



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
“ARAGÓN”**

“ESTADO DEL ARTE DEL MÉTODO DE LOS
ELEMENTOS FINITOS”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL

**PRESENTA:
YAHIR AXEL ESTRADA REGALADO**

ASESOR:
DR. JAIME RETAMA VELASCO



NEZAHUALCOYOTL, EDO. DE MÉX., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“No estudio por saber más, sino por
ignorar menos”*

Sor Juana Inés de la Cruz

*“Hay que tener fe en uno mismo.
Ahí reside el secreto. Sin la absoluta
confianza en sí mismo, uno está
destinado al fracaso”*

Charles Chaplin

*“Por la ignorancia se desciende a la
servidumbre, por la educación se
asciende a la libertad”*

Diego Luis Córdoba

Dedicatoria

A mis padres, Javier Estrada Hernández y Maribel Regalado Ponce, por toda la confianza que siempre han depositado en mí, por ser la guía en este camino y estar conmigo en los peores momentos. Por su esfuerzo realizado para que yo culminara mi carrera profesional pues sin su sustento jamás hubiese sido posible. Eternamente agradecido con ustedes.

A mi hermana, Valeria Estrada Regalado, por ser mi mayor motivación para mi superación personal. Por ser una persona fundamental en mi vida, por todo tu cariño y comprensión.

A Paola Viridiana Ramírez Rivero, por todos los momentos que hemos pasado juntos, por tu apoyo incondicional, por alentarme siempre y en todo momento. Por todo tu cariño y amor.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma mater.

A la Facultad de Estudios Superiores “Aragón”, el recinto de mis estudios profesionales.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, por el apoyo brindado para el desarrollo del presente trabajo de tesis, a través del proyecto de investigación PAPIIT, número de registro TA101317, con título “*Análisis no-lineal de vigas con zonas de plastificación y funciones spline*”.

A mi asesor de tesis, Dr. Jaime Retama Velasco, porque jamás escatimo en tiempo y esfuerzo para brindarme apoyo en la elaboración de la presente tesis profesional. Por todo el conocimiento que me compartió.

A los profesores de la carrera de ingeniería civil de la FES “Aragón” por sus valiosas y enriquecedoras clases, por todos los conocimientos y experiencias transmitidas.

A mis amigos y compañeros que me acompañaron durante toda la carrera.

Resumen

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo principal dar una introducción a un método de análisis ampliamente utilizado en el área de la Ingeniería Estructural, dentro de la Ingeniería Civil, denominado **“método de los elementos finitos”**.

Este método ha tenido un gran crecimiento en las últimas décadas por su aplicación, por ende, ha tomado una gran importancia en la ingeniería, volviéndose imprescindible que haya nociones del método a nivel licenciatura y no sólo a nivel posgrado como comúnmente existe, siendo este uno de los principales objetivos de este trabajo.

En primera instancia, se presenta una pequeña introducción a la historia del método, derivando así en las diferentes etapas de desarrollo del mismo. Posteriormente, se expone los fundamentos de elasticidad, pues estos son la estructura del método.

Asimismo, se realiza una breve introducción a las funciones B-spline, las cuales han sido en la actualidad un complemento y mejora al método; seguido a esto, se presentan las formulaciones básicas y fundamentales del método de los elementos finitos.

Para ilustrar el uso del método de los elementos finitos, en el capítulo 5 se presentan 4 ejemplos de aplicación que ponen de manifiesto las capacidades de cálculo del método de análisis, para condiciones elásticas lineales y un régimen de carga estático. Al final del trabajo, se dan conclusiones derivadas y recomendaciones al uso y aplicación del método de los elementos finitos.

Abstract

The main objective of this thesis, is to introduce to undergraduate students, to one method of analysis widely used in the area of Structural Engineering, within Civil Engineering, called "***finite elements method***".

This method has had a great growth in the last decades by its application, therefore, it has taken a great importance in the engineering; becoming essential that students of undergraduate level, have notions about the method, not only in a graduate level; being this one of the main objectives of this thesis.

In the first instance, a brief introduction to the history of the method is presented, thus deriving to the different stages of its development. Subsequently, the fundamentals of elasticity are exposed, essential for the analysis of stress problems by means of the finite element method.

A brief introduction is made about the B-spline functions, which have been a complement and improvement to the method in the present; following this, the basic and fundamental formulations of the finite element method are exposed, for a family of solid elements.

To show the using of the finite element method, in chapter 5 the finite element method is applied to four examples that demonstrate its capabilities for linear analysis and under a static loading condition. At the end of the work, derived conclusions and recommendations about using and application of the finite element method are given.

Contenido

LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABLAS	XI
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN AL MEF	1
1.1. BREVE HISTORIA DEL MEF	1
1.2. GENERALIDADES	2
1.2.1. <i>Pasos básicos del MEF</i>	3
1.3. JUSTIFICACIÓN	4
1.4. OBJETIVOS	5
1.5. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	5
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD	7
2.1. DESPLAZAMIENTOS	8
2.2. DEFORMACIONES	8
2.2.1. <i>Deformación unitaria</i>	9
2.2.2. <i>Deformaciones por temperatura</i>	10
2.3. ESFUERZOS.....	11
2.3.1. <i>Esfuerzos principales</i>	13
2.3.2. <i>Ecuaciones de equilibrio</i>	14
2.4. ECUACIÓN CONSTITUTIVA	15
2.4.1. <i>Caso tridimensional</i>	15
2.4.2. <i>Caso bidimensional</i>	17
2.4.3. <i>Caso unidimensional</i>	20
CAPÍTULO 3. INTERPOLACIÓN CON FUNCIONES B-SPLINE	21
3.1. INTRODUCCIÓN	21
3.2. FUNCIONES B-SPLINE.....	23
3.2.1. <i>Definición</i>	23
3.2.2. <i>Propiedades</i>	24
3.2.3. <i>Componentes</i>	26
3.3. COLOCACIÓN DE PUNTOS.....	30
3.3.1. <i>Fundamentos del método</i>	30
3.3.2. <i>Viga tipo 1</i>	33
3.3.3. <i>Viga tipo 2</i>	36
3.4. ELEMENTOS SÓLIDOS.....	43
3.4.1. <i>Elemento armadura de 1er orden</i>	43
3.4.2. <i>Elemento armadura de 2do orden</i>	47
3.4.3. <i>Elemento rectangular plano de 4 nodos</i>	51
CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN VARIACIONAL Y NUMÉRICA DEL MÉTODO.	57
4.1 FORMULACIÓN VARIACIONAL.....	57
4.1.1. <i>Principio del trabajo virtual</i>	57
4.1.2. <i>Principio del trabajo virtual complementario</i>	59
4.1.3. <i>Principio de la energía potencial mínima</i>	61
4.1.4. <i>Principio de la energía potencial mínima complementaria</i>	62

4.2. FORMULACIÓN NUMÉRICA	62
4.2.1. <i>Elemento armadura de 1er orden</i>	63
4.2.2. <i>Elemento armadura de 2do orden</i>	70
4.2.3. <i>Elemento triangular</i>	76
4.2.4. <i>Elemento rectangular de 4 nodos</i>	81
CAPÍTULO 5. EJEMPLOS	89
5.1. MEMBRANA DE COOK.....	89
5.2. VIGA DE EULER-BERNOULLI.....	97
5.3. VIGA DE CONCRETO REFORZADO.....	105
5.4. SIMULACIÓN HÍBRIDA DE UNA VIGA	111
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES	117
APÉNDICE A	119
APÉNDICE B	123
BIBLIOGRAFÍA	125

Lista de figuras

2.1 Cuerpo tridimensional.....	7
2.2 Cuerpo deformado.....	9
2.3 Cuerpo sólido sometido a un sistema de carga.....	12
2.4 Elemento con componentes del tensor de esfuerzo.....	12
3.1 (a) Análisis de elementos finitos y (b) análisis isogeométrico.....	22
3.2 Propiedades de las curvas B-spline.....	25
3.3 Funciones base B-spline para un vector abierto uniforme, $k=3$	29
3.4 Funciones base B-spline para un vector periódico uniforme, $k=3$	29
3.5 Viga con formulación de residuos pesados.....	31
3.6 Colocación de puntos.....	32
3.7 Viga tipo 1.....	33
3.8 Análisis isostático de la viga tipo 1.....	33
3.9 Viga tipo 2.....	37
3.10 Análisis isostático de la viga tipo 2.....	37
3.11 Comparación de solución exacta y funciones B-spline.....	42
3.12 Coordenadas globales (x,y) en elemento armadura de 1er orden.....	43
3.13 Coordenadas (t) en elemento armadura de 1er orden.....	43
3.14 Coordenadas globales (x,y) en elemento armadura de 2do orden.....	47
3.15 Coordenadas (t) en elemento armadura de 2do orden.....	48
3.16 Elemento plano en coordenadas cartesianas.....	51
3.17 Elemento plano en coordenadas (s,t)	52
4.1 Elemento unidimensional de 1er orden.....	63
4.2 Función de forma del nodo 1.....	66
4.3 Función de forma del nodo 2.....	67
4.4 Elemento unidimensional de 2do orden.....	71
4.5 Elemento bidimensional de 3 nodos.....	76
4.6 Elemento bidimensional de 4 nodos.....	81
4.7 Elemento lagrangiano rectangular.....	82
5.1 Membrana de Cook.....	89
5.2. Malla con 4 elementos.....	90
5.3. Malla con 16 elementos.....	91

5.4 Malla con 64 elementos.....	90
5.5 Malla con 256 elementos.....	91
5.6 Malla con 1024 elementos.....	91
5.7 Desplazamientos nodales.....	92
5.8 Energía de deformación.....	93
5.9 Desplazamiento con malla de 4 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.....	93
5.10 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 4 elementos.....	94
5.11 Desplazamiento con malla de 16 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.....	94
5.12 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 16 elementos.....	94
5.13 Desplazamiento con malla de 64 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.....	95
5.14 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 64 elementos.....	95
5.15 Desplazamiento con malla de 256 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.....	95
5.16 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 256 elementos.....	96
5.17 Desplazamiento con malla de 1024 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.....	96
5.18 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 1024 elementos.....	96
5.19 Viga de Euler-Bernoulli.....	97
5.20 Mallas con (a) 10 elementos rectangulares y (b) 20 elementos triangulares.....	98
5.21 Mallas con (a) 40 elementos rectangulares y (b) 80 elementos triangulares.....	98
5.22 Mallas con (a) 160 elementos rectangulares y (b) 320 elementos triangulares.....	98
5.23 Mallas con (a) 640 elementos rectangulares y (b) 1280 elementos triangulares.....	99
5.24 Mallas con (a) 2560 elementos rectangulares y (b) 5120 elementos triangulares.....	99
5.25 Desplazamiento nodal.....	100
5.26 Energía de deformación.....	100
5.27 Malla (a) 10 elementos rectangulares, y (b) 20 elementos triangulares.....	101
5.28 Malla (a) 40 elementos rectangulares, y (b) 80 elementos triangulares.....	102
5.29 Malla (a) 160 elementos rectangulares, y (b) 320 elementos triangulares.....	102
5.30 Malla (a) 640 elementos rectangulares, y (b) 1280 elementos triangulares.....	102
5.31 Malla (a) 2560 elementos rectangulares, y (b) 5120 elementos triangulares.....	102
5.32 Malla (a) 10 elementos rectangulares, y (b) 20 elementos triangulares.....	103
5.33 Malla (a) 40 elementos rectangulares, y (b) 80 elementos triangulares.....	103
5.34 Malla (a) 160 elementos rectangulares, y (b) 320 elementos triangulares.....	103
5.35 Malla (a) 640 elementos rectangulares, y (b) 1280 elementos triangulares.....	104
5.36 Malla (a) 2560 elementos rectangulares, y (b) 5120 elementos triangulares.....	104

5.37 Viga de concreto reforzado	105
5.38 Sección transversal	107
5.39 Extremo derecho de la viga	108
5.40 Modelo a analizar	108
5.41 Malla de viga de concreto simple	109
5.42 Malla de viga de concreto reforzado	109
5.43 Desplazamiento nodal	110
5.44 Desplazamiento de viga de concreto simple	111
5.45 Desplazamiento de viga de concreto reforzado	111
5.46 Viga híbrida	112
5.47 Modelo FEAP viga híbrida	112
5.48 Malla con 50 cm de empotramiento	113
5.49 Malla con 100 cm de empotramiento	113
5.50 Malla con 150 cm de empotramiento	113
5.51 Malla con 200 cm de empotramiento	113
5.52 Desplazamiento nodal	114
5.53 Estado inestable, movimiento libre	114
5.54 Desplazamiento vertical de malla con 50 cm de empotramiento	115
5.55 Desplazamiento vertical de malla con 100 cm de empotramiento	115
5.56 Desplazamiento vertical de malla con 150 cm de empotramiento	116
5.57 Desplazamiento vertical de malla con 200 cm de empotramiento	116
A.1 Elemento unidimensional en el mundo real	119
A.2 Elemento bidimensional en el mundo real	120
A.3 Elemento unidimensional en el mundo padre	120
A.4 Elemento bidimensional en el mundo padre	121
A.5 Elemento isogeométrico unidimensional en el mundo padre	121
A.6 Elemento isogeométrico bidimensional en el mundo padre	122

Lista de tablas

<i>5.1 Desplazamiento</i>	91
<i>5.2 Energía de deformación</i>	91
<i>5.3 Desplazamiento nodal</i>	99
<i>5.4 Energía de deformación</i>	99
<i>5.5 Desplazamiento nodal</i>	109
<i>5.6 Desplazamiento nodal</i>	113
<i>B.1 Puntos para integración numérica de Gauss</i>	123

Capítulo 1. Introducción al MEF

El método del elemento finito (MEF) o (FEM, acrónimo de su nombre en inglés “Finite Element Method”), es un método numérico utilizado en diversos problemas de ingeniería y física. En muchas ocasiones, este método es utilizado en la solución de problemas con cierta complejidad. Este método, ha llegado a convertirse en una herramienta de análisis con grandes aplicaciones dentro del campo de la ingeniería, pues con ella es posible calcular soluciones aproximadas de la solución exacta del problema.

El MEF, relativamente, es un método de análisis nuevo, aunque sus fundamentos surgieron desde hace bastante tiempo. Asimismo, en la actualidad el MEF ha tenido grandes avances en su desarrollo, pues con la ayuda de las nuevas tecnologías, se han creado nuevos softwares especializados para este método de análisis que se han puesto al alcance de todos.

1.1. Breve historia del MEF

Como ya se ha mencionado, el MEF ha tenido grandes desarrollos en los últimos 25 años, pero sus bases se pueden encontrar desde la época de la civilización egipcia, pues para calcular el volumen de sus pirámides ocupaban métodos de discretización, *i.e.*, dividir el objetivo en partes más pequeñas.

Los fundamentos básicos del MEF se originaron aproximadamente en la década de los años 40 del siglo XX, principalmente con avances en el análisis estructural para aeronaves. En 1941, el ingeniero ruso *Alexander Hrenikoff* (1896-1984) calculó y presentó una solución para problemas elásticos, siendo este un momento importante del MEF, (Chandrupatla y Belegundu, 1999).

Posteriormente, en 1943, el matemático alemán *Richard Courant* (1888-1972) realizó un artículo, donde publicaba acerca del uso de la interpolación polinómica por partes en subregiones triangulares usados directamente en problemas elásticos

y modelos de torsión, siendo este una forma especial del método variacional de Rayleigh-Ritz, (Cook, et al., 2001; Gallagher, 1975).

Para 1956, *M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp* presentaron un documento, el cual se centró en matrices de rigidez y deformación de estructuras complejas, como armaduras, vigas y otras estructuras, así mismo realizaban una definición más cercana al método. Y fue hasta 1960, cuando se presentó como tal “método de los elementos finitos” por *R. W. Clough* (1920-2016), (Chandrupatla y Belegundu, 1999; Pavlou, 2015).

Para el año 1967 se publica el primer libro del método por *Olgierd Cecil Zienkiewicz* (1921-2009) y Cheung, llevando por nombre: “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics” (El método de los elementos finitos en mecánica estructural y de medios continuos), (Cubo, 2010; Reddy, 2005).

En la última década, el MEF se ha encontrado en un periodo de completa expansión, pues ha tenido un gran auge en los campos de la ingeniería y la industria, siendo parte de muchos trabajos de investigación. Además, con la ayuda de procesadores y softwares complejos, se pueden acelerar los procesos de análisis del MEF.

1.2. Generalidades

Principalmente, el método se basa en la división de la estructura o cuerpo, tal división se deriva en una serie de subdominios no intersectantes, denominados “*elementos finitos*”. A este proceso de dividir el cuerpo en partes más pequeñas se le conoce como “*discretización*”, y el conjunto de elementos finitos que componen el total del cuerpo se le denomina “*malla*”.

En cada elemento de la malla existen puntos definidos a los cuales se les denomina como *nodos*, así mismo, el conjunto de estos nodos y elementos se le conoce como *malla*. Es importante mencionar, al igual que en cualquier figura geométrica, si dos nodos son adyacentes o convergen en el mismo punto es porque pertenecen al mismo elemento finito.

El método también ofrece la posibilidad de considerar varios parámetros como son: el módulo elástico, temperatura, densidad, viscosidad, entre algunas otras, para cada uno de los elementos que conforman la estructura, ya sea que estén constituidos por uno o varios materiales, esto de acuerdo a las ecuaciones constitutivas que se emplean en el análisis, (Pavlou, 2015; Gallagher, 1975; Cook, et al., 2001).

1.2.1. Pasos básicos del MEF

El método de los elementos finitos en cierta manera es complejo, pero esencialmente consta de los siguientes pasos generales para su desarrollo (Pavlou, 2015; Reddy, 2005):

1. Discretización: consiste en dividir el medio continuo en elementos finitos, esto con geometrías simples. Dicho de otra manera, se realiza la generación de la llamada malla. Este primer paso es de suma importancia para la exactitud de la solución.
2. Selección de nodos: consiste en seleccionar los puntos del sólido que serán los nodos de la malla. Con esto se puede establecer las condiciones de equilibrio y de compatibilidad.
3. Aproximación: consiste en aproximar el o los campos independientes, variables del problema. Esto se puede lograr mediante polinomios que cumplan con las condiciones de compatibilidad y/o de equilibrio del problema.
4. Relaciones de compatibilidad y constitutivas: consiste en establecer las relaciones entre los desplazamientos y las deformaciones para lograr una compatibilidad; así como también las relaciones constitutivas entre las deformaciones y los esfuerzos, esto para cada elemento generado de la malla.
5. Matriz de rigidez: consiste en calcular la matriz de rigidez para cada uno de los elementos generados de la malla. Asimismo, se puede calcular igual el vector de cargas nodales de cada elemento.
6. Ensamble de la matriz de rigidez global: consiste en restablecer la compatibilidad y el equilibrio de la estructura completa. Se logra mediante el

ensamble de cada matriz de rigidez por elemento, así como el vector de cargas de toda la estructura y la aplicación de los apoyos.

7. Solución de sistema de ecuaciones algebraico: consiste en resolver el sistema de ecuaciones algebraicas obtenido para las incógnitas del problema.
8. Cálculo de los campos dependientes: consiste en calcular los esfuerzos y deformaciones, asimismo, las fuerzas internas para cada elemento.
9. Cálculo de reacciones: consiste en determinar las reacciones en los nodos donde existe un apoyo.

1.3. Justificación

Actualmente existen grandes avances en el desarrollo del método de los elementos finitos, que permiten su aplicación a prácticamente cualquier problema de la física. Sin embargo, la mayoría de planes de estudio, de Ingeniería Civil de la Universidades mexicanas, no contemplan la materia de elementos finitos. Este hecho conlleva a que el estudiante de licenciatura desconozca los fundamentos matemáticos y físicos que sustentan el desarrollo del método, y se limite al uso de programas de computadora, basados en el método, sin la capacidad de juzgar el problema a resolver y los resultados obtenidos del análisis.

Por lo antes expuesto, en el presente trabajo de tesis se presenta un estado del arte general del método de los elementos finitos enfocado a estudiantes de nivel licenciatura, algunos desarrollos recientes mediante funciones B-Spline, y su aplicación a problemas de la ingeniería estructural; poniendo especial atención en la construcción del modelo matemático y en el análisis de los resultados obtenidos.

1.4. Objetivos

En el presente trabajo de tesis, se busca dar un panorama general del estado del arte del método de los elementos finitos, y sus desarrollos recientes, a través de la revisión de bibliografía especializada en el tema y la presentación de una familia de elementos finitos, que sirva de consulta para estudiantes de Ingeniería a nivel licenciatura, interesados en el tema.

1.5. Organización de la tesis

A continuación, se describe de manera general el contenido de la tesis:

- Capítulo 2. Se realiza una explicación somera de los fundamentos de la teoría de la elasticidad; esencial para el estudio de problemas de esfuerzo por medio del método de los elementos finitos.
- Capítulo 3. Se introduce a las funciones B-spline. Se explica su estructura, su aplicación y el uso de las mismas dentro del MEF, así como algunos ejemplos de aplicación.
- Capítulo 4. Se presentan las formulaciones: variacional y numérica del MEF. Asimismo, se formulan, numéricamente, elementos unidimensionales y bidimensionales mediante polinomios de interpolación de Lagrange.
- Capítulo 5. Se presentan ejemplos de la aplicación del método de los elementos finitos, con distintas variaciones de condiciones de apoyo, cargas y topología de la malla, que muestran su influencia en los resultados.
- Capítulo 6. Se presentan conclusiones en las que se puede sintetizar los conceptos y planteamientos básicos y esenciales del MEF.

Capítulo 2. Fundamentos de elasticidad

En este capítulo se presentan fundamentos de la teoría de la elasticidad, parte esencial de la “Mecánica de sólidos” y necesaria para comprender el método de los elementos finitos.

Se dice que un cuerpo es elástico cuando es capaz de recuperar su forma original después de haberle aplicado y retirado un sistema de fuerzas. Este comportamiento puede ser lineal o no lineal, esto depende de la relación que existe entre desplazamientos-deformaciones y esfuerzos-deformaciones (Gere y Timoshenko, 1991).

Esta teoría, así como la resistencia de los materiales, tiene como objetivo principal el estudio y análisis de la resistencia y la rigidez (estado de esfuerzos y estado de deformaciones, respectivamente) de los cuerpos sólidos, estando bajo condiciones de fuerzas en equilibrio.

Como base para explicar los temas elementales de la teoría de la elasticidad, se considera un cuerpo sólido (cuerpo tridimensional), sometido a un sistema de cargas, y que ocupa un volumen finito, figura 2.1.

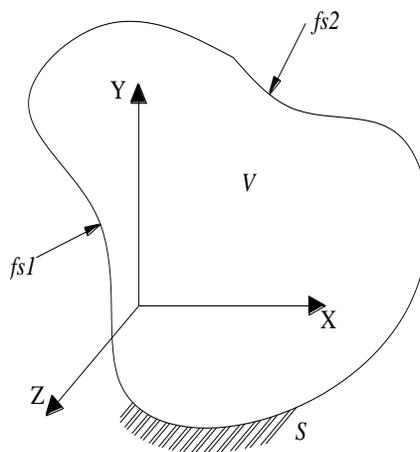


Figura 2.1 Cuerpo tridimensional.

Donde f_{s1} y f_{s2} son cargas ejercidas sobre el cuerpo, V es el volumen total del cuerpo y S es la superficie donde se apoya el mismo.

2.1. Desplazamientos

Un elemento finito cual sea, como el que se muestra en la figura 2.1, está definido por una serie de puntos, los cuales tienen coordenadas en los ejes x , y y z . Al estar sometido a un sistema de cargas, este tiende a tener un desplazamiento en las 3 direcciones, las cuales se definen con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}u &= u(x, y, z) \\v &= v(x, y, z) \\w &= w(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.1}$$

que, de forma matricial, se pueden reescribir como:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\tag{2.2}$$

donde u , v , y w son los desplazamientos en las direcciones x , y , z , respectivamente (Zienkiewicz, et.al., 2013; Chandrupatla y Belegundu, 1999).

2.2. Deformaciones

Al considerar un cuerpo cual sea, el cual tenga apoyos que eliminen los movimientos de cuerpo rígido, podemos suponer que sufre pequeñas deformaciones (de no ser así, la deformación no sería lineal) por efecto de fuerzas internas o por la aplicación de fuerzas externas (Zienkiewicz, et.al., 2013; Gallagher, 1975).

Con base en la figura 2.2 se puede definir un tensor de deformaciones, el cual puede expresarse de forma matricial de la siguiente manera:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

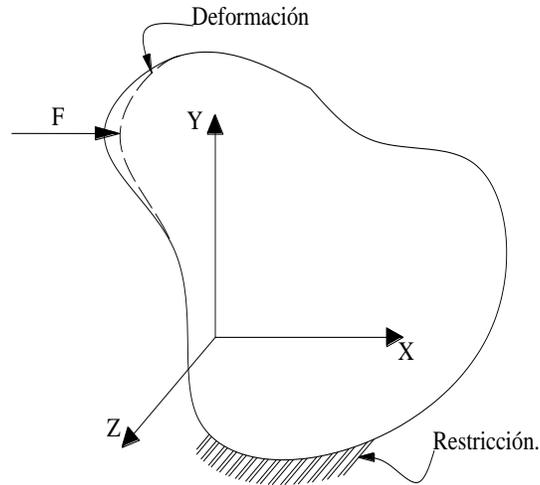


Figura 2.2 Cuerpo deformado.

donde F es una fuerza externa que afecta al cuerpo.

Sabiendo que el tensor de deformaciones es simétrico y dentro de la denotación del MEF, el mismo tensor se puede reescribir como un vector de deformación, el cual toma la siguiente forma:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ son deformaciones longitudinales en las direcciones (x, y, z) y $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ son deformaciones angulares en los planos $(x - y), (y - z),$ y $(x - z),$ respectivamente, (Urugal y Fenster, 2003; Zienkiewicz, et.al., 2013).

2.2.1. Deformación unitaria

Dentro de un punto, cual sea, de un cuerpo sólido existen relaciones de compatibilidad entre las componentes de deformaciones y las componentes de desplazamiento (Vázquez y López, 2001).

Dicho lo anterior, las componentes de deformaciones se obtienen al derivar las componentes de desplazamiento; que para el caso de pequeñas deformaciones están dadas como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.6)$$

En el contexto del MEF, se expresa las ecuaciones de compatibilidad en forma matricial,

$$[\varepsilon] = [\partial] \cdot \vec{u} \quad (2.7)$$

donde el operador matricial $[\partial]$ contiene las operaciones diferenciales correspondientes y, estas a su vez, multiplican al vector de desplazamientos, expandiéndolo de la siguiente manera:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.2.2. Deformaciones por temperatura

En muchos casos, en los problemas a analizar se tiene que hacer consideraciones por deformaciones iniciales. Generalmente, estas deformaciones están asociadas a efectos de temperatura. Si se conoce los incrementos de temperatura $\Delta T(x, y, z)$, se puede determinar la deformación inicial. La ecuación necesaria para poder calcular la deformación inicial por efectos de temperatura está dada por la siguiente expresión:

$$\varepsilon_0 = [\alpha \cdot \Delta T \cdot I] \quad (2.9)$$

donde:

ε_0 = deformación unitaria inicial,

α = constante de expansión térmica del material,

ΔT = incremento de temperatura,

I = matriz identidad,

de este modo, la ecuación 2.9 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Así mismo, la ecuación 2.10 se puede simplificar en un vector de deformación inicial:

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \Delta T \\ \alpha \cdot \Delta T \\ \alpha \cdot \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

donde las deformaciones longitudinales son igual al producto de la constante de expansión por el incremento de la temperatura, y las deformaciones angulares son igual a cero (Celigüeta, 2008, Chandrupatla y Belegundu, 1999).

2.3. Esfuerzos

Un cuerpo cualquiera (figura 2.3), que está sometido a un sistema de fuerzas, f_1, \dots, f_5 , en equilibrio, *i.e.*, se satisface las ecuaciones de equilibrio de la estática, y sea el punto "A" con coordenadas (x, y, z) de un elemento diferencial.

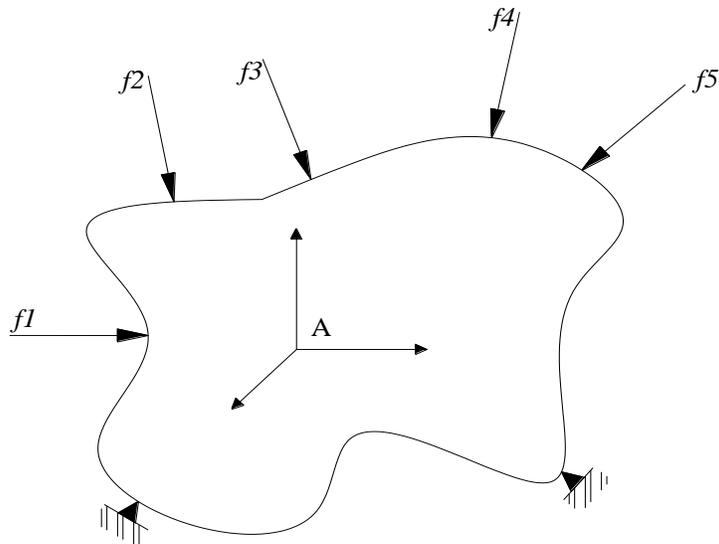


Figura 2.3 Cuerpo sólido sometido a un sistema de carga.

Ahora, si el elemento diferencial en el punto A se aísla, se obtendría un cuerpo como el que se muestra en la figura 2.4, cuyo estado de esfuerzos está definido por el siguiente tensor de esfuerzos con 9 componentes, expresados en la matriz dada por la ecuación (2.12).

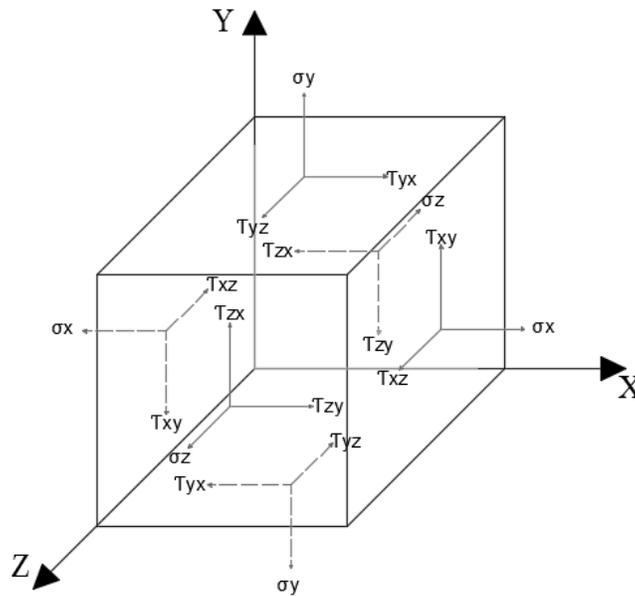


Figura 2.4 Elemento con componentes del tensor de esfuerzo.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Al igual que para el caso del tensor de deformaciones, el tensor de esfuerzos es simétrico, y también por la notación empleada en el MEF, el tensor de esfuerzos se puede reducir a un vector de esfuerzos, el cual toma la siguiente forma:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ representan los esfuerzos normales y $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ representan los esfuerzos cortantes. El tener un tensor simétrico de esfuerzos reduce el número de componentes independientes de 9 a 6 que constituyen el estado de esfuerzos de un cuerpo sólido tridimensional (Gallagher, 1975; Celigüeta, 2008; Hurtado, 2012).

