UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TOPOLOGÍAS GENERADAS POR ESPACIOS MÉTRICOS GENERALIZADOS.

T E S I N A
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JUAN PABLO FLORES MENDOZA

DIRECTORA DE TESINA:
NATALIA JONARD PÉREZ

FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO AGOSTO 2017

Índice

1. Introducción

El concepto de espacio métrico fue introducido por M. Frechet [4] en 1906. Trabajos posteriores llevaron a A. Wilson [13] a introducir una generalización de ellos llamados espacios cuasi-métricos y, posteriormente, a desarrollar el concepto de espacio cuasi-seudométrico junto con Albert [1] y Kelly [6]. La pregunta de qué topologías surgen de una cuasi-métrica fue desarrolla por Wilson en su artículo [13]. A partir de éste se obtienen diferentes resultados concluyendo en el artículo de Kopperman [8].

En este trabajo se intenta responder si cualquier topología puede ser generada por medio de alguna extensión de métrica, mostrando la existencia de una generalización de los espacios cuasi-seudométricos (y de los espacios métricos en particular) que permite obtener cualquier topología a partir de ella. En la Sección 2 se desarrollan algunos tópicos de los espacios anteriores y se muestra que el debilitamiento en los axiomas de espacios métricos no es suficiente para generar a todos los espacios topológicos. Además, notamos que los espacios no-Hausdorff surgen de manera natural a partir de cuasi-seudométricas. En la Sección 3 se trabaja en el artículo [8] de Kopperman para dar una respuesta a la pregunta principal. Cabe mencionar que este artículo ha sido citado más de 90 veces en otros artículos académicos pasando por temas como *distancias no asimétricas* hasta *espacios métricos probabilísticos*. La última sección está dedicada a saber cómo afecta la simetría y la separación de puntos en los axiomas generalizados de espacios métricos (3.9).

2. Espacios cuasi-seudométricos

Los espacios cuasi-seudométricos y las seudonormas asimétricas han tomado gran importancia en diferentes campos de la ciencia. Algunas ramas de las matemáticas y bastas aplicaciones en el mundo real, como la computación y la genética, han confirmado su utilidad. Cuando se enfoca la atención en ejemplos de espacios cuasi-seudométrios, se observa la importancia que tiene el estudio de los espacios topológicos no-Hausdorff para diferentes aplicaciones [11]. Por otro lado, es a partir de la definición de los espacios cuasi-seudométricos que surgen algunas preguntas con respecto al debiltamiento de los axiomas de una métrica, entre ellas ¿cómo afecta a la teoría del análisis clásico dicho cambio en los axiomas? y ¿podría cualquier espacio topológico ser inducido a partir de una métrica generalizada? En lo siguiente nos enfocaremos en responder la segunda pregunta y daremos algunos ejemplos que muestren la importancia de trabajar con espacios no-Hausdorff.

2.1 Definición. Un *espacio métrico* es un par (X, d) con X un conjunto distinto del vacío y $d : X \times X \to [0, \infty]$ una función que satisface, para cualesquiera $x, y, z \in X$, los siguientes enunciados:

(m_1) $d(x, x) = 0$;
(m_2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo);
(m_3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría);
(m_4) $d(x, y) = 0$ implica $x = y$ (separación).

Una *cuasi-seudométrica* es una función $d : X \times X \to [0, \infty]$ con X no vacío, que satisface (m_1) y (m_2). Si además satisface (m_4), diremos que d es una *cuasi-métrica.*

2.2 Ejemplo. (1) Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Definimos $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2n \text{ y } y = 2n \pm 1 \text{ o } x = y \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que d es una cuasi-seudométrica ya que (m_1) lo cumple por definición y (m_2) porque si $d(x, z) = 0$ entonces la desigualdad del triángulo se cumple por la no negatividad de d. Si $d(x, z) = 1$ entonces podemos considerar dos casos: $d(x, y) = 1$ (en cuyo caso se cumple la desigualdad) y $d(x, y) = 0$. El segundo caso implica que $x = y$ o bien existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2n$ y $y = 2n \pm 1$, lo que implica que $x \neq y$. Además, $x \neq z$ pues $d(x, z) = 1$. Aún más, $z \neq y$, pues $d(x, y) = 0$ y $d(x, z) = 1$.Como y es impar y es la primera entrada del par ordenado (y, z), sucede que $d(y, z) = 1$. Entonces (m_2) se cumple. Notemos que $d(2, 3) = 0$ y $d(3, 2) = 1$, así que d no es simétrica.

(2) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Definimos $d_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ como $d_u(x, y) = \text{máx}\{y - x, 0\}$. Esta función define una cuasi-seudométrica (en 2.4 retomaremos este ejemplo).

En el segundo ejemplo d_u es una cuasi-seudométrica inducida por una norma asimétrica.

2.3 Definición. Una *norma asimétrica* en un espacio vectorial real V es una funcional $p : V \to [0, \infty)$ que satisface los siguientes enunciados:

(n_1) $p(v) = p(-v) = 0$ implica $v = 0$;
(n_2) $p(\alpha v) = \alpha p(v)$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
(n_3) $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$.

Si p satisface sólo las condiciones (n_2) y (n_3) entonces p es llamada *seudonorma asimétrica*. Una seudonorma asimétrica define una cuasi-seudométrica d_p en V a través de la ecuación $d_p(v, w) = p(w - v)$ para $v, w \in V$. Nótese que (m_4) se sigue de (n_3) por medio de la igualdad $d_p(v, w) = p(w - u + u - v)$ para todo $u \in V$. Además $(m1)$ se cumple ya que

$$d(x, x) = p(x - x) = p(0) = p(0\nu) = 0p(\nu) = 0. \tag{1}$$

Según (n_2).

2.4 Ejemplo. (i) En $\mathbb{R}$ consideremos la siguiente función $u(a) = a^+ = \text{máx}\{a, 0\}$. La función u es una norma asimétrica:

(n_1) claramente, si $u(a) = u(-a) = 0$ entonces $a = 0$;
(n_2) para $\lambda \geq 0$ se tiene que

$$u(\lambda a) = \text{máx}\{\lambda a, 0\} = \lambda \text{máx}\{a, 0\} = \lambda u(\alpha);$$

(n_3) $u(a + b) = \text{máx}\{a + b, 0\} \leq \text{máx}\{a, 0\} + \text{máx}\{b, 0\} = u(a) + u(b)$.

