1$. El ciclo de aristas de tal x -cara se llama *Ciclo de Scharlemann*. Un ciclo de Scharlemann con solo dos aristas se llama *S-ciclo*. Un ciclo de G_S que rodea inmediatamente un ciclo de Scharlemann se llama *ciclo de Scharlemann extendido*.



La existencia de ciclos de Scharlemann y de otros tipos de caras, nos dará información topológica sobre $k(r)$. Por ejemplo, cuando las aristas de un ciclo de Scharlemann en G_S están dentro de un disco en T , entonces $k(r)$ tiene un espacio lente sumando.

Capítulo 3

Caso general.

Sea $k \subset S^3$ un nudo hiperbólico de género g y $r \subset \partial E(k)$ una pendiente toroidal. Sabemos por Gordon y Luecke [7] que r es entera o semi-entera. Dividiremos entonces en dos partes la prueba del Teorema 1.

3.1. Pendiente semi-entera.

Si la pendiente es semi-entera, k es uno de los nudos Eudave-Muñoz $K(l, m, n, p)$, los cuales son una familia de nudos parametrizados por 4 valores enteros l, m, n, p (donde al menos uno, p ó n es cero). Excluyendo los casos en que $l = \pm 1$, $(l, m) = \{(2, 1), (-2, -1)\}$, $(m, n) = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ y $(l, m, p) = \{(-2, -1, 0), (2, 2, 1)\}$, resultan ser nudos hiperbólicos [3].

Estos nudos tienen una sola pendiente toroidal semientera dada por

$$r = \begin{cases} l(2m-1)(1-lm) + n(2lm-1)^2 - 1/2, & \text{si } p = 0 \\ l(2m-1)(1-lm) + p(2lm-l-1)^2 - 1/2, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

La imagen especular del nudo $K(l, m, m, 0)$ es el nudo $K(-l, -m, 1-n, 0)$, y la imagen especular de $K(l, m, 0, p)$ es $K(-l, 1-m, 0, 1-p)$ [4]. Por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $l > 0$.

En la figura 3.1 se da una presentación de los nudos para el caso en que $l > 0$, $n \leq 0$, $p \leq 0$. Mientras que en la figura 3.2 damos una presentación de los nudos para el caso $l > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

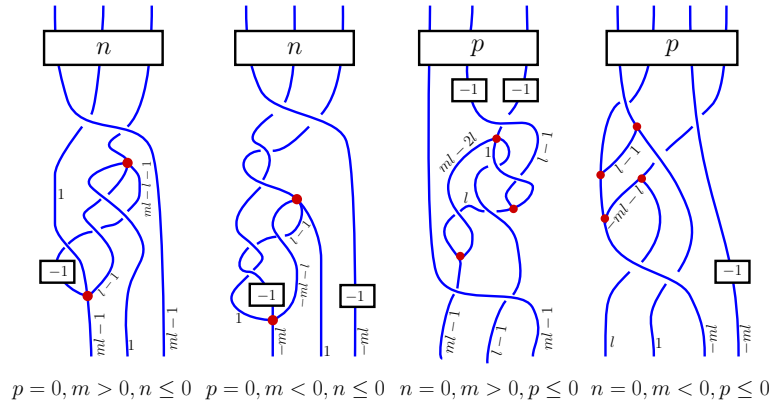


Figura 3.1: Nudos $K(l, m, n, p)$ con n ó $p \leq 0$

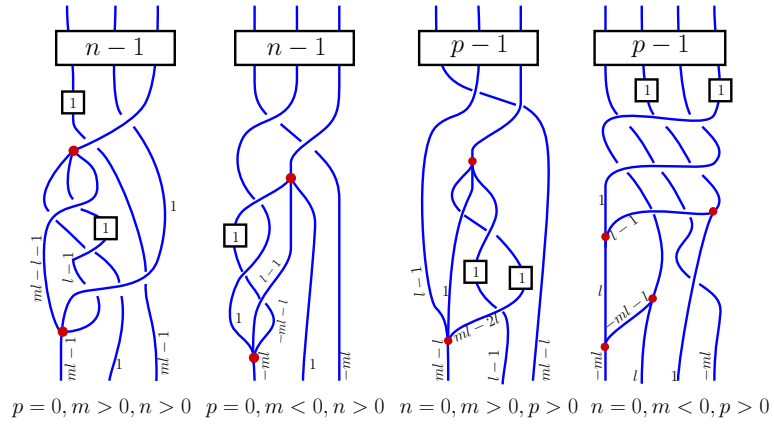


Figura 3.2: Nudos $K(l, m, n, p)$ con n ó $p > 0$

Se sigue de esta presentación que cada uno de estos nudos puede expresarse como una trenza positiva o negativa, lo que permite calcular su género. El género está dado por $(C - N + 1)/2$, donde C es la suma (negativa) de exponentes de la trenza positiva (negativa) y N es el índice de la trenza.

El valor explícito de N es:

$$N = \begin{cases} 2lm - 1, & \text{if } l > 0, m > 0 \text{ and } p = 0. \\ -2lm + 1, & \text{if } l > 0, m < 0 \text{ and } p = 0. \\ 2lm - l - 1, & \text{if } l > 0, m > 0 \text{ and } n = 0. \\ -2lm + l + 1, & \text{if } l > 0, m < 0 \text{ and } n = 0. \end{cases}$$

Se muestra también el valor de C en la siguiente tabla (los símbolos “ $>$ ”, “ $<$ ”, “ \geq ”, “ \leq ” se emplean para abreviar > 0 , < 0 , ≥ 0 , ≤ 0 , respectivamente). Véase [4] para una justificación de estos hechos.

l	m	n	p	Número de cruces C
$>$	$>$	\leq	0	$2l^2m^2 - l^2m - 3lm + 2l - n(2lm - 1)(2lm - 2)$
$>$	$>$	$>$	0	$2l^2m^2 + l^2m - 3lm - 2l + 2 + (n - 1)(2lm - 1)(2lm - 2)$
$>$	$<$	\leq	0	$2l^2m^2 - l^2m - lm - n(2lm)(2lm - 1)$
$>$	$<$	$>$	0	$2l^2m^2 + l^2m - lm + (n - 1)(2lm)(2lm - 1)$
$>$	$>$	0	\leq	$2l^2m^2 - l^2m - 3lm + l - p(2lm - l - 1)(2lm - l - 2)$
$>$	$>$	0	$>$	$2l^2m^2 - 3l^2m - 3lm + l^2 + 2l + 2 + (p - 1)(2lm - l - 1)(2lm - l - 2)$
$>$	$<$	0	\leq	$2l^2m^2 - l^2m - lm + l - p(2lm - l - 1)(2lm - l)$
$>$	$<$	0	$>$	$2l^2m^2 - 3l^2m - lm + l^2 + (p - 1)(2lm - l - 1)(2lm - l)$

De esta forma, solamente tenemos que comparar $|r|$ con 4 veces el género del nudo, al que denotamos por g y calculamos explícitamente en la siguiente tabla:

l	m	n	p	Género g
$>$	$>$	\leq	0	$1/2[2l^2m^2 - l^2m - 5lm + 2l + 2 - n(2lm - 1)(2lm - 2)]$
$>$	$>$	$>$	0	$1/2[2l^2m^2 + l^2m - 5lm - 2l + 4 + (n - 1)(2lm - 1)(2lm - 2)]$
$>$	$<$	\leq	0	$1/2[2l^2m^2 - l^2m + lm - n(2lm)(2lm - 1)]$
$>$	$<$	$>$	0	$1/2[2l^2m^2 + l^2m + lm + (n - 1)(2lm)(2lm - 1)]$
$>$	$>$	0	\leq	$1/2[2l^2m^2 - l^2m - 5lm + 2l + 2 - p(2lm - l - 1)(2lm - l - 2)]$
$>$	$>$	0	$>$	$1/2[2l^2m^2 - 3l^2m - 5lm + l^2 + 3l + 4 + (p - 1)(2lm - l - 1)(2lm - l - 2)]$
$>$	$<$	0	\leq	$1/2[2l^2m^2 - l^2m + lm - p(2lm - l - 1)(2lm - l)]$
$>$	$<$	0	$>$	$1/2[2l^2m^2 - 3l^2m + lm + l^2 - l + (p - 1)(2lm - l - 1)(2lm - l)]$

Veremos que $4g - |r| \geq 3/2$ en cada caso:

Caso 1. $l, m > 0, n \leq 0$ and $p = 0$.

Observemos que si $l, m > 0$ y $n \leq 0$, entonces $|r| = -r$.

Por tanto, $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + n(-4l^2m^2 + 8lm - 3) + 7/2$.

Supongamos que $n = 0$, entonces $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + 7/2$. Como $(m, n) \neq (1, 0)$ y $l \neq \pm 1$, entonces $l, m \geq 2$. Si $l = m = 2$, entonces $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + 7/2 = 2l(3l - 8) + 3l + 7/2 = 3/2$. Cuando $l \geq 3$ y $m \geq 2$, $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + 7/2 \geq lm + 3l + 7/2 \geq 37/2$. Cuando $m \geq 3$ y $l \geq 2$, $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + 7/2 \geq 2lm + 3l + 7/2 \geq 43/2$.

Supongamos ahora que $n \leq -1$ y $l \geq 2$. Entonces $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + n(-4l^2m^2 + 8lm - 3) + 7/2 \geq lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + 4l^2m^2 - 8lm + 3 + 7/2 = 6l^2m^2 - l^2m - 16lm + 3l + 13/2 = lm(l(6m - 1) - 16) + 3l + 13/2$. Si $m = 1$, entonces $l \geq 3$ (pues $(l, m) \neq (2, 1)$), así que

$4g - |r| \geq lm(l(6m-1) - 16) + 3l + 13/2 \geq -l + 3l + 13/2 \geq 25/2$. Si $m \geq 2$, entonces $4g - |r| \geq lm(l(6m-1) - 16) + 3l + 13/2 \geq 12l + 3l + 13/2 \geq 43/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Caso 2. $l, m, n > 0$ y $p = 0$.

Aquí $|r| = r$. Por tanto, $4g - |r| = 2l^2m^2 + l^2m - 8lm - 3l + 15/2 + (n-1)(4l^2m^2 - 8lm + 3)$. Observemos también que $lm \geq 3$ ya que $l \neq \pm 1$ y $(l, m) \neq (2, 1)$.

Si $n = 1$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 + l^2m - 8lm - 3l + 15/2 = 2(lm - 2)^2 + l(lm - 3) - 1/2 \geq 3/2$.

Supongamos ahora que $n \geq 2$ y $l \geq 2$. Entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 + l^2m - 8lm - 3l + 15/2 + (n-1)(4l^2m^2 - 8lm + 3) \geq 2l^2m^2 + l^2m - 8lm - 3l + 15/2 + 4l^2m^2 - 8lm + 3 = 6l^2m^2 + l^2m - 16lm - 3l + 21/2 = 2l^2m^2 + 4(lm - 2)^2 + l(lm - 3) - 11/2 \geq 18 + 4 - 11/2 = 33/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Caso 3. $l > 0$, $m < 0$, $n \leq 0$ y $p = 0$.

Aquí $|r| = -r$. Por tanto, $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m + 4lm - l - n(4l^2m^2 - 1) - 1/2$. Notemos que $lm \leq -2$ ya que $l \geq 2$ y $m \leq -1$.

Supongamos primero que $n = 0$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m + 4lm - l - 1/2 = 2(lm + 1)^2 + l(-lm - 1) - 5/2 \geq 2 + 2 - 5/2 = 3/2$.

Ahora, si $n \leq -1$, entonces $4g - |r| \geq 2l^2m^2 - l^2m + 4lm - l + 4l^2m^2 - 1 - 1/2 = 6l^2m^2 - l^2m + 4lm - l - 3/2 = 4l^2m^2 + 2(lm + 1)^2 + l(-lm - 1) - 7/2 \geq 16 + 2 + 2 - 7/2 = 33/2 > 3/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Caso 4. $l > 0$, $m < 0$, $n > 0$ y $p = 0$.

Como $n \geq 1$, entonces $r \geq l(lm - 1)(2m + 1) + 1/2 \geq 0$, por lo que $|r| = r$. Por tanto, $4g - |r| = 2l^2m^2 + l^2m + 4lm + l - 1/2 + (n-1)(4l^2m^2 - 1)$.

Supongamos que $n = 1$, entonces $m \leq -2$ (ya que $(m, n) \neq (-1, 1)$) y $4g - |r| = 2l^2m^2 + l^2m + 4lm + l - 1/2 \geq (3l - 4)(2l) + l - 1/2 \geq 19/2$.

Ahora, si $n \geq 2$, entonces $4g - |r| \geq 2l^2m^2 + l^2m + 4lm + l - 1/2 + 4l^2m^2 - 1 = lm(l(6m + 1) + 4) + l - 3/2 \geq 25/2$.

Caso 5. $l > 0$, $m > 0$, $n = 0$ y $p \leq 0$.

Aquí $|r| = -r$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m - 8lm + 3l + 7/2 - p(2lm - l - 1)(2lm - l - 3)$. Notemos que $l, m \geq 2$ pues $l \neq 1$ y $(m, n) \neq (1, 0)$.

Supongamos que $p = 0$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m - 8lm + 3l + 7/2$. Si $m = 2$, entonces $4g - |r| = (3l - 2)(2l - 3) - 5/2 \geq 4 - 5/2 = 3/2$. Si $m \geq 3$, entonces $4g - |r| = lm(l(2m - 1) - 8) + 3l + 7/2 \geq 12 + 6 + 7/2 = 43/2$.

Ahora supongamos que $p \leq -1$. Entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m - 8lm + 3l + 7/2 - p(2lm - l - 1)(2lm - l - 3) \geq 2l^2m^2 - l^2m - 8lm + 3l + 7/2 + 4l^2m^2 - 2l^2m - 6lm - 2l^2m + l^2 + 3l - 2lm + l + 3 = lm(l(6m - 5) - 16) + l^2 + 7l + 13/2$. Si $m = 2$, entonces $4g - |r| \geq 2l(7l - 16) + l^2 + 7l + 13/2 = 15l^2 - 25l + 13/2 = 5l(3l - 5) + 13/2 \geq 33/2$. Si $m \geq 3$, entonces $4g - |r| \geq lm(l(6m - 5) - 16) + l^2 + 7l + 13/2 \geq 60 + 4 + 14 + 13/2 > 3/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Caso 6. $l > 0$, $m > 0$, $n = 0$ y $p > 0$.

En este caso $|r| = r$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - 3l^2m - 8lm + l^2 + 5l + 15/2 + (p - 1)(2lm - l - 1)(2lm - l - 3)$. Notemos también que $l, m \geq 2$ pues $l \neq 1$ y $(m, n) \neq (1, 0)$.

Supongamos primero $p = 1$. Como $(l, m, p) \neq (2, 2, 1)$, entonces $l \geq 3$ ó $m \geq 3$. Si $m = 2$, entonces $l \geq 3$ y $4g - |r| = (3l - 2)(l - 3) + 3/2 \geq 3/2$. Si $l = 2$, entonces $m \geq 3$ y $4g - |r| = 4m(2m - 7) + 14 + 15/2 \geq 2 + 15/2 > 3/2$. Ahora, si $l \geq 3$ y $m \geq 3$, entonces $4g - |r| = lm(l(2m - 3) - 8) + l^2 + 5l + 15/2 \geq 9 + 9 + 15 + 15/2 > 3/2$.

Ahora si $p \geq 2$, entonces $4g - |r| \geq 2l^2m^2 - 3l^2m - 8lm + l^2 + 5l + 15/2 + (2lm - l - 1)(2lm - l - 3) = 6l^2m^2 - 7l^2m - 16lm + 2l^2 + 9l + 21/2$. Si $m = 2$, entonces $4g - |r| \geq (3l - 2)(4l - 5) + 1/2 \geq 12 + 1/2 > 3/2$. Si $m \geq 3$, entonces $4g - |r| \geq lm(l(6m - 7) - 16) + 2l^2 + 9l + 21/2 \geq 36 + 8 + 18 + 21/2 > 3/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Caso 7. $l > 0$, $m < 0$, $n = 0$ y $p \leq 0$.

Aquí $|r| = -r$ y $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m + 4lm - l - 1/2 - p(2lm - l - 1)(2lm - l + 1)$.

Supongamos primero que $p = 0$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - l^2m + 4lm - l - 1/2 = l(m(l(2m - 1) + 4) - 1) - 1/2$. Si $l = 2$ y $m = -1$, entonces $4g - |r| = 3/2$. Si $l \geq 2$ y $m \leq -2$ entonces $l(2m - 1) + 4 \leq -6$ lo que implica que $l(m(l(2m - 1) + 4) - 1) \geq 22$, así $4g - |r| \geq 43/2$. Si $l \geq 3$ y $m \leq -1$ entonces $l(2m - 1) + 4 \leq -5$ lo que implica que $l(m(l(2m - 1) + 4) - 1) \geq 12$, así $4g - |r| \geq 23/2$.

Finalmente si $p \leq -1$, como $l \geq 2$ y $m \leq -1$, entonces $4g - |r| \geq 6l^2m^2 - 5l^2m + 4lm - l + l^2 - 3/2 = 6(lm + 1/3)^2 + (l - 1/2)^2 - 5l^2m - 29/12 \geq 26/3 + 9/4 + 20 - 29/12 > 3/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Caso 8. $l > 0$, $m < 0$, $n = 0$ y $p > 0$.

Aquí $|r| = r$ y $4g - |r| = 2l^2m^2 - 3l^2m + 4lm + l^2 - 3l - 1/2 + (p - 1)(2lm - l - 1)(2lm - l + 1)$.

Supongamos primero $p = 1$, entonces $4g - |r| = 2l^2m^2 - 3l^2m + 4lm + l^2 - 3l - 1/2 = 2(lm + 1)^2 - 3l^2m + (l - 3/2)^2 - 1/2 - 9/4 - 2 \geq 2 + 12 + 1/4 - 1/2 - 9/4 - 2 = 19/2 > 3/2$.

Ahora supongamos que $p \geq 2$, entonces $4g - |r| \geq 2l^2m^2 - 3l^2m + 4lm + l^2 - 3l - 1/2 + (2lm - l - 1)(2lm - l + 1) = 6l^2m^2 - 7l^2m + 4lm + 2l^2 - 3l - 3/2 = 4l^2m^2 - 7l^2m + 2(lm + 1)^2 + (2l - 1)(l - 1) - 9/2 \geq 16 + 28 + 2 + 3 - 9/2 > 3/2$.

En ambos casos, $4g - |r| \geq 3/2$.

Con esto concluimos todos los casos para pendientes semi-enteras.

3.2. Pendiente entera.

Recordemos que $k \subset S^3$ es un nudo hiperbólico de género g y $r \subset \partial E(k)$ una pendiente toroidal entera. Sea \hat{T} un toro incompresible en $k(r)$ que interseca el toro sólido de pegado J , en una unión mínima disjunta de discos meridianos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_t$ numerados sucesivamente a lo largo del toro sólido de cirugía J . Denotaremos por $H_{i,i+1}$ la región de J acotada por dos discos meridianos consecutivos v_i y v_{i+1} para alguna $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Sea también S una superficie de Seifert para k de género mínimo g . Construimos las gráficas de intersección G_S y G_T como se describió en la sección 2.4. Emplearemos los siguientes resultados conocidos.

Lema 1. Si $|r| > 4g$, $k(r)$ no contiene botellas de Klein.

Demostración. Se sigue de [15], Corolario 1.3. □

Lema 2. Si $|r| > 2g - 1$, $k(r)$ es irreducible.

Demostración. Lema 2.3 de [19]. □

Lema 3. Si $|r| > 2g - 1$, los ciclos de Scharlemann en G_S no pueden estar en un disco en \hat{T} .

Demostración. Seguiremos la prueba de el Lema 3.1 de [7].

Supongamos sin pérdida de generalidad que σ es un ciclo de Scharlemann en G_S con etiquetas $\{1, 2\}$. Sea f la cara de G_S acotada por σ . Supongamos por contradicción que las aristas de σ están en un disco D en \hat{T} . Entonces $N(D \cup H_{12} \cup f)$ es un espacio lente menos una 3-bola abierta (ver la figura 3.3). Pero esto contradice el lema 2. □

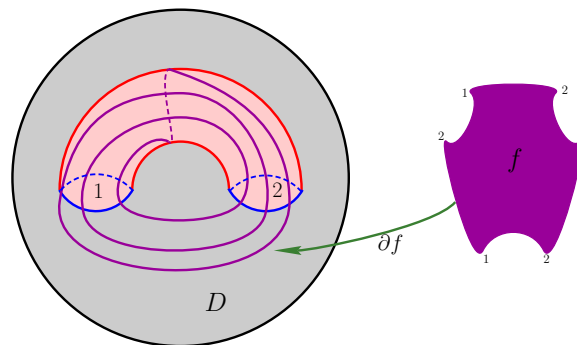


Figura 3.3: Un ciclo de Scharlemann que produce un espacio lente pinchado

Lema 4. Si $|r| > 4g$ y $t \geq 4$, G_S no contiene ciclos de Scharlemann extendidos.

Demostración. Teorema 3.2 de [7]. □

Lema 5. Dos aristas no pueden ser paralelas en ambas gráficas, G_S y G_T .

Demostración. Lema 2.1 de [6]. □

Lema 6. Si $|r| > 4g$ y $t \geq 4$, entonces G_S no contiene dos S -ciclos con parejas de etiquetas disjuntas.

Demostración. Lema 2.6 de [19]. □

Lema 7. Existen a lo más cuatro etiquetas para ciclos de Scharlemann en G_S .

