



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**PARÁMETROS FUNDAMENTALES  
PARA EL DISEÑO DE INTERRUPTORES  
RF MEMS TIPO VIGA VOLADIZA CON  
ACTUACIÓN ELECTROSTÁTICA**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**INGENIERO ELÉCTRICO - ELECTRÓNICO**

**P R E S E N T A**

**SALVADOR EMILIO SIERRA BENAVIDEZ**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. JORGE RODRIGUEZ CUEVAS**



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Septiembre 2017**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

# *DEDICATORIA*

A mi Señor y Salvador Jesucristo,  
por su infinito amor y grande misericordia.  
“Porque de Él, y por Él, y para Él, son todas las cosas.  
A Él sea la gloria por los siglos. Amén”

Rom 11:36



*“Porque de tal manera amó Dios al mundo, que ha dado a su Hijo unigénito, para que todo aquel que en Él cree, no se pierda mas tenga vida eterna”.*  
*Jn 3:16*



---

---

# AGRADECIMIENTOS

*A Dios por haberme dado el privilegio de terminar una carrera universitaria, por darme más de lo que pudiera imaginar.*

*A mi madre, María Luisa Benavidez por ser mi mayor ejemplo de esfuerzo, perseverancia y amor, además de motivarme a estudiar y apoyarme en todo momento.*

*A mi abuelita, Sara Rubio, a mi hermana Nadia Elizabeth y a mi padre Salvador Sierra por su ánimo y apoyo.*

*A mi familia, amigos y compañeros que he tenido a lo largo de mis estudios, por su apoyo directo o indirecto que me han brindado para el buen término de esta etapa de mi vida, en especial a la familia Tecuatl Morán, por sus consejos en momentos importantes de ella y a mi colega y amigo Francisco Barbadillo, por acompañarme a lo largo de la carrera.*

*A mi director de tesis, Dr. Jorge Rodríguez Cuevas, mi más sincero agradecimiento, por su apoyo, conocimiento y guía que me brindó durante el desarrollo de este trabajo, además no sólo en el ámbito académico sino por sus consejos para la vida en general y por brindarme su amistad.*

*De la misma manera, agradezco al Dr. José Ismael Martínez López por sus consejos y apoyo en mi formación académica y personal.*

*A cada uno de mis sinodales, Dr. Pablo Pérez Alcazar, Dr. Oleksandr Martynyuk e Ing. Salvador Zamora por dedicar parte de su tiempo al revisar el presente trabajo, por sus observaciones y consejos para mejorarlo.*

*A Cuauhtémoc y Mario, por asesorarme y apoyarme en las dudas surgidas al realizar este trabajo.*

*A CRU por su apoyo en mi formación integral y por acompañarme en la culminación de mis estudios universitarios, en especial a Sung Jae por disponer de su tiempo para apoyarme, por su amor a Dios, a México y transmitírmelo.*

*Finalmente agradezco a la DGAPA, proyecto PAPIIT IN114116 titulado **Arreglos reflectivos de baja polarización cruzada** por el apoyo económico recibido.*

*Salvador E. Sierra Benavidez*



---

---

# ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	I
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	XI
Introducción	1
<b>1. ASPECTOS GENERALES DE LOS INTERRUPTORES RF MEMS</b>	<b>3</b>
1.1. ¿Qué son los RF MEMS? . . . . .	4
1.2. Tipos de actuación en interruptores RF MEMS . . . . .	5
1.2.1. Actuación Magnetostática . . . . .	6
1.2.2. Actuación Térmica . . . . .	8
1.2.3. Actuación SMA . . . . .	9
1.2.4. Actuación Piezoeléctrica . . . . .	10
1.2.5. Actuación Electrostática . . . . .	12
1.3. Tipos de interruptores RF MEMS con actuación electrostática . . . . .	13
1.3.1. Interruptor en configuración serie . . . . .	14
1.3.2. Interruptor en configuración derivación . . . . .	14
1.3.3. Interruptores RF MEMS con anclaje especial . . . . .	15
1.4. Principios y herramientas de diseño . . . . .	16
1.5. Conclusiones del capítulo . . . . .	19
<b>2. ESTADO DEL ARTE DE LOS PARÁMETROS DE LOS INTERRUPTORES RF MEMS</b>	<b>21</b>
2.1. Parámetros para el análisis del desarrollo de interruptores de bajo voltaje .	21



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

2.2.	Parámetros para el análisis de la respuesta electromecánica dinámica de un interruptor RF MEMS . . . . .	24
2.3.	Parámetros para el análisis de la respuesta electrodinámica de un interruptor RF MEMS . . . . .	27
2.4.	Aplicaciones de hoy en día . . . . .	27
2.5.	Conclusiones del capítulo . . . . .	31
<b>3.</b>	<b>COMPORTAMIENTO ELECTROMECAÁNICO-ESTÁTICO DE INTERRUPTORES RF MEMS</b>	<b>33</b>
3.1.	Ecuación Euler - Bernoulli que gobierna la deformación de una viga voladiza.	34
3.1.1.	Fuerza cortante . . . . .	37
3.1.2.	Momento flexionante . . . . .	38
3.2.	Fuerza electrostática que actúa en una viga voladiza. . . . .	39
3.2.1.	Fuerza electrostática en placas paralelas . . . . .	42
3.2.2.	Fuerza electrostática en viga gruesa . . . . .	43
3.3.	Constante de rigidez de interruptores RF MEMS . . . . .	44
3.3.1.	Constante de rigidez en paralelo . . . . .	46
3.3.2.	Constante de rigidez en serie . . . . .	47
3.4.	Voltaje de jale y voltaje de liberación en interruptores RF MEMS con actuación electrostática . . . . .	49
3.4.1.	Voltaje de jale . . . . .	49
3.4.2.	Voltaje de liberación . . . . .	50
3.5.	Voltaje de actuación . . . . .	51
3.6.	Voltaje de ruptura . . . . .	52
3.7.	Análisis modal . . . . .	53
3.8.	Conclusiones del capítulo . . . . .	60
<b>4.</b>	<b>COMPORTAMIENTO ELECTROMECAÁNICO DINÁMICO DE INTERRUPTORES RF MEMS</b>	<b>61</b>
4.1.	Análisis dinámico de un sistema masa - resorte - amortiguador. . . . .	62
4.1.1.	Respuesta libre de un sistema amortiguado . . . . .	63
4.1.2.	Respuesta forzada de un sistema amortiguado . . . . .	64
4.2.	Constante de amortiguamiento en interruptores RF MEMS tipo viga voladiza	65
4.3.	Análisis dinámico en estado estable. . . . .	68
4.4.	Análisis transitorio . . . . .	72
4.4.1.	Sistema críticamente amortiguado . . . . .	72
4.4.2.	Sistema subamortiguado . . . . .	72
4.4.3.	Sistema sobreamortiguado . . . . .	73

4.4.4. Sistema críticamente estable . . . . .	74
4.5. Factor de calidad mecánico. . . . .	74
4.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	78
<b>5. ANÁLISIS ELECTRODINÁMICO DE INTERRUPTORES RF MEMS</b>	<b>79</b>
5.1. Circuito equivalente . . . . .	79
5.1.1. Efecto capacitivo . . . . .	80
5.1.2. Efecto resistivo . . . . .	81
5.1.3. Inductancia . . . . .	82
5.1.4. Línea de transmisión . . . . .	82
5.1.5. Circuito eléctrico final . . . . .	84
5.2. Parámetros S del interruptor . . . . .	85
5.2.1. Pérdidas por retorno . . . . .	87
5.2.2. Pérdidas de inserción y aislamiento . . . . .	89
5.3. Factor de calidad de conmutación . . . . .	91
5.4. Conclusiones del capítulo . . . . .	96
<b>CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>97</b>
<b>A. MODELOS MATEMÁTICOS</b>	<b>101</b>
A.0.1. Fórmulas de Euler . . . . .	101
A.0.2. Serie de Taylor . . . . .	101
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>



---

---

# LISTA DE FIGURAS

1.1. Actuador magnético. . . . .	8
1.2. Microactuadores térmicos: a) doble material, b) viga flexionada, c) flexible. . . . .	8
1.3. Actuación SMA: a) micropinza, b) proceso de agarre del actuador. . . . .	9
1.4. Actuadores piezoeléctricos: a) actuador simple, b) actuador de doble material. . . . .	11
1.5. Principio de un actuador electrostático: dos placas paralelas. . . . .	12
1.6. Estructura base de un interruptor RF MEMS con actuación electrostática. . . . .	13
1.7. Interruptor tipo serie: a) estructura en voladizo con contacto metal - metal, b) estructura en voladizo en estado abierto con contacto capacitivo, c) estructura en voladizo en estado cerrado. . . . .	14
1.8. Interruptor tipo derivación: a) en estado abierto, b) en estado cerrado, c) modelo 3D de un interruptor de doble anclaje. . . . .	15
1.9. Interruptores especiales: a) actuador de placas paralelas a 90 grados y b) actuador con torsión. . . . .	16
1.10. Actuador tipo peine. . . . .	16
1.11. Paradigmas de diseño. . . . .	17
1.12. Ejemplo de proceso de diseño. . . . .	18
1.13. Estructura mallada utilizando FEM. . . . .	18
2.1. Interruptor RF MEMS con viga en voladizo. . . . .	22
2.2. Configuración en serie de un interruptor MEMS. . . . .	22
2.3. Diseño de una viga en voladizo con forma de serpentina. . . . .	23
2.4. Desplazamiento de la viga al cambio de posición del electrodo fijo. . . . .	24
2.5. Comportamiento dinámico: a) respuesta dinámica a diferente razón de voltaje de actuación, b) respuesta dinámica como función de diferentes factores de calidad. . . . .	25

2.6. Modelado de una viga voladiza. . . . .	26
2.7. Elementos de una viga voladiza. . . . .	26
2.8. Parámetros S simulados para el interruptor RF MEMS. . . . .	27
2.9. Parámetros S medidos del interruptor RF MEMS. . . . .	27
2.10. Circuito de prueba para un interruptor RF MEMS. . . . .	28
2.11. Tablero de prueba. . . . .	29
2.12. Prueba de rendimiento del interruptor RF MEMS. . . . .	29
2.13. Rendimiento de los parámetros S del interruptor RF MEMS. . . . .	30
3.1. Tipos de carga en vigas en voladizo: a) carga puntual en orilla no anclada, b) carga puntual en posición arbitraria de la viga, c) carga distribuida en toda la viga y d) carga distribuida en una distancia arbitraria. . . . .	34
3.2. Deflexión de una viga a lo largo del eje $Y$ al ser aplicada una carga puntual.	35
3.3. Deflexión de una viga voladiza. . . . .	36
3.4. Fuerza cortante y momento flexionante en un corte transversal. . . . .	37
3.5. Deformación de una viga. . . . .	38
3.6. Placas con espacio entre placas pequeño. . . . .	41
3.7. Capacitor de placas paralelas. . . . .	43
3.8. Líneas de campo eléctrico de una viga gruesa. . . . .	43
3.9. Viga sujeta a un corte transversal: a) vista en 3D, b) vista en el plano $xy$ . .	45
3.10. Combinación de constantes de rigidez en paralelo. . . . .	47
3.11. Combinación de estructuras para disminuir la constante de rigidez. . . . .	48
3.12. Diagrama de cuerpo libre de un sistema masa - resorte. . . . .	49
3.13. Punto crítico donde colapsa la viga. . . . .	50
3.14. Gráfica de histéresis de un interruptor RF MEMS tipo viga voladiza. . . .	52
3.15. Modelo masa-resorte. . . . .	54
4.1. Sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	62
4.2. Modelo dinámico de placas paralelas. . . . .	65
4.3. Amortiguamiento en placas paralelas. . . . .	66
4.4. Geometría del amortiguamiento de una placa larga rectangular. . . . .	67
4.5. Gráfica que muestra una función dada de $a$ hacia $b$ . . . . .	70
4.6. Respuesta en estado estable de un interruptor RF MEMS. . . . .	71
4.7. Movimiento críticamente amortiguado con $\zeta = 1$ . . . . .	72
4.8. Movimiento subamortiguado con diferentes valores entre $0 < \zeta < 1$ . . . . .	73
4.9. Movimiento sobreamortiguado con $\zeta > 1$ . . . . .	73
4.10. Movimiento críticamente estable con $\zeta = 0$ . . . . .	74
4.11. Respuesta en frecuencia de un modelo masa-resorte-amortiguador. . . . .	76

4.12. Función de transferencia para distintos valores de $Q$ de un modelo masa-resorte-amortiguador. . . . .	77
5.1. Modelo eléctrico equivalente de la viga voladiza: a) electrodo en medio de la viga, b) electrodo en el mismo punto de contacto. . . . .	80
5.2. Circuito equivalente para el interruptor en configuración serie en estado cerrado. . . . .	82
5.3. Representación de una línea de transmisión. . . . .	83
5.4. Guía de onda coplanar (CPW). . . . .	83
5.5. Circuito eléctrico del interruptor en estado abierto. . . . .	84
5.6. Circuito eléctrico del interruptor en estado cerrado. . . . .	85
5.7. Una red arbitraria en microondas. . . . .	85
5.8. Línea de transmisión terminada en una carga con impedancia $Z_L$ . . . . .	87
5.9. Línea de transmisión terminada en una carga con impedancia $Z_L$ . . . . .	88
5.10. Circuito equivalente para calcular $S_{11}$ . . . . .	88
5.11. Circuito equivalente. . . . .	89
5.12. Bipuerto recíproco sin pérdidas usado para transformar el par de impedancias de carga $Z_1$ y $Z_2$ en el par de impedancias $Z_{in}^{cerrado}$ y $Z_{in}^{abierto}$ . . . . .	91



---

---

# LISTA DE TABLAS

1.1. Resumen de dispositivos usados para comparar el rendimiento de los MEMS.	4
1.2. Diferentes configuraciones de los interruptores RF MEMS. . . . .	6
1.3. Propiedades típicas de los materiales piezoeléctricos más comunes. . . . .	11
2.1. Comparación de los parámetros simulados y medidos a 40 GHz. . . . .	28
2.2. Parámetros de los interruptores RF MEMS mencionados en el estado del arte.	31
3.1. Tipos de cargas. . . . .	46
3.2. 5 Primeros modos naturales de una viga voladiza. . . . .	58
3.3. Modos de vibración simulados en COVENTOR. . . . .	59
4.1. Coeficientes de pérdidas por anclaje para viga voladiza . . . . .	75



---

---

# INTRODUCCIÓN

El incremento en la demanda por las comunicaciones inalámbricas ha traído como consecuencia un gran impulso en el desarrollo de sistemas de radio frecuencia (RF) y microondas, que puedan cubrir requisitos básicos como son: altas frecuencias de operación, bajas pérdidas, alta linealidad, alto intervalo de sintonía y un bajo consumo de potencia, en aplicaciones tales como osciladores controlados por voltaje (VCO), filtros sintonizados, desplazadores de fase, transmisores y receptores. Por lo que en años recientes, los microsistemas electromecánicos (MEMS) han logrado un marcado avance en la innovación de interruptores, capacitores sintonizados por voltaje, inductores integrados de alto factor de calidad, resonadores y filtros. Hoy en día, los investigadores han desarrollado varios dispositivos como son los microsensores o los transductores utilizando vigas basadas en tecnología MEMS, entre los cuales se encuentran los interruptores o también conocidos como conmutadores electrónicos, debido a que proveen mejor rendimiento en términos de bajo consumo de potencia, aislamiento alto y pérdidas de inserción bajas, en comparación con su contraparte de dispositivos de estado sólido, dentro de los cuales se encuentran el diodo P-I-N y los transistores FET. Además, el uso de este tipo de dispositivos tiene otras grandes ventajas, tales como la miniaturización, la mejora en la transducción de la señal, incremento en la inmunidad a la interferencia electromagnética, menor costo de producción comparado con implementaciones multichip y la fabricación compatible con la tecnología de los circuitos integrados (CI); lo cual hace que los interruptores fácilmente puedan interconectarse con el resto de un circuito integrado.

Con base en lo anterior, se plantea el estudio de los parámetros esenciales que se deben tomar en cuenta en el análisis y diseño de interruptores MEMS tipo viga voladiza con actuación electrostática, que puedan operar en bandas RF y microondas, con altos desempeños tanto en el comportamiento mecánico como en el electrodinámico.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Objetivo

Investigar los parámetros fundamentales para el diseño de interruptores MEMS tipo viga voladiza con actuación electrostática en las bandas de RF y microondas.