Por lo tanto u es una norma asimétrica y ésta genera la cuasi-seudométrica $d_u(x, y) = \text{máx}\{y - x, 0\}$ de (2) en el ejemplo 2.2.

(ii) Sea A el subconjunto de las funciones continuas f del intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ tales que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Definimos

$$||f| = \sup_{x \in [0,1]}\{f(x)\}$$

Notemos que $||f| \geq 0$ para toda $f \in A$ ya que, si $f(x) < 0$ para algún $x \in [0, 1]$, al ser f continua e integrar cero, debe ocurrir que $f(z) > 0$ para algún $z \in [0, 1]$ y en consecuencia el supremo tomará un valor no negativo.
Afirmación: $|| \cdot |$ es una norma asimétrica.

(n_1) Si $||f| = ||-f| = 0$, entonces $\sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 0$. Notemos que si $f(z) < 0$ para alguna $z \in [0,1]$ entonces $-f(z) > 0$ por lo que

$$||-f| = \sup\{-f(x) : x \in [0,1]\} > 0$$

Por lo tanto, la igualdad inicial sólo puede ocurrir si $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

(n_2) Para $\lambda \geq 0$ se tiene que

$$||\lambda f| = \sup_{x\in[0,1]} \{\lambda f(x)\} = \lambda \sup_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = \lambda ||f|.$$

(n_3) Para $\varepsilon > 0$ existe $z \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} ||f+g| &= \sup\{f(x)+g(x)\} \leq f(z)+g(z)+\varepsilon \\ &\leq \sup\{f(x)\} + \sup\{g(x)\} + \varepsilon \end{aligned}$$

haciendo tender ε a cero se obtiene que $||\cdot|$ es sub-aditiva.

Notemos que $||f|$ no necesariamente es igual a $||-f|$ para toda $f \in A$; por ejemplo, para

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

se tiene $||f| = 1$ pero $||-f| = \frac{1}{2}$.

2.5 Definición. Sea (X,d) un espacio cuasi-seudométrico. Entonces para $x \in X$ y $r > 0$ definimos

(i) la *bola abierta con centro en x y radio r* como $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$;
(ii) la *bola cerrada con centro en x y radio r* como $B_r[x] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.

2.6 Observación. Todo espacio cuasi-seudométrico (X,d) induce un espacio topológico (X,τ_d), por medio de la familia de vecindades $\mathcal{N}_d(x)$ de un punto $x \in X$. Entendemos que $V \in \mathcal{N}(x)$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq V$ o, de forma equivalente, si existe $r' > 0$ tal que $B_{r'}[x] \subseteq V$ ya que la equivalencia se sigue de tomar, por ejemplo, $r' = \frac{r}{2}$. Por lo tanto, un subconjunto U es un conjunto abierto si y sólo, si para todo $x \in U$, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq U$.

Prueba. (i) $X \in \tau_d$ pues, para toda $x \in X$, cualquier radio $r > 0$ sirve. El conjunto vacío $\varnothing \in \tau_d$ por vacuidad.

(ii) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de τ_d. Entonces, para $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \tau_d$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} U_i$ es un conjunto abierto.

(iii) Para $U, W \in \tau_d$ con $U \cap W \neq \varnothing$ y $x \in U \cap W$, existen $r, r' > 0$ tales que $B_r(x) \subseteq U$ y $B_{r'}(x) \subseteq W$. Sea $s = \text{mín}\{r, r'\}$. Así, para $z \in B_s(x)$ se tiene que $d(x,z) < r$ y $d(x,z) < r'$. Por lo tanto

$$B_s(x) \subseteq B_r(x) \cap B_{r'}(x) \subseteq U \cap W.$$

Y en consecuencia $U \cap W \in \tau_d$.

□

La siguiente proposición muestra que, en general, los espacios inducidos por una cuasi-seudométrica no son Hausdorff.

2.7 Proposición. Si (X,d) es un espacio cuasi-seudométrico, entonces la topología generada τ_d es T_1 si y sólo si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$sucede que $d(x,y) > 0$.

Prueba. Si τ_d es T_1 entonces para dos elementos distintos x y y en X existe, $r > 0$ tal que $y \notin B_r(x)$ por lo que $d(x,y) > 0$. Por otro lado, si suponemos que para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se cumple $d(x,y) > 0$, entonces $y \notin B_{d(x,y)}(x)$ y $x \notin B_{d(y,x)}(y)$. Por lo tanto, τ_d es T_1. □

2.8 Ejemplo. (i) En la parte (i) del Ejemplo 2.4, vimos que la función $u(a) = a^+ = \text{máx}\{a, 0\}$ define una norma asimétrica y que a su vez genera una cuasi-seudométrica dada por $d_u(x,y) = \text{máx}\{y - x, 0\}$. La topología generada por esta cuasi-seudo métrica recibe el nombre de *topología de la semicontinuidad superior* [1]. Notemos que

$$\mathcal{U} = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq \infty\}$$

es la topología generada por d_u, ya que

$$B_\varepsilon(x) = \{y : \text{máx}\{y - x, 0\} < \varepsilon\} = (-\infty, x + \varepsilon).$$

[1]Recibe dicho nombre ya que, dada una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sucede que f es semicontinua superiormente si y sólo si $f : (\mathbb{R}, \tau_{usual}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ es continua, donde $\mathcal{U}$ se define como arriba

En esta topología, para $x < y$ existe $D \in \mathcal{U}$ tal que $x \in D$ y $y \notin D$. Sin embargo, no existe $D \in U$ tal que $y \in D$ y $x \notin D$. Además, $d_u(x,y) > 0$ mientras que $d_u(y,x) = 0$. Por lo tanto, U es T_0, pero no es T_1 y en consecuencia no es Hausdorff.

(ii) También vimos que el subconjunto A, de las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ tal que $\int_0^1 f(x)dx = 0$ con la función $||\cdot|$, define una norma asimétrica. La topología generada está conformada por los subconjuntos $G \subseteq A$ que cumplen que para $f \in G$ existe $r > 0$ tal que $B_r(f) = \{g : ||g - f| < r\} \subseteq G$. Sean $f, g \in A$ con $f \neq g$. Entonces $f(z) \neq g(z)$ para alguna $z \in [0,1]$. Por lo tanto, al ser funciones continuas que integran cero, $r := d_u(f,g) > 0$ y $s := d_u(g,f) > 0$ y, en consecuencia, $g \notin B_r(f)$ y $f \notin B_s(g)$, esto es, la topología es T_1.