Demostración. Esto es el Lema 2.3(4) de [11]. □

Procedemos ahora a dar una prueba del Teorema 1 en el caso de pendientes enteras, es decir:

Teorema. Sea $k \subset S^3$ un nudo hiperbólico de género g y r una pendiente toroidal entera para k . Sea t el mínimo número de intersecciones entre el corazón del toro de cirugía y un toro incompresible. Entonces:

- Si $t \geq 4$, entonces $|r| \leq 6g - 3$.
- Si $t = 2$, entonces $|r| \leq 4g + 8$.

3.2.1. $t \geq 4$.

Por los lemas 6 y 7, podemos tomar una etiqueta x que no sea etiqueta para S -ciclos en G_S . Sea Γ la subgráfica de G_S consistente de todas las x -aristas. Entonces Γ tiene exactamente $|r|$ aristas. Como G_S no tiene S -ciclos con etiqueta x y tampoco ciclos de Scharlemann extendidos (lema 4), cada disco cara de Γ tiene al menos 3 lados. Sean V, F, E el número de vértices, discos cara y aristas de Γ , respectivamente. Entonces $V = 1, E = |r|$ y $V - E + F \geq \chi(\hat{S}) = 2 - 2g$. Entonces $F \geq 2 - 2g + |r| - 1 = 1 - 2g + |r|$. Además, $2E \geq 3F$ implica $2|r| \geq 3F \geq 3(1 - 2g + |r|)$ por lo que $|r| \leq 6g - 3$ con lo cual terminamos este caso.

3.2.2. $t = 2$.

Aquí G_S tiene $|r|$ aristas. Sean F el número de discos cara en G_S y F_i el número de discos cara en G_S con i lados. Un cálculo en la característica de Euler para S nos dice que $1 - |r| + F \geq 2 - 2g$, por lo que

$$F \geq |r| - 2g + 1 \quad (3.1)$$

Tenemos también que $2|r| \geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3) = 4F - 2F_2 - F_3$, luego por la desigualdad (3.1), $2|r| \geq 4(|r| - 2g + 1) - 2F_2 - F_3$ lo que implica que:

$$2F_2 + F_3 \geq 2(|r| - 4g + 2) \quad (3.2)$$

La desigualdad anterior revela la importancia de los bígono y trígonos en nuestra gráfica G_S para obtener una cota de $|r|$ en términos de g .

En lo que resta de la sección supondremos que $|r| \geq 4g + 1$. Entonces se valen los lemas 1, 2 y 3. También por la desigualdad (3.2), $2F_2 + F_3 \geq 6$.

La gráfica G_T tiene exactamente 2 vértices, entonces tiene a lo más 4 clases de aristas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que se muestran en la figura 3.4.

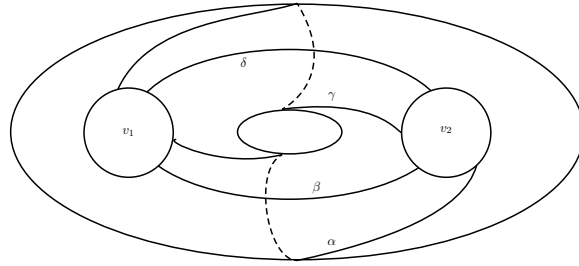


Figura 3.4: G_T cuando $t = 2$

Etiquetamos cada arista e de G_S por la etiqueta de su clase en G_T y la denotamos por $\mathcal{L}(e)$.

Sean \hat{B}, \hat{W} los dos lados de \hat{T} en $k(r)$ y $B = \hat{B} \cap E(k)$, $W = \hat{W} \cap E(k)$. Coloreamos las caras f de G_S en blanco y negro de acuerdo a si f está en W ó B , respectivamente.

Observemos que cuando $t = 2$, todos los discos cara de G_S resultan ser ciclos de Scharlemann.

Sea f un disco cara de G_S y supongamos que χ_1, χ_2 son dos clases distintas de aristas en G_T . Decimos que f es una (χ_1, χ_2) -cara si las aristas de f pertenecen a $\chi_1 \cup \chi_2$. Cuando f es una (χ_1, χ_2) -cara, decimos que f es χ_i -buena ($i = 1, 2$) si no hay aristas consecutivas de f que pertenezcan a la misma clase χ_i . Si f es χ_i -buena para alguna $i = 1, 2$, entonces f se llama buena. Denotamos por $|f|$ el número de aristas de f .

Lema 8. Para cualesquiera dos clases de aristas χ_1, χ_2 , G_S no puede tener (χ_1, χ_2) -buenas caras en ambos lados de \hat{T} .

Demostración. Lema 4.2 de [19]. □

Lema 9. Si un disco cara f de G_S tiene 2 ó 3 aristas, las aristas de f están en un anillo esencial en \hat{T} .

Demostración. Si f es un disco cara en G_S con 2 aristas, por el Lema 3 sus aristas no son paralelas en G_T , por lo que están en un anillo cuyo corazón está formado por las aristas de f y por tanto es un anillo esencial en \hat{T} .

Si f es un disco cara (supongamos blanco) con 3 aristas frontera a, b, c , por el Lema 3 sus aristas no son paralelas en G_T , por lo que pertenecen al menos a 2 clases diferentes de aristas. Si pertenecieran exactamente a 2 clases de aristas, ya habríamos acabado pues estarían contenidas en un anillo en \hat{T} . Supongamos entonces que las aristas pertenecen a 3 clases distintas de aristas en G_T . Sea $H_{1,2}$ la 1-asa en $\partial E(k)$ que conecta los vértices 1 y 2 en G_T tal que $H_{1,2} \subset W$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dichas aristas se ven como en la figura 3.5.

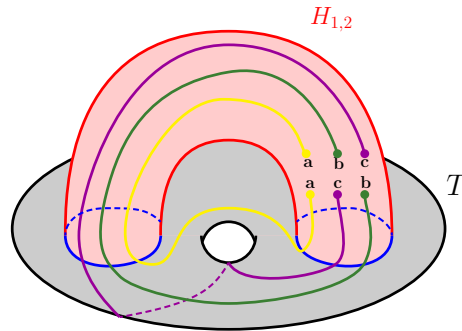


Figura 3.5: No puede haber un disco de 3 aristas en clases distintas.

Según dicha figura, para obtener la cara f , debemos conectar los extremos de los arcos a, b, c en $H_{1,2}$ de tal forma que se forme un único lazo. Así pues,

solamente quedan dos opciones: (i) conectar un extremo de a con un extremo de c , un extremo de b con un extremo de a y un extremo de c con un extremo de b y (ii) conectar un extremo de a con un extremo de b , un extremo de b con un extremo de c y un extremo de c con un extremo de a . Sin embargo, no es difícil ver que no es posible realizar dichas conexiones en $H_{1,2}$ sin obtener autointersecciones. Por ello y por el Lema 3, f tiene exactamente 2 clases de aristas en su frontera, es decir, se encuentra contenida en un anillo esencial. \square

Por el Lema anterior, si f es un disco cara con 2 ó 3 aristas frontera, entonces tiene exactamente dos clases de aristas en su frontera y por tanto es una buena cara.

Lema 10. G_S no contiene dos b́igonos del mismo color en distintas parejas de clases de aristas.

Demostración. Lema 5.2 de [10]. \square

Lema 11. Si un b́igono y un tŕigono de G_S tienen el mismo color, entonces tienen parejas disjuntas de clases de aristas.

Demostración. Lema 4.5 de S. Lee [19]. \square

Lema 12. (1) Si dos triángulos de G_S del mismo color tienen diferentes parejas de clases de aristas, entonces las parejas son disjuntas.

- (2) Supongamos que dos triángulos de G_S del mismo color tienen la misma pareja de clases de aristas, digamos $\{\chi_1, \chi_2\}$. Si uno tiene una arista en la clase χ_1 y dos aristas en la clase χ_2 , entonces el otro también tiene una arista en la clase χ_1 y dos aristas en la clase χ_2 .
- (3) Si dos triángulos de G_S tienen colores opuestos, entonces no pueden tener la misma pareja de clases de aristas.

Demostración. Lema 4.6 de S. Lee [19]. \square

Recordemos que u es el único vértice de G_S . Sean a, b dos puntos de intersección de ∂u y ∂v_x ($x = 1, 2$). Entonces ambos puntos tienen etiqueta x en G_S . Como r es entera, los puntos a y b son consecutivos en ∂v_x de G_T sí y sólo sí hay exactamente un extremo de una arista en G_S entre los puntos (figura 3.6).

Orientemos ∂v_1 en el sentido opuesto a las manecillas del reloj alrededor de v_1 , ∂v_2 en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de v_2 y ∂u en

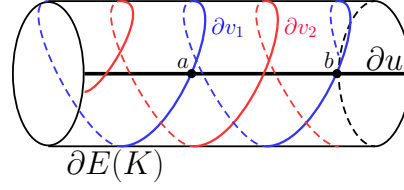


Figura 3.6: $\{a, b\}$ dos puntos en la intersección $\partial u \cap \partial v_1$.

el sentido opuesto a las manecillas alrededor de u . Podemos suponer que las tres curvas ∂v_1 , ∂v_2 y ∂u van en la misma dirección a lo largo del nudo k siguiendo sus orientaciones.

Sea $\chi \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Para dos aristas e, e' en la clase χ , escribimos $e < e'$ si el punto $e \cap \partial v_1$ precede al punto $e' \cap \partial v_1$ con respecto a la orientación de ∂v_1 . Observemos que $e < e'$ sí y sólo sí el punto $e \cap \partial v_2$ precede al punto $e' \cap \partial v_2$ con respecto a la orientación de ∂v_2 . Decimos que e es la *primer arista* en la clase χ si $e < e'$ para cualquier arista e' en la clase χ . De forma similar definimos la *última arista*.

Lema 13. Sean a_1, a_2 extremos de dos aristas de G_S tal que existe exactamente un extremo entre ellas como en la figura 3.7. Sea e_i la arista de G_S incidente a a_i ($i = 1, 2$). Sea $\chi_i = \mathcal{L}(e_i)$ y supongamos que $\chi_1 \neq \chi_2$. Entonces en G_T , e_1 es la última arista en la clase χ_1 , mientras que e_2 es la primer arista en la clase χ_2 . Además a_1, a_2 aparecen consecutivamente y en orden en un vértice de G_T .

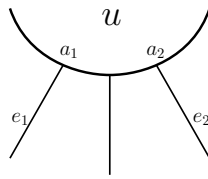


Figura 3.7: e_1 es la última arista de su clase y e_2 es la primera de su clase.

Demostración. Lema 4.7 de S. Lee [19]. □

Lema 14. Dos bígono en G_S no pueden ser adyacentes.

Demostración. Lema 4.8 de S. Lee [19]. □

Lema 15. Si un bígono y un triángono de G_S son adyacentes entonces G_S contiene solamente un bígono.

Demostración. Se sigue de la primera parte de la prueba del Lema 4.9 de [19]. \square

Lema 16. *Si $|r| \geq 6g - 2$, entonces en G_S no puede haber un bígono y un triángulo adyacentes.*

Demostración. La desigualdad (3.1) nos dice que $F \geq |r| + 1 - 2g$.

Si G_S tiene un triángulo adyacente a un bígono, por el Lema 15, G_S contiene solamente un bígono, digamos negro. Tenemos entonces que $2|r| \geq 3(F - 1) + 2 = 3F - 1 \geq 3(|r| + 1 - 2g) - 1 = 3|r| - 6g + 2$, así que $|r| \leq 6g - 2$ y por hipótesis $|r| \geq 6g - 2$ por lo que $|r| = 6g - 2$.

Sean F^b, F^w el número de discos cara negros y blancos de G_S , respectivamente. Tenemos entonces que $|r| \geq 3(F^b - 1) + 2 = 3F^b - 1$, entonces $F^b \leq (|r| + 1)/3$. Por lo que $(|r| + 1)/3 + F^w \geq F^b + F^w = F \geq |r| + 1 - 2g$, lo cual nos da $F^w \geq (2|r| + 2)/3 - 2g = 2g - 2/3$ y por tanto, $F^w \geq 2g$. Además $|r| \geq 3F^w$, por lo que $|r| \geq 3F^w \geq 6g$ lo cual es una contradicción. \square

Lema 17. *Sea f un disco cara de G_S tal que $|f| \geq 4$. Entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) f no puede estar rodeado por bígono.
- (2) Si $|f|$ es impar, entonces f es adyacente a lo más a $|f| - 2$ bígono.

Demostración. Lema 4.10 de S. Lee [19]. \square

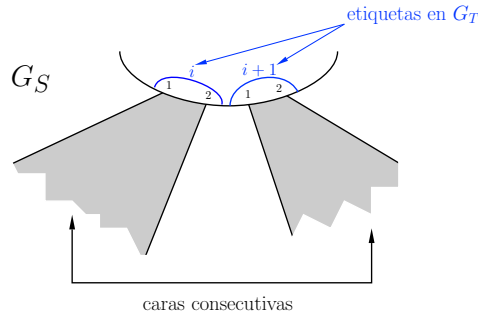
Lema 18. *G_S no puede contener un bígono, un triángulo y un cuadrado del mismo color.*

Demostración. Lema 4.11 de S. Lee [19]. \square

Diremos que dos caras en G_S son *del mismo tipo* si tienen el mismo color, la misma longitud, las mismas clases de aristas y el mismo número de aristas de cada clase. Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de caras de G_S y llamaremos *un tipo de n -cara* a la clase de equivalencia de una cara con n lados.

Dos caras del mismo tipo en G_S son *consecutivas respecto a una esquina* si las etiquetas correspondientes en una de sus esquinas son consecutivas en G_T . Podemos pensar esta propiedad como sigue: dos caras son consecutivas en una esquina si en la gráfica G_S , las esquinas correspondientes aparecen separadas solamente por una cara.

Decimos que un conjunto finito de caras en G_S es *consecutivo* si las caras son del mismo tipo y podemos numerarlas como $\{\sigma_j\}_{j=1}^m$ para alguna $m \geq 1$



de tal forma que σ_j y σ_{j+1} son caras consecutivas respecto a todas sus esquinas de acuerdo a las definiciones anteriores.

Observación. Notemos que si dos caras son consecutivas respecto a una esquina y si además las aristas con la misma etiqueta (1 ó 2) que forman las esquinas, son paralelas en G_S , entonces las caras son consecutivas respecto a las esquinas que están en los otros extremos de las aristas.

Usaremos F_i^w y F_i^b para denotar el conjunto de caras blancas y negras, respectivamente, con i lados en G_S .

Lema 19. *En G_S , los bígono del mismo color son un conjunto consecutivo.*

Demostración. Fijemos un color, digamos blanco. Por el Lema 10, los bígono tienen las mismas dos clases de aristas, digamos $\{\chi_1, \chi_2\}$, por lo que son del mismo tipo. De hecho las aristas de los bígono en F_2^w están en un anillo A en \hat{T} . Sean a_i^p y b_i^u la primera y última arista de clase χ_i , $i = 1, 2$, respectivamente para bígono en F_2^w . Supongamos que tenemos una arista c en una cara blanca σ tal que $a_1^p < c < b_1^u$ ó $a_2^p < c < b_2^u$. Notemos que cuando seguimos las aristas de σ en $\hat{T} \cup H_{1,2}$, estas no pueden salir de A y tampoco pueden dar más de una vuelta al rededor de A pues de otra forma σ no se cerraría. Entonces σ debe ser un bígono dentro de A con clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$. Por tanto, las aristas del mismo tipo de los bígono son consecutivas en G_T y entonces el conjunto de bígono blancos es consecutivo G_S . \square

Lema 20. *En G_S , los bígono del mismo color son adyacentes a lo más a dos caras, cada una de ellas con el mismo número de aristas pertenecientes a bígono.*

Demostración. Fijemos un color, digamos negro. Por el Lema 19, F_2^b es consecutivo en G_S . Podemos entonces numerar los elementos de F_2^b según el orden en que aparecen en el vértice $u \in G_S$. Supongamos que en ese orden, los bígono son b_m , $m = \{1, 2, \dots, n\}$ y que en sus extremos tienen

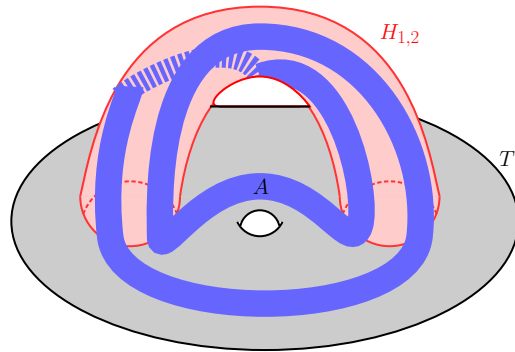


Figura 3.8: Conjunto de bígono en $T \cup H_{1,2}$

etiquetas $i + (m - 1), j + (m - 1)$ (módulo r) en G_T , respectivamente para $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ fijos. Comencemos con el primer bígono, éste es adyacente a lo más a dos caras f_1, f_2 . Siguiendo las etiquetas $i, i + 1$ en el vértice u , notemos que el segundo bígono es adyacente a la cara f_2 por un lado, y adyacente a la cara f_1 por el otro (siguiendo las etiquetas de j a $j + 1$), así que aparecen en G_S como en la figura 3.9.

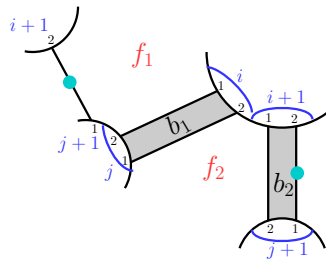


Figura 3.9:

El tercer bígono tiene etiquetas $i + 2, j + 2$ en sus esquinas, por lo que debe pegarse a la cara f_2 en un lado y por otro lado a la cara f_1 como se muestra en la figura 3.10.

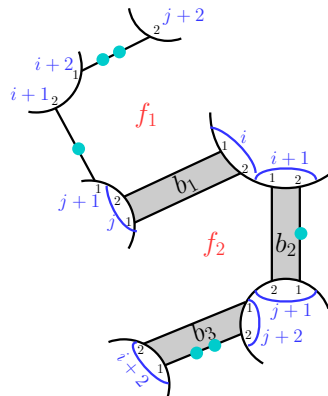


Figura 3.10:

Continuando con este proceso, podemos notar que todos los bigonios se pegan a las mismas dos caras y que, de hecho f_1 y f_2 tienen la misma cantidad de aristas de bigonios. \square

A continuación veremos las propiedades análogas para los triángulos.

Observemos que por el Lema 12, para cada color hay a lo más dos tipos de triángulos en G_S . Además la segunda parte del mismo lema nos dice que los triángulos del mismo tipo tienen el mismo número de aristas en cada una de las 2 clases de aristas a las que pertenecen, esto divide en 3 grupos de aristas paralelas las aristas de los triángulos de un mismo tipo (ver figura 3.11).

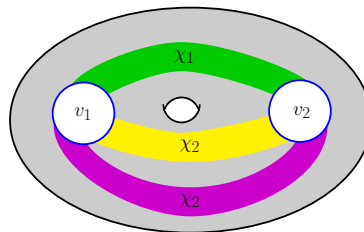


Figura 3.11: Los triángulos del mismo tipo determinan 3 grupos de aristas paralelas en G_T .

Lema 21. *En G_S los triángulos del mismo tipo forman un conjunto consecutivo.*

Demostración. Sea \mathcal{C} un conjunto de triángulos del mismo tipo en G_S . Supongamos que los triángulos en \mathcal{C} son blancos y que tienen una arista de clase χ_1

y dos aristas de clase χ_2 . Por la observación hecha anteriormente, basta con probar que los triángulos del mismo tipo son consecutivos respecto a la esquina que contiene la arista de clase χ_1 en cada triángulo. Por el Lema 9, las aristas de los triángulos del mismo tipo están en un anillo esencial A en \hat{T} . Sean a^p y b^u la primera y última arista, respectivamente en la clase χ_1 para triángulos en \mathcal{C} . Supongamos que tenemos una arista c en una cara blanca σ tal que $a^p < c < b^u$. Note que cuando seguimos las aristas de σ en $\hat{Q} \cup H_{1,2}$, éstas no pueden salir de A y tampoco pueden dar más de una vuelta al rededor de A pues si no, σ no se cerraría (ver figura 3.12).

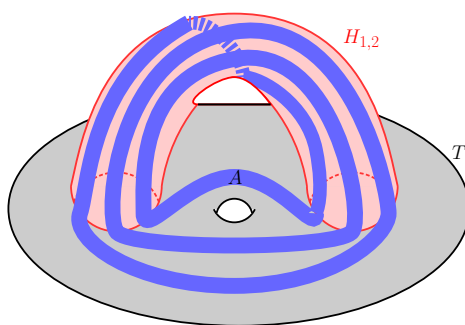


Figura 3.12: Los triángulos del mismo tipo son consecutivos.

Entonces σ es un triángulo dentro de A con clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$. Por tanto las aristas de los triángulos son consecutivas en G_T y entonces los triángulos son consecutivos en G_S . \square

Lema 22. *En G_S , los triángulos del mismo tipo son adyacentes a lo más a tres caras, cada una de ellas con el mismo número de aristas pertenecientes a triángulos.*

Demostración. Por el Lema 21 los triángulos del mismo tipo en G_S son consecutivos. Supongamos que los triángulos tienen una arista en la clase χ_1 y dos aristas en la clase χ_2 . Podemos entonces enumerarlos respecto a sus aristas de clase χ_1 de acuerdo al orden en que aparecen en el vértice $u \in G_S$. Supongamos que en ese orden, los triángulos son c_m , $m = \{1, 2, \dots, n\}$ y que en G_T sus extremos tienen etiquetas $i + (m - 1), j + (m - 1), l + (m - 1)$ (módulo r), respectivamente para $i, j, l \in \{1, 2, \dots, r\}$ fijos. Comencemos con el primer triángulo, éste es adyacente a lo más a tres caras f_1, f_2, f_3 . Siguiendo las etiquetas $i, i + 1$ en el vértice u , notemos que el segundo triángulo es adyacente a la cara f_2 por un lado, adyacente a la cara f_1 por otro y adyacente a la cara f_3 por el tercer lado (siguiendo las etiquetas de j a $j + 1$ y también las etiquetas de l a $l + 1$), así que aparecen en G_S como en la figura 3.13.

