UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REDES ARMÓNICAS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

Rafael López Bautista

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido Paterno	López
Apellido Materno	Bautista
Nombre	Rafael
Teléfono	55 16 44 07 44
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
Número de cuenta:	406042178
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Doctor
Nombre	Rodolfo
Apellido Materno	San Agustín
Apellido Paterno	Chi
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	M. en C.
Nombres	José Antonio
Apellido Materno	Gómez
Apellido Paterno	Ortega
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Doctor
Nombres	Vinicio Antonio
Apellido Materno	Gómez
Apellido Paterno	Gutiérrez
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Doctora
Nombres	Natalia
Apellido Materno	Jonard
Apellido Paterno	Pérez
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Matemático
Nombres	Julio Cesar
Apellido Materno	Guevara
Apellido Paterno	Bravo
7. Datos de la tesis.	7. Datos de la tesis.
Título	Redes Armónicas en el Plano y el Espacio
No. de páginas	48
Año	2017

Lee […]

– Corán

αγεωμετρητοσ μηδεισ εισιτω

– Academia Platónica

eadem mutata resurgo

– Jakob Bernouilli

Este trabajo está dedicado a:

Cósmico

Rafael y Beatriz, por su tesón

Cory, Lucía, Ana y Sofía, por el amor verdadero

Agradecimientos

Agradezco a:

Mis padres por enseñarme el valor de los libros y del sacrificio.

La UNAM, oasis insólito.

El Director de la Tesis, Dr. Rodolfo San Agustín Chi por su paciencia, consejo y ejemplo.

Mi Maestro de árabe, Khalid Chami, por su confianza, por siempre desafiarme y mostrarme mundos insospechados.

Mis Profesores de Geometría, Rodolfo San Agustín, Pablo Barrera, Guilmer González y Ana Irene Ramírez, por transmitir su amor y mostrar los secretos.

Andrew Shaw y Ernesto Paas, sin cuya ayuda este trabajo no habría sido posible.

Paco, Fer, Shml, Chuster, Amaury, Saúl, Leo, Dodo, Caro, Oscar, por la luz en tiempos de obscuridad.

Abril, Marina, Érika y Brenda por la alegría y la inspiración.

Prefacio

El presente trabajo comprende el rescate, traducción, lectura, análisis e interpretación matemática contemporánea de la primera mitad de la tesis doctoral de Konrad Zindler, defendida en la Universidad de Graz en Austria en 1895. Siendo que el autor de la presente tesis no es hablante del idioma alemán, la tarea consistió en estudiar y traducir el texto simultáneamente; el instrumento fundamental para conseguirlo ha sido el conocimiento de las herramientas y métodos propios del tema tratado y de la Geometría Sintética en general. El proceso principal consistió en trabajar sobre la traducción automática generada por computadora corrigiendo paso a paso la redacción en función del desarrollo esperado del texto y con base en el conocimiento antes descrito. La traducción se ofrece en inglés por conveniencia pero cabe mencionar que existe una traducción al español no escrita y que se realizó simultáneamente durante la totalidad de la discusión que tuvo lugar alrededor del texto.

En el pasaje que presentamos se prueba que partiendo de cuatro puntos en posición general en el plano es posible, sólo utilizando regla, construir una red densa de puntos en el plano; en el sentido de que, dado cualquier punto arbitrario en el plano, es posible encontrar un punto perteneciente a la red de incidencia construida que esté arbitrariamente cerca del punto dado. Además, el resultado es extendido al espacio tridimensional.

La intención del autor con su presentación constructiva es ofrecer un método sintético para resolver un problema que en una primera instancia podría considerarse de naturaleza analítica y de esta forma contrastar sus métodos con aquello usados por Möbius para resolver el mismo problema.

Contenido

Introducción

El rescate de este texto comenzó con una copia de la versión impresa original, tal como fue publicada en 1890 en "Sitzungsberichte Der Mathematisch-naturwissenschaftlichen classe Der kaiserlichen Akademie der wissenschaften", las "Memorias de la Clase de Matemáticas y Ciencias Naturales de la Academia Imperial de Ciencias" [Zindler]. Dicha versión fue digitalizada utilizando el servicio gratuito de Reconocimiento Óptico de Caracteres (OCR, por sus siglas en inglés) ofrecido por Google en línea. Esta versión digitalizada fue luego corregida –por el autor– de cualquier error tipográfico resultado del proceso automatizado de "OCR", en seguida el texto fue procesado con el software de Traducción Asistida por Computadora SDL Trados Studio conectado al servidor de traducción automática de Google y al servidor nativo de la aplicación. De esta forma, comparando los dos textos ofrecidos por la máquina (ver Apéndice), fue posible redactar un tercer texto con coherencia, cuya precisión se fue verificando a cada paso mediante la constante exigencia de un correcto sentido matemático y la búsqueda de consistencia en el planeamiento de la estrategia de demostración; la parte más delicada de esta etapa del trabajo consistió en identificar y corregir acepciones no matemáticas a términos alemanes, cosa que es imposible discernir para la máquina. Se decidió utilizar el idioma inglés por su natural cercanía con la lengua alemana, además así, al ser el inglés *lingua franca* en la actualidad, el texto original podrá ser ahora ampliamente accesible.

En la primera parte se presenta una versión bilingüe Alemán-Inglés seguida, en la segunda parte, por una exposición contemporánea en español de los resultados tratados. Se presenta de esta forma porque ambos textos se respaldan mutuamente: Con base en la traducción inglesa fue posible comprender la demostración y por otro lado la comprensión exhaustiva requerida para presentar el resultado rigurosamente en español confirma que la traducción ha sido, por lo menos en lo que a transmitir significado matemático se refiere, correcta. Dicha versión bilingüe incluye además notas de interés para una lectura histórica del texto así como sobre el trabajo mismo de traducción.

El objetivo del pasaje es demostrar y generalizar un teorema incluido en la obra de Möbius "El Cálculo Baricéntrico" de 1827 [Servatius]:

"Sean A, B, C, D cuatro puntos dados en el plano, de los cuales ninguna tercia yace en una línea recta, y P cualquier quinto punto dado en el plano, entonces es posible, mediante conexión consecutiva de los cuatro primeros puntos por líneas rectas, alcanzar un punto que o bien coincide con el quinto punto P o bien dista de él menos que cualquier distancia dada." [Möbius, §.205]

Se plantea una estrategia "sintética" [Zindler, I] que consiste en dos lemas previos que permiten concluir el teorema, que en seguida se generalizará al caso tridimensional: Dados cinco puntos en el espacio, en posición general, es posible, utilizando sólo planos, construir un punto dentro de una vecindad de radio ε de un sexto punto dado, para toda $\varepsilon > 0$.

Nos ha interesado explorar este texto debido a que constituye un temprano estudio de la idea de densidad en espacios euclidianos, ubicado en una época de gran dinamismo en la investigación en geometría y durante la cual la disciplina que hoy llamamos matemáticas empezaba a constituirse como tal. Cabe mencionar que hasta donde sabemos no existe traducción alguna del texto que nos ocupa. Además, aunque el concepto de red armónica y sus propiedades ya se encuentran en los libros clásicos [Veblen y Young, § 32 y § 33] y [Coxeter, 10.3], esta presentación constructiva de Zindler no ha recibido atención en trabajos contemporáneos que abordan las configuraciones proyectivas, cómo [Grünbaum] y [Pisanski y Servatius], y su naturaleza algorítmica resulta sugerente desde el punto de vista de la matemática constructiva y computacional.

Parte 1. Texto Original en Alemán y Traducción al Inglés.

Zur Theorie der Netze und Configurationen

von

Konrad Zindler in Graz.

I.

Möbius beweist im barycentrischen Calcül §. 205 mit Hilfe seiner analytischen Geometrie folgenden Satz: „Sind A, B, C, D vier in einer Ebene gegebene Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und ist P irgend ein fünfter gegebener Punkt der Ebene, so kann man durch fortgesetzte Verbindung der vier ersteren durch gerade Linien zu einem Punkte gelangen, der mit dem fünften P entweder zusammenfällt oder von ihm um einen Abstand entfernt ist, der kleiner ist, als jeder gegebene". Nicht wesentlich verschieden davon ist folgende Formulirung: „Wenn eine beliebig kleine feste Strecke ρ vorgegeben ist, ferner ein beliebig grosses endliches Stück einer Ebene, und in derselben vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so lässt sich bloss durch fortgesetzte geradlinige Verbindung der vier Punkte und der sich jeweilig ergebenden neuen Durchschnittspunkte ein Netz von Geraden und deren Schnittpunkten construiren, welches jenes beliebig gewählte endliche Stück der Ebene so dicht überdeckt, dass nirgends in demselben ein Kreis mit dem Radius ρ gezogen werden kann, in welchem nicht mindestens ein Schnittpunkt des Netzes liegen würde". Dieser Satz ist an sich beachtenswerth und wird von Möbius auch zu wichtigen Folgerungen in der Theorie der Collineation verwendet; es wird daher nicht ohne Interesse sein, einen einfachen und elementaren synthetischen Beweis desselben mitzutheilen:

Der Gedankengang des Beweises ist folgender: Zunächst wird bewiesen: „Von drei gegebenen Punkten einer Geraden ausgehend, kann man bloss durch lineale Construction auf jeder Seite der Geraden zu einem vierten Punkte der Geraden gelangen,

On the theory of Nets and Configurations

By Konrad Zindler in Graz.

I.