## Estructura General de la Tesis

La presente tesis está estructurada de la siguiente manera:

- ✈ En el primer capítulo se realiza una revisión sobre los aspectos generales de los interruptores RF MEMS, como son: mecanismos de actuación, tipos de contacto, vigas y sus clasificaciones.
- ✈ En el segundo capítulo se presenta el estado del arte de los parámetros de los interruptores RF MEMS con actuación electrostática.
- ✈ En el tercer capítulo se desarrolla el análisis electromecánico estático, por lo que se revisa la ecuación de movimiento, la constante de rigidez, el voltaje de jale, la frecuencia natural y una breve introducción de los modos de vibración para una viga voladiza.
- ✈ En el cuarto capítulo se analiza el comportamiento electromecánico dinámico de los interruptores RF MEMS, se obtiene la constante de amortiguamiento y el factor de calidad mecánico, para dar paso al comportamiento no lineal del interruptor y un método propuesto para el análisis del mismo.
- ✈ En el quinto capítulo se presenta el comportamiento electrodinámico de los interruptores RF MEMS y se analiza el factor de calidad de conmutación, el circuito eléctrico equivalente, las pérdidas de inserción y el aislamiento.
- ✈ Por último, se presentan las conclusiones generales del trabajo, además de un apéndice de expresiones utilizadas a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## ASPECTOS GENERALES DE LOS INTERRUPTORES RF MEMS

*“Lo que sabemos es una gota, lo que ignoramos un inmenso océano. La admirable disposición y armonía del universo, no ha podido sino salir del plan de un Ser omnisciente y omnipotente.”*

---

MEMOIRS OF THE LIFE, WRITINGS, AND DISCOVERIES OF SIR ISAAC  
NEWTON, BREWSTER DAVID, 1855

A raíz del famoso discurso de Richard P. Feynman *“Hay mucho espacio al fondo”* (*“There is plenty of room at the bottom”* [1]), muchas de las investigaciones han tomado el rumbo de la miniaturización de las cosas debido a las grandes ventajas que éstas suponen en la tecnología. Por ejemplo, en los últimos años dentro del área de los dispositivos electrónicos, los interruptores microelectromecánicos de radio frecuencia (RF MEMS) han mostrado mejor rendimiento que su contra-parte en estado sólido, resumidos en la tabla 1.1 dada en [2], donde se muestra una comparación de diversos dispositivos, tomados de numerosas fuentes, donde resalta que el principal criterio de comparación es la razón de impedancias entre los estados abierto y cerrado, de los dispositivos conmutables. Ésta es definida como:

$$Z_{razon} = \frac{Z_{cerrado}}{Z_{abierto}} = j\omega CR \quad (1.1)$$

en donde el producto  $CR$  es una figura de mérito que se utiliza para caracterizar al interruptor (FOM por sus siglas en inglés) y en ocasiones se reporta como Factor de Calidad de Conmutación como se describirá en el capítulo 5.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tabla 1.1:  
Resumen de dispositivos usados para comparar el rendimiento de los MEMS.

Dispositivo	Clase	FOM (fs)	Potencia consumida (mW)	Capacitancia (fF)	Resistencia ( $\Omega$ )
NE3290	FET	500	0	100	5
Blackwell	AlGaAs FET	270	0	170	1.6
MA4GP022	GaAs PIN 4.5	220	5	110	2
MA4GP022	GaAs PIN 20	110	25	110	1
Raytheon	MEMS puente	12	0	35	0.35
Rockwell	MEMS en voladizo	2.5	0	11	0.22

## 1.1. ¿Qué son los RF MEMS?

Los microsistemas electromecánicos (MEMS) o también conocidos en Europa como Tecnología de Microsistemas (MST), es un término acuñado por el Prof. R. Howe, el cual hace referencia a toda aquella tecnología, donde los elementos mecánicos, como las membranas o vigas han sido manufacturadas a una longitud menor a 1 mm pero mayor que 1  $\mu m$ , combinadas con componentes tanto eléctricos como mecánicos y además, son fabricadas usando tecnologías de procesamiento de circuitos integrados. Dentro de la tecnología MEMS se encuentran productos para diferentes aplicaciones, tales como la industria automotriz y óptica, así como para las ciencias biológicas y de electrónica en alta frecuencia. Para esta última aplicación, en general, podemos definir tres categorías que abarcan la extensión total de los MEMS: sensores, actuadores y estructuras pasivas. La categoría de nuestro interés es la de los actuadores, ya que estos convierten energía eléctrica a una forma de movimiento donde los parámetros más importantes que deben ser tomados en cuenta para el desarrollo de estas estructuras son:

- ▣ Fuerza generada en rango de mili-newton.
- ▣ Desplazamiento de 1  $\mu m$  o mayor.
- ▣ Respuesta lineal a señales de entrada.
- ▣ Fabricación compatible con micromaquinado superficial estándar.
- ▣ Confiabilidad, es decir, largo tiempo de vida.

Dentro de esta categoría, los dispositivos de mayor interés son los interruptores RF MEMS, los cuales están conformados por dos diferentes secciones: el mecanismo de actuación y el tipo de contacto. La fuerza requerida dentro del movimiento mecánico se obtiene a

través del mecanismo de actuación, siendo actualmente, los más comunes: el electrostático, el magnetostático, el piezoeléctrico, el térmico y el efecto memoria (SMA, por sus siglas en inglés). Además, los interruptores pueden ser clasificados como conmutadores verticales y conmutadores laterales dependiendo de la dirección del movimiento de la estructura del actuador. No obstante, en [3] se menciona que el conmutador vertical tiene un mejor rendimiento fuera del plano de desplazamiento y el contacto superficial, y el conmutador lateral tiene un mejor rendimiento dentro del plano de desplazamiento y la pared lateral de contacto. Sumado a que usualmente los conmutadores verticales son fabricados usando un proceso de micromaquinado superficial y con metal como material estructural, son mayormente utilizados, mientras que los conmutadores laterales usualmente son fabricados usando un proceso de micromaquinado en masa usando cristal o silicio como material estructural.

Por otra lado, se ha reportado que los interruptores con actuación tipo electrostática, magnetostática o piezoeléctrica tienen alta confiabilidad en el intervalo de frecuencias de 0.1- 100 GHz. En el tipo de contacto, un interruptor MEMS puede ser diseñado en configuración serie o paralelo, y puede ser realizado tanto para contacto metal - metal o para contacto capacitivo. Por lo anterior, dependiendo de los aplicaciones, así como de los distintos requerimientos de las mismas, podemos tomar la decisión de que tipo de interruptor se trabajará. Para tener una mejor visualización, la tabla 1.2 de [4], se encuentra un resumen de las diferentes combinaciones para diseñar un interruptor RF MEMS.

A continuación se dará una breve reseña sobre los mecanismos de actuación y algunas configuraciones que pueden usarse en el diseño de un interruptor RF MEMS.

## 1.2. Tipos de actuación en interruptores RF MEMS

El fenómeno de actuación se refiere al hecho de efectuar o transmitir movimiento mecánico, fuerzas y trabajo, por medio de un dispositivo o sistema, en su entorno, en respuesta a la aplicación de una diferencia de potencial o una corriente de polarización [5].

Los mecanismos de actuación que actualmente se han investigado para los interruptores RF MEMS son:

- Actuación Magnetostática.
- Actuación Térmica.
- Actuación Piezoeléctrica.
- Actuación Electrostática.
- Actuación SMA.

Tabla 1.2:  
Diferentes configuraciones de los interruptores RF MEMS.

MECANISMO DE ACTUACIÓN						
	Voltaje (V)	Corriente (mA)	Potencia (mW)	Tamaño	Tiempo de conmutación ( $\mu$ S)	Fuerza de contacto ( $\mu$ N)
Electrostático	5 - 40	0	0	Pequeño	1-200	50 - 1000
Térmico	3 - 5	5 - 100	0 - 200	Grande	300 - 10000	500 - 4000
Magnetostático	3 - 5	20 - 150	0 - 100	Medio	300 - 1000	50 -200
Piezoeléctrico	3 - 20	0	0	Medio	50 - 500	50 -200
SMA	5	-	-	Medio	1000	50-200

TIPO DE MOVIMIENTO	
Vertical	Típicamente resulta un dispositivo de tamaño pequeño
Lateral	Típicamente resulta un dispositivo de tamaño grande

TIPO DE CONTACTO	
Metal - Metal	DC - 60 GHz
Capacitivo	6 - 120 GHz

CONFIGURACIÓN ELÉCTRICA	
Serie	DC - 50 GHz con contacto metal - metal y baja capacitancia en estado abierto 10-50 GHz con contacto capacitivo y baja capacitancia en estado abierto
Derivación	DC - 60 GHz con contacto metal - metal y baja inductancia a tierra 10-200 GHz con contacto capacitivo y baja inductancia a tierra

### 1.2.1. Actuación Magnetostática

Este mecanismo de actuación está basado en el aprovechamiento de la energía almacenada en forma de campo magnético para generar la fuerza que se requiere para mover al

elemento transductor.

El principio de un motor electromagnético ilustra este mecanismo de actuación con algunas aplicaciones, como por ejemplo, el actuador inducido móvil mostrado en la figura 1.1, donde al incrementar la corriente en la bobina, la armadura móvil es atraída a lo largo de la dirección en el eje x, alineándose con la parte fija.

La energía en forma de campo magnético está dada por la siguiente expresión:

$$W = \frac{(nI)^2}{2} \left[ \left( \frac{\mu_0 A}{g + \frac{\mu_0}{\mu} L_m} \right) \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) + \left( \frac{\mu_0 A}{g_\mu + \frac{\mu_0}{\mu} L_m} \right) \left( \frac{x}{x_0} \right) \right] \quad (1.2)$$

donde:

- ➔  $nI$  es la fuerza magnetomotriz.
- ➔  $\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre.
- ➔  $\mu$  es la permeabilidad del núcleo.
- ➔  $A$  es el área de actuación.
- ➔  $L_m$  es la longitud de la vía magnética a través del núcleo.
- ➔  $g$  es el espacio entre dos extremos del núcleo.
- ➔  $g_u$  es el espacio entre la armadura y el núcleo.
- ➔  $x_0$  es un factor de escala que indica la fracción del espacio entre el núcleo y la armadura afectado por el movimiento de la misma.

Por ende, para calcular la fuerza mecánica se toma el gradiente de la ecuación (1.2) con respecto al desplazamiento en la dirección x (véase la figura 1.1), de esta forma se obtiene [6]:

$$F_{ma} = \frac{(nI)^2}{2x_0} \left( \frac{\mu_0 A}{g_\mu + \frac{\mu_0 L}{\mu}} \right) \quad (1.3)$$

De esta ecuación es claro notar que la fuerza es no lineal con respecto a la corriente y suponiendo una resistencia de la bobina constante, la fuerza también dependerá del cuadrado del voltaje de la bobina. Aunque esta fuerza no es de proporción favorable, existe la posibilidad de incrementar la corriente a baja escala debido a que el calor puede ser disipado más rápidamente, permitiendo producir una fuerza relativamente grande. Sin embargo, la principal dificultad para el uso extenso de este tipo de actuador en un componente MEMS, es la fabricación de la bobina. En este caso, el enfoque más conveniente es el de utilizar una fabricación híbrida, donde el circuito magnético es fabricado usando micro-fabricación

y la bobina es fabricada con una técnica más convencional y después ensamblar las dos partes. Por ende, el costo alto costo que supone este enfoque hace que su uso sea limitado.

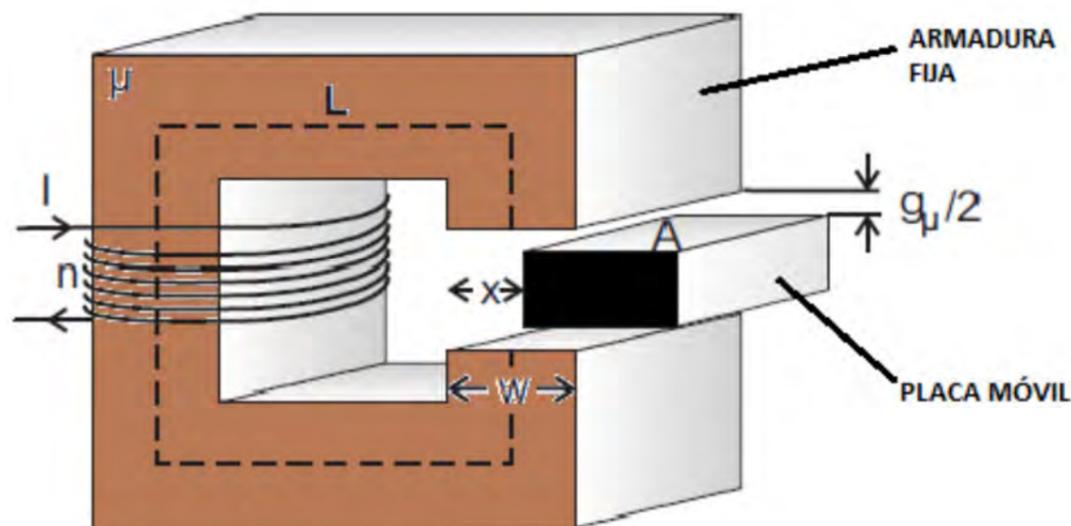


Figura 1.1: Actuador magnético.

### 1.2.2. Actuación Térmica

La energía térmica usada por esta clase de actuadores MEMS proviene invariablemente del efecto Joule, que se presenta cuando una corriente fluye a través de un elemento resistivo. Estos actuadores generalmente son grandes y la figura 1.2 muestra el diseño de diferentes microactuadores térmicos, como son: doble material (1.2a), viga flexionada (1.2b) y flexible (1.2c) [7]. Los actuadores de doble material son los más comunes y consisten de materiales con diferente coeficiente de expansión térmico, donde la deflexión del material es inducida por la diferencia de esfuerzos de las dos estructuras puestas en contacto.

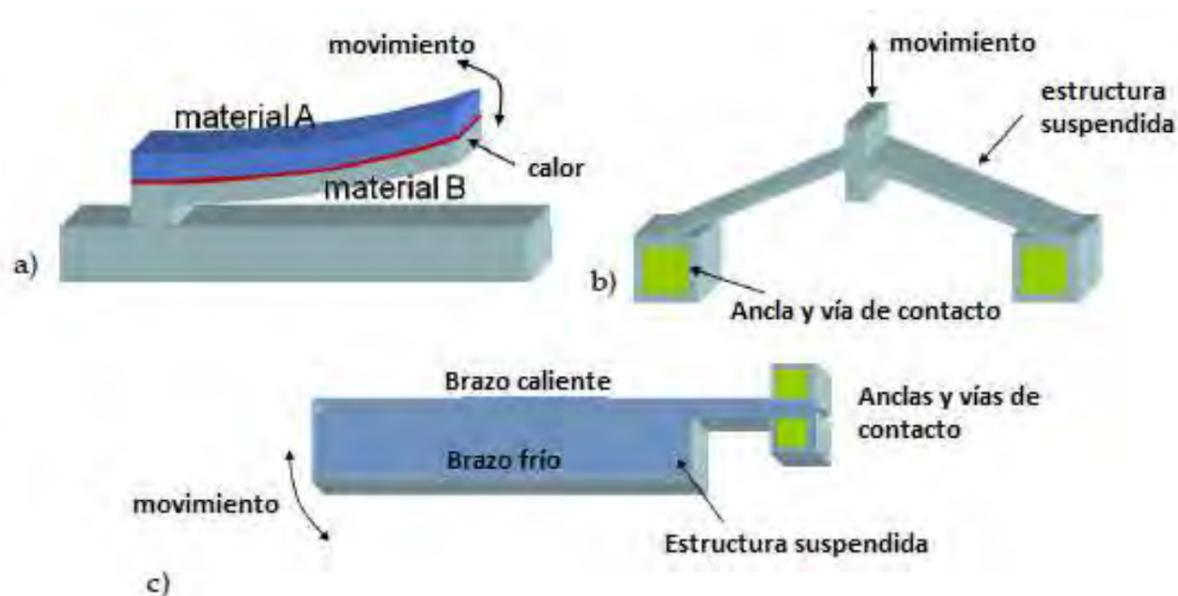


Figura 1.2: Microactuadores térmicos: a) doble material, b) viga flexionada, c) flexible.

Por otra parte, los actuadores de viga flexionada tienen anclajes que se expanden cuando son calentados y generan como salidas, la fuerza y el desplazamiento que se muestran en la figura 1.2b. Finalmente, el actuador flexible, el actuador flexible en la figura 1.2c contiene

estructuras asimétricas, por ejemplo de ancho desigual, que la flexión por un lado es debido a la expansión diferencial cuando es calentado.

Al utilizar materiales con diferente coeficiente de expansión térmica resulta en una deformación  $\epsilon_m = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T$ , donde  $\alpha_1$  es el coeficiente de expansión térmico del primer material y  $\alpha_2$  es el coeficiente de expansión térmico del segundo material en cuestión. La curvatura de un actuador de doble material, por ejemplo, estará dada por:

$$\kappa = \frac{6E_1E_2(h_1 + h_2)h_1h_2\epsilon_m}{E_1^2h_1^4 + 4E_1E_2h_1^3h_2 + 6E_1E_2h_1^2h_2^2 + 4E_1E_2h_2^3h_1 + E_2^2h_2^4} \quad (1.4)$$

donde  $E_1$  y  $h_1$  son el módulo de Young y el grosor del primer material y  $E_2$  y  $h_2$  son el módulo de Young y el grosor del segundo material respectivamente. Puesto que, es necesario que los materiales sean excitados con calor, hace que este tipo de actuadores sean demasiado lentos para responder por lo que en frecuencias de nuestro interés no son eficientes. Sin embargo, pueden ser utilizados si grandes desplazamientos con alta densidad de energía son requeridos.

### 1.2.3. Actuación SMA

El efecto de memoria es un tipo de actuación basado en condiciones especiales de los actuadores térmicos. Este efecto aparece en materiales de metálicos simples, como el cobre y en muchas aleaciones, entre las cuales se encuentra el NiTi (nitinol). En bajas temperaturas la estructura cristalina de la aleación está en la fase de flexibilidad y permite deformaciones relativamente grandes. Cuando la temperatura es aumentada, la transformación a la fase de endurecimiento toma lugar y el material pierde flexibilidad y por tanto se restaura a la posición original. La figura 1.3a presenta un diseño basado en micropinza y la figura 1.3b el proceso de agarre que experimenta el actuador.