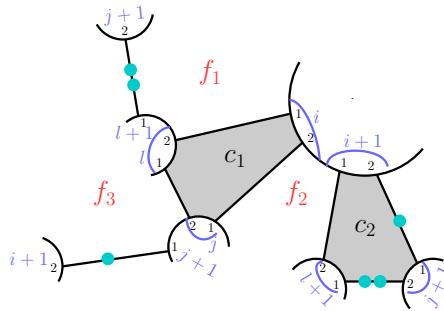


Figura 3.13:

El tercer triángulo tiene etiquetas $i + 2, j + 2, l + 2$ en sus esquinas, por lo que debe pegarse por un lado a la cara f_2 y por los otros lados a las caras f_1 y f_3 como se muestra en la figura 3.14.

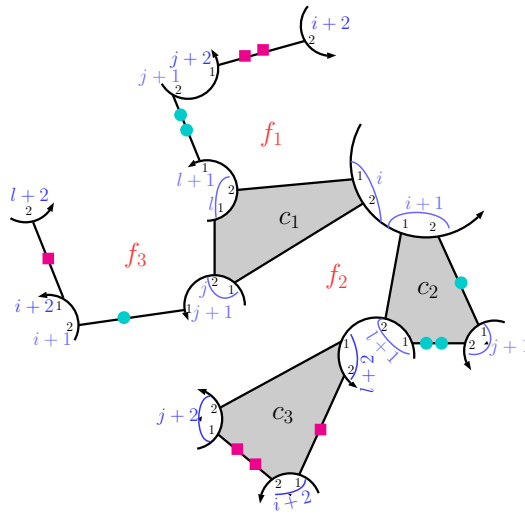


Figura 3.14: Los triángulos del mismo color se pegan a lo más a tres caras.

Continuando con este proceso, podemos notar que todos los triángulos se pegan a las mismas caras y que, de hecho f_1, f_2 y f_3 tienen la misma cantidad de aristas de triángulos. \square

Lema 23. Si en G_S hay dos triángulos adyacentes, dichos triángulos son únicos respecto a su tipo.

Demostración. Supongamos que tenemos dos triángulos c_1 y c_2 adyacentes en G_S (c_1 negro y c_2 blanco). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que c_1 es una $\{\chi_1, \chi_2\}$ -buena cara y que c_2 es una $\{\chi_2, \chi_3\}$ -buena cara. Por el

Lema 22, c_1 es adyacente a todos los triángulos blancos de tipo $\{\chi_2, \chi_3\}$ y del mismo modo, c_2 es adyacente a todos los triángulos negros de tipo $\{\chi_1, \chi_2\}$. Sin embargo, como c_1 y c_2 tienen 3 aristas, de las cuales solamente coinciden en una clase, entonces a lo más hay dos triángulos negros de tipo $\{\chi_1, \chi_2\}$ y dos triángulos blancos de tipo $\{\chi_2, \chi_3\}$. Supongamos pues que c_1 es adyacente a dos triángulos blancos de tipo $\{\chi_2, \chi_3\}$ (en otro caso, ya habríamos acabado). Esto significa que c_1 tiene dos aristas de clase χ_2 y una arista de clase χ_1 . Aplicando el lema 13 en ambas esquinas que contienen la arista de clase χ_1 , podemos ver que ésta arista es la única de su clase. Esto implica en principio que no hay más triángulos negros de tipo $\{\chi_1, \chi_2\}$. Sean a, b, c, d las aristas restantes de los triángulos según la figura 3.15.

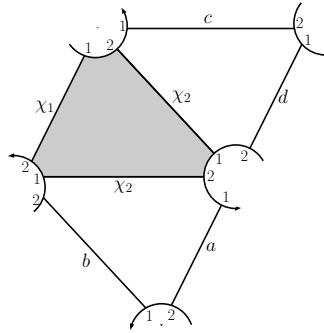


Figura 3.15:

Podemos ver que c es la primera arista de su clase, mientras que b es la última arista en su clase. Tenemos los siguientes casos para las clases de aristas de a, b, c, d :

- (1) $\mathcal{L}(a) = \chi_2; \mathcal{L}(b) = \chi_3^u; \mathcal{L}(c) = \chi_2^p; \mathcal{L}(d) = \chi_3$
- (2) $\mathcal{L}(a) = \chi_2; \mathcal{L}(b) = \chi_3^u; \mathcal{L}(c) = \chi_3^p; \mathcal{L}(d) = \chi_2$
- (3) $\mathcal{L}(a) = \chi_3; \mathcal{L}(b) = \chi_2^u; \mathcal{L}(c) = \chi_2^p; \mathcal{L}(d) = \chi_3$
- (4) $\mathcal{L}(a) = \chi_3; \mathcal{L}(b) = \chi_2^u; \mathcal{L}(c) = \chi_3^p; \mathcal{L}(d) = \chi_2$
- (5) $\mathcal{L}(a) = \chi_3; \mathcal{L}(b) = \chi_3^u; \mathcal{L}(c) = \chi_3^p; \mathcal{L}(d) = \chi_3$

En el primer caso, aplicando el lema 13 podemos ver que d es la última arista en la clase χ_3 , lo cual contradice que b sea la última arista en dicha clase.

En el segundo caso, como las aristas de clase χ_2 son consecutivas, podemos etiquetarlas en G_T con i, j como se muestra en la figura 3.16. Sin embargo dicha configuración implicaría que las aristas b y c son la misma, lo cual no

es posible por estar en diferentes caras.

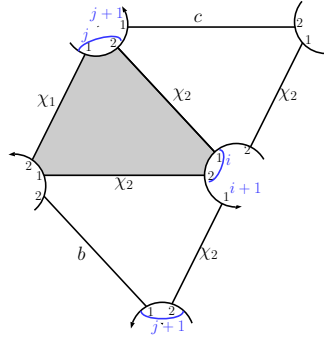


Figura 3.16:

En el tercer caso, aplicando el lema 13, podemos probar que las aristas de tipo χ_2 en el triángulo negro, son la primera y última de su clase, contradiciendo que b y c son tales aristas.

En el cuarto caso, aplicando el lema 13, vemos que una de las aristas de tipo χ_2 es la última en su clase, contradiciendo que b sea tal arista.

En el último caso, aplicando el lema 13, las aristas a y d resultan ser la primera y última arista, respectivamente en la clase χ_3 , lo cual contradice que c y b sean tales aristas.

□

Observemos que el lema 23 y el lema 12, implican que en G_S hay a lo más dos parejas de triángulos adyacentes y en tal caso son únicos.

En lo que resta de la prueba, denotaremos con n el número de caras a las cuales son adyacentes los bígono (de ambos colores) y con m el número de caras a las cuales son adyacentes los triángulos (de ambos colores) en G_S . Por el Lema 20, $n \leq 4$ y por el Lema 22, $m \leq 12$.

Emplearemos los Lemas 3 a 23 para dividir la prueba en los casos que se muestran en la figura 3.17.

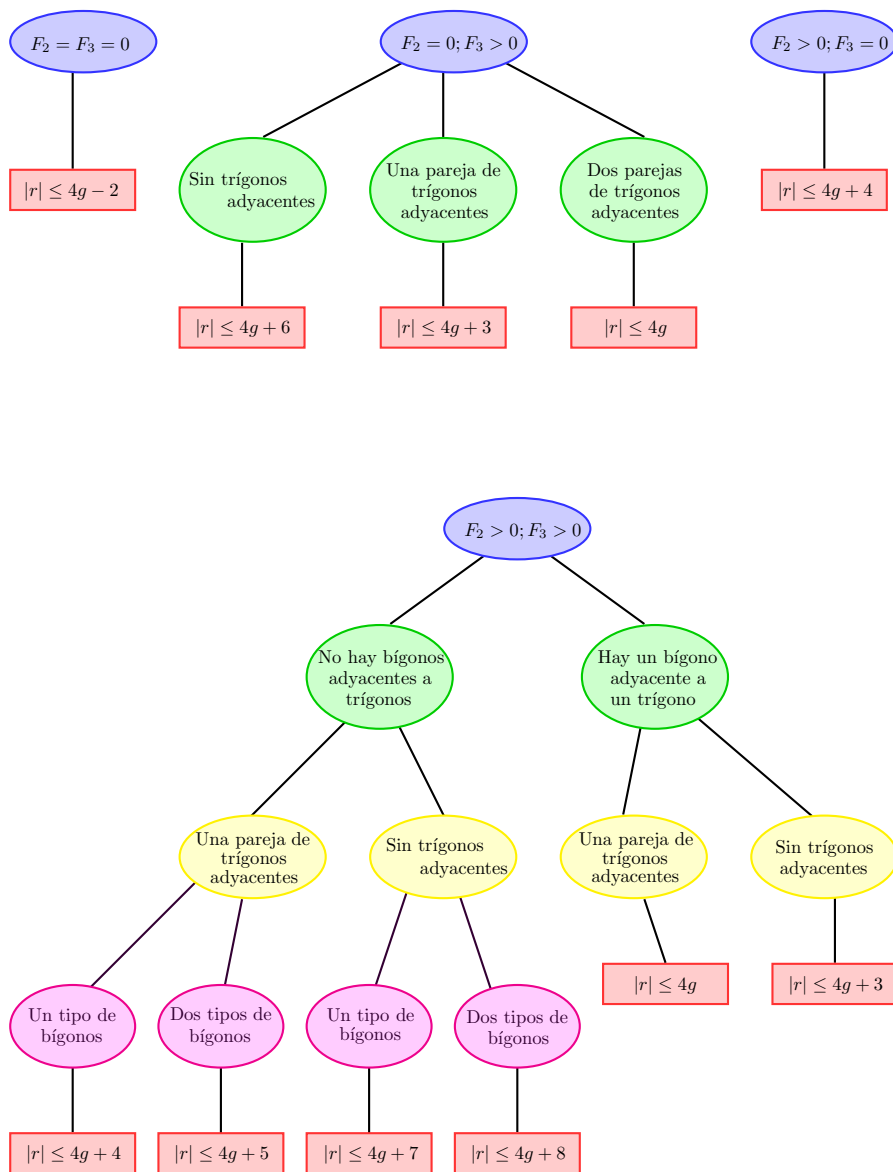


Figura 3.17: Mapa de casos para $t = 2$.

El primer caso que abordamos para la prueba de nuestro teorema es el más sencillo, cuando la gráfica G_S no contiene discos cara de 2 lados ni tampoco discos cara de 3 lados.

Sin bigonos y sin trigramos.

Si $F_2 = F_3 = 0$, entonces por la desigualdad (3.2), $|r| \leq 4g - 2$ lo que concluye este caso.

Sin triángulos.

Por el Lema 14, los bigonios no pueden ser adyacentes entre sí y dado que estamos suponiendo que nuestra gráfica no tiene triángulos, $F_3 = 0$ y las caras a las cuales se pegan los bigonios tienen al menos 4 lados.

Por otro lado, el lema 17 nos dice que un disco cara f con $|f|$ lados es adyacente a lo más a $|f| - 1$ bigonios.

Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n) + 2F_2 + n \\ &= -F_3 + 4F - 3n \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 12 \end{aligned}$$

De donde, $|r| \leq 4g + 4$.

Sin bigonios y sin triángulos adyacentes entre sí.

Como los triángulos no son adyacentes entre sí, y no tenemos bigonios, las caras a las cuales se pegan los triángulos tienen al menos 4 lados. Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 3F_3 + 4(F - F_3 - m) + 3F_3 \\ &= 2F_3 + 4F - 4m \\ &\geq 2F_3 + 4(|r| - 2g + 1) - 48 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$F_3 \leq 4g + 22 - |r| \tag{3.3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 3F_3 + 4(F - F_3) \\ &= 4F - F_3 \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - F_3 \end{aligned}$$

De donde

$$F_3 \geq -8g + 4 + 2|r| \tag{3.4}$$

Comparando (3.3) y (3.4) obtenemos que $|r| \leq 4g + 6$.

Sin bígonos, con una pareja de triángulos adyacentes.

Por el Lema 23, si tenemos una pareja de triángulos adyacentes en G_S , éstos son únicos respecto a su tipo, por lo que G_S tiene estos dos triángulos y a lo más otros dos tipos de triángulos. Denotemos con F'_3 los triángulos en G_S que no son adyacentes entre sí y que por la observación anterior son a lo más de dos tipos. Tenemos también que $F_3 = F'_3 + 2$.

Por el Lema 22, los triángulos del mismo tipo son adyacentes a lo más a 3 caras. Entonces siendo m' el número de caras a las cuales son adyacentes los triángulos en F'_3 , tenemos que $m' \leq 6$ y estas caras tienen al menos 4 lados. Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 3F_3 + 4(F - F_3 - m') + 3F'_3 \\ &= 2F_3 + 4F - 4m' - 6 \\ &\geq 2F_3 + 4(|r| - 2g + 1) - 30 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$F_3 \leq 4g + 13 - |r| \quad (3.5)$$

Por otro lado, se cumple también (3.4), por lo que al compararla con (3.5) obtenemos $|r| \leq 4g + 3$.

Sin bígonos, con dos parejas de triángulos adyacentes.

Por el Lema 23, si tenemos una pareja de triángulos adyacentes en G_S , éstos son únicos respecto a su tipo, por lo que G_S en este caso tiene solamente 4 triángulos, es decir $F_3 = 4$. Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 3F_3 + 4(F - F_3) \\ &= 4F - 4 \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 4 \end{aligned}$$

De donde, $|r| \leq 4g$.

Un tipo de b́igonos, sin b́igonos adyacentes a tŕigonos y una pareja de tŕigonos adyacentes entre ś.

Observemos que por el Lema 11, si G_S tiene solamente un tipo de b́igonos, entonces en G_S hay a lo ḿas 3 tipos de tŕigonos. Por el Lema 14, los b́igonos no pueden ser adyacentes entre ś y estamos suponiendo que no son adyacentes a tŕigonos, entonces las caras a las cuales se pegan los b́igonos son a lo ḿas dos y tienen al menos 4 lados. Por otro lado, tenemos dos tŕigonos adyacentes, entonces por el Lema 23, dichos tŕigonos son los únicos de su tipo y como hay a lo ḿas 3 tipos de tŕigonos en G_S , hay a lo ḿas otro tipo de tŕigonos en G_S . Por lo anterior, $n \leq 2$ y $m \leq 3$. Contando el ńmero de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n - m) + 2F_2 + n + 3F_3 - 6 \\ &= 2F_3 + 4F - 3n - 4m - 6 \\ &\geq 2F_3 + 4(|r| - 2g + 1) - 24 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$F_3 \leq 4g + 10 - |r| \tag{3.6}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n) + 2F_2 + n \\ &= 4F - 3n - F_3 \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 6 - F_3 \end{aligned}$$

De donde

$$F_3 \geq -8g - 2 + 2|r| \tag{3.7}$$

Comparando (3.6) y (3.7) obtenemos que $|r| \leq 4g + 4$.

Dos tipos de b́igonos, una pareja de tŕigonos adyacentes y sin b́igonos adyacentes a tŕigonos.

Por el Lema 14, los b́igonos no pueden ser adyacentes entre ś y estamos suponiendo que no son adyacentes a tŕigonos. Entonces las caras a las cuales se pegan los b́igonos, tienen al menos 4 lados. Observemos que por el Lema 11, si G_S tiene dos tipos de b́igonos, entonces en G_S hay a lo ḿas 2 tipos de tŕigonos. Por otro lado, tenemos dos tŕigonos adyacentes, entonces por el

Lema 23, dichos triángulos son los únicos de su tipo y por tanto $F_3 = 2$. Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n) + 2F_2 + n \\ &= -F_3 + 4F - 3n \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 14 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$|r| \leq 4g + 5$$

Un tipo de bígono, sin bígono adyacentes a triángulos y sin triángulos adyacentes entre sí.

Observemos que por el Lema 11, si G_S tiene solamente un tipo de bígono, entonces en G_S hay a lo más 3 tipos de triángulos. Sabemos también por el Lema 14, que los bígono no pueden ser adyacentes entre sí y estamos suponiendo que no son adyacentes a triángulos, entonces las caras a las cuales se pegan los bígono son a lo más dos y tienen al menos 4 lados. Tenemos entonces que $n \leq 2$ y $m \leq 9$. Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n - m) + 2F_2 + n + 3F_3 \\ &= 2F_3 + 4F - 3n - 4m \\ &\geq 2F_3 + 4(|r| - 2g + 1) - 42 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$F_3 \leq 4g + 19 - |r| \tag{3.8}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n) + 2F_2 + n \\ &= 4F - 3n - F_3 \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 6 - F_3 \end{aligned}$$

De donde

$$F_3 \geq -8g - 2 + 2|r| \tag{3.9}$$

Comparando (3.8) y (3.9) obtenemos que $|r| \leq 4g + 7$.

Dos tipos de b́igonos, sin b́igonos adyacentes a tŕigonos y sin tŕigonos adyacentes entre ś.

Observemos que por el Lema 11, si G_S tiene dos tipos de b́igonos, entonces en G_S hay a lo ḿas 2 tipos de tŕigonos. Sabemos que los b́igonos del mismo color se pegan a lo ḿas a dos caras y que los tŕigonos del mismo tipo se pegan a lo ḿas a 3 caras. Tenemos entonces que $n \leq 4$ y $m \leq 6$.

Por otro lado, como los b́igonos no son adyacentes entre ś, ni son adyacentes a tŕigonos, las caras a las cuales se pegan tienen al menos 4 lados. Lo mismo sucede con los tŕigonos, pues no son adyacentes entre ś. Emplearemos tambíen el lema 17 que nos dice que un disco cara f con $|f|$ lados es adyacente a lo ḿas a $|f| - 1$ b́igonos.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n - m) + 2F_2 + n + 3F_3 \\ &= 2F_3 + 4F - 3n - 4m \\ &\geq 2F_3 + 4(|r| - 2g + 1) - 12 - 24 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$2F_3 \leq 8g + 32 - 2|r| \tag{3.10}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - n) + 2F_2 + n \\ &= 4F - 3n - F_3 \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 12 - F_3 \end{aligned}$$

De donde

$$F_3 \geq -8g - 8 + 2|r| \tag{3.11}$$

Comparando (3.10) y (4.4) obtenemos que $|r| \leq 4g + 8$.

Con un b́igono adyacente a un tŕigono y dos tŕigonos adyacentes entre ś.

Recordemos que por el Lema 15, si en G_S tenemos un b́igono b adyacente a un tŕigono t_1 , entonces b es el ́nico b́igono en G_S , es decir $F_2 = 1$ tambíen por el Lema 21, t_1 es el ́nico de su tipo. Afirmamos que $F_3 \leq 3$.

Si t_2 y t_3 son triángulos adyacentes, entonces por el Lema 23, dichos triángulos son los únicos respecto a su tipo. Al mismo tiempo, por el Lema 11, como G_S tiene un bigono, entonces contiene a lo más tres tipos de triángulos, por lo que si fuesen distintos tenemos que t_1, t_2 y t_3 serían los únicos triángulos en G_S y con eso probaríamos la afirmación. Nos resta analizar el caso en que dos de dichos triángulos sean el mismo. Si pérdida de generalidad, podemos suponer $t_1 = t_3$.

Supongamos que b es un bigono negro con clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$, entonces t_1 es un triángulo blanco con clases de aristas, digamos $\{\chi_2, \chi_3\}$ y t_2 es un triángulo negro con clases de aristas $\{\chi_3, \chi_4\}$ (b y t_1 son adyacentes en la arista de clase χ_2 , mientras que t_1 y t_2 son adyacentes en alguna arista de tipo χ_3). Aplicando repetidamente el lema 13, podemos ver que G_S tiene una subgráfica como la que se muestra en la figura 3.18 (los supraíndices p ó u indican si la arista es la primera ó última de su clase, respectivamente).

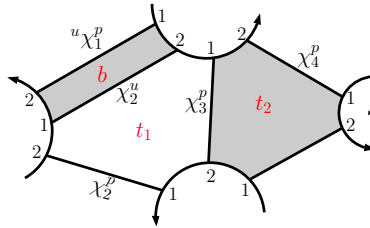


Figura 3.18: Bigono adyacente a triángulo y triángulos adyacentes de manera simultánea.

Si G_S tuviera otra clase de triángulos distinta a las ya mencionadas, debería ser de triángulos blancos con clases de aristas $\{\chi_1, \chi_4\}$, sin embargo hay una única arista de tipo χ_1 en G_S (la cual está en b), por lo que solamente puede existir uno de dichos triángulos. De esta forma, $F_3 \leq 3$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3) \\
 &= 4F - F_3 - 2F_2 \\
 &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 2 - 3 \\
 &= 4|r| - 8g - 1
 \end{aligned}$$

De donde

$$|r| \leq 4g$$

Con un bígono adyacente a un triángulo y sin triángulos adyacentes entre sí.