Möbius proves in Barycentrischen Calcülus §. 205, with the help of his analytical geometry, the following sentence: "Let A, B, C, D be four given points in a plane, none three of which lie in a straight line, and P any fifth given point in the plane, then you can through consecutive[1] connection of the four former points through straight lines reach a point which either coincides with the fifth P or differs from it by a distance smaller than any given one". The following formulation is not much different from the former one: "When an arbitrarily small fixed distance P is defined, together with an arbitrarily large finite piece of plane and four points on it, none three of which lie in a straight line, it is possible to construct, only through consecutive straight-line connection of the four points and the respective resulting new intersection points, a net of lines and their intersections which covers that arbitrarily chosen finite piece of the plane so densely that nowhere in it a circle with radius ρ can be drawn inside of which there would not be at least one intersection of the net". This sentence is worthy of attention per se and is also used in Möbius's important conclusions in the Theory of Collinearity; therefore it will not be without interest to present a simple and elementary synthetic[2] proof:

The reasoning of the proof is as follows:

"Starting from three given points on a line, you can, using just ruler constructions on each side of the line, reach a fourth point of the line which is, from one of three given, farther than an arbitrary far given point" ...**I)**

[1] Al enfrentarse al texto, incluso algunos hablantes del alemán encuentran desafiante la interpretación del término *fortgesetzte*, ¿"continuo"? ¿"seguido"? Lo traducimos aquí como "consecutivamente" tomando por referencia el uso que de la palabra se hace en el concepto de fracciones continuas, "fortgesetzter Bruch", en alemán; dónde el sentido que predomina es el de "continuado", "seguido" sobre cualquier otra acepción geométrica o analítica que pudiera sospecharse. Esta palabra seguirá apareciendo a través del texto siempre en el mismo sentido.

[2] Sin duda, el autor aquí desea contrastar su enfoque sintético y el procedimiento constructivo –y en cierto sentido clásico– que ofrece con los nuevos métodos analíticos expuestos en el popular libro de Möbius.

welcher von einem der drei gegebenen weiter als ein beliebig weit gegebener Punkt entfernt ist.“ ...I)

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich beweisen: „Wenn irgendwo auf einer Geraden drei Punkte und eine beliebige Strecke MN gegeben sind, so lässt sich, von den drei Punkten ausgehend, bloss durch lineale Construction ein vierter Punkt der Geraden finden, welcher innerhalb MN liegt.“ ...II)

Hierauf wird bewiesen werden: „Wenn in einer Ebene vier Punkte gegeben sind, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so lässt sich durch fortgesetzte Verbindung der vier Punkte durch Gerade in jedem der gegebenen Punkte als Scheitel ein beliebig dichtes Strahlenbüschel construiren, d. h. ein solches, in welchem die Winkel, welche je zwei aufeinander folgende Strahlen bilden, alle kleiner sind, als ein beliebig klein vorgegebener Winkel.“ ...III)

Dieser Satz führt dann unmittelbar auf den Möbius'schen.

Beweis des Satzes I:

Es seien A, B, C die gegebenen Punkte, und zwar C derjenige, welcher durch die beiden anderen vom unendlich fernen Punkte der Geraden getrennt ist; O sei der Halbirungspunkt der Strecke AB, die Richtung OC die positive. Dann kann bekanntlich der von C durch A und B getrennte vierte harmonische Punkt D_1 rein lineal construirt werden; und zwar sei

$$\frac{AC}{CB} = \alpha,$$

dann ist

$$\frac{AB}{BD_1} = \alpha - 1;$$

wenn in gleicher Weise D_2 zu den Punkten A, B, D_1 der vierte von B getrennte harmonische Punkt ist, ferner D_3 (von D_1 getrennt) zu A, D_1, D_2, allgemein D_n (von D_{n-2} getrennt) zu A, D_{n-2}, D_{n-1}; so ist

$$\begin{aligned} \frac{AD_1}{D_1D_2} &= \alpha - 2, \\ &\vdots \\ \frac{AD_{n-1}}{D_{n-1}D_n} &= \alpha - n. \end{aligned}$$

With the help of this theorem it can be proved that: "If somewhere on a line three points and an arbitrary segment MN are given, it is possible, starting from the three points and only by ruler construction, to find a fourth point on the line which is within the MN segment" ...**II)**

This will be proved: "If on a plane four points are given, no three of which lie in a straight line, an arbitrary dense pencil of rays can be constructed by consecutive connection of the four points through straight lines using any of the given points as a vertex, i.e. one in which the angle formed by two adjacent rays, is less than an arbitrarily small predetermined angle, for every pair of rays" ...**III**)

This theorem leads directly to Möbius's.

Proof of Theorem **I**:

Let A, B, C be the given points and, say, C the one which is separated from the infinitely distant points on the line by the other two[3], let O be the midpoint of the segment AB and let the direction OC be the positive one. Then, as it is known, the fourth point D_1, the harmonic conjugate[4] of C with respect to A and B, can be constructed solely with ruler; and so if

$$\frac{AC}{CB} = \alpha$$

then

$$\frac{AB}{BD_1} = \alpha - 1$$

if in the same way D_2 is the fourth point harmonic conjugate of B with respect to the points A, B, D_1; furthermore D_3 (conjugate of D_1) with respect to A, D_1, D_2 , and in general D_n (conjugate of D_{n-2}) with respect to A, D_{n-2}, D_{n-1}; then it holds:

$$\frac{AD_1}{D_1D_2} = \alpha - 2$$

$$\dots$$

$$\frac{AD_{n-1}}{D_{n-1}D_n} = \alpha - n$$

[3] En esta forma de explicar la ubicación relativa de los tres puntos podemos apreciar con claridad las dificultades que existían en la expresión-y por tanto en la comprensión- de estás nociones; a esta época pertenece el trabajo de Moritz Pasch y no sería hasta 1903 que David Hilbert publicaría sus axiomas de orden en su famoso libro [Hilbert, §3].

[4] La palabra que traducimos como "conjugado", *getrennte*; "separado" o "desunido", no se encuentra con esta acepción en los diccionarios ordinarios ni en las fuentes accesibles, fue necesario conocer la terminología acostumbrada para el tema para poder aclarar la aparición de dicha palabra e impedir que obscureciera la comprensión del texto.

Man denke sich nun dieses Verfahren bis zu einem Punkte D_{n_1} fortgesetzt, so dass $0 < \alpha - n_1 \leqq 1$; dann werden alle Punkte $D_1, D_2, \ldots D_{n_1}$ von O aus in der positiven Richtung der Geraden liegen; wenn jedoch $\alpha - n_1$ zum ersten Mal $\leqq 1$ geworden ist, unterbreche man dieses Verfahren und beginne eine zweite Gruppe von Operationen, indem man den von A durch D_{n_1-1} und D_{n_1} getrennten vierten harmonischen Punkt D_{n_1+1} aufsucht, ferner $D_{n_1+2}, D_{n_1+3}, \ldots D_{n_2}$ als vierte von A getrennte harmonische Punkte beziehungsweise zu A, D_{n_1+1}, D_{n_1}; A, D_{n_1+2}, D_{n_1}; $\ldots$ A, D_{n_2-1}, D_{n_1}. Und zwar sei $\alpha - n_1 = \beta$, also $0 < \beta \leqq 1$: dann ist

$$\frac{A D_{n_1-1}}{D_{n_1-1} D_{n_1}} = \beta$$

$$\frac{A D_{n_1+1}}{D_{n_1+1} D_{n_1}} = 2\beta$$

$$\frac{A D_{n_1+2}}{D_{n_1+2} D_{n_1}} = 2^2 \beta$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{A D_{n_2}}{D_{n_2} D_{n_1}} = 2^{n_2 - n_1} \beta$$

(Hankel, Proj. Geom. 1. Abschn., §. 1.)

Man setze nun diese Gruppe von Operationen so lange fort, bis es zum ersten Mal eintritt, dass das Verhältniss $\dfrac{A D_{n_2}}{D_{n_2} D_{n_1}} > 1$ ist; dadurch sei n_2 definirt.

Die Punkte $D_{n_1+1}, D_{n_1+2}, \ldots D_{n_2}$ liegen alle innerhalb der Strecke $D_{n_1-1} D_{n_1}$. Mit dem Werthe $2^{n_2-n_1}\beta = \alpha_1$, mit A, D_{n_2}, D_{n_1} verfahre man nun ganz so, wie früher mit α, A, C, B:

Man construire so lange die in der Richtung OC über D_{n_1} hinausliegenden vierten harmonischen Punkte, bis $0 < \alpha_1 - n_3 = \beta_1 \leqq 1$, wodurch n_3 definirt ist, und die Punkte $D_{n_2+1}, D_{n_2+2}, \ldots$ $\ldots D_{n_3}$ erhalten werden; hierauf suche man durch eine vierte Gruppe von Operationen die Punkte $D_{n_3+1}, D_{n_3+2}, \ldots D_{n_4}$ geradeso aus A, D_{n_3-1}, D_{n_3}, wie früher in der zweiten Gruppe von Operationen $D_{n_1+1}, D_{n_1+2}, \ldots D_{n_2}$ aus A, D_{n_1-1}, D_{n_1}, u. s. f. Durch die 1., 3., 5., $\ldots$ $2\nu+1$. Gruppe solcher Operationen gelangt man immer zu Punkten, die alle in der Richtung OC über die bereits

Now imagine this process continues up to a point D_{n_1} when $0 < \alpha - n_1 \leq 1$, then all points D_1, D_2, D_{n_1} lie in the positive direction from O on the straight line; however, if $\alpha - n_1$ has become ≤ 1 for the first time then interrupt this process and start a second group of operations that seeks D_{n_1+1}, the fourth harmonic conjugate point of A with respect to D_{n_1-1} and D_{n_1}, and moreover D_{n_1+2}, D_{n_1+3} ,..., D_{n_2}, the fourth harmonic conjugate points of A with respect to A, D_{n_1+1}, D_{n_1}; A, D_{n_1+2}, D_{n_1} ; ... ; A, D_{n_2-1}, D_{n_2} respectively. And so if $\alpha - n_1 = \beta$, therefore $0 < \beta \leq 1$; then:

$$\frac{\mathrm{A}D_{n_1-1}}{D_{n_1-1}\,D_{n_1}} = \beta$$

$$\frac{\mathrm{A}D_{n_1+1}}{D_{n_1+1}\,D_{n_1}} = 2\beta$$

$$\frac{\mathrm{A}D_{n_1+2}}{D_{n_1+2}\,D_{n_1}} = 2^2\beta$$

[...]

$$\frac{\mathrm{A}D_{n_2}}{D_{n_2}\,D_{n_1}} = 2^{n_2-n_1}\beta$$

(Hankel, Proj. Geom. 1. Abschn., §. 1.)

Now proceed with this group of operations until it occurs for the first time that $\frac{AD_{n_2}}{D_{n_2}D_{n_1}} > 1$ and thus n_2 is defined.