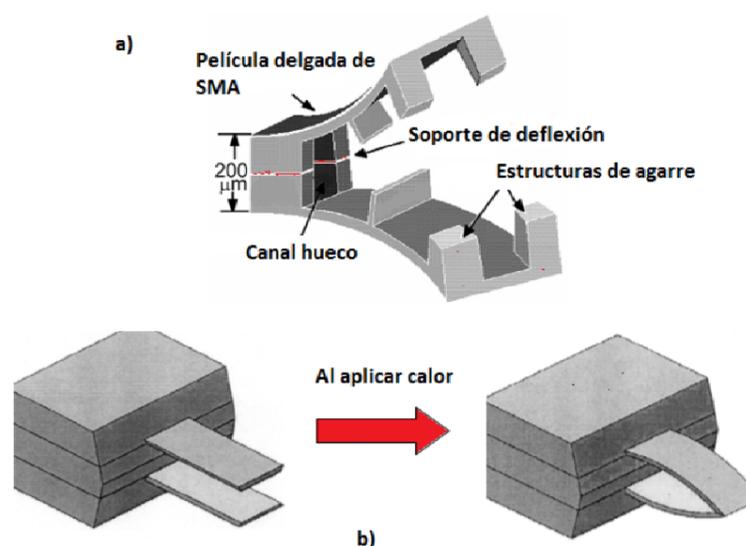


Figura 1.3: Actuación SMA: a) micropinza, b) proceso de agarre del actuador.

Las principales ventajas de este mecanismo de actuación son [8]:

- Produce fuerza relativamente grande en comparación con los otros mecanismos de actuación.
- Son capaces de producir un desplazamiento grande.
- Voltaje de actuación muy bajo ( 5-12 V).

Sin embargo, en vista que para activar el mecanismo de actuación es necesario modificar las propiedades de los materiales, las principales desventajas son:

- Sensibilidad en las propiedades en el proceso de fabricación
- Se presenta esfuerzo residual
- No linealidad en la deformación, esfuerzo, fuerza, desplazamiento.
- Tiempo de respuesta lento (alrededor de ms).

#### 1.2.4. Actuación Piezoeléctrica

Este tipo de actuación se basa en la contracción y la expansión de materiales causadas por el movimiento interno de cargas que resulta de un campo eléctrico aplicado. Los materiales en sí mismos son llamados materiales piezoeléctricos. Los materiales de este tipo de actuadores son particularmente interesantes en micro -escala debido a que tienen una alta densidad de potencia que produce una mayor fuerza para volúmenes pequeños. Para describir brevemente este efecto, tenemos que la elasticidad de un material (por ejemplo cristal) puede ser descrita al relacionar el esfuerzo unitario  $\sigma$  con la deformación  $\epsilon$ . La figura 1.4a, muestra un actuador simple, en el cual una película delgada fue depositada en un sustrato rígido. Si una diferencia de potencial  $V$  es aplicada como se muestra en la misma figura, se presentará un campo eléctrico definido como:

$$\vec{E} = -\frac{V}{H}\vec{k} \quad (1.5)$$

donde  $H$  es el grosor de la película delgada. Además, como esta película se encuentra depositada en un sustrato, las deformaciones  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$  son forzadas a ser cero. Por otra parte, el esfuerzo en  $z$  quedará descrito por el coeficiente piezoeléctrico del material ( $d$ ) [6]:

$$\epsilon_z = \frac{e_{33}}{d_{33}}E_z \quad (1.6)$$

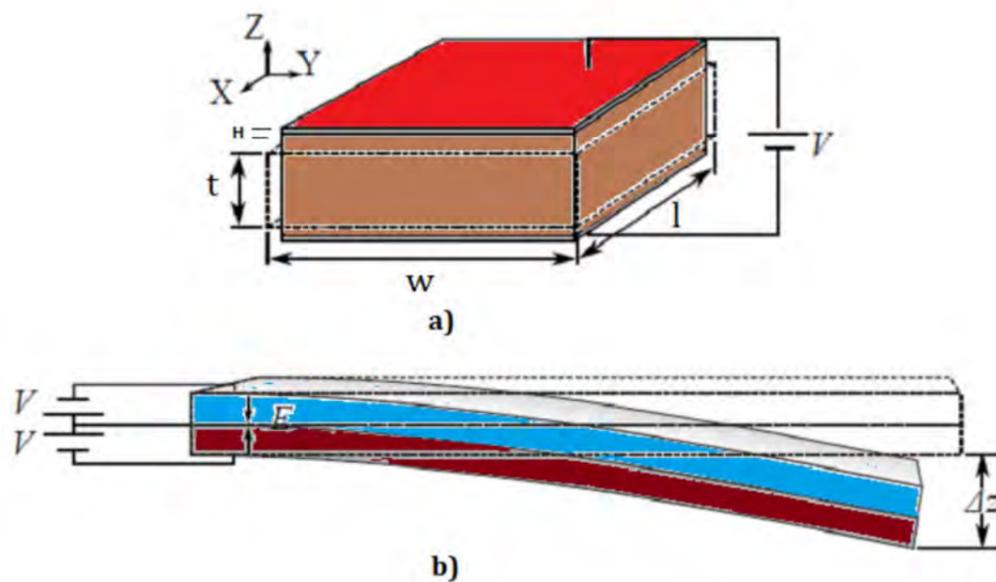


Figura 1.4: Actuadores piezoeléctricos: a) actuador simple, b) actuador de doble material.

Está claro que un actuador simple tendrá una muy pequeña reacción, por ello es más utilizada la estructura de doble material (1.4b). Esta estructura, debido a que tiene dos materiales, es polarizada con campos de signos opuestos, lo cual hace que uno de los materiales se expanda y el otro se comprima a lo largo del eje de polarización, creando una mayor deformación y como resultado un momento flexionante en la viga.

Muchos materiales tienen algún tipo de comportamiento piezoeléctrico, tales como el PZT, GaAs, ZnO y PVDF, por mencionar algunos, siendo sus propiedades más importantes las mostradas en la tabla 2.2 [9]. El PZT es el más atractivo en este mecanismo de actuación debido a que tiene una alta constante piezoeléctrica que da lugar a una transducción mecánica grande.

Tabla 1.3:  
Propiedades típicas de los materiales piezoeléctricos más comunes.

Material	$d_{31}$ ( $\times 10^{-12} C/N$ )	$E_y (GPa)$ $= \frac{1}{s_{11}}$	$\epsilon_{33}$ ( $\times 8,85 \times 10^{-12} Fm$ )
PZT	190	49	1800
Quartz	$0(d_{11} = 2,3)$	87	4.5
Oxido de Zinc	11	210	10
PVDF	15	2	10

Como se observa este mecanismo de actuación tiene muchas ventajas, como su homólogo electrostático, sin embargo la dependencia hacía las propiedades de los materiales, hace que sea demasiado sensible al medio donde sea utilizado (por ejemplo ambientes húmedos) y a la temperatura, por lo que en uso continuo cambian sus propiedades.

### 1.2.5. Actuación Electroestática

La actuación electroestática es la forma más común de conversión de energía en micro-sistemas electromecánicos y es utilizada por amplia gama de dispositivos en la actualidad. Convencionalmente, los actuadores mecánicos son raramente manejados por la fuerza electrostática, debido a que dicha fuerza es demasiado pequeña para desplazar o atraer las partes mecánicas, si el voltaje usado no es extremadamente alto. Sin embargo, con la miniaturización de las estructuras mecánicas, la fuerza electrostática llega a ser relativamente grande. Por tanto, este tipo de actuación depende en gran manera de la fuerza de atracción entre dos placas conductoras o elementos que contengan cargas opuestas, como puede observar en la figura 1.5. Si  $C$  es la capacitancia entre las dos placas,  $x$  es el espacio entre ellas y  $V$  es la diferencia de potencial aplicada externamente, la fuerza electrostática será calculada como:

$$\vec{F}_{elec} = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{x} \vec{k} \quad (1.7)$$

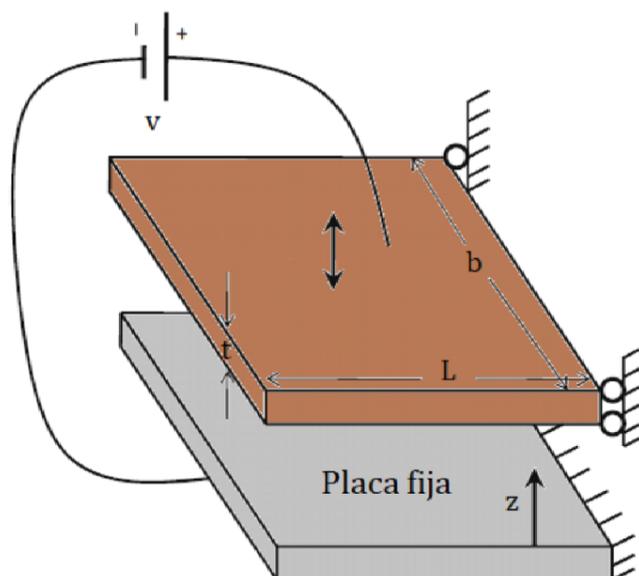


Figura 1.5: Principio de un actuador electrostático: dos placas paralelas.

Para electrodos de geometría sencilla, como la mostrada en la figura anterior, basta con conocer el modelo matemático de un capacitor de placas paralelas, espacio entre las placas y la diferencia de potencial aplicada para sustituir en la ecuación (1.7) y así, conocer el valor de la fuerza electrostática, sin embargo, para electrodos de geometría más compleja, se requerirá un análisis de elemento frontera para aproximar el valor de la capacitancia y poder conocer la magnitud de la fuerza electrostática.

La actuación electrostática no requiere un material especial a diferencia de los materiales piezoeléctricos, además, el microactuador completo puede ser fabricado utilizando un proceso de micromaquinado superficial, no como el actuador magnetostático que necesita ser dividido por su gran tamaño.

Este tipo de actuación únicamente necesita una fuente externa de energía, la cual está

disponible en los circuitos electrónicos integrados para su polarización. Y estos se caracterizan por su baja potencia de consumo y su tiempo de conmutación relativamente rápido (alrededor de  $\mu s$ ), por lo que aventaja su uso en lugar de los actuadores térmicos y SMA.

Una de las desventajas de este mecanismo de actuación es el uso de un voltaje de actuación alto, sin embargo en los últimos años, hay numerosos avances en la disminución de éste, haciendo uso de diferentes topologías de diseño y técnicas de optimización, tales como el uso de diferentes tipos de materiales, nuevos flujos de procesos y varias geometrías del actuador [10]. Por lo que el desarrollo de este tipo de actuación está en activo especialmente en la industria y en los grupos de investigación a lo largo del mundo.

### 1.3. Tipos de interruptores RF MEMS con actuación electrostática

Con base en el tipo de contacto, los interruptores RF MEMS pueden ser clasificados por contacto metal - metal como por contacto capacitivo. Los primeros a menudo son implementados en configuración serie, mientras que los segundos mayormente son implementados en configuración derivación. Las estructuras mecánicas más utilizadas son la viga voladiza, la viga tipo puente y la viga tipo peine. Por tanto, aunque los interruptores RF MEMS tienen distintas clases de anclaje, todos utilizan una estructura similar, la cual consiste de tres componentes, como se muestra en la figura 1.6. El primer componente es el sustrato; el segundo componente es una línea de transmisión, la cual es usada para transferir la señal RF desde el puerto de entrada hasta el puerto de salida; y el tercer componente es una estructura mecánica, la cual es movable para conectar o desconectar la señal.

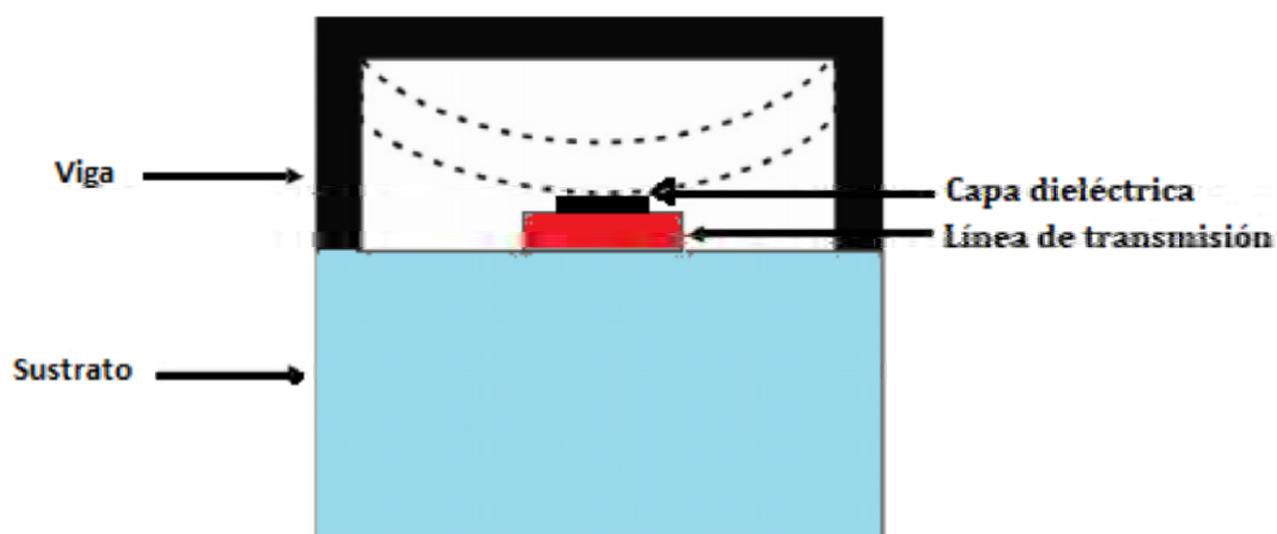


Figura 1.6: Estructura base de un interruptor RF MEMS con actuación electrostática.

### 1.3.1. Interruptor en configuración serie

Un interruptor en configuración serie es comúnmente fabricado con una viga voladiza, la cual a su vez puede ser fabricada con contacto capacitivo o contacto metal - metal. En este tipo de estructura, una de las orillas de la viga es fijada y la otra se encuentra libre. El principio de trabajo es: cuando la diferencia de potencial es aplicada a través del electrodo, la carga surgida en la viga a causa de la fuerza electrostática, hace que esta se deflexione. Cuando esta diferencia de potencial aplicada es reducida o retirada, aparece una fuerza igual y opuesta, llamada fuerza de restauración, por lo que la viga regresa a su posición inicial.

La figura 1.7a muestra el principio anterior, resaltando el hecho de que la posición del electrodo fue tal que produjo el tipo de contacto metal - metal; mientras que en la figura 1.7b, el interruptor se encuentra en estado abierto; al colocar en diferente posición el electrodo y a su vez, colocar un dieléctrico en medio, hace que se presente contacto capacitivo, por lo que cambiaría el espacio entre placas cuya afectación se vería reflejada en la magnitud de la fuerza electrostática. Por último, el interruptor en estado de encendido, toma la forma de figura 1.7c, haciendo énfasis en la posición del electrodo y el punto de contacto.

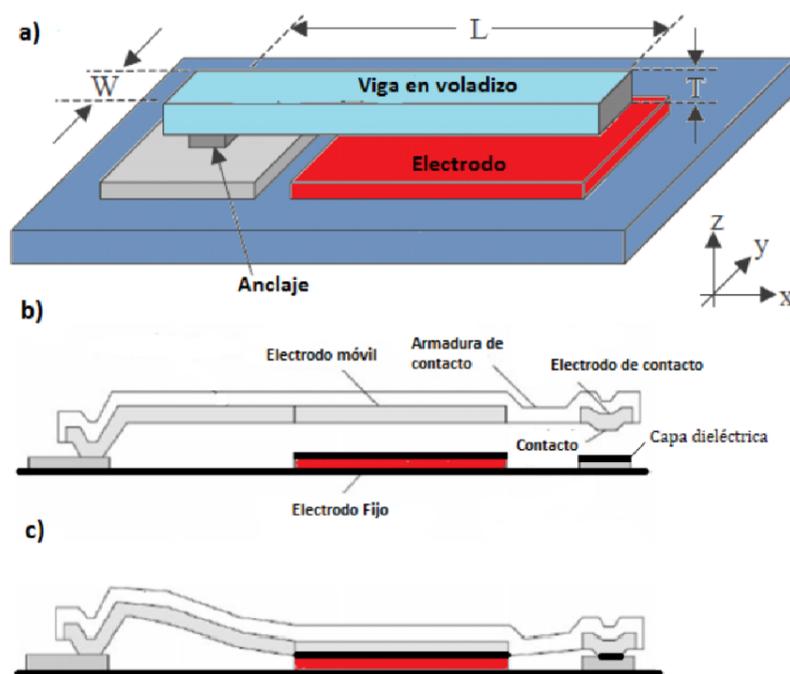


Figura 1.7: Interruptor tipo serie: a) estructura en voladizo con contacto metal - metal, b) estructura en voladizo en estado abierto con contacto capacitivo, c) estructura en voladizo en estado cerrado.

### 1.3.2. Interruptor en configuración derivación

Por otro lado, un interruptor en configuración derivación es comúnmente fabricado con una viga tipo puente (fija- fija), la cual de la misma manera puede ser fabricada con un tipo de contacto capacitivo o contacto metal - metal. Este tipo de viga se encuentra anclada en ambas orillas (de allí su nombre de viga fija - fija), donde la diferencia de potencial es

aplicada en medio de ella. El desplazamiento es máximo en la región donde se encuentra el electrodo fijo a medida que la diferencia de potencial es aplicada. La figura 1.8a muestra un interruptor en configuración derivación con contacto capacitivo en estado abierto. Mientras que en la figura 1.8b el interruptor se encuentra en estado cerrado. Por último, en la figura 1.8c, el interruptor está representado en un modelo en 3D, con una estructura tipo puente con doble anclaje.