2.3.1. Esfuerzos principales

El cálculo de los esfuerzos principales (Reddy, 2013; Sack, 1994) se utiliza para obtener esfuerzos característicos, esencialmente de un punto perteneciente a un sólido. Generalmente el cálculo de éstos se realiza con fines de diseño o de revisión de una pieza o elemento específico. En el caso más general se resuelve con la ecuación característica:

$$|\sigma - \lambda I| = -\lambda^3 + I_1 \cdot \lambda^2 - I_2 \cdot \lambda + I_3 = 0 \quad (2.14)$$

donde:

λ = valor característico del tensor de esfuerzos, σ ,

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (2.15)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 + \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_x \sigma_z - \tau_{zx}^2, \quad (2.16)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}, \quad (2.17)$$

siendo I_1, I_2, I_3 , los invariantes tensoriales, los cuales son independientes del sistema de coordenadas que se haya empleado.

Al resolver la ecuación 2.14 se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad (2.18)$$

El esfuerzo principal máximo σ_I es el mayor de los valores característicos λ . Los demás esfuerzos principales se toman de los valores característicos restantes, tomando en cuenta la ecuación 2.18.

2.3.2. Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio están basadas en el teorema de Cauchy (1789-1857) (Timoshenko, 1983), así mismo para poder ilustrarse mejor, se deben de considerar las figuras 2.3 y 2.4.

Haciendo sumatoria de fuerzas en las direcciones x, y, z , se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo sólido:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x = 0 \quad \leftarrow \quad \Sigma F_x = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0 \quad \leftarrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + q_z = 0 \quad \leftarrow \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.21)$$

donde q_x, q_y, q_z son fuerzas de cuerpo por unidad de volumen, las cuales actúan cada una en su dirección correspondiente (x, y, z).

Con las tres ecuaciones restantes de la estática: $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma M_y = 0$; $\Sigma M_z = 0$, se demuestra que el tensor de esfuerzos es simétrico,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.22)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.23)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.24)$$

con esto podemos reducir el tensor de esfuerzos de 9 componentes a el vector de esfuerzos de 6 componentes (Gallagher, 1975; Vázquez y López, 2001).

2.4. Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva define la forma en que las componentes del tensor de esfuerzos y las componentes del tensor de deformaciones se relacionan para cada tipo de material que se utilice. Puede ser una ecuación constitutiva tridimensional, bidimensional o unidimensional.

Cabe resaltar que los casos de 1 y 2 dimensiones algunos autores los consideran como casos especiales (Chandrupatla y Belegundu, 1999), pues son simplificaciones de la ecuación constitutiva de 3 dimensiones.

2.4.1. Caso tridimensional

La ecuación constitutiva más general está dada para cuerpos sólidos, donde se encuentran 3 planos, (x, y, z) .

El tensor constitutivo para el caso de un cuerpo sólido, elástico y lineal, está dado por la ley de Hooke generalizada que pone el estado de deformación en función del estado de esfuerzos (Vásquez y López, 2001):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.27)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.29)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.30)$$

siendo G el módulo de contante definido como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.31)$$

Con las ecuaciones anteriores podemos determinar el estado de esfuerzos en función del estado de deformación, reescribiendo las relaciones esfuerzo-deformación mediante las constantes de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x \quad (2.32)$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y \quad (2.33)$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \quad (2.34)$$

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \gamma_{xy} \quad (2.35)$$

$$\tau_{yz} = \mu \cdot \gamma_{yz} \quad (2.36)$$

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \gamma_{zx} \quad (2.37)$$

donde λ y μ son los coeficientes de Lamé dados como:

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (2.38)$$

Quedando de la siguiente manera, en forma matricial, la ecuación constitutiva para cuerpos tridimensionales:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & (0.5-\nu) & 0 & 0 \\ & sim. & & & (0.5-\nu) & 0 \\ & & & & & (0.5-\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

De donde se considera como matriz constitutiva:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & (0.5-\nu) & 0 & 0 \\ & sim. & & & (0.5-\nu) & 0 \\ & & & & & (0.5-\nu) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

2.4.2. Caso bidimensional

La ecuación constitutiva bidimensional es una simplificación para los problemas de elasticidad y en consecuencia también en el MEF; reduciendo una dimensión permite resolver con mayor facilidad ciertos problemas, pues el número de incógnitas también se reduce y la solución se vuelve más fácil de calcular, cuando se realiza este procedimiento es porque se habla de un esfuerzo plano y una deformación plana.

En un *estado de esfuerzo plano*, los esfuerzos actúan solamente en el plano “ x, y ” y son nulos en la dirección z , es decir, que el esfuerzo normal y los esfuerzos cortantes equivalen a 0 ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), pues se considera que el espesor es demasiado pequeño o incluso despreciable en comparación con las otras dimensiones (Ameen, 2011).

Ahora bien, la relación de esfuerzo-deformación para un material isótropo puede simplificarse de los principios de elasticidad, donde las deformaciones lineales están dadas de la siguiente manera:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.42)$$

además, las deformaciones angulares γ_{xz} y γ_{yz} son iguales a 0 por lo que la única deformación angular es la siguiente:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (2.43)$$

donde:

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ = esfuerzos normales y cortante,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ = deformaciones lineales y angular,

ν = relación de Poisson.

En consecuencia, las ecuaciones 2.41-2.43 pueden reescribirse de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

para un estado de esfuerzo plano, y la relación inversa está dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

siendo $[C]$, el tensor constitutivo dado como,

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Cabe mencionar que, aunque el esfuerzo normal en la dirección z es igual a 0 en un caso de esfuerzo plano, la deformación axial “ z ” es diferente de 0, por lo que esta se puede calcular de la siguiente manera:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.47)$$

Por otro lado, en los problemas de *estado de deformación plana*, la relación de esfuerzo-deformación está dado como a continuación se menciona, pues hay que tener en cuenta que, aunque la deformación lineal en la dirección z es igual a 0, no precisamente el esfuerzo normal en esta misma dirección tiene que serlo (Ameen, 2011). Con base a la Ley de Hooke generalizada, precisamente en la ecuación 2.27 se tiene lo siguiente:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.48)$$

que consecuentemente la componente de esfuerzo en la dirección z queda de la siguiente manera:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.49)$$

Además, con base en las ecuaciones 2.28 y 2.29, se puede reescribir las siguientes ecuaciones en las direcciones de x y y

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y \quad (2.50)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x \quad (2.51)$$

y:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (2.52)$$

En consecuencia, las ecuaciones 2.50-2.52 pueden reescribirse de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

para un estado de deformación plana, y la relación inversa está dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Siendo $[C]$, el tensor constitutivo dado como,

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

2.4.3. Caso unidimensional

Al ser la situación más simple de un análisis de MEF, la ecuación constitutiva se simplifica a una ecuación escalar (Gallagher, 1975), siendo la matriz constitutiva el módulo elástico del material, por lo tanto, se reescribe la relación constitutiva como

$$[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon] \quad (2.56)$$

donde:

$[\sigma]$ = vector de esfuerzos,

$[C]$ = matriz constitutiva = E (módulo elástico del material),

$[\varepsilon]$ = vector de deformaciones.

Capítulo 3. Interpolación con funciones B-spline

En el campo de la ingeniería, se han buscado muchas formas, métodos y/o procedimientos para resolver y satisfacer de manera eficaz y simple las problemáticas que se presentan actualmente. Derivado de esto, en la última década se ha buscado optimizar el proceso de diseño y análisis mediante el uso de funciones B-spline, que permiten una mejor aproximación de las ecuaciones de campo involucradas en la solución, mediante el método de los elementos finitos, de problemas de la ingeniería. Estas funciones son una alternativa a las funciones polinómicas utilizadas de manera estándar en la formulación del método.

3.1. Introducción

Dada las problemáticas de la ingeniería estructural, el dibujo técnico ha sido una pieza fundamental de la misma, del mismo modo, lo ha sido el análisis estructural, los cuales han tenido una cierta correlación, que hoy en día son representados por la programación CAD (por su acrónimo en inglés, Computer Aided Design), y el análisis con elementos finitos. Dicha relación se ha estrechado aún más con el uso de los denominados análisis isogeométricos que permiten tomar la geometría de los dibujos CAD en el proceso de análisis mediante el MEF, (Hughes, et al., 2009).

Básicamente, el análisis isogeométrico consiste en utilizar la programación CAD para discretizar tanto la geometría como la solución del problema, dando como resultado un modelo geoméricamente exacto, como consecuencia, el diseño y el análisis pueden trabajar con una misma geometría (Hughes, et al., 2009).

En un principio, el dibujo técnico se realizaba por medio de trazos en papel, basado principalmente en líneas, pues es la forma más sencilla de un dibujo; las curvas eran en cierto punto difíciles de concretar, ya que se realizaba un conjunto de líneas continuas para crearlas.

Hace algunas décadas se comenzó a utilizar los softwares CAD, donde se podía realizaba el dibujo técnico con mayor rapidez, pero teniendo también la limitante en la creación de curvas. Posteriormente, comenzaron a surgir las curvas de

interpolaciones como pueden ser las curvas de Bézier, spline, B-spline, entre algunas otras. Fue en el año de 1972 cuando Rich Riesenfeld presentó una tesis sobre la aplicación de las curvas B-spline a la programación CAD, (Rogers, 2000).

El refuerzo de la programación CAD con tecnología isogeométrica, ha provocado un impacto positivo en el análisis con elementos finitos, pues la aplicación del MEF se ha podido concretar con mayor exactitud y eficacia, como se puede ver en la siguiente figura.

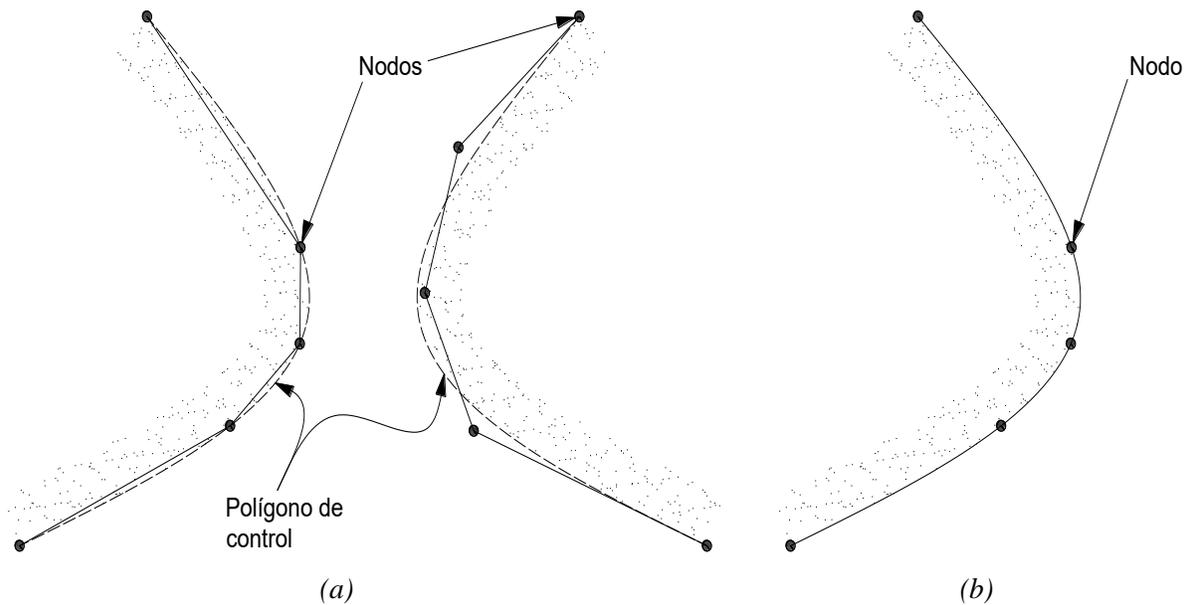


Figura 3.1 (a) Análisis de elementos finitos y (b) análisis isogeométrico.

En el análisis de los elementos finitos, las mallas de nodos generadas tienen un determinado rango de error en relación a la geometría; con ayuda de las curvas B-spline, se puede generar mallas con mejores resultados. Gracias a su flexibilidad de aplicación y uso, además del poderoso funcionamiento, las curvas B-spline fueron adoptadas rápidamente, por lo que es imprescindible hacer mención de las funciones B-spline.

Es importante resaltar que, a pesar de las grandes ventajas que tienen las curvas B-spline, en comparación con las funciones polinómicas, no existe mucha investigación en relación a aplicación a problemas prácticos de Ingeniería. Algunos

de los autores que han investigado sobre este tema en los últimos 20 años son: Hugges, et al., 2009; Magoon, 2010; Rogers, 2000.

3.2. Funciones B-spline

Las curvas B-spline, nombradas así por “*Basis Spline*”, esencialmente tienen una naturaleza no global, es decir, cada vértice de un polígono de control generador de una curva, está ligado a una función determinada (Rogers, 2000). Lo especial de este tipo de curvas es que tienen una única y propia función base para establecer una relación con el polígono definido o de control.

Esta función está dada por cada vértice que tiene dominio sobre la forma de la curva en cierto intervalo establecido, donde la función es positiva y completamente distinta de 0. A continuación se detallan las funciones base B-spline (Magoon, 2010; Rogers, 2000).

3.2.1. Definición

Se establece que $P(t)$ sea el vector de posición a lo largo de la curva en función del parámetro t , por lo tanto, la curva B-spline está dada por:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad (3.1)$$

$$t_{\min} \leq t < t_{\max} \quad (3.2)$$

$$2 \leq k < n + 1 \quad (3.3)$$

donde B_i es el vector de posición, n son los vértices del polígono de control y $N_{i,k}$ son las funciones base B-spline normalizadas.

Por ejemplo, la expansión de la ecuación 3.1 para un vector de posición de cuarto orden ($k = 4$), se tiene,

$$P(t) = B_1 N_{1,4}(t) + B_2 N_{2,4}(t) + B_3 N_{3,4}(t) + B_4 N_{4,4}(t)$$

o bien, para un n -ésimo orden ($k = n$), se tiene,

$$P(t) = B_1 N_{1,n}(t) + \dots + B_n N_{n,n}(t)$$

3.2.2. Propiedades

Debido a que se utiliza una base B-spline para describir una curva B-spline, a continuación, se numeran algunas de las propiedades de este tipo de funciones:

1. La suma de las funciones de base B-spline para cualquier valor del parámetro t es,

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) = 1 \quad (3.4)$$

2. Cada función base siempre es positiva, con un valor mayor o igual a cero, para todo valor del parámetro t , *i.e.*,

$$N_{i,k} \geq 0 \quad (3.5)$$

3. Excepto para las funciones base de 1er orden, $k = 1$, cada función base tiene precisamente un valor máximo.
4. El orden máximo de la curva es igual al número de vértices del polígono de control. El máximo grado es uno menos.
5. La curva muestra la propiedad de disminución de variación. Así, la curva no oscila alrededor de ninguna línea de desplazamiento, en cambio, su polígono oscila alrededor de la línea.
6. La curva generalmente sigue la forma del polígono de control.
7. La curva es transformada mediante la transformación de los vértices del polígono de control.
8. La curva siempre debe de estar por dentro del límite convexo del polígono de control.

En las siguientes figuras se pueden apreciar algunas propiedades de las curvas B-spline, (Rogers, 2000).

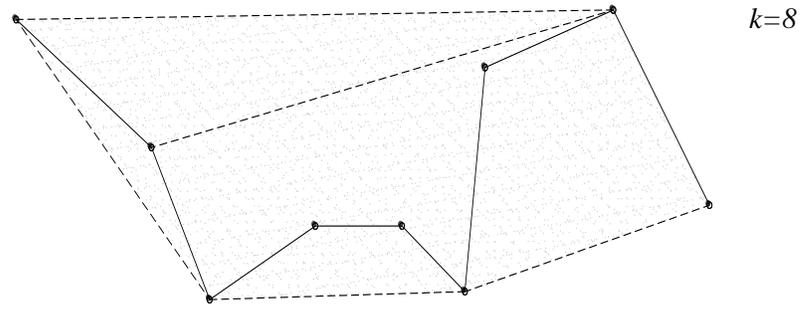
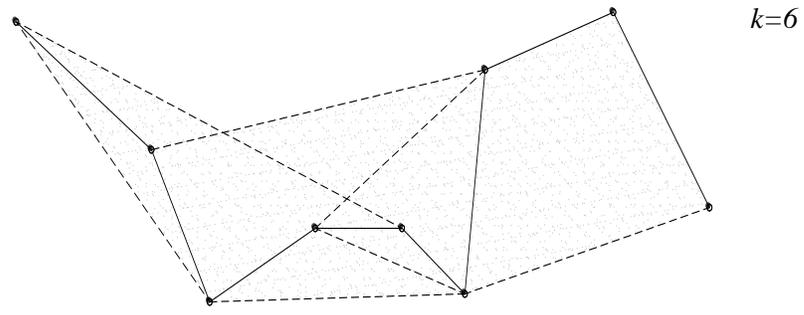
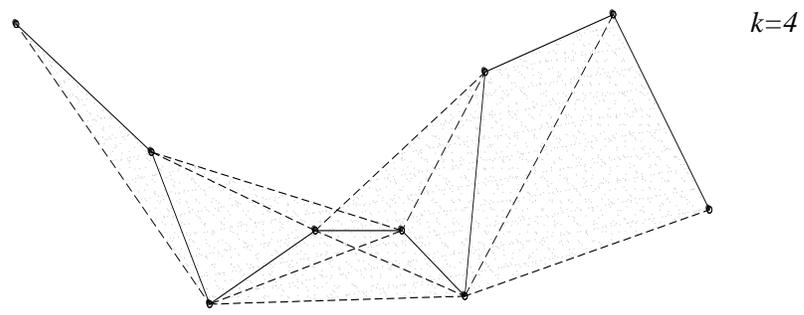
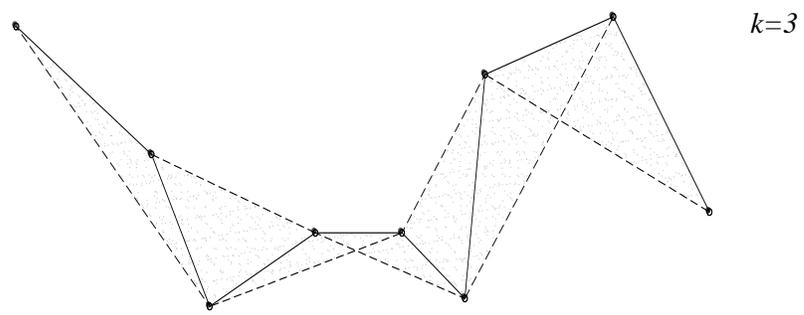
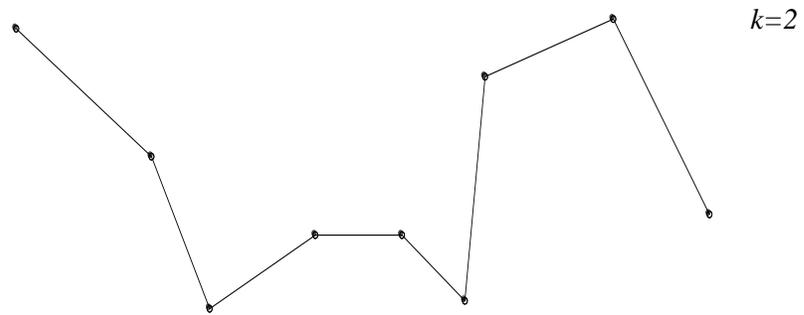


Figura 3.2 Propiedades de las curvas B-spline.

3.2.3. Componentes

Para calcular una curva con funciones B-spline se requiere de 3 componentes, un vector de nodos, funciones base y puntos de control (Magoon, 2010; Rogers, 2000).

1. Vector de nodos

Principalmente, existen dos tipos de vectores de nodos y a su vez otras dos subdivisiones, (Rogers, 2000):

- I. Periódico.
 - a. Uniforme.
 - b. No-uniforme.
- II. Abierto.
 - a. Uniforme.
 - b. No-uniforme.

Para este trabajo, se consideran sólo los vectores de nodos uniformes, en especial los vectores abiertos.

En un *vector de nodos uniforme* sus valores individuales de los nodos están separados uniformemente, por ejemplo:

$$[0 \ 1 \ 2 \ 3] \quad (3.6)$$

$$[0 \ 0.25 \ 0.50 \ 0.75 \ 1] \quad (3.7)$$

o sea, los vectores de nodos uniforme generalmente inician en 0 y tienen incrementos de 1 hasta su máximo valor (expresión 3.6); o se normaliza en el rango de 0 a 1, es decir, tiene intervalos decimales iguales (expresión 3.7).

En un *vector de nodos abierto uniforme*, este tiene multiplicidad de valores de nodo en su extremo igual al orden k de las funciones base B-spline, como se ha mencionado, los valores internos de los nodos están separados uniformemente, por ejemplo, se tiene:

$$k = 2 \quad [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4] \quad (3.8)$$

$$k = 3 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3] \quad (3.9)$$

$$k = 4 \quad [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2] \quad (3.10)$$

y para incrementos normalizados, se tiene:

$$k = 2 \quad [0 \quad 0 \quad 0.25 \quad 0.50 \quad 0.75 \quad 1 \quad 1] \quad (3.11)$$

$$k = 3 \quad [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.33 \quad 0.67 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad (3.12)$$

$$k = 4 \quad [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.50 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad (3.13)$$

Concretando lo anterior, un vector de nodos abierto uniforme se genera bajo las siguientes expresiones:

$$x_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k \quad (3.14)$$

$$x_i = i - k \quad k + 1 \leq i \leq n + 1 \quad (3.15)$$

$$x_i = n - k + 2 \quad n + 2 \leq i \leq n + k + 1 \quad (3.16)$$

La selección de un vector de nodos es de suma importancia cuando se va a realizar el cálculo de una curva B-spline. Por ejemplo, para un vector de nodos de orden $k = 3$ y $n + 1 = 4$, se tiene:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

satisfaciendo la condición de la expresión 3.14,

$$x_4 = 4 - 3 = 1$$

satisfaciendo la condición de la expresión 3.15,

$$x_5 = 3 - 3 + 2 = 2$$

$$x_6 = 2$$

satisfaciendo la condición de la expresión 3.16. Como resultado, el vector de nodos obtenido está definido como:

$$x = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

2. Funciones base

Para i -ésima funciones base B-spline normalizadas de orden k (grado $k - 1$), las funciones base $N_{i,k}$ son definidos por las fórmulas de recursión de *Cox-de Boor*.

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases} \quad (3.17)$$

Por lo tanto,

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}} \quad (3.18)$$

donde los valores de x_1 son elementos de un *vector de nodos* satisfaciendo la relación $x_i \leq x_{i+1}$. Los parámetros t varían desde t_{\min} a t_{\max} a lo largo de la curva $P(t)$.

Técnicamente, una curva B-spline tiene como definición una función spline polinomial de orden k , porque satisface las siguientes 2 condiciones:

- $P(t)$ es un polinomio de grado $k - 1$ en cada intervalo $x_i \leq t < x_{i+1}$.
- $P(t)$ y su derivada de orden 1, 2, ..., $k-2$ son todas continuas en toda la curva.

Cabe decir que, para los vectores periódicos uniformes, para un orden k , este mismo tiene funciones base dadas por la siguiente expresión,

$$N_{i,k}(t) = N_{i-1,k}(t - 1) = N_{i+1,k}(t + 1) \quad (3.19)$$

es decir, cada función base es traducida a otra.

Para ejemplificar las funciones base B-spline, se pueden apreciar las siguientes figuras:

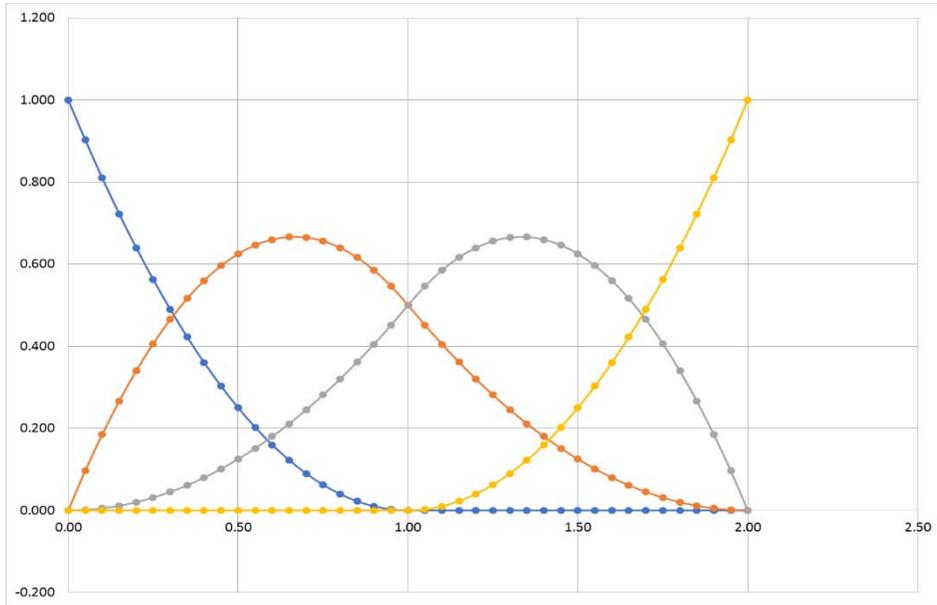


Figura 3.3 Funciones base B-spline para in vector abierto uniforme, $k=3$.

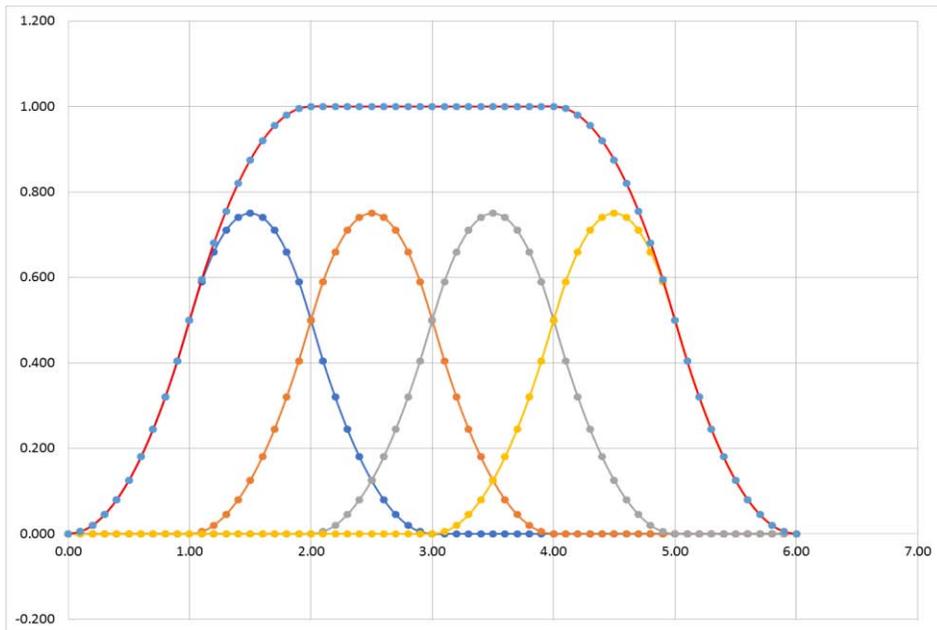


Figura 3.4 Funciones base B-spline para un vector periódico uniforme, $k=3$.

3. Puntos de control

Al determinar el vector de nodos, lo consiguiente se refiere a la determinación del vector de posición B_i , con el fin de establecer la curva B-spline. Los puntos de control se refieren a los vectores compuestos por coordenadas, asimismo, se definen los vértices del polígono. Estos se determinan metódicamente para obtener una aproximación exacta a la curva por aproximar.

3.3. Colocación de puntos

Para un análisis estructural en la teoría de vigas, se pueden utilizar distintos métodos de aproximación de las ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, según sea el caso. En este trabajo se emplea el método de los residuos pesados aplicado al MEF, pues las funciones B-spline se pueden acoplar mejor a esta formulación.

3.3.1. Fundamentos del método

En un estado o elemento continuo, la representación finita de variables en un determinado problema, existe un cierto error o residuo. Dicho esto, la formulación de los residuos pesados (Stasa, 1986), estipula lo siguiente:

$$\varphi(u^a) - p = R_\Omega \quad (3.20)$$

donde φ es un operador diferencial, u^a es una función de aproximación, p es una función conocida y R_Ω es el error residual en el dominio Ω . Además, la función de aproximación está dada de la siguiente manera:

$$u^a = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(x) \quad (3.21)$$

donde $P_i(x)$ es el i -ésimo término de la función base y α_i es el i -ésimo coeficiente desconocido de la función base.

Para este método, se puede forzar a que el error residual sea exactamente igual a cero, dicho de otra manera, se realiza una *colocación de puntos*.

Para cada determinado parámetro a_i se selecciona un punto x_i dentro del mismo dominio Ω en el cual el valor sea 0, esto es:

$$R(x_i = a_i) = 0 \quad (3.22)$$

Por ejemplo, considérese una viga cualquiera, con una longitud L , así como, un módulo de elasticidad E y un momento de inercia I , como se muestra en la figura 3.5.

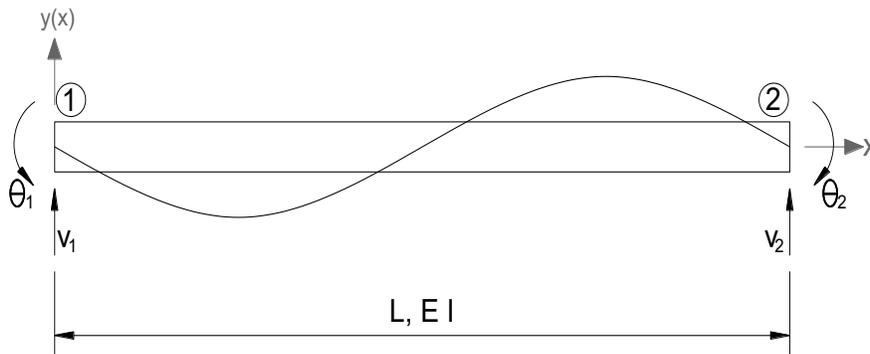


Figura 3.5 Viga con formulación de residuos pesados.

Esta viga tiene en total dos grados de libertad de giro y dos más de desplazamiento vertical. La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de esta viga (Gere y Timoshenko, 1991) es,

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (3.23)$$

donde E es el módulo elástico, I es el momento de inercia, $\frac{d^2}{dx^2}$ es la segunda derivada, y es el desplazamiento en un punto y $M(x)$ es la ecuación del momento flexionante. Además, se puede tener una función de aproximación de desplazamiento de sus nodos $y(x)$, la cual se puede sustituir en la ecuación diferencial de la curva de deflexión, por lo tanto,

$$EI \frac{d^2}{dx^2} y(x) = M(x) \quad (3.24)$$

Además, si la ecuación anterior se despeja, en teoría se igualaría a 0, pero bajo las condiciones de la formulación de residuos pesados, se iguala a un residuo ponderado $R(x)$, teniendo,

$$EI \frac{d^2}{dx^2} y(x) - M(x) = R(x) \quad (3.25)$$

Por ejemplo, si la función de aproximación cual fuese, se desarrolla en la ecuación 3.24, se obtendría:

$$y(x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \rightarrow \text{como función de aproximación} \quad (3.26)$$

donde α es coeficiente desconocido de la función base y $\sin \frac{\pi x}{L}$ es una función base,

$$EI \frac{d^2}{dx^2} \left(\alpha \sin \frac{\pi x}{L} \right) = M(x) \quad (3.27)$$

al realizar la integración correspondiente, se obtiene:

$$EI \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{L} \alpha \cos \frac{\pi x}{L} \right) = M(x) \quad (3.28)$$

$$-EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \alpha \sin \frac{\pi x}{L} = M(x) \quad (3.29)$$

si se despeja la ecuación resultante, se puede aplicar la expresión 3.25, reescribiéndose como:

$$-EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \alpha \sin \frac{\pi x}{L} - M(x) = R(x) \quad (3.30)$$

Ahora bien, si se colocan un punto donde se obligue al residuo a tener un valor de 0, por ejemplo $R \left(x = \frac{L}{2} \right) = 0$, se puede sustituir en la ecuación 3.30 y de este modo se puede calcular el coeficiente desconocido de la función base, siendo la única incógnita en la ecuación.