The points D_{n_1+1}, D_{n_1+2}, ... D_{n_2} are all within the segment $D_{n_1-1}\,D_{n_1}$. With the value $2^{n_2-n_1}\beta = \alpha_1$ you proceed now with A, D_{n_2}, D_{n_1} just as formerly with alpha, A, C, B:

One constructs the fourth harmonic points as long as they lie in the direction OC beyond D_{n_1}, until $0 < \alpha_1 - n_3 = \beta_1 \leq 1$, which defines n_3, and the points $D_{n_2+1}, D_{n_2+2}, \dots, D_{n_3}$ are obtained. Then you find the points $D_{n_3+1}, D_{n_3+2}, \dots, D_{n_4}$ through a fourth set of operations starting from A, D_{n_3-1}, D_{n_3}, just like before $D_{n_1+1}, D_{n_1+2}, \dots, D_{n_2}$ were found in the second group of operations starting from A, D_{n_1-1}, D_{n_1}, and so forth. Through the 1st, 3rd, 5th, ... 2v+lth groups of such operations one always arrives at points that are all out in the direction of OC beyond vorhandenen hinausliegen, durch die 2., 4., 6., ... 2ν. Gruppe zu Punkten, welche innerhalb der letzten beiden in der vorangehenden Gruppe erhaltenen liegen. Es ist leicht zu sehen, dass im ungünstigsten Falle, wenn nämlich α, welches durch die drei vorgegebenen Punkte bestimmt ist, eine ganze Zahl ist, der Schlusspunkt jeder Gruppe mit ungerader Ordnungszahl doppelt so weit von A absteht, wie der Schlusspunkt der vorhergehenden Gruppe mit ungerader Ordnungszahl (in diesem Falle besteht jede Gruppe von Operationen mit Ausnahme der ersten aus einer einzigen Construction); sonst mehr als doppelt so weit. Wie weit also auch auf dem Halbstrahl OC ein Punkt P vorgegeben sein mag, man wird immer durch eine endliche Anzahl von Constructionen vierter harmonischer Punkte zu einem Punkte P' ebenfalls auf der positiven Seite der Geraden gelangen können, welcher von A weiter absteht, als P. Da man dasselbe Verfahren auf der anderen Seite der Geraden einschlagen kann, so folgt daraus der Satz I.

Beweis des Satzes II:

Zufolge I kann die Strecke $MN = d$ stets innerhalb zweier Punkte E, F liegend betrachtet werden, welche aus den drei gegebenen durch lineale Construction erhalten werden können.

Denkt man sich EF in 2^ν gleiche Theile getheilt, wobei ν durch

$$\frac{EF}{2^{\nu-1}} > d \geqq \frac{EF}{2^\nu}$$

bestimmt ist, so fällt mindestens ein Theilungspunkt auf die Strecke MN (einschliesslich der Grenzen). Liegt der Halbirungspunkt Q von EF innerhalb MN, so kann man zu E, F und einem zufolge I hinreichend weit wählbaren Punkte einen vierten harmonischen Punkt G beliebig nahe an Q und folglich innerhalb MN finden. Liegt aber Q ausserhalb MN, so sei M der von Q entferntere Endpunkt der Strecke MN. Dann kann man innerhalb MQ einen solchen Punkt G finden, der also entweder innerhalb MN oder innerhalb NQ liegt. Im letzteren Falle hat man dadurch MN in eine Strecke eingeschlossen, welche kleiner als $\frac{EF}{2}$ ist und deren Endpunkte ebenfalls aus den drei ursprünglich gegebenen Punkten rein lineal erhalten werden können.

the existing ones, and, by the 2nd, 4th, 6th, 2vth groups, at points which lie within the last two obtained in the preceding group. It is easy to see that in the worst case, namely if α, which is defined by the three predetermined points, is an integer, the final point of each group with an odd ordinal number will lie twice as far from A as the final point of the previous group with odd ordinal number (in this case each group of operations, except for the first one, consists of a single construction); more than twice as far otherwise[5]. No matter how far a point P may be given on the ray OC, one will always can reach the positive side of the line through a finite number of constructions of fourth harmonic points to a point P', which projects A further than P. Since you can follow the same procedure on the other side of the line, so Theorem **I** follows.

Proof of Theorem **II**:

According to **I** the segment $MN = d$ can always be considered within two points E, F, which can be obtained from the three given ones by linear constructions.

If one imagines EF divided into 2^v equal parts, where v is determined by:

$$\frac{EF}{2^{(v-1)}} > d \geq \frac{EF}{2^v}$$

so that at least one division point falls on the segment MN (including the endpoints). If Q, the midpoint of EF, lies within MN, you can find a fourth harmonic point G of E, F and some third point, according to **I** among sufficiently many selectable points, being arbitrarily close to Q and consequently within MN. If Q lies outside MN, let M be the endpoint of the segment MN more distant from Q. Then you can find such a point G within MQ, which is thus either within MN or within NQ. In the latter case we have enclosed MN within a segment[6] which is smaller than $\frac{EF}{2}$ and whose endpoints can also be obtained in a purely linear way from the three originally given points.

[5] Este pasaje es la clave de toda la demostración y su comprensión y traducción han constituido un desafió. Su valor radica en que, aunque hay otras formas de mostrar que la sucesión de puntos propuesta en efecto diverge, este análisis –que desglosamos en la Parte 2– esclarece todos los casos posibles.

[6] i.e. EG

Denkt man sich daher diese Strecke in nur $2^{\nu-1}$ gleiche Theile getheilt, so wird trotzdem jetzt umsomehr mindestens ein Theilungspunkt auf MN fallen. Dieses Verfahren setze man fort; es wird spätestens nach $\nu-1$-maliger Anwendung eintreten müssen, dass der Halbirungspunkt der kleinsten Strecke, welche MN einschliesst, und deren Endpunkte aus den drei gegebenen durch Construction vierter harmonischer Punkte erhaltbar sind, innerhalb oder auf die Grenzpunkte von MN fällt, ein Fall, der bereits erledigt ist. Es gilt daher der Satz II.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Theilungspunkte, welche allerdings mit dem Lineal allein nicht construirt werden könnten, zur Construction eines innerhalb MN liegenden Punktes nicht nothwendig sind, sondern nur dem Existenzbeweise dienen.

Beweis des Satzes III:

Auf jede Gerade g eines aus den vier gegebenen Punkten hervorgehenden Netzes sind die Sätze I und II anwendbar, auch wenn die weitere Beschränkung hinzutritt, dass zur Construction nur Verbindungsgerade benützt werden dürfen; denn wenn A, B, C irgend drei Schnittpunkte des Netzes auf der Geraden g sind, so geht durch jeden derselben ausser g mindestens noch eine zweite Gerade des Netzes, und wenn man den von C getrennten vierten harmonischen Punkt mittelst eines vollständigen Vierseits construiren soll, so kann man die durch C gehende Gerade als Diagonale, die durch A und B gehenden als zwei Seiten des Vierseits wählen, wodurch dieses bereits vollkommen bestimmt ist, und daher bei der Construction eines vierten harmonischen Punktes keine Gerade gezogen zu werden braucht, die nicht Verbindungsgerade schon vorhandener Schnittpunkte des Netzes wäre. Es folgt also aus II: „Wenn irgend eine Strecke d beliebig klein vorgegeben ist, ferner auf irgend einer Geraden g eines aus den vier gegebenen Punkten hervorgehenden Netzes eine Strecke ST beliebig gross, so kann durch Fortsetzung des Netzes unter den bekannten Bedingungen die Strecke ST so dicht mit Schnittpunkten des Netzes besetzt werden, dass nirgends in derselben sich die Strecke d hineinlegen lässt, ohne dass mindestens ein Schnittpunkt innerhalb d fiele.“ ...II')

If we imagine therefore this segment divided in only $2^{(\upsilon-1)}$ equal parts it is, nevertheless, now even more so that at least one division point falls on MN. This procedure is to be continued; it is to be found later that after the repeated application of it $\upsilon - 1$ times, the middle point of the smallest segment which encloses MN, and whose end points can be constructed from the three given ones by construction of fourth harmonic points, is either inside or is one of the endpoints of MN, a case which is already done. And this leads to Theorem **II**.

It hardly needs to be noted that the division points –which, however, could not been constructed with ruler only– are not necessary for the Construction of a point lying within MN, but only serve the existence proofs.

Proof of Theorem **III**:

On each line g of a net arising from four given points Theorems **I** and **II** are applicable, even if the further restriction is added that only connecting lines[7] may be used for the construction; because if A, B, C are any three intersections of the net on the line g, then through each of them passes a line of the net besides g and if one constructs the harmonic conjugate point of C through the use of a complete quadrilateral, then one can, using the line going through C as a diagonal, choose the lines going through A and B as sides of the quadrilateral, so this is already fully determined, and therefore in the Construction of a fourth harmonic point there would be no need to draw a straight line which is not a connecting line for already existing intersections of the net. It follows therefore from **II**: "Given any arbitrarily small distance d and a segment[8] ST of arbitrary length on any line g in a net spanned from four given points, then one can, through continuation of the net under the known conditions, populate the segment ST with net intersection points so densely that the distance d, can't be put nowhere in ST without at least one intersection point falling in d"...**II'**)

[7] i.e. Rectas de la red

[8] A lo largo del texto encontramos la palabra *Strecke* en sus dos diferentes acepciones, "distancia" y "segmento"; en este pasaje queda clara la necesidad de comprender a profundidad la idea del teorema así como la diferencia entre ambas acepciones del término para poder redactar la traducción atinadamente. Así mismo, el hecho de que el autor no haga distinción alguna nos recuerda una vez más que nos encontramos en una época donde los conceptos más fundamentales de las matemáticas están siendo profundamente cuestionados.

Es sei nun R ein beliebiger Schnittpunkt des Netzes, so wähle man eine durch R gehende Gerade a und zwei nicht durch R gehende Gerade b und c des Netzes so, dass im Dreieck ABC, welches sie bilden, R auf der endlichen Strecke BC liegt. Zufolge II' können die Seiten AB und AC des Dreieckes beliebig dicht mit Schnittpunkten des Netzes besetzt werden, durch deren Verbindung mit R man wegen der festen endlichen Entfernung des Punktes R von b und c in R ein ebenfalls beliebig dichtes Strahlenbüschel erhalten kann, womit III bewiesen ist.