Por el Lema 15, si en G_S tenemos un bígono b adyacente a un triángulo t_1 , entonces b es el único bígono en G_S , es decir $F_2 = 1$. Además por el Lema 21, podemos decir que t_1 es el único triángulo de su tipo. Al mismo tiempo, por el Lema 11, como G_S tiene un bígono, entonces contiene a lo más tres tipos de triángulos y por tanto contiene a lo más dos tipos de triángulos que no son adyacentes entre sí y tampoco adyacentes a bígono. Sabemos que estos triángulos son adyacentes a lo más a seis caras por el Lema 22, es decir $m \leq 6$. Contando el número de aristas en G_S y aplicando la desigualdad (3.1),

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3 - m) + 3F_3 - 3 \\ &= 2F_3 + 4F - 4m - 5 \\ &\geq 2F_3 + 4(|r| - 2g + 1) - 29 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$F_3 \leq 4g + 12 - |r| \tag{3.12}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2|r| &\geq 2F_2 + 3F_3 + 4(F - F_2 - F_3) \\ &= 4F - 2F_2 - F_3 \\ &\geq 4(|r| - 2g + 1) - 2 - F_3 \end{aligned}$$

De donde

$$F_3 \geq -8g + 2 + 2|r| \tag{3.13}$$

Comparando (3.12) y (3.13) obtenemos que $|r| \leq 4g + 3$.

Capítulo 4

Género 3.

En esta sección nos acercaremos a la prueba de la conjetura de Teragaito para el caso de nudos de género 3. Probaremos que si un nudo hiperbólico k de género 3 tiene una pendiente toroidal r , entonces $|r| \leq 13$.

Por el teorema 1, podemos asumir que r es entera. Usaremos la misma notación para las superficies y gráficas de intersección que empleamos en la sección anterior. Aquí $g(S) = 3$ y supongamos que $|r| \geq 14$ para llegar eventualmente a una contradicción. En tal caso, los lemas 1 a 20 siguen siendo válidos.

Lema 24. *Sea Γ una subgráfica de G_S que consiste exactamente de $|r|$ aristas. Supongamos que cada disco cara de Γ tiene al menos 3 lados. Entonces $|r| \in \{14, 15\}$. Si $|r| = 14$, entonces Γ tiene exactamente 9 caras, una de las cuales es un disco cara con 4 lados y las otras 8 son discos cara con 3 lados. Si $|r| = 15$, entonces Γ tiene exactamente 10 caras, cada una de las cuales es un disco cara con 3 lados.*

Demostración. Sean V, E, F el número de vértices, aristas y discos cara de Γ respectivamente. Entonces $V = 1$, $E = |r|$ y $V - E + F \geq \chi(\hat{S}) = -4$. Esto nos da $F \geq |r| - 5$. Como cada disco cara tiene al menos 3 lados, tenemos que $2E \geq 3F$ y entonces $2|r| \geq 3F \geq 3(|r| - 5)$, por lo que $|r| \leq 15$. Como también $|r| \geq 14$, entonces $|r| \in \{14, 15\}$.

Si $|r| = 14$, entonces $F \geq 9$ pero no puede ser mayor o igual a 10 pues $2|r| = 28 \geq 3F \geq 30$ sería una contradicción por lo que $F = 9$ y para que el número de aristas sea 14 solo hay una opción: que la gráfica tenga una cara con cuatro lados y ocho caras con tres lados.

Si $|r| = 15$, entonces $F \geq 10$ y no puede ser 11 ó mayor, entonces $F = 10$ y la única posibilidad es que todas las caras tengan 3 lados. \square

4.1. El caso $t \geq 6$.

Por el Lema 7, podemos tomar una etiqueta x de G_S que no sea etiqueta de un ciclo de Scharlemann. Sea Γ una subgráfica de G_S consistente de todas las x -aristas. Entonces Γ tiene exactamente $|r|$ aristas. Cada disco cara de Γ tiene al menos 3 lados ya que de otra forma G_S contendría un ciclo de Scharlemann extendido. Por el lema 24, $|r| \in \{15, 14\}$.

Si $|r| = 15$, entonces Γ tiene exactamente 10 caras, cada una de las cuales es un disco cara con 3 lados. Cada x -cara de longitud 3 debe contener un S -ciclo por [14], proposición 5.1 y por el Lema 4. Entonces hay 10 S -ciclos en G_S . Por el Lema 6, los S -ciclos en G_S tienen una etiqueta en común, digamos y . Entonces hay 20 y -aristas en G_S porque cualesquiera dos S -ciclos no comparten aristas. Esto contradice el hecho de que $|r| = 15$ y por tanto no podemos tener este caso.

Si $|r| = 14$, entonces Γ tiene exactamente 9 caras, una de las cuales es un disco cara con 4 lados y las otras 8 son discos cara con 3 lados. Cada x -cara de longitud 3 debe contener un S -ciclo por [14], proposición 5.1 y por el Lema 4. Entonces hay 8 S -ciclos en G_S . Por el Lema 6 los S -ciclos en G_S tienen una etiqueta en común, digamos y . Entonces hay 16 y -aristas en G_S porque cualesquiera dos S -ciclos no comparten aristas. Esto contradice el hecho de que $|r| = 14$ y por tanto no podemos tener este caso.

4.2. El caso $t = 4$.

Cuando $t = 4$, la gráfica G_T tiene cuatro vértices, por lo que hay a lo más ocho clases de aristas que se muestran en la figura 4.1.

Además, G_S tiene cuatro etiquetas 1, 2, 3, 4. Por el Lema 6, podemos suponer que 4 no es etiqueta de ningún S -ciclo en G_S .

Sea Γ la subgráfica de G_S consistente de todas las 4-aristas. Entonces Γ tiene exactamente $|r|$ aristas. Como G_S no contiene S -ciclos con etiqueta 4 ni tampoco ciclos de Scharlemann extendidos, cada disco cara de Γ tiene al menos tres lados. Por el Lema 24, tenemos que $|r| \in \{14, 15\}$.

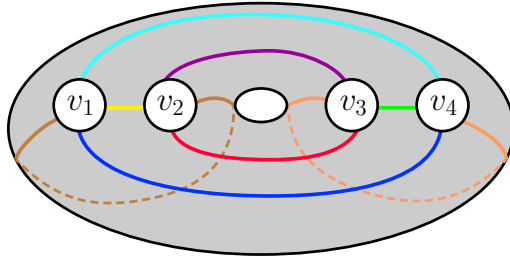


Figura 4.1: G_T cuando $t = 4$.

Además, para la subgráfica Γ de G_S , hay 6 posibles configuraciones de caras con tres lados (figura 4.2) y 24 posibles configuraciones de caras con cuatro lados (figura 4.3).

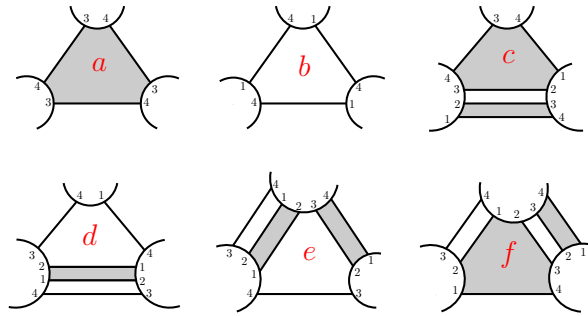


Figura 4.2: 4-caras de tres lados.

Antes de abordar cada caso, probaremos algunos lemas que nos servirán para descartarlos.

Lema 25. *Las aristas de un ciclo de Scharlemann σ en G_S de longitud 2 ó 3 están en un anillo en \hat{T} .*

Demostración. Lema 3.7 de [7]. □

Lema 26. *Supongamos que G_S contiene un bc-ciclo de Scharlemann. Entonces para cualesquiera dos (ab, cd) bígono, las aristas correspondientes son paralelas en G_T .*

Demostración. Teorema 5.3 de [8]. □

Lema 27. *Si G_S contiene un ab-ciclo de Scharlemann, entonces no contiene cd-ciclos de Scharlemann de diferentes longitudes.*

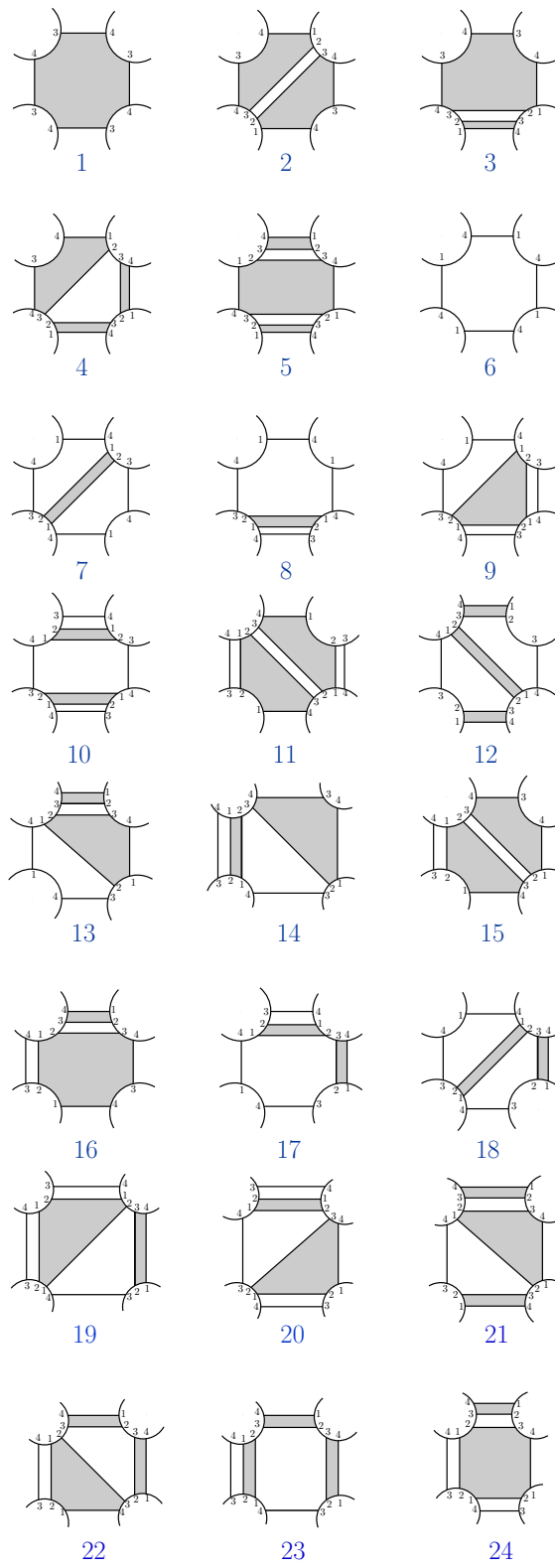


Figura 4.3: 4-caras de cuatro lados.

Demostración. Teorema 5.7 de [8]. □

Lema 28. *Supongamos que G_S contiene un ab -ciclo de Scharlemann y un cd -ciclo de Scharlemann de longitud 3. Entonces existen clases de aristas I y II en G_T tales que cualquier cd -ciclo de Scharlemann de longitud 3, tiene exactamente una arista de clase I y dos aristas de clase II.*

Demostración. Teorema 5.8 de [8]. □

Lema 29. *Si G_S contiene algún ab -ciclo de Scharlemann de longitud 3 y una cara f con al menos una (a, b) -arista que no pertenece a ciclos de Scharlemann, entonces las (a, b) -aristas de f aparecen en G_T entre las aristas de los ab -ciclos de Scharlemann.*

Demostración. Por el Lema 25, las aristas de los ab -ciclos de Scharlemann están en un anillo A en \hat{T} . Supongamos que existe una (a, b) -arista de f que no está entre 2 aristas paralelas de los ab -ciclos de Scharlemann, entonces debe existir otra (a, b) -arista en f que si lo está como se aprecia en la figura 4.4.

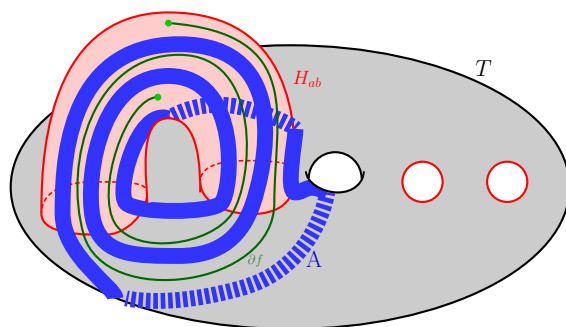


Figura 4.4: f tiene una ab -arista entre las aristas del ab -ciclo.

□

Lema 30. *En G_T no pueden coexistir las caras de tipo:*

- (1) b, c, e .
- (2) b, e, f .
- (3) a, d, f .
- (4) a, e, f .

Demostración. Supongamos por contradicción que en G_T se tienen un ab y un cd ciclos de Scharlemann de longitudes 3 y 2, respectivamente. Supongamos también que G_S contiene una cara σ de longitud 3 con una ab -esquina y dos cd -esquinas. Para que nuestra cara σ contenga solamente una ab -esquina, debe verse en H_{ab} como la curva verde de la figura 4.5 (cualquier otra opción implica la existencia de otra ab -arista en la misma cara, la cual no tenemos).

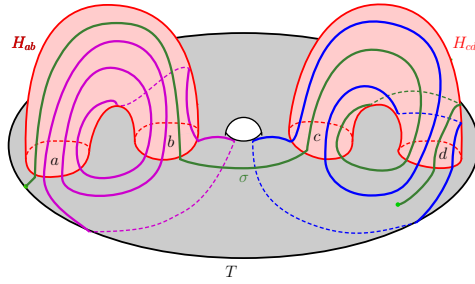


Figura 4.5: No pueden coexistir un ab -ciclo de longitud 3, un cd -S-ciclo y $\partial\sigma$

Como se muestra en dicha figura, resulta imposible conectar la curva verde para cerrar la frontera de la cara σ . \square

Lema 31. Las configuraciones para subgráficas de G_S de la figura 4.6 no se pueden tener.

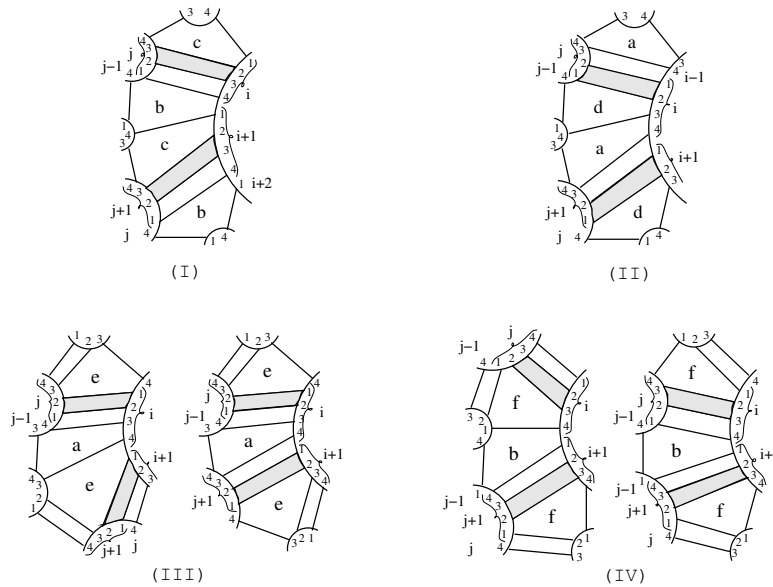


Figura 4.6: Subgráficas imposibles en G_S .

Demostración. Aplicando el lema 25, los S -ciclos en cada gráfica están etiquetados según deben aparecer en G_T para algunas $1 \leq i, j \leq |r|$.

En todos los casos, tendríamos dos aristas distintas en el vértice 4 con etiqueta j en G_T , lo cual no es posible y por ello ninguna de las configuraciones se puede tener en G_S . \square

$|r| = 15$.

En este caso por el Lema 24, las 4-caras de G_S tienen 3 lados y son diez. Sean a, b, c, d, e, f el número en que las configuraciones de las 4-caras aparecen en G_S , entonces.

$$a + b + c + d + e + f = 10$$

El número de 2-aristas en G_S es $|r| = 15$ por lo que,

$$2c + 2d + 3e + 3f = 15$$

Contando las $(4, 1)$ -aristas tenemos,

$$3b + d = 2c + e + 2f$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos que:

$$\begin{aligned} d &= 15 - 3a - 3b - c \\ e &= 7a + 4b + 3c - 25 \\ f &= 20 - 5a - 2b - 3c \end{aligned}$$

Como a, b, c, d, e, f son enteros no negativos, tenemos las siguientes 10 soluciones (a, b, c, d, e, f) : $(0, 4, 3, 0, 0, 3)$, $(4, 0, 0, 3, 3, 0)$, $(1, 3, 2, 1, 0, 3)$, $(3, 1, 1, 2, 3, 0)$, $(1, 3, 3, 0, 3, 0)$, $(3, 1, 0, 3, 0, 3)$, $(2, 3, 0, 0, 1, 4)$, $(3, 2, 0, 0, 4, 1)$, $(2, 2, 1, 2, 0, 3)$, $(2, 2, 2, 1, 3, 0)$.

Aunque por simetría podemos pensar simplemente en 5 casos:

$(0, 4, 3, 0, 0, 3)$, $(1, 3, 2, 1, 0, 3)$, $(1, 3, 3, 0, 3, 0)$, $(2, 3, 0, 0, 1, 4)$ y $(2, 2, 1, 2, 0, 3)$.

Analizamos cada uno y veamos qué configuraciones pueden realizarse tanto en G_S como en G_T .

Caso 1. $(0, 4, 3, 0, 0, 3)$. Tenemos cuatro caras del tipo b , tres caras del tipo c y tres caras tipo f . Las caras de tipo c y f deben pegarse por sus $(3, 4)$ -aristas y el resto de sus aristas frontera son adyacentes a caras de tipo

b.

Aplicando el lema 25, nuestra gráfica G_S se construye a partir de una cara tipo b y tres piezas como la figura 4.7[a] (las marcas de puntos en las $(4, 1)$ -aristas de las caras c y b indican que dichas aristas deben pegarse).

Para pegar estas piezas, tenemos 2 opciones, sin embargo estamos condicionados a que los S -ciclos aparezcan con etiquetas consecutivas, lo cual nos obliga a tener una subgráfica de G_S como la figura 4.7[b].

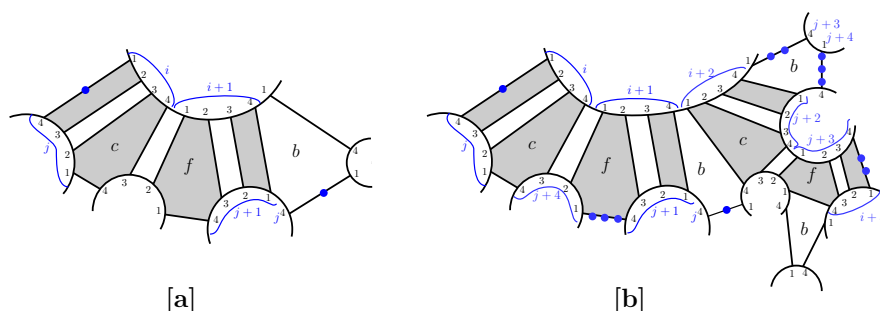


Figura 4.7: $t = 4$, $|r| = 15$, caso 1.

Sin embargo, debería haber un $(3, 2)$ S -ciclo con etiqueta $i + 4$ en un extremo y $j + 4$ en el otro. Esto no es posible pues la etiqueta $j + 4$ ya está asignada y no tiene ningún S -ciclo entre sus aristas, lo cual descarta este caso.

Caso 2. $(1, 3, 2, 1, 0, 3)$. Esta solución contradice el lema 30, inciso 3.

Caso 3. $(1, 3, 3, 0, 3, 0)$. Contradice el lema 30, inciso 1.

Caso 4. $(2, 3, 0, 0, 1, 4)$. Contradice el lema 30, incisos 2 y 4.

Caso 5. $(2, 2, 1, 2, 0, 3)$. Contradice el lema 30, inciso 3.

Hemos analizado cada uno de los 5 casos para $|r| = 15$ llegando siempre a contradicciones, por lo cual $|r| \neq 15$.

$|r| = 14$.

En este caso, por el Lema 24, Γ tiene nueve 4-caras, una de ellas con cuatro lados y las otras 8 caras con tres lados. Siendo a, b, c, d, e, f el número en que las configuraciones de las 4-caras de tres lados aparecen en G_S , tenemos

entonces que $a + b + c + d + e + f = 8$.

Por otro lado, cada una de las 4-caras con cuatro lados tienen entre 0 y 4 2-aristas, por lo que $10 \leq 2c + 2d + 3e + 3f \leq 14$.

También podemos notar que el número de (4,1)-aristas en las caras de cuatro lados está entre 0 y 4, por lo que $|3b + d - 2c - e - 2f| \leq 4$.