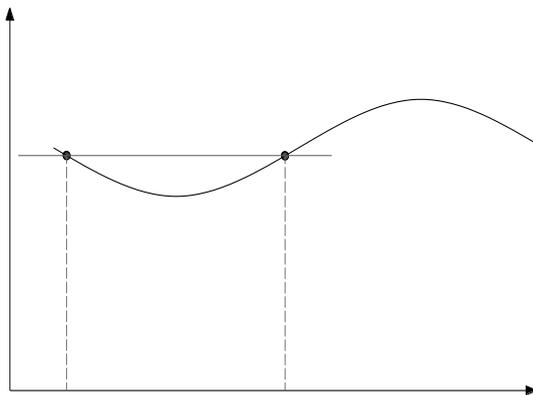


Figura 3.6 Colocación de puntos.

Para la aplicación como tal de las funciones B-spline en vigas, se presentan a continuación las siguientes dos vigas, con base en las expresiones de la formulación de los residuos pesados en el MEF.

3.3.2. Viga tipo 1

Considérese una viga, la cual está simplemente apoyada, con una longitud L , un módulo de elasticidad E y un momento de inercia I . Además, está sometida a un par de momentos M_0 , los cuales están actuando en cada uno de los extremos de la viga, como se muestra en la siguiente figura.

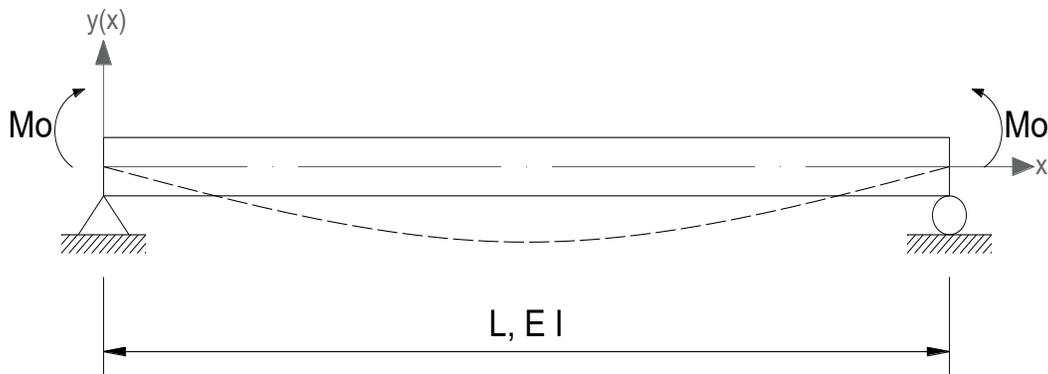


Figura 3.7 Viga tipo 1.

Primordialmente, es necesario calcular las reacciones de la viga con métodos isostáticos para que, con base en la ecuación diferencial de la curva de deflexión, se pueda calcular la solución exacta para la viga.

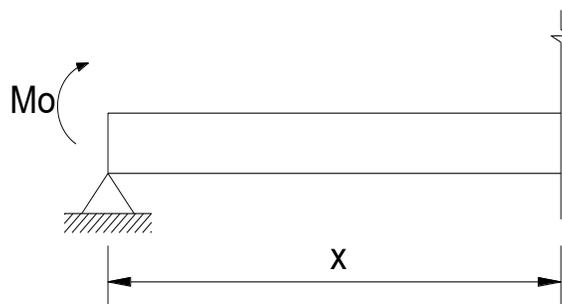


Figura 3.8 Análisis isostático de la viga tipo 1.

Dado que la viga sólo está bajo acciones de momento puro, la sumatoria de momentos, $M(x)$, resulta ser igual al momento actuante, por lo tanto:

$$M(x) = M_0 \quad (3.31)$$

y al sustituirlo en la ecuación 3.24, se obtiene:

$$EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = Mo \quad (3.32)$$

por consiguiente, al realizar las integraciones correspondientes:

$$EI \frac{dy}{dx} = y'(x) = Mo x + C_1 \quad (3.33)$$

$$EI y(x) = Mo \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (3.34)$$

Ahora se aplican las condiciones de frontera, donde el desplazamiento y el giro sean cero, o sea: $y(x = 0) = 0$, y también: $y'(x = \frac{L}{2}) = 0$, las constantes de integración tendrán los siguientes valores:

$$C_1 = -Mo \frac{L}{2} \quad ; \quad C_2 = 0 \quad (3.35)$$

que al sustituir estos valores en la ecuación 3.34, esta se puede reescribir de la siguiente forma, siendo una solución exacta proveniente de un análisis estructural:

$$EI y(x) = Mo \frac{x^2}{2} - Mo \frac{L}{2} x \quad (3.36)$$

Al sustituir estas constantes de integración en la ecuación 3.34, se llega a que la solución exacta de la ecuación diferencial está dada como,

$$\therefore y(x) = \frac{Mo}{2EI} (x^2 - L x) \quad (3.37)$$

Con funciones B-spline se realizará el cálculo de una función de interpolación, la cual se debe de aproximar a una solución exacta, es decir, a la expresión 3.37. Por ende, si se considera un $k = 3$ y un vector de nodos $x = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$, se obtiene la siguiente expresión de interpolación, la cual está en función del parámetro t (ver apéndice A),

$$y(t) = B_1 N_{1,3} + B_2 N_{2,3} + B_3 N_{3,3} \quad (3.38)$$

Asimismo, se hace la consideración de las siguientes funciones base:

$$\begin{aligned} N_{1,3} &= (1 - t)^2 \\ N_{2,3} &= 2t - 2t^2 \\ N_{3,3} &= t^2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

que al sustituirlas en la función de interpolación, se obtiene:

$$y(t) = B_1(1 - t)^2 + B_2(2t - 2t^2) + B_3(t^2) \tag{3.40}$$

Ahora los vectores de posición B_i son constantes a determinar, por lo que se aplican las siguientes condiciones de frontera:

Para $y(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned} B_1(1 - 0)^2 + B_2(2(0) - 2(0)^2) + B_3(0^2) &= 0 \\ B_1(1)^2 &= 0 \\ \therefore B_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Para $y(t = 1) = 0$

$$\begin{aligned} B_1(1 - 1)^2 + B_2(2(1) - 2(1)^2) + B_3(1^2) &= 0 \\ B_3(1) &= 0 \\ \therefore B_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Hasta ahora se ha podido calcular 2 de 3 constantes, por lo que se ve la necesidad de aplicar como tal la formulación con residuos pesado para calcular la constante restante, por consiguiente, se deriva dos veces la expresión 3.40.

$$y'(t) = -2B_1(1 - t) + B_2(2 - 4t) + B_3(2t) \tag{3.43}$$

$$y''(t) = 2B_1 - 4B_2 + 2B_3 \tag{3.44}$$

Este último resultado puede ser sustituido en la expresión 3.25, resultando de la siguiente forma:

$$EI(2B_1 - 4B_2 + 2B_3) - Mo = R(t) \quad (3.45)$$

y si se realiza la colocación de un punto, esto obliga al residuo a tener un valor nulo, por lo tanto, se puede considerar $R\left(t = \frac{1}{2}\right) = 0$, además, también se incluyen los valores nulos de las constantes B_1 y B_3 . La expresión anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$EI(2(0) - 4B_2 + 2(0)) - Mo = 0$$

$$\therefore B_2 = -\frac{Mo}{4EI} \quad (3.46)$$

Una vez que se han determinado las 3 constantes, la función de interpolación con funciones B-spline obtiene la forma,

$$y(t) = (0)(1 - t)^2 + \left(-\frac{Mo}{4EI}\right)(2t - 2t^2) + (0)(t^2) \quad (3.47)$$

$$\therefore y(t) = y(x) = \frac{Mo}{2EI}(t^2 - t) \quad (3.48)$$

Si se observa detenidamente, esta última expresión obtenida y se compara con la solución exacta, tiene la misma composición, es por ello que se puede determinar que se pueden hacer formulación con funciones B-spline aplicadas al MEF.

3.3.3. Viga tipo 2

Considérese una viga, la cual está empotrada en el extremo izquierdo, con una longitud L , asimismo, un módulo de elasticidad E y un momento de inercia I . Además, está sometida a una carga uniformemente distribuida W , como se muestra en la figura 3.9.

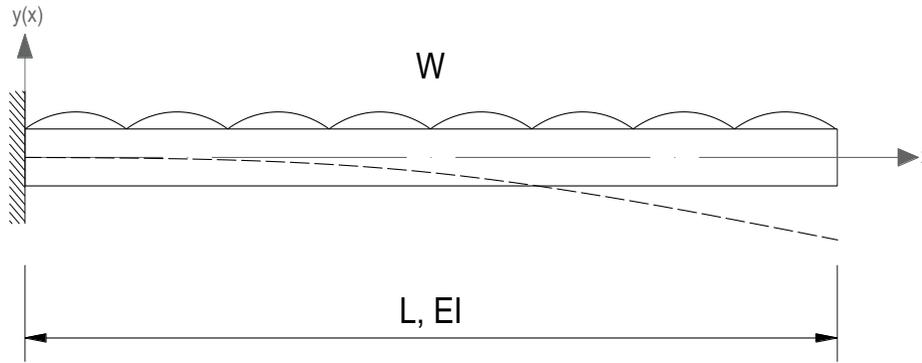


Figura 3.9 Viga tipo 2.

Primeramente, se realiza el análisis estructural con métodos isostáticos para compararlo con la función de interpolación con funciones B-spline, por lo tanto, las reacciones obtenidas son:

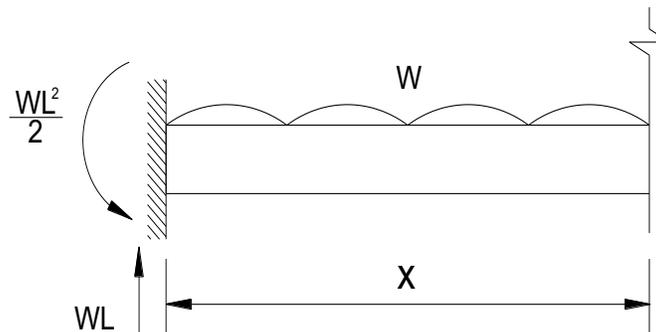


Figura 3.10 Análisis isostático de la viga tipo 2.

$$M_A = \frac{WL^2}{2} \quad ; \quad R_A = WL \quad (3.49)$$

Si se realiza la sumatoria de momentos, $M(x)$, se obtiene:

$$M(x) = \frac{W}{2}(L^2 + 2Lx - x^2) \quad (3.50)$$

o bien, en su forma algebraica:

$$M(x) = R_A x + M_A - \frac{W}{2} x^2 \quad (3.51)$$

y al sustituirlo en la ecuación 3.24, se tiene:

$$EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = R_A x + M_A - \frac{W}{2} x^2 \quad (3.52)$$

por consiguiente, al realizar las integrales correspondientes:

$$EI \frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{R_A}{2} x^2 + M_A x - \frac{W}{6} x^3 + C_1 \quad (3.53)$$

$$EI y(x) = \frac{R_A}{6} x^3 + \frac{M_A}{2} x^2 - \frac{W}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \quad (3.54)$$

y se aplican las condiciones de frontera, donde el desplazamiento y el giro sean cero, o sea: $y(x=0) = 0$, y también: $y'(x=0) = 0$, las constantes de integración tendrán los siguientes valores:

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 0 \quad (3.55)$$

Ahora se sustituyen estos valores de las constantes y las reacciones de las expresiones 3.49 en la ecuación 3.54, esta se puede reescribir de la siguiente forma, siendo una solución exacta proveniente de un análisis estructural:

$$EI y(x) = \frac{WL}{6} x^3 + \frac{WL^2}{2} x^2 - \frac{W}{24} x^4 \quad (3.56)$$

Además, este resultado también puede ser interpretado como una solución con función de interpolación del MEF de formulación numérica, es decir:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$\therefore y(x) = \frac{W}{24} (-x^4 + 4Lx^3 + 6L^2x^2) \quad (3.57)$$

Con funciones B-spline se realiza el cálculo de una función de interpolación, la cual se debe de aproximar a una solución exacta, es decir, a la expresión 3.56. Para este caso, se considerará un $k = 5$ y un vector de nodos $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, por lo que se obtiene la siguiente expresión de interpolación, la cual está en función del parámetro t (ver apéndice A),

$$y(t) = B_1 N_{1,5} + B_2 N_{2,5} + B_3 N_{3,5} + B_4 N_{4,5} + B_5 N_{5,5} \quad (3.58)$$

Asimismo, se hace la consideración de las siguientes funciones base:

$$\begin{aligned}
 N_{1,5} &= (1 - t)^4 \\
 N_{2,5} &= 4t(1 - t)^3 \\
 N_{3,5} &= 4t^2(1 - t)^2 \\
 N_{4,5} &= 4t^3(1 - t) \\
 N_{5,5} &= t^4
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

que al sustituir estas funciones en la función de interpolación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= B_1(1 - t)^4 + B_2[4t(1 - t)^3] + B_3[4t^2(1 - t)^2] \\
 &\quad + B_4[4t^3(1 - t)] + B_5[t^4]
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

y si se realiza su derivada correspondiente:

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= B_1[-4(1 - t)^3] + B_2[4(1 - t)^3 - 12t(1 - t)^2] + B_3[8t(1 - t)^2 + 8t^2(1 - t)] \\
 &\quad + B_4[12t^2(1 - t) - 4t^3] + B_5[4t^3]
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ahora, se pueden aplicar las condiciones de frontera para simplificar términos y las constantes B_i , por lo tanto:

Para $y(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned}
 B_1(1 - 0)^4 + B_2[4(0)(1 - 0)^3] + B_3[4(0)^2(1 - 0)^2] \\
 + B_4[4(0)^3(1 - 0)] + B_5[0^5] = 0
 \end{aligned}$$

$$B_1(1) = 0$$

$$\therefore B_1 = 0 \tag{3.62}$$

Para $y'(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned}
 B_2[4(1 - 0)^3 - 12(0)(1 - 0)^2] + B_3[8(0)(1 - 0)^2 + 8(0)^2(1 - 0)] \\
 + B_4[4(0)^3(1 - 0)] + B_5[0^4] = 0
 \end{aligned}$$

$$B_2(4) = 0$$

$$\therefore B_2 = 0 \tag{3.63}$$

Por lo que las expresiones 3.60 y 3.61 se pueden reescribir como:

$$y(t) = B_3[4t^2(1-t)^2] + B_4[4t^3(1-t)] + B_5[t^4] \quad (3.64)$$

$$y'(t) = B_3[8t(1-t)^2 - 8t^2(1-t)] + B_4[12t^2(1-t) - 4t^3] + B_5[4t^3] \quad (3.65)$$

Por consiguiente, la segunda derivada está dada de la siguiente forma:

$$y''(t) = B_3[8(1-t)^2 - 32t(1-t) + 8t^2] + B_4[24t(1-t) - 24t^2] + B_5[12t^2] \quad (3.66)$$

Como se puede observar, 2 de las 5 constantes ya están determinadas, por consiguiente, se tiene que realizar una colocación de 3 puntos, uno para cada constante faltante, la ecuación 3.66 y 3.50 tienen que ser sustituidas en la expresión 3.25, por lo tanto:

- Colocación de 1er punto:

$$R\left(t = \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$EI \left[B_3 \left[8 \left(1 - \frac{1}{4} \right)^2 - 32 \left(\frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) + 8 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + B_4 \left[24 \left(\frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) - 24 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + B_5 \left[12 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] \right] - \left[\frac{W}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.67)$$

realizando los procedimientos correspondientes, se obtiene:

$$EI \left[-B_3 + 3B_4 + \frac{3}{4}B_5 \right] - \frac{9W}{32} = 0$$

o bien:

$$EI \left[-B_3 + 3B_4 + \frac{3}{4}B_5 \right] = \frac{9W}{32} \quad (3.68)$$

- Colocación de 2do punto:

$$R\left(t = \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$EI \left[B_3 \left[8 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 32 \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] + B_4 \left[24 \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 24 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] + B_5 \left[12 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \right] - \left[\frac{W}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right] = 0 \quad (3.69)$$

realizando los procedimientos correspondientes, se obtiene:

$$EI[-4B_3 + 3B_5] - \frac{W}{8} = 0$$

o bien:

$$EI[-4B_3 + 3B_5] = \frac{W}{8} \quad (3.70)$$

- Colocación de 3er punto:

$$R\left(t = \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$EI \left[B_3 \left[8 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 - 32 \left(\frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] + B_4 \left[24 \left(\frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) - 24 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] + B_5 \left[12 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] \right] - \left[\frac{W}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \right] = 0 \quad (3.71)$$

realizando los procedimientos correspondientes, se obtiene:

$$EI \left[-B_3 - 9B_4 + \frac{27}{4}B_5 \right] - \frac{W}{32} = 0$$

o bien:

$$EI \left[-B_3 - 9B_4 + \frac{27}{4}B_5 \right] = \frac{W}{32} \quad (3.72)$$

Con las expresiones 3.68, 3.70 y 3.72, se puede formar un sistema de ecuaciones, que al resolver dicho sistema se pueden obtener los valores de las constantes B_i , por lo tanto:

$$B_3 = \frac{W}{16EI} \quad ; \quad B_4 = \frac{W}{12EI} \quad ; \quad B_5 = \frac{W}{8EI} \quad (3.73)$$

Consecuentemente, los valores de las 5 constantes obtenidas pueden ser sustituidos en la función de interpolación con funciones B-spline, ecuación 3.60, por lo tanto, se puede reescribir de la siguiente forma,

$$y(t) = \frac{W}{16EI} [4t^2(1-t)^2] + \frac{W}{12EI} [4t^3(1-t)] + \frac{W}{8EI} (t^4)$$

$$\therefore y(t) = y(x) = \frac{W}{EI} \left[\frac{1}{16} [4t^2(1-t)^2] + \frac{1}{12} [4t^3(1-t)] + \frac{1}{8} (t^4) \right] \quad (3.74)$$

Al igual que en la viga tipo 1, si se observa detenidamente, esta última expresión obtenida y se compara con la solución exacta, tiene la misma composición, es por ello que se puede determinar que se pueden hacer formulación con funciones B-spline aplicadas al MEF.

Para ilustrar mejor esto, se puede apreciar la figura 3.11, donde las expresiones 3.56 y 3.74 han sido evaluadas para una viga con 3 m de claro y 3 ton/m, con ello se puede comparar los resultado que arrojan dichas expresiones, una como una solución exacta proporcionada por una análisis estructural y la otra como una solución con funciones B-spline.

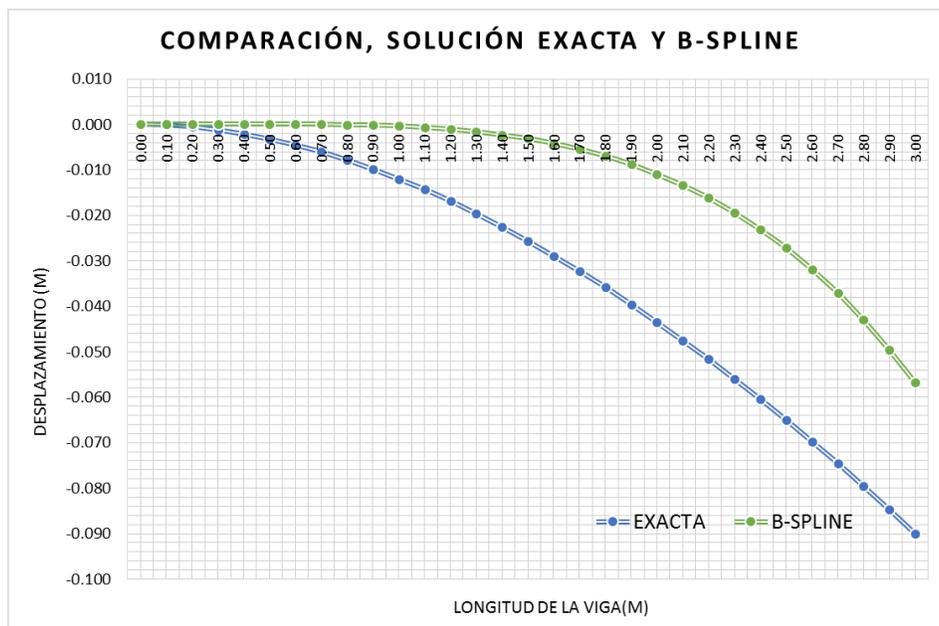


Figura 3.11 Comparación de solución exacta y funciones B-spline.

3.4. Elementos sólidos

Las funciones B-spline no sólo pueden ser aplicables a la teoría de vigas sino también estas pueden emplearse para la formulación de elementos sólidos. Es decir, para elementos barra o tipo armadura, así como también para elementos de esfuerzo y deformación plana.

3.4.1 Elemento armadura de 1er orden

Considérese un elemento tipo barra, como se muestra en la figura 3.12, el cual se encuentra en una sola dimensión. Al ser un elemento lineal, se realiza una formulación de interpolación de primer orden o primer grado, es decir, que el elemento sólo tiene 2 grados de libertad.

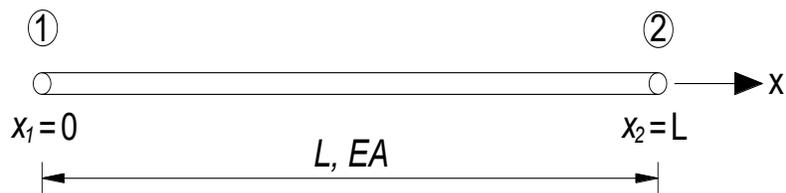


Figura 3.12 Coordenadas globales (x,y) en elemento armadura de 1er orden.

Para iniciar el análisis y poder emplear las funciones B-spline es necesario usar las coordenadas locales del elemento, realizando un cálculo isoparamétrico (ver apéndice A). Por lo que para el elemento anterior, sus coordenadas cambiarán del eje x al eje t , de tal forma que se puede ver en la figura 3.13.

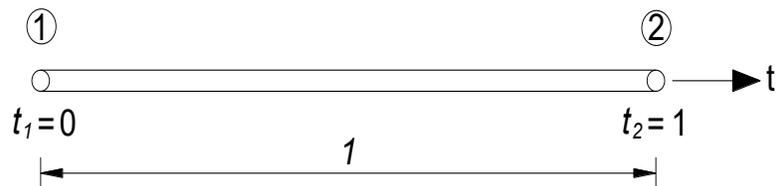


Figura 3.13 Coordenadas (t) en elemento armadura de 1er orden.

Primeramente, con base en la expresión 3.1, se puede considerar una función de interpolación de desplazamientos, $u(x)$, por lo tanto:

$$u(x) = N_{1,2(t)}d_1 + N_{2,2(t)}d_2 \quad (3.75)$$

O bien, una función de interpolación de geometría:

$$x = N_{1,2}(t)x_1 + N_{2,2}(t)x_2 \quad (3.76)$$

donde d_1 y d_2 son los desplazamientos de su correspondiente nodo, x_1 y x_2 son las coordenadas de cada nodo y $N_{i,n}(t)$ son las funciones base con respecto al eje t , las cuales, para este caso, son las siguientes:

$$\begin{aligned} N_{1,2}(t) &= (1 - t) \\ N_{2,2}(t) &= t \end{aligned} \quad (3.77)$$

Al sustituir las funciones base en la ecuación de desplazamiento y de geometría, respectivamente, el resultado es el siguiente:

$$u(x) = (1 - t)d_1 + (t)d_2 \quad (3.78)$$

$$x = (1 - t)x_1 + (t)x_2 \quad (3.79)$$

Una vez determinada la función de desplazamiento y geometría se puede calcular la matriz de la deformación axial del elemento, siendo la primera derivada de la función de interpolación de desplazamientos, ver sección 2.2,

$$\varepsilon_x = \frac{d u(x)}{d x} \quad (3.80)$$

Para un elemento isoparamétrico, es necesario el uso de la “regla de la cadena”, pues la función de desplazamiento y geometría están en función de un eje diferente del eje x , por lo tanto:

$$\frac{d u}{d x} = \frac{d u}{d t} \cdot \frac{d t}{d x} \quad (3.81)$$

Al realizar las respectivas derivadas se obtiene:

$$\frac{d u}{d t} = \frac{d N_i}{d t} \cdot \vec{d} \quad (3.82)$$

$$\frac{d u}{d t} = \frac{d}{d t} [N_{1,2} \quad N_{2,2}] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\frac{d N_{1,2}}{d t} = -1 \quad ; \quad \frac{d N_{2,2}}{d t} = 1 \quad (3.84)$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

análogamente:

$$\frac{dx}{dt} = J = \frac{d}{dt} [(1-t)x_1 + (t)x_2] \quad (3.86)$$

donde J es el Jacobiano de la función,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N_{1,2} & N_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -x_1 + x_2 \quad (3.89)$$

Asimismo, se sabe que x_1 y x_2 tienen como valores 0 y L , respectivamente, por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = -0 + L = L$$

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{1}{L} \quad (3.90)$$

Al sustituir los resultados obtenidos de la regla de la cadena, la matriz de deformación lineal se reescribe de la siguiente manera:

$$[\varepsilon_x] = \frac{1}{J} \left[\frac{d N_i}{dt} \right] \cdot \vec{d}$$

$$\therefore [\varepsilon_x] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

de donde se puede considerar como una matriz de compatibilidad $[B]$:

$$[B] = \frac{1}{J} \left[\frac{d N_i}{dt} \right] \quad (3.92)$$

$$\therefore [B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Una vez determinada la matriz de deformación, con ayuda de la ley constitutiva o matriz constitutiva, $[C]$, se puede calcular la matriz de esfuerzos la cual se expresa de la siguiente manera, ver sección 2.3,

$$[\sigma] = [C] \cdot \varepsilon_x \quad (3.94)$$

Al ser un elemento unidimensional, como se mencionó en el apartado 2.4, la matriz constitutiva se considera como simplemente el módulo de elasticidad, por lo tanto:

$$\therefore [\sigma] = E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Para concluir el análisis de este elemento se procede a calcular la matriz de rigidez, es por ello que la matriz de deformación lineal fue calculada previamente, de donde se puede retomar la matriz de compatibilidad para poder sustituirla en la expresión general de la matriz de rigidez del elemento finito:

$$[k] = \int_{\Omega} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (3.96)$$

donde:

$[B]$ = matriz de compatibilidad;

$[C] = E =$ matriz constitutiva;

$$d\Omega = A \cdot dx \quad ; \quad dx = J \cdot dt \quad \rightarrow \quad dx = L \cdot dt$$

Al sustituir los términos en la expresión general de la matriz de rigidez, obtenemos la siguiente forma de la expresión, teniendo una integral definida por los nodos en las coordenadas naturales, yendo de 0 a 1:

$$[k] = \int_0^1 \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot L \cdot dt \quad (3.97)$$

Se procede a desarrollar la expresión, los cuales se presentan a continuación:

$$[k] = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot dt$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot dt$$

La integral se evalúa en los valores definidos:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_0^1$$

$$\therefore [k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Cabe destacar que la matriz de rigidez siempre debe de ser:

1. Simétrica,
2. Definida positiva,
3. Todos los términos de la diagonal principal son positivos y no nulos, y
4. Es singular, pues la matriz no tiene inversa.

3.4.2. Elemento armadura de 2do orden

Considérese un elemento tipo barra, como en el apartado anterior, con la única diferencia que este tendrá 3 nodos en vez de solo 2, como lo representa la figura 3.14. Por lo que la formulación de interpolación se convierte en una de segundo orden o segundo grado.

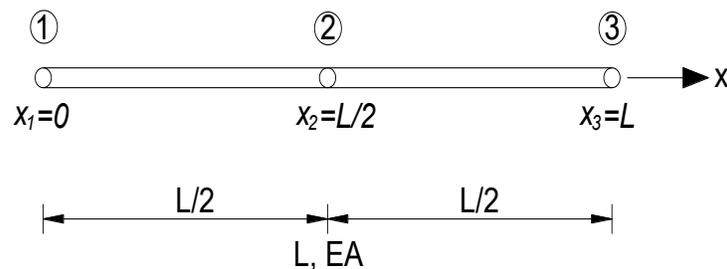


Figura 3.14 Coordenadas globales (x,y) en elemento armadura de 2do orden.

Como en el anterior apartado, para iniciar el análisis y poder emplear las funciones B-spline es necesario usar las coordenadas locales del elemento, realizando un cálculo isoparamétrico (ver apéndice A) Por lo que las coordenadas cambiarán del eje x al eje t , de tal forma que se puede ver en la figura 3.15.

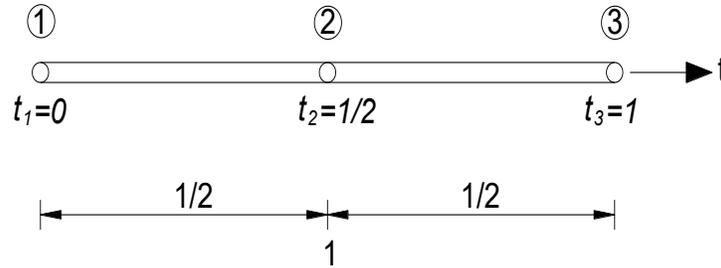


Figura 3.15 Coordenadas (t) en elemento armadura de 2do orden.