Der Satz III in Verbindung mit II liefert den Möbius'schen Satz:

Denn ist ρ die beliebig klein vorgegebene Entfernung, innerhalb welcher vom fünften gegebenen Punkte P aus (Möbius, a. a. O. §. 205) mindestens ein Schnittpunkt des Netzes liegen soll, so kann man zunächst in einem Schnittpunkte R des Netzes ein Strahlenbüschel so dicht construiren, dass mindestens ein Strahl s desselben in den von den beiden Tangenten begrenzten Winkelraum fällt, welche von R an den in P mit ρ geschlagenen Kreis gezogen werden können. Auf s können nun vermöge II Schnittpunkte gefunden werden, welche in die vom Kreise auf s abgeschnittene Sehne, somit innerhalb des Kreises fallen, womit der Möbius'sche Satz über Netze in der Ebene bewiesen ist.

Es hat keine Schwierigkeit, diesen synthetischen Beweis zu erweitern auf den analogen Satz über „Netze im Raume" (Möbius, Baryc. Calcül, §. 214): „Sind A, B, C, D, E fünf gegebene Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und ist P ein gegebener sechster, so kann man durch fortgesetzte Verbindung der fünf ersteren mit Ebenen einen Punkt finden, der mit dem sechsten entweder zusammenfällt oder von ihm um einen Abstand entfernt liegt, der kleiner ist, als jeder gegebene." Das Wesentliche dieses Satzes lässt sich auch so formuliren: „Wenn eine beliebig kleine Strecke ρ vorgegeben ist, ferner fünf Punkte im Raume, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und ein beliebig grosses endliches Stück des Raumes abgegrenzt ist, so lässt sich von den fünf Punkten ausgehend durch fortgesetzte Verbindung je dreier Punkte durch Ebenen ein Netz von Ebenen

Now let R be any intersection point of the net, then choose a straight line a passing through R and two straight lines of the net b and c which are not passing through R so that, in the triangle ABC which they form, R is on the segment BC. According to II' the sides AB and AC of the triangle can be filled in an arbitrarily dense way with net intersections, and through their connection with R one can also obtain, because of the fixed finite distance from R to b and c, an arbitrarily dense pencil of rays that passes through R, proving **III** whereby.

Theorem **III** in connection with **II** provides Möbius's Theorem:

Because if ρ is the given arbitrarily small distance within which, given the fifth point P (Möbius, a. a. 0. §. 205), at least one point of the net should lie, then one can firstly construct, on a net intersection point R, a pencil of rays, so densely that at least one ray s falls in the angle space bounded by the two tangents which can be drawn from R to the circle determined in P by ρ. On s, just using **II**, we can now find the intersection points that, due to being in the chord cut by the circle on s, lie inside the circle, thus proving Möbius's theorem about nets in the plane.

There is no difficulty in extending this synthetic proof to the analogous theorem about "Nets in Space" (Möbius, Barycentrischen Calcülus, §. 214): "Let A, B, C, D, E five given points, none four of which lie in a plane, and P a given sixth point, then you can through consecutive connection of the five former points with planes find a point which either coincides with the sixth, P or differs from it by a distance smaller than any given one." The essence of this theorem can be formulated as follows: "When an arbitrarily small distance ρ is defined, together with five points in space, none four of which are in a plane, and an arbitrarily large finite piece of the space is delimited, then from the five points and through consecutive connection of every three points with planes a net of planes und deren Schnittgeraden und Schnittpunkten so dicht construiren, dass nirgends im beliebig gewählten endlichen Stücke des Raumes eine Kugel vom Radius ρ hineingelegt werden kann, innerhalb welcher nicht mindestens ein Schnittpunkt des Netzes läge.“ Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich auf Grund des entsprechenden Satzes über ebene Netze z. B. folgendermassen überzeugen: Irgend eine Ebene E, welche durch drei der fünf gegebenen Punkte gelegt wird, wird von der Verbindungsgeraden der beiden übrigen Punkte (welche auch Schnittgerade von im Netze zulässigen Ebenen ist) in einem Punkte geschnitten, welcher in Verbindung mit den drei ersteren Punkten ausreicht, in einem endlichen Stücke der Ebene E ein beliebig dichtes Netz N zu construiren. Man nehme nun einen ausserhalb E liegenden Punkt S hinzu und denke sich jedesmal, wenn in der Ebene E zwischen zwei Punkten M und M' eine Verbindungsgerade gezogen wurde, diese Construction ersetzt durch Legung einer Ebene durch M, M' und S. Man erhält dadurch im Strahlenbündel S ein Netz, welches die Ebene E im Netze N schneidet und welches von fünf gegebenen Punkten aus bloss durch Verbindung je dreier Punkte mit Ebenen hervorgegangen ist. Jedem Strahlenbüschel S' in der Ebene E entspricht ein Ebenenbüschel mit der Achse SS'. Da aber diese Achse gegen die Ebene E einen bestimmten endlichen Neigungswinkel hat, so kann das Ebenenbüschel zugleich mit dem Strahlenbüschel ebenfalls beliebig dicht gemacht werden. Es gilt also der Satz: „In einem aus fünf Punkten hervorgehenden räumlichen Netze kann in jeder Schnittgeraden des Netzes als Achse durch entsprechende Fortsetzung desselben unter den bekannten Bedingungen ein beliebig dichtes Ebenenbüschel construirt werden.“ Es kann also so dicht construirt werden, dass, wo auch im abgegrenzten Raume sich eine Kugel mit dem Radius ρ befinden möge, die Kugel von mindestens einer Ebene α des Büschels in einem Kreise k geschnitten wird. In der Ebene α kann nun vermöge des Satzes über ebene Netze ein Netz construirt werden, von welchem Schnittpunkte innerhalb k, daher auch innerhalb der Kugel liegen. Da dieses Netz aber auch als Schnitt eines den Bedingungen genügenden räumlichen Netzes erhalten werden kann, so ist hiemit der Satz über Netze im Raume bewiesen.

and their lines and points of intersection can be constructed, so densely that nowhere, in the arbitrarily chosen piece of space, a sphere of radius ρ could be placed, within which not at least one intersection point of the net lays". One can be convinced of the correctness of this sentence, because of the corresponding sentence about plane nets, for example in the following way: Any plane E, which is laid over three of the five given points, will be cut in one point by the connection line of the pair of points that are left (a line that is also an intersection line of the planes that belong to the net). This point together with the first three suffices to construct an arbitrarily dense net N. One adds now a point S outside of E and thinks that every time a line is drawn in the plane E between two points M and M', this construction is replaced by the drawing of a plane through M, M' and S. In this way one obtains a net in the bundle[9] S, which cuts the plane E in the net N and that is generated from five given points, only by connecting three points each time. Every pencil of rays S' in the plane E corresponds to a sheaf of planes with axis SS'. Since, however, this axis has a definite finite angle of inclination with respect to the plane E, the sheaf can also be made arbitrarily dense at the same time as the pencil of rays is. This Theorem is thus valid: "In a net in space generated from five points, an arbitrarily dense plane sheaf can be constructed, through corresponding continuation under the known conditions, with each intersection line of the net as an axis". It can, therefore, be constructed so densely that, wherever a sphere with radius ρ may be in the piece of space, at least one plane α of the sheaf cuts the sphere in a circle κ. In the plane α, according to the theorem about nets on the plane, a net can now be constructed, which intersection points lie within a radius κ, and therefore also inside the sphere. But since this net can also be obtained as a section of a net in space that meets the given conditions, the theorem on net in space is thus proved.

Proceedings of the Mathematics and Natural Sciences Class. Volume XCVI1I. Part. II. a. 33

[9] i.e. Una red de planos, y sus rectas y puntos de intersección contenida en el haz de planos y rectas con vértice en S. Utilizamos la palabra "bundle" en oposición a "sheaf" para traducir la oposición en alemán entre *Bündel*, "haz" y *Büschel*, "familia de un solo parámetro".[Hyman, *Büschel*]

Bei Construction der Netze sind unendlich ferne Punkte als gleichwerthig mit endlichen zu betrachten, sonst könnte z. B., wenn die vier Ausgangspunkte eines ebenen Netzes die Eckpunkte eines Parallelogrammes bilden, kein Netz construirt werden, ein Fall, der aber auch von Möbius nicht ausgenommen wird.

In the construction of nets, the infinitely distant points are to be considered equal to the finitely distant ones[10], so a net could not be constructed otherwise, for example when the four starting points are part of a parallelogram, a case that is nevertheless not considered by Möbius.

[10] En este pasaje podemos notar que el autor está interesado en trabajar en un plano sin puntos ni rectas distinguidos. Recordemos que aún faltaban algunas décadas para que el plano proyectivo fuera definido de forma axiomática.

Parte 2. Redes Armónicas en el Plano y el Espacio.

El objetivo de Zindler es demostrar que partiendo de cuatro puntos en posición general en el plano[1] es posible, sólo utilizando regla, construir un conjunto de puntos denso en el plano; en el sentido de que, dado un punto cualquiera en el plano, es posible encontrar un punto perteneciente al conjunto arbitrariamente cerca del punto dado. Para conseguirlo, el autor nos presenta el concepto de red de incidencia:

Definición 0:

Dados cuatro puntos en posición general en el plano se define la **Red de Incidencia generada por** esos **cuatro puntos** como el conjunto de todos los puntos obtenibles repitiendo la siguiente construcción sucesivamente:

Únanse con rectas todas las parejas posibles de puntos existentes –que no estén ya unidos– y considérense los puntos de intersección de estas rectas como nuevos puntos del conjunto[2].

Se demostrarán dos lemas previos que permiten concluir el resultado y éste será generalizado al espacio tridimensional.

---

[1] Entendemos que cuatro puntos están en posición general en el plano cuando no hay tres de ellos alineados.
[2] Ver [Hall, 3 y 4], desde su punto de vista, estamos trabajando en una *extensión libre* de un *plano parcial* muy en particular.

Lema 1:

Sean L una recta en el plano y A, B, C tres puntos dados en L. Para cualquier otro punto Q en L es posible construir, sólo con regla, un punto P en L, a partir de A, B y C, tal que la distancia de P a C sea mayor que la distancia de Q a C.

Observación: La elección de C de entre los tres puntos iniciales es perfectamente arbitraría e indiferente para el planteamiento del problema.