Las observaciones anteriores producen el sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f = 8 \\ 10 \leq 2c + 2d + 3e + 3f \leq 14 \\ |3b + d - 2c - e - 2f| \leq 4 \end{cases}$$

Cuyas soluciones enteras y no negativas se enuncian a continuación. Del lado derecho anotamos las caras de cuatro lados con las que cada solución es compatible:

- (1) (2, 2, 0, 2, 0, 2) \longrightarrow 5
- (2) (3, 1, 0, 2, 0, 2) \longrightarrow 19, 20
- (3) (1, 3, 1, 1, 0, 2) \longrightarrow 5
- (4) (2, 2, 1, 1, 0, 2) \longrightarrow 19, 20
- (5) (3, 1, 0, 2, 1, 1) \longrightarrow 11, 12, 23, 24
- (6) (2, 2, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow 11, 12, 23, 24
- (7) (2, 2, 1, 1, 2, 0) \longrightarrow 21, 22
- (8) (3, 1, 1, 1, 2, 0) \longrightarrow 10
- (9) (2, 2, 2, 0, 2, 0) \longrightarrow 10
- (10) (2, 2, 0, 1, 0, 3) \longrightarrow 13, 14
- (11) (2, 2, 0, 1, 1, 2) \longrightarrow 15, 16
- (12) (3, 1, 0, 1, 1, 2) \longrightarrow 9
- (13) (1, 3, 1, 0, 1, 2) \longrightarrow 15, 16
- (14) (2, 2, 1, 0, 1, 2) \longrightarrow 9

- (15) $(2, 2, 0, 1, 2, 1) \longrightarrow 4$
- (16) $(3, 1, 0, 1, 2, 1) \longrightarrow 17, 18$
- (17) $(1, 3, 1, 0, 2, 1) \longrightarrow 4$
- (18) $(2, 2, 1, 0, 2, 1) \longrightarrow 17, 18$
- (19) $(1, 2, 3, 1, 1, 0) \longrightarrow 17, 18$
- (20) $(0, 3, 4, 0, 1, 0) \longrightarrow 17, 18$
- (21) $(3, 0, 0, 4, 0, 1) \longrightarrow 15, 16$
- (22) $(2, 1, 1, 3, 0, 1) \longrightarrow 15, 16$
- (23) $(3, 0, 1, 3, 0, 1) \longrightarrow 9$
- (24) $(1, 2, 2, 2, 0, 1) \longrightarrow 15, 16$
- (25) $(2, 1, 2, 2, 0, 1) \longrightarrow 9$
- (26) $(1, 2, 3, 1, 0, 1) \longrightarrow 9$
- (27) $(2, 1, 1, 3, 1, 0) \longrightarrow 4$
- (28) $(1, 2, 2, 2, 1, 0) \longrightarrow 4$
- (29) $(2, 1, 2, 2, 1, 0) \longrightarrow 17, 18$
- (30) $(0, 3, 3, 1, 1, 0) \longrightarrow 4$
- (31) $(1, 2, 1, 2, 0, 2) \longrightarrow 2, 3$
- (32) $(1, 3, 0, 0, 1, 3) \longrightarrow 2, 3$
- (33) $(2, 1, 2, 1, 2, 0) \longrightarrow 7, 8$
- (34) $(1, 2, 3, 0, 2, 0) \longrightarrow 7, 8$
- (35) $(3, 1, 0, 0, 3, 1) \longrightarrow 7, 8$
- (36) $(0, 3, 1, 0, 1, 3) \longrightarrow 1$
- (37) $(0, 2, 2, 2, 0, 2) \longrightarrow 1$
- (38) $(1, 2, 0, 1, 1, 3) \longrightarrow 1$
- (39) $(0, 3, 0, 1, 2, 2) \longrightarrow 6$

- (40) $(2, 1, 0, 1, 4, 0) \longrightarrow 1$
- (41) $(1, 2, 1, 0, 4, 0) \longrightarrow 1$
- (42) $(2, 0, 0, 4, 0, 2) \longrightarrow 1$
- (43) $(1, 1, 1, 3, 0, 2) \longrightarrow 1$
- (44) $(1, 1, 0, 4, 1, 1) \longrightarrow 6$
- (45) $(0, 2, 1, 3, 1, 1) \longrightarrow 6$
- (46) $(0, 3, 4, 1, 0, 0) \longrightarrow 11, 12, 23, 24$
- (47) $(2, 1, 2, 3, 0, 0) \longrightarrow 11, 12, 23, 24$
- (48) $(0, 4, 2, 0, 0, 2) \longrightarrow 5$
- (49) $(3, 1, 0, 2, 2, 0) \longrightarrow 21, 22$
- (50) $(4, 0, 0, 2, 2, 0) \longrightarrow 10$
- (51) $(1, 3, 1, 0, 0, 3) \longrightarrow 13, 14$
- (52) $(0, 3, 3, 1, 0, 1) \longrightarrow 15, 16$
- (53) $(0, 3, 4, 0, 0, 1) \longrightarrow 9$
- (54) $(3, 0, 0, 4, 1, 0) \longrightarrow 4$
- (55) $(3, 0, 1, 3, 1, 0) \longrightarrow 17, 18$
- (56) $(2, 2, 0, 0, 0, 4) \longrightarrow 7, 8$
- (57) $(0, 3, 2, 1, 0, 2) \longrightarrow 2, 3$
- (58) $(3, 0, 1, 2, 2, 0) \longrightarrow 7, 8$
- (59) $(2, 2, 0, 0, 4, 0) \longrightarrow 2, 3$

Los primeros 37 casos contradicen el lema 30, mientras que las soluciones de la 38 a la 45 contradicen el lema 27. Por tanto, basta desarrollar los casos del 46 al 59.

Caso 46. $(0, 3, 4, 1, 0, 0) \longrightarrow 11, 12, 23, 24$.

La cara tipo d solamente puede ser adyacente a caras tipo c en sus $(4, 3)$ -aristas. Como la cara d tiene un $(1, 2)$ S-ciclo, por el Lema 26 en cualquier

$(1, 4; 2, 3)$ -bígono de G_S , las aristas correspondientes deben ser paralelas. Dichos bígono aparecen en la cara tipo d y en las caras 11, 23 y 24, por lo que alguna de las aristas rojas de la figura 4.8 (excepto la de cara d), debería ser $(4, 3)$ -arista, lo que no se cumple.

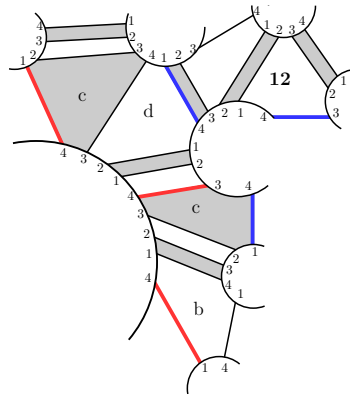


Figura 4.8: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 46.

Suponiendo ahora que en la configuración aparece la cara 12, por el Lema 25 los $(1, 2)$ S-ciclos de la cara d y 12 tienen aristas paralelas, por lo que tienen etiquetas contiguas y la única forma de conseguirlo es pegando la cara 12 como se muestra en la figura 4.8. Por otro lado, por el Lema 29, la $(4, 1)$ -arista de la cara d debería aparecer entre $(4, 1)$ -aristas de las caras tipo b , es decir, todas las aristas azules de la figura 4.8 deberían ser $(4, 1)$ -aristas lo que no se cumple.

Caso 47. $(2, 1, 2, 3, 0, 0) \rightarrow 11, 12, 23, 24$.

Por el Lema 29, las $(4, 3)$ -aristas de las caras tipo c aparecen consecutivas y entre las caras tipo a . Lo mismo sucede con las $(4, 1)$ -aristas de las caras tipo d , aparecen consecutivas y entre las aristas de la cara tipo b . Para que esto suceda, G_S debe tener una subgráfica como la figura 4.9, donde las aristas rojas son las $(4, 3)$ -aristas consecutivas y las aristas azules son las $(4, 1)$ -aristas consecutivas.

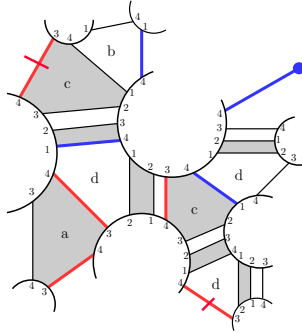


Figura 4.9: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 47.

Sin embargo como puede observarse, no hay caras en esta configuración que podamos pegar a la cara tipo d para llegar a la $(4, 1)$ -arista marcada con un punto.

Caso 48. $(0, 4, 2, 0, 0, 2) \rightarrow 5$.

En G_S se tienen dos piezas como las de la figura 4.10.

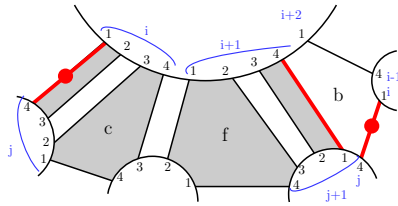


Figura 4.10: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 48.

Por el Lema 25, las aristas de los $(2, 3)$ S-ciclos están en un anillo en G_T , por lo que deben ser consecutivos en G_S y para que esto suceda, deben tener etiquetas como se muestra en la figura 4.10 y por tanto las aristas marcadas con un punto se pegan. Como G_S tiene $(2, 3)$ S-ciclos, entonces por el Lema 26, para cualquier $(1, 2; 3, 4)$ bígono, las aristas correspondientes son paralelas. Hay seis $(4, 1)$ -aristas que están en bígono de la forma $(1, 2; 3, 4)$, por lo que hay al menos seis $(4, 1)$ -aristas paralelas. Por otro lado, por el Lema 28, existen clases de aristas I y II en G_T tales que cualquier $(4, 1)$ -ciclo de Scharlemann (caras tipo b) tiene exactamente una arista en la clase I y dos aristas de clase II , como tenemos cuatro ciclos de este tipo, podemos suponer que hay cuatro aristas en la clase I y ocho aristas en la clase II . En particular, en la figura 4.10 las aristas de color rojo pertenecen a la clase II en G_T , sin embargo no es posible representarlas debido a las etiquetas que tienen.

Caso 49. $(3, 1, 0, 2, 2, 0) \longrightarrow 21, 22$.

Por el Lema 29, las $(4, 1)$ -aristas son paralelas en G_T , por lo que las caras d aparecen consecutivas en G_S , sin embargo como se aprecia en la figura 4.11, entre estas caras no es posible pegar ninguna de las caras con las que contamos $\{a, b, e, 21, 22\}$.

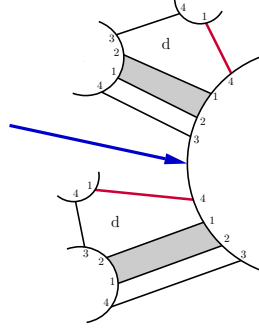


Figura 4.11: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 49.

Caso 50. $(4, 0, 0, 2, 2, 0) \longrightarrow 10$.

Las $(4, 1)$ -aristas de las caras tipo d solamente pueden pegarse a las $(4, 1)$ -aristas de las caras tipo e . Por otro lado, los $(1, 2)$ S-ciclos aparecen con etiquetas consecutivas en G_S por el Lema 25.

Los $(1, 2)$ S-ciclos de las caras e no pueden ser consecutivos en G_S pues formarían una subgráfica de tipo III del Lema 4.6. De la misma forma, los $(1, 2)$ S-ciclos de las caras d no pueden ser consecutivos en G_S pues formarían una subgráfica de tipo II del Lema 4.6.

Tampoco los $(1, 2)$ S-ciclos de la cara 10 pueden ser consecutivos pues producirían una subgráfica cerrada.

Por las observaciones anteriores, en G_S tenemos la subgráfica como en la figura 4.12.

Sin embargo una configuración así implicaría la existencia de dos 4-aristas diferentes con etiqueta i , una contradicción.

Caso 51. $(1, 3, 1, 0, 0, 3) \longrightarrow 13, 14$.

Al menos una de las caras tipo b es adyacente a dos caras tipo f , formando así una subgráfica de tipo IV del Lema 4.6 lo cual es una contradicción.

Caso 52. $(0, 3, 3, 1, 0, 1) \longrightarrow 15, 16$.

Por el Lema 29, la $(4, 1)$ -arista de la cara tipo d está entre $(4, 1)$ -aristas de las caras b . Por otro lado, por el Lema 26, los $(1, 4; 3, 2)$ -bógonos deben ser consecutivos, por lo que se tiene una subgráfica como la de la figura 4.13.

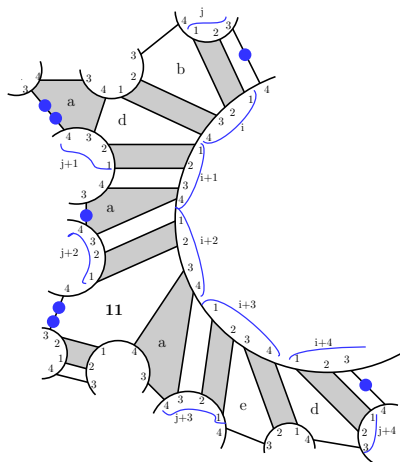


Figura 4.12: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 50.

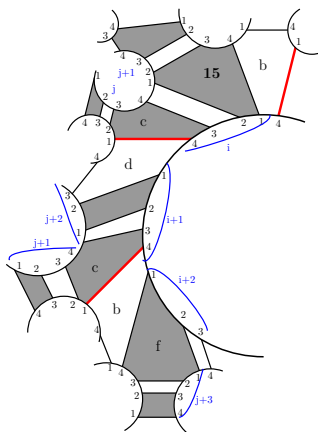


Figura 4.13: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 52.

Sin embargo habría dos esquinas con etiqueta $j + 1$, lo cual no es posible. La misma contradicción se obtiene si en lugar de pegar la cara 15 se pega la cara 16.

Caso 53. $(0, 3, 4, 0, 0, 1) \rightarrow 9$.

La cara tipo 9, tiene un $(1, 2)$ -ciclo de Scharlemann de longitud 3 y en la cara f tenemos una $(1, 2)$ -arista. Por el Lema 29, la $(1, 2)$ -arista de la cara f debe aparecer en G_S entre las aristas del $(1, 2)$ -ciclo de Scharlemann de la cara 9, por lo que tenemos una configuración como la de la figura 4.14. Sin embargo, como puede apreciarse, una de las aristas (azul) no puede ser $(1, 2)$ -arista.

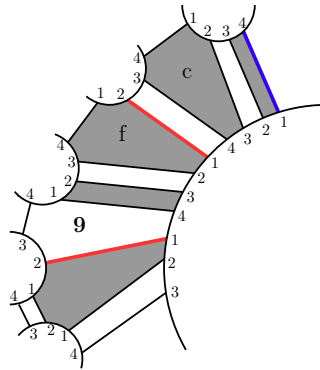


Figura 4.14: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 53.

Caso 54. $(3, 0, 0, 4, 1, 0) \longrightarrow 4$.

La cara 4 tiene un $(2, 3)$ -ciclo de Scharlemann, entonces por el Lema 26 los bígono de la forma $(1, 2; 3, 4)$ tienen sus aristas correspondientes paralelas. Estos bígono aparecen en la cara 4 y en la cara e , sin embargo por el Lema 25 también tenemos que los $(1, 2)$ S-ciclos están en un anillo en G_T , por lo que la cara tipo e solamente puede ser adyacente a una cara tipo d por un lado y a una cara tipo a por el otro, lo que genera una subgráfica como la de la figura 4.15 y esto impide que los $(1, 2; 3, 4)$ -bígono sean consecutivos.

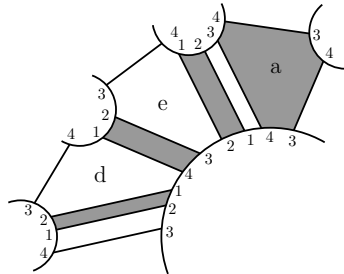


Figura 4.15: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 54.

Caso 55. $(3, 0, 1, 3, 1, 0) \longrightarrow 17, 18$.

Como la cara tipo c tiene un $(2, 3)$ S-ciclo, por el Lema 26, los bígono de la forma $(1, 2; 3, 4)$ tienen sus aristas correspondientes paralelas en G_T . Estos bígono aparecen en la cara c , en la cara e y en la cara 17 ó 18. Esto significa que tienen etiquetas consecutivas en G_T . Sin embargo al observar la gráfica en G_S (figura 4.16), tenemos que para pasar de la etiqueta $j - 1$ a j necesariamente sería con una cara tipo b , pero no hay caras de este tipo en esta configuración.

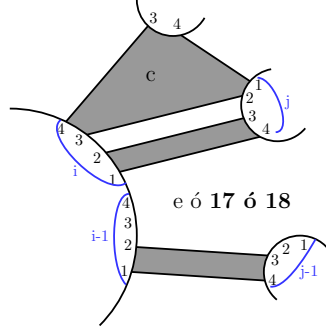


Figura 4.16: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 55.

Caso 56. $(2, 2, 0, 0, 0, 4) \rightarrow 7, 8$.

Por el Lema 29, las $(4, 1)$ -aristas de la cara 7 (ú 8) deben aparecer entre las aristas de los ciclos de Scharlemann b . En particular deben ser consecutivas en G_T . Para el caso de la cara 7, ésta solamente puede pegarse a una cara tipo f por un lado y a una cara tipo a por otro, como se muestra en la figura 4.17(a) por lo que no tendría $(4, 1)$ -aristas con etiquetas consecutivas. Si se trata en cambio de la cara 8, la forma en que deberían pegarse las caras en la gráfica para que las $(4, 1)$ -aristas queden consecutivas, ocasionaría que el vértice se cerrara sin contener todas las esquinas, como se aprecia en la figura 4.17(b), lo cual no es posible.

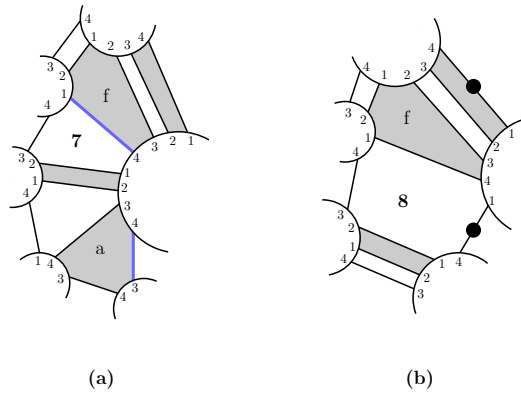


Figura 4.17: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 56.

Caso 57. $(0, 3, 2, 1, 0, 2) \rightarrow 2, 3$.

Por el Lema 29, la $(4, 1)$ -arista de la cara tipo d , debe aparecer entre las $(4, 1)$ -aristas de los ciclos de Scharlemann tipo b . Por otro lado, como la cara

tipo d contiene un $(1, 2)$ S-ciclo, por el Lema 26, los b́igonos de la forma $(2, 3; 1, 4)$ tienen sus aristas correspondientes paralelas. Estos b́igonos aparecen en la cara tipo d y en las caras tipo f . Para que esto suceda, debemos tener una subgŕafica en G_S como la que se muestra en la figura 4.18, sin embargo no habŕa forma de pasar de la etiqueta j a la etiqueta $j + 1$ con las caras que hay en esta configuraci3n.

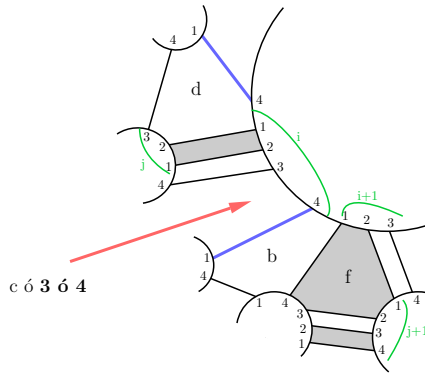


Figura 4.18: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 57.

Caso 58. $(3, 0, 1, 2, 2, 0) \rightarrow 7, 8$.

La cara tipo c contiene un $(2, 3)$ S-ciclo, por lo que por el Lema 26, los b́igonos de la forma $(1, 2; 3, 4)$ tienen sus aristas correspondientes paralelas en G_T . Estos b́igonos se encuentran en las caras tipo c y e , por lo que deben tener etiquetas consecutivas. Por otro lado, la $(3, 4)$ -arista de la cara c debe aparecer entre los ciclos de Scharlemann a , como se muestra en la figura 4.19, sin embargo hay dos 4-aristas diferentes con etiqueta j , como se aprecia en la misma figura.

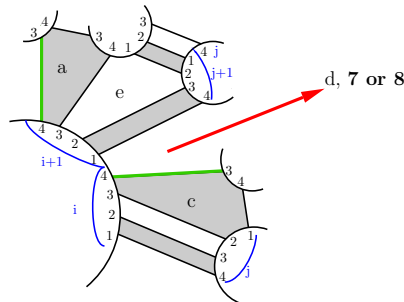


Figura 4.19: $t = 4$, $|r| = 14$, caso 58.

Caso 59. $(2, 2, 0, 0, 4, 0) \longrightarrow 2, 3$.

A lo más dos caras tipo e son adyacentes a la cara 2 ó 3 en una $(3, 4)$ -arista y como los $(1, 2)$ S-ciclos de las caras e deben ser consecutivos (lema 25), entonces al menos dos de estas caras e están separadas por una cara tipo a , formando así una subgráfica de tipo III del Lema 4.6, lo cual no es posible.

4.3. El caso $t = 2$.

Recordemos que por el Teorema 1, podemos asumir para este caso que $|r| \leq 20$. Supongamos además que $|r| \geq 14$ para llegar eventualmente a una contradicción.

Observemos que al aplicar la desigualdad (3.2) al caso de género 3, obtenemos la siguiente

$$2F_2 + F_3 \geq 2|r| - 20 \quad (4.1)$$

Lema 32. *Un bígono y un triángulo de G_S no pueden ser adyacentes.*

Demostración. Si G_S tuviera un bígono y un triángulo adyacentes, entonces por el Lema 15, G_S contiene solamente un bígono. Supongamos que dicho bígono es negro y que sus clases de aristas son $\{\chi_1, \chi_2\}$.

Sean E, F el número de aristas y discos cara de G_S , respectivamente. Entonces un cálculo de la característica de Euler para G_S nos da $F \geq E - 5$. Como G_S contiene solamente un bígono, tenemos que $2E \geq 3(F - 1) + 2 = 3F - 1 \geq 3(E - 5) - 1 = 3E - 16$, así que $E \leq 16$.