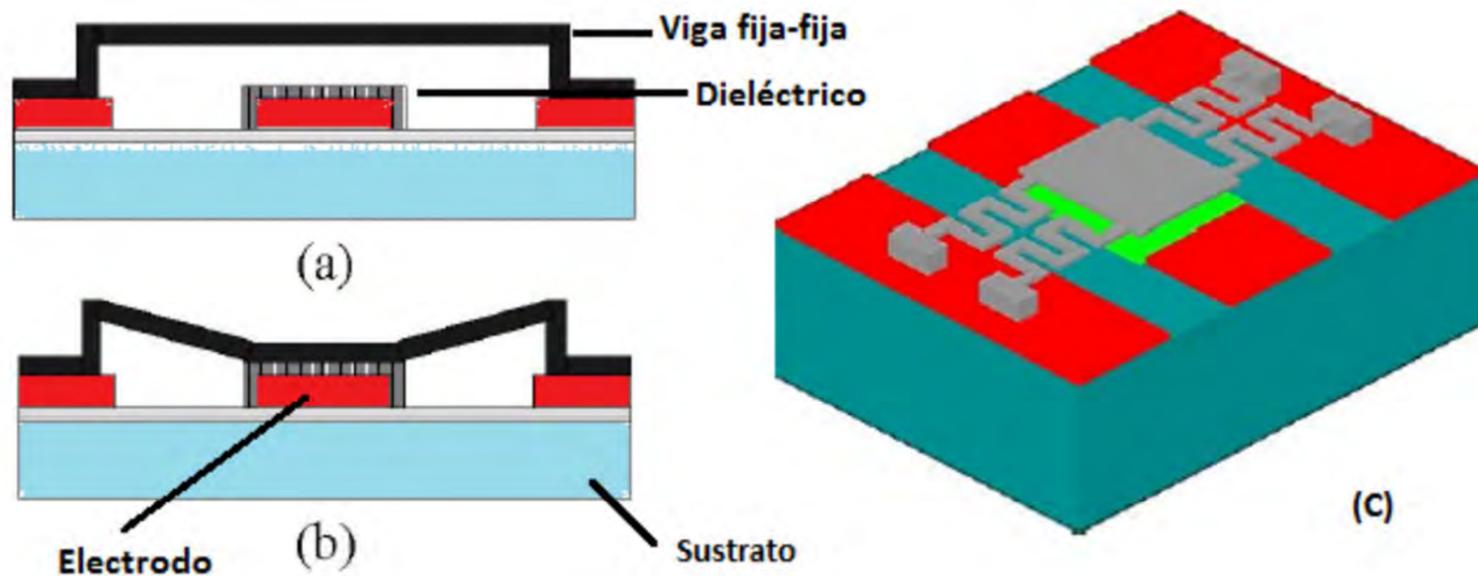


Figura 1.8: Interruptor tipo derivación: a) en estado abierto, b) en estado cerrado, c) modelo 3D de un interruptor de doble anclaje.

### 1.3.3. Interruptores RF MEMS con anclaje especial

Desde el inicio del desarrollo de los interruptores RF MEMS con actuación electrostática, la viga en voladizo es la más utilizada en el mercado, sin embargo en los últimos años han habido muchas investigaciones para tener otros actuadores que funcionen correctamente con la fuerza electrostática generada por la aplicación de un voltaje en el sistema. Ejemplo de ello en [11], se presentan tres diferentes anclajes, a diferencia de los ya mencionados en voladizo y el anclaje tipo puente. El actuador de placas paralelas en la figura 1.9a, el cual tiene simetría rotacional de 90 grados sobre el centro de la placa. El actuador de torsión cuya placa está suspendida por dos vigas estiradas, es desplazada de manera angular cuando se le aplica voltaje. Ya que la viga con torsión es colocada en la dirección perpendicular al sustrato, la estructura con torsión es también desplazada hacia abajo como se muestra en la figura 1.9b.

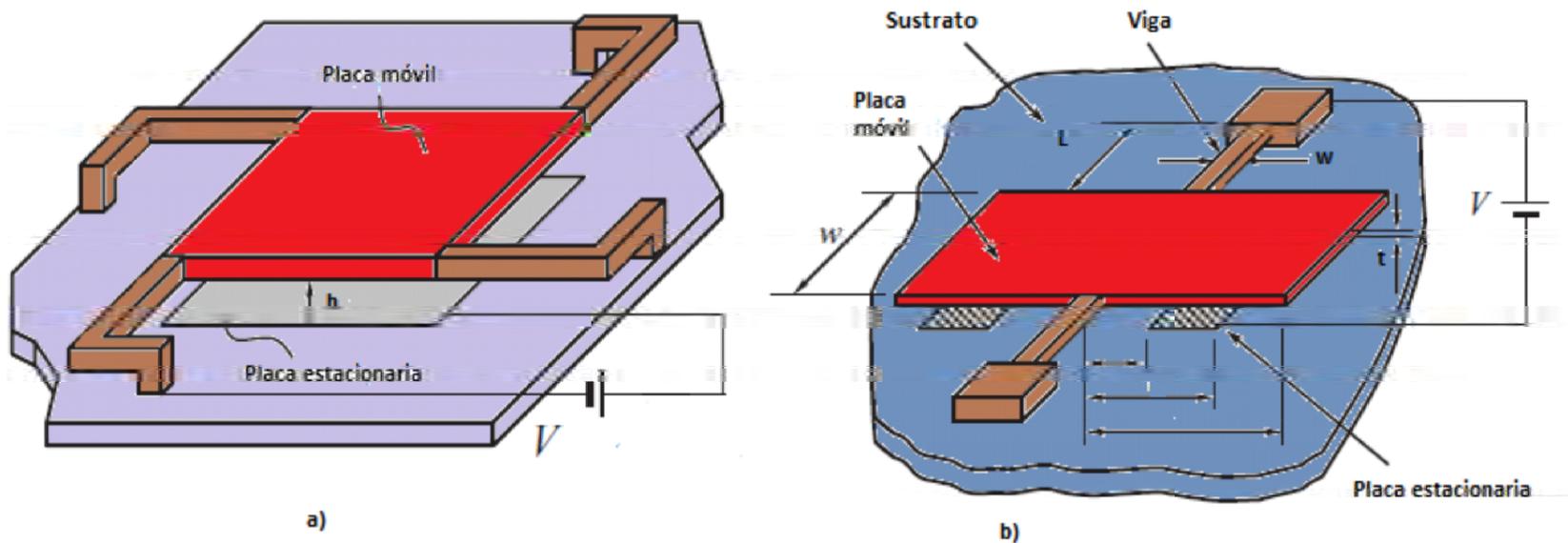


Figura 1.9: Interruptores especiales: a) actuador de placas paralelas a 90 grados y b) actuador con torsión.

Para aplicaciones donde se involucra movimiento en el plano del sustrato, el actuador más común es el de la estructura tipo peine. Estos actuadores están compuestos de dos arreglos capacitivos, los cuales están anclados en el sustrato como se muestra en la figura 1.10.

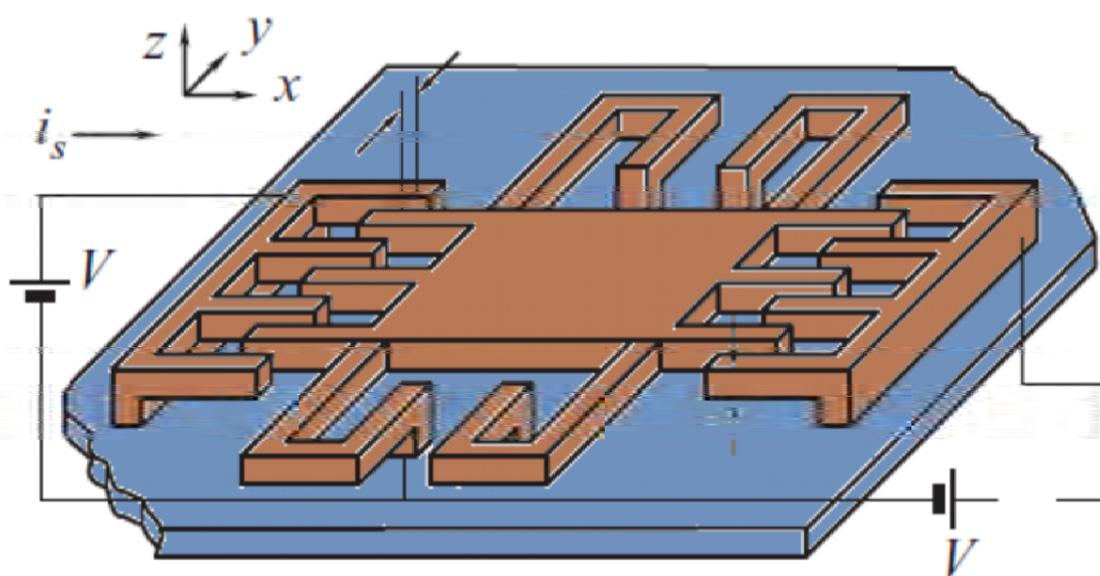


Figura 1.10: Actuador tipo peine.

## 1.4. Principios y herramientas de diseño

Como hemos visto hasta este punto, el gran desarrollo de los interruptores MEMS y sus diferentes configuraciones, hace que el diseño para una aplicación en específico sea muy complejo. De hecho, si los circuitos integrados dependen de casi una completa separación entre el proceso de fabricación, diseño del circuito y empaquetado, el mayor éxito de los MEMS han sido obtenidos al desarrollar estos tres aspectos simultáneamente (Figura 1.11).

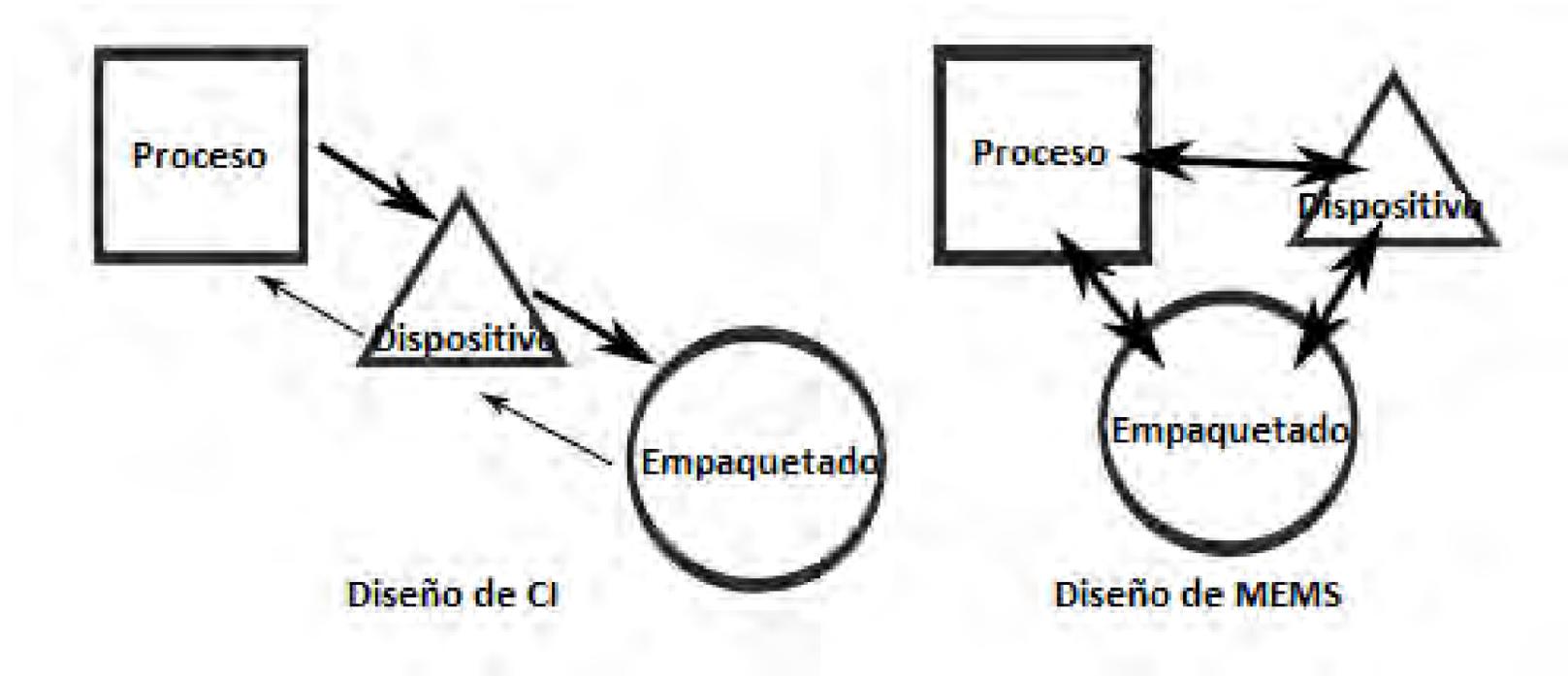


Figura 1.11: Paradigmas de diseño.

El principio de diseño del dispositivo es con base a satisfacer numerosas especificaciones, no obstante el reto principal es el de ajustar el diseño de todo interruptor al proceso de fabricación con la tecnología existente en el laboratorio de Microfabricación en la facultad de ingeniería en la UNAM. Esto es debido a que dicho proceso establece límites, dentro de los cuales se encuentran: materiales, espesores de los mismos, tamaño del dispositivo, entre otros [12]. Para efectos de este trabajo, se utilizó como herramienta de simulación CO-VENTOR, ya que actualmente, el centro UNAMems cuenta con licencia de este software, el cual nos entrega el valor numérico de los parámetros electromecánicos de los dispositivos MEMS, al permitir tener un modelado con mayor precisión utilizando el método de mallado de Elemento Finito (FEM por sus siglas en inglés). Además esta plataforma provee significantes ventajas en velocidad, precisión, capacidad, dirección y también permite simular el proceso de fabricación y el uso de distintos materiales [13].

Una vez definida la geometría, materiales y las dimensiones del interruptor, dadas por una aplicación en específico se puede simular el proceso de fabricación como se muestra en la figura 1.12 [14].

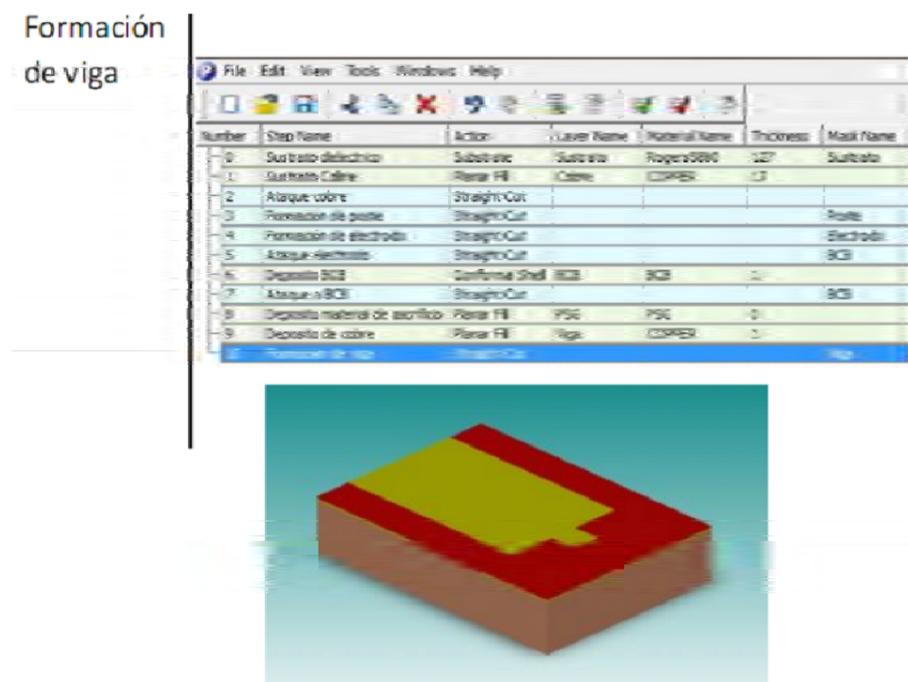


Figura 1.12: Ejemplo de proceso de diseño.

Después de definir el proceso de fabricación, para obtener los parámetros de interés se procede a mallar la estructura, éste paso es de relevancia ya que para tener una precisión mayor, este software utiliza Elemento Finito para dicho proceso como se observa en la figura 1.13.

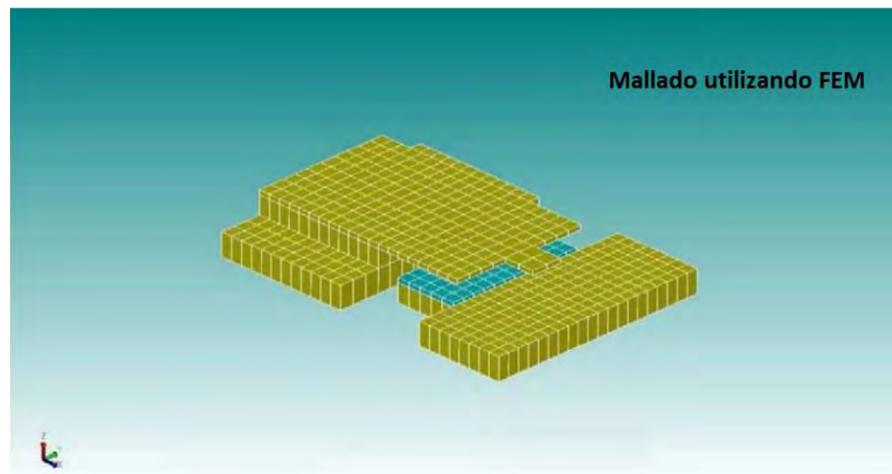


Figura 1.13: Estructura mallada utilizando FEM.

Como resultado, COVENTOR entrega una curva de histéresis donde podemos observar el voltaje de actuación y de liberación, así como elementos electromecánicos tales como el desplazamiento de la viga al ser aplicada una fuerza, entre otros.

Como parámetros dinámicos entrega la constante de amortiguamiento, así como el comportamiento dinámico de la viga, el tiempo de conmutación y el análisis modal de la estructura, donde se puede conocer la frecuencia natural de acuerdo al modo de vibración, entre otros parámetros.

Sin embargo, el alto costo de la licencia ha provocado el desarrollo de formas alternativas de diseño para que en un futuro se pueda depender menos de este software.