Primeramente, la función de interpolación de desplazamientos crecerá un término más, pues tiene un grado de libertad más, por lo tanto:

$$u(x) = N_{1,3}(t)d_1 + N_{2,3}(t)d_2 + N_{3,3}(t)d_3 \quad (3.99)$$

O bien, una función de interpolación de geometría:

$$x = N_{1,3}(t)x_1 + N_{2,3}(t)x_2 + N_{3,3}(t)x_3 \quad (3.100)$$

donde d_n son los desplazamientos de su correspondiente nodo, x_n son las coordenadas de cada nodo y $N_{i,n}(t)$ son las funciones base con respecto al eje t , las cuales, para este caso, son las siguientes:

$$N_{1,3}(t) = (1 - t)^2$$

$$N_{2,3}(t) = 2t(1 - t) = 2t - 2t^2 \quad (3.101)$$

$$N_{3,3}(t) = t^2$$

Al sustituir las funciones base en la ecuación de desplazamiento y de geometría, respectivamente, el resultado es el siguiente:

$$u(x) = (1 - t)^2d_1 + (2t - 2t^2)d_2 + (t^2)d_3 \quad (3.102)$$

$$x = (1 - t)^2x_1 + (2t - 2t^2)x_2 + (t^2)x_3 \quad (3.103)$$

Una vez determinada las funciones de desplazamiento y geometría se puede calcular la matriz de la deformación axial del elemento con la expresión 3.80. Haciendo uso de la “regla de la cadena” se realizan las respectivas derivadas y se obtiene:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dN_i}{dt} \cdot \vec{d} \quad (3.104)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} [N_{1,3} \quad N_{2,3} \quad N_{3,3}] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$\frac{dN_{1,3}}{dt} = 2t - 2 \quad ; \quad \frac{dN_{2,3}}{dt} = 2 - 4t \quad ; \quad \frac{dN_{3,3}}{dt} = 2t \quad (3.106)$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

análogamente:

$$\frac{dx}{dt} = J = \frac{d}{dt} [(1-t)^2 x_1 + (2t - 2t^2) x_2 + (t^2) x_3] \quad (3.108)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [N_{1,3} \quad N_{2,3} \quad N_{3,3}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[(2t - 2)(0) + (2 - 4t) \left(\frac{L}{2}\right) + (2t)(L) \right] \quad (3.110)$$

$$\frac{dx}{dt} = (1 - 2t)(L) + 2t(L) \quad (3.111)$$

$$\frac{dx}{dt} = L - 2tL + 2tL \quad (3.112)$$

$$\frac{dx}{dt} = L \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{L} \quad (3.113)$$

Al sustituir los resultados obtenidos de la regla de la cadena, la matriz de deformación lineal se reescribe de la siguiente manera:

$$[\varepsilon_x] = \frac{1}{J} \left[\frac{dN_i}{dt} \right] \cdot \vec{d} \quad (3.114)$$

$$\therefore [\varepsilon_x] = \frac{1}{L} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

donde la matriz de compatibilidad queda de la siguiente forma, a la cual posteriormente se recurrirá en el cálculo de la matriz de rigidez:

$$[B] = \frac{1}{L} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \quad (3.116)$$

Una vez determinada la matriz de deformación, con ayuda de la ley constitutiva o matriz constitutiva, $[C]$, se puede calcular la matriz de esfuerzos con base en la expresión 3.94. Asimismo, al ser un elemento unidimensional la matriz constitutiva se considera como simplemente el módulo de elasticidad, por lo tanto:

$$\therefore [\sigma] = E \cdot \frac{1}{L} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Para concluir el análisis de este elemento se procede a calcular la matriz de rigidez, donde se puede retomar la matriz de compatibilidad para poder sustituirla en la expresión general de la matriz de rigidez del elemento finito, y se sabe que:

$$[k] = \int_{\Omega} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot d\Omega$$

Por lo tanto, al sustituir los términos en la expresión general de la matriz de rigidez, obtenemos la siguiente forma de la expresión anterior, donde la integral está definida por los nodos en las coordenadas naturales, yendo de 0 a 1:

$$[k] = \int_0^1 \frac{1}{L} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t]^T \cdot E \cdot \frac{1}{L} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \cdot A \cdot L \cdot dt \quad (3.118)$$

Desarrollando la expresión se obtiene:

$$[k] = \int_0^1 \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2t - 2 \\ 2 - 4t \\ 2t \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \cdot A \cdot L \cdot dt$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} 2t - 2 \\ 2 - 4t \\ 2t \end{bmatrix} [2t - 2 \quad 2 - 4t \quad 2t] \cdot dt$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} (2t - 2)^2 & (2t - 2)(2 - 4t) & (2t - 2)(2t) \\ (2 - 4t)(2t - 2) & (2 - 4t)^2 & (2 - 4t)(2t) \\ (2t)(2t - 2) & (2t)(2 - 4t) & (2t)^2 \end{bmatrix} \cdot dt$$

al evaluar la integral en sus valores definidos, se obtiene:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k] = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Y se puede observar que la matriz de rigidez obtenida cumple con las propiedades mencionadas en el apartado anterior.

3.4.3. Elemento rectangular plano de 4 nodos

Considérese un elemento cuadrilátero cualquiera como el de la figura 3.16 como un elemento bidimensional, el cual está definido por sus 4 nodos correspondientes.

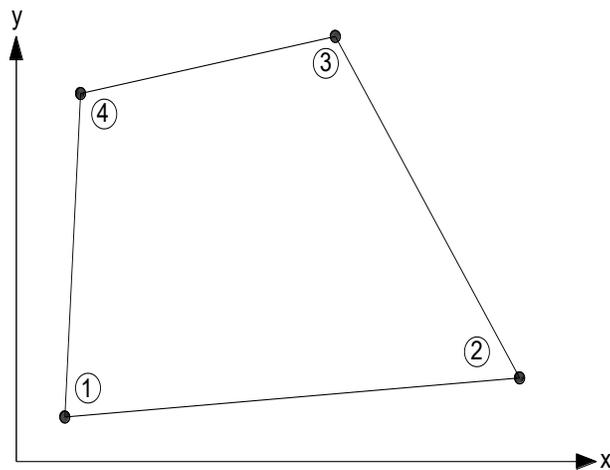


Figura 3.16 Elemento plano en coordenadas cartesianas.

Para poder emplear las funciones B-spline es necesario usar las coordenadas locales del elemento, como en los 2 apartados anteriores, realizando un cálculo

isoparamétrico (ver apéndice A) Por lo que las coordenadas cambian de los ejes (x, y) a los ejes (s, t) , como lo muestra la siguiente figura:

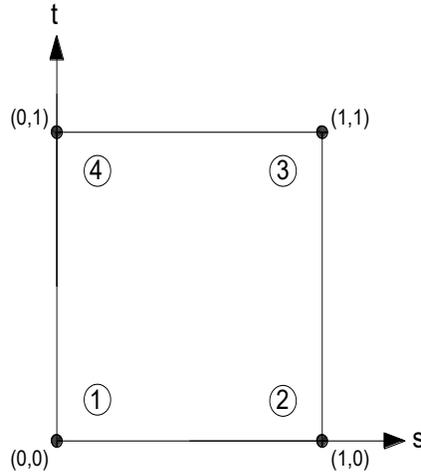


Figura 3.17 Elemento plano en coordenadas (s, t) .

Tal elemento tiene desplazamientos, los cuales están definidos por la función de interpolación \vec{u}_e , asimismo, tiene una geometría que también está definida por las funciones \vec{x} . Estas 2 funciones se muestran a continuación, respectivamente:

$$\vec{u}_e = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(s,t)} = N_{i(s,t)} \cdot \vec{d} \quad (3.120)$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

donde:

$$\vec{u}_e = \begin{cases} u(s, t) = N_{1,4(s,t)} u_1 + N_{2,4(s,t)} u_2 + N_{3,4(s,t)} u_3 + N_{4,4(s,t)} u_4 \\ v(s, t) = N_{1,4(s,t)} v_1 + N_{2,4(s,t)} v_2 + N_{3,4(s,t)} v_3 + N_{4,4(s,t)} v_4 \end{cases} \quad (3.122)$$

$$\vec{x} = \begin{cases} x = N_{1,4(s,t)} x_1 + N_{2,4(s,t)} x_2 + N_{3,4(s,t)} x_3 + N_{4,4(s,t)} x_4 \\ y = N_{1,4(s,t)} y_1 + N_{2,4(s,t)} y_2 + N_{3,4(s,t)} y_3 + N_{4,4(s,t)} y_4 \end{cases} \quad (3.123)$$

En las ecuaciones anteriores, u_n y v_n son los desplazamientos correspondientes a cada nodo, x_n y y_n son las coordenadas de cada nodo y $N_{i,n(t)}$ son las funciones base con respecto a los ejes (s, t) , las cuales, para este caso, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
N_{1,4}(t) &= (1-s)(1-t) \\
N_{2,4}(t) &= s(1-t) \\
N_{3,4}(t) &= s \cdot t \\
N_{4,4}(t) &= t(1-s)
\end{aligned}
\tag{3.124}$$

Una vez determinadas las funciones de desplazamiento y geometría se puede calcular la matriz de deformaciones del elemento. Por ser un elemento en 2 dimensiones, este tiene 2 deformaciones longitudinales y 1 angular, teniendo lo siguiente:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\partial N_i]_{(s,t)} \cdot \vec{d}
\tag{3.125}$$

o bien:

$$[\varepsilon] = [B] \cdot \vec{d}
\tag{3.126}$$

donde la matriz de compatibilidad, con base en la expresión 3.92, está dada de la siguiente forma:

$$[B] = [J]^{-1} [\partial N_i]_{(s,t)}
\tag{3.127}$$

por lo tanto:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}
\tag{3.128}$$

haciendo uso de la “regla de la cadena” se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}
\tag{3.129}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}
\tag{3.130}$$

y análogamente:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}
\tag{3.131}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}
\tag{3.132}$$

El resultado de la regla de la cadena también puede escribirse en forma matricial, como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

de esta expresión podemos obtener el Jacobiano, $[J]$, del elemento, donde:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

análogamente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Si se realizan las derivadas de las funciones base se puede obtener lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial s} N_{1,4} = t - 1 & \frac{\partial}{\partial t} N_{1,4} = s - 1 \\ \frac{\partial}{\partial s} N_{2,4} = 1 - t & \frac{\partial}{\partial t} N_{2,4} = -s \\ \frac{\partial}{\partial s} N_{3,4} = t & \frac{\partial}{\partial t} N_{3,4} = s \\ \frac{\partial}{\partial s} N_{4,4} = -t & \frac{\partial}{\partial t} N_{4,4} = 1 - s \end{array} ; \quad (3.136)$$

Al sustituir todos los valores correspondientes en la matriz de deformación se obtiene:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 & -t & 0 \\ s-1 & 0 & -s & 0 & s & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 & -t \\ 0 & s-1 & 0 & -s & 0 & s & 0 & 1-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

y consecuentemente:

$$[B] = [J]^{-1} \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 & -t & 0 \\ s-1 & 0 & -s & 0 & s & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 & -t \\ 0 & s-1 & 0 & -s & 0 & s & 0 & 1-s \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

Una vez determinada la matriz de deformaciones, se procede al cálculo de la matriz de esfuerzos, que al igual que la de deformación, esta cuenta con 2 esfuerzos normales y 1 esfuerzo cortante, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [C][\varepsilon] \quad (3.139)$$

donde la matriz constitutiva resulta ser la expresión 2.46 o 2.55, según sea el caso, como se explicó en el apartado 2.4, ya que es un problema de 2 dimensiones. Ahora si se sustituye la matriz de deformación, se tendrá la siguiente expresión:

$$[\sigma] = [C][B] \cdot \vec{d} \quad (3.140)$$

o bien:

$$[\sigma] = [C][J]^{-1}[\partial N_i]_{(s,t)} \quad (3.141)$$

Para terminar, se debe de calcular la rigidez del elemento utilizando la ecuación general de la matriz de rigidez y se sabe que:

$$[k] = \int_{\Omega} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot d\Omega$$

donde al ser un elemento de 2 dimensiones, esta se reescribe de la siguiente manera, teniendo integrales definidas:

$$[k] = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (3.142)$$

además:

$$d\Omega = b \cdot dA = t \cdot dx \cdot dy$$

$$dx \cdot dy = [J]^{-1} ds \cdot dt$$

por lo tanto, la expresión 3.142 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$[k] = b \int_0^1 \int_0^1 [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot [J]^{-1} ds \cdot dt \quad (3.143)$$

Por la extensión de la integral y la complejidad del procedimiento se puede aplicar la integración numérica de Gauss (ver apéndice B), por lo tanto:

$$[k] = b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [B(s_i, t_j)]^T [C] [B(s_i, t_j)] [B(s_i, t_j)] \cdot W_i \cdot W_j \quad (3.144)$$

donde s y t son puntos seleccionados y W_α es el factor de peso correspondiente al punto, en consecuencia, la expresión 3.144 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$[K] = [k(s_1, t_1)] + [k(s_2, t_2)] + [k(s_3, t_3)] + [k(s_4, t_4)] \quad (3.145)$$

Capítulo 4. Formulación variacional y numérica del método.

Para el desarrollo del MEF en una problemática, se define mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno, llegando a un tipo de formulación para la aproximación de la solución.

Entre estas formulaciones podemos encontrar la variacional y la numérica, las cuales son las bases para las soluciones aproximadas del método, a continuación, se describen estos 2 tipos de formulaciones.

4.1 Formulación variacional

Los métodos de formulación variacional forman una opción sólida y amplia usada en la formulación de aproximaciones de elementos. Se han constituido herramientas para el análisis de estructuras en la ingeniería, sofisticando estos métodos y aplicándolos por ejemplo en el MEF.

Los principales métodos variacionales que puede ocupar el método de los elementos finitos se encuentran los principios del trabajo virtual y la energía potencial mínima, así como los principios duales a estos mismos, que a continuación se expresan.

4.1.1. Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual (Washizu, 1975; Gallagher, 1975) se deriva de las ecuaciones de equilibrio explicadas en la sección 2.3. De este modo, si se considera un cuerpo completamente en equilibrio, sometido a determinadas fuerzas de cuerpo y condiciones de frontera, de este modo se puede denotar las componentes de esfuerzo σ_x , σ_y y σ_z (ecuaciones 2.19, 2.20 y 2.21, respectivamente) y τ_{xy} , por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x = 0 ; \dots ; \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + q_z = 0 \text{ en } V \quad (4.1)$$

y,

$$t_x - \bar{t}_x = 0 ; \dots ; t_z - \bar{t}_z = 0 \quad \text{sobre } S_1 \quad (4.2)$$

Se supone que el cuerpo ahora está obligado a tener desplazamientos virtuales infinitesimales, δ_u , δ_v y δ_w , a partir de esta constitución de equilibrio, por lo que se puede tener:

$$- \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x \right) \delta_u + (\dots) \delta_v + \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + q_z \right) \delta_w \right] dV + \iint_{S_1} [(t_x - q_x) \delta_u + (\dots) \delta_v + (t_z - q_z) \delta_w] dS \quad (4.3)$$

donde $dV = dx dy dz$ y dS son el volumen elemental y el área elemental de la superficie del cuerpo, respectivamente.

Ahora bien, se toma un conjunto de desplazamientos virtuales siempre que las condiciones de contorno geométricas en S_2 se satisfacen *a priori*. En otras palabras, se escogen de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\delta_u = 0 ; \delta_v = 0 ; \delta_w = 0 \quad \text{sobre } S_2 \quad (4.4)$$

Además, mediante el uso de las siguientes relaciones geométricas

$$dy dz = \pm l dS ; dz dx = \pm m dS ; dx dy = \pm n dS \quad (4.5)$$

las cuales se mantienen en el contorno y mediante integración por partes, se puede obtener la siguiente expresión:

$$- \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta_u dx dy dz = \iint_S \sigma_x l \delta_u dS - \iiint_V \sigma_x \frac{\partial \delta_u}{\partial x} dx dy dz \quad (4.6)$$

de tal modo que la ecuación 4.3 se puede reescribir como:

$$- \iiint_V \left(\sigma_x \delta_{\varepsilon_x} + \sigma_y \delta_{\varepsilon_y} + \sigma_z \delta_{\varepsilon_z} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right) - \iiint_V (q_x \delta_u + q_y \delta_v + q_z \delta_w) dV - \iint_{S_1} (\bar{t}_x \delta_u + \bar{t}_y \delta_v + \bar{t}_z \delta_w) dS = 0 \quad (4.7)$$

donde:

$$\delta_{\varepsilon_x} = \frac{\partial \delta_u}{\partial x} ; \delta_{\varepsilon_y} = \frac{\partial \delta_v}{\partial y} ; \delta_{\varepsilon_z} = \frac{\partial \delta_w}{\partial z} ; \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta_v}{\partial x} + \frac{\partial \delta_u}{\partial y} ; \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial \delta_w}{\partial y} + \frac{\partial \delta_v}{\partial z} ;$$

$$\delta\gamma_{zx} = \frac{\partial\delta u}{\partial z} + \frac{\partial\delta w}{\partial x} \quad (4.8)$$

Este principio se aplica para un desplazamiento virtual infinitesimal arbitrario que satisface las condiciones de contorno geométricas ya determinadas. Es decir, el principio de trabajo virtual estipula que:

“Si un cuerpo está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas y permanece en equilibrio al someter al cuerpo a un pequeño desplazamiento virtual, el trabajo virtual realizado por el sistema de fuerzas externas actuando sobre el cuerpo es igual al trabajo de deformación virtual realizado por las fuerzas internas”.

4.1.2. Principio del trabajo virtual complementario

Dentro del principio del trabajo virtual y las pequeñas deformaciones se puede formular un principio dual al principio del trabajo virtual. Para ello se considera un cuerpo sólido en equilibrio, sometido a un sistema de fuerzas y condiciones de frontera. Seguido a ello, se denota las componentes de deformación y desplazamiento por $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}$ y u, v, w , respectivamente, por lo que se tendrá lo siguiente:

$$\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \dots, \quad \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ en } V \quad (4.9)$$

$$u - \bar{u} = 0; \dots; w - \bar{w} = 0 \text{ sobre } S_2 \quad (4.10)$$

Ahora, se supone que el cuerpo toma un conjunto arbitrario de variaciones virtuales infinitesimales de las componentes de esfuerzo, $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}$, de la configuración de equilibrio, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\left(\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta\sigma_x + \left(\varepsilon_y - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta\sigma_y + \dots + \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta\tau_{xy} \right] dV + \\ \iint_{S_2} \left[(u - \bar{u})\delta t_x + (v - \bar{v})\delta t_y + (w - \bar{w})\delta t_z \right] dS = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

y por la integración por partes, esta expresión puede transformarse de la siguiente manera:

$$\iiint_V \left[\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \dots + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} + \left(\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial z} \right) u + (\dots)v + (\dots)w \right] dV -$$

$$\iint_{S_1} [u\delta t_x + v\delta t_y + w\delta t_z]dS - \iint_{S_2} [\bar{u}\delta t_x + \bar{v}\delta t_y + \bar{w}\delta t_z]dS = 0 \quad (4.12)$$

Consecuentemente, se escoge un conjunto arbitrario de esfuerzos virtuales tales que las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno mecánicas no se satisfacen *a priori*, además de que las siguientes ecuaciones sean completamente satisfechas:

$$\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

en el interior del cuerpo V y:

$$\delta t_x = \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m + \delta \tau_{xz} n = 0 \quad (4.16)$$

$$\delta t_y = \delta \tau_{xy} l + \delta \sigma_y m + \delta \tau_{yz} n = 0 \quad (4.17)$$

$$\delta t_z = \delta \tau_{xz} l + \delta \tau_{yz} m + \delta \sigma_z n = 0 \quad (4.18)$$

sobre S_1 . Con base en las ecuaciones anteriores, la ecuación 4.12 se puede reducir como:

$$\iiint_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}) dV - \iint_{S_2} [\bar{u}\delta t_x + \bar{v}\delta t_y + \bar{w}\delta t_z]dS = 0 \quad (4.19)$$

A la ecuación 4.19 se le conoce como el principio del trabajo virtual complementario (Washizu, 1975). Este principio es completamente valido para variaciones de esfuerzo virtual infinitesimal que satisfagan las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno mecánicas. Con ello se puede apreciar que el principio del trabajo virtual complementario tiene una forma que complementa al principio del trabajo virtual, valga la redundancia, expresado por la ecuación 4.7.

El principio de trabajo virtual complementario estipula que:

“En una estructura con un campo de movimientos y deformaciones compatibles, el trabajo externo complementario de un campo arbitrario de fuerzas virtuales sobre el campo real de movimientos es igual al trabajo interno complementario de los correspondientes esfuerzos virtuales sobre el campo real de deformaciones”.

4.1.3. Principio de la energía potencial mínima

Dentro de los principios variacionales en la teoría de pequeñas deformaciones de elasticidad se puede encontrar el principio de la energía potencial mínima (Washizu, 1975; Pian y Wu, 2006; Retama, 2010).

Este principio se deriva del principio del trabajo virtual mencionado en el apartado 4.1. Asimismo, tiene una limitante, ya que ahora, este principio está restringido a meramente cuerpos elásticos debido a que los desplazamientos están relacionados con esfuerzos por medio de una ley constitutiva, mientras que el principio del trabajo virtual, los desplazamientos virtuales son válidos para cualquier ley constitutiva. El principio de la energía potencial mínima es un principio de un solo campo y se denota como:

$$\Pi(u) = \int_V [\sigma^T[\varepsilon] - u^T b_v] dV - \int_{S_2} u^T \bar{t} dS \quad (4.20)$$

Con base en la expresión 4.19, el principio establece que:

“Entre todos los desplazamientos admisibles u que satisfacen las condiciones de contorno esenciales \bar{u} , definidas en S_1 , los desplazamientos reales hacen que la energía potencial total sea mínima”.

La aplicación de este principio variacional a la solución de problemas de la mecánica de sólidos, da como resultado métodos de equilibrio. Un ejemplo de este tipo de métodos es el de las Rigideces.

4.1.4. Principio de la energía potencial mínima complementaria

Otro principio variacional, también derivado del principio del trabajo virtual complementario, se encuentra el principio de la energía potencial mínima complementaria (Washizu, 1975; Retama, 2010), que como su adjetivo lo determina, complementa al principio de la energía potencial mínima. Este principio complementario es derivado de la relación esfuerzo-deformación, cuando se satisfacen las condiciones de equilibrio para las tensiones σ y un sistema de carga \bar{t} a lo largo de la frontera del elemento, por lo que se tiene la siguiente expresión:

$$\Pi(\sigma) = \int_V [\varepsilon^T[\sigma]]dV - \int_{S_1} [t^T \bar{u}]dS \quad (4.21)$$

Con base en la expresión 4.19, el principio establece que:

“Entre todos los conjuntos de esfuerzos admisibles σ , que satisfacen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera naturales \bar{t} , definidos sobre S_2 , aquel que corresponde a la configuración de compatibilidad, es el estado de esfuerzos que hace mínima la energía potencial complementaria, definida por la ecuación 4.21”

La aplicación de este principio variacional a la solución de problemas de la mecánica de sólidos, da como resultado métodos de compatibilidad. El método de las flexibilidades es uno de ellos.

4.2. Formulación numérica

La formulación numérica o, en algunos casos también nombrado como *método directo* dentro de los elementos finitos, se obtiene por la composición directa de las ecuaciones de elasticidad expresadas en el capítulo 2.

Este tipo de formulación es muy útil para poder observar las relaciones fundamentales entre la aproximación del MEF y la estructura real. La limitante de esta formulación es que sólo se puede aplicar para estructuras simples, pues aplicarlo a estructuras más complejas es muy tardado y laborioso e incluso, en algunos casos, resulta ser imposible resolver. Además, es necesario mencionar que cuando la problemática sea complicada de resolver dada por una geometría en las

coordenadas cartesianas, podemos recurrir a los elementos lagrangianos o isoparamétrico, los cuales tiene coordenadas naturales.

Con lo anterior se puede simplificar el procedimiento, pues se realiza una interpolación entre un mundo real (coordenadas cartesianas) y un mundo padre (coordenadas naturales), finalizando el cálculo de la matriz de rigidez con una integración numérica de Gauss. A continuación, se expresa la formulación numérica del método para las estructuras elementales de MEF.

4.2.1. Elemento armadura de 1er orden

Se considera un elemento finito tipo barra, como el que se muestra en la figura 4.1, el cual se encuentra en una sola dimensión. Este elemento resulta ser el problema más simple con un análisis con el MEF, pues sólo tiene 2 nodos y trabaja simplemente a compresión y tensión. Al ser un elemento lineal, se realiza una formulación de interpolación de primer orden o primer grado.

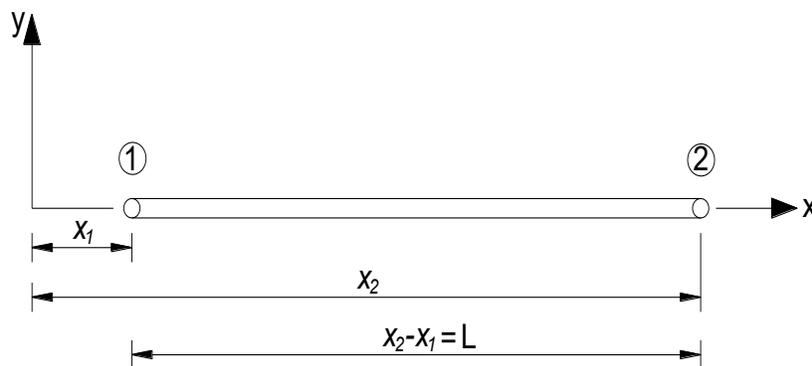


Figura 4.1 Elemento unidimensional de 1er orden.

Para iniciar el análisis del elemento se procede a calcular y aproximar los desplazamientos y, al considerarse un elemento unidimensional, se puede utilizar $u(x)$ como una función de interpolación de desplazamiento, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$u(x) = a_0 + a_1x \quad (4.22)$$

este polinomio tiene esta forma, pues las constantes a_0 y a_1 , representa los 2 grados de libertad de la estructura. Asimismo, puede transformarse en forma matricial, el cual se reescribe de la siguiente manera:

$$u(x) = [1 \quad x] \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

De primera instancia, se puede considerar:

$$[1 \quad x] = P(x) \quad ; \quad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \vec{a} \quad (4.24)$$

$$\therefore u(x) = P(x) \cdot \vec{a} \quad (4.25)$$

Ahora, si se evalúa la función $u(x)$ en x_1 y x_2 , obtendríamos las siguientes ecuaciones:

$$u(x = x_1) = d_1 = a_0 + a_1 x_1 \quad (4.26)$$

$$u(x = x_2) = d_2 = a_0 + a_1 x_2 \quad (4.27)$$

donde la función $u(x)$ evaluada corresponde a los desplazamientos del nodo 1 y 2, respectivamente, lo cual deja la posibilidad de formar una matriz:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

para simplificar los términos se puede hacer las siguientes consideraciones:

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\vec{d} = [M] \cdot \vec{a} \quad (4.31)$$

de donde se pueden despejar las constantes “a” de la ecuación anterior:

$$\vec{a} = [M]^{-1} \cdot \vec{d} \quad (4.32)$$

Posteriormente se procede a sustituirlo en la función $u(x)$:

$$u(x) = P(x) \cdot [M]^{-1} \cdot \vec{d} \quad (4.33)$$

Consecuentemente, se sustituye cada término reducido por sus respectivas matrices:

$$u(x) = [1 \quad x] \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

de donde se desarrollan las funciones de interpolación para $u(x)$:

$$u(x) = \frac{1}{L} [(x_2 - x) \quad (x - x_1)] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Una vez establecida la función de desplazamiento se procede a definir las funciones de forma o funciones de interpolación, N , con base a la ecuación 4.35, por lo tanto:

$$N(x) = [n_1 \quad n_2] \quad ; \quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{L}(x_2 - x) \\ n_2 &= \frac{1}{L}(x - x_1) \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde las funciones de forma pueden sustituirse en la función de desplazamiento, por lo que la expresión $u(x)$ puede reescribirse de la siguiente manera:

$$u(x) = n_1 d_1 + n_2 d_2 \quad (4.37)$$

o bien:

$$u(x) = [n_1 \quad n_2] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Es importante mencionar las propiedades de las funciones de forma, las cuales se enuncian a continuación.

1. La suma de todas las funciones de forma siempre deber ser igual al valor de 1, la siguiente expresión representa esta propiedad:

$$\sum N_i = 1 \quad (4.39)$$

Por ejemplo, para el elemento de primer orden sería:

$$\sum N_i = n_1 + n_2 = 1$$

$$\therefore n_1 + n_2 = \frac{1}{L}(x_2 - x) + \frac{1}{L}(x - x_1) = \frac{1}{L}(x - x + x_2 - x_1)$$

donde se sabe que $x_2 - x_1$ es igual a L , por lo tanto:

$$\frac{1}{L}(L) = 1$$

con ello se comprueba esta propiedad.

2. Las funciones de forma siempre tienen el valor definido unitario en su nodo correspondiente, por lo que en los demás nodos su valor es nulo. La siguiente expresión representa esta propiedad:

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \tag{4.40}$$

donde δ_{ij} representa la Delta de Kronecker con la propiedad:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

Por ejemplo, para el elemento de primer orden sería:

Para el primer nodo se sabe que $x_1 = 0$ y $x_2 = L$

$$n_1 = \frac{1}{L}(x_2 - x) = \frac{1}{L}(L - x) = \frac{1}{L}(L - 0) = 1$$

$$n_2 = \frac{1}{L}(x - 0) = \frac{1}{L}(x) = \frac{1}{L}(0) = 0$$

y gráficamente se tiene:

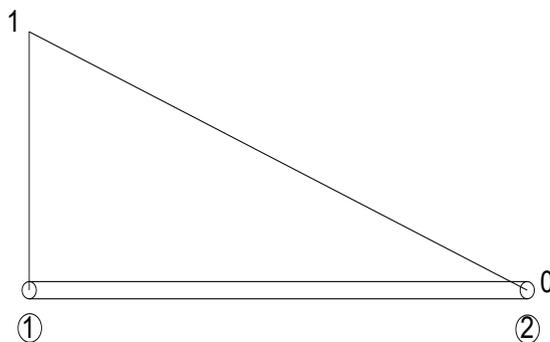


Figura 4.2 Función de forma del nodo 1.

Para el segundo nodo se sabe igual que $x_1 = 0$ y $x_2 = L$

$$n_1 = \frac{1}{L}(x_2 - x) = \frac{1}{L}(L - x) = \frac{1}{L}(L - L) = 0$$

$$n_2 = \frac{1}{L}(x - 0) = \frac{1}{L}(x) = \frac{1}{L}(L) = 1$$

y gráficamente se tiene:

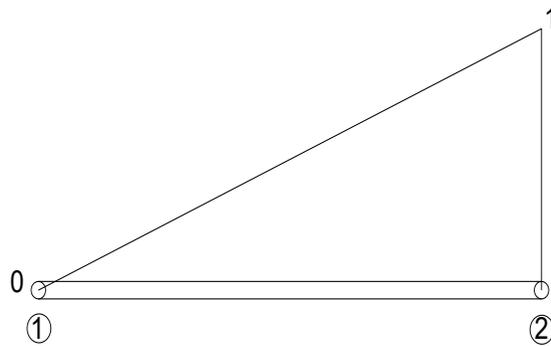


Figura 4.3 Función de forma del nodo 2.

con esto, se comprueba esta segunda propiedad de las funciones de forma.

3. Primera derivada

La suma de todas las primeras derivadas de las funciones de forma, debe ser igual a cero; esto es,

$$\sum N_{i,x} = 0$$

Lo que garantiza que las funciones permitan describir un movimiento de cuerpo rígido del sólido.