Sean F^b, F^w el número de discos cara negros y blancos de G_S , respectivamente. Tenemos entonces que $E \geq 3(F^b - 1) + 2 = 3F^b - 1$, entonces $F^b \leq (E + 1)/3$. Por lo que $(E + 1)/3 + F^w \geq F^b + F^w = F \geq E - 5$, lo cual nos da $F^w \geq (2E - 16)/3 = (2|r| - 16)/3 \geq 10/3$ y por tanto, $F^w \geq 4$. Como cada disco cara blanco tiene al menos tres lados, tenemos que $E \geq 3F^w \geq 12$ y entonces $E \in \{12, 13, 14, 15, 16\}$.

E no puede ser 12 ni 13 ya que $E = |r|$ y supusimos $|r| \geq 14$. Por otro lado, si $E = 16$, como $F^w \geq (2E - 16)/3$, entonces $F^w \geq 6$ y $E \geq 3F^w \geq 18$ lo cual es una contradicción y por tanto tampoco puede darse.

Si $E = 15$, como $F^w \geq (2E - 16)/3$, entonces $F^w \geq 5$. Además $15 = E \geq 3F^w \geq 15$, entonces $F^w = 5$. Así G_S contiene exactamente cinco triángulos blancos y cada arista de G_S pertenece a alguno de estos triángulos. Dos triángulos

blancos de G_S son adyacentes al único bígono negro. Por el Lema 12, los dos triángulos blancos tienen clases de aristas como en la figura 4.20.

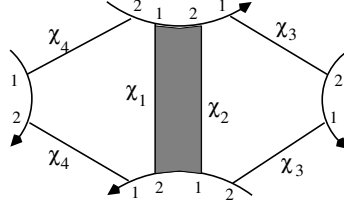


Figura 4.20: Un bígono y un triángulo no pueden ser adyacentes en G_S .

Por el Lema 13, e_4 es la única arista en la clase χ_2 . Sin embargo en los otros tres triángulos blancos debe haber una arista de clase χ_1 ó χ_2 , lo cual contradice que cada χ_i ($i = 1, 2$) tenga solamente una arista, por lo que tampoco puede darse este caso.

Si $E = 14$, como $F^w \geq (2E - 16)/3 = 4$ y $14 = E \geq 3F^w \geq 12$, entonces $F^w = 4$. Así G_S contiene dos triángulos y dos cuadrados blancos ó tres triángulos y un pentágono blancos.

En el primer caso, por la desigualdad (4.1), $2F_2 + F_3 \geq 8$, entonces $F_3 \geq 6$, de estos triángulos, dos son blancos, por lo que debe haber al menos cuatro triángulos negros. Tampoco puede haber más de cuatro triángulos negros, pues contando sus aristas serían doce de los triángulos y dos del bígono, lo cual da el total $E = 14$. Por tanto hay exactamente cuatro triángulos negros y por los lemas 11 y 12, estos triángulos negros deben ser iguales, es decir son del mismo tipo. Por un conteo de aristas, podemos afirmar que hay parejas de triángulos adyacentes. En este caso, el Lema 23 implica que los triángulos son únicos respecto a su tipo, lo cual no es posible pues tenemos 4 triángulos negros del mismo tipo.

En el segundo caso (tres triángulos y un pentágono blancos), podemos ver nuevamente que hay exactamente cuatro caras negras (además del único bígono) que son triángulos del mismo tipo. Nuevamente, podemos probar que hay parejas de triángulos adyacentes, lo cual no es posible por el Lema 23. Con esto concluimos todos los casos y la prueba del Lema. \square

Lema 33. Si G_S tiene un disco cara de cuatro lados adyacente a tres bígono, entonces $F_3 = 0$.

Demostración. Supongamos que G_S tiene un disco cara de 4 lados C , adyacente a 3 bígono, b_1, b_2, b_3 de tipo $\{\chi_1, \chi_2\}$. Sea e la arista de C que no es adyacente a un bígono y sean e_1, e_2, e_3 las otras aristas de C , numeradas

sucesivamente y en sentido opuesto a las manecillas del reloj a lo largo de ∂C . Cada arista e_i ($i = 1, 2, 3$) es inmediatamente paralela a una arista e'_i . Salvo el intercambio de χ_1 y χ_2 hay solamente dos posibilidades para las clases de aristas de e_1, e'_1, e_3, e'_3 ; (i) $\mathcal{L}(e'_1) = \mathcal{L}(e_3) = \chi_1$, $\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e'_3) = \chi_2$ o (ii) $\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e_3) = \chi_1$, $\mathcal{L}(e'_1) = \mathcal{L}(e'_3) = \chi_2$.

Supongamos primero $\mathcal{L}(e'_1) = \mathcal{L}(e_3) = \chi_1$, $\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e'_3) = \chi_2$ y que $\mathcal{L}(e) = \chi_1$. Entonces e'_3 es una arista de más afuera por el Lema 13. Además no hay aristas consecutivas de e_1, e_2, e_3 que tengan clase de arista χ_2 , ya que de otra forma tales aristas serían las de más afuera de la clase. Así f es una (χ_1, χ_2) buena cara, lo que contradice el lema 8. Esto muestra que $\mathcal{L}(e) \neq \chi_1$. Un argumento similar prueba que $\mathcal{L}(e) \neq \chi_2$, por lo que podemos suponer $\mathcal{L}(e) = \chi_3$. Así, debemos tener $\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e_3) = \chi_1$, $\mathcal{L}(e'_1) = \mathcal{L}(e'_3) = \chi_2$ y $\mathcal{L}(e) = \chi_3$. Por otro lado, si tuvieramos que $\mathcal{L}(e_2) = \chi_1$, $\mathcal{L}(e'_2) = \chi_2$, entonces e'_2 es también una arista de más afuera de la clase χ_2 lo cual no es posible, por lo que $\mathcal{L}(e_2) = \chi_2$, $\mathcal{L}(e'_2) = \chi_1$. De esta manera llegamos a que nuestra gráfica se ve como en la figura 4.21.

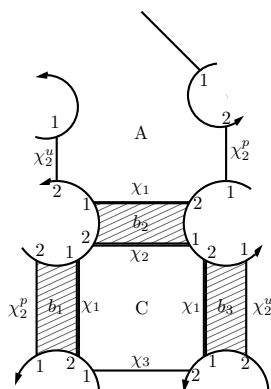


Figura 4.21: Un cuadrado adyacente a tres bígono.

Por el Lema 13, hay una única arista en la clase χ_3 y las aristas señaladas con supraíndices p y u son la primera y última, respectivamente, de la clase χ_2 . Por el orden de las etiquetas en G_T , no es posible tener más aristas en la clase χ_2 y por tanto son 3 las aristas de esta clase.

Nuevamente por el Lema 13, la cara blanca A que sea adyacente al bígono b_2 debe tener dos aristas diferentes en la clase χ_2 (pues no puede haber dos bígono adyacentes por lema 14). En estas aristas de clase χ_2 se deben pegar las de los bígono b_1 y b_3 pues solamente hay tres aristas en esta clase.

Por lo anterior, en el resto de los discos cara de G_S solamente puede haber aristas de tipo χ_1 ó χ_4 , salvo el disco cara negro D , adyacente al cuadrado C y que debe tener una arista de tipo χ_3 .

D no puede ser un bígono, pues un cuadrado no puede estar rodeado de bígono (lema 17).

Si D tuviera tres lados, sus otras dos aristas deben ser de tipo χ_4 ya que los bígono negro y D deben tener clases de aristas disjuntas por el Lema 11. En este caso, aplicando el lema 13, llegamos a que habría solamente tres aristas en la clase χ_1 y el resto de las aristas en G_S serían de clase χ_4 lo que significa que no habría más discos cara en G_S por el Lema 3, sin embargo $F \geq 1 - 2g + |r| \geq 9$ si $g = 3$ y $|r| \geq 14$, lo que sería una contradicción.

Por tanto, D debe tener al menos cuatro lados. De esta forma, el resto de los bígono y trígono en G_S son $\{\chi_1, \chi_4\}$ -buenas caras.

No puede haber trígono negro porque deberían ser de tipo $\{\chi_3, \chi_4\}$ por el Lema 11.

Por otro lado, no puede haber bígono y trígono blanco al mismo tiempo por el Lema 18.

Sean $F_2^b, F_2^w, F_3^b, F_3^w$ los bígono negro y blanco y triángulo negro y blanco en G_S , respectivamente. Tenemos entonces que $F_2^b = 3, F_3^b = 0, F_2^w > 0$ implica $F_3^w = 0$ y $F_3^w > 0$ implica $F_2^w = 0$. Por tanto, existen solamente dos opciones: cuando hay discos cara con tres lados ($F_3^w > 0$) y cuando no hay ($F_3^w = 0$).

También tenemos que $2|r| \geq 2(F_2^b + F_2^w) + 3(F_3^b + F_3^w) + 4(F - F_2^b - F_2^w - F_3^b - F_3^w) = 4F - 2F_2^w - F_3^w - 6 \geq 4(1 - 2g + |r|) - (2F_2^w + F_3^w + 6)$, por lo que $2F_2^w + F_3^w \geq 2|r| - 26$.

Si $F_3^w > 0$, entonces $F_2^w = 0$ y $F_3^w \geq 2|r| - 26$, pero $|r| \geq 3F_3^w + 8$ pues hay al menos ocho aristas en las otras caras blancas y $3F_3^w + 8 \geq 6|r| - 70$ lo que implica $|r| \leq \frac{70}{5} = 14$ y por hipótesis $|r| \geq 14$ por lo que $|r| = 14$ en este caso. También como $F_3^w \geq 2|r| - 26 = 2$, tenemos que hay al menos dos discos cara blanco con tres lados en G_S . Esto implica que en G_S hay exactamente cuatro caras blancas: dos trígono y dos con cuatro lados, lo que significa que la cara A de la figura 4.21 tiene cuatro lados, veremos que esto no es posible. La cuarta arista de la cara A (que no tiene etiqueta), solamente

puede ser de clase χ_1 o χ_4 , sin embargo no puede ser de clase χ_1 pues A sería una (χ_1, χ_2) -buena cara, contradiciendo el lema 8 y tampoco puede ser de tipo χ_4 pues por la forma en que se pegan las aristas y por el Lema 13, esa arista sería la única de la clase χ_4 , implicando que el resto de las aristas en la gráfica (en particular las de los triángonos) sean de tipo χ_1 , lo cual no es posible. Por tanto $F_3^w = 0$. \square

Denotaremos por $\overline{G_S}$ la gráfica reducida de G_S , es decir, la gráfica que se obtiene de G_S al pegar cada conjunto de aristas paralelas en una sola arista. El *peso* de una arista reducida es el número de aristas de G_S en la arista reducida.

Usaremos las letras $\overline{E}, \overline{F}$ para denotar el número de aristas y discos cara de la gráfica reducida $\overline{G_S}$, respectivamente. Cualquier arista en $\overline{G_S}$ tiene peso 1 ó 2 por el Lema 14. Sea E_i ($i = 1, 2$) el número de aristas de peso i en $\overline{G_S}$. También, sea \overline{F}_k ($k \geq 3$) el número de discos cara con k lados en $\overline{G_S}$. Tenemos entonces que $\overline{E} = E_1 + E_2$ y $\overline{F} = \sum_{k \geq 3} \overline{F}_k$.

Como $\overline{G_S}$ tiene solamente un vértice, tenemos que $1 - \overline{E} + \overline{F} \geq \chi(\hat{S}) = -4$ por lo que $\overline{F} \geq \overline{E} - 5$.

Sean F_{odd}, F_{even} el número de discos cara de $\overline{G_S}$ con un número impar y par de lados, respectivamente. Entonces $\overline{F} = F_{odd} + F_{even}$. Por los lemas 12 y 32, tenemos que:

- En cada triángulo de $\overline{G_S}$, todas sus aristas tienen peso 1.
- En cada n -ágono ($n > 3$ impar), al menos dos de sus aristas tienen peso 1.
- Cada n -ágono ($n > 4$ par) tiene al menos una arista de peso 1.

Entonces tenemos que

$$2E_1 \geq 3F_3 + 2(F_{odd} - F_3) + F_{even} = \overline{F} + F_{odd} + F_3.$$

El número de aristas de G_S es $|r| = 2E_2 + E_1 = 2\overline{E} - E_1$. Contando las aristas de $\overline{G_S}$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
2\bar{E} &\geq 3F_3 + 4(\bar{F} - F_3) \\
&= 4\bar{F} - F_3 \\
&\geq 5\bar{F} + F_3 - (\bar{F} + F_{\text{odd}} + F_3) \\
&\geq 5(\bar{E} - 2g + 1) + F_3 - 2E_1 \\
&= \bar{E} + 2(2\bar{E} - E_1) - 10g + 5 + F_3 \\
&= \bar{E} + 2|r| - 10g + 5 + F_3
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Por lo que,

$$\bar{E} \geq 2|r| - 10g + 5 \tag{4.3}$$

Por otro lado, $2\bar{E} \geq 3F_3 + 4(\bar{F} - F_3) = 4\bar{F} - F_3 \geq 4(\bar{E} - 2g + 1) - F_3 = 4\bar{E} - 8g + 4 - F_3$ implica que $F_3 \geq 2\bar{E} - 8g + 4$, por (4.2) tenemos entonces que $2\bar{E} \geq \bar{E} + 2|r| - 10g + 5 + F_3 \geq \bar{E} + 2|r| - 10g + 5 + 2\bar{E} - 8g + 4 = 3\bar{E} + 2|r| - 18g + 9$, de donde

$$\bar{E} \leq -2|r| + 18g - 9 \tag{4.4}$$

De (4.3) y (4.4) se sigue que en el caso de género 3:

$$2|r| - 25 \leq \bar{E} \leq -2|r| + 45 \tag{4.5}$$

y además,

$$|r| \leq 17 \tag{4.6}$$

Lema 34. *Si en G_S los discos cara de cuatro lados son adyacentes a lo más a dos bígono, entonces $|r| \in \{14, 15\}$.*

Demostración. Si en G_S los discos cara de cuatro lados son adyacentes a lo más a dos bígono, entonces:

$$2E_1 \geq 3F_3 + 2(F_{\text{odd}} - F_3) + 2F_4 + (F_{\text{even}} - F_4) = \bar{F} + F_{\text{odd}} + F_3 + F_4.$$

y

$$\begin{aligned}
2\bar{E} &\geq 3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) \\
&= 5\bar{F} - (2F_3 + F_4) \\
&\geq 5\bar{F} - (F_{\text{odd}} + F_3 + F_4) \\
&= 6\bar{F} - (\bar{F} + F_{\text{odd}} + F_3 + F_4) \\
&\geq 6(\bar{E} - 2g + 1) - 2E_1 \\
&= 2\bar{E} + 2(2\bar{E} - E_1) - 12g + 6 \\
&= 2\bar{E} + 2|r| - 12g + 6
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Lo cual implica $|r| \leq 6g - 3 = 15$ y por hipótesis $|r| \geq 14$, entonces $|r| \in \{14, 15\}$. \square

Debido a la desigualdad (4.6), podemos asumir que $|r| \leq 17$ si G_S tiene algún disco cara de cuatro lados rodeado por tres b́igonos y $|r| \leq 15$ en caso contrario por el Lema 34.

Continuaremos entonces con la prueba de nuestro teorema dividiendo en dos grandes casos: cuando G_S contiene un cuadrado rodeado de tres b́igonos y cuando no.

4.3.1. Si existe un cuadrado en G_S rodeado por 3 b́igonos

$|r| = 17$.

Por el Lema 33, G_S no contiene caras de tres lados y por la desigualdad (4.1), $F_2 \geq |r| - 10 = 7$. Como $F_2^b = 3$, entonces $F_2^w \geq 4$, entonces por los lemas 17 y 20, hay dos caras negras con al menos seis lados, entonces $|r| \geq 2 * 3 + 2 * 6 = 18$, una contradicción.

$|r| = 16$.

Debido a la desigualdad (4.5), tenemos que si $|r| = 16$, $13 \geq \bar{E} \geq 7$. Como también $1 - |r| + F \geq -4$, tenemos que $F \geq 11$.

Si $\bar{E} = 7$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 14 - 16 = -2$ una contradicción.

Si $\bar{E} = 8$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 16 - 16 = 0$ lo cual no es cierto pues hay aristas de peso uno en G_S .

Si $\bar{E} = 9$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 18 - 16 = 2$ lo que significa que $E_2 = 7$. Hay tres b́igonos negros, entonces debe haber cuatro b́igonos blancos. Por los lemas 17 y 20 hay dos caras negras con al menos seis lados, entonces $|r| \geq 2 * 3 + 2 * 6 = 18$, una contradicción.

Si $\bar{E} = 10$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 20 - 16 = 4$ lo que significa que $E_2 = 6$. Solamente hay tres b́igonos negros, entonces debe haber tres b́igonos blancos, por lo que en total, hay cinco caras blancas en G_S , además $F \geq 11$ implica que hay al menos seis caras negras, tres son b́igonos y las

otras tienen al menos cuatro lados, por lo que $|r| \geq 2F_2^b + 4(3) = 18$, una contradicción.

Si $\bar{E} = 11$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 22 - 16 = 6$ lo que significa que $E_2 = 5$. Hay tres bígono negro, entonces debe haber dos bígono blanco, por lo que en total, hay a lo más cinco caras blancas en G_S , además $F \geq 11$ implica que hay al menos seis caras negras, tres son bígono y las otras tienen al menos cuatro lados, por lo que $|r| \geq 2F_2^b + 4(3) = 18$, una contradicción.

Si $\bar{E} = 12$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 24 - 16 = 8$ lo que significa que $E_2 = 4$. Hay tres bígono negro, entonces debe haber un bígono blanco, por lo que en total, hay a lo más cuatro caras blancas en G_S , además $F \geq 11$ implica que hay al menos siete caras negras, tres son bígono y las otras tienen al menos cuatro lados, por lo que $|r| \geq 2F_2^b + 4(4) = 22$, una contradicción.

Si $\bar{E} = 13$. Como $|r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $E_1 = 26 - 16 = 10$ lo que significa que $E_2 = 3$. Hay tres bígono negro, entonces no puede haber bígono blanco, por lo que en total, hay a lo más cuatro caras blancas en G_S , además $F \geq 11$ implica que hay al menos siete caras negras, tres son bígono y las otras tienen al menos cuatro lados, por lo que $|r| \geq 2F_2^b + 4(4) = 22$, una contradicción.

$|r| = 15$.

Dado que hay al menos dos aristas de peso 1 y tres de peso 2 en \bar{G}_S , tenemos que $E_1 \geq 2$ y $E_2 \geq 3$. Además, $|r| = 2\bar{E} - E_1$ y $\bar{E} = E_1 + E_2$, por lo que $9 \leq \bar{E} \leq 12$.

Si $\bar{E} = 9$, entonces $E_1 = 3$ y $E_2 = 6$ y como en G_S hay tres bígono negro, entonces debe haber tres bígono blanco. Esto significa que hay a lo más cinco caras blancas. Además $F \geq |r| - 2g + 1 = 10$, por lo que debe haber al menos cinco caras negras, tres de las cuales son bígono y las otras deben tener al menos cuatro lados. Por conteo de aristas, los discos cara en G_S tanto negro como blanco son: tres bígono, un cuadrado y un pentágono. El cuadrado y pentágono negro resultan ser adyacentes a los tres bígono blanco. Por otro lado, como solamente quedan clases de aristas χ_1, χ_4 (según figura 4.21), los bígono blanco son de este tipo. Para no tener (χ_1, χ_4) -buenas caras de ambos lados, el pentágono negro debe tener sus aristas de tipo χ_1 y las de tipo χ_4 consecutivas. Como el cuadrado negro

es adyacente a tres b́igonos, debe tener una configuraci3n similar a la del cuadrado C , en particular es adyacente a 3ste en la 3nica arista de tipo χ_3 . Por lo que la configuraci3n para G_S es como la que se muestra en la figura 4.22. Llev3ndonos a la contradicci3n de que hay dos primeras aristas de tipo χ_1 y dos 3ltimas aristas de tipo χ_4 .

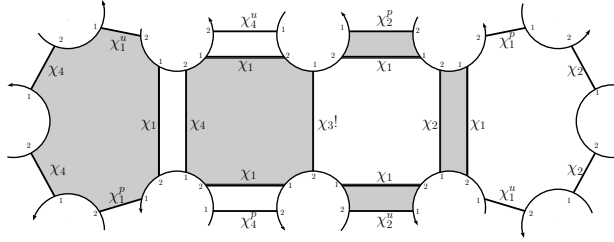


Figura 4.22:

Si $\bar{E} = 10$, entonces $E_1 = 5$ y $E_2 = 5$, por lo que hay dos b́igonos blancos y por tanto un m3ximo de cuatro caras blancas en G_S . Como adem3s $F \geq 10$, hay al menos seis caras negras, de las cuales tres son b́igonos y las otras tienen al menos cuatro lados. Esto implica que $15 = |r| \geq 3 * 2 + 3 * 4 = 18$, una contradicci3n.

Si $\bar{E} = 11$, entonces $E_1 = 7$ y $E_2 = 4$, por lo que hay un b́igono blanco y por tanto un m3ximo de cuatro caras blancas en G_S . Como adem3s $F \geq 10$, hay al menos seis caras negras, de las cuales tres son b́igonos y las otras tienen al menos cuatro lados. Esto implica que $15 = |r| \geq 3 * 2 + 3 * 4 = 18$, una contradicci3n.