(iii) Por último, hay espacios Hausdorff que son inducidos por cuasi-métricas. Definimos la función $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ como

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{si } x \leq y; \\ 1 & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Esta función es una cuasi-métrica:

(n_1) claramente, $\rho(x,x) = 0$;

(n_2) La desigualdad $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ se cumple ya que si $\rho(x,z) = 1$ con $x > z$, entonces las igualdades $\rho(x,y) = y - x$ y $\rho(y,z) = z - y$ implican que $\rho(x,y) + \rho(y,z)$ es negativo, lo cual no puede ocurrir, por lo que se debe tener que $\rho(x,y) = 1$ o $\rho(y,z) = 1$. Ahora, si $\rho(x,z) = z - x$ con $x \leq z$ y $\rho(x,y) \neq 1 \neq \rho(y,z)$, entonces se cumple la desigualdad, si, por ejemplo, $\rho(x,y) = 1$ con $x > y$ entonces se tiene que $z > y$ y $\rho(y,z) = z - y > z - x = \rho(x,z)$ (para $\rho(y,z) = 1$ con $y > z$ se procede de forma análoga).

(n_3) Si $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$ entonces $y - x = 0$ y por lo tanto $x = y$.

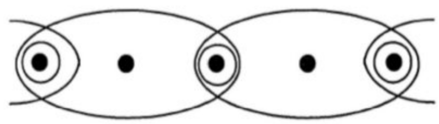
Una base de vecindades en el punto $x \in \mathbb{R}$ para la topología generada por ρ es $\{[x, x+\varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1\}$ ya que para $0 < \varepsilon < 1$

$$B_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x,y) = y - x < \varepsilon\} = \{y : x \leq y < x + \varepsilon\} = [x, x+\varepsilon).$$

La segunda igualdad se sigue de la no-negatividad de ρ. Así, tenemos que el espacio de Sorgenfrey está generado por la cuasi-métrica ρ.

Existen ejemplos de espacios topológicos que relacionan los conceptos anteriores con distintas aplicaciones de la ciencia, enseguida mostraremos algunos de ellos.

2.9 Ejemplo. (i) El conjunto $\mathbb{Z}$ con la cuasi-seudométrica d de la parte (1) del Ejemplo 2.2 es conocido como la *recta digital.* La topología generada por d tiene la forma que se muestra en la figura siguiente:



Donde los elementos con vecindades puntuales son los números impares. El producto $\mathbb{Z}^2$ se conoce como el *plano digital.* Estos dos espacios son de suma importancia en la rama de las topologías no Hausdorff, particularmente en el campo de las ciencias computacionales como la topología digital. En este contexto, tratando de ilustrar dicho ejemplo, una pantalla de computadora puede pensarse como un arreglo rectangular de puntos finitos en una red (pixeles), a la cual le podemos asociar un espacio topológico. En la práctica, uno puede especificar la cantidad de pixeles en una curva cerrada simple y entonces diferenciar la parte de adentro y la de afuera (lo cual permite coloraciones distintas en imágenes digitales). Una topología Hausdorff en dicho "espacio digital"sólo permitiría trabajar con la topología discreta la cual es impráctica por diferentes cuestiones, por ejemplo, la ausencia de conexidad y, por lo tanto la ausencia de un teorema como el de la curva de Jordan. En [7] se describe una nueva topología para el plano digital, que no es T_1, en la que se estudian diferentes propiedades del espacio topológico incluyendo una versión del teorema de la curva de Jordan.

(ii) Teoría de la complejidad [10].

(iii) Optimización multiobjetivo [11].

(iv) En la biología se encuentran diferentes aplicaciones de las cuasi-seudo métricas. Por ejemplo, en la bioinformática, existe un área de gran interés que utiliza la comparación de pares de secuencias de ADN o de proteínas por medio de secuencias similares en una base de datos de secuencias. La medida de similitud sobre la cual son comparadas, está basada en otra medida de similitud que se vincula con los nucleótidos y los aminoácidos. Estas medidas de similitud y algunas cuasi-métricas están relacionadas en [12].

Ahora, siguiendo la línea que marca la segunda pregunta que hicimos al principio de esta sección, existe una respuesta inmediata y es que no todos los espacios topológicos pueden ser inducidos por una cuasi-seudométrica como lo muestra la siguiente

2.10 Proposición. Todo espacio topológico inducido por una cuasi-seudo métrica es primero numerable.

Prueba. Dado un espacio topológico (X, τ_d) inducido por la cuasi-seudométrica d, sabemos que el conjunto $\mathcal{B}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades numerable en el punto $x \in X$, ya que para $x \in U \in \tau_d$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$. Así, por la propiedad arquimediana, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m} < r$ y por lo tanto

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq B_r(x) \subseteq U.$$

□

Resulta, a partir de la prueba anterior, que existe un problema inherente al tomar los radios r en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ya que esto fue lo que nos permitió tomar bases locales numerables, a partir de la propiedad arquimediana. Por otro lado, el espacio $X := \mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ con la topología de la convergencia puntual no tiene bases locales numerables [9] y, en consecuencia, no tiene bases locales totalmente ordenadas bajo la inclusión de conjuntos [6]. Es por esto que para resolver nuestro problema, tiende a ser natural trabajar con "cuasi-seudométricas"que no sean valuadas en conjuntos totalmente ordenados (como $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$).

3. Métrica generalizada.

Hemos visto como obtener una topología a partir de una cuasi-seudométrica. Esta forma de generar topologías a partir de dichas funciones será extendida para una cierta familia de espacios, a los que llamaremos *espacios de continuidad*. Por lo discutido anteriormente, las propiedades (m_3) y (m_4) de la Definición 2.1 no se pueden esperar en una generalización de espacio métrico de la cual todas las topologías sean inducidas. Tampoco podemos esperar que la función d sea valuada en los reales positivos. Así, dadas las propiedades del conjunto $[0, \infty]$ con la suma usual, el orden usual y la propiedad de mínimo entre dos números, nuestra generalización de las propiedades fundamentales de dicho conjunto lleva a la siguiente:

3.1 Definición. Sean G un conjunto y $+$ una operación en dicho conjunto, esto es, una función $+ : G \times G \to G$. Definimos un *semigrupo abeliano* como el par $(G, +)$ donde $+$ es asociativa y conmutativa.