Demostración:

Sean A, B y C los tres puntos en la recta (Fig. 1), O el punto medio de $\overline{AB}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{AC}{CB} > 0$ y que Q se encuentra en el rayo CB

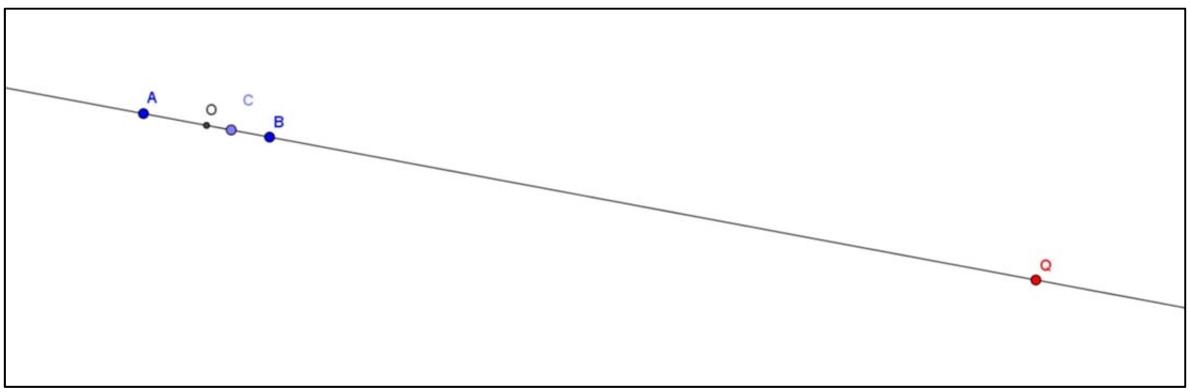

Figura 1.

Sea ahora D_1 tal que

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD_1}{D_1B}$$

es decir, D_1 es el conjugado armónico de C con respecto a A y B, construcción que sólo requiere regla utilizando un cuadrángulo completo [Shively, 4.4].

Sea ahora $\frac{AC}{CB} = \alpha$ y restrinjamos la discusión al caso $\boldsymbol{\alpha > 1}$**,** entonces tenemos:

$$-\frac{AD_1}{D_1B} = \alpha$$

$$-\frac{AB + BD_1}{D_1B} = \alpha$$

$$\frac{AB + BD_1}{BD_1} = \alpha$$

$$\boldsymbol{\frac{AB}{BD_1} = \alpha - 1}$$

Procedemos de la misma forma construyendo D_2 tal que

$$\frac{AB}{BD_1} = -\frac{AD_2}{D_2D_1}$$

continuamos con D_3 tal que

$$\frac{AD_1}{D_1D_2} = -\frac{AD_3}{D_3D_2}$$

y entonces definimos D_n como

$$\frac{AD_{n-2}}{D_{n-2}D_{n-1}} = -\frac{AD_n}{D_nD_{n-1}}$$

y entonces, de forma análoga a como se hizo con D_1, tenemos:

$$\frac{AD_1}{D_1D_2} = \alpha - 2$$

$$\frac{AD_2}{D_2D_3} = \alpha - 3$$

...

$$\frac{\boldsymbol{AD_{n-1}}}{\boldsymbol{D_{n-1}D_n}} = \boldsymbol{\alpha - n} \qquad (\mathbf{1})$$

para toda $n > 1$.

Es posible continuar nuestro proceso recursivamente evaluando $\alpha - n$ en cada paso:

Siempre que

$$\alpha - n > 1 \qquad \textbf{(2)}$$

los puntos D_n se encuentran en la dirección OC, cada vez más lejos, sobre la recta L. Si el punto Q está suficientemente cerca o el número α es lo suficientemente cercano a 1, es posible que baste con esta estrategia para rebasar al punto Q. De lo contrario, si en algún momento, digamos después de n_1 iteraciones, la condición **(2)** deja de cumplirse, i.e.

$$0 < \alpha - n_1 \leq 1$$

esto implicaría evidentemente que de continuar la construcción previamente descrita, el siguiente punto obtenido se encontraría más allá de A en la dirección OA sobre la recta. Por lo tanto, al llegar a un tal punto D_{n_1}, construimos D_{n_1+1} de forma que:

$$\frac{D_{n_1-1}A}{AD_{n_1}} = -\frac{D_{n_1-1}D_{n_1+1}}{D_{n_1+1}D_{n_1}}$$

es decir, D_{n_1+1} será el conjugado armónico de A con respecto a D_{n_1-1} y D_{n_1}, y así sucesivamente:

$$\frac{D_{n_1+1}A}{AD_{n_1}} = -\frac{D_{n_1+1}D_{n_1+2}}{D_{n_1+2}D_{n_1}}$$

$$\frac{D_{n_1+2}A}{AD_{n_1}} = -\frac{D_{n_1+2}D_{n_1+3}}{D_{n_1+3}D_{n_1}}$$

...

$$\frac{D_{n_1+k}A}{AD_{n_1}} = -\frac{D_{n_1+k}D_{n_1+k+1}}{D_{n_1+k+1}D_{n_1}}$$

Tenemos ahora una segunda operación a iterar, en esta segunda serie de iteraciones estamos encontrando puntos que se acercan cada vez más a D_{n_1}, todos ellos dentro del segmento $D_{n_1-1}\,D_{n_1}$.

Usando la razón cruzada [Shively, 9.1], tenemos que:

$$\frac{D_{n_1-1}A}{AD_{n_1}} = -\frac{D_{n_1-1}D_{n_1+1}}{D_{n_1+1}D_{n_1}} \Rightarrow \left(D_{n_1-1}\,D_{n_1}\;\;A\,D_{n_1+1}\right) = -1$$

entonces, de acuerdo con [Shively, 9.3] y [Henkel, Primera Parte, §. 1]:

$$\left(A\,D_{n_1}\,D_{n_1-1}\;\;D_{n_1+1}\right) = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, si $\beta \coloneqq \alpha - n_1$:

$$\frac{\beta}{\frac{AD_{n_1+1}}{D_{n_1+1}D_{n_1}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\mathrm{A}D_{n_1+1}}{D_{n_1+1}\,D_{n_1}} = 2\beta}$$

y de forma análoga:

$$\left(D_{n_1+1}\,D_{n_1}\;\;A\,D_{n_1+2}\right) = -1 \Rightarrow \left(A\,D_{n_1}\,D_{n_1+1}\;\;D_{n_1+2}\right) = \frac{1}{2}$$

por lo cual:

$$\frac{2\beta}{\left(\frac{AD_{n_1+2}}{D_{n_1+2}D_{n_1}}\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\mathrm{A}D_{n_1+2}}{D_{n_1+2}\,D_{n_1}} = 4\beta = 2^2\beta}$$

entonces:

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{A}D_{n}}{D_{n}\,D_{n_1}} = 2^{n-n_1}\beta;\ \forall\, n > n_1}$$

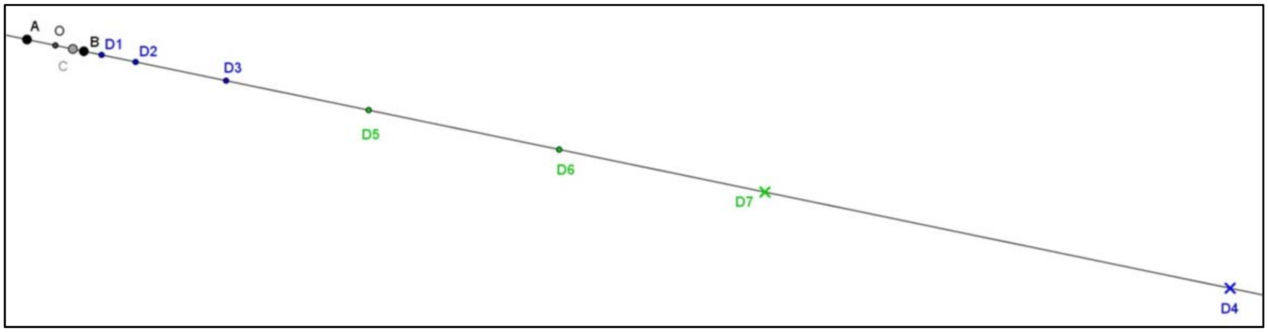

Fig. 2. Se muestran las primeras dos series de iteraciones para la construcción, con $D_{n_1} = D_4$ y $D_{n_2} = D_7$. Los puntos azules se obtienen mediante iteraciones de la primera operación descrita mientras que los puntos verdes se obtienen iterando la segunda.

Nuevamente, en cada iteración calculamos el valor

$$2^{n-n_1}\beta \qquad \forall\, n > n_1$$

y sea D_{n_2} el primer punto tal que

$$2^{n_2-n_1}\beta > 1$$

Este punto existe ya que la sucesión 2^n es una sucesión creciente y no acotada. Entonces interrumpimos este procedimiento.

Definimos

$$\alpha_1 := 2^{n_2-n_1}\beta$$

Y con este valor procedemos de la misma forma en que lo hicimos con el valor α y los puntos A, C y B, esta vez con los puntos A, D_{n_2} y D_{n_1}, i. e. construimos el punto D_{n_2+1} como el conjugado armónico de D_{n_2} respecto a A y D_{n_1}, de forma análoga continuamos hasta llegar al punto D_{n_3}, aquel para el cual, por primera vez

$$\alpha_1 - n_3 < 1$$

Para la cuarta serie de iteraciones procedemos imitando la segunda; construimos el punto D_{n_3+1}, conjugado armónico de A respecto a D_{n_3} y D_{n_3-1} y determinamos D_{n_4} tal como lo hicimos con D_{n_2}.

Tenemos entonces dos operaciones distintas; la que se itera en las series de ordinal impar y la que se itera en las series de ordinal par. Cada vez que procedemos con una iteración del primer tipo generamos puntos sobre la recta en la dirección *OC* que se encuentran a la derecha de los puntos obtenidos hasta ese momento. Por otro lado, cada vez que realizamos una iteración del segundo tipo generamos puntos contenidos en el segmento determinado por los últimos dos puntos obtenidos en la iteración precedente.