Una vez mencionadas las propiedades de las funciones de forma, se continuará con el procedimiento del análisis, con base en la expresión 4.38, se procede al cálculo de la deformación axial del elemento, la cual se basa en la expresión de deformación siguiente:

$$\varepsilon_x = \frac{d_2 - d_1}{L} \quad (4.41)$$

o bien:

$$\varepsilon_x = \frac{d u(x)}{dx} \quad (4.42)$$

Dado que la deformación axial también puede ser la derivada de la función de desplazamiento aproximada con respecto a “x”, se puede deducir que la derivada de la matriz de función de forma por la matriz de desplazamientos resulta ser la deformación, esto es

$$[\varepsilon_x] = \frac{d u(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [n_1 \quad n_2] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

y realizando el procedimiento correspondiente, se obtiene

$$\frac{d n_1}{dx} = \frac{1}{L} [-1] \quad ; \quad \frac{d n_2}{dx} = \frac{1}{L} [1] \quad (4.44)$$

$$\therefore [\varepsilon_x] = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

de donde se puede considerar una matriz de compatibilidad, [B], expresada como:

$$[B] = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad (4.46)$$

reduciendo la matriz de deformación de la siguiente forma:

$$[\varepsilon_x] = [B] \cdot \vec{d} \quad (4.47)$$

Una vez determinada la matriz de deformación, con ayuda de la ley constitutiva o matriz constitutiva, [C], se puede calcular la matriz de esfuerzos la cual se expresa de la siguiente manera:

$$[\sigma] = [C] \cdot \varepsilon_x \quad (4.48)$$

Como se explicó en el apartado 2.4, por tratarse de un elemento unidimensional, la matriz constitutiva se reduce simplemente al módulo elástico del material del elemento, por lo que al sustituir en la matriz de esfuerzos, esta se reescribiría como se muestra a continuación,

$$[\sigma] = E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Para finalizar el análisis del elemento unidimensional de dos nodos se procede a calcular la matriz de rigidez, es por ello que la matriz de deformación lineal fue calculada previamente, de donde se puede retomar la matriz de compatibilidad para poder sustituirla en la expresión general de la matriz de rigidez del elemento finito:

$$[k] = \int_v [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dv \quad (4.50)$$

donde:

$[B]$ = matriz de compatibilidad;

$[C] = E$ = matriz constitutiva;

$dv = A \cdot dx$ = área de la sección transversal por un diferencial de x

Al sustituir los términos en la expresión general de la matriz de rigidez, se obtiene la siguiente expresión, teniendo en consideración que la integral está definida por los nodos del elemento finito lineal, x_1 y x_2 :

$$[k] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \right]^T \cdot E \cdot \left[\frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot A dx \quad (4.51)$$

al desarrollar la expresión, se obtienen los siguientes cálculos:

$$[k] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A dx \quad (4.52)$$

$$[k] = \frac{EA}{L^2} \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot dx \quad (4.53)$$

y al evaluar la integral definida con los valores correspondiente, esta obtiene la siguiente forma:

$$[k] = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} x & -x \\ -x & x \end{bmatrix}_{x_1}^{x_2} \quad (4.54)$$

$$[k] = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & -x_2 + x_1 \\ -x_2 + x_1 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

de donde se sabe que:

$$x_2 - x_1 = L \quad (4.56)$$

por lo tanto, al sustituir esta condición en la matriz de rigidez, se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$[k] = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$[k] = \frac{EA}{L^2} \cdot L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

obteniendo finalmente como matriz de rigidez del elemento finito unidimensional la siguiente expresión:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Como ya se mencionó en el capítulo 3, la matriz de rigidez siempre debe de ser:

1. Simétrica,
2. Definida positivamente,
3. Todos los términos de la diagonal principal son positivos y no nulos, y
4. Es singular, pues la matriz no tiene inversa.

4.2.2. Elemento armadura de 2do orden

Ahora, se considera un elemento finito unidimensional con 3 nodos, al igual que en el apartado anterior, tal elemento tipo barra que de igual forma trabaja sólo a compresión y tensión, figura 4.4. Para este elemento lineal, se realizará una formulación numérica con interpolación de segundo orden o segundo grado.

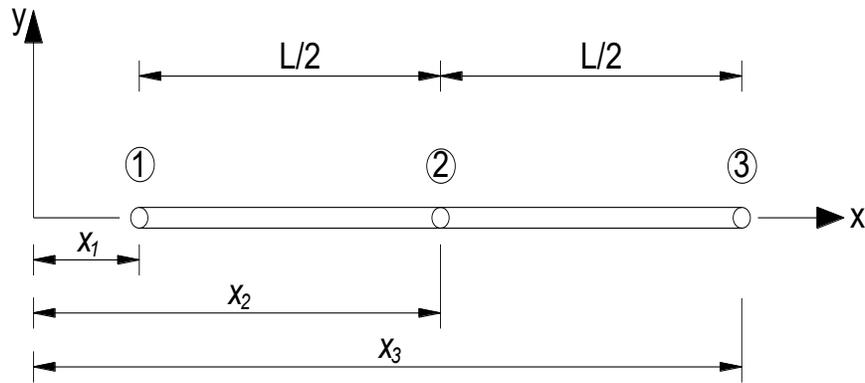


Figura 4.4 Elemento unidimensional de 2do orden.

Al igual que para el análisis del elemento de dos nodos, primeramente, se procede al cálculo de la interpolación de los desplazamientos y, al considerar el elemento unidimensional de 3 nodos, se puede utilizar $u(x)$ como la función de interpolación de desplazamientos, que ahora se expresa de la siguiente forma:

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4.60)$$

donde las constantes a_0 , a_1 y a_2 representan los 3 grados de libertad de la estructura. Ahora, la ecuación 4.60 se transforma en forma matricial, reescribiéndola de la siguiente manera:

$$u(x) = [1 \quad x \quad x^2] \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

y haciendo el mismo procedimiento del apartado anterior, se puede considerar:

$$[1 \quad x \quad x^2] = P(x) \quad ; \quad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \vec{a} \quad (4.62)$$

$$\therefore u(x) = P(x) \cdot \vec{a} \quad (4.63)$$

Ahora, si la función $u(x)$ se evalúa en x_1 , x_2 y x_3 , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$u(x = x_1) = d_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \quad (4.64)$$

$$u(x = x_2) = d_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 \quad (4.65)$$

$$u(x = x_3) = d_3 = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 \quad (4.66)$$

donde la función $u(x)$ evaluada corresponde a los desplazamientos del nodo 1, 2 y 3, respectivamente, lo cual deja la posibilidad de formar una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Para simplificar la matriz, se hacen las siguientes consideraciones:

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

por lo tanto, se reescribirá como:

$$\vec{d} = [M] \cdot \vec{a} \quad (4.70)$$

de donde se pueden despejar las constantes “a” de la ecuación anterior:

$$\vec{a} = [M]^{-1} \cdot \vec{d} \quad (4.71)$$

Posteriormente se procede a sustituirlo en la función $u(x)$:

$$u(x) = P(x) \cdot [M]^{-1} \cdot \vec{d} \quad (4.72)$$

Ahora se puede sustituir cada término reducido por sus respectivas matrices:

$$u(x) = [1 \quad x \quad x^2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

consecuentemente se puede desarrollar la función de desplazamiento aproximado $u(x)$, como se muestra a continuación,

$$u(x) = \left[1 + \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 3 \right) \quad \frac{4x}{L} \left(-\frac{x}{L} + 1 \right) \quad \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \right] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

de donde se pueden definir las funciones de forma, N , con base a la ecuación anterior:

$$N(x) = [n_1 \quad n_2 \quad n_3] ; \quad \begin{aligned} n_1 &= 1 + \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 3 \right) \\ n_2 &= \frac{4x}{L} \left(-\frac{x}{L} + 1 \right) \\ n_3 &= \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

donde las funciones de forma pueden sustituirse en la función de desplazamiento, por lo que la expresión $u(x)$ puede reescribirse de la siguiente manera:

$$u(x) = n_1 d_1 + n_2 d_2 + n_3 d_3 \quad (4.76)$$

o bien:

$$u(x) = [n_1 \quad n_2 \quad n_3] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Una vez definida la expresión anterior, se procede al cálculo de la matriz de la deformación del elemento, la cual se basa en la expresión 4.42:

$$[\varepsilon_x] = \frac{d u(x)}{dx} = [B] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

y consecuentemente, se derivan las funciones de forma con los procedimientos correspondientes:

$$\frac{d u(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [n_1 \quad n_2 \quad n_3] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\frac{d n_1}{dx} = \frac{d \left(1 + \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 3 \right) \right)}{dx} = \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad (4.80)$$

$$\frac{d n_2}{dx} = \frac{d \frac{4x}{L} \left(\frac{-x}{L} + 1 \right)}{dx} = -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \quad (4.81)$$

$$\frac{d n_3}{dx} = \frac{d \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)}{dx} = \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \quad (4.82)$$

Ahora, las derivadas de las funciones de forma se sustituyen en la expresión correspondiente a la matriz de deformación:

$$[\varepsilon_x] = \begin{bmatrix} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} & \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

donde se considera a la matriz de compatibilidad, $[B]$, como:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} & \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

resultando finalmente como la matriz de deformación:

$$[\varepsilon_x] = [B] \cdot \vec{d} \quad (4.85)$$

Una vez determinada la matriz de deformación, con ayuda de la matriz constitutiva y con base en la ecuación 4.48, se puede calcular la matriz de esfuerzos.

Como se explicó en el apartado 2.4, por tratarse de un elemento unidimensional, matriz constitutiva se reduce simplemente al módulo elástico del material del elemento, por lo que, al sustituir en la matriz de esfuerzos, esta se reescribiría como se muestra a continuación:

$$[\sigma] = E \cdot \begin{bmatrix} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} & \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Para finalizar el análisis se procede a calcular la matriz de rigidez, donde la matriz de compatibilidad será sustituida en la expresión general de la matriz de rigidez del elemento finito:

$$[k] = \int_v [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dv \quad (4.87)$$

que al sustituir los términos correspondientes en la expresión general de la matriz de rigidez, se obtiene la siguiente forma de la expresión, teniendo una integral definida por los nodos del elemento finito lineal, x_1 y x_3 :

$$[k] = \int_{x_1}^{x_3} \left[\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right]^T \cdot E \cdot \left[\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right] \cdot Adx \quad (4.88)$$

Consecuentemente se procede a desarrollar la expresión:

$$[k] = \int_{x_1}^{x_3} \begin{bmatrix} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \\ -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \\ \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \left[\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right] \cdot Adx \quad (4.89)$$

$$[k] = EA \int_{x_1}^{x_3} \begin{bmatrix} \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)^2 & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)\left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right) \\ \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right) & \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)^2 & \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right) \\ \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right) & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)\left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot dx \quad (4.90)$$

y al evaluar la integral definida con los valores correspondiente, se obtiene:

$$[k] = EA \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)^2 & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)\left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right) \\ \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right) & \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)^2 & \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right) \\ \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right) & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)\left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)^2 \end{array} \right]_{x_1}^{x_3} \quad (4.91)$$

$$[k] = EA \begin{bmatrix} \frac{7}{3L} & -\frac{8}{3L} & \frac{1}{3L} \\ -\frac{8}{3L} & \frac{16}{3L} & -\frac{8}{3L} \\ \frac{1}{3L} & -\frac{8}{3L} & \frac{7}{3L} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

obteniendo finalmente como matriz de rigidez del elemento finito unidimensional de 3 nodos la siguiente expresión:

$$[k] = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Como se puede observar, esta matriz cumple con las condiciones ya explicadas en el apartado anterior.

4.2.3. Elemento triangular

Considérese un triángulo como el de la figura 4.5 como un elemento bidimensional de 3 nodos, los cuales están definidos en la misma figura. Es importante mencionar que este elemento finito, también conocido como de deformación constante, es el más simple en el MEF para análisis en el plano. De esta forma se puede determinar las funciones de desplazamiento que están dadas de la siguiente manera:

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (4.94)$$

$$v(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (4.95)$$

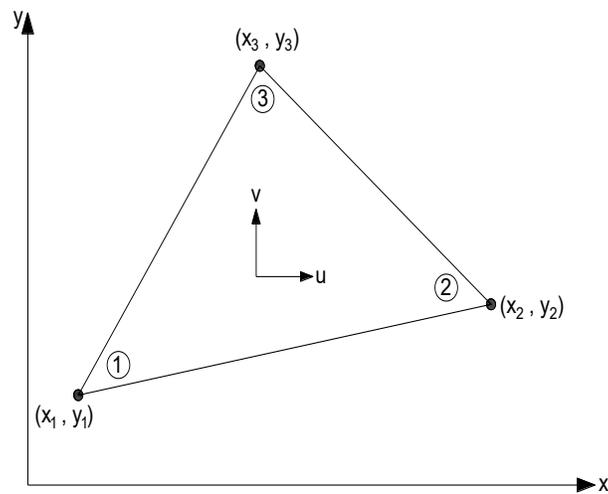


Figura 4.5 Elemento bidimensional de 3 nodos.

Asimismo, los desplazamientos horizontales u y los desplazamientos verticales v están en función de (x, y) y, a su vez, afectados por las funciones de forma N :

$$u(x, y) = n_1u_1 + n_2u_2 + n_3u_3 \quad (4.96)$$

$$v(x, y) = n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 \quad (4.97)$$

que reescrito de forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Con base en la expresión anterior, se puede denotar un vector de desplazamiento donde se contengan los desplazamientos horizontales y verticales, u y v , respectivamente:

$$\vec{u}_e = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

de este modo, la ecuación 4.98 se puede reescribir y reducir como:

$$\vec{u}_e = [N_1|N_2|N_3] \cdot \vec{d}_e \quad (4.100)$$

donde:

$$N_{(x,y)} = [N_1|N_2|N_3] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

$$\vec{d}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Para definir las funciones de forma n_1 , n_2 y n_3 , estas están dadas por la siguiente expresión:

$$n_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (4.103)$$

donde:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (4.104)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (4.105)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (4.106)$$

$$A = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4.107)$$

y haciendo los cálculos correspondientes, las funciones de forma son:

$$n_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (4.108)$$

$$n_2 = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (4.109)$$

$$n_3 = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (4.110)$$

Posteriormente se procede a determinar la matriz de deformación. En este caso por ser una deformación bidimensional, se tienen 2 deformaciones lineales y 1 angular, las cuales están expresadas de manera general como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.111)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.112)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.113)$$

por lo que la matriz de deformación se expresa como:

$$[\varepsilon] = [B] \cdot \vec{d}_e \quad (4.114)$$

donde:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$[B] = \partial N \quad (4.116)$$

siendo la matriz de compatibilidad:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N_1 | N_2 | N_3] \quad (4.117)$$

o bien:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Consecuentemente, al realizar las derivadas correspondientes, la matriz de compatibilidad se reescribe como:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial y} \\ \frac{\partial n_1}{\partial y} & \frac{\partial n_1}{\partial x} & \frac{\partial n_2}{\partial y} & \frac{\partial n_2}{\partial x} & \frac{\partial n_3}{\partial y} & \frac{\partial n_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

$$\therefore [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Como se puede apreciar, la matriz de compatibilidad resulta ser constante, la cual se sustituye en la ecuación 4.114, así como el vector de desplazamiento, por lo que la matriz de deformación se reescribe de la siguiente forma:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Es importante hacer notar que las deformaciones dentro del elemento no dependen de las coordenadas del punto donde éstas se calculan, por lo que se deduce que estas son constantes. Este hecho hace que al elemento se le conozca como de deformación constante.

Una vez determinada la matriz de deformación se procede a determinar la matriz de esfuerzos, que, de igual manera, se tienen 2 esfuerzos normales y 1 cortante:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

pero se sabe que la matriz de esfuerzos puede también ser calculada como el producto de una matriz constitutiva por la matriz de deformación, por lo que se tiene lo siguiente:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (4.123)$$

donde la matriz constitutiva puede ser para un estado de esfuerzo plano o deformación plana. Para el caso de esfuerzo plano, se utiliza la expresión 2.46, rescribiendo la matriz de esfuerzo como:

$$[\sigma] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} [B] \cdot \vec{d}_e \quad (4.124)$$

o bien:

$$[\sigma] = \frac{E}{2A(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

y se puede saber que la matriz de esfuerzos es una constante, pues resulta ser el producto de dos constantes, la matriz de deformación, que previamente se determinó como una, y la matriz constitutiva que de igual manera se sabe que es una constante.

Ahora bien, para calcular la matriz de rigidez del elemento se puede utilizar la siguiente expresión, definida en forma general en la ecuación 4.50,

$$[k] = \int_v [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dv \quad (4.126)$$

donde:

$$dv = t \cdot dA$$

siendo t el espesor del elemento y dA un diferencial de área. Sustituyendo las respectivas matrices en la ecuación 4.126, esta se puede reescribir como:

$$[k] = \int \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}^T \cdot \frac{E}{2A(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} t \cdot dA \quad (4.127)$$

como se ha mencionado, la matriz de compatibilidad y la constitutiva son constantes, por lo que al realizar la integración correspondiente se puede obtener lo siguiente:

$$[k] = \frac{E(t)}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

Se puede apreciar en la expresión anterior que sólo existen constantes, transformando de esta manera a la matriz de rigidez en una constante, por lo que el elemento bidimensional mostrado en la figura 4.5 también es llamado como *triangulo de deformación constante*.

4.2.4. Elemento rectangular de 4 nodos

Considérese un cuadrilátero cualquiera como el de la figura 4.6 como un elemento bidimensional, el cual está definido por sus 4 nodos correspondientes. Tal elemento, puede tener desplazamientos u y v , en el eje x y y , respectivamente.

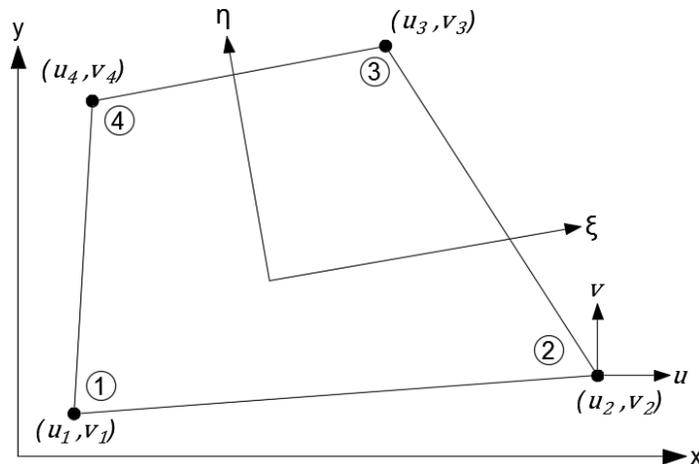


Figura 4.6 Elemento bidimensional de 4 nodos.

Dado por la geometría de la figura anterior, resulta ser complicado el procedimiento en cierta manera, es por ello que para simplificar este mismo se ve la necesidad de recurrir a una interpolación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas naturales (ξ, η) , convirtiendo al cuadrilátero en un *elemento lagrangiano rectangular*. De este modo, con las coordenadas naturales (o mundo padre) el elemento lagrangiano puede convertirse en un elemento perfectamente rectangular como se muestra en la siguiente figura (ver apéndice A).

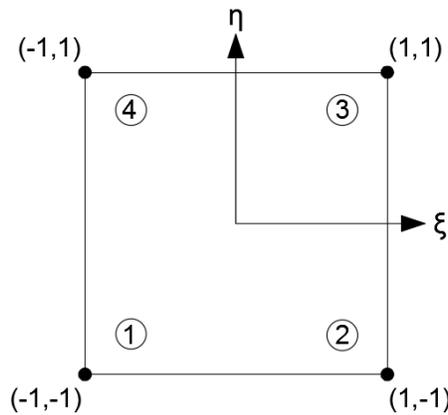


Figura 4.7 Elemento lagrangiano rectangular.

La función de desplazamiento está dada de la siguiente manera:

$$\vec{u}_e(x, y) = [u(x, y) \quad v(x, y)]^T \quad (4.129)$$

Y los desplazamientos nodales,

$$\vec{d}_e = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] \quad (4.130)$$

además, u_i y v_i es el desplazamiento de cada nodo.

Con ayuda de las funciones de forma se puede interpolar al mundo padre, por lo que la función de desplazamiento podría reescribirse de la siguiente forma:

$$\vec{u}_e = N_{(\xi, \eta)} \cdot \vec{d}_e \quad (4.131)$$

$$\vec{u}_e = [n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4]_{(\xi, \eta)} \cdot \vec{d}_e \quad (4.132)$$

donde las funciones de forma para las coordenadas naturales son las siguientes:

$$n_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (4.133)$$

$$n_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.134)$$

$$n_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (4.135)$$

$$n_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (4.136)$$

Al ser un elemento isoparamétrico, las coordenadas de cualquier de sus nodos puede ser representada con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x &= n_{1(\xi, \eta)}x_1 + n_{2(\xi, \eta)}x_2 + n_{3(\xi, \eta)}x_3 + n_{4(\xi, \eta)}x_4 \\ y &= n_{1(\xi, \eta)}y_1 + n_{2(\xi, \eta)}y_2 + n_{3(\xi, \eta)}y_3 + n_{4(\xi, \eta)}y_4 \end{aligned} \quad (4.137)$$

Para el cálculo de la matriz de deformación, por ser un elemento plano, se tienen 2 deformaciones longitudinales y 1 angular, teniendo lo siguiente:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

Y mediante la regla de la cadena, se pueden obtener las derivadas correspondientes, por lo que se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.139)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.140)$$

y con tal razonamiento, también:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.141)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.142)$$

Las expresiones 4.139 y 4.140 pueden reescribirse de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

de esta expresión podemos obtener el Jacobiano, $[J]$, del elemento, donde:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

y análogamente, para las expresiones 4.141 y 4.142:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Para las funciones de forma, las derivadas correspondientes también se calculan mediante la regla de la cadena, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial n_i}{\partial \xi} = \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.146)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial \eta} = \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (4.147)$$

Las expresiones anteriores se pueden reescribir matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

donde se puede apreciar que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \quad (4.149)$$

Al sustituir las ecuaciones de geometría de la expresión 4.137 en la inversa del Jacobiano, se obtiene lo siguiente:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$[J]^{-1} = [\partial N_{(\xi, \eta)}] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

Al realizar las derivadas parciales correspondientes a las funciones de forma, se obtiene:

$$[\partial N_{(\xi, \eta)}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

Una vez que se calcularon las funciones de forma, estas pueden ser sustituidas en las funciones de desplazamiento de la expresión 4.132, teniendo así:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

y:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

De las cuales se puede hacer la siguiente equivalencia:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

de donde se puede considerar:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J]^{-1} [N_{(\xi, \eta)}] \quad (4.155)$$

Con base en la ecuación 4.42, la expresión anterior la podemos sustituir en la matriz de deformación, por lo que se puede expresar como:

$$[\varepsilon] = [J]^{-1} [N_{(\xi, \eta)}] \cdot \vec{d}_e \quad (4.156)$$

siendo la matriz de compatibilidad:

$$[B] = [J]^{-1} [N_{(\xi, \eta)}] \quad (4.157)$$

Ahora, se procede a calcular la matriz de esfuerzo con la ecuación 4.48, la cual está dada de la siguiente manera:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (4.158)$$

donde la matriz constitutiva resulta ser la expresión 2.46 o 2.55, según sea el caso, ya que es un problema de 2 dimensiones.

Lo consiguiente es el cálculo de la matriz de rigidez, y con base en la ecuación general de la matriz de rigidez, ecuación 4.50:

$$[k] = \int_v [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dv \quad (4.159)$$

donde $dv = dA \cdot t$, un diferencial de área por un espesor. A su vez, $dA = [J]^{-1} \cdot d\xi \cdot d\eta$. Sustituyendo se obtiene:

$$[k] = \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot t \cdot [J]^{-1} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.160)$$

Al ser un elemento bidimensional, la expresión anterior se puede reescribir de la siguiente forma, además de definir las integrales:

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot [J]^{-1} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.161)$$

Dada la estructura de la matriz de rigidez, es conveniente aplicar la integración numérica de Gauss (ver apéndice B) para simplificar el procedimiento, la cual está dada por la siguiente ecuación:

$$[k] = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [B_{(\xi,\eta)}]^T [C] [B_{(\xi,\eta)}] [J_{(\xi,\eta)}]^{-1} \cdot W_i \cdot W_j \quad (4.162)$$

donde ξ y η son puntos seleccionados y W_α es el factor de peso correspondiente al punto. Como se mencionó, se debe de hacer uso de dos 2 puntos de Gauss, los cuales corresponden a:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1/\sqrt{3} & \xi_2 &= 1/\sqrt{3} \\ \eta_1 &= -1/\sqrt{3} & \eta_2 &= 1/\sqrt{3} \end{aligned}$$

Para finalizar, se expresa a continuación la matriz de rigidez final dada por la integración numérica:

$$[K] = [k(\xi_1, \eta_1)] + [k(\xi_2, \eta_2)] + [k(\xi_3, \eta_3)] + [k(\xi_4, \eta_4)] \quad (4.163)$$

Capítulo 5. Ejemplos

En este capítulo se presentan diversos ejemplos donde se hace uso de los conceptos fundamentales del método de los elementos finitos incluidos en el presente trabajo. Estos fueron seleccionados y desarrollados con sumo cuidado para poder ilustrar mejor el uso del método, donde los ejemplos varían con determinadas condiciones, dimensiones, formas, tipos de apoyos, sistemas de cargas, etc.; para así obtener variaciones en los resultados y observarse mejor las aplicaciones que tiene el método.

Cabe resaltar que para el análisis y cálculo de los ejemplos se hizo uso de un software especializado en el MEF llamado “*FEAP*”, acrónimo de su nombre en inglés (Finite Element Analysis Program), (Taylor, 2013).

5.1. Membrana de Cook

La membrana de Cook, nombrada así por su autor R. D. Cook (Amezcuca, 2016; Cook, 1974), es un problema muy usual, utilizado como ejemplo en el análisis estático lineal, siendo así un ejemplo ideal debido a su solución analítica. Este problema se compone de una geometría trapezoidal en el plano (x, y) , la cual está representada en la siguiente figura.

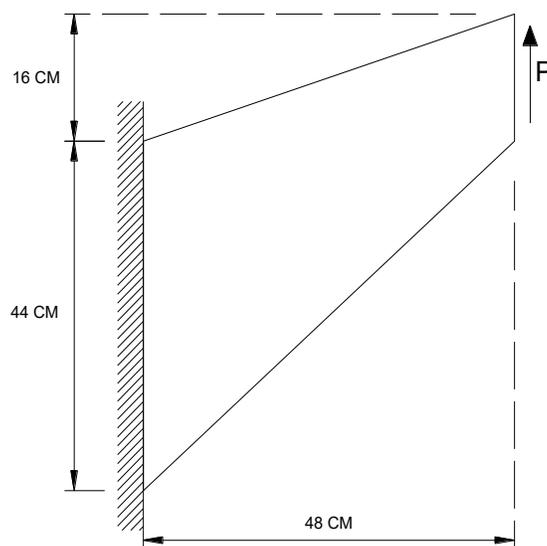


Figura 5.1 Membrana de Cook.

Esta membrana tiene condiciones específicas como un espesor unitario para realizar un cálculo bidimensional, su apoyo es un empotramiento en su extremo izquierdo. Del mismo modo, la membrana está sometida a una carga (P) de 1,000 kg, distribuida sobre todo su extremo libre derecho, así como un módulo elástico (E) de 1,000 kg/cm² y una relación de Poisson (ν) de 0.33. Con ello se genera un desplazamiento de 23.91 centímetros en el punto medio del extremo derecho, (Amezcuca, 2016); considerados como solución exacta en un análisis estructural.

En este ejemplo se pretende mostrar la aproximación del MEF a la solución exacta hecha por Cook (23.91 cm. de desplazamiento vertical), así como las variaciones en los resultados del método cuando una misma estructura se discretiza con diferente número de elementos.

Para ello, se han elaborado 5 mallas (figuras 5.2-5.6), cada una con 4, 16, 64, 256 y 1024 elementos rectangulares, respectivamente. Cabe mencionar que la carga aplicada de 1,000 kg está repartida por áreas tributarias en todos los nodos generados en la malla a lo largo del extremo libre derecho.

En las siguientes figuras se muestran los modelos que se ingresan al software FEAP, el cual analiza y calcula los desplazamientos nodales, así como la energía de deformación. Estos valores son los parámetros de comparación con la solución exacta.

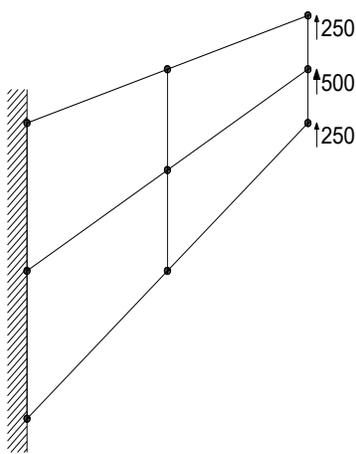


Figura 5.2 Malla con 4 elementos.

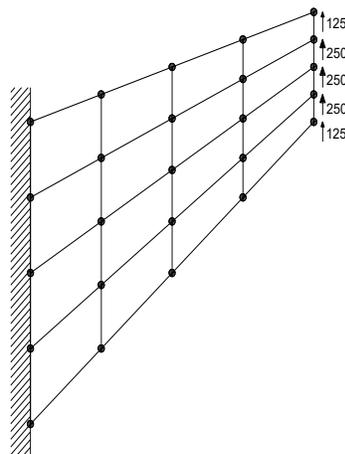


Figura 5.3 Malla con 16 elementos.

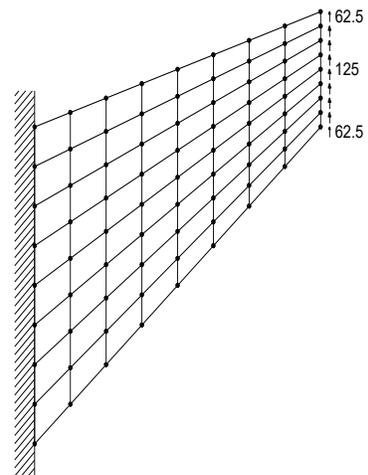


Figura 5.4 Malla con 64 elementos.

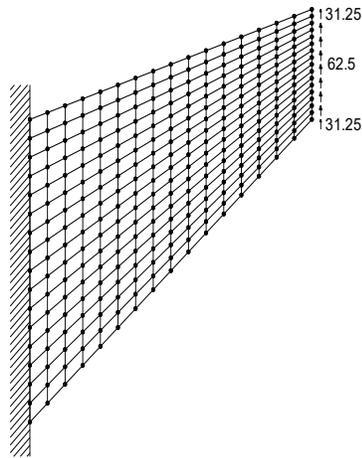


Figura 5.5 Malla con 256 elementos.

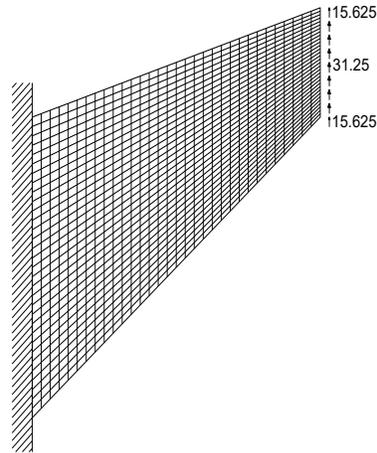


Figura 5.6 Malla con 1024 elementos.

Obsérvese que en los diagramas anteriores, como se mencionó, la carga fue repartida en todos los nodos, así las 2 cargas exteriores son menores que las cargas intermedias, pues el área tributaria en los extremos es la mitad en comparación a las áreas interiores. Una vez determinados los modelos, se procede a su análisis mediante el programa de elementos finitos FEAP.

Consecuentemente, los resultados arrojados por el software, con respecto a los desplazamientos nodales y a la energía de deformación se muestran en las siguientes tablas:

Tabla 5.1 Desplazamiento.

No. de elementos totales	Desplazamientos (cm)		
	Exacta	MEF	% de error
4	23.91	11.844	50.46%
16	23.91	18.301	23.46%
64	23.91	22.078	7.66%
256	23.91	23.426	2.02%
1024	23.91	23.813	0.41%

Tabla 5.2 Energía de deformación.

No. de elementos totales	Energía de deformación (kg-cm)		
	Exacta	MEF	% de error
4	23910	11797.87	50.66%
16	23910	18276.04	23.56%
64	23910	22068.49	7.70%
256	23910	23451.44	1.92%
1024	23910	23867.33	0.18%

Es preciso mencionar que la energía de deformación se puede calcular con la siguiente expresión:

$$U = F \cdot \vec{u} \quad (5.1)$$

donde U representa la energía de deformación, F es la fuerza aplicada y \vec{u} es el desplazamiento nodal.