3.2 Definición. Un *semigrupo valuado* es un semigrupo abeliano aditivo A con elemento identidad 0 y elemento absorbente $\infty \neq 0$ (es decir, $\infty + a = \infty$ para todo $a \in A$) que satisface:

(v_1) Para $a, b, x, y \in A$, si $a + x = b$ y $b + y = a$ entonces $a = b$.
  $*$ Dado lo anterior, podemos definir un orden parcial en A como $a \leq b$ si y sólo si $a + x = b$.
(v_2) Para cada $a \in A$ existe un único $b \in A$ tal que $b + b = a$. Tal elemento será denotado por $\frac{a}{2}$.
(v_3) Para cada $a, b \in A$ existe el ínfimo $a \wedge b$ bajo el orden dado en $*$.
(v_4) Para cualesquiera $a, b, c \in A$ se tiene $(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$.

Dada la definición de orden parcial en $*$, definimos la desigualdad estricta $a < b$ como $a \leq b$ pero $a \neq b$.

3.3 Observación. Para cualquier semigrupo valuado A con elemento absorbente ∞ se cumple:

(1) $\frac{\infty}{2} = \infty$;
(2) $a \leq \infty$ para todo $a \in A$;
(3) $\infty \wedge \infty = \infty$

3.4 Ejemplo. Los reales extendidos no negativos $[0, \infty]$, con las operaciones usuales, forman un semigrupo valuado el cual denotaremos por R.

3.5 Lema. Si $(A_i, +_i)$ es un semigrupo valuado para toda i en el conjunto de índices I, entonces su producto cartesiano $A := \prod_{i \in I} A_i$, con las operaciones de suma e ínfimo definidas entrada a entrada, es un semigrupo valuado; esto es, $+ : A \times A \to A$ tal que $(a_i) + (b_i) = (a_i +_i b_i)$ y $(a_i) \wedge (b_i) = (a_i \wedge_i b_i)$ definen un semigrupo valuado.

Prueba. El elemento identidad para A es el elemento (0_i) con $0_i \in A_i$ para todo $i \in I$. De forma similar, el elemento absorbente es (∞_i) con $\infty_i \in I$ para todo i. Para (v_1) se tiene que si $a + x = b$ y $b + y = a$, entonces para cada i, $a_i +_i x_i = (a + x)_i = b_i$ y $b_i +_i y_i = (b + x)_i = a_i$, por lo que $a_i = b_i$ y, por lo tanto, $a = b$. Los demás enunciados se siguen de forma análoga. $\square$

Para un elemento $r \in \prod_{i \in I} A_i$ usaremos indistintamente la notación de función $r(i)$ y de coordenada r_i para denotar al mismo elemento de A_i.

3.6 Ejemplo. Consideremos el semigrupo valuado R definido en el Ejemplo 3.4. Por el lema anterior, R^2 es un semigrupo valuado. Notemos que aquí $(0,1) \nleq (1,0)$ y $(1,0) \nleq (0,1)$. Además, $(0,1) \wedge (1,0) = (0,0)$ y $(0,1) < (1,1)$. Así, restringido a $\mathbb{R}^2$, éste es el orden del retículo usual: $(a,b) \leq (c,d)$ si y sólo si $a \leq b$ y $b \leq d$.

Muchas pruebas en espacios métricos usan el hecho de que el mínimo de dos números positivos es positivo. Esto sugiere la siguiente:

3.7 Definición. Un *conjunto de positivos* en un semigrupo valuado A es un subconjunto P de A, que satisface:

(p_1) Si $r, s \in P$ entonces $r \wedge s \in P$.
(p_2) Si $r \in P$ y $r \leq a$ entonces $a \in P$.
(p_3) Si $r \in P$ entonces $\frac{r}{2} \in P$.
(p_4) Si $a \leq b + r$ para cada $r \in P$ entonces $a \leq b$.

3.8 Ejemplo. Los siguientes son conjuntos de positivos:

(1) un semigrupo valuado;
(2) $(0, \infty]$ en R;
(3) $(0, \infty] \times (0, \infty]$ en $\mathbb{R}^2$.

Ahora generalizamos los enunciados dados en la definición de espacio métrico, para el caso de semigrupos valuados:

3.9 Definición. Sean X un conjunto distinto del vacío y $d : X \times X \to A$ una función, con A un semigrupo valuado. Para cualesquiera $x, y, z \in X$, consideremos las siguientes propiedades:

(m_1) $d(x,x) = 0$;
(m_2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdad del triángulo);
(m_3) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría);
(m_4) $d(x,y) = 0$ implica $x = y$ (separación).

Notemos que la única diferencia entre las propiedades $(m_1), \ldots, (m_4)$ de la Definición 2.1 y las de ahora, es el conjunto en el contradominio de la función d Por esta razón, abusando de la notación, los llamaremos de la misma manera. En lo que sigue se hará referencia a la función d con contradominio un semigrupo valuado.

3.10 Definición. Un *espacio de continuidad* es una cuaterna $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$, donde X es un conjunto no vacío, A es un semigrupo valuado, P es un conjunto de positivos en A y $d : X \times X \to A$ satisface (m_1) y (m_2). La función d es llamada *función de continuidad*. Además, diremos que $\mathcal{X}$ es *simétrico* si, además de cumpli (m_1) y (m_2), d satisface (m_3) y que $\mathcal{X}$ *separa* si cambiamos (m_3) por (m_4).

Notemos que tanto los espacios métricos y espacios cuasi-seudométricos son ejemplos de espacios de continuidad.

3.11 Definición. Sean $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad, $x \in X$ y $b \in A$. Definimos $N_b(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq b\}$ como la *nube* de radio b alrededor de x, $S_b(x) = \{y \in X : d(x, y) < b\}$ y

$$\mathbb{T}(\mathcal{X}) = \{D \subseteq X : \text{si } x \in D \text{ entonces } N_r(x) \subseteq D \text{ para algún } r \in P\}, \qquad (2)$$

3.12 Proposición. Sean $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad. El conjunto $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ para un espacio de continuidad $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ es una topología en X.

Prueba. (1) El conjunto vacío $\varnothing$ está en $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ por vacuidad. El conjunto X está en $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ ya que, para toda $x \in X$, se tiene $N_r(x)$ es subconjunto de X para cualquier $r \in P$.

(2) Sean $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{T}(\mathcal{X})$. Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$ y, en consecuencia, $N_r(x) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ para alguna $r \in P$. Por lo tanto, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$.