Estudiemos ahora el caso en que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}$:

Al comenzar con la primera serie, en la iteración $\alpha - 1$, tenemos $\frac{\mathrm{A}D_{\alpha-2}}{D_{\alpha-2}\,D_{\alpha-1}}=1$ y debemos cambiar a una iteración de la segunda operación descrita, es decir, D_α estará definido por $\frac{D_{\alpha-2}A}{AD_{\alpha-1}} = -\frac{D_{\alpha-2}D_\alpha}{D_\alpha D_{\alpha-1}}$, de donde $\frac{AD_\alpha}{D_\alpha D_{\alpha-1}} = 2 > 1$ y tenemos que cambiar nuevamente a nuestra primera operación. Tenemos entonces $\frac{\mathrm{A}D_\alpha}{D_\alpha\,D_{\alpha-1}} = -\frac{\mathrm{A}D_{\alpha+1}}{D_{\alpha+1}\,D_{\alpha-1}}$ y por lo tanto $-\frac{\mathrm{A}D_{\alpha+1}}{D_{\alpha+1}\,D_{\alpha-1}} = 2$, i.e. $\frac{\mathrm{A}D_{\alpha-1}}{D_{\alpha-1}D_{\alpha+1}} = 1$ y, de ahí, que: $2\mathrm{A}D_{\alpha-1} = \mathrm{A}D_{\alpha+1}$ y como D_α está a la izquierda de $D_{\alpha-1}$, debemos alternar de nuevo. En otras palabras, *el punto final de una serie de iteraciones de la primera operación se encuentra dos veces más lejos de A que el punto final de la serie previa de iteraciones de la primera operación.*

Ahora bien, si $\boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ entonces $\alpha = z + \delta$ con $z \in \mathbb{Z}$ y $0 < \delta < 1$ y al comenzar el proceso, en la iteración z tenemos $\frac{AD_{z-1}}{D_{z-1}D_z} < 1$ y debemos comenzar a iterar la segunda operación descrita para obtener un punto a la derecha del punto medio de AD_z; sin embargo, por el análisis anterior, como D_{z-1} se encuentra la izquierda de dicho punto medio, el punto final de esta serie, digamos D_{z+k} , no puede encontrarse a la izquierda del punto R tal que $\frac{AR}{RD_z} = 2$, y por lo tanto su conjugado con respecto a A y D_z está a la derecha del punto S tal que $\frac{AD_z}{D_z S} = 1$ y hay que cambiar nuevamente a la segunda operación. En otras palabras, *el punto final de una serie de iteraciones de la primera operación se encuentra a más del doble de distancia de A que el punto final de la serie previa de iteraciones de la primera operación.*

Este análisis es válido para cada α_i, es decir, para cada serie de iteraciones de la primera operación por lo que podemos aseverar que hemos ofrecido un procedimiento que, debido a la Propiedad Arquimediana de los Números Reales, permite, después de un número finito de pasos, construir un punto más alejado de C que Q.

Q.E.D.

Observaciones:

1. Si $\alpha \leq 1$, será necesario comenzar iterando la segunda operación descrita; conjugando A con respecto a C y B y continuar así hasta obtener un punto a la derecha de O y poder atenerse al proceso descrito.
2. Si Q se encuentra la izquierda de A, el proceso es perfectamente simétrico.

Lema 2

Sea L una recta en el plano, $A_1, A_2, A_3 \in L$ y el segmento $MN \subseteq L$. Es posible construir solamente con regla un punto $P \in L$ tal que:

$$P \in MN$$

Demostración:

Supongamos que se ha utilizado el procedimiento descrito en la demostración del Lema 1 para construir F a la derecha de N y E a la izquierda de M, entonces:

$$MN \subseteq EF$$

Imaginemos este nuevo segmento dividido en 2^{v} partes iguales, con v tal que

$$\frac{|EF|}{2^{(v-1)}} > |MN| \geq \frac{|EF|}{2^{v}} \qquad \textbf{(2)}$$

Garantizando así que por lo menos uno de los puntos de división viva en el segmento MN.

Por otro lado observemos que el procedimiento descrito en la demostración del **Lema 1** no es otra cosa que una forma de obtener –sólo con regla– puntos tan lejanos como se quiera sobre la recta en cualquier dirección, entonces, usándolo junto con la herramienta del cuadrángulo completo, *podemos construir puntos tan cercanos como queramos al punto medio de cualquier segmento*.

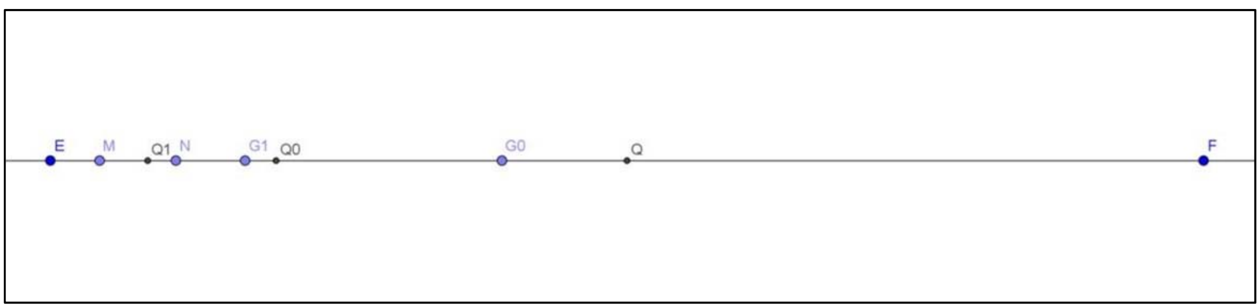

Figura 3.

Sea Q el punto medio de EF; si, dada la partición regular adecuada (**2**), Q se encuentra en el segmento MN –incluyendo sus extremos–, entonces es posible encontrar, sólo con regla y utilizando los puntos A_1, A_2, A_3, un punto tan cercano como se quiera a Q y por lo tanto dentro de MN. Si, por el contrario, Q no está en el segmento MN, sin pérdida de generalidad sea M el punto del segmento MN más lejano de Q (Fig. 3); es posible encontrar un punto $G_0 \in MQ$. Así que, si $G_0 \in MN$ hemos terminado, si no, $G_0 \in NQ$ y veamos en seguida lo qué sucede.

Si $G_0 \in NQ$, entonces tenemos $MN \subset EG$ con $|EG| < \frac{|EF|}{2}$ y podemos asegurar que, al considerar la partición de EG en $2^{(v-1)}$ partes iguales, por lo menos un punto de la misma está en el segmento MN. Es claro entonces que, en el peor de los casos, después de repetir el análisis anterior $v - 1$ veces, podemos asegurar que, si G_{v-1} es el punto obtenido en ese paso y Q_{v-1} es el punto medio de EG_{v-1}:

$$Q_{v-1} \in MN$$

Y por lo tanto es posible construir un punto tan cerca como se quiera de Q_{v-1} y, en consecuencia, dentro de MN.

Q.E.D.

Quizá no sobre notar que los puntos de las particiones regulares propuestas –que no se pueden construir sólo con regla– sólo se consideran aquí para demostrar la existencia de los puntos construibles; no son necesarios para la construcción del punto que interesa al lema.

Considérese ahora una red de incidencia arbitraria generada por cuatro puntos en posición general en el plano y observemos que es posible realizar la construcción del cuadrángulo completo sólo usando elementos de la red.

Sean A, B y C tres puntos en una recta g de la red. Como la configuración consta de por lo menos cuatro puntos (en posición general), en cada recta de la red hay por lo menos tres puntos. Sea a otra recta de la red que pasa por A y b una que pasa por B; existen, porque A

y B son puntos de la red, y se intersecan en otro punto de la red, digamos, X. Sea ahora c la recta que pasa por X y C, y consideremos un tercer punto de la red sobre c, digamos, Y. Las rectas AY y BY son parte de la red y por lo tanto lo son también sus intersecciones con b y a. Finalmente la recta generada por estos dos últimos puntos corta a la recta g en un punto de la red, a saber, el conjugado armónico de C con respecto a A y B. Hemos visto entonces que dados cuatro puntos adecuados tenemos toda una red de incidencia dentro de la cual es posible encontrar el cuarto armónico de cualquier tercia de puntos colineales dada en la red, que ahora con todo derecho podemos llamar *red armónica*.

Es claro entonces que en cada una de las rectas de la red los Lemas 1 y 2 son válidos, bastando las rectas y puntos de la red para lograr las construcciones. Dicho de otra forma:

Lema 2.a

Sea L una recta cualquiera de una red armónica generada por cuatro puntos. Dada una distancia d arbitraria y un segmento $ST \subset L$ con $d < |ST|$, es posible construir dentro de ST tantos puntos de la red como sea necesario para lograr que, para todo punto $P \in ST$ la vecindad de radio d alrededor de P contenga al menos uno de los puntos construidos.

En otras palabras, s*e puede construir un conjunto suficientemente denso de puntos de la red dentro del segmento ST*. Esta formulación será útil para nuestro fin.

Considérese ahora un punto R cualquiera en una red armónica generada por cuatro puntos en posición general. Elíjase una recta a que pase por R y otras dos rectas b y c que no pasen por R de forma que, en el triángulo ABC formado $R \in AB$. Podemos, de acuerdo con **Lema 2.a** poblar tan densamente como sea necesario los lados AB y BC con puntos de la red y, considerando a R como vértice, *tenemos un haz de rayos denso en el plano contenido en la red, de hecho un rayo por cada puntos de la red que construyamos en los lados* AB y BC.

Teorema 3 [Zindler, I].

Dados cuatro puntos en posición general en una región Σ del plano y una distancia arbitrariamente pequeña ρ, es posible construir, solamente uniendo consecutivamente con rectas cada par de entre los cuatro puntos originales y las nuevas intersecciones surgidas, una red de rectas y sus intersecciones que cubre a Σ *densamente*, es decir, para todo $P \in \Sigma$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe por lo menos un punto de la red, Q, tal que $Q \in B_\rho(P)$.

Demostración.

Sea $P \in \Sigma$ cualquiera y sea Γ el círculo de radio ε con centro en P, trácense las tangentes a Γ desde un punto cualquiera de la red armónica generada por los cuatro puntos dados, digamos C (Fig. 4). Con vértice en C, considérese el haz de rayos denso en el plano contenido en la red que se describió antes y elíjase un rayo s contenido en la región delimitada por las tangentes. Sea $\{X, Y\} = \Gamma \cap s$, si aplicamos ahora el **Lema 2** a la cuerda XY podemos encontrar puntos dentro de $B_\rho(P)$.