## 1.5. Conclusiones del capítulo

- ⇒ Los interruptores RF MEMS poseen mejor rendimiento que su contraparte en estado sólido, consumo de potencia prácticamente cero, alta linealidad y compatibilidad con CI.
- ⇒ Existen más de 40 diferentes posibilidades para el diseño de un interruptor MEMS, que resultan de la combinación de los mecanismos de actuación, tipos de movimiento, tipos de contacto y configuración eléctrica mencionados en la tabla 1.2.
- ⇒ La actuación magnetostática se basa en el aprovechamiento de la energía almacenada en forma de campo magnético. Dentro de las ventajas que posee se tiene la producción de fuerza para tener grandes desplazamientos, sin embargo se convierte en desventaja cuando se requiere trabajar a frecuencias altas, además de un tamaño grande por la fabricación del actuador.
- ⇒ La actuación térmica y SMA están basadas en el efecto Joule y en la variación del coeficiente de expansión térmica del actuador, siendo utilizadas para desplazamientos grandes con bajo voltaje de actuación. Entre sus desventajas se encuentran: tiempo de conmutación alto, no linealidad y sensibilidad al proceso de fabricación.
- ⇒ La actuación piezoeléctrica es llevada a cabo por medio de la contracción y expansión de los materiales piezoeléctricos causados por el movimiento de cargas como resultado de un voltaje aplicado. Entre sus ventajas se encuentran: voltaje de actuación entre bajo y medio, tiempo de conmutación bajo y sus desventajas son: la sensibilidad de los materiales al medio y al cambio de temperatura.
- ⇒ La actuación electrostática se basa en la aplicación de una diferencia de potencial entre dos placas, entre sus ventajas se encuentran: no se requiere de un material especial, proceso de fabricación compatible con CI, baja potencia de consumo, tiempo de conmutación lenta. Su desventaja es la no linealidad de la fuerza electrostática y un voltaje de actuación alto, que en los recientes años ha ido disminuyendo.
- ⇒ En circuitos en configuración serie, la viga voladiza es más común con un tipo de contacto, ya sea capacitivo o resistivo, estos presentan mejor rendimiento a frecuencias entre 10 y 50 GHz.
- ⇒ En circuitos en configuración paralelo, la viga tipo puente es más común con un tipo de contacto capacitivo, estos presentan mejor rendimiento a frecuencias grandes (entre 10 - 200 GHz).



---

---

## CAPÍTULO 2

---

# ESTADO DEL ARTE DE LOS PARÁMETROS DE LOS INTERRUPTORES RF MEMS

*A partir de que el universo es el más perfecto trabajo de un sabio creador,  
nada en absoluto tiene lugar en él sin alguna regla de máximos o mínimos.*

---

LEONHARD EULER, MATEMÁTICO Y FÍSICO SUIZO 1707-1783

Los interruptores RF MEMS desarrollados han sido fabricados por muchos investigadores de universidades y compañías electrónicas debido a sus beneficios y potencial mencionados en el capítulo anterior. A continuación se presentarán algunos de los parámetros que son utilizados para el diseño que hoy en día se encuentran en desarrollo en el mundo.

### 2.1. Parámetros para el análisis del desarrollo de interruptores de bajo voltaje

El desarrollo de los interruptores MEMS de bajo voltaje de actuación comenzó desde la década pasada y para tratar de reducir este parámetro, los investigadores han hecho uso de diferentes cuestiones, como las reportadas en [15], en las que para reducir el voltaje de actuación diseñaron un interruptor RF MEMS, tipo serie, con contacto metal-metal y de baja constante de rigidez. Para ello, en este interruptor hicieron uso de una viga en voladizo fabricada en una guía de onda coplanar, con dimensiones  $G/S/G = 20/60/20\mu m$  como se muestra en la figura 2.1a para frecuencias de hasta 40 GHz, con un dieléctrico



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

de constante 9.9, que resultó con una impedancia característica de  $50 \Omega$ . La figura 2.1b muestra las dimensiones de la viga diseñada, con un hoyuelo que ha sido utilizado en la orilla libre de la viga para reducir la sensibilidad a la deformación provocada por el proceso de fabricación.

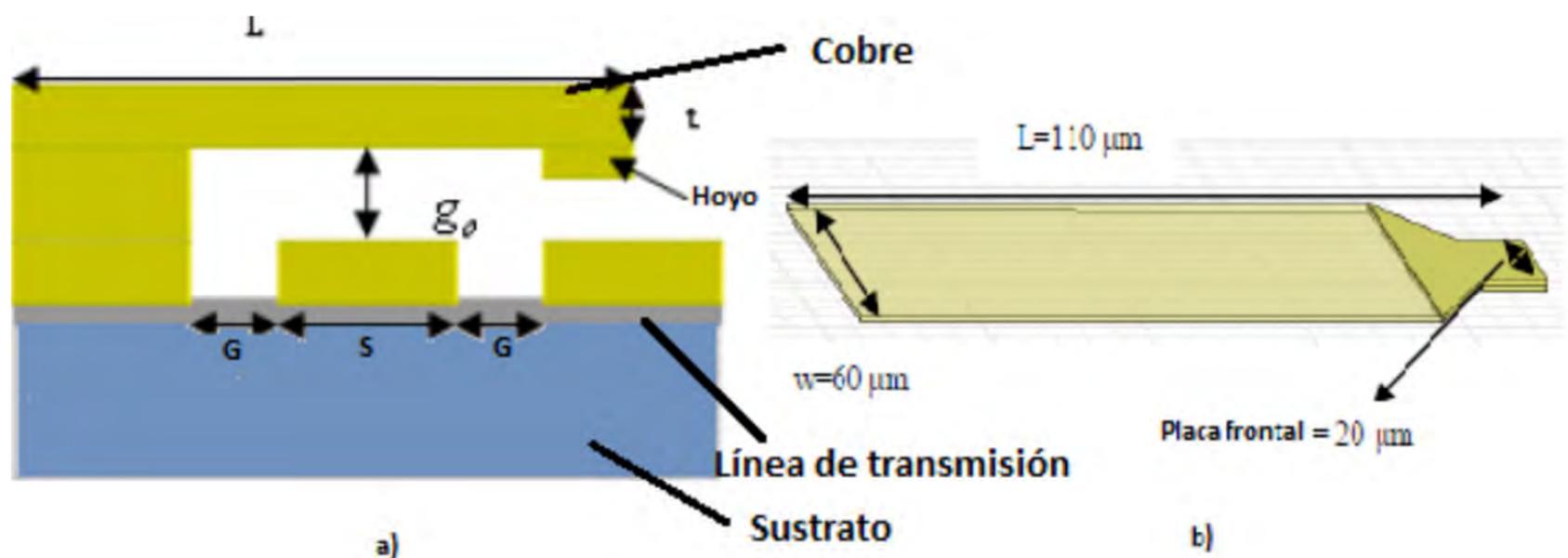


Figura 2.1: Interruptor RF MEMS con viga en voladizo.

El principio básico de trabajo del interruptor serie es mostrado en la figura 2.2, este es actuado electrostáticamente. Donde la condición de jale ocurre cuando la separación del electrodo decrece debajo de dos terceras partes de la condición de estado libre.

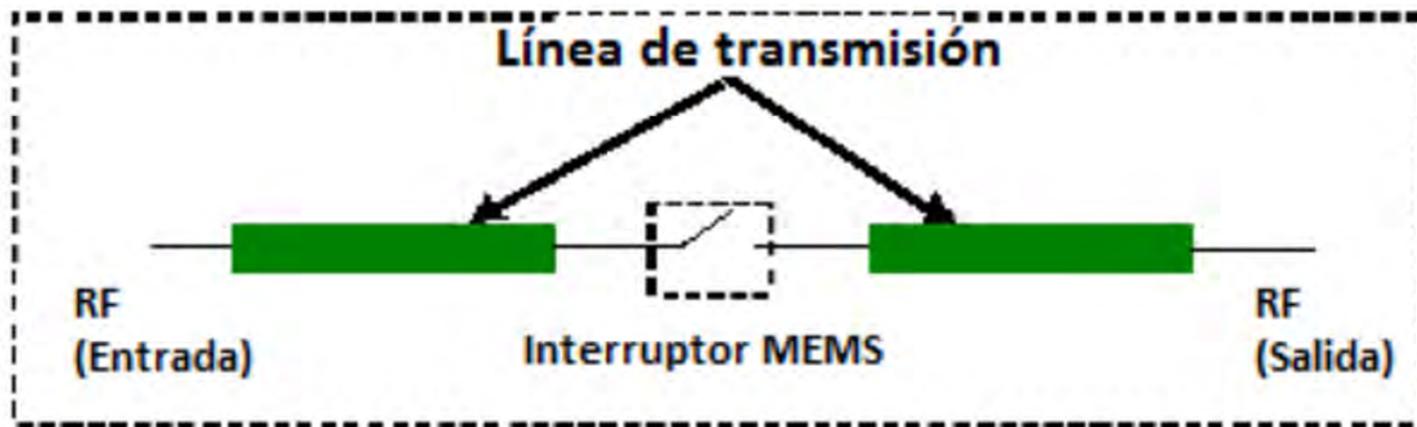


Figura 2.2: Configuración en serie de un interruptor MEMS.

En vista de esto, el voltaje de jale está definida como:

$$V_j = \sqrt{\frac{8kg_0^3}{27\epsilon_0 A}} \quad (2.1)$$

donde  $k$  es la constante de rigidez efectiva,  $g_0$  es el espacio nominal y  $A$  es el área del electrodo de actuación. Nótese que es posible reducir el voltaje de actuación tanto al reducir  $g_0$ , incrementando el área de actuación como al disminuir la constante de rigidez de la viga. Dicha constante ( $k$ ) en condiciones de carga uniforme de una viga en voladizo está dada por:

$$k = \frac{2 \frac{E}{1-\nu^2} w t^3}{3L^3} \quad (2.2)$$

donde  $E$  es el Módulo de Young de la viga,  $\nu$  es la razón de Poisson,  $w$  es el ancho,  $t$  es el grosor y  $L$  es la longitud de la viga.

En la parte electrodinámica, este diseño es colocado con una CPW en el sustrato. Con una impedancia característica de:

$$Z_0 = \frac{1}{c C_{aire} \sqrt{\epsilon_{efectiva}}} \quad (2.3)$$

donde  $Z_0$  es la impedancia característica,  $c$  es la velocidad de la luz,  $\epsilon_{efectiva}$  es la constante dieléctrica efectiva,  $C_{aire}$  es la capacitancia parcial de la CPW en la ausencia de la capa dieléctrica. Como resultado tiene un voltaje de actuación de 6,39V con 0.37 dB de pérdidas de inserción y 22dB de pérdidas de retorno a 40 GHz con un aislamiento de 23.5 dB.

Por otro lado, en [16], se diseñó la viga en voladizo con estructura de serpentina la cual provee una reducción a la constante de rigidez y por ende, al voltaje de actuación, sin embargo, esto causa que se disminuya la elasticidad de la viga, lo que puede ocasionar el rompimiento de la misma. Por tanto, se redujo la masa de la viga al colocar hoyuelos en la estructura, además de que estos también reducen el amortiguamiento, por tanto, la rapidez de conmutación se incrementa, como se ve en la figura 2.3.

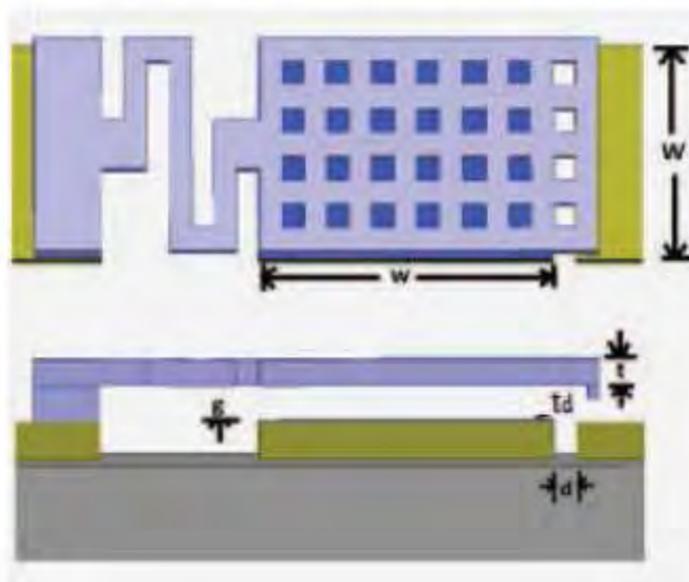


Figura 2.3: Diseño de una viga en voladizo con forma de serpentina.

Para calcular el valor de la constante de rigidez, se utilizó la frecuencia natural mecánica de la estructura, que está dada por :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

Al calcular la frecuencia natural con ayuda de software, teniendo la masa  $m$ , la constante de rigidez se calcula como:

$$k = m(2\pi f)^2 \quad (2.5)$$

Además de lo anterior en [17] se realizó un estudio sobre el cambio en la posición del electrodo como se muestra en la figura 2.4a y 2.4b, dando como resultado que al incrementar la separación del electrodo fijo del anclaje de la viga en voladizo, la deflexión se incrementa de la forma mostrada en 2.4c

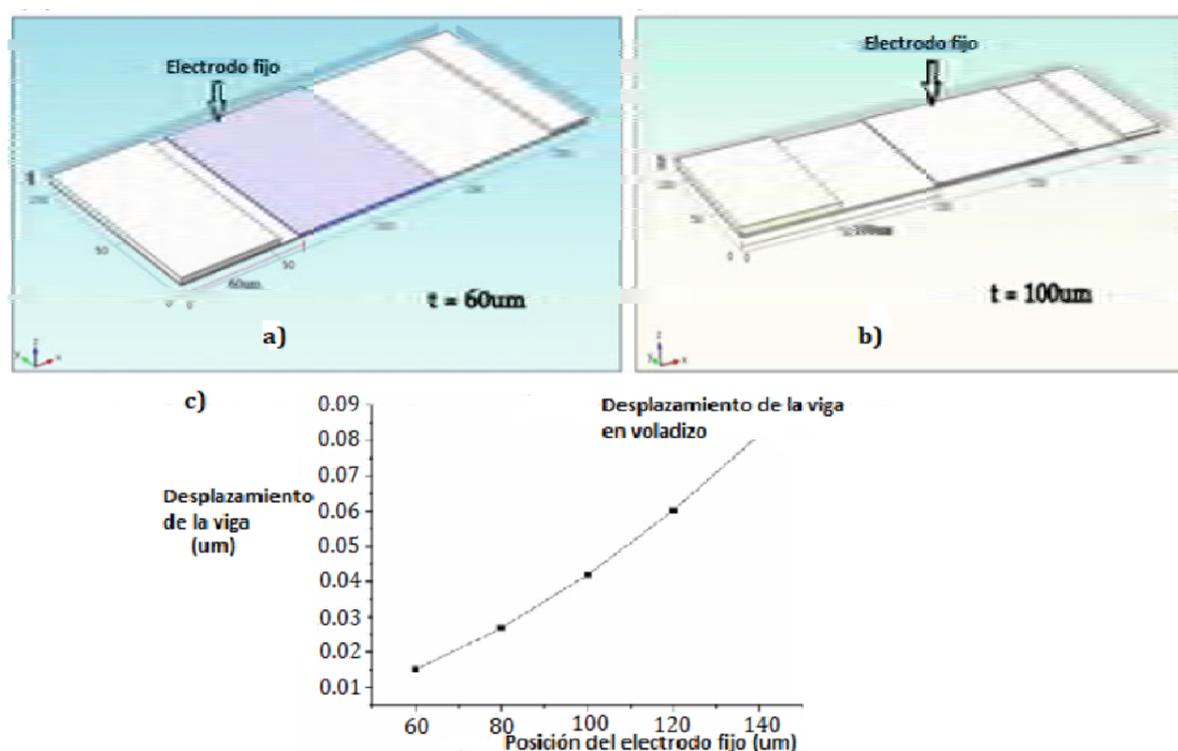


Figura 2.4: Desplazamiento de la viga al cambio de posición del electrodo fijo.

## 2.2. Parámetros para el análisis de la respuesta electromecánica dinámica de un interruptor RF MEMS

Una de las preocupaciones desde el comienzo de la fabricación de los interruptores RF MEMS ha sido el correcto funcionamiento en la respuesta transitoria y estable al ser aplicado el voltaje de actuación. En [18], la respuesta dinámica de un interruptor basado en viga voladiza se analizó empleando un modelo de primer grado de libertad, haciendo énfasis en la interacción entre la viga y el electrodo fijo. Concluyendo que hay una relación entre el voltaje de actuación con la constante de rigidez de la viga y el factor de calidad  $Q$ , por lo tanto, estos son los parámetros que tienen la mayor influencia en el comportamiento dinámico del sistema. El movimiento del sistema se describe como :

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F_{elec} + F_{IJ} \quad (2.6)$$

Y para calcular el factor de calidad mecánico del sistema, se utilizó la expresión:

$$Q = Q_{g0}(1,1 - u^2)^{\frac{3}{2}}(1 + 9,638K_n^{1,159}) \quad (2.7)$$

donde  $K_n$  es el número de Knudsen, definido como la razón entre  $\lambda$  con el espacio entre las placas y el factor  $Q_{g0}$  que es el factor de calidad correspondiente al espacio entre placas  $g_0$ .