(3) Sean $U, W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$. Si $U \cap W = \varnothing$ entonces $U \cap W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$. Supongamos que $U \cap W$ es no vacía y sea $x \in U \cap W$. Por definición existen $r, s \in A$ tales que $N_r(x) \subseteq U$ y $N_s(x) \subseteq W$. Dado que $d(x, y) \leq r \wedge s$ si y sólo si $d(x, y) \leq r$ y $d(x, y) \leq s$ ya que $r \wedge s \in P$, podemos tomar $N_{r \wedge s}(x)$ y así

$$N_{r \wedge s}(x) \subseteq N_r(x) \cap N_s(x) \subseteq U \cap W.$$

Por lo tanto, $U \cap W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$.

$\square$

Ahora que sabemos como obtener un espacio topológico, a partir de un espacio de continuidad, lo siguiente será demostrar un lema en el cual encontraremos una forma de definir un espacio de continuidad a partir de otro. Recordemos que $R = [0, \infty]$.

3.13 Lema. Sea $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad. Para cada $W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$ existen una función $d_W : X \times X \to R$ que satisface (m_1) y (m_2), y un espacio de continuidad $\mathcal{X}_W = (X, d_W, R, (0, \infty])$ tal que

$$\mathbb{T}(\mathcal{X}_W) = \{\varnothing, W, X\} \subseteq \mathbb{T}(\mathcal{X}).$$

Prueba. Definimos $d_W : X \times X \to R$ como

$$d_W(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{si la implicación } (x \in W \Rightarrow z \in W) \text{ es cierta;} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3}$$

Claramente d_W satisface (m_1). Ahora, para ver que satisface (m_2), consideramos dos casos:

Caso 1: $d_W(x, y) = 1$ o $d_W(y, z) = 1$. Así, siempre se cumple la expresión $d_W(x, z) \leq d_W(x, y) + d_W(y, z)$.

Caso 2: $d_W(x, y) = 0 = d_W(y, z)$. Así, se cumple $(x \in W \Rightarrow y \in W)$ y $(y \in W \Rightarrow z \in W)$ y, en consecuencia, se tiene $(x \in W \Rightarrow z \in W)$. Por lo tanto, $d_W(x, z) = 0$ y (m_2) se satisface.

De esta manera concluimos que $\mathcal{X}_W$ es un espacio de continuidad. Ahora veamos que $\mathbb{T}(\mathcal{X}_W) = \{\varnothing, W, X\}$.

Sea $p \in R$. Si $p < 1$ entonces

$$N_p(x) = \{y \in X : d_W(x, y) \leq p\} = \{y \in X : d_W(x, y) = 0\} = \{y \in X : (x \in W \Rightarrow y \in W)\},$$

por lo que $N_p(x) = W$ si $x \in W$ y $N_p(x) = X$ si $x \notin W$.

Por otro lado si $p \geq 1$ entonces, como $d_w(x, y) \leq 1$ para toda $y \in X$,

$$N_1(x) = \{y \in X : d_W(x, y) \leq p\} = X.$$

Así, dados $U \in \mathbb{T}(\mathcal{X}_W)$, $U \neq \varnothing$ y $x \in U$ existe $p > 0$ tal que $N_p(x) \subseteq U$. Por lo anterior

$$N_p(x) = \begin{cases} W & \text{si } x \in W \text{ y } p < 1; \\ X & \text{si } x \notin W \text{ o } p \geq 1. \end{cases} \tag{4}$$

y por tanto $W \subseteq N_p(x) \subseteq U$. Si $U \neq W$ entonces, para $y \in U \backslash W$, cualquier bola cerrada $N_r(y) = X$ y, en consecuencia, $U = X$. Lo anterior prueba que $\mathbb{T}(\mathcal{X}_W) = \{\varnothing, W, X\}$. $\square$

3.14 Lema. Sean I un conjunto de índices, $\{(A_i, +_i)\}_{i \in I}$ una familia de semigrupos valuados y $P_i \subseteq A_i$ conjuntos de positivos para cada $i \in I$.

Definimos la suma de la familia $\{P_i\}$, denotada por $P := \oplus P_i$, como el conjunto de elementos $r \in \prod_{i\in I} P_i$ tales que $r(i) \in P_i$ para todo $i \in I$ y $r(i) = \infty_i$ para todas excepto un número finito de $i \in I$. Entones P es un conjunto de positivos en el producto cartesiano $A = \prod_{i\in I} A_i$ (el cual ya vimos que es un semigrupo valuado en el Lema 3.5).

Prueba. (p_1) Sean $r, s \in P$. Cada operación en el producto se toma coordenada a coordenada. Así, dados $r, s \in P$ se tiene $(r \wedge s)(i) = r(i) \wedge s(i) \in P_i$ para toda $i \in I$ por ser P_i un conjunto de positivos. Además, el ínfimo de infinitos es infinito y como sólo hay un número finito de elementos distintos a ∞_i, se concluye que $r \wedge s \in P$.

(p_2) Si $r \in P$ y $r \leq a$, entonces $r_i \leq a_i$ para toda i, en consecuencia $a_i \in P_i$ y dado que $r_i = \infty_i$ para todas excepto un número finito de $i \in I$, se tiene que $a_i = \infty_i$ para todas excepto un número finito de índices.

(p_3) Si $r \in P$, entonces $r_i \in P_i$ y en consecuencia $\frac{r_i}{2} \in P_i$ para todo i. Como $\frac{\infty}{2} = \infty$ se concluye $\frac{r}{2} \in P$.

(p_4) Supongamos que $a \leq b + r$ para cada $r \in P$. Definimos para $i \in I$ y $q \in P_i$ la función $r(i,q) : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ como

$$r(i,q)(j) = \begin{cases} \infty_j & \text{si } i \neq j; \\ q & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{5}$$

Así, $r(i,q) \in P$ y se cumple

$$a(i) \leq b(i) + r(i,q)(i) = b(i) + q.$$

Como q e i son arbitrarias se concluye que $a(i) \leq b(i)$ para todo i y por lo tanto $a \leq b$.

□

Ahora veremos el teorema principal, el cual responde a la pregunta planteada en la sección inicial.

3.15 Teorema. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces existe un espacio de continuidad $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ tal que $\mathbb{T}(\mathcal{X}) = \tau$.

Prueba. Para cada $W \in \tau$ definimos d_W como en la ecuación (2) del Lema 3.13. Definimos $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ como sigue: $A := \prod_{W\in\tau} R$, $P := \oplus_{W\in\tau} R$ y $d : X \times X \to A$ como $d(x,y)(W) = d_W(x,y)$. Sabemos que A es un semigrupo valuado, P es un conjunto de positivos en A y d cumple (m_1) y (m_2)

en cada coordenada, por lo que d es una función de continuidad y, por lo tanto, $\mathcal{X}$ es un espacio de continuidad. Veamos que $\tau = \mathbb{T}(\mathcal{X})$.