Si $\bar{E} = 12$, entonces $E_1 = 9$ y $E_2 = 3$, por lo que no hay b́igonos blancos y el m3ximo de caras blancas en G_S es 3. Como adem3s $F \geq 10$, hay al menos seis caras negras, de las cuales tres son b́igonos y las otras tienen al menos cuatro lados. Esto implica que $15 = |r| \geq 3 * 2 + 4 * 4 = 22$, una contradicci3n.

$$|r| = 14.$$

Por el Lema 33, no hay discos cara de tres lados. Como $8 \geq E_1 \geq 2$ y $14 = |r| = 2\bar{E} - E_1$, entonces $8 \leq \bar{E} \leq 11$.

Si $\bar{E} = 8$, entonces $E_1 = 2$ y $E_2 = 6$, por lo que $b^w = 3$, as3 que en G_S hay exactamente cinco caras blancas: tres b́igonos y dos de cuatro lados, lo que significa que la cara A de la figura 4.21 tiene cuatro lados, que como vimos

en la prueba del Lema 33 no es posible.

Si $\overline{E} = 9$, por el Lema 19, los bígono blancos son consecutivos y son adyacentes a los cuadrados negros. De acuerdo con la gráfica 4.21, el resto de las aristas son de tipo $\{\chi_1, \chi_4\}$. Para no tener (χ_1, χ_4) -buenas caras de ambos lados de G_T , uno de los cuadrados negros debe tener dos aristas consecutivas de tipo χ_1 y las otras dos de tipo χ_4 , generando una subgráfica como la que se muestra en la figura 4.23. Sin embargo, aplicando el lema 13, encontramos dos últimas aristas distintas en la clase χ_4 y dos primeras aristas distintas en la clase χ_4 , una contradicción.

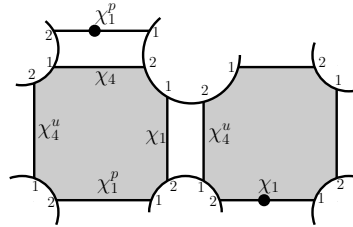


Figura 4.23:

Si $\overline{E} = 10$, entonces $E_1 = 6$ y $E_2 = 4$, por lo que $F_2^w = 1$, así que en G_S hay a lo más cuatro caras blancas y como $F \geq 9$, hay al menos cinco caras negras. Por tanto, hay cuatro caras blancas: un bígono y tres cuadrados y cinco caras negras: tres bígono y dos cuadrados. Esto implica que la cara A de la figura 4.21 sería un cuadrado, pero hemos visto que esto nos lleva a una contradicción.

Si $\overline{E} = 11$, entonces $E_1 = 8$ y $E_2 = 3$, por lo que no hay bígono blancos, así que en G_S hay a lo más tres caras blancas y como $F \geq 9$, hay al menos seis caras negras, tres de las cuales son bígono y las otras tienen al menos cuatro lados, por lo que tendríamos que $14 = |r| \leq 3 * 2 + 3 * 4 = 18$, una contradicción.

4.3.2. Si los cuadrados en G_S están rodeados por a lo más 2 bígono.

Por el Lema 34, $|r| \in \{14, 15\}$ y del desarrollo de su prueba tenemos que $2\overline{E} \geq 2\overline{E} + 2|r| - 30$.

$$|r| = 15.$$

En este caso, $2\bar{E} + 2|r| - 30 = 2\bar{E}$, por lo que todas las desigualdades de (4.7), son igualdades. En particular,

$$\begin{aligned} 2\bar{E} &= 3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4), & 2F_3 + F_4 &= F_{\text{odd}} + F_3 + F_4, \\ \bar{F} &= \bar{E} - 5 & \text{y} & \quad \bar{E} + E_2 = 2E_2 + E_1 = |r| = 15. \end{aligned}$$

La primer igualdad implica que cada cara de \bar{G}_S es un disco cara con a lo más 5 lados, mientras que la segunda implica que no existen discos cara con 5 lados en \bar{G}_S . Entonces tenemos que $F_k = 0$ para $k \geq 5$.

Esto implica que,

$$F_3 + F_4 = \bar{F} = \bar{E} - 5 \quad \text{y} \quad 3F_3 + 4F_4 = 2\bar{E}$$

combinado con $\bar{E} + E_2 = 15$, obtenemos

$$E_2 = 15 - \bar{E}, \quad F_3 = 2\bar{E} - 20 \quad \text{y} \quad F_4 = 15 - \bar{E}$$

Observemos que E_2, F_3, F_4 son el número de bígono, triángulo y cuadrados de G_S , respectivamente. Como $F_3, F_4 \geq 0$, entonces $\bar{E} \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Sean F_2^b, F_3^b, F_4^b el número de bígono, triángulo y cuadrados negros, respectivamente de G_S . Similarmente definimos F_2^w, F_3^w, F_4^w . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} (F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w) &= (E_2, F_3, F_4) \quad \text{y} \\ 2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b &= 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = |r| = 15 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 15$ son $(0, 5, 0)$, $(0, 1, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(6, 1, 0)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 3, 1)$ y $(4, 1, 1)$.

- Si $\bar{E} = 10$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (5, 0, 5)$, pero no podemos encontrar 6 enteros positivos $F_2^b, F_3^b, F_4^b, F_2^w, F_3^w, F_4^w$ que satisfagan (4.8).
- Si $\bar{E} = 11$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (4, 2, 4)$, por lo que
 - (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 1, 2)$, sin embargo esta solución contradice el lema 18.
 - (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 1, 3)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (4, 1, 1)$ (o al revés), pero también contradice el lema 18.
- Si $\bar{E} = 12$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (3, 4, 3)$, por lo que

- (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (2, 1, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 3, 1)$ (o al revés), sin embargo esta solución contradice el lema 18.
- (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 1, 3)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 3, 0)$ (o al revés). Por el Lema 10 todos los bígono blancos tienen las mismas clases de aristas, supongamos $\{\chi_1, \chi_2\}$, entonces por el Lema 11 los triángulos blancos son buenas caras y solamente pueden tener clases de aristas $\{\chi_3, \chi_4\}$. Por otro lado, sabemos que un bígono y un triángulo no pueden ser adyacentes por el Lema 32, por lo que el único triángulo negro puede ser adyacente únicamente a triángulos blancos, pero esto significa que sus aristas deben ser de clase $\{\chi_3, \chi_4\}$ y es una buena cara, lo cual contradice el lema 8.
- Si $\bar{E} = 13$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (2, 6, 2)$, por lo que

(1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 5, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 1, 2)$ (o al revés), sin embargo esta solución contradice el lema 18.

(2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 3, 1) = (F_2^w, F_3^w, F_4^w)$, pero también contradice el lema 18.
 - Si $\bar{E} = 14$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (1, 8, 1)$, por lo que $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 5, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 3, 1)$ (o al revés), sin embargo esta solución contradice el lema 18.
 - Si $\bar{E} = 15$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (0, 10, 0)$, por lo que $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 5, 0) = (F_2^w, F_3^w, F_4^w)$. Los 5 triángulos negros no pueden ser todos iguales pues esto implicaría que los triángulos blancos tendrían las mismas clases de aristas, lo cual contradice el lema 8. Por el Lema 12, esto significa que tenemos exactamente 2 clases de triángulos negros: sin pérdida de generalidad supongamos que en una clase están los que tienen tipos de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$ y la otra clase son los triángulos que tienen tipos de aristas $\{\chi_3, \chi_4\}$, también por el Lema 12 sabemos que todos los triángulos dentro de una misma clase son iguales. Análogamente, hay exactamente dos clases de triángulos blancos, pueden ser los de clases $\{\chi_1, \chi_3\}$ y $\{\chi_2, \chi_4\}$ o los de clases $\{\chi_1, \chi_4\}$ y $\{\chi_2, \chi_3\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las 2 clases de triángulos negros son las que se muestran en la figura 4.24.

Salvo simetría, tenemos esencialmente 2 casos: cuando 4 de los triángulos negros pertenecen a la clase (a) y uno a la clase (b) y cuando 3 de los triángulos negros pertenecen a la clase (a) y dos a la clase (b). En el primer caso, tendríamos 8 aristas de clase χ_1 , 4 de clase χ_2 , 2 de

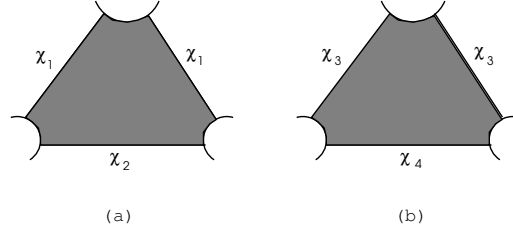


Figura 4.24:

clase χ_3 y una de clase χ_4 lo cual implica que hay un triángulo blanco, que debe ser buena cara y cuyas clases de aristas son $\{\chi_3, \chi_4\}$, pero esto contradice el lema 8. En el segundo caso, tendríamos 6 aristas de clase χ_1 , 3 de clase χ_2 , 4 de clase χ_3 y 2 de clase χ_4 ; sin embargo no hay ninguna configuración para dos triángulos blancos que produzca 2 aristas χ_4 y 3 χ_2 o 2 aristas χ_4 y 6 χ_1 , lo cual es una contradicción y tampoco podemos tener este caso.

$$|r| = 14.$$

En este caso, $2\bar{E} \geq 3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) = 5\bar{F} - (2F_3 + F_4) \geq 5\bar{F} - (F_{\text{odd}} + F_3 + F_4) = 6\bar{F} - (\bar{F} + F_{\text{odd}} + F_3 + F_4) \geq 2\bar{E} + 2|r| - 30 \geq 2\bar{E} - 2$. En particular, $6[\bar{F} - (\bar{E} - 5)] + [2E_1 - (\bar{F} + F_{\text{odd}} + F_3 + F_4)] \leq 2$, por lo que $\bar{F} = \bar{E} - 5$ y

$$5\bar{F} - (F_{\text{odd}} + F_3 + F_4) = \begin{cases} 2E & (1) \\ 2E - 1 & (2) \\ 2E - 2 & (3) \end{cases}$$

(1)

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) = 2\bar{E}, F_{\text{odd}} = F_3, \bar{F} = \bar{E} - 5 \text{ y } \bar{E} + E_2 = |r| = 14.$$

La primer igualdad implica que cada cara de $\overline{G_S}$ es un disco cara con a lo más 5 lados, mientras que la segunda implica que no existen discos cara con 5 lados en $\overline{G_S}$. Entonces tenemos que $F_k = 0$ para $k \geq 5$.

Esto implica que $F_3 + F_4 = \bar{F} = \bar{E} - 5$ y $3F_3 + 4F_4 = 2\bar{E}$, que al combinar con $\bar{E} + E_2$ se obtiene que

$$E_2 = 14 - \bar{E}, \quad F_3 = 2\bar{E} - 20 \quad \text{y} \quad F_4 = 15 - \bar{E}$$

Como $E_2, F_3 \geq 0$, entonces $\overline{E} \in \{10, 11, 12, 13, 14\}$.

Definimos F_2^b, F_3^b, F_4^b y F_2^w, F_3^w, F_4^w como en el caso anterior. Entonces tenemos

$$(F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w) = (E_2, F_3, F_4) \quad \text{y}$$

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = |r| = 14 \quad (4.9)$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 14$ son $(7, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 4, 0)$, $(5, 0, 1)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 2, 0)$ y $(2, 2, 1)$.

- Si $\overline{E} = 10$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (4, 0, 5)$, por lo que $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (3, 0, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 0, 3)$ (o al revés). Para que los 3 b́igonos negros sean consecutivos, éstos deben pegarse solamente a dos caras (en este caso de 4 lados), sin embargo implicaría que hay dos cuadrados adyacentes a 3 b́igonos, lo cual no es posible en este caso.
- Si $\overline{E} = 11$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (3, 2, 4)$, por lo que
 - (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 2, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 0, 2)$ (o al revés). Dado que un b́igono y un triángulo no pueden ser adyacentes (lema 32), entonces los 3 b́igonos blancos deben ser adyacentes a los 2 cuadrados negros. Por otro lado, un cuadrado no puede ser adyacente a más de 2 b́igonos por el Lema 12, entonces cada cuadrado negro debería ser adyacente a 2 b́igonos en sus 4 aristas, lo cual cerraría la gráfica y es una contradicción.
 - (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 0, 3)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 2, 1)$ (o al revés). Esta solución contradice el lema 18.
- Si $\overline{E} = 12$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (2, 4, 3)$, por lo que
 - (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 4, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 0, 3)$ (o al revés). Dado que dos b́igonos no pueden ser adyacentes (lema 14) y tampoco un b́igono y un triángulo (lema 32), entonces el único b́igono blanco no puede ser adyacente a ninguna cara negra, lo cual es una contradicción.
 - (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 2, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 2, 1)$ (o al revés). Esta solución contradice el lema 18.
- Si $\overline{E} = 13$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (1, 6, 2)$, por lo que $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 2, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 4, 0)$ (o al revés).

Supongamos que el bígono blanco tiene clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$, entonces los 4 triángulos blancos son iguales y tienen aristas de tipo $\{\chi_3, \chi_4\}$ (lemas 11 y 12). Los triángulos negros no pueden tener aristas de tipo χ_1 o χ_2 pues solo pueden ser adyacentes a los triángulos blancos (lema 32), entonces los triángulos negros son buenas caras y tienen clases de aristas $\{\chi_3, \chi_4\}$, lo cual contradice el lema 8.

- Si $\bar{E} = 14$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (0, 8, 1)$, pero no hay soluciones para este caso.

(2)

$5\bar{F} - (F_{odd} + F_3 + F_4) = 2\bar{E} - 1$, entonces

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) = \begin{cases} 2\bar{E} & (a) \\ 2\bar{E} - 1 & (b) \end{cases}$$

(2a)

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) = 2\bar{E}, F_{odd} = F_3 + 1, \bar{F} = \bar{E} - 5 \text{ y } \bar{E} + E_2 = 14.$$

La primer igualdad implica que cada cara de $\overline{G_S}$ es un disco cara con a lo más 5 lados, mientras que la segunda dice que hay solamente una cara con un número impar mayor de 3 lados. Entonces tenemos que $\overline{G_S}$ tiene exactamente una cara con 5 lados y $F_k = 0$ para $k > 5$.

Esto implica que $F_3 + F_4 + 1 = \bar{F} = \bar{E} - 5$ y $3F_3 + 4F_4 = 2\bar{E} - 5$, que al combinar con $\bar{E} + E_2 = 14$ se obtiene que

$$E_2 = 14 - \bar{E}, \quad F_3 = 2\bar{E} - 19 \quad \text{y} \quad F_4 = 13 - \bar{E}$$

Como $F_3, F_4 \geq 0$, entonces $\bar{E} \in \{10, 11, 12, 13\}$.

Definimos F_2^b, F_3^b, F_4^b y F_2^w, F_3^w, F_4^w como antes. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la única cara de 5 lados en $\overline{G_S}$ es negra. Entonces tenemos

$$(F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w, 1) = (E_2, F_3, F_4, F_5) \quad \text{y}$$

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 9, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 14$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 9$ son $(0, 3, 0)$, $(3, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$, mientras que para la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 14$ son $(7, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 4, 0)$, $(5, 0, 1)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 2, 0)$ y $(2, 2, 1)$.

- Si $\overline{E} = 10$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (4, 1, 3)$ por lo que
 - (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 1, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 0, 2)$, pero esta solución contradice el lema 18.
 - (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (3, 1, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 0, 3)$. Por el Lema 19, los 3 bígono negro son consecutivos en G_S , además están separados por cuadrados blancos pues por el Lema 14 no pueden ser adyacentes a bígono. En particular tenemos un cuadrado adyacente a tres bígono, lo cual no es posible en este caso.

- Si $\overline{E} = 11$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (3, 3, 2)$ por lo que
 - (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 1, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 2, 1)$, pero esta solución contradice el lema 18.
 - (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (3, 1, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (0, 2, 2)$. Los bígono negro no pueden ser adyacentes a triángulo blanco por el Lema 32, por lo que tienen que ser adyacentes a los cuadrados. En particular tenemos un cuadrado adyacente a tres bígono, lo cual no es posible en este caso.
 - (3) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 3, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 0, 2)$. Los 3 bígono blanco no pueden ser adyacentes a los triángulo negro por el Lema 32, por lo que tendrían que ser adyacentes en todas sus aristas al único pentágono negro, sin embargo hay 6 aristas de bígono y solamente 5 del pentágono, por lo que no puede tenerse esta configuración.

- Si $\overline{E} = 12$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (2, 5, 1)$ por lo que
 - (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 3, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 2, 1)$, pero esta solución contradice el lema 18.
 - (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 1, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 4, 0)$, pero esta solución también contradice el lema 18.

- Si $\overline{E} = 13$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (1, 7, 0)$ por lo que $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 3, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 4, 0)$. Supongamos que el bígono blanco tiene clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$, entonces los 4 triángulo blanco son iguales y tienen clases de aristas $\{\chi_3, \chi_4\}$ (lemas 11 y 12). El bígono blanco solamente puede ser adyacente al pentágono negro por el Lema 32, por lo que los triángulo negro pueden ser adyacentes solamente a triángulo blanco, pero esto significa que sus aristas solamente pueden ser de tipo $\{\chi_3, \chi_4\}$ y son buenas caras, lo cual contradice los lemas 8 y 12.

(2b)

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\overline{F} - F_3 - F_4) = 2\overline{E} - 1, \quad F_{\text{odd}} = F_3, \quad \overline{F} = \overline{E} - 5 \quad \text{y} \quad \overline{E} + E_2 = 14.$$

La primer igualdad implica que hay una cara de $\overline{G_S}$ con 6 lados y que las otras tienen a lo más 5 lados, mientras que la segunda igualdad dice que no hay caras con un número impar mayor de 3 lados. Entonces tenemos que $\overline{G_S}$ tiene exactamente una cara con 6 lados y $F_k = 0$ para $k \geq 5, k \neq 6$.

Esto implica que $F_3 + F_4 + 1 = \overline{F} = \overline{E} - 5$ y $3F_3 + 4F_4 = 2\overline{E} - 6$, que al combinar con $\overline{E} + E_2 = 14$ se obtiene que

$$E_2 = 14 - \overline{E}, \quad F_3 = 2\overline{E} - 18 \quad \text{y} \quad F_4 = 12 - \overline{E}$$

Como $F_3, F_4 \geq 0$, entonces $\overline{E} \in \{9, 10, 11, 12\}$.

Definimos F_2^b, F_3^b, F_4^b y F_2^w, F_3^w, F_4^w como antes. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la única cara de 6 lados en $\overline{G_S}$ es negra. Entonces tenemos

$$(F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w, 1) = (E_2, F_3, F_4, F_5) \quad \text{y}$$

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 8, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 14$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 8$ son $(0, 0, 2)$, $(4, 0, 0)$ y $(2, 0, 1)$, mientras que para la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 14$ son $(7, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 4, 0)$, $(5, 0, 1)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 2, 0)$ y $(2, 2, 1)$.

■ Si $\overline{E} = 9$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (5, 0, 3)$ por lo que

- (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 0, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (5, 0, 1)$. Esta solución contradice el lema 20.
- (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (4, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 0, 3)$. Esta solución contradice el lema 18.
- (3) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (2, 0, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 0, 2)$. Por el Lema 19, los 3 bígono blancos son consecutivos en G_S , además están separados por un cuadrado negro y el hexágono pues por el Lema 14 no pueden ser adyacentes a bígono. En particular los tres bígono resultan adyacentes al cuadrado lo cual no es posible en este caso.

■ Si $\overline{E} = 10$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (4, 2, 2)$ por lo que

- (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (2, 0, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 2, 1)$, pero esta solución contradice el lema 18.
- (2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (4, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (0, 2, 2)$. Esta solución contradice el lema 18.
- (3) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 0, 2)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (4, 2, 0)$. Esta solución contradice el lema 20.

- Si $\bar{E} = 11$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (3, 4, 1)$ por lo que $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (2, 0, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 4, 0)$. Los 4 triángulos blancos deben ser adyacentes solamente al cuadrado y al hexágono negros, pero los triángulos suman 12 aristas, mientras que el cuadrado y hexágono suman 10, lo cual no es posible.
- Si $E = 12$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (2, 6, 0)$, pero no hay configuración de caras para esta solución.

(3)

$5\bar{F} - (F_{odd} + F_3 + F_4) = 2\bar{E} - 2$, entonces

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) = \begin{cases} 2\bar{E} & (a) \\ 2\bar{E} - 1 & (b) \\ 2\bar{E} - 2 & (c) \end{cases}$$

(3a)

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\bar{F} - F_3 - F_4) = 2\bar{E}, \quad F_{odd} = F_3 + 2, \quad \bar{F} = \bar{E} - 5 \quad \text{y} \quad \bar{E} + E_2 = 14.$$

La primer igualdad implica que cada disco cara de $\overline{G_S}$ tiene a lo más 5 lados, mientras que la segunda implica que hay exactamente dos caras con 5 lados.

Esto implica que $F_3 + F_4 + 2 = \bar{F} = \bar{E} - 5$ y $3F_3 + 4F_4 = 2\bar{E} - 10$, que al combinar con $\bar{E} + E_2 = 14$ se obtiene que

$$E_2 = 14 - \bar{E}, \quad F_3 = 2\bar{E} - 18 \quad \text{y} \quad F_4 = 11 - \bar{E}$$

Como $F_3, F_4 \geq 0$, entonces $\bar{E} \in \{9, 10, 11\}$.

Definimos F_2^b, F_3^b, F_4^b y F_2^w, F_3^w, F_4^w como antes. Hay dos casos por considerar: (i) cuando los pentágonos están del mismo lado y (ii) cuando no.

En el caso (i), supongamos que los dos pentágonos son negros, entonces

$$(F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w, 1) = (E_2, F_3, F_4, F_5) \quad y$$

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 4, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 14$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 4$ son $(2, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$, mientras que para la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 14$ son $(7, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 4, 0)$, $(5, 0, 1)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 2, 0)$ y $(2, 2, 1)$.