Asimismo, el porcentaje de error se calcula con la siguiente expresión:

$$\% \text{ de error} = \frac{SE - SMEF}{SE} \quad (5.2)$$

donde SE representa el valor de la solución exacta y $SMEF$ representa la solución obtenida por el MEF.

Los resultados de las tablas 5.1 y 5.2 se han graficado como se muestran a continuación en las figuras 5.7 y 5.8, respectivamente, para una mejor visualización de la aplicación del MEF.

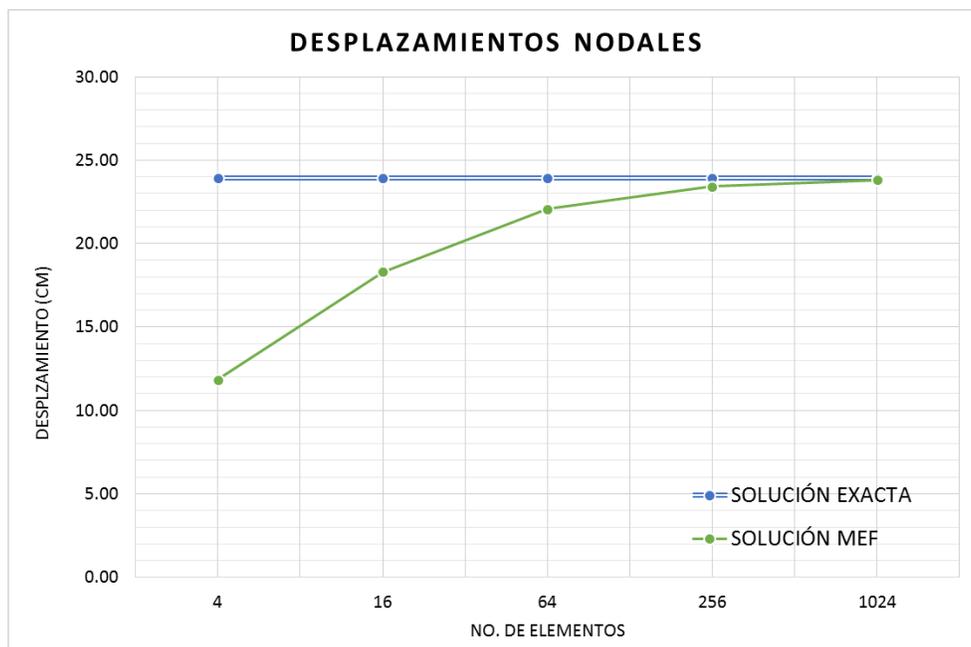


Figura 5.7 Desplazamientos nodales.

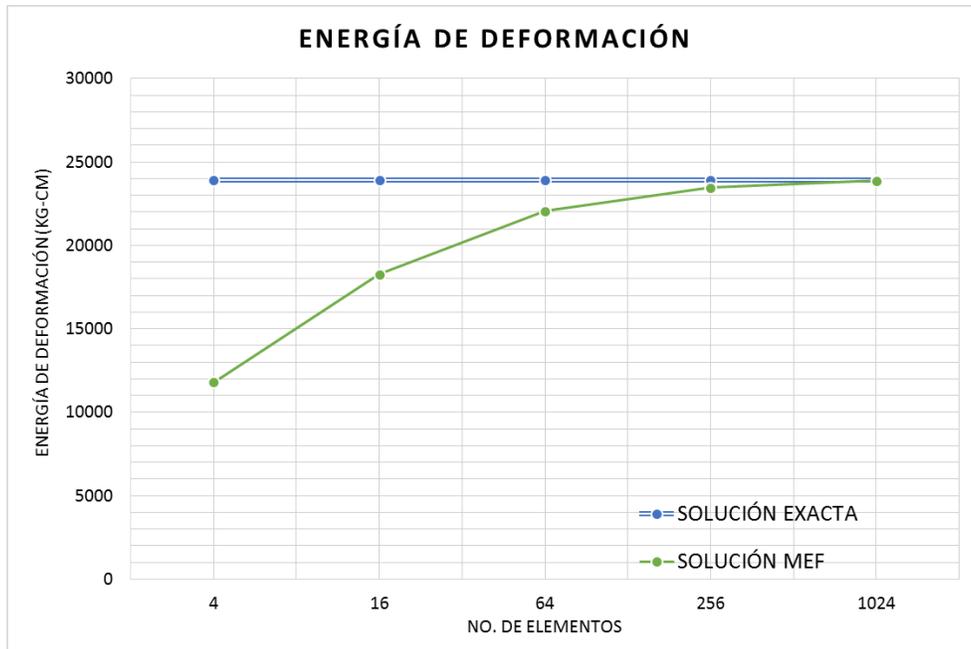


Figura 5.8 Energía de deformación.

Se puede observar que conforme la estructura se discretiza en un mayor número de elementos, el resultado es muy próximo a la solución exacta; lo cual concuerda con la teoría del método de los elementos finitos, *i.e.*, a mayor número de elementos menor el error en la solución obtenida.

Para complementar este ejemplo, se presentan las siguientes figuras obtenidas del software FEAP, donde se muestran desplazamientos y esfuerzos de cada una de las 5 mallas generadas.

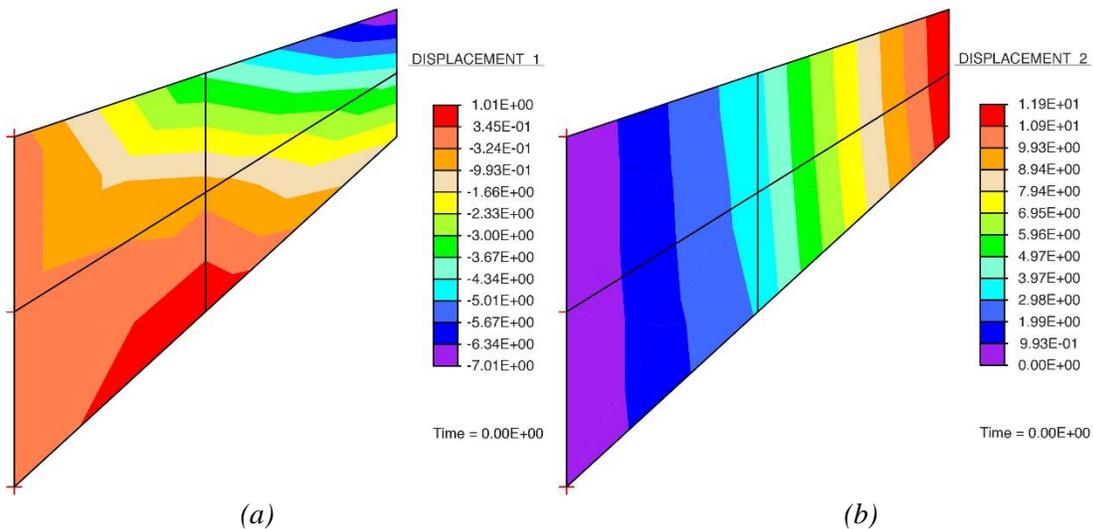


Figura 5.9 Desplazamiento con malla de 4 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.

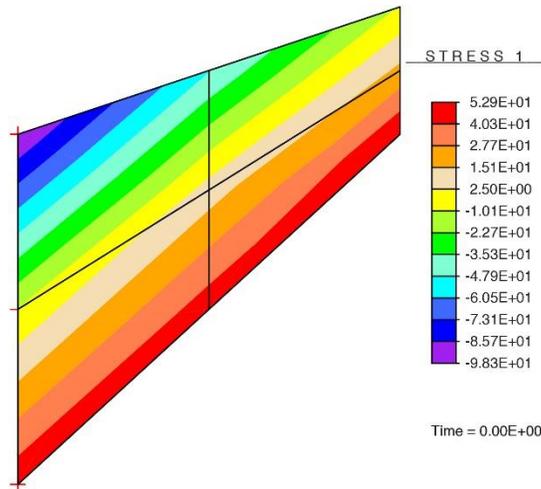


Figura 5.10 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 4 elementos.

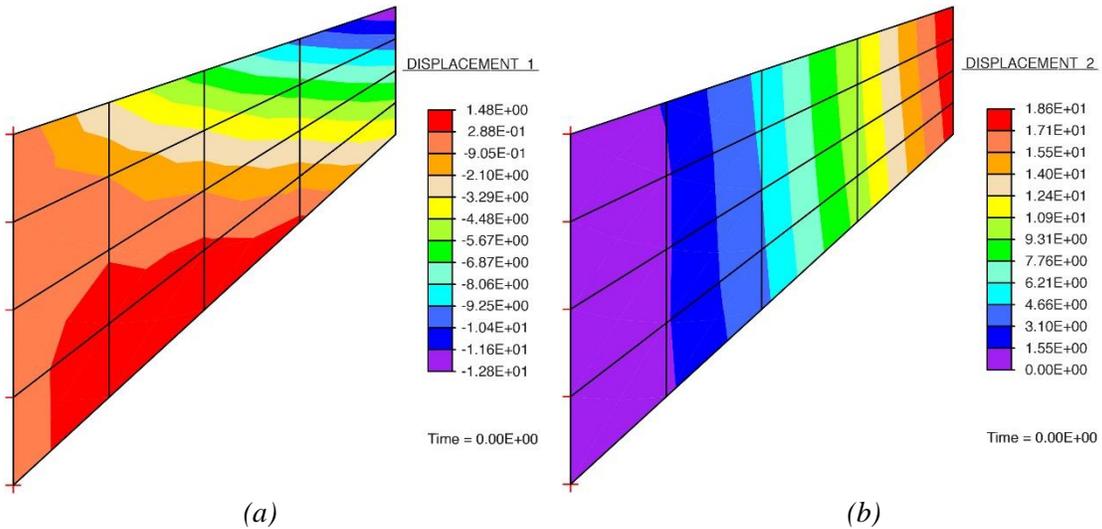


Figura 5.11 Desplazamiento con malla de 16 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.

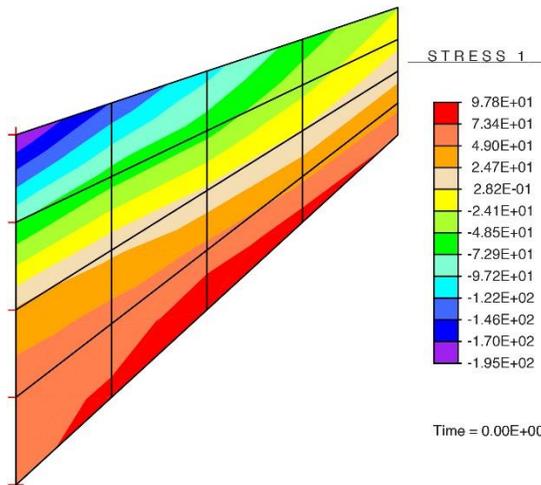


Figura 5.12 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 16 elementos.

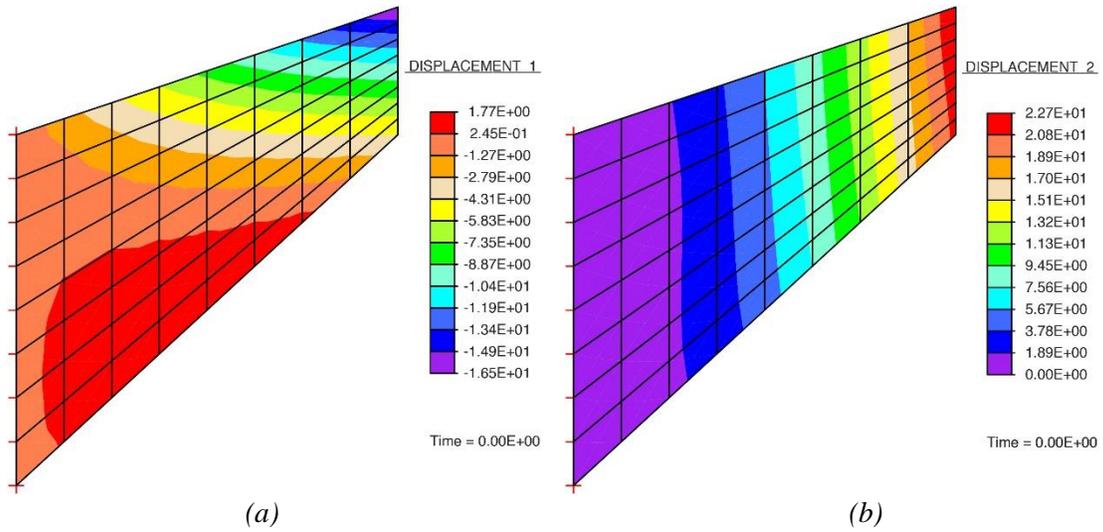


Figura 5.13 Desplazamiento con malla de 64 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.

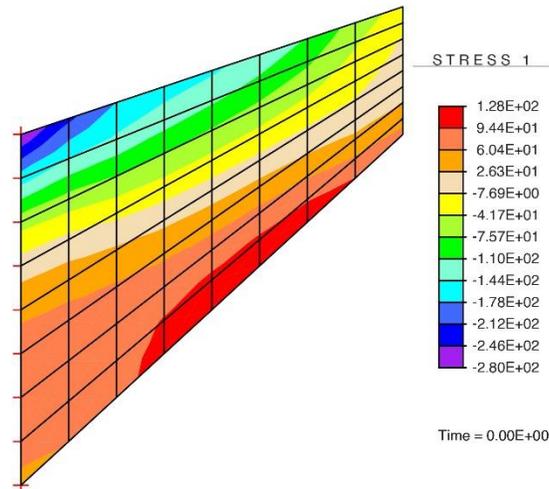


Figura 5.14 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 64 elementos.

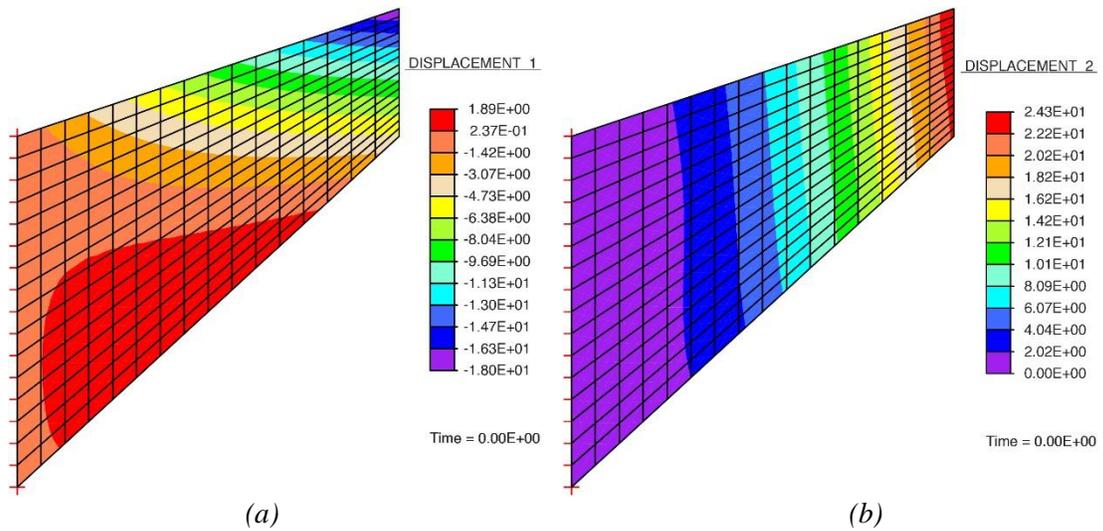


Figura 5.15 Desplazamiento con malla de 256 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.

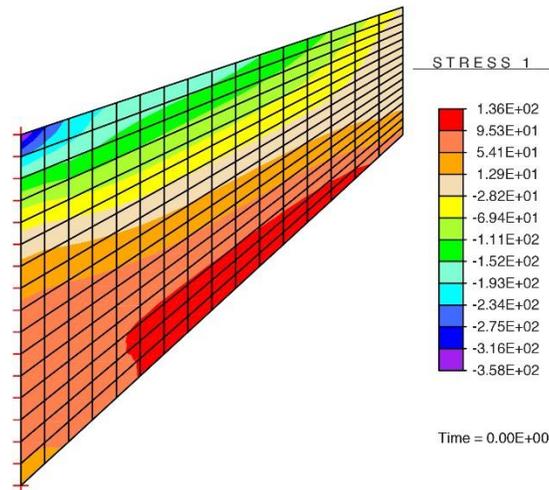


Figura 5.16 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 256 elementos.

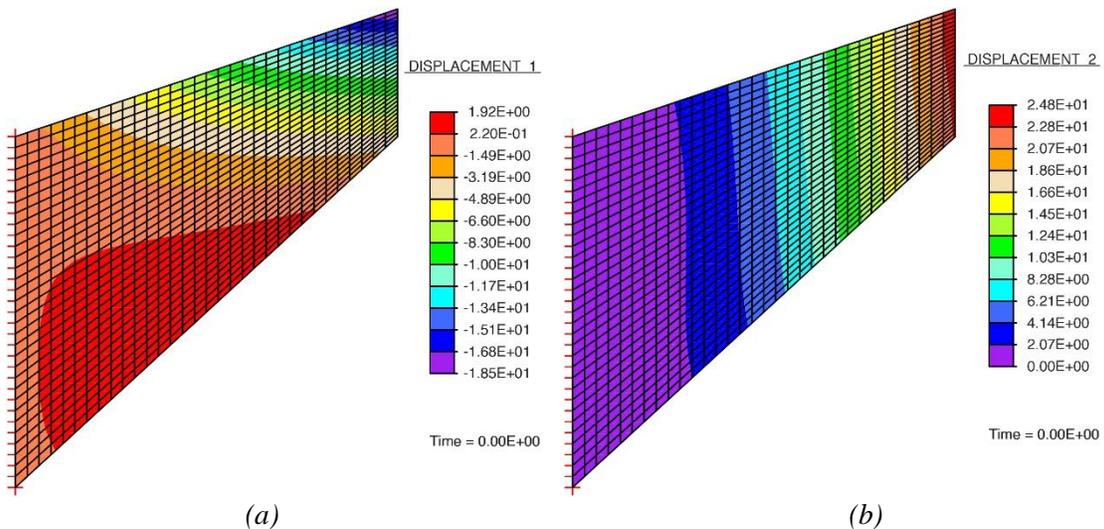


Figura 5.17 Desplazamiento con malla de 1024 elementos, (a) horizontales y (b) verticales.

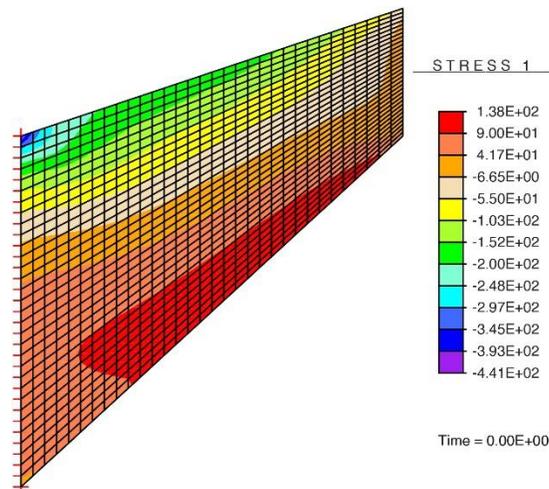


Figura 5.18 Esfuerzos principales máximos generados con malla de 1024 elementos.

En las figuras anteriores se puede apreciar la variación de la aplicación de MEF cuando la estructura es discretizada en diferente número de elementos.

Si se comparan los resultados de los desplazamientos y de los esfuerzos de la malla con 4 elementos (figuras 5.9 y 5.10, respectivamente) respecto a los resultados de los desplazamientos y de los esfuerzos de la malla con 1024 elementos (figuras 5.17 y 5.18, respectivamente) podemos observar que en las primeras figuras los campos tienen una forma o distribución con bordes irregulares pero en las últimas figuras estos mismos campos toman una forma más alisada, asimismo se aprecia el mismo efecto si comparamos cada malla consecutivamente de menor a mayor número de elementos.

5.2. Viga de Euler-Bernoulli

La teoría de vigas es una parte de la mecánica de materiales que permite el cálculo de esfuerzos y deformaciones en vigas. Los bases de esta teoría fueron dados por Leonhard Euler (1707-1783) y Daniel Bernoulli (1700-1782) en el siglo XVIII (Timoshenko, 1983). Esta teoría, dada sus condiciones, representa los problemas más simples de la formulación restringida de la elasticidad lineal, por lo que es viable para formular un problema y analizarlo con el MEF.

Ahora se considera una viga en cantiléver empotrada por su lado extremo izquierdo, la cual está sometida a una carga concentrada (P) de 1,000 kg en su extremo derecho. Tiene dimensiones de 300 centímetros de largo, 30 centímetros de peralte y 15 centímetros de base, como se muestra en la figura 5.19.

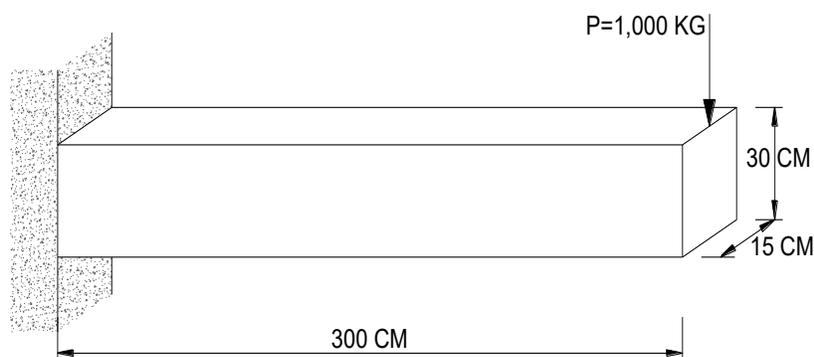


Figura 5.19 Viga de Euler-Bernoulli.

Las dimensiones anteriores han sido así consideradas para cumplir la relación empírica:

$$L/b \geq 10 \quad (5.3)$$

que permite despreciar las deformaciones por cortante, y resolver el problema mediante la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, (Gere y Timoshenko, 1991).

Del mismo modo, la viga considerada tiene un módulo elástico (E) de 100,000 kg/cm² y una relación de Poisson (ν) de 0.20.

En este ejemplo se hace la comparación de los resultados de un análisis del MEF con elementos rectangulares respecto a los resultados con elementos triangulares. A su vez, estos mismos resultados se comparan con la solución exacta para poder ver su aproximación del MEF a esta solución. Cabe mencionar que la comparación se hace con base al nodo que se encuentra justo a la mitad del peralte de la viga en su extremo derecho donde se encuentra aplicada la carga. Para lo anterior se han elaborado 10 diferentes mallas, 5 mallas con elementos rectangulares y 5 con elementos triangulares; cada una de ellas con un número diferente de elementos, como se muestra en las próximas figuras:

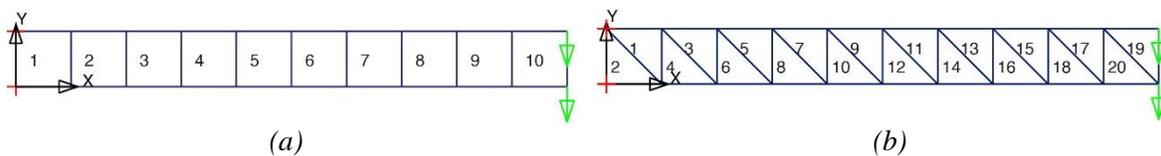


Figura 5.20 Mallas con (a) 10 elementos rectangulares y (b) 20 elementos triangulares.

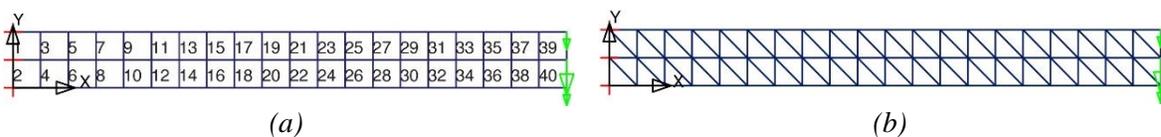


Figura 5.21 Mallas con (a) 40 elementos rectangulares y (b) 80 elementos triangulares.

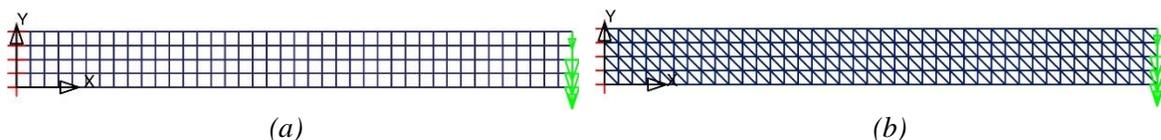


Figura 5.22 Mallas con (a) 160 elementos rectangulares y (b) 320 elementos triangulares.

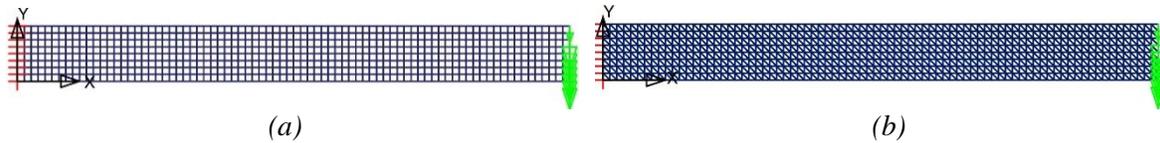


Figura 5.23 Mallas con (a) 640 elementos rectangulares y (b) 1280 elementos triangulares.

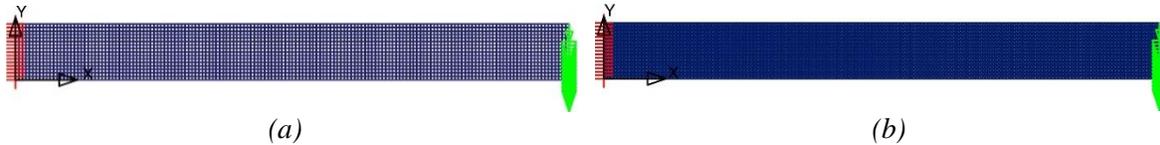


Figura 5.24 Mallas con (a) 2560 elementos rectangulares y (b) 5120 elementos triangulares.

Es importante mencionar que la carga aplicada de 1,000 kg se distribuye en los nodos ubicados en todo el peralte del extremo derecho, como se puede observar en las respectivas figuras, para los modelos con elementos finitos. Esta condición permite mitigar los efectos locales, como lo estipula el principio de Saint-Venant (Ugural y Fenster, 1995).

Al ingresar los datos de entrada al software FEAP, este nos arroja los siguientes resultados con respecto a los desplazamientos nodales y a la energía de deformación; mismos que se muestran en las tablas 5.3 y 5.4, respectivamente.

Tabla 5.3 Desplazamiento nodal.

No. de elementos en el peralte	Desplazamiento nodal (cm)				
	Exacta	Rectangular	Triangular	% de error rectangular	% de error triangular
1	-2.67	-1.840	-0.625	31.00%	76.55%
3	-2.67	-2.404	-1.460	9.86%	45.26%
5	-2.67	-2.607	-2.216	2.25%	16.90%
9	-2.67	-2.664	-2.548	0.11%	4.43%
17	-2.67	-2.678	-2.648	-0.44%	0.69%

Tabla 5.4 Energía de deformación.

No. de elementos en el peralte	Energía de deformación (kg-cm)				
	Exacta	Rectangular	Triangular	% de error rectangular	% de error triangular
1	2666.67	1840.00	625.16	31.00%	76.56%
3	2666.67	2403.70	1459.83	9.86%	45.26%
5	2666.67	2606.88	2216.00	2.24%	16.90%
9	2666.67	2663.78	2548.53	0.11%	4.43%
17	2666.67	2678.57	2648.34	0.45%	0.69%

Es importante mencionar que para el cálculo de la energía de deformación y el porcentaje de error se usan las ecuaciones 5.1 y 5.2, respectivamente.

Los resultados de las tablas anteriores (tablas 5.3 y 5.4) se graficaron como se muestran a continuación en las figuras 5.25 y 5.26, respectivamente, con el fin de observar mejor la comparación entre los resultados de la aplicación del MEF con elementos rectangulares, triangulares y la solución exacta:

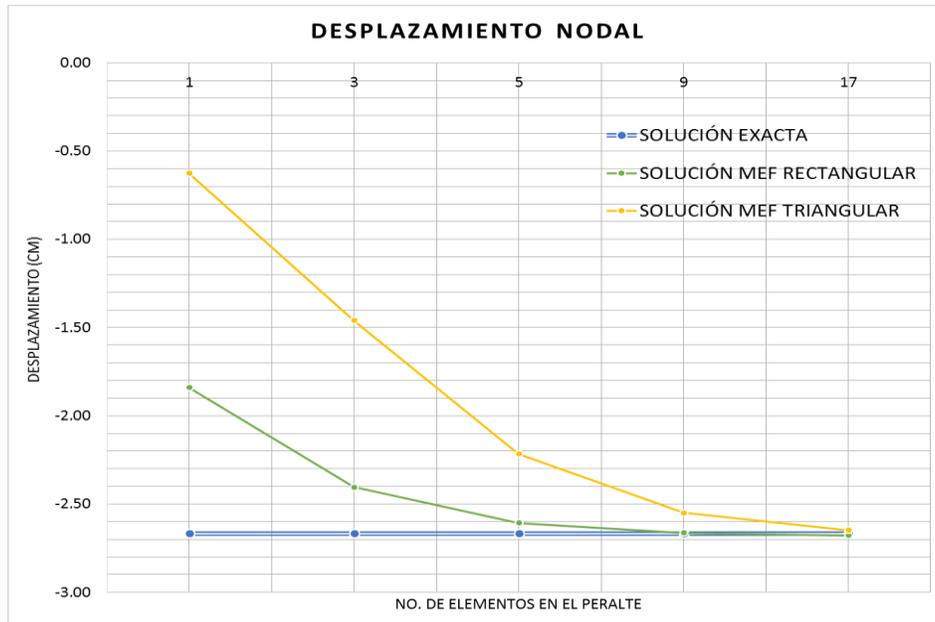


Figura 5.25 Desplazamiento nodal.