Sean $W \in \tau$, $p \in (0, \infty]$ y $r(W, p) : \tau \to R$ definida como

$$r(W,p)(U) = \begin{cases} p & \text{si } U = W; \\ \infty & \text{si } U \neq W. \end{cases}$$

Claramente $r(W, p) \in P$. Notemos que, para todo $x \in C$,

$$N_{r(W,p)}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r(W, p)\} = \{y \in X : d_W(x, y) \leq p\}$$

donde la última igualdad se da porque los elementos en P quedan determinados por los valores en las coordenadas donde no son ∞. Esto es, dado $r \in P$ sabemos que este elemento toma valores distintos de ∞ solamente en un número finito de elementos $U_1, \ldots, U_n$. De esta manera, para cualquier otro elemento $s \in P$, que cumpla la igualdad $r(U_k) = s(U_k)$ con $k = 1, \ldots, n$ y tal que $s(W) = \infty$ para $W \neq U_1, \ldots, U_n$, se cumple $r = s$. Ahora, por el Lema 3.13 y la ecuación (3) sabemos que $N_{r(W,p)}(x) = W$ si $x \in W$ y $p < 1$. Así, para $x \in W$ y $p < 1$ se tiene $N_{r(W,p)}(x) \subseteq W$ y, por lo tanto, $W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$.

Ahora, sean $B \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$ y $x \in B$. Entonces existe $r_x \in P$ tal que $N_{r_x}(x) \subseteq B$. Sabemos que $\{W : r_x(W) < \infty\}$ es un conjunto finito, por lo que existen $W_1, \ldots, W_n \in \tau$ y $p_1, \ldots, p_n \in R$ tales que $r_x(W_i) = p_i$ y $r_x(W) = \infty$ si $W \neq W_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto

$$r_x = r(W_1, p_1) \wedge \cdots \wedge r(W_n, p_n),$$

ya que cada $r(W_i, p_i)$ sólo toma un valor finito en el conjunto W_i correspondiente y el mínimo de todos los $r(W_1, p_1), \ldots, r(W_n, p_n)$ en W_i es el valor p_i. Por lo que

$$\begin{aligned} y \in N_{r_x}(x) &\Leftrightarrow d(x, y) \leq r_x \\ &\Leftrightarrow d(x, y) \leq r(W_i, p_i) \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{n} N_{r(W_i, p_i)}(x). \end{aligned}$$

En consecuencia $N_{r_x}(x)$ es la intersección de los $N_{r(W_i,p_i)}$ y, como cada uno de estos elementos son los conjuntos abiertos (en τ) X o W_i, se tiene que su intersección es un conjunto abierto en τ. Dado que $B = \bigcup_{x \in B} N_{r_x}(x)$ se concluye $B \in \tau$. $\square$

Notemos que, en la demostración del teorema anterior, las nubes $N_r(x)$ resultaron ser conjuntos abiertos en la topología τ. Además, la generalización de bolas abiertas $S_r(x)$ no necesariamente son conjuntos abiertos como lo muestra el siguiente ejemplo.

3.16 Ejemplo. Sean $X = \mathbb{R}^2$, $A = R^2$, $P = (0, \infty]^2$ y $d : X \times X \to A$ dada por

$$d((w, x), (y, z)) = (|w - y|, |x - z|).$$

El conjunto $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ es un espacio de continuidad. Afirmamos que $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ es la topología usual en $\mathbb{R}^2$. En efecto, los conjuntos $N_r((w, x))$ con $(r, s) \in P$ son rectángulos cerrados en $\mathbb{R}^2$ ya que

$$\begin{aligned} N_r(w, x) &= \{(y, z) \in X : d((w, x), (y, z)) \leq (r, s)\} \\ &= \{(y, z) \in X : (|w - y|, |x - z|) \leq (r, s)\} \\ &= \{(y, z) \in X : |w - y| \leq r \text{ y } |x - z| \leq s\} \\ &= [w - r, w + r] \times [x - s, x + s]. \end{aligned}$$

Como $r, s > 0$, concluimos que cualquier $U \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$ contiene abiertos de la topología usual. Análogamente, cualquier abierto U en la topología usual contiene rectángulos cerrados centrados en cualquiera de sus elementos. En consecuencia U está en $\mathbb{T}(\mathcal{X})$. Sin embargo, $S_{(1,1)}((0, 0))$ no es un conjunto abierto ya que

$$\begin{aligned} S_{(1,1)}(0, 0) &= \{(y, z) \in X : d((0, 0), (y, z)) < (1, 1)\} \\ &= \{(y, z) \in X : (|0 - y|, |0 - z|) < (1, 1)\} \\ &= \{(y, z) \in X : |y| \leq 1 \text{ y } |z| \leq 1 \text{ pero } |y| \neq 1 \text{ y } |z| \neq 1\} \\ &= [-1, 1] \times [-1, 1] \backslash \{(\pm 1, \pm 1)\} \end{aligned}$$

Así, $S_{(1,1)}(0, 0)$ es un rectángulo cerrado sin las esquinas.

Lo que haremos a continuación será encontrar el equivalente de las bolas abiertas. Para ello necesitamos la siguiente noción.

3.17 Definición. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$DY = \left\{ \frac{i}{2^k} : \ i \text{ es un entero positivo y } k \text{ es un entero no negativo} \right\}.$$

DY es llamado *el conjunto de los diádicos positivos.*

3.18 Observación. Sea A un semigrupo valuado. Entonces

(1) La función multiplicación $\cdot : DY \times A \to A$ donde $\cdot\left(\frac{i}{2^k}, a\right)$ se obtiene repitiendo la aplicación adición i veces en el elemento $\frac{a}{2^k}$ (el cual se obtiene aplicando (v_2) de la definición de semigrupo valuado recursivamente k veces) está bien definida. Denotaremos a la imagen de los elementos del dominio por $\frac{ia}{2^k}$. La función $\cdot$ se distribuye en ambas entradas, es decir, $(m+n)a = ma+na$ y $m(a+b) = ma+mb$. En efecto, para el primer caso:

$$\left(\frac{i}{2^k} + \frac{j}{2^r}\right) a = \underbrace{\frac{a}{2^{k+r}} + \cdots + \frac{a}{2^{k+r}}}_{2^r i + 2^k j \text{ veces}}.$$