En el caso (ii) , tendríamos que

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 9, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 9$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 9$ son $(0, 3, 0)$, $(3, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

- Si $\bar{E} = 9$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (5, 0, 2)$.

Caso (i) .

- (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (2, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 0, 2)$. Por el Lema 19, los 3 bígono blancos son consecutivos en G_S , además están separados por los pentágonos negros pues por el Lema 14 no pueden ser adyacentes a bígono. Por otro lado, los bígono negros son consecutivos y adyacentes a los cuadrados blancos.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que los bígono blancos tienen clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$. Como los pentágonos negros no pueden ser $\{\chi_1, \chi_2\}$ buenas caras, tienen al menos una arista de una clase distinta. Sin pérdida de generalidad supongamos que una de esas aristas es de clase χ_3 . Entonces por el Lema 13, dicha arista es la primera de su clase.

Las 4 aristas libres de los cuadrados se deben pegar con las 4 aristas libres de los pentágonos. Al elegir la arista del cuadrado con la que se pega la arista de clase χ_3 del pentágono, se determina la arista con la que debe pegarse la otra arista libre del mismo cuadrado pues no se puede cerrar el vértice. Aplicando repetidamente el lema 13, llegamos a una subgráfica en G_S como la que se muestra en la figura 4.25 donde se indica la clase a la que pertenece cada arista. Así, tenemos solamente 2 formas en que pueden pegarse las últimas aristas libres.

Procederemos por casos sobre la clase a la que pertenece la arista e señalada y sobre la forma en que se pegan las aristas libres.

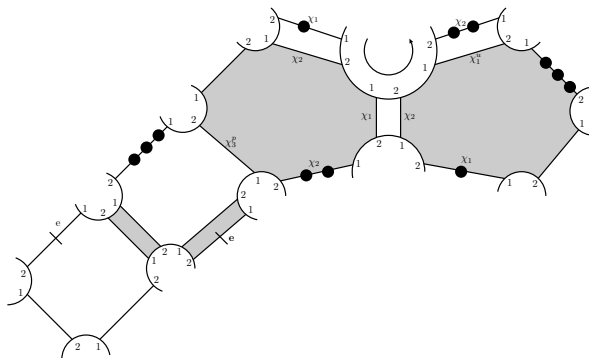


Figura 4.25:

Si la arista e fuese de clase χ_1 , entonces por el Lema 13, sería la primera de su clase y la arista de tipo χ_3 sería única. Siguiendo la orientación del vértice, todas las aristas con la misma etiqueta que están entre la primer y la última arista de clase χ_1 deben ser de esa clase, sin embargo esto no es posible, independientemente de la forma en que se peguen las aristas libres.

Si e fuese de clase χ_2 , entonces por el Lema 13, sería la primera de su clase y la arista de tipo χ_3 sería única. Por otro lado, la otra arista que está en el mismo bígono que e no tiene otra opción más que ser de clase χ_4 y es la primera de su clase por el Lema 13. Por ende, las aristas del otro bígono negro son de clase $\{\chi_2, \chi_4\}$. A partir de la primer arista de tipo χ_2 y siguiendo la orientación del vértice, las aristas con la misma etiqueta que están entre dos aristas de tipo χ_2 deberán tener la misma clase. Esto descarta una de las formas en que pueden pegarse las aristas libres y determina la clase a la que pertenecen, quedando solamente la configuración de la figura 4.26.

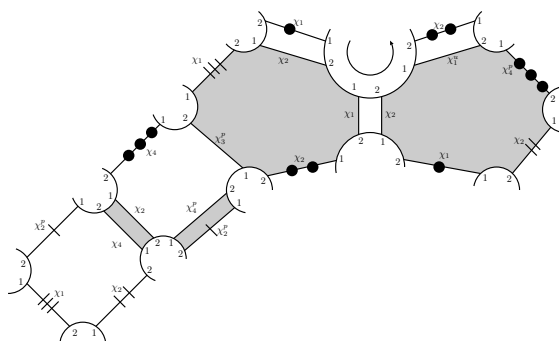


Figura 4.26:

Sin embargo dicha configuración nos lleva a varias contradicciones, por ejemplo a que existan dos primeras aristas diferentes de clase χ_4 .

Si la arista e fuese de clase χ_3 , llamemos d a la otra arista del bígono al que pertenece e .

Si d fuera de clase χ_1 , sería la primera de su clase. A partir de esta primer arista y siguiendo la orientación del vértice, todas las aristas con la misma etiqueta deberán tener clase χ_1 hasta llegar a la última, sin embargo esto implicaría que el cuadrado al que pertenece d sería una $\{\chi_1, \chi_3\}$ buena cara, contradiciendo el lema 8.

Ahora, si d fuese de clase χ_2 , la arista del cuadrado marcada con tres puntos no puede ser de clase χ_2 ni χ_3 (pues formaría una $\{\chi_2, \chi_3\}$ buena cara lo que contradiría el lema 8) y tampoco puede ser de clase χ_1 porque sería la primera de dicha clase ocasionando que todas las aristas con la misma etiqueta que estén entre la primer y última arista de clase χ_1 (según la orientación del vértice), deben ser de la misma clase. Por tanto dicha arista es la primera de clase χ_4 . Se puede así ubicar también la última arista de clase χ_2 y esto indica la forma en que deben pegarse las aristas libres (pues no puede haber aristas de clase χ_2 después de la última). Por último, aplicando el lema 13, se puede ubicar otra arista de clase χ_2 (como se aprecia en la figura 4.27), que tendría que ser última, lo cual es una contradicción.

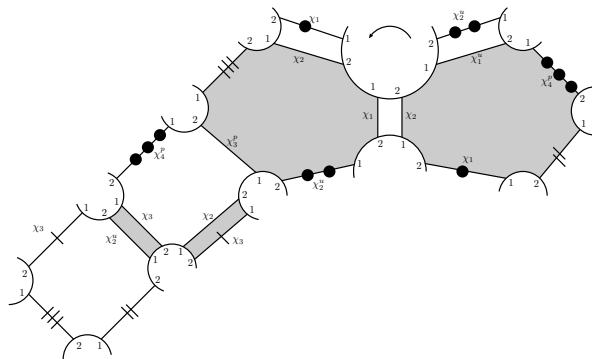


Figura 4.27:

Si d fuera de clase χ_4 , tendría que ser la primera de dicha clase. Por otro lado, la arista del cuadrado marcada con tres puntos solamente podría ser de clase χ_1 ó χ_2 (para no formar una $\{\chi_3, \chi_4\}$

buena cara). En cualquier caso, serían la primera de su clase. Entonces dicha arista no puede ser tipo χ_2 pues según la orientación del vértice hay una misma arista del mismo tipo antes de ella. Por tanto tendría que ser de tipo χ_1 y esto determina la forma en que se pegan las aristas libres (pues todas las aristas que estén entre la primer y última arista de tipo χ_1 deben ser de la misma clase). Llegamos pues a una configuración como la de la figura 4.28, la cual tiene varias contradicciones, por ejemplo el tener dos últimas aristas distintas de clase χ_1 .

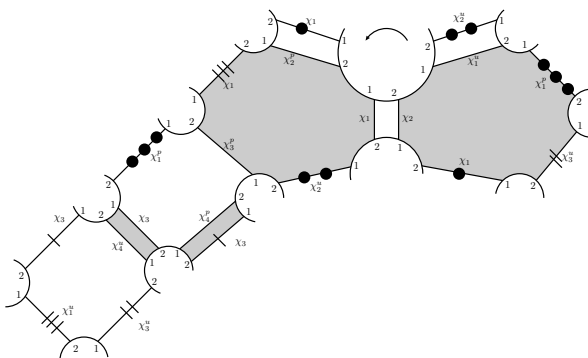


Figura 4.28:

Si la arista e fuese de tipo χ_4 , la otra arista del bígono al que pertenece no puede ser de clase χ_2 pues estaría después de la última de su clase, lo cual no es posible; tampoco puede ser de clase χ_3 pues sería la primera de su clase, la cual ya está determinada; entonces debe ser de clase χ_1 y es la primera de dicha clase. Esto determina la forma en que se pegan las aristas libres (ya que las aristas entre la primera y la última de tipo χ_1 deben ser de la misma clase), (ver figura 4.29).

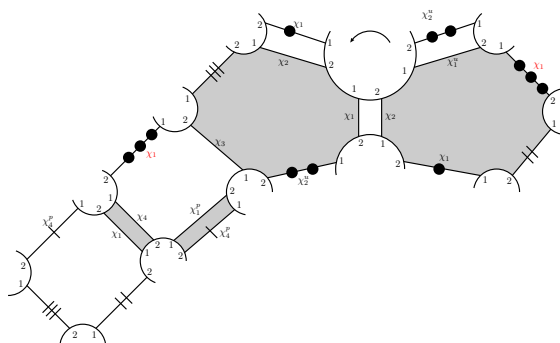


Figura 4.29:

Entonces vemos que la arista de tipo χ_3 es única. Observemos que la arista del cuadrado marcada con tres puntos debería ser de tipo χ_1 (de lo contrario, la arista de clase χ_1 que no es la primera y que está en uno de los bígono negro sería la última de su clase, lo que sería una contradicción), pero por otro lado no puede ser de tipo χ_1 pues por la forma en que se pega, aplicando el lema 13 llegaríamos a que es la primera de su clase, lo cual no es posible.

(2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 0, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (5, 0, 1)$. Esta solución contradice el lema 20.

Caso (ii). No hay soluciones para este caso.

- Si $\overline{E} = 10$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (4, 2, 1)$.

Caso (i). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 0, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (4, 2, 0)$. Para que los 4 bígono blanco sean consecutivos en G_S , estos deben ser adyacente únicamente a los dos pentágonos negro. Esto significa que cada pentágono es adyacente a 4 bígono, lo cual contradice el lema 17.

Caso (ii). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (3, 1, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 1, 1)$ pero esta solución contradice el lema 18.

- Si $\overline{E} = 11$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (3, 4, 0)$.

Caso (i). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (2, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (1, 4, 0)$. Los dos bígono negro no pueden ser adyacentes al bígono ni a los triángulo blanco por los lemas 14 y 32, pero entonces no podrían pegarse con nadie, lo cual es una contradicción.

Caso (ii). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 3, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (3, 1, 0)$ (o al revés). Los 3 bígono blanco no pueden ser adyacentes a los triángulo negro por el Lema 32, por lo que tendrían que ser adyacentes en todas sus aristas al pentágono negro, pero tenemos 6 aristas de los bígono y solamente 5 del pentágono, por lo que esta configuración tampoco es posible.

(3b)

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\overline{F} - F_3 - F_4) = 2\overline{E} - 1, F_{odd} = F_3 + 1, \overline{F} = \overline{E} - 5 \text{ y} \\ \overline{E} + E_2 = 14.$$

La primer igualdad implica que cada disco cara de $\overline{G_S}$ tiene a lo más 6 lados y que solamente puede haber una de estas caras, mientras que la segunda

implica que solamente hay una cara con 5 lados. Por tanto, hay exactamente un pentágono y un hexágono en $\overline{G_S}$ y $F_k = 0$ para toda $k > 6$.

Esto implica que $F_3 + F_4 + 2 = \overline{F} = \overline{E} - 5$ y $3F_3 + 4F_4 = 2\overline{E} - 11$, que al combinar con $\overline{E} + E_2 = 14$ se obtiene que

$$E_2 = 14 - \overline{E}, \quad F_3 = 2\overline{E} - 17 \quad \text{y} \quad F_4 = 10 - \overline{E}$$

Como $F_3, F_4 \geq 0$, entonces $\overline{E} \in \{9, 10\}$.

Definimos F_2^b, F_3^b, F_4^b y F_2^w, F_3^w, F_4^w como antes. Hay dos casos por considerar: (i) cuando el pentágono y el hexágono están del mismo lado y (ii) cuando no.

En el caso (i), supongamos que el pentágono y el hexágono son negros, entonces

$$(F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w, 1) = (E_2, F_3, F_4, F_5) \quad \text{y}$$

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 3, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 14$$

La única solución de enteros positivos de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 3$ es $(0, 1, 0)$, mientras que para la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 14$ son $(7, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 4, 0)$, $(5, 0, 1)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 2, 0)$ y $(2, 2, 1)$.

En el caso (ii), supongamos que el pentágono es negro y el hexágono es blanco, entonces tendríamos que

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 9, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 8$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 9$ son $(0, 3, 0)$, $(3, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$, mientras que para la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 8$ las soluciones son $(4, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$.

- Si $\overline{E} = 9$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (5, 1, 1)$.

Caso (i). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 1, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (5, 0, 1)$. Esta solución contradice el lema 20.

Caso (ii).

- (1) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 1, 1)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (4, 0, 0)$, pero esta solución contradice el lema 18.

(2) $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (3, 1, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 0, 1)$. Para que los 3 bígono negro sean consecutivos en G_S , deben ser adyacentes al cuadrado y hexágono blanco. Esto implica que hay un cuadrado adyacente a 3 bígono, lo cual no podemos tener en este caso.

■ Si $E = 10$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (4, 3, 0)$.

Caso (i). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (0, 1, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (4, 2, 0)$. Los 4 bígono blanco deben ser adyacentes solamente al pentágono y hexágono negro, esto implica que hay un pentágono rodeado de cuatro bígono, lo que contradice el lema 17.

Caso (ii). No existen soluciones para esta configuración.

(3c)

$$3F_3 + 4F_4 + 5(\overline{F} - F_3 - F_4) = 2\overline{E} - 2, \quad F_{\text{odd}} = F_3, \quad \overline{F} = \overline{E} - 5 \quad \text{y} \quad \overline{E} + E_2 = 14.$$

La segunda igualdad dice que las únicas caras en $\overline{G_S}$ con un número impar de lados son triángulos, esto junto con la primer igualdad implican que en $\overline{G_S}$ hay exactamente 2 caras con 6 lados y que no hay caras con más lados.

Esto implica que $F_3 + F_4 + 2 = \overline{F} = \overline{E} - 5$ y $3F_3 + 4F_4 = 2\overline{E} - 12$, que al combinar con $\overline{E} + E_2 = 14$ se obtiene que

$$E_2 = 14 - \overline{E}, \quad F_3 = 2\overline{E} - 16 \quad \text{y} \quad F_4 = 9 - \overline{E}$$

Como $F_3, F_4 \geq 0$, entonces $\overline{E} \in \{8, 9\}$.

Definimos F_2^b, F_3^b, F_4^b y F_2^w, F_3^w, F_4^w como antes. Hay dos casos por considerar: (i) cuando los hexágonos están del mismo lado y (ii) cuando no.

En el caso (i), supongamos que los hexágonos son negro, entonces

$$(F_2^b + F_2^w, F_3^b + F_3^w, F_4^b + F_4^w, 1) = (E_2, F_3, F_4, F_5) \quad \text{y}$$

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 2, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 14$$

La única solución de enteros positivos de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 2$ es $(1, 0, 0)$, mientras que para la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 14$ las soluciones son $(7, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 4, 0)$, $(5, 0, 1)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(4, 2, 0)$ y $(2, 2, 1)$.

En el caso (ii) tendríamos que

$$2F_2^b + 3F_3^b + 4F_4^b = 8, \quad 2F_2^w + 3F_3^w + 4F_4^w = 8$$

Las soluciones enteras y positivas de la ecuación $2X + 3Y + 4Z = 8$ son $(4, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$.

- Si $\bar{E} = 8$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (6, 0, 1)$.

Caso (i). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (5, 0, 1)$. Los 5 bígono blancos son consecutivos y adyacentes únicamente a los dos hexágonos blancos. Si los bígono blancos tienen clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$, entonces cada hexágono tiene 5 aristas de tipo $\{\chi_1, \chi_2\}$ (de forma alternada por la consecutividad de los bígono). La última arista de estos hexágonos no puede ser de tipo $\{\chi_1, \chi_2\}$ porque si no contradiría el lema 8. Por otro lado, aplicando el lema 13 dicha arista es la única de su clase. Por lo que un hexágono tiene clases de aristas $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ y el otro $\{\chi_1, \chi_2, \chi_4\}$, donde las aristas de tipo $\{\chi_3, \chi_4\}$ son las únicas de su clase. Esto implica que el único bígono negro tenga clase de aristas $\{\chi_1, \chi_2\}$, lo que contradice el lema 8.

Caso (ii). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (4, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (2, 0, 1)$. Esta solución contradice el lema 20.

- Si $\bar{E} = 9$, entonces $(E_2, F_3, F_4) = (5, 2, 0)$.

Caso (i). $(F_2^b, F_3^b, F_4^b) = (1, 0, 0)$ y $(F_2^w, F_3^w, F_4^w) = (4, 2, 0)$. El único bígono negro no puede ser adyacente a los bígono ni a los triángulo blancos por los lemas 14 y 32, pero entonces no tiene con quien pegarse, lo cual es una contradicción.

Caso (ii). No hay soluciones que satisfagan este caso.

Con este análisis concluimos la prueba del Teorema 2.

Bibliografía

- [1] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke y P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. Math. **125** (1987), pp. 237-300.
- [2] M. Dehn, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, Math. Ann. **69** (1910), pp. 137-168.
- [3] M. Eudave-Muñoz, *Non-hyperbolic manifolds obtained by Dehn surgery on hyperbolic knots*, Geometric Topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 2.1 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1997), pp.35-61.
- [4] M. Eudave-Muñoz, *On hyperbolic knots with Seifert fibered Dehn surgeries*, Topol. Appl. **121** (2002), pp. 119-141.
- [5] M. Eudave-Muñoz, E. Ramírez-Losada, *Toroidal Dehn surgeries. A mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia on the occasion of his seventieth birthday*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas, Departamento de Geometría y Topología. pp. 317-336 (2016).
- [6] C. McA. Gordon, *Boundary slopes on punctured tori in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), pp. 1713-1790.
- [7] C. McA. Gordon y J. Luecke, *Dehn surgeries on knots creating essential tori, I*, Commun. Anal. Geom. **3** (1995), pp. 597-644.
- [8] C. McA. Gordon y J. Luecke, *Dehn Surgeries on Knots Creating Essential Tori, II*, Commun. Anal. Geom. **8** (2000), pp. 671-725.
- [9] C. McA. Gordon y J. Luecke, *Non-integral toroidal Dehn surgeries*, Commun. Anal. Geom. **12** (2004), pp. 417-485.
- [10] C. McA. Gordon y J. Luecke, *Toroidal and boundary-reducing Dehn fillings*, Topol. Appl. **93** (1999), pp. 77-90.

- [11] C. McA. Gordon y Y.-Q. Wu, *Toroidal Dehn fillings on hyperbolic 3-manifolds*, por publicarse en *Memoirs Amer. Math. Soc.*
- [12] C. McA. Gordon y J. Luecke, *Reducible manifolds and Dehn surgery*, *Topology* **35** (1996), pp. 385-409.
- [13] W. Haken, *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten. I*, *Mathematische Zeitschrift* **80**: 89120 (1962)
- [14] C. Hayashi y K. Motegi, *Only single twist on unknots can produce composite knots*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), pp. 4465-4479.
- [15] K. Ichihara y M. Teragaito, *Klein bottle surgery and genera of knots*, *Pacific J. Math.* **210** (2003), pp. 317-333.
- [16] W. Jaco y P. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **21** (1979), no. 220.
- [17] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, *Lecture notes in Mathematics*, **761**. Springer, Berlin, 1979.
- [18] H. Kneser, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, *Jahresbericht der Deut. Math. Verein.* **38** (1929), pp. 248-260.
- [19] S. Lee, *Toroidal surgeries on genus two knots*, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, Vol. 18, **9** (2009), pp. 1205-1225.
- [20] S. Lee, S. Oh y M. Teragaito *Dehn fillings and small surfaces*, *Proc. London Math. Soc.* **92** (2006), pp. 203-223.
- [21] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*. *Ann. of Math.*, **76** (1962).
- [22] R. A. Litherland, *Surgery on knots in solid tori, II*. *J. London Math. Soc.* (2) **22** (1980), pp. 559-569.
- [23] D. Matignon y N. Sayari, *Longitudinal slope and Dehn fillings*, *Hiroshima Math. J.* **33** (2003), pp. 127-136.
- [24] R. Meyerhoff y M. Lackenby, *The maximal number of exceptional Dehn surgeries*, arXiv:0808.1176v1 (2008).
- [25] J. Milnor, *A unique factorization theorem for 3-manifolds*, *Amer. J. Math* **84** (1962), pp. 1-7.

- [26] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* (2002).
- [27] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, (2003).
- [28] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three manifolds*, (2003).
- [29] R. Riley, *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), pp. 281-288.
- [30] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, Vol. 7.
- [31] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Annalen. **110** (1), (1934), pp. 571-592.
- [32] H. Seifert y C. Weber ,*Die beiden Dodekaederräume*, Math. Z., **37**, 237253 (1933).
- [33] M. Teragaito, *Toroidal surgeries on hyperbolic knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), pp. 2803-2808.
- [34] M. Teragaito, *Toroidal surgeries on hyperbolic knots II*, Asian J. Math. **7** (2003) pp. 139-146.
- [35] M. Teragaito, *Distance between toroidal surgeries on hyperbolic knots in the 3-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), pp. 1051-1075.
- [36] W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Notes 1976-1978. Princenton University Press.
- [37] W. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), pp. 357-381.
- [38] F. Waldhausen, *The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds*, Ann. Math. (**2**) 88, (1968), pp. 272-280.
- [39] A. D. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math., (1960).