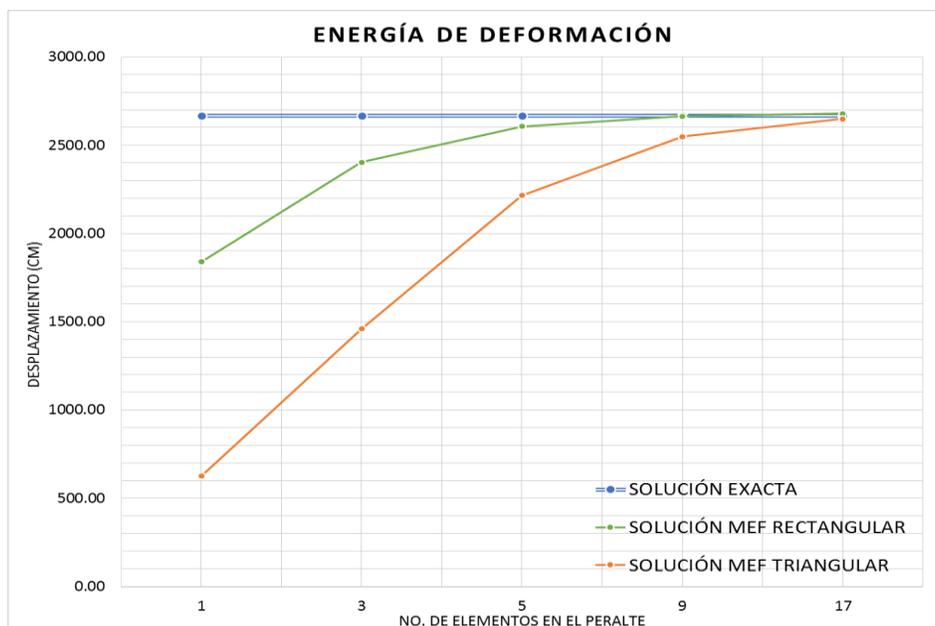


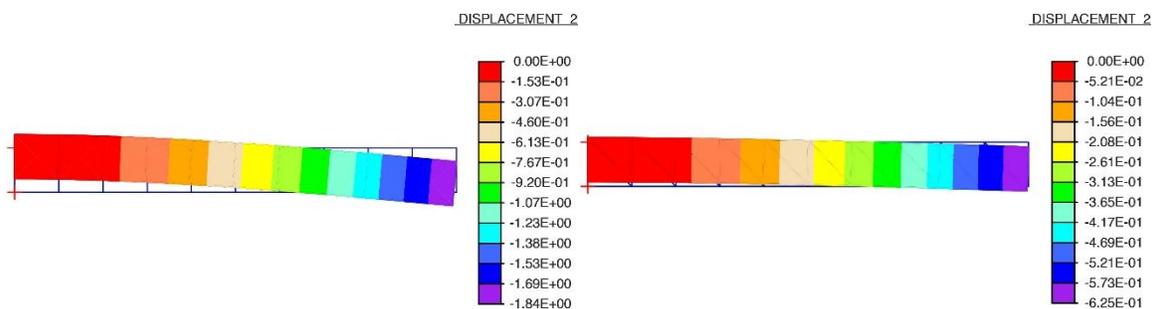
Figura 5.26 Energía de deformación.

Al observar los resultados podemos ver que los resultados obtenidos por el MEF van aproximándose a la solución exacta conforme se aumentan de elementos en la discretización de la estructura. Asimismo, se observa que la discretización con elementos triangulares tiene un comportamiento más rígido en comparación con la discretización con elementos rectangulares, pues en la figura 5.25 los desplazamientos de los elementos triangulares son menores que los desplazamientos de los elementos rectangulares.

Paralelamente, se observa en los resultados de la energía de deformación, la solución exacta es sobrepasada sutilmente por el resultado dado por el MEF en la última malla, pues la solución exacta considera exclusivamente la energía de deformación por el momento flexionante, excluyendo la contribución de fuerzas cortantes, mientras que la solución del MEF toma en cuenta todas las energías involucradas en el problema continuo.

Para complementar esta información, se presentan las siguientes figuras obtenidas del software FEAP, donde se muestran los desplazamientos verticales y esfuerzos principales máximos de las 10 mallas generadas.

Desplazamientos verticales



(a) (b)
 Figura 5.27 Malla (a) 10 elementos rectangulares, y (b) 20 elementos triangulares.

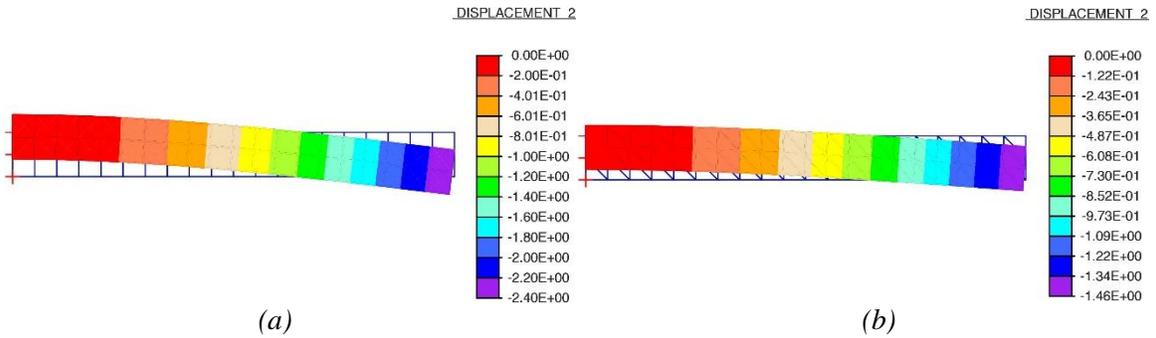


Figura 5.28 Malla (a) 40 elementos rectangulares, y (b) 80 elementos triangulares.

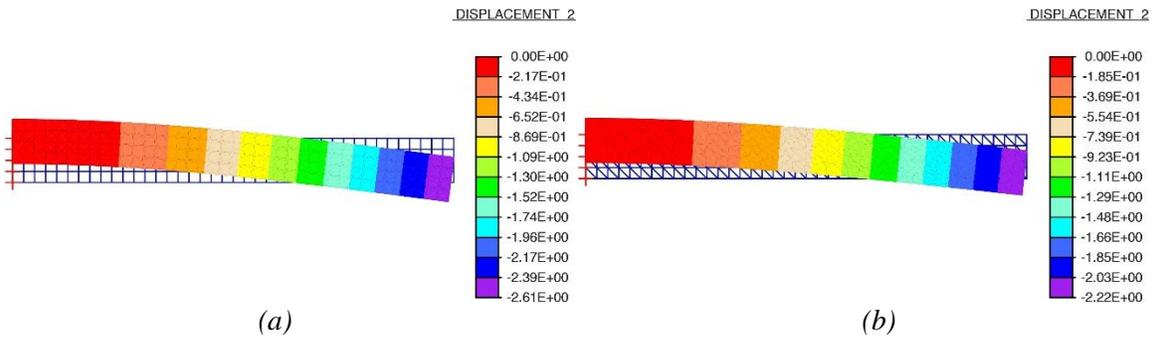


Figura 5.29 Malla (a) 160 elementos rectangulares, y (b) 320 elementos triangulares.

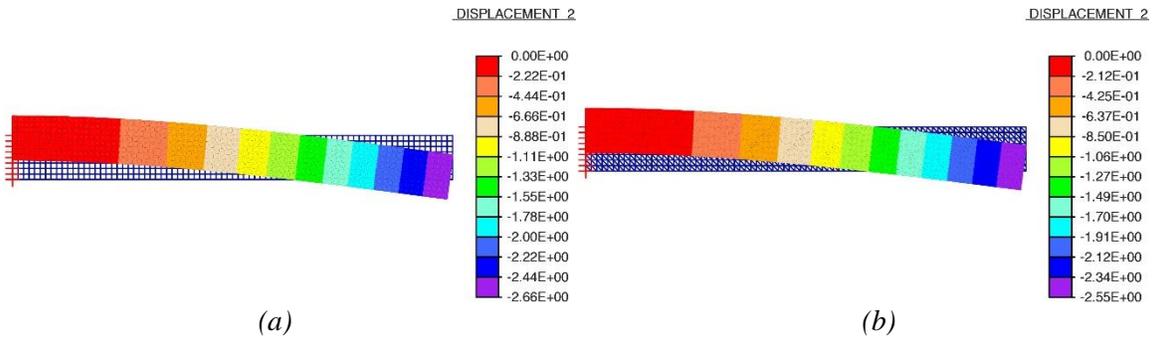


Figura 5.30 Malla (a) 640 elementos rectangulares, y (b) 1280 elementos triangulares.

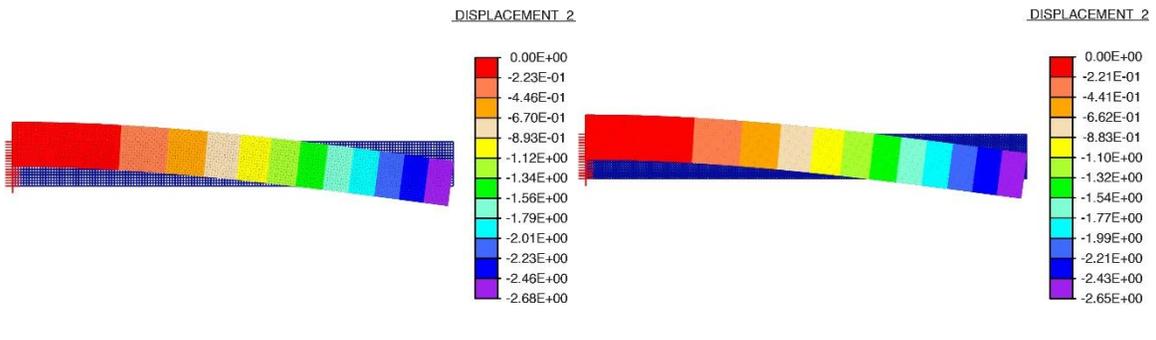
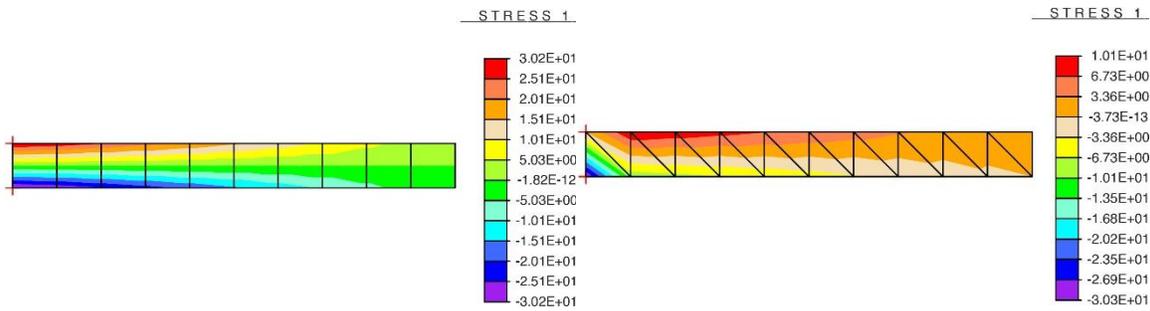


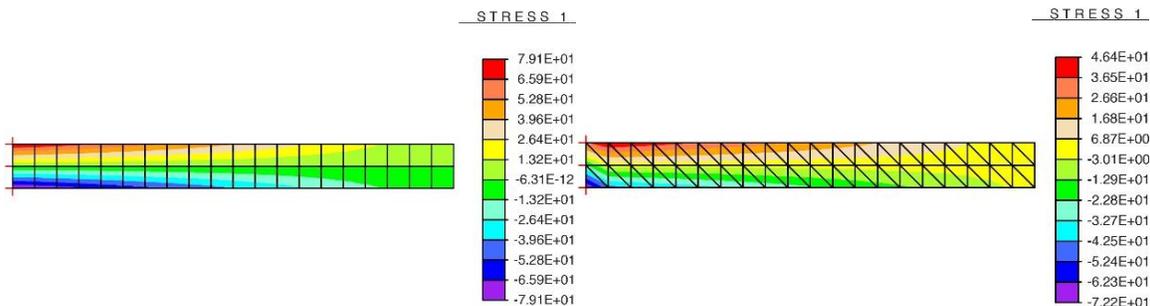
Figura 5.31 Malla (a) 2560 elementos rectangulares, y (b) 5120 elementos triangulares.

Al analizar las figuras anteriores se puede notar que los desplazamientos son mayores en el extremo derecho en comparación con el extremo izquierdo pues es congruente, ya que la carga aplicada está en el extremo derecho mientras que el empotramiento está en el extremo izquierdo.

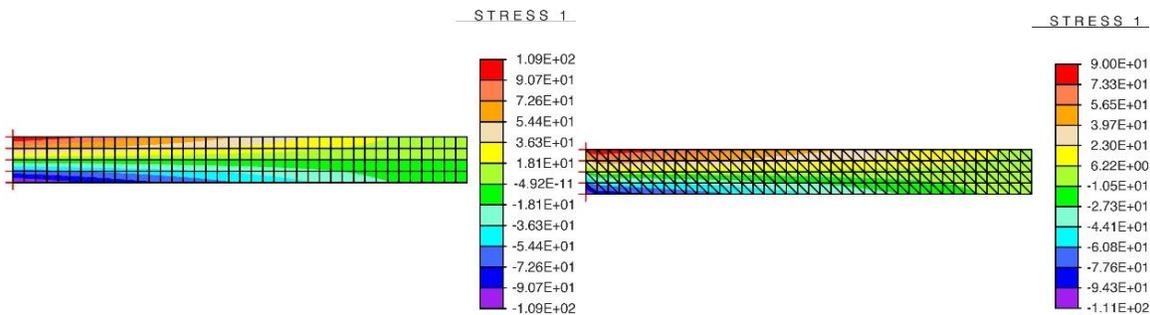
Esfuerzos principales máximos



(a) (b)
 Figura 5.32 Malla (a) 10 elementos rectangulares, y (b) 20 elementos triangulares.



(a) (b)
 Figura 5.33 Malla (a) 40 elementos rectangulares, y (b) 80 elementos triangulares.



(a) (b)
 Figura 5.34 Malla (a) 160 elementos rectangulares, y (b) 320 elementos triangulares.

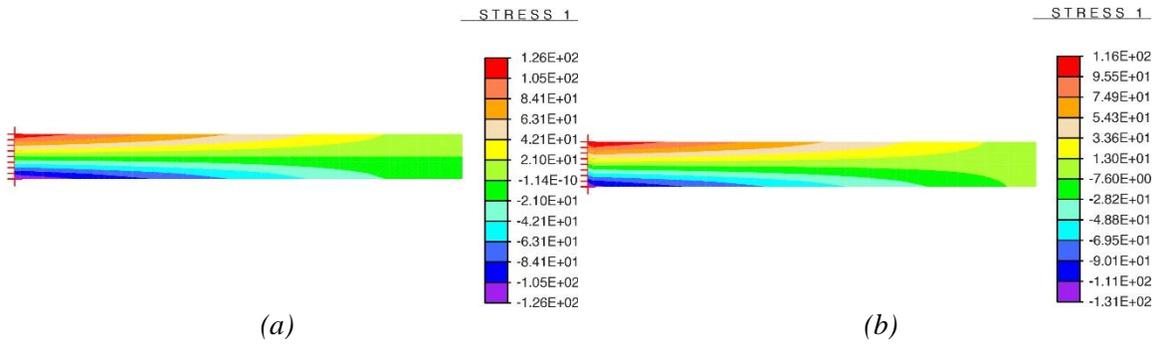


Figura 5.35 Malla (a) 640 elementos rectangulares, y (b) 1280 elementos triangulares.

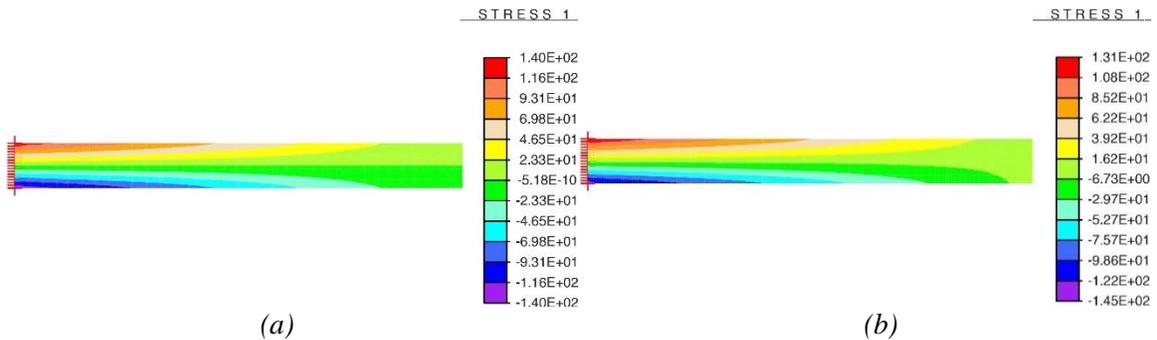


Figura 5.36 Malla (a) 2560 elementos rectangulares, y (b) 5120 elementos triangulares.

Al analizar las figuras anteriores, se puede observar que los esfuerzos máximos se encuentran en el extremo izquierdo donde se encuentra el empotre, asimismo, los esfuerzos mínimos se encuentran en el extremo libre derecho.

Se puede apreciar que se cumple con los esfuerzos obtenidos de la teoría de vigas con la fórmula de la escuadría (Pytel y Kiusalaas, 2011), ecuación 5.4. Podemos observar que los campos de tonalidad azul representan los esfuerzos de compresión y los campos de tonalidad roja representan los esfuerzos de tensión correspondiente a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad (5.4)$$

donde σ representa el esfuerzo, M es el momento flexionante, y es la distancia desde el eje neutro y I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.

5.3. Viga de concreto reforzado

Dentro de la ingeniería, el concreto es el material más utilizado después del agua, en su mayoría de las obras de infraestructura son construidas con concreto armado. Es por ello que este ejemplo tiene como base el análisis de una viga de concreto armado, como se muestra en la figura 5.37.

Se sabe que el concreto simple es muy resistente en compresión, pero no es de la misma manera en tensión, el ejemplo más común donde se puede encontrar estas condiciones es en una viga. En este caso, cuando una viga es sometida a una carga gravitacional cual sea, esta misma le produce una flexión generada de una tensión en la parte inferior de la viga y es esta la razón por la cual se refuerza usualmente con varillas de acero.

En este ejemplo se pretende mostrar el efecto positivo que produce el refuerzo con varillas de acero dentro del concreto, pues este refuerzo absorbe las tensiones y consecuentemente reduce el desplazamiento vertical. En el análisis de este problema se muestra el desplazamiento cuando la viga es de concreto simple y se compara con el desplazamiento cuando la viga es de concreto reforzado.

Ahora, considérese una viga que está sometida a una carga puntual de 4,500 kg justamente a la mitad de su claro de 400 cm, además, la viga está simplemente apoyada.

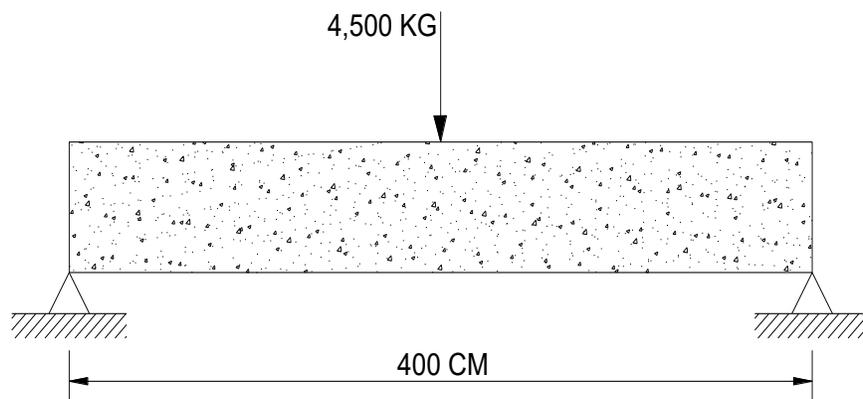


Figura 5.37 Viga de concreto reforzado.

Para este caso, el concreto tiene como propiedades mecánicas una resistencia a la compresión de 250 kg/cm², una relación de Poisson (ν) de 0.20 y, por ser un concreto de clase II, el módulo elástico (E) de 221,360.0 kg/cm², esto con base en las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño de Estructuras de Concreto de la CDMX del año 2004 (NTC-Concreto 04). Cabe mencionar que el acero de refuerzo tiene un esfuerzo de fluencia de 4,200 kg/cm².

Al realiza un cálculo isostático se sabe que la carga puntual provoca un momento flexionante de 4,500 kg-m, este resultado se puede comprobar con la ecuación 5.5 (Pytel y Kiusalaas, 2011). Para lo anterior, se realizó un diseño estructural reforzando la zona a flexión con base en la normatividad de las NTC-Concreto 04. El momento máximo actuante se calcula mediante la ecuación,

$$M_U = \frac{P(L)}{4} \quad (5.5)$$

donde M_U es el momento flexionante o momento último, P es la carga aplicada y L es la longitud del claro de la viga. La normatividad menciona que el momento resistente debe ser calculado con la siguiente expresión:

$$M_R = F_R \cdot b \cdot d^2 \cdot f''c \cdot q(1 - 0.5q) \quad (5.6)$$

donde M_R es el momento resistente, F_R es el factor de resistencia de 0.9 para flexión, b es la base de la viga y d es el peralte efectivo de la viga, siendo en este caso la altura total de la sección menos 5 cm de recubrimiento del acero en la parte inferior de la viga. Asimismo, los factores $f''c$ y q están dados por las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$$f''c = 0.85 (0.8 \cdot f'c) \quad (5.7)$$

$$q = \frac{A_s}{b \cdot d} \left(\frac{f_y}{f''c} \right) \quad (5.8)$$

donde $f'c$ es la resistencia compresión del concreto, f_y es el esfuerzo de fluencia del acero y A_s es el área total de la sección del acero de refuerzo.

Para el cálculo del momento resistente, primero se efectúan el cálculo de las ecuaciones 5.7 y 5.8, considerando como área total de acero 3 varillas del número 4, además, la altura y la base son de 40 y 20 centímetros, respectivamente, para cumplir la condición empírica de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli establecido en la ecuación 5.3, por lo tanto:

$$f''c = 0.85 \left(0.8 \cdot 250 \frac{kg}{cm^2} \right) = 170 \frac{kg}{cm^2} \quad (5.9)$$

$$q = \frac{3.80 cm^2}{(20 cm^2)(35 cm^2)} \left(\frac{4200 \frac{kg}{cm^2}}{170 \frac{kg}{cm^2}} \right) = 0.1341 \quad (5.10)$$

Estos resultados son sustituidos en la ecuación 5.6, obteniendo el siguiente resultado:

$$M_R = 0.9(20 cm^2)(35 cm^2) \left(170 \frac{kg}{cm^2} \right) (0.1341)(1 - 0.5(0.1341)) \quad (5.11)$$

$$\therefore M_R = 46,906.19 kg - m$$

Con esta solución, el refuerzo es completamente óptimo para soportar el momento flexionante ejercido por la carga puntual. La siguiente figura muestra la sección transversal de la viga de concreto reforzado con base en el diseño estructural.

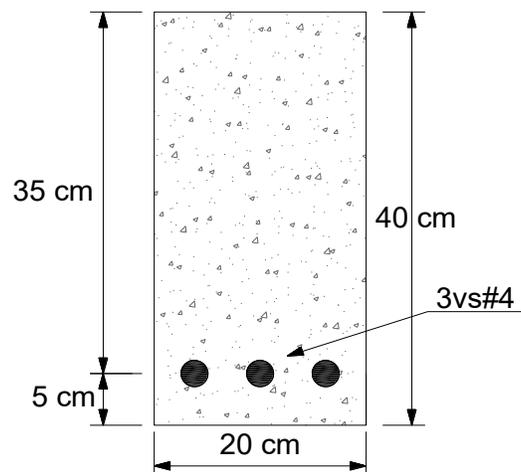


Figura 5.38 Sección transversal.

Una vez determinado el diseño del refuerzo de la viga, se procede a realizar el modelo que será analizado por el software FEAP.

Por tenerse simetría en la viga respecto al centro de la misma, por geometría, carga, apoyos y material, se ha considerado sólo su extremo derecho como se muestra en la siguiente figura.

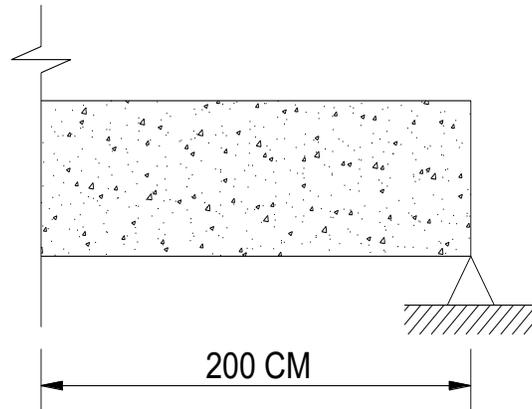


Figura 5.39 Extremo derecho de la viga.

Y para que las condiciones de la mitad de la viga sean iguales a las condiciones de la viga completa, en el extremo izquierdo de la mitad se colocan apoyos móviles verticales como se muestra en la figura 5.40. Dentro del modelo, estos apoyos restringen el desplazamiento horizontal y permiten el desplazamiento vertical.

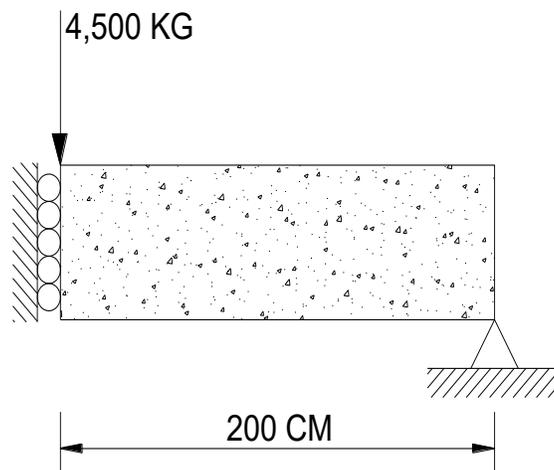


Figura 5.40 Modelo a analizar.

Una vez determinado el modelo a analizar, se procede a configurarlo en los datos de entrada del software FEAP, el cual arroja los siguientes mallados, uno de concreto simple y otro de concreto reforzado, respectivamente:

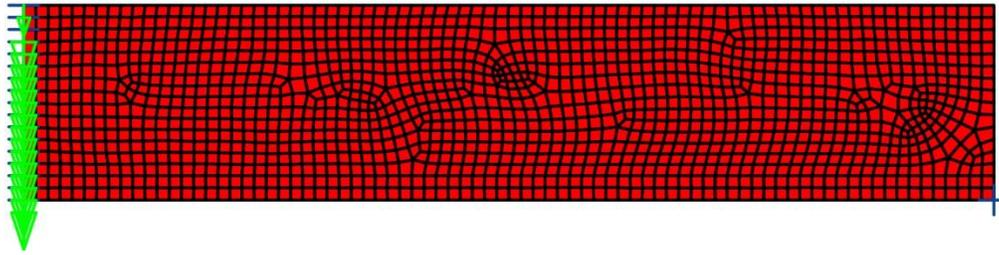


Figura 5.41 Malla de viga de concreto simple.

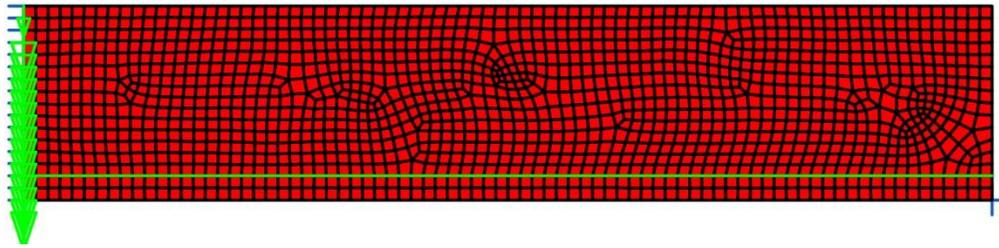


Figura 5.42 Malla de viga de concreto reforzado.

Es importante mencionar que la carga de 4,500 kg fue repartida en todos los nodos verticales del extremo izquierdo, con el fin de mitigar los efectos locales, como lo establece el principio de Saint-Venant (Ugural y Fenster, 1995).

Después de que el software FEAP haya realizado el análisis de las dos mallas, este nos arroja los siguientes resultados respecto a los desplazamientos nodales que se han concentrado en la siguiente tabla:

Tabla 5.5 Desplazamiento nodal.

Carga aplicada (kg)	Desplazamiento (cm)		
	Concreto simple	Concreto reforzado	Diferencia
0	0	0	0
4500	-0.2776	-0.2690	-0.0086

Como se puede apreciar, el desplazamiento vertical es ligeramente mayor en el concreto simple en comparación del concreto reforzado. El acero de refuerzo absorber la tensión en la parte inferior de la viga logrando que la deformación sea menor, consecuentemente el desplazamiento se reduce.

Los resultados de la tabla 5.5 se han graficado en la siguiente figura para poderse observar mejor la diferencia de cada uno.

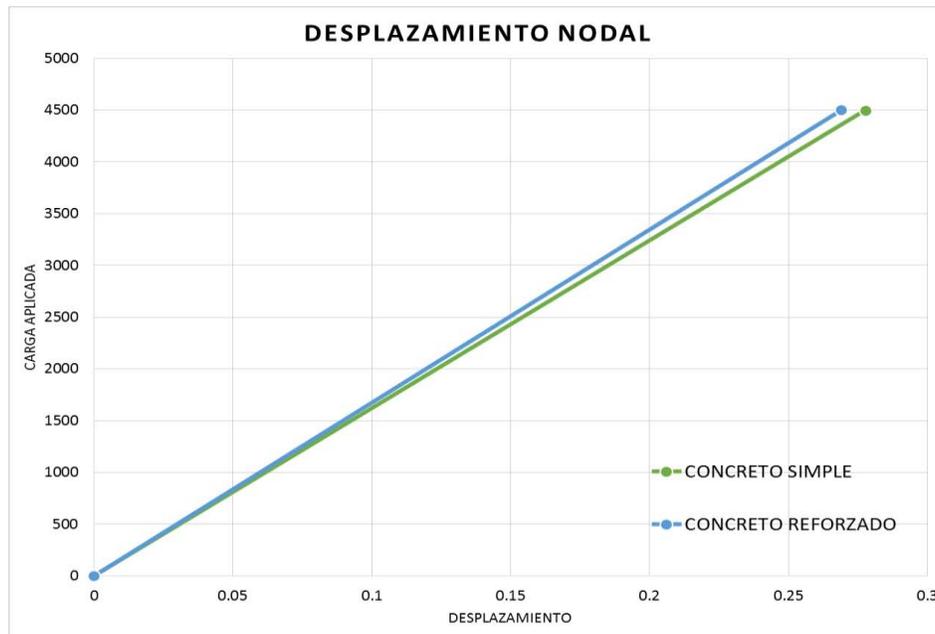


Figura 5.43 Desplazamiento nodal.

En esta figura se aprecia por completo que el desplazamiento es mayor cuando el concreto es simple. Es importante mencionar que aunque el desplazamiento de la viga de concreto simple sea relativamente pequeño y no haya mucha diferencia con el concreto reforzado, esto no implica que no sea necesario el refuerzo de acero, pues sin este muy probablemente llegaría a su estado de falla, por otro lado, lo que principalmente se pretende mostrar en este ejemplo es el efecto positivo y la forma de trabajar del refuerzo, más no el comportamiento como tal de la viga.

Para complementar esta información, se presentan las siguientes figuras obtenidas del software FEAP, donde se muestran los desplazamientos verticales de las 2 mallas generadas.

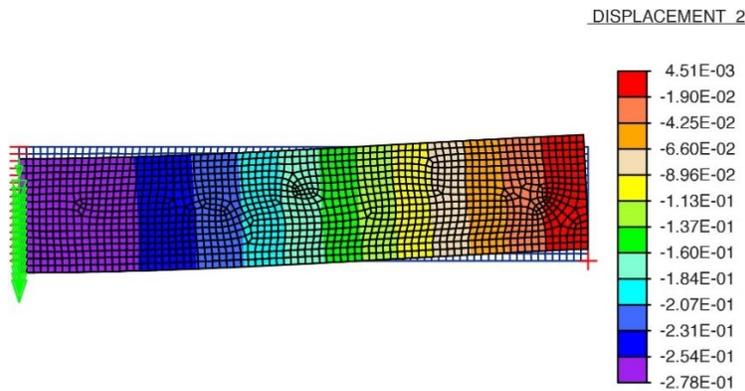


Figura 5.44 Desplazamiento de viga de concreto simple.