Notemos que $\frac{a}{2^{k+r}}$ es el elemento tal que, al sumarlo 2^r veces, da $\frac{a}{2^k}$ y al sumarlo 2^k veces da $\frac{a}{2^r}$. Así, asociando i factores de 2^r sumandos obtenemos i factores de la forma $\frac{a}{2^k}$ y, asociando j factores de 2^k sumandos, obtenemos j factores de la forma $\frac{a}{2^r}$ que al sumarlos da $\frac{ia}{2^k} + \frac{ja}{2^r}$. De forma análoga se prueba la otra propiedad distributiva.
Es asociativa, ya que

$$\frac{j}{2^r}\left(\frac{i}{2^k}a\right) = \underbrace{\frac{1}{2^r}\frac{ia}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^r}\frac{ia}{2^k}}_{j \text{ veces}}$$

y

$$\frac{ji}{2^k 2^r}a = \underbrace{\frac{a}{2^{k+r}} + \ldots + \frac{a}{2^{k+r}}}_{j \cdot i \text{ veces}}.$$

Notemos que el factor $\frac{a}{2^{k+r}}$ es tal que al sumarlo 2^r veces da $\frac{a}{2^k}$. Así, asociando i factores del elemento $\frac{a}{2^{k+r}}$ obtenemos el elemento $\frac{1}{2^r}\frac{ia}{2^k}$. Por lo que ambas ecuaciones son iguales y por lo tanto la asociatividad se cumple.
La operación $\cdot$ tiene elementro neutro, esto es, existe $1 \in DY$ tal que $1a = a$ para toda $a \in A$ (el elemento $1 := \frac{1}{2^0}$ cumple la propiedad).

(2) Si $n < m$ son dos diádicos positivos, entonces $nr \leq mr$ para todo $r \in A$. Ya que

$$nr \leq nr + (m-n)r = (n+m-n)r = mr.$$

(3) Si $r \in P$ y $n \in DY$ entonces $nr \in P$ (por (p_3), (p_2) y la definición de orden en $*$ de la definición 3,1).

3.19 Definición. Sean $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad, $x \in X$ y $b \in A$. Definimos la *bola abierta* de radio b con centro en x como

$$\begin{aligned} B_b(x) &= \bigcup \{N_{nb}(x) : n \in DY \text{ y } n < 1\} \\ &= \{y \in X : \text{ para algún } n \in DY \text{ con } n < 1 \text{ se tiene } d(x,y) \leq nb\}. \end{aligned}$$

3.20 Proposición. Sean $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad y $x \in X$. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados:

(i) Para espacios métricos ($A = \mathbb{R}$ y $P = (0, \infty]$). Si $r \in P$ entonces $S_r(x) = B_r(x)$.
(ii) Si $b \in A$ entonces $N_{\frac{b}{2}}(x) \subseteq B_b(x) \subseteq N_b(x)$.
(iii) Si $r \in P$ entonces $B_r(x)$ es abierto en $\mathbb{T}(\mathcal{X})$.
(iv) Los conjuntos $\mathcal{B}_x = \{B_r(x) : r \in P\}$ y $\mathcal{N}_x = \{N_r(x) : r \in P\}$ son bases locales de vecindades para x.

Prueba. (i) La contención $B_r(x) \subseteq S_r(x)$ se sigue porque, para $n \in DY$ con $n < 1$, la desigualdad $nr \leq 1r$ se cumple por (2) de la Observación 3.18 y, además, dado $z \in N_{nr}$ se tiene que $d(x, z) \neq r$ por lo que $z \in S_r(x)$. Por otro lado, la contención $S_r(x) \subseteq B_r(x)$ es cierta porque para $r \in (0, \infty]$, $n \in DY$ con $n < 1$ se puede aproximar a 1 tanto como se quiera.

(ii) La primer contención se cumple porque el factor de la izquierda es un uniendo del factor de la derecha. La segunda contención se sigue de (1) y (2) de la Observación 3.18, ya que para $n \in DY$ con $n < 1$ se tiene $nb \leq b$ y en consecuencia $N_{nb}(x) \subseteq N_b(x)$.

(iii) Sea $y \in B_r(x)$. Entonces existe $n \in DY$ con $n < 1$ tal que $d(x, y) \leq nr$. Definimos $m := \frac{1-n}{2}$, notemos que $m \in DY$ y por (3) de la Observación 3.18 se cumple $mr \in P$. Ahora, $N_{mr}(y) \subseteq B_r(x)$ ya que dado $z \in N_{mr}(y)$ se tiene

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq nr + mr = (n + m)r$$

en consecuencia $z \in N_{(m+n)r}(x)$ y, como $n + m = \frac{1+n}{2} < 1$, se concluye que $z \in B_r(x)$. Por lo tanto, $B_r(x) \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$.

(iv) Sabemos que $\mathcal{N}_x$ es base local. Por otro lado, si $U \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$ y $x \in U$, se sigue de los incisos anteriores que existe $r \in P$ tal que $x \in B_r(x) \subseteq N_r(x) \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_x$ es base local.

$\square$

4. Simetría y espacios completamente regulares

Dados los resultados anteriores surge la pregunta ¿Qué relación tienen los axiomas (m_3) y (m_4) con respecto a un espacio de continuidad $\mathcal{X}$ y su topología $\mathbb{T}(\mathcal{X})$? Con los siguientes resultados responderemos dicha cuestión.

4.1 Proposición. La topología $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ es T_1 si y sólo si $\mathcal{X}$ separa (es decir, d satisface (m_4)),

Prueba. Sea $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad con topología $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ que es T_1. Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene que $X \backslash \{y\} \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$. Así, existe $r \in P$ tal que $N_r(x) \subseteq X \backslash \{y\}$ y, en consecuencia, $d(x, y) \geq r$. En particular, $d(x, y) \neq 0$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{X}$ separa. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces $d(x, y) \neq 0$ y por lo tanto existe $r \in P$ tal que $d(x, y) \geq r$. Así, $N_r(x) \subseteq X \backslash \{y\}$ y por lo tanto, $X \backslash \{y\}$ es un conjunto abierto en X. $\square$

4.2 Teorema. Sea $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad. Si d es simétrica, es decir, cumple (m_3), entonces $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ es $T_{3_{\frac{1}{2}}}$. Además, todo espacio $T_{3_{\frac{1}{2}}}$ es inducido por un espacio de continuidad simétrico. Por lo tanto, $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ es Tychonoff si y sólo si d es simétrica y separa.