Con estas consideraciones se obtuvieron los resultados mostrados en las gráficas de la figura 2.5

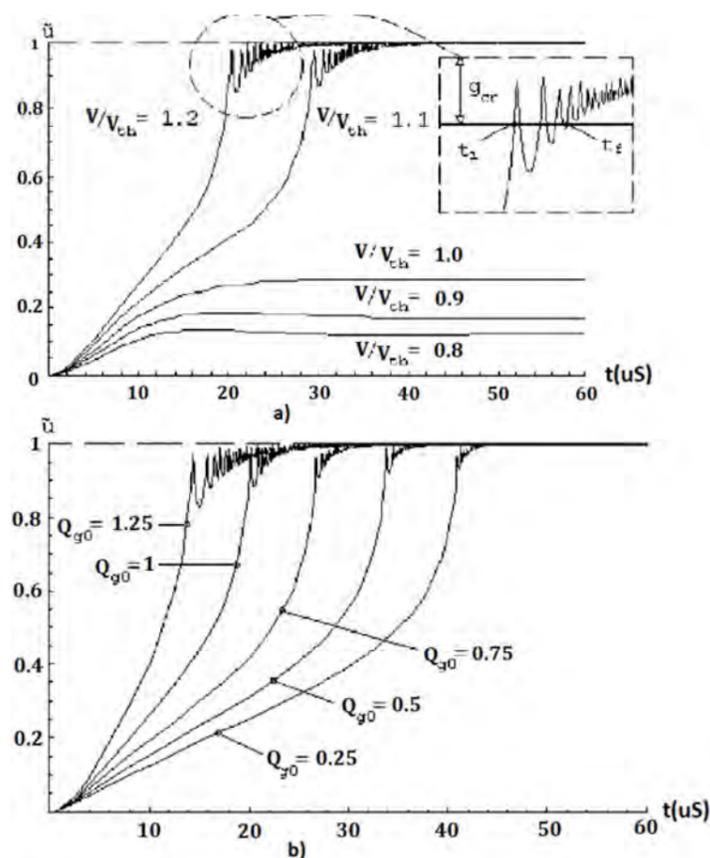


Figura 2.5: Comportamiento dinámico: a) respuesta dinámica a diferente razón de voltaje de actuación, b) respuesta dinámica como función de diferentes factores de calidad.

En la figura 2.5a la viga experimenta oscilación alrededor de la condición en equilibrio estático y en la figura 2.5b se observa que los efectos de diferentes valores del factor de calidad no pueden ser omitidos.

Además en [19], se presenta un estudio detallado del amortiguamiento de un interruptor, en el cual se describe que en el espacio entre placas de los MEMS, la interacción de las moléculas de gas individual con la viga llega a dominar sobre otros efectos, por lo tanto es necesario obtener una buena predicción de este comportamiento. En [20], se presenta el tiempo o rapidez de conmutación, ya que este tipo de interruptores tenían tiempo de conmutación muy largo. Este parámetro depende de la masa y la geometría de la viga.

Por último, en [21], se menciona que para tener un modelado más preciso de la viga voladiza es necesario describir su movimiento con mayor precisión que la ecuación (2.6), por lo que, una aproximación más cercana al movimiento real de la viga está dado por un sistema de parámetros distribuidos no-lineales, ya que el modelo utilizado de placas paralelas no describe la no-linealidad. Para ello, se utiliza el modelo Euler - Bernoulli, el

cual otorga mayor precisión en la descripción del comportamiento de la viga voladiza de la figura 2.6; además permite conocer, por ejemplo, el comportamiento de la rigidez de la misma, expresado por la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden .

$$m \frac{\delta^2 w(x, t)}{\delta t^2} + c \frac{\delta w(x, t)}{\delta t} + EI \frac{\delta^4 w(x, t)}{\delta x^4} = 0 \quad (2.8)$$

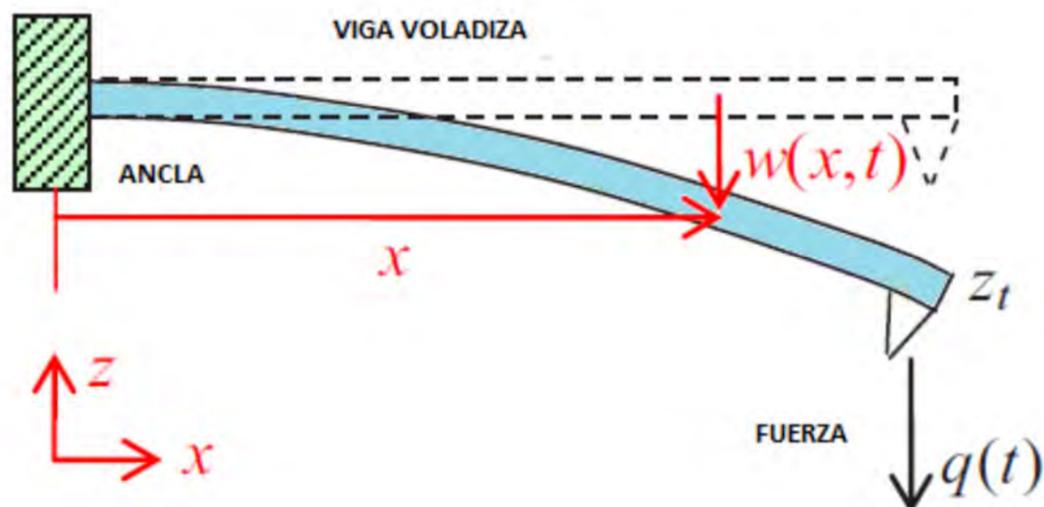


Figura 2.6: Modelado de una viga voladiza.

Por otro lado, también se hace mención de los métodos de solución para las ecuaciones de movimiento que son utilizados para describir el comportamiento de una viga voladiza, como la mostrada en la figura 2.7, siendo algunos de ellos: diferencias finitas, elemento finito, método de Karhunen-Loéve, método de Rayleigh y método Galerkin

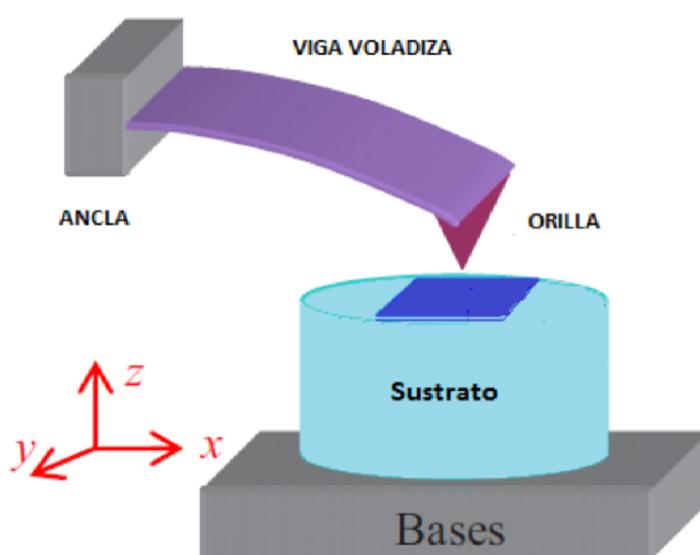


Figura 2.7: Elementos de una viga voladiza.

## 2.3. Parámetros para el análisis de la respuesta electrodinámica de un interruptor RF MEMS

Para el análisis electrodinámico, en [22] son presentados tres parámetros : el aislamiento logrado durante el estado abierto, las pérdidas de retorno y las pérdidas de inserción en estado cerrado. Tomando en cuenta lo observado en las figuras 2.8 y 2.9, se incluye que dichos parámetros son dependientes de la frecuencia de trabajo.

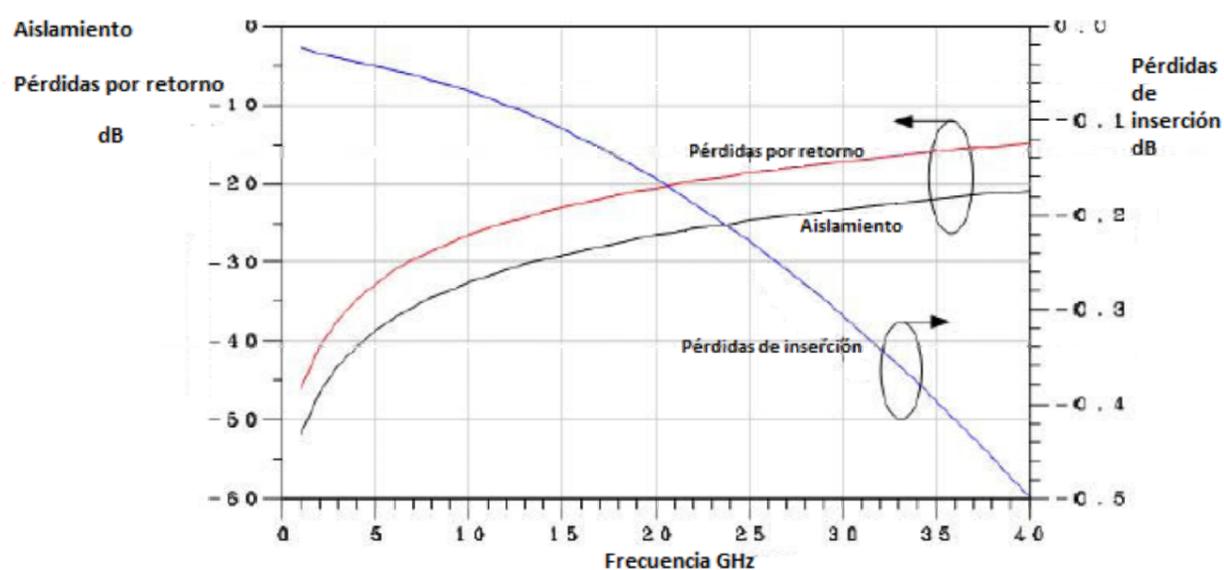


Figura 2.8: Parámetros S simulados para el interruptor RF MEMS.

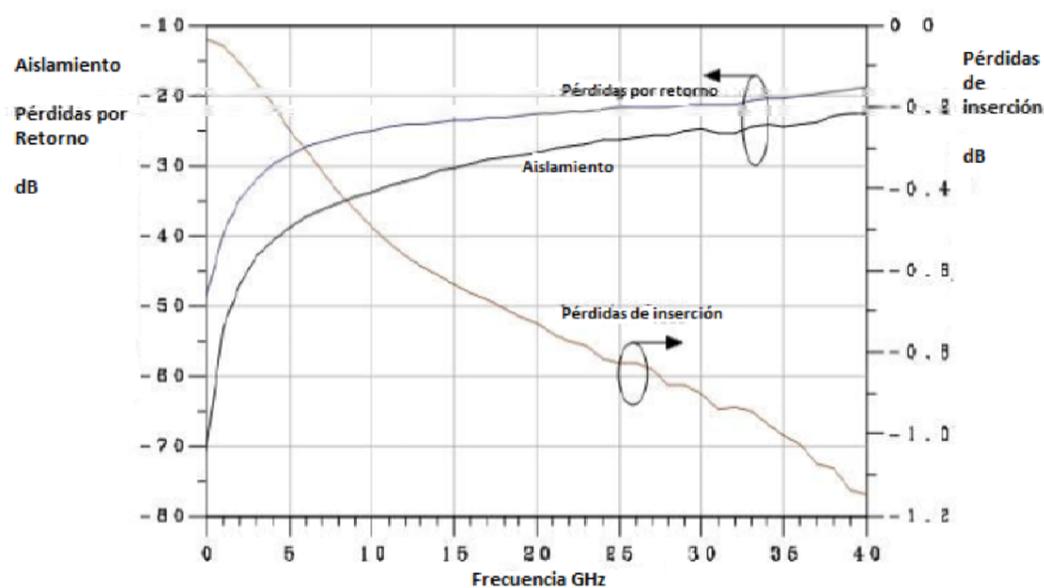


Figura 2.9: Parámetros S medidos del interruptor RF MEMS.

Los parámetros de interés son comparados y presentados en la tabla 2.1:

## 2.4. Aplicaciones de hoy en día

Una de las principales aplicaciones en los años recientes de los interruptores RF MEMS se encuentra dentro de los desplazadores de fase, debido a que estos sistemas de conmutación son de estructura relativamente simple y fácil implementación. Los desplazadores

Tabla 2.1:  
Comparación de los parámetros simulados y medidos a 40 GHz.

Parámetros RF	Simulación	Medidos
Voltaje de actuación	17.5 V	19 V
Pérdidas de inserción	0.5 dB	1.15 dB
Pérdidas por retorno	14 dB	20 dB
Aislamiento	21 dB	24 dB

de fase RF MEMS son principalmente divididos en dos categorías: La primera clase es de los desplazadores de fase distribuidos basados en la línea de transmisión MEMS con carga periódica. Mientras que la segunda clase adopta interruptores con tecnología de línea conmutada, al elegir diferentes caminos para la señal a través de los interruptores MEMS, los cuales tienen un tamaño relativamente grande pero mejor linealidad y estructura más simple. Por tanto, en [23] se reporta una investigación de un desplazador de fase de 4 bits para una estación base de antenas basadas en tecnología de conmutación RF MEMS. El desplazador de fase es fabricado en un sustrato de RO4350 y muestra un gran rendimiento en 1.7-2.7 GHz con pérdidas de inserción mejores que 0.89 dB, pérdidas de retorno mejores que 13.4 dB y con un error menor que 2.05 grados. El interruptor MEMS es probado antes del diseño del desplazador de fase. El micro interruptor actúa con un voltaje de actuación de 90 V y opera con una fuerza de contacto de  $100\mu N$  por contacto. EL circuito de prueba es mostrado en la figura 2.10, fue diseñado para obtener el tiempo de conmutación a medida que una señal RF fue transmitida a lo largo de éste.

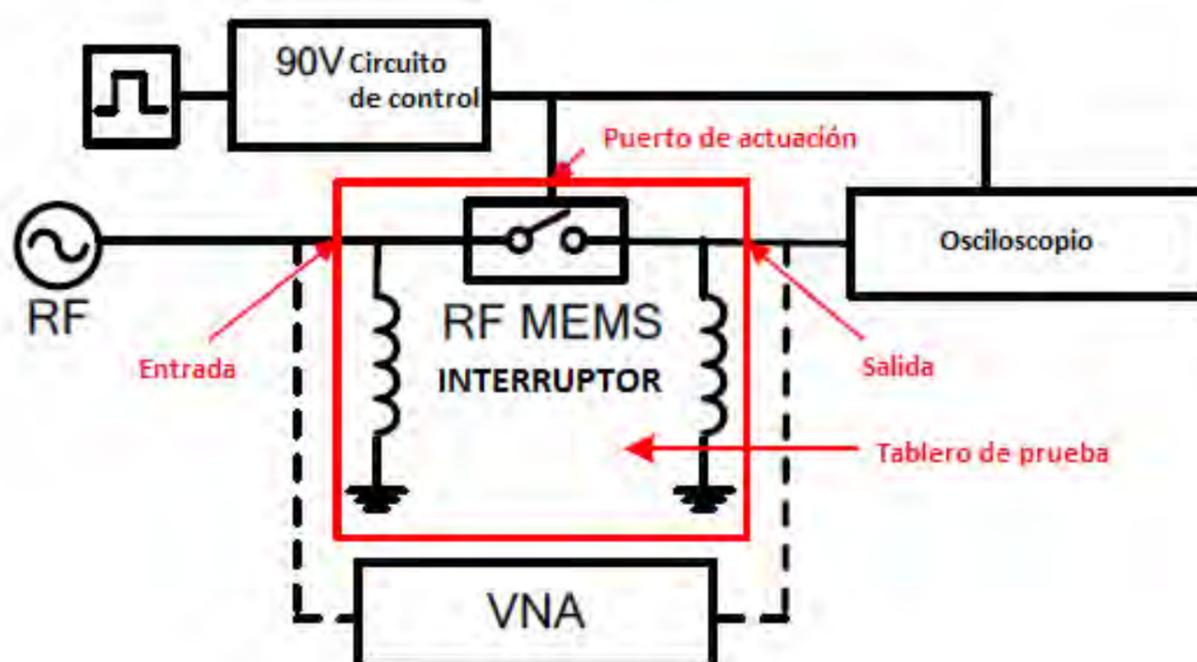


Figura 2.10: Circuito de prueba para un interruptor RF MEMS.

El tablero de prueba es mostrado en la figura 2.11.

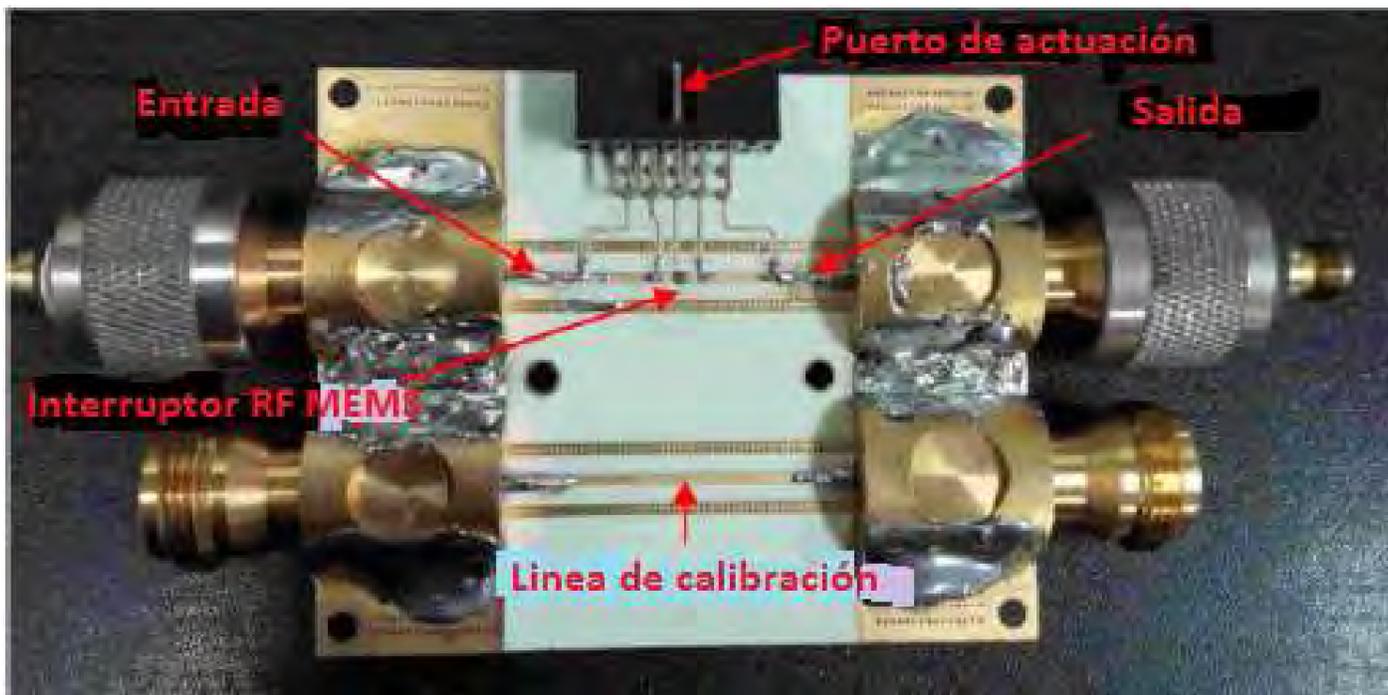


Figura 2.11: Tablero de prueba.