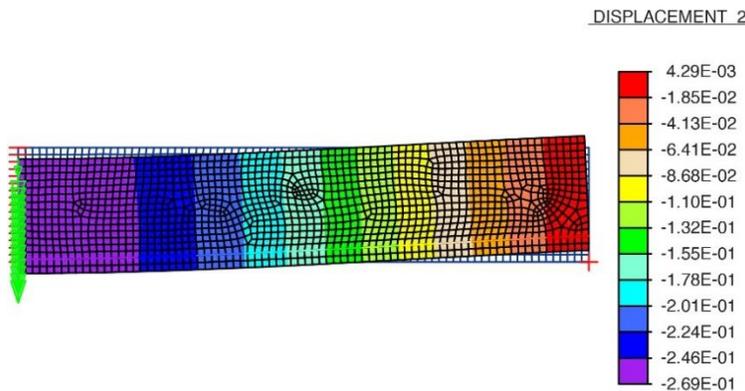


Figura 5.45 Desplazamiento de viga de concreto reforzado.

5.4. Simulación híbrida de una viga

Dentro del área de la Ingeniería Estructural, se puede encontrar distintos tipos de estructuras y muy a menudo se observan estructuras compuestas con 2 o más tipos. Para este ejemplo, se pretende mostrar la interacción que existe entre dos tipos de elementos finitos (Cook, et al., 2001).

Se ha considerado una viga en cantiléver con sección transversal de 30x15 centímetros, como se muestra en la figura 5.46, la cual está compuesta de dos tipos de elementos finitos. Las dimensiones fueron establecidas para cumplir la condición empírica de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, ecuación 5.3. El primer tipo elemento utilizado es uno sólido de esfuerzo plano, el cual está justo donde queda el empotre teniendo un claro de 200 cm, y el segundo tipo de elemento finito corresponde a un elemento marco que se utiliza para modelar la parte extrema derecha de la viga, con una longitud de 100 cm. Además, esta viga está sometida

a una carga concentrada (P) de 1,000 kg en su extremo izquierdo, por lo que la carga sólo esta aplicada a la estructura tipo marco.

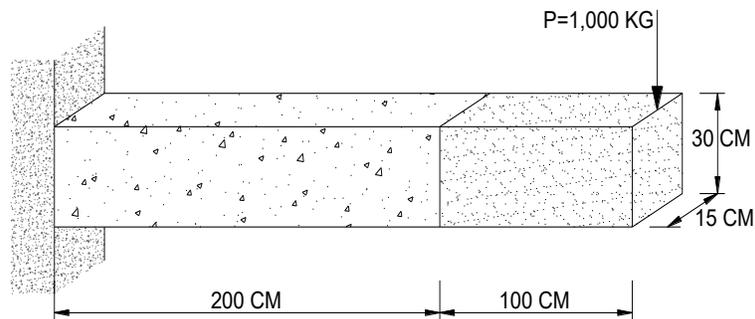


Figura 5.46 Viga híbrida.

Para el sólido se ha considerado con las propiedades mecánicas del concreto, por lo tanto, se tiene un módulo elástico (E) de $221,360.0 \text{ kg/cm}^2$ y una relación de Poisson (ν) de 0.20. Por otro lado, para la estructura tipo marco se han considerado las propiedades mecánicas del acero, teniendo un módulo elástico (E) de $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Al realizar el modelo en el software FEAP, este queda de la siguiente forma:

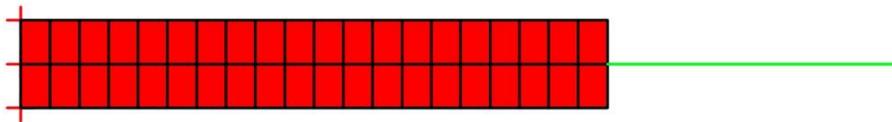


Figura 5.47 Modelo FEAP viga híbrida.

Se puede observar que este modelo no es muy parecido al de los ejemplos anteriores, esto es debido a que los modelos anteriores fueron analizados como una estructura tipo sólido, en este caso también se tiene una estructura tipo marco, es por ello que el claro correspondiente a este se puede observar con una línea, pues esta corresponde al eje neutro del marco.

Cabe mencionar que se han realizado 4 mallas más, muy parecidas a las de la figura 5.47, con la diferencia en que la estructura tipo marco está empotrada al sólido con diferentes longitudes, en la primera malla el marco solo está conectado al sólido mediante un nodo (figura 5.47), las siguientes mallas tiene como empotramiento 50, 100, 150 y 200 centímetros, respectivamente, como se muestra a continuación:

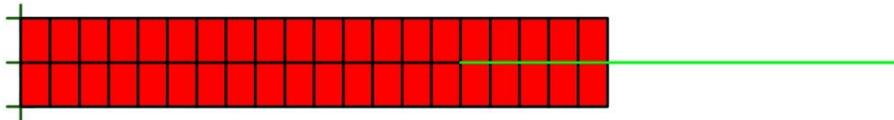


Figura 5.48 Malla con 50 cm de empotramiento.

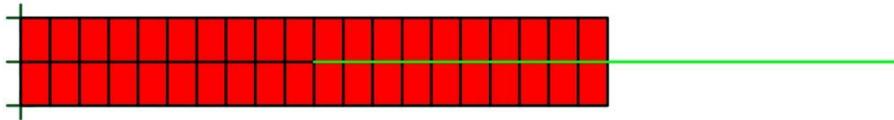


Figura 5.49 Malla con 100 cm de empotramiento.

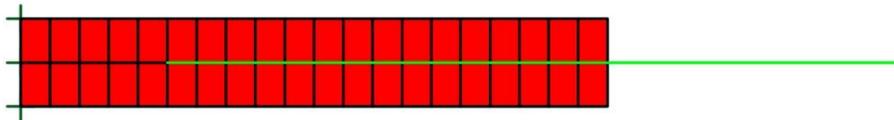


Figura 5.50 Malla con 150 cm de empotramiento.

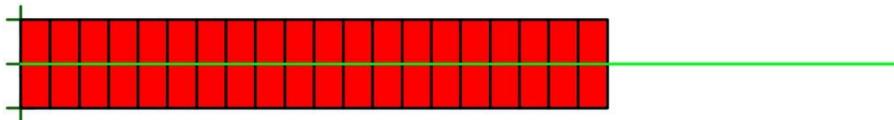


Figura 5.51 Malla con 200 cm de empotramiento.

Una vez realizado el análisis de los modelos, estos nos arrojan resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 5.6 Desplazamiento nodal.

Empotre (cm)	Desplazamiento (cm)	Diferencia consecuente
0	-262140000000.00	0.00
50	-1.0658	-262139999998.93
100	-0.9294	-0.1364
150	-0.6903	-0.2391
200	-0.3146	-0.3757

Los resultados de la tabla anterior se han graficado como se muestran a continuación en las figuras 5.52, con el fin de observar mejor el comportamiento y desplazamiento de cada malla.

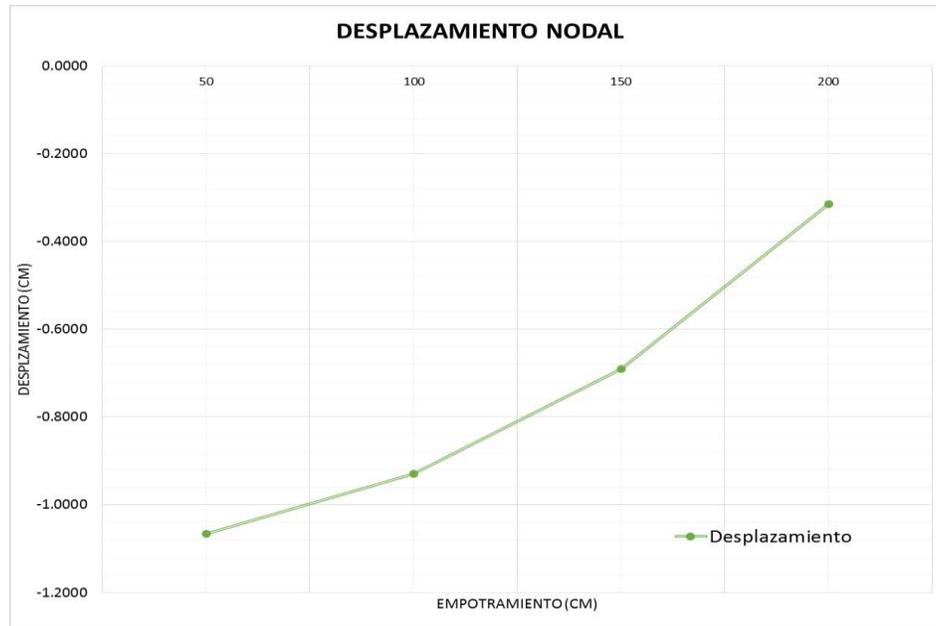


Figura 5.52 Desplazamiento nodal.

En los resultados mostrados en la tabla 5.6 se puede observar que el desplazamiento de la viga, particularmente de la estructura tipo marco cuando su empotramiento es 0 o cuando sólo está conectado en un nodo, es muy grande, pues esto implica que la estructura completa se encuentra en un estado inestable, la estructura tipo marco tiene un movimiento libre como se muestra en la figura 5.53. Es esta la razón por la que gira como un perno, figura 5.52. El desplazamiento no se grafica por ser muy grande.

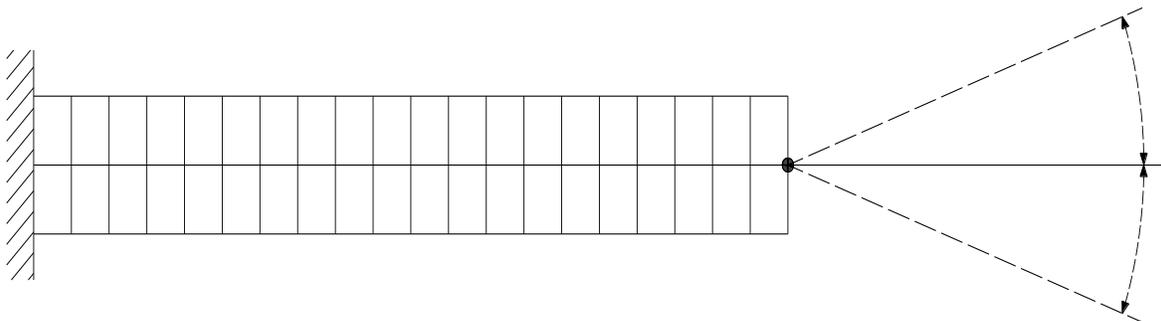


Figura 5.53 Estado inestable, movimiento libre.

Asimismo, también en la figura 5.52 se aprecia que a medida que la estructura tipo marco se empotra con mayor longitud en la estructura sólida, el desplazamiento va disminuyendo gradualmente. Lo interesante de este ejemplo es que las

reacciones isostáticas son iguales en cualquiera de las 5 mallas generadas, como se demuestra en las ecuaciones 5.12 y 5.13 (Pytel y Kiusalaas, 2011), pero el desplazamiento no es el igual en todas las mallas.

$$M = P \cdot L \quad (5.12)$$

$$\therefore M = (1,000 \text{ kg})(300 \text{ cm}) = 3,000 \text{ kg} - m$$

$$V = P \quad (5.13)$$

$$\therefore V = 1,000 \text{ kg}$$

Para complementar esta información, se presentan las siguientes figuras obtenidas del software FEAP, donde se muestra los desplazamientos verticales de las 4 mallas generadas con empotramiento de la estructura tipo marco en la estructura tipo sólido.

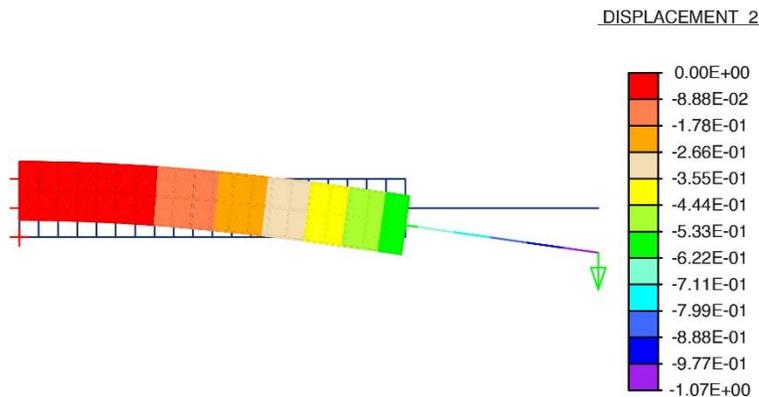


Figura 5.54 Desplazamiento vertical de malla con 50 cm de empotramiento.

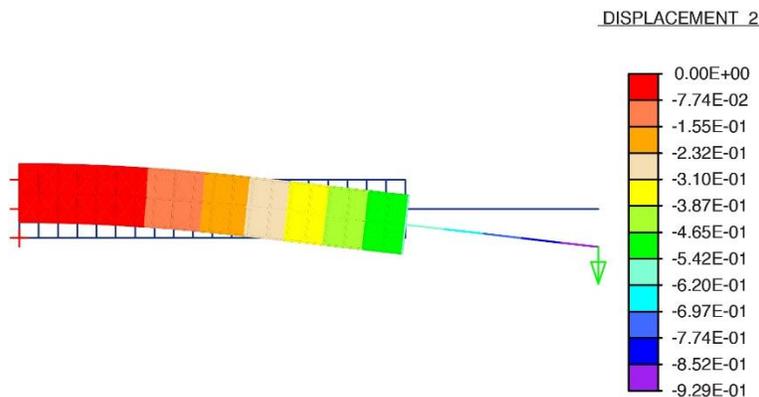


Figura 5.55 Desplazamiento vertical de malla con 100 cm de empotramiento.

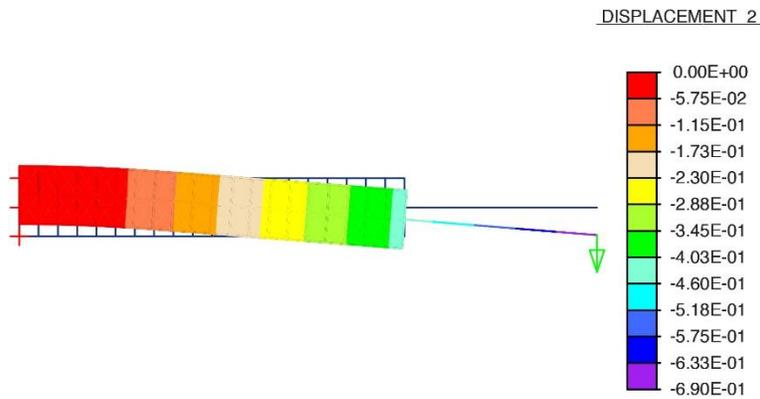


Figura 5.56 Desplazamiento vertical de malla con 150 cm de empotramiento.

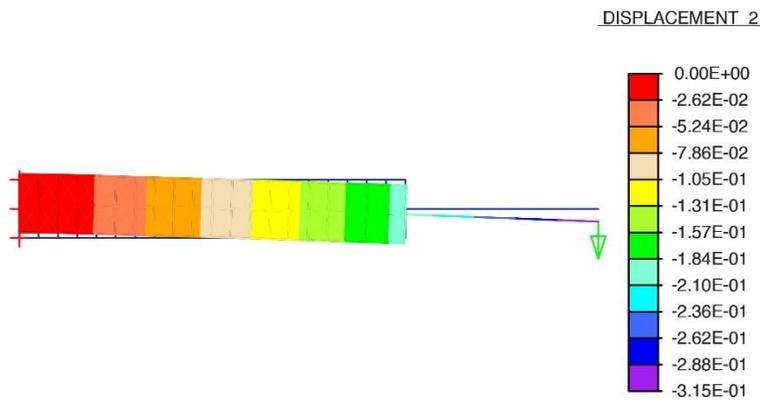


Figura 5.57 Desplazamiento vertical de malla con 200 cm de empotramiento.

Como se puede observar en las imágenes anteriores, la deformación y desplazamiento en cada malla es más evidente y estas son representaciones congruentes con los datos de la tabla 5.6 y con la gráfica 5.52.

Capítulo 6. Conclusiones

Con base en el presente trabajo, en suma, se puede concluir que el *método de los elementos finitos* se ha convertido en una herramienta muy útil para los actuales ingenieros civiles, pues ha llevado al análisis estructural a otro nivel. Con él se puede resolver problemas que con otros métodos no se podría o sería muy tardado y tedioso.

Recapitulando, se ha visto que:

1. El MEF es un método de interpolación y aproximación a una solución exacta.
2. Los momentos dentro del MEF no existen, para elementos sólidos.
3. Se pueden generar distintos tipos de mallas, variando la geometría de los elementos, es decir, la malla puede tener como elementos triángulos, rectángulos, etc.
4. Todas las mallas arrojan un resultado diferente, el hecho de cambiar un solo nodo el resultado cambiará.
5. Entre más refinada sea una malla, el resultado será más próximo a una solución exacta. Cabe resaltar que jamás se llegará a esta pues la interpolación con el MEF tiene un comportamiento asintótico respecto a la solución exacta.
6. El comportamiento de los elementos triangulares es más rígido que el comportamiento de los elementos rectangulares, pues los desplazamientos de estos son más reducidos respecto a los desplazamientos de los rectangulares.
7. Con el MEF se pueden realizar análisis de estructuras compuestas, análisis de temperatura, entre otros tipos de análisis.

Por otro lado, se puede apreciar que este método representa muchas ventajas, pero al igual de todo, tiene ciertas desventajas, por ejemplo, las nuevas tecnologías que pueden reforzar al elemento finito todavía están en edades muy tempranas, como

las funciones B-spline, por lo que habría que estar en constante actualización para poder eficientizar aún más el método de los elementos finitos.

Asimismo, para el análisis de estructuras complejas se requiere de softwares especializados e integrales que pueden ofrecer las soluciones necesarias en lapsos cortos y, para lograr esto, es necesario de equipos de cómputo adecuados.

Apéndice A

Elementos isoparamétrico.

Dentro del método de los elementos finitos, es muy usual que la geometría del elemento o de la estructura por analizar sea irregular o compleja, originando cierta dificultad al resolver estos problemas. Para simplificar esto podemos recurrir al *análisis isoparamétrico* (Hughes, et al., 2009), el cual simplifica la geometría del elemento o estructura, con dimensiones o parámetros unitarios.

Generalmente, se está acostumbrado a realizar análisis en las coordenadas cartesianas, las cuales están dentro del *mundo real*. Con el análisis isoparamétrico, las coordenadas cartesianas pasan a ser coordenadas locales, las cuales están inmersas en el *mundo padre*.

Dicho esto, es necesario realizar cálculos que pueden interpolar de un mundo a otro, es decir, realizar cálculos que sean equivalentes en un tipo de coordenadas a otras. En el MEF, estos cálculos generalmente son para interpolar parámetros de geometría y desplazamiento.

- Mundo real

La representación del mundo real, como sea mencionada, trabaja en los ejes (x, y) , por ejemplo, un elemento unidimensional:

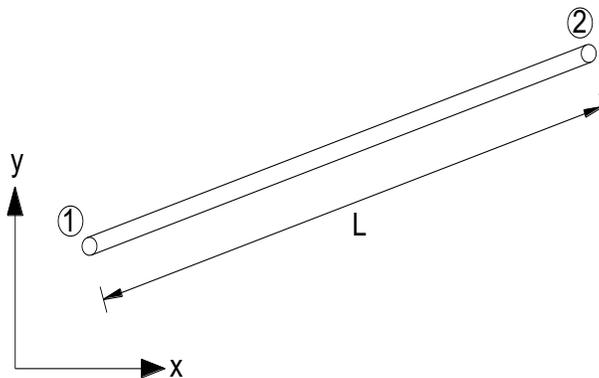


Figura A.1 Elemento unidimensional en el mundo real.

O bien, un elemento bidimensional cual sea, compuesto por 4 lados no paralelos:

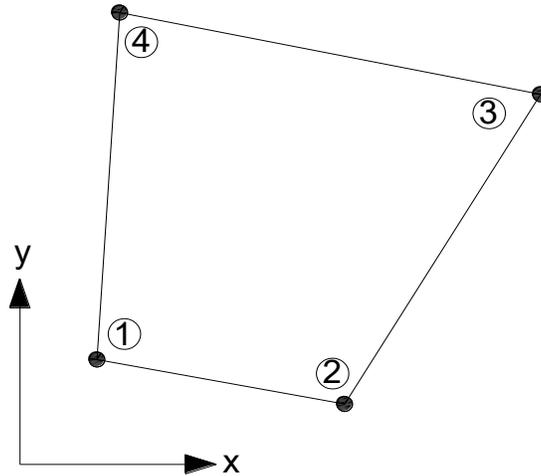


Figura A.2 Elemento bidimensional en el mundo real.

- Mundo padre

Asimismo, cuando se analiza el elemento en el mundo padre, los ejes cambian a (ξ, η) , los cuales tiene dimensiones que van de -1 a 1, es por ello que simplifican el cálculo. Por ejemplo, en el mundo padre, la figura A.1 se transformaría de la siguiente forma:

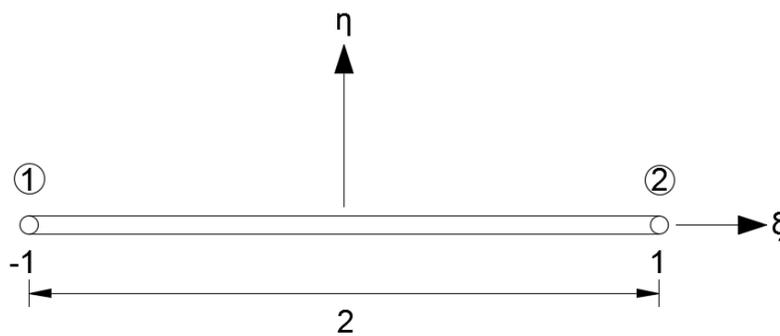


Figura A.3 Elemento unidimensional en el mundo padre.

Con esta figura se puede ver que el elemento unidimensional sólo se encuentra en el eje ξ , teniendo una longitud de 2 unidades.

O bien, la figura A.2 se transformaría de la siguiente forma:

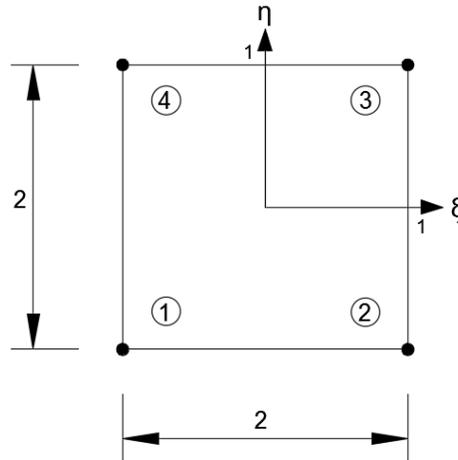


Figura A.4 Elemento bidimensional en el mundo padre.

Análogamente, el elemento bidimensional adopta la forma de un cuadrado, con longitudes de 2 unidades por lado y un área de 4 unidades cuadradas.

- Análisis isogeométrico con funciones B-spline

Cabe mencionar, que de igual manera las coordenadas cartesianas cambian para un análisis con funciones B-spline, los ejes correspondientes son (s, t) , por ejemplo, para la figura A.1, esta se transformaría de la siguiente forma:



Figura A.5 Elemento isogeométrico unidimensional en el mundo padre.

Para un elemento unidimensional con análisis con funciones B-spline, el eje donde se encuentra el elemento es t , teniendo una longitud de 1 unidades.

O bien, la figura A.2 se transformaría de la siguiente forma:

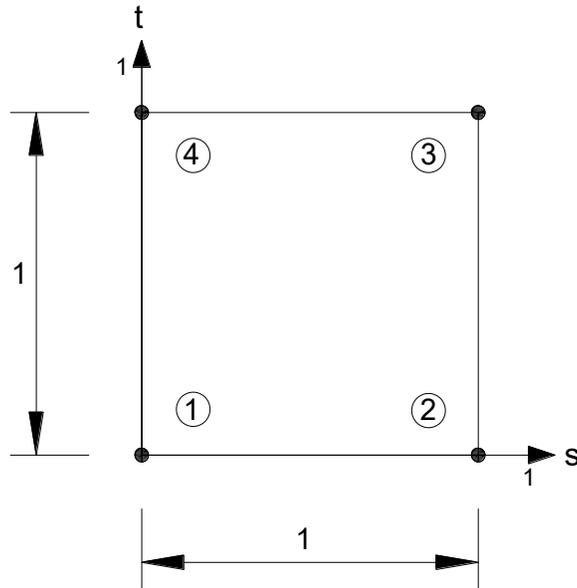


Figura A.6 Elemento isogeométrico bidimensional en el mundo padre.

Al igual que en el mundo padre, el elemento bidimensional toma una forma completamente regular y simétrica, pues el análisis isogeométrico con funciones B-spline lo obligan a tomar esta forma, con parámetros unitarios.

Apéndice B

Integración numérica de Gauss

La *integración numérica de Gauss* (Vázquez y López, 2001) es un cálculo numérico, también conocido como *cuadratura de Gauss*. Esta se utiliza dentro del MEF cuando se tiene que realizar el cálculo de integrales. En del presente trabajo se utiliza para calcular las integrales de la matriz de rigidez. Asimismo, esta puede ser aplicada para 1, 2 y 3 dimensiones. El cálculo de la integral toma la siguiente forma:

$$I = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} \sum_{k=1}^{k=l} \Phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot W_i \cdot W_j \cdot W_k$$

donde $\Phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ es el valor de una función; ξ_i, η_j, ζ_k son los puntos de integración seleccionados y W_i, W_j, W_k son factores de peso correspondientes a cada punto seleccionado. Para lo anterior, es necesario el uso de la siguiente tabla, donde se relacionan diferentes puntos de Gauss, con puntos ξ_i y sus pesos W_i .

Tabla B.1 Puntos para integración numérica de Gauss.

n	ξ_i	W_i
1	0.00000 00000	2.00000 00000
2	$\pm 0.57735 02692 = \pm 1/\sqrt{3}$	1.00000 00000
3	$\pm 0.77459 66692 = \pm \sqrt{0.6}$	0.55555 55555 = 5/9
	0.00000 00000	0.88888 88888 = 8/9
4	$\pm 0.86113 63116$	0.34785 48451
	$\pm 0.33998 10436$	0.65214 51549
5	$\pm 0.90617 98459$	0.23692 68851
	$\pm 0.53846 93101$	0.47862 86705
	0.00000 00000	0.56888 88889
6	$\pm 0.93246 95142$	0.17132 44924
	$\pm 0.66120 93865$	0.36076 15730
	$\pm 0.23861 91861$	0.46791 39346

Es importante mencionar que la expresión de la integración numérica de Gauss va simplificándose a medida que se reducen las dimensiones. Además, en esta misma integración, cuando se integra para ξ en un caso general, η y ζ permanecen constantes y lo mismo inversamente en cualquier punto.

Bibliografía

- [1] M. Ameen. *“Computational elasticity: Theory of elasticity, finite and boundary element methods”*. Alpha Science International Ltd., R.U., 2011. ISBN: 9781842654491.
- [2] H. R. Amezcua. *“Formulation and numerical implementation of an improved finite element model and its application to the study of ancient masonry structures”*, Tesis de maestría en ingeniería. UNAM, México, 2016.
- [3] J. T. Celigüeta. *“Método de los elementos finitos para análisis estructural”*. UNICOPIA C.B., España, 2008. ISBN: 9788492197026.
- [4] T.R. Chandrupatla y A. D. Belegundu. *“Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería”*. Prentice Hall, México, 1999. ISBN: 9789701702604.
- [5] R. D. Cook. *“Improved two-dimensional finite element”*. Journal of the Structural Division, 1974, Vol. 100, NÚM. 9, pág. 1851-1863.
- [6] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha y R. J. Witt. *“Concepts and applications of finite element analysis”*. Wiley, E.E.U.U., 2001. ISBN: 9780471356059.
- [7] J. M. Cubo. *“Aplicación del análisis por elementos finitos en la ingeniería naval”*, Tesis de pregrado. Universidad de Cádiz, España, 2010.
- [8] R. H. Gallagher. *“Finite element analysis: fundamentals”*. Prentice Hall College Div., E.E.U.U., 1975. ISBN: 9780133172485.
- [9] J. M. Gere y S. P. Timoshenko. *“Mechanics of materials”*. PWS-KENT Pub. Co., R. U., 1991. ISBN: 9780412368806.
- [10] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell y Y. Bazilevs. *“Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA”*. Wiley, R. U., 2009. ISBN: 9780470748732.
- [11] J. E. Hurtado. *“Introducción al análisis estructural por elementos finitos”*. Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2012. ISBN: 958932276-X.
- [12] J. Magoon. *“Application of the B-spline collocation method to a geometrically non-linear beam problema”*, Thesis for master of science degree. Rochester Institute of Technology, E.E.U.U., 2010.

- [13] Normas Técnicas Complementarias para el Diseño de Estructuras de Concreto, CDMX, 2004.
- [14] D. Pavlou. *“Essentials of the finite element method: for mechanical and structural engineers”*. Elsevier. Academic Press, E.E.U.U., 2015. ISBN: 9780128023860
- [15] T. H. H. Pian y C. Wu. *“Hybrid and incompatible finite element methods”*. Chapman & Hall/CRC, E.E.U.U., 2006. ISBN: 9781584882763.
- [16] A. Pytel y J. Kiusalaas. *“Mechanics of materials”*. Cengage Learning, E.E.U.U., 2011. ISBN: 9780495667759.
- [17] J. N. Reddy. *“An introduction to continuum mechanics”*. Cambridge, E.E.U.U., 2013. ISBN: 9781107025431
- [18] J. N. Reddy. *“An Introduction to the Finite Element Method”*. Mc Graw Hill, E.E.U.U., 2005. ISBN: 9780072466850.
- [19] J. Retama V. *“Formulation y approximation to problems in solids by embedded discontinuity models”*, Tesis de doctorado en ingeniería. UNAM, México, 2010.
- [20] D. F. Rogers. *“An introduction to NURBS. With historical perspective”*. Morgan Kaufmann, E.E.U.U., 2000. ISBN: 9781558606692.
- [21] R. L. Sack. *“Matrix structural analysis”*. Waveland Pr Inc, E.E.U.U., 1994. ISBN: 9780881338249
- [22] F. L. Stasa. *“Applied Finite Element Analysis for Engineers”*. CBS Publishing. New York. 1986. ISBN: 9780039107444.
- [23] R. L. Taylor. *FEAP: a “Finite Element Analysis Program”*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2013.
- [24] S. P. Timoshenko. *“History of strength of materials”*. Dover Publications Inc., E.E.U.U., 1983. ISBN: 9780486611877.
- [25] A. C. Urugal y S. K. Fenster. *“Advanced strength and applied elasticity”*. Prentice Hall, E.E.U.U., 2003. ISBN: 9780130473929.
- [26] M. Vázquez y E. López. *“El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural”*. Editorial Noela, España, 2001. ISBN: 9788488012067.

- [27] K. Washizu. "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*". Pergamon Press, R. U., 1975. ISBN: 9780080176536.
- [28] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. "*The finite element method: its basis and fundamentals*". Elsevier. Butterworth-Heinemann, R. U., 2013. ISBN: 9781856176330.