Prueba. Supongamos que $\mathcal{X}$ es simétrico y tomemos $W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$ y $x \in W$. Entonces existe $r \in P$ tal que $N_r(x) \subseteq W$. Definimos $g_r : A \to [0, \infty]$ como

$$g_r(a) = \inf\{n \in DY : a \leq nr\}.$$

Notemos que si $c \leq a + b$, $a \leq nr$ y $b \leq mr$, entonces $c \leq (n + m)r$ y, por lo tanto, $g_r(c) \leq g_r(a) + g_r(b)$. Definimos $h : X \to [0, 1]$ como

$$h(y) = \min\{g_r(d(x, y)), 1\}.$$

Veamos que h es continua. Por la desigualdad del triángulo y lo explicado anteriormente, $g_r(d(x,z)) \leq g_r(d(x,y)) + g_r(d(y,z))$. Afirmamos que

$$h(z) \leq h(y) + g_r(d(y,z)).$$

En efecto, si $h(z) = 1$ entonces $g_r(d(x,z)) \geq 1$ y, en consecuencia, para cualquier valor de $h(y)$ se cumple la desigualdad. Si $h(z) = g_r(d(x,z))$ es inmediata la desigualdad. Por lo tanto $h(z) - h(y) \leq g_r(d(y,z))$. Ahora, si empezamos el razonamiento partiendo de la desigualdad $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ obtenemos

$$h(y) \leq h(z) + g_r(d(z,y))$$

y, por lo tanto, $h(y) - h(z) \leq g_r(d(z,y))$. Así, por simetría, se cumple

$$|h(y) - h(z)| \leq g_r(d(y,z))$$

y en consecuencia, para $\varepsilon > 0$ tomamos $m \in DY$ tal que $m < \varepsilon$ y si $d(y,z) \leq mr$ entonces $|h(y) - h(z)| \leq m < \varepsilon$. Por lo tanto, h es continua en y. Además, notemos que $h(x) = 0$ y si $h(y) < 1$ entonces existe $n \in DY$ con $n < 1$ tal que $d(x,y) \leq nr \leq nr + (1-n)r = r$, esto es, $y \in N_r(x) \subseteq W$, por lo que cualquier $z \in X \backslash W$ cumple que $h(z) \geq 1$, esto es, $h(z) = 1$. Así, $h(x) = 0$ y $h(z) = 1$ para toda $z \in X \backslash X$. Por lo tanto, $\mathbb{T}(\mathcal{X})$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Ahora supongamos que el espacio topológico (X, τ) es $T_{3\frac{1}{2}}$ y veamos que existe un espacio de continuidad simétrico que induce la topología τ. Por hipótesis, existe una familia de funciones continuas en $[0,1]$, digamos $\mathcal{F}$, tal que si $W \in \tau$ y $x \in X$ entonces existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \backslash W) = \{1\}$.

Definimos $A := R^{\mathcal{F}}$,

$$P := \{r \in (0,\infty]^{\mathcal{F}} : r(f) = \infty \text{ para todas excepto un número finito de } f \in \mathcal{F}\},$$

y $d : X \times X \to A$ como $d(x,y)(f) = |f(x) - f(y)|$. Notemos que d cumple (m_1), (m_2) y (m_3). Así, $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ es un espacio de continuidad. Afirmamos que $\tau = \mathbb{T}(\mathcal{X})$.

Veamos que $\mathbb{T}(\mathcal{X}) \subseteq \tau$. Dados $x \in X$ y $r \in P$, existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ y $p_1, \ldots, p_n > 0$ tales que $r(f_i) = p_i$ y $r(g) = \infty$ para toda $g \neq f_i$ con $i = 1, \ldots, n$. Así,

$$
\begin{aligned}
y \in B_r(x) &\Leftrightarrow d(x,y) \leq mr \text{ para algún } m \in DY \text{ con } m < 1 \\
&\Leftrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq mp_i \text{ para toda } i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < p_i \text{ para toda } i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(f_i(x) - p_i, f_i(x) + p_i)].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
B_r(x) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(f_i(x) - p_i, f_i(x) + p_i)].
$$

Como f_i es continua en τ para toda i, se concluye que $B_r(x) \in \tau$. Así, por la parte (iv) de la Proposición 3.20, todo abierto $U \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$ es elemento de τ.

Ahora veremos que $\tau \subseteq \mathbb{T}(\mathcal{X})$. Sean $W \in \tau$ y $x \in W$. Por hipótesis, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \backslash W) = \{1\}$. Definimos $r_f : \mathcal{F} \to (0, \infty]$ como $r_f(f) = \frac{1}{2}$ y $r_f(g) = \infty$ para $g \neq f$. Así

$$
N_{r_f}(x) = \{y : d(x,y) \leq r_f\} = \left\{ y : |f(y)| \leq \frac{1}{2} \right\} \subseteq W.
$$

Por lo tanto, $W \in \mathbb{T}(\mathcal{X})$. $\square$

Referencias

[1] G.A. Albert *A note on quasi-metric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 47 (1941), 479–482.

[2] X. Blasco, G. Reynoso-Meza, E. A. Sánchez-Pérez y J.V. Sánchez Pérez, *Asymmetric distance to improve n-dimentional Pareto fronts graphical analysis*, Information Science, 340-341(2016), 228–249.

[3] S. Cobzaş, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Babes-Bolyai University, Faculty of Mathematics and Computer Science, 2011.

[4] M. Frechet *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo, 22 (1906), 1–74.

[5] J.C. Kelley, *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 71–81.

[6] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[7] T.Y. Kong, R. Kopperman y P. Meyer, *A topological approach to digital topology*, The American Mathematical Monthly, 98 (1991), 901–917.

[8] R. Kopperman *All topologies come from generalized metrics*, The American Mathematical Monthly, 95 (1988), 89–97.

[9] R. Kopperman *Which topologies are quasimetrizable?*, The American Mathematical Monthly, 52 (1993), 99–107.

[10] J.G. Larrecq, *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory*, Cambridge University Press, United Kingdom 2013.

[11] S. Romaguera, E. A. Sánchez-Pérez y O. Valero, *Computing complexity distances between algorithms*, Kybernetica, 39 (2013), 569–582.

[12] A. Stojmirovic, *Quasy-metrics, similarities and research: aspects of geometry of protein data sets*, tesis (Ph. D in Mathematics), New Zealand, Victoria University of Wellington, 2005.

[13] W. A. Wilson *On quasi-metric spaces*, American Journal of Mathematics, 53 (1931), 675–684.