El tiempo de respuesta del interruptor es mostrado en la figura 2.12

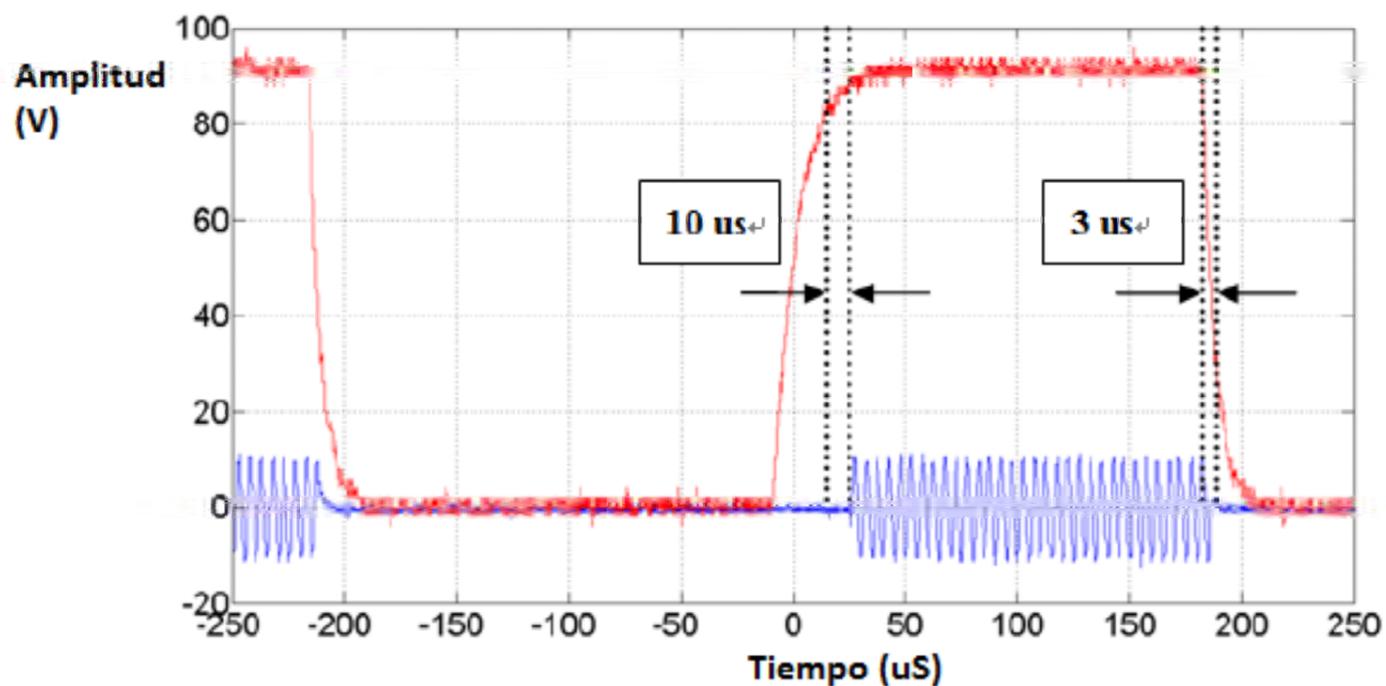


Figura 2.12: Prueba de rendimiento del interruptor RF MEMS.

El comportamiento de los parámetros S del interruptor MEMS es mostrado en la figura 2.13. La escala de frecuencia tiene un rango de 1.5 hasta 3 GHz. Cuando el interruptor se encuentra en estado abierto, se registra el valor de S21, mientras que en estado cerrado será el mismo parámetro sólo que medido en otro estado diferente, esto muestra que el interruptor tiene un aislamiento mejor que 26.7 dB y pérdidas de inserción menores que 0.5 dB.

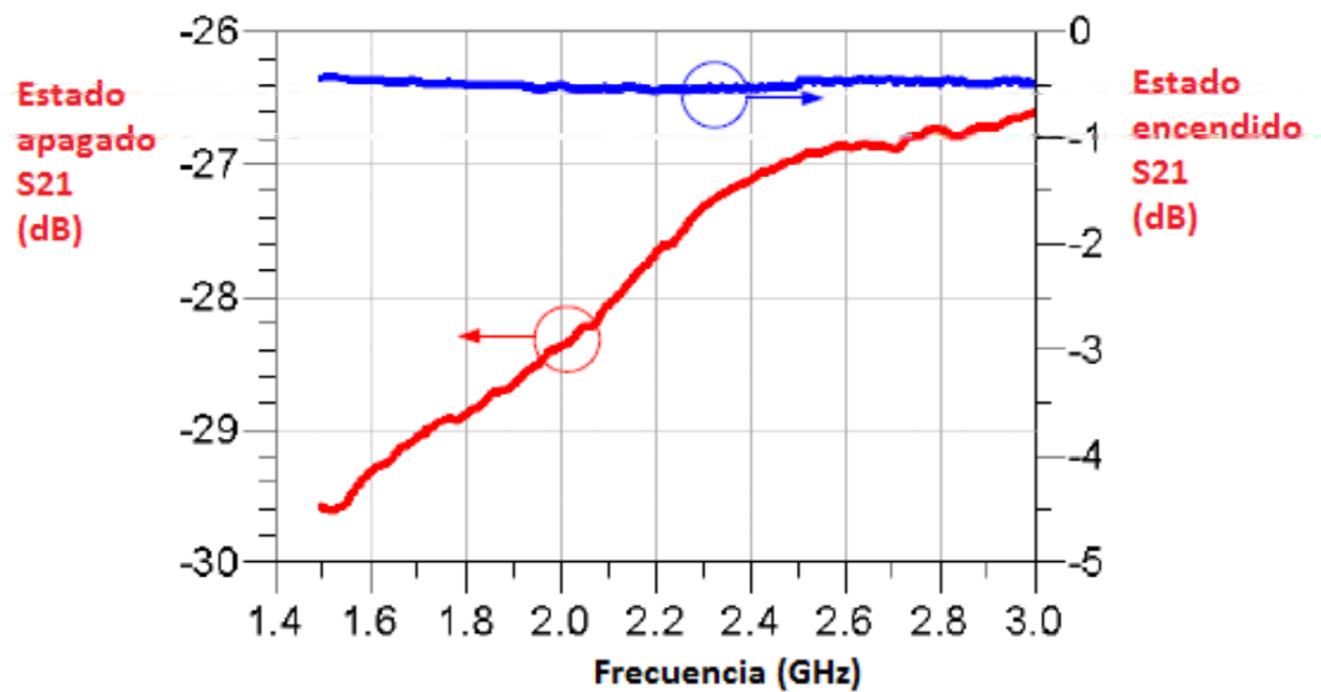


Figura 2.13: Rendimiento de los parámetros S del interruptor RF MEMS.

Por tanto, debemos comprender el comportamiento de cada parámetro para un diseño correcto del interruptor RF MEMS para alguna especificación específica.

## 2.5. Conclusiones del capítulo

- ⇒ Los parámetros estáticos más investigados a lo largo del mundo son: la constante de rigidez ( $k$ ), el voltaje de actuación, el voltaje de jale ( $V_j$ ) y la frecuencia natural.
- ⇒ Los parámetros dinámicos que son tomados en cuenta para el diseño de MEMS son: factor de calidad mecánico ( $Q$ ), tiempo de conmutación y la constante de amortiguamiento.
- ⇒ Los parámetros electrodinámicos que son utilizados para caracterizar un buen diseño de los interruptores son: aislamiento, pérdidas de inserción y pérdidas de retorno.
- ⇒ Para describir el movimiento de los interruptores RF MEMS, se reporta el uso de dos ecuaciones de movimiento: la ecuación Euler-Bernoulli y la fórmula de d'Álambert en 1D. La primera describe la deflexión de la viga, mientras que la segunda describe el desplazamiento de la misma.
- ⇒ Se presenta un resumen de los valores numéricos de los parámetros que son mencionados en el estado del arte.

Tabla 2.2:  
Parámetros de los interruptores RF MEMS mencionados en el estado del arte.

Referencia	Parámetro	Frecuencia	Valores Simulados	Valores Medidos
[15]	Voltaje de actuación	40 GHz	6.39 V	-
	Constante de rigidez	40 GHz	2.39 N/m	-
	Pérdidas de inserción	40 GHz	0.37 dB	-
	Pérdidas de retorno	40 GHz	22 dB	-
	Aislamiento	40 GHz	23.5 dB	-
[16]	Voltaje de actuación	10 GHz	6.4 V	-
	Constante de rigidez	10 GHz	0.308 N/m	-
	Pérdidas de inserción	10 GHz	0.08 dB	-
	Pérdidas de retorno	10 GHz	21 dB	-
	Aislamiento	10 GHz	22 dB	-
[22]	Pérdidas de retorno	40 GHz	14 dB	20 dB
	Pérdidas de inserción	40 GHz	0.5 dB	1.15 dB
	Aislamiento	40 GHz	21 dB	24 dB



---

---

## CAPÍTULO 3

---

# COMPORTAMIENTO ELECTROMECAÁNICO-ESTÁTICO DE INTERRUPTORES RF MEMS

*”El libro de la naturaleza que hemos de leer, está escrito por el dedo de Dios.”*

*”¿Especulaciones? No tengo ninguna. Estoy descansando en certezas. Yo sé a Quién le he creído, y estoy persuadido de que Él es capaz de guardar lo que le he encomendado hasta aquel día.”*

---

MICHAEL FARADAY, FÍSICO Y QUÍMICO BRITÁNICO 1791-1867

Como es conocido, los dispositivos RF MEMS son conjuntos de sistemas que constan de comportamiento electromecánico y electrodinámico para producir los efectos deseados, por lo cual, para analizar sus características es necesario estudiar tanto su comportamiento estático, como dinámico y los parámetros fundamentales que rigen a dicho tipo funcionamiento en los interruptores; así que, como primer punto se desarrolló la ecuación que gobierna la deformación de una viga voladiza conocida como Euler - Bernoulli; seguido por la descripción de la fuerza electrostática que actúa en dicha viga, para dar lugar a la obtención de la constante de rigidez  $k$ , parámetro esencial de los interruptores, el voltaje de jale  $V_j$  y el voltaje de liberación, para así calcular el voltaje de actuación con el cuál la viga se deflexionará hacia el electrodo fijo; por último, se presenta el voltaje de ruptura y el análisis modal, como enlace entre el análisis mecánico estático y el análisis mecánico dinámico.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### 3.1. Ecuación Euler - Bernoulli que gobierna la deformación de una viga voladiza.

Como primera aproximación, la deflexión de la viga puede ser descrita por una sola variable ( $\nu$ ), además de considerar a la carga perpendicular al eje de la viga. Dicha carga puede ser distribuida a lo largo de la longitud de la viga, concentrada en un punto específico o puede ser una combinación de ambos, como se muestra en la figura 3.1.

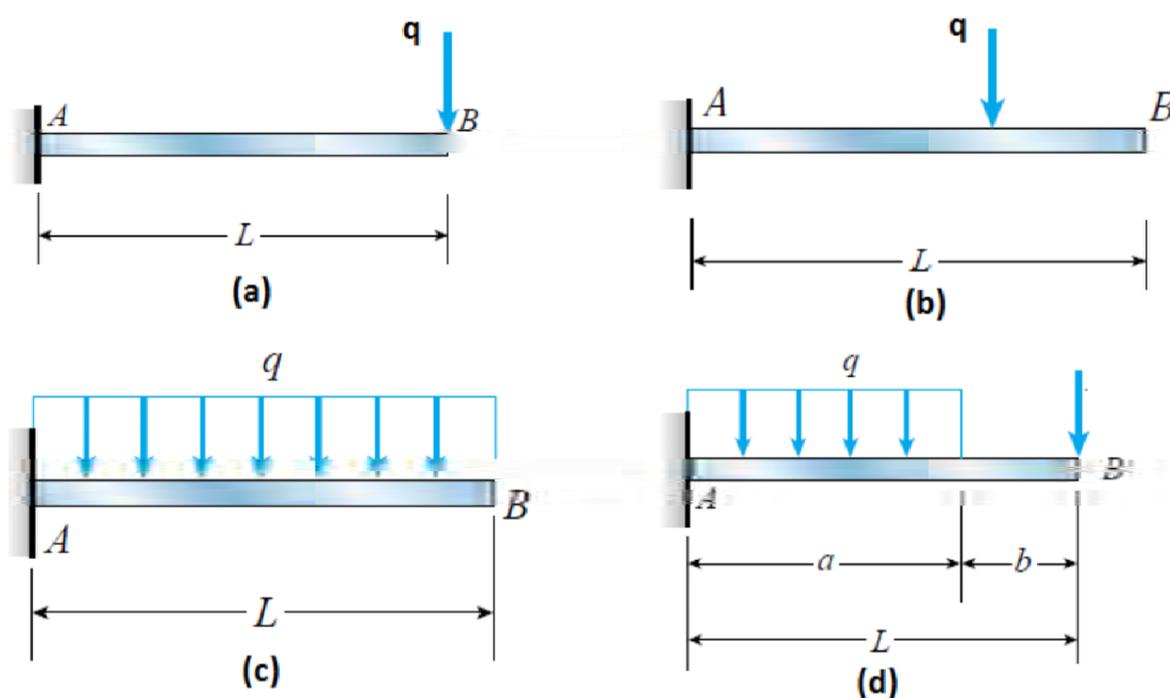


Figura 3.1: Tipos de carga en vigas en voladizo: a) carga puntual en orilla no anclada, b) carga puntual en posición arbitraria de la viga, c) carga distribuida en toda la viga y d) carga distribuida en una distancia arbitraria.

Para describir la deflexión de una viga, si suponemos que la relación entre la longitud con el grosor de la misma es lo suficientemente grande, podemos utilizar el modelo de Euler Bernoulli, en caso contrario se debe utilizar el modelo de Timoshenko para vigas. Con base en esto, trabajaremos con la primera suposición, por lo que las condiciones que involucran el empleo de este modelo son [24]:

- El material es homogéneo e isotrópico y se rige por la Ley de Hooke.
- La viga es inicialmente estirada con una sección transversal constante.
- La viga es sujeta a un doblez puro (por ejemplo, ninguna torsión o carga axial).
- El movimiento en el plano  $y$ - $z$  de la viga permanece constante durante la deflexión.
- La viga tiene un eje de simetría.

Tomando dichas suposiciones, procedemos a verificar las condiciones límite en las que opera la viga, para esto es necesario conocer el desplazamiento en el eje ( $y$ ) cuando se ha aplicado una carga puntual, como se observa en la figura 3.2.

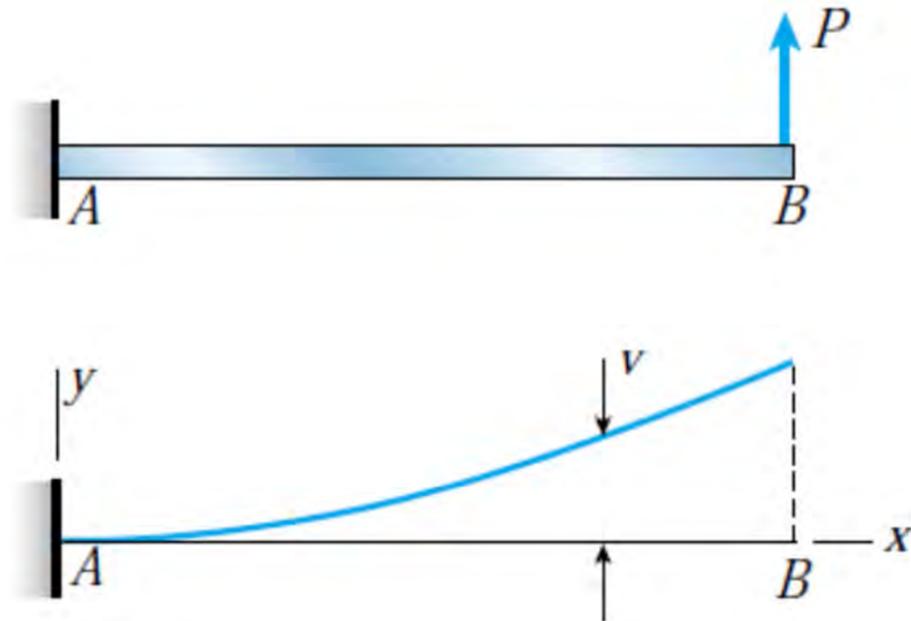


Figura 3.2: Deflexión de una viga a lo largo del eje  $Y$  al ser aplicada una carga puntual.