Q.E.D.

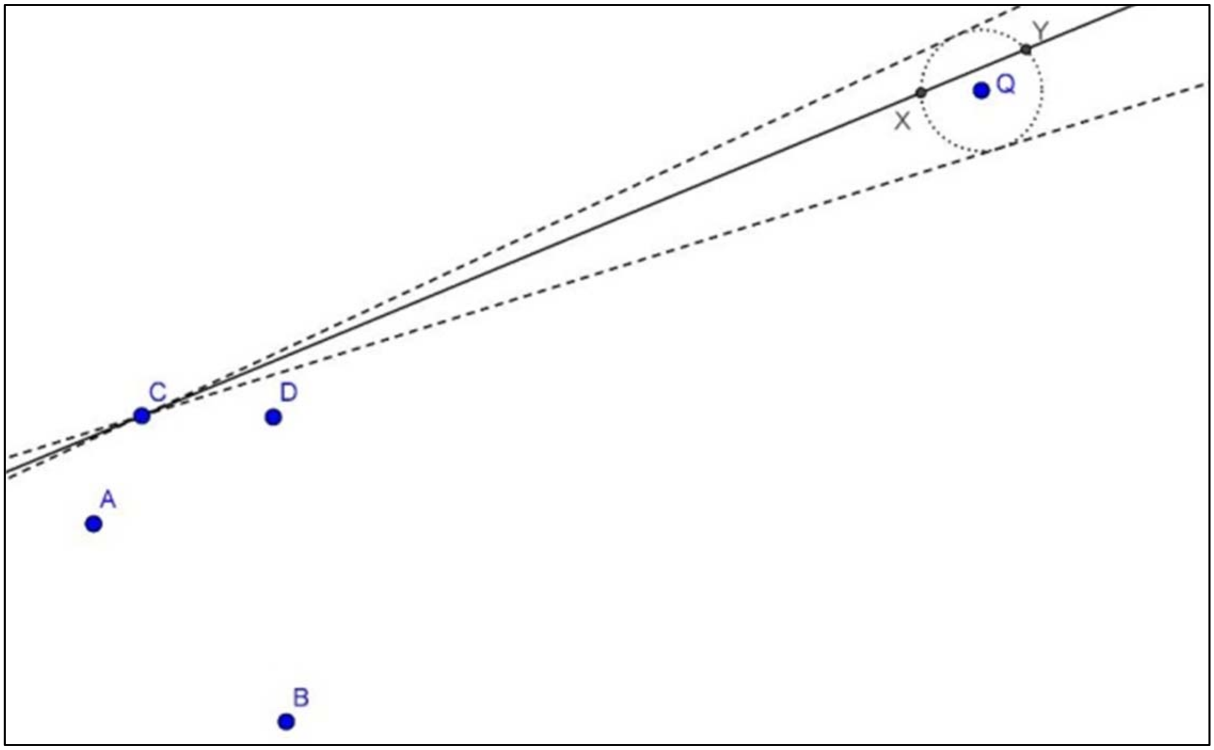

Figura 4. Es posible encontrar una recta en un haz con vértice en algún punto de la red.

Y para el espacio tridimensional:

Teorema 4 [Zindler, I].

Dados cinco puntos en posición general en una región Σ del espacio[3] y una distancia arbitrariamente pequeña ρ, es posible construir, solamente uniendo consecutivamente con planos cada tercia de entre los cinco puntos originales y las nuevas intersecciones surgidas, una red de planos y sus rectas y puntos de intersección que cubre a Σ *densamente*, es decir, para todo $P \in \Sigma$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe por lo menos un punto de la red, Q, tal que $Q \in B_\rho(P)$.

[3] Entendemos que cinco puntos están en posición general en el espacio cuando ninguna cuarteta es coplanar.

Demostración:

Sea Π el plano determinado por alguna tercia de los puntos dados y L la recta que une los dos restantes. Sea $M = \Pi \cap \mathrm{L}$, entonces, como L es parte de la red en el espacio, M lo es también y tenemos 4 puntos en posición general en Π para formar una red armónica plana (Fig. 5). Esto es equivalente para cualquier quinteta de puntos en la red tridimensional, esto implica que cualquier red plana generada por cuatro puntos de la configuración espacial está contenida en la red tridimensional.

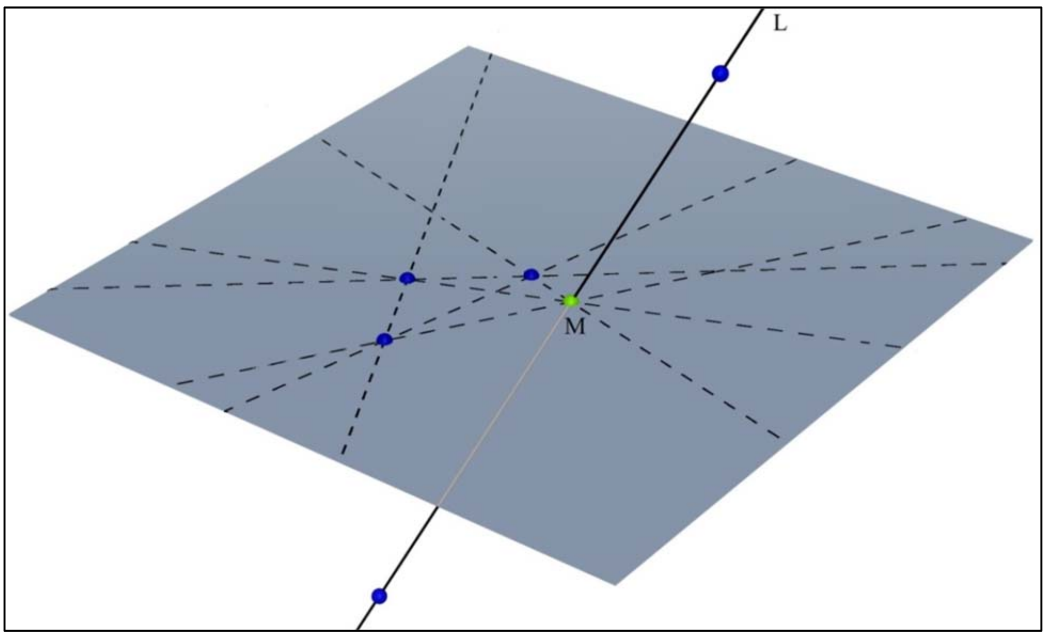

Figura 5. La recta L y el punto M son parte de la red tridimensional

Si ahora consideramos un punto S de la red tridimensional $S \notin \Pi$, para cada punto $R \in \Pi$, el haz de rectas con vértice en R –contenido en la red plana– genera un haz de planos con eje RS (Fig. 6) que es denso en el espacio, debido a que el haz de rectas R lo es en el plano. En otras palabras, cada recta de la configuración es eje de un haz de planos denso en el espacio.

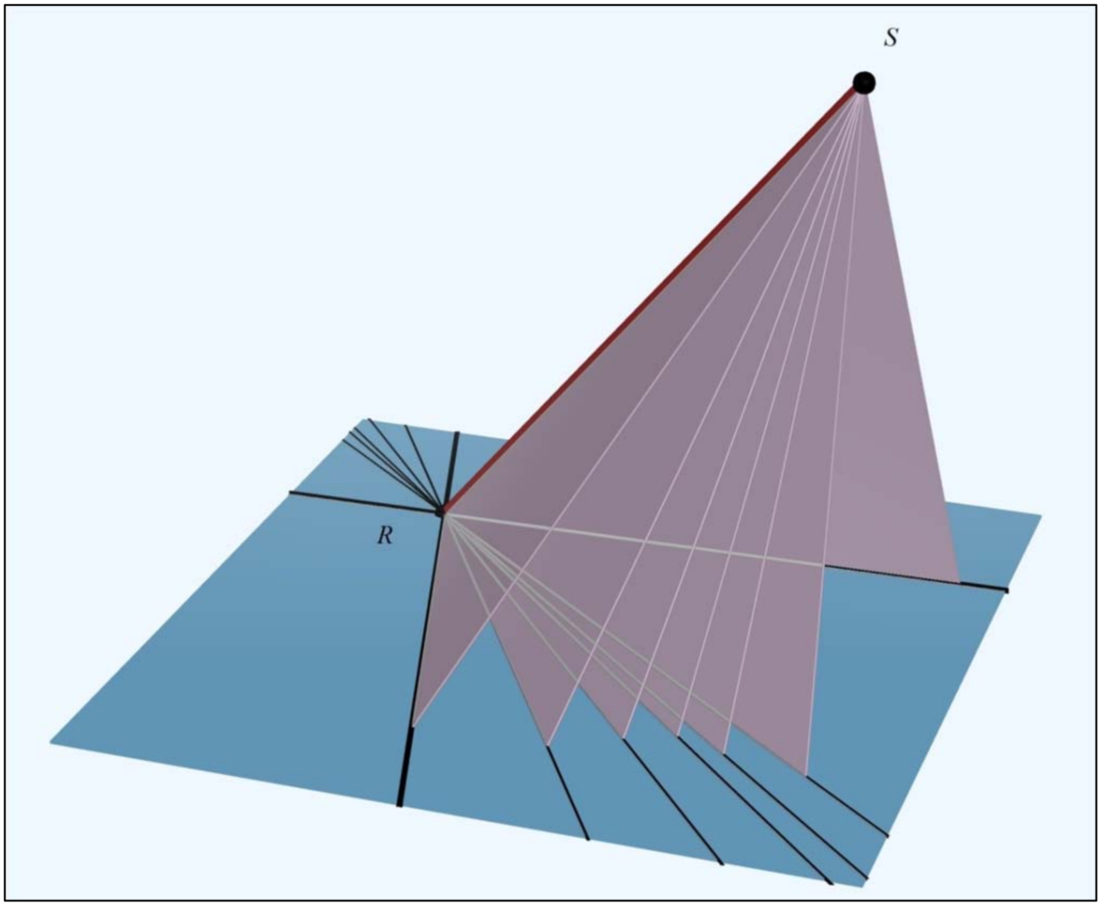

Figura 6. Un haz de rectas en Π con vértice R genera un haz de planos con eje RS.

Dado entonces cualquier punto $P \in \Sigma$, una esfera de cualquier radio se verá cortada en un cierto círculo K por algún plano de un haz adecuado contenido en la red tridimensional (Fig. 7) y en tal plano el **Teorema 3** es válido.

Q.E.D.

Huelga decir que el trabajo que hemos realizado para generalizar el resultado de 2 a 3 dimensiones sería perfectamente análogo para generalizarlo a dimensiones superiores.

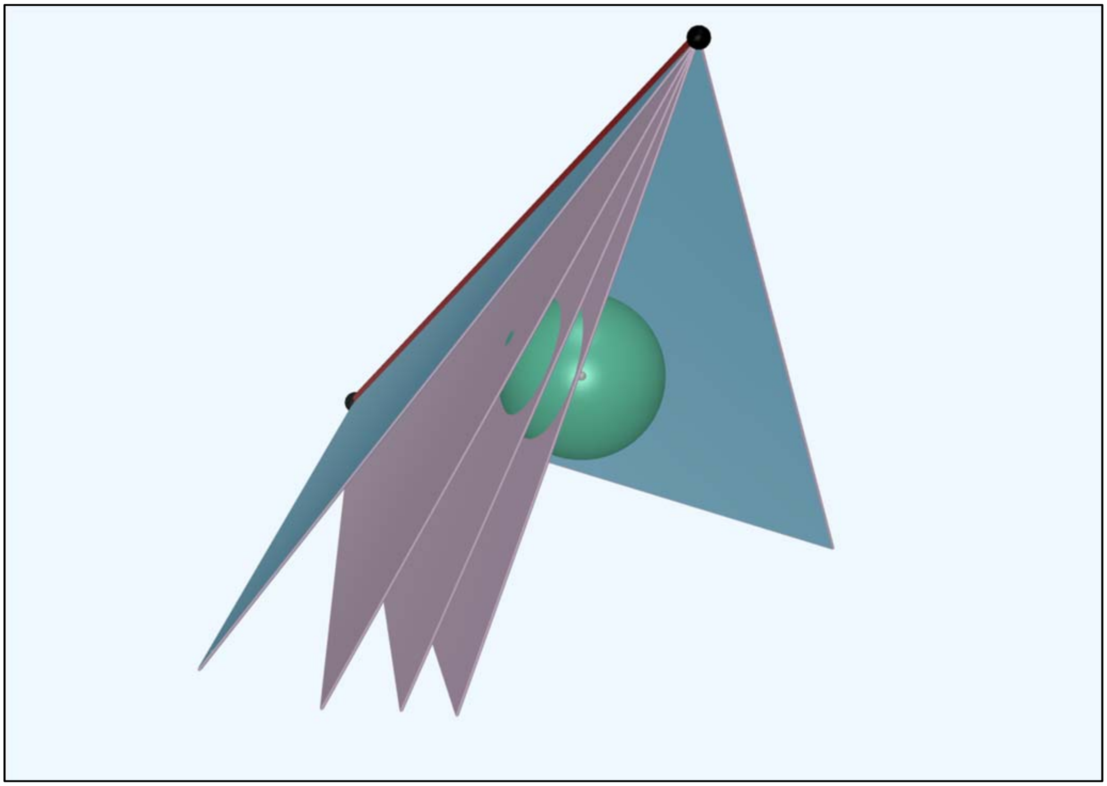

Figura 7. Una esfera dada es cortada en círculos por planos de un haz contenido en la red tridimensional.

Conclusión

Aunque con frecuencia lo olvidamos, la forma en que hoy en día escribimos matemáticas, así como nuestra notación, es tan práctica y compacta gracias al gran desarrollo que el pensamiento matemático ha atravesado desde la aparición de la Teoría de Conjuntos. Siendo la tesis de Zindler anterior a tales avances, el principal desafío al traducir el texto ha consistido en desentrañar los pasajes donde se incurre en abundantes y confusas explicaciones, cuya complicación hoy libraríamos con una línea de símbolos. Además, nos encontramos con aspectos propios del alemán de la época del autor que incluso algunos hablantes de alemán contemporáneo tuvieron dificultades para entender con claridad. Conviene recordar también que lo que hoy entendemos como Alemania es un resultado de los procesos históricos de los siglos XIX y XX; cuando la tesis se publicó, la lengua alemana –o más precisamente el alto alemán, *Hochdeutsch*– era utilizada a todo lo largo del Imperio Austro-Húngaro así como en Prusia como lengua oficial y aun le faltaba un buen trecho que recorrer para convertirse en un alemán contemporáneo. Aunado a todo esto, para la interpretación en sentido matemático de varias palabras –como atestiguan las notas a la traducción– se requirió tanto de buena experiencia leyendo y escribiendo geometría como de un amplio panorama en lo que a historia de las matemáticas se refiere. En esta última parte ha sido clave el apoyo del Director de la Tesis, quien es hablante de alemán, en especial al momento de elegir la acepción más conveniente para términos polisémicos.

Finalmente, no menos complicado fue ampliar los pasos de la demostración que se omiten o compactan en el texto; el estilo de la presentación nos ha parecido necesariamente discursivo y sucinto, además de ingenioso, y sin duda el texto está dirigido a un lector propio de la geometría sintética y, en particular, familiarizado con las configuraciones armónicas. Como vemos, los retos han sido constantes durante el trabajo, sin embargo podemos confirmar con alegría que la preparación matemática ha sido la herramienta esencial para salvar cada uno de esos obstáculos.

En lo que respecta a la demostración misma; nos ha parecido atractiva la manera constructiva en que se presenta la solución del problema por su simplicidad y la atención puesta a los detalles para disipar, aunque de forma resumida, cualquier confusión posible en los argumentos.

Comprendemos este texto de Zindler como un ejercicio de sus técnicas sintéticas con miras hacia lo que hoy conocemos como geometría proyectiva, sabemos por [Grünbaum, 2.11, Problema 8] y [Pisanski y Servatius, 6.8] que la segunda parte de la tesis doctoral tratará mucho más a fondo las configuraciones proyectivas como entes combinatorios y por tanto la primera parte de la misma parece ser una muestra de la complejidad y profundidad de los resultados que se pueden alcanzar utilizando las configuraciones proyectivas y métodos no analíticos. Los aspectos algorítmicos de la demostración destacan también como una novedad para la época al ser usados en un texto de geometría, esto es una indicación más del dinamismo de aquél período y de la forma en que la interdisciplinariedad y la importación de métodos de una rama a otra empezaban a surgir.

Finalmente la conclusión que subyace al trabajo es que las propiedades de densidad en los espacios euclidianos son tan esenciales como las de distancia; basta con las nociones de incidencia, orden y proporción entre segmentos –razón cruzada– para conseguir tantos puntos como sea necesario y hacer geometría. Esta interpretación parece bastante sugerente ya que nuestro texto se ubica precisamente en una época donde la discusión sobre los elementos de la geometría no podía ser más dinámica y en la cual el gran desarrollo del Cálculo produjo el surgimiento de una pugna entre los métodos analíticos y los de la Geometría Sintética; los geómetras –que en ese tiempo se consideraban a sí mismos *modernos*- luchaban para que la geometría *clásica* no perdiera su papel preponderante y fundamental ante los celebrados avances del Cálculo y al mismo tiempo exploraban las nuevas posibilidades surgidas al revisitar antiguos resultados con una perspectiva enriquecida por más o menos tres siglos de matemática europea. Finalmente, no se debe soslayar que en aquellos momentos las Geometrías no Euclidianas estaban en pleno desarrollo y desafiaban las concepciones clásicas sobre la naturaleza del conocimiento geométrico [Fauvel].

Apéndice

Un extracto del texto original acompañado de las dos traducciones automáticas generadas por cada uno de los servicios utilizados.

Original en alemán:

Denn ist ρ die beliebig klein vorgegebene Entfernung, innerhalb welcher vom fünften gegebenen Punkte P aus (Möbius, a. a. 0. §. 205) mindestens ein Schnittpunkt des Netzes liegen soll, so kann man zunächst in einem Schnittpunkte R des Netzes ein Strahlenbüschel so dicht construiren, dass mindestens ein Strahl s desselben in den von den beiden Tangenten begrenzten Winkelraum fällt, welche von R an den in P mit ρ geschlagenen Kreis gezogen werden können.

Google Translate:

For if the radius of the network is at least one intersection point of the network, then the radius of the net can be so close at a point of intersection R of the network Construct that at least one ray s falls in the angular space bounded by the two tangents, which can be drawn from R to the circle which is beaten in P by ρ.

SDL BeGlobal Community:

It is ρ the any small specified distance within which the fifth given points P (Mobius, a. a. 0. §. 205) At least one intersection point of the network is to be located so you can first in an intersection points R of the network a radiation bunch construiren so dense that at least one jet s of the same in the two tangents limited angle period falls which of R in the P with ρ beaten circle can be drawn.

Bibliografía

Coxeter, H. S. M. *The Real Projective Plane*, Springer-Verlang, 1993

Fauvel, J. et al *Möbius and his Band*, Oxford University Press, 1993

Grünbaum, B. *Configurations of Points and Lines*, American Mathematical Society, 2009

Hall, M. *Proyective Planes*, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 229-277

Hankel, H. *Die Elemente der Projectivischen Geometrie*, Druck und Verlag Von B. G. Teubner, 1875

Hilbert, D. *Fundamentos de la Geometría*, CSIC - CSIC Press, 1996

Hyman, Ch. *German-English Mathematics Dictionary*, Interlanguage Dictionaries, 1960

Möbius, A. F. *Gesammelte Werke*, Verlag Von S. Hirzel, 1885

Pisanski, T. y **Servatius**, B. *Configuration from a Graphical Viewpoint*, Springer, 2013

Servatius, B. *Point Line Configurations and their Realizability*. https://users.wpi.edu/~bservat/fieldstalk.pdf

Shively, L. S. *An Introduction to Modern Geometry*, John Wiley and Sons, 1939

Veblen, O. y **Young** J. *Projective Geometry*, Volume 1, 1910

Wikipedia en aleman *Konrad Zindler*, https://de.wikipedia.org/wiki/Konrad_Zindler

Zindler, K. *Zur Theorie der Netze und Configurationen*, 1895