Para obtener la ecuación que rige la deflexión de la viga, expresamos la deflexión como una función de  $x$  y cualquier punto  $m_1$  en la curva de deflexión, mostrada en la figura 3.3(a). El punto  $m_1$  está localizado a una distancia  $x$  del origen y un segundo punto  $m_2$  se encuentra a una distancia  $x + dx$  del origen. La deflexión en este segundo punto es  $v + dv$ , donde  $dv$  es el incremento de la deflexión cuando se mueve la viga del punto  $m_1$  a  $m_2$  véase la figura 3.3(b), sin embargo, no hay únicamente deflexión en cada punto a lo largo del eje  $y$ , sino también hay una pequeña rotación.

Por tanto, el ángulo de rotación  $\theta$  del eje de la viga es el ángulo entre el eje  $x$  y la tangente de la curva de deflexión como se muestra en la figura 3.3(b), así como  $d\theta$ , el cual es el incremento del ángulo a medida que movemos el punto  $m_1$  hacia el punto  $m_2$ . El punto de intersección de las rectas normales a las tangentes de curvatura  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  es el centro de curvatura  $O'$  y la distancia de  $O'$  a la curva es el llamado radio de curvatura  $\rho$ . Por lo que esto puede ser expresado como:

$$\rho d\theta = ds \quad (3.1)$$

Por consiguiente, la curvatura  $\kappa$  (que es igual al recíproco del radio de curvatura) está dada por la ecuación:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.2)$$

Nótese que la curvatura es positiva cuando el ángulo de rotación incrementa y negativa, cuando este decrementa.

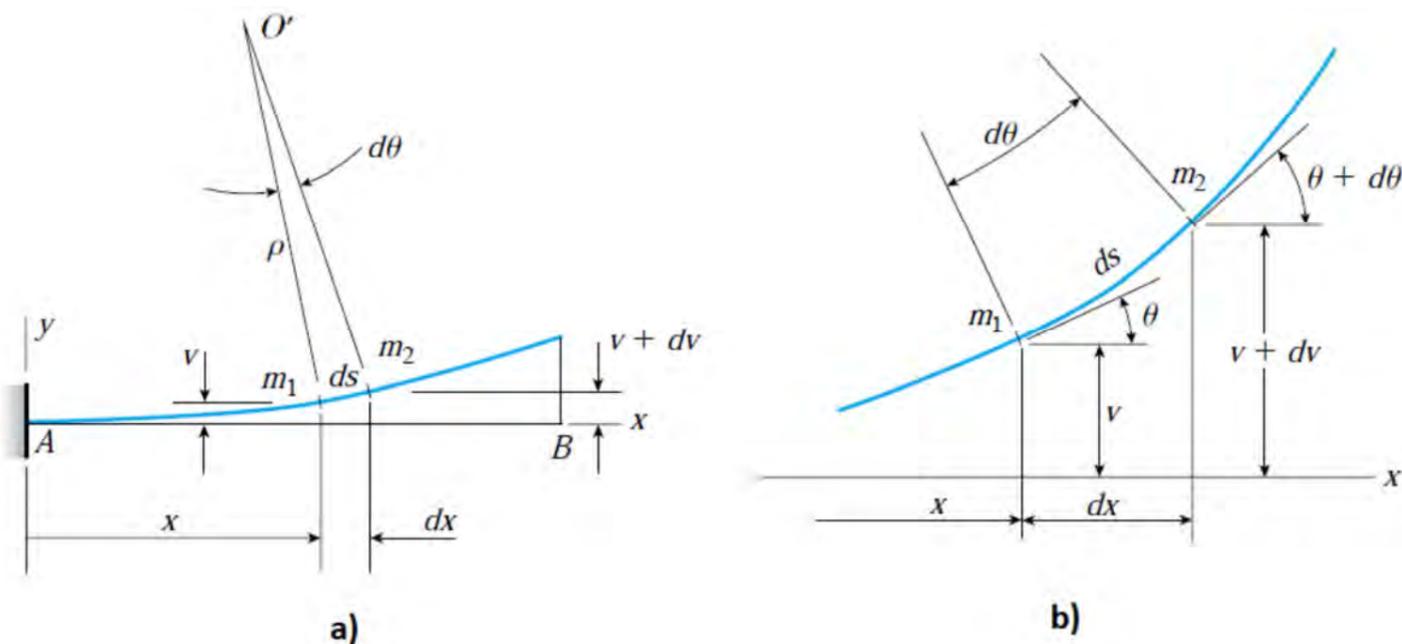


Figura 3.3: Deflexión de una viga voladiza.

La pendiente de la curva de deflexión es la primera derivada  $\frac{dv}{dx}$  de la expresión para la deflexión  $v$ , así que en términos geométricos, ya que  $dv$  y  $dx$  son pequeños, la pendiente de la curva de deflexión se expresa:

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \quad (3.3)$$

A medida que la pendiente de la curva de deflexión experimente cambios muy pequeños, el ángulo de rotación  $\theta$  tenderá a 0. Con estas condiciones, el análisis de la viga se simplifica por lo que la distancia  $ds$  a lo largo de la curva de deflexión es prácticamente la misma que el incremento  $dx$  a lo largo del eje  $x$ .

$$ds \approx dx \quad (3.4)$$

Ya que la  $\tan\theta = \theta$  cuando  $\theta$  es pequeño, la curvatura es reescrita como:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (3.5)$$

Y

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dv}{dx} \quad (3.6)$$

Tomando la derivada del ángulo de rotación  $\theta$  con respecto a  $x$ , en la ecuación anterior, tenemos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.7)$$

Combinando la (3.5), con la (3.7), obtenemos la relación entre la curvatura de la viga y su deflexión:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.8)$$

Cuando la viga es sometida por cargas, ya sea concentradas o distribuidas, se crean esfuerzos y deformaciones en el interior de la misma. Para determinarlos, debemos encontrar las fuerzas y momentos internos que actúan en la sección transversal de la viga. Para ello, haremos uso de dos conceptos de estática para el diseño de vigas: la fuerza cortante y el momento flexionante.

### 3.1.1. Fuerza cortante

La fuerza cortante  $V$  es igual a la suma algebraica de las fuerzas externas en el eje vertical de la sección transversal de la viga. En la figura 3.4, una viga es cargada por una fuerza distribuida y se le aplica un corte en la sección transversal en estado de equilibrio, la expresión es obtenida mediante la segunda Ley de Newton:

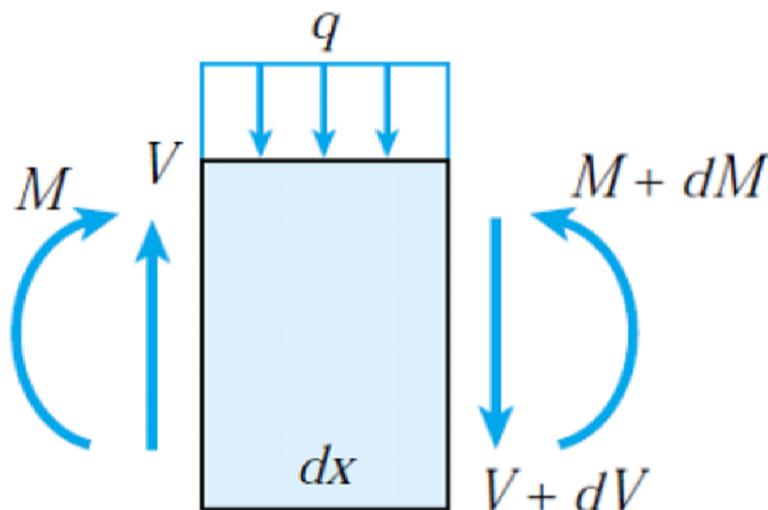


Figura 3.4: Fuerza cortante y momento flexionante en un corte transversal.

$$\Sigma F_{vertical} = 0$$

$$V - qdx - (V + dV) = 0$$

Simplificando términos:

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (3.9)$$

De esta ecuación se concluye que la razón de cambio de la fuerza cortante en cualquier punto en el eje de la viga es igual al negativo de la intensidad de la carga distribuida en el mismo punto.

### 3.1.2. Momento flexionante

El momento flexionante  $M$  es igual a la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas en la sección transversal de la viga. De la ecuación de momentos en equilibrio, se tiene que:

$$\Sigma M = 0$$

$$M - qdx \frac{dx}{2} - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

Nosotros obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (3.10)$$

Esta ecuación muestra que la razón de cambio del momento flexionante en cualquier punto en el eje de la viga es igual a la fuerza cortante en el mismo punto. Por otro lado, tenemos el diagrama mostrado en 3.5, donde se muestra la deformación de una viga bajo un momento flexionante.

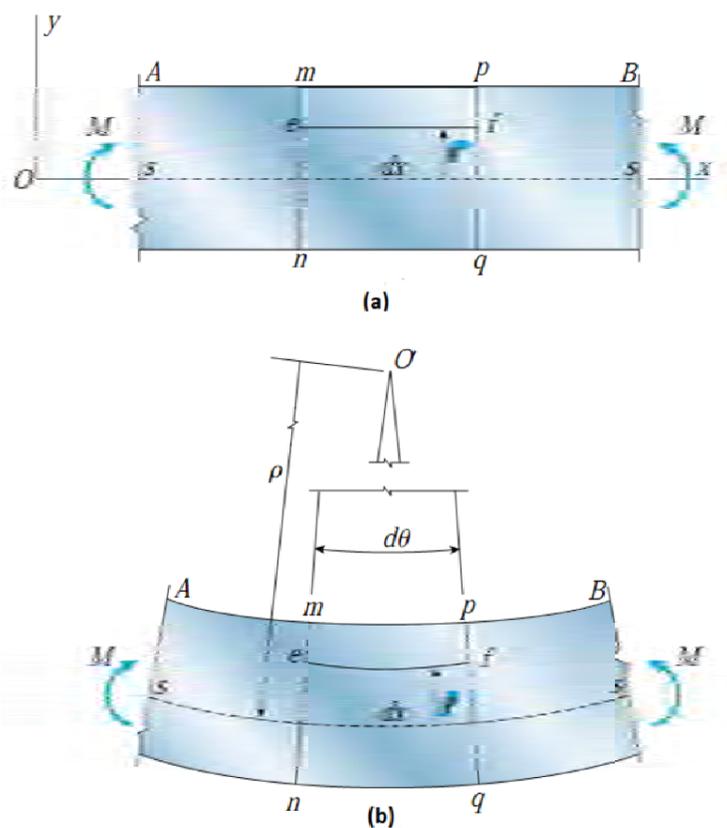


Figura 3.5: Deformación de una viga.

Se define a la deformación de una viga sujeta a un momento flexionante por medio de la siguiente ecuación:

$$\epsilon_x = \frac{\gamma}{\rho} = -\kappa\gamma \quad (3.11)$$

donde  $\gamma$  es la distancia constante entre la sección transversal de la viga horizontal  $S$  y una sección  $ef$  determinada de la misma y  $\kappa$ , que es la curvatura de la viga.

Por lo que, para materiales elásticos lineales, la ley de Hooke queda expresada como [25]:

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -E\frac{\gamma}{\rho} = -E\kappa\gamma \quad (3.12)$$

Y el momento debido a un esfuerzo normal en la viga está dado por:

$$M = \kappa EI \quad (3.13)$$

Por tanto, la curvatura puede ser expresada como:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3.14)$$

Combinando la (3.8) con la (3.14) se obtiene la ecuación diferencial de la curva de deflexión.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (3.15)$$

Utilizando la ecuación (3.9) y la ecuación (3.10) en (3.14), se obtiene:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \quad (3.16)$$

donde:

- $E$  es el módulo de Young.
- $I$  es el momento de Inercia.
- $q$  es la carga de la viga

Esta expresión matemática es conocida como la ecuación Euler - Bernoulli, la cual gobierna el comportamiento de una viga.

## 3.2. Fuerza electrostática que actúa en una viga voladiza.

A la interacción de cargas que se encuentran en reposo se le denomina fuerza electrostática y esta llega a ser muy importante, ya que la fuerza es proporcional al área del objeto en el que actúa. Para deducir la fuerza electrostática que actúa en una viga voladiza, se parte de la Ley de Coulomb dada por [11]:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r} \quad (3.17)$$

donde:

- $Q_1$  y  $Q_2$  son las cargas que interactúan entre sí.
- $r$  es la distancia que separa a las cargas.
- $\vec{r}$  es el vector unitario.

Con base en un análisis energético en [26], la intensidad de campo eléctrico como función de una diferencia de potencial queda definido como:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.18)$$

Por otro lado, de las Leyes de Maxwell, la densidad de flujo eléctrico se define como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.19)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. En general, si cargas ( $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ) son localizadas en una superficie cerrada S, el total del flujo eléctrico es igual a la suma de las cargas involucradas y es expresada como sigue:

$$\oint_A \vec{D} d\vec{S} = \Sigma_j Q_j \quad (3.20)$$

La cual es más conocida como Ley de Gauss, en su forma integral.

La forma diferencial de la ley de Gauss es:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \quad (3.21)$$

donde  $\rho_c$  es la densidad de carga eléctrica. Combinando las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.21) obtenemos [27]

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (3.22)$$

Conocida como ecuación de Poisson.

Por lo que si aplicamos una diferencia de potencial  $V_1$  entre placas conductoras, la teoría electromagnética indica que las cargas son distribuidas en la superficie de las placas conductoras y ninguna carga se encuentra en el espacio libre entre ellas. Por consecuencia, la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace, que en coordenadas cartesianas se expresa de la siguiente manera:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad (3.23)$$

Ya que el espacio entre placas es mucho menor que la longitud y el ancho de ellas como se muestra en la figura 3.6, los primeros dos términos de la ecuación anterior podemos omitirlos. Por tanto:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad (3.24)$$

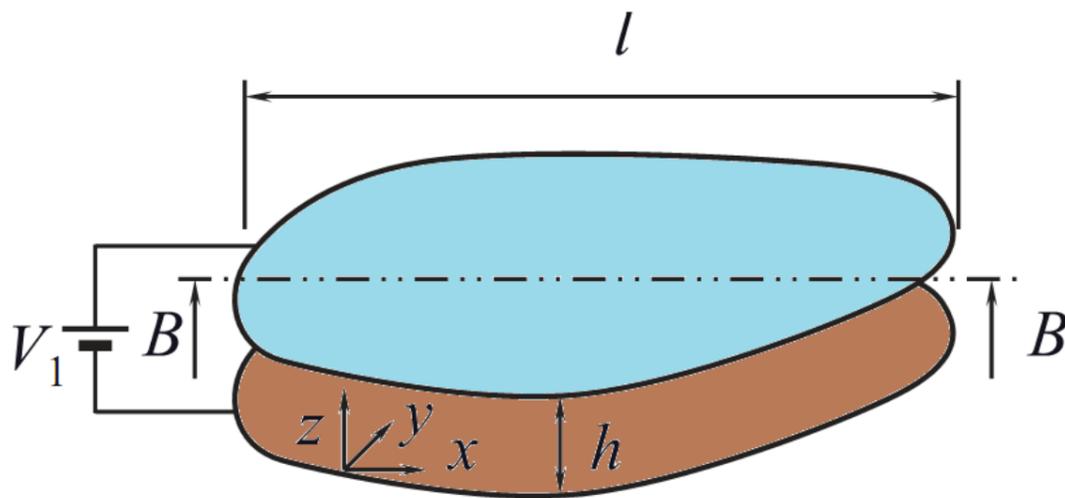


Figura 3.6: Placas con espacio entre placas pequeño.

Las siguientes condiciones límite son establecidas por las placas de la figura 3.6:

$$\begin{aligned} V &= 0 & \text{en} & & x &= 0 \\ V &= V_1 & \text{en} & & x &= h \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (3.24) y las condiciones límite, la diferencia de potencial entre las placas queda definida como:

$$V = \frac{V_1 z}{h} \quad (3.25)$$

Y la intensidad de campo eléctrico  $E$  es obtenido de la ecuaciones (3.18) y (3.25):

$$\vec{E} = -\frac{V_1}{h} \vec{k} \quad (3.26)$$

De la ley de Gauss en su forma integral, podemos obtener la carga inducida a la placa inferior, utilizando (3.19) y (3.26), por lo que la ecuación puede ser escrita:

$$Q = \epsilon_0 V \int_A \frac{1}{h} dS \quad (3.27)$$

Usando la definición de capacitancia,  $C = \frac{Q}{V}$ , encontramos la capacitancia de las placas paralelas:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \int_A \frac{1}{h} dS \quad (3.28)$$

Así mismo, la energía almacenada por un capacitor y la fuerza electrostática debido a un campo eléctrico están dadas por [11]:

$$U = -\frac{1}{2}CV^2 \quad (3.29)$$

$$\vec{F}_e = -\nabla U \quad (3.30)$$

Por consiguiente, si la carga  $Q$  se conserva y si el capacitor se modela linealmente, la fuerza electrostática puede ser escrita como:

$$\vec{F}_e = -\nabla U = \frac{Q^2}{2C^2} \nabla C \quad (3.31)$$

Nótese que en la expresión anterior, la fuerza electrostática está en su forma más general y dependiendo de la aplicación y del diseño, se pueden presentar dos casos diferentes:

### 3.2.1. Fuerza electrostática en placas paralelas

La capacitancia (ecuación (3.28)) puede ser reescrita como:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{h} \quad (3.32)$$

donde  $A$  es el área entre las placas y  $h$  es la distancia que las separa, como se muestra en la figura 3.7.

Además, si las placas están conectadas a una fuente de voltaje, la fuerza electrostática que actúa en la placa móvil es obtenida de (3.30) y (3.32):

$$\vec{F}_e = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2h^2} \vec{k} \quad (3.33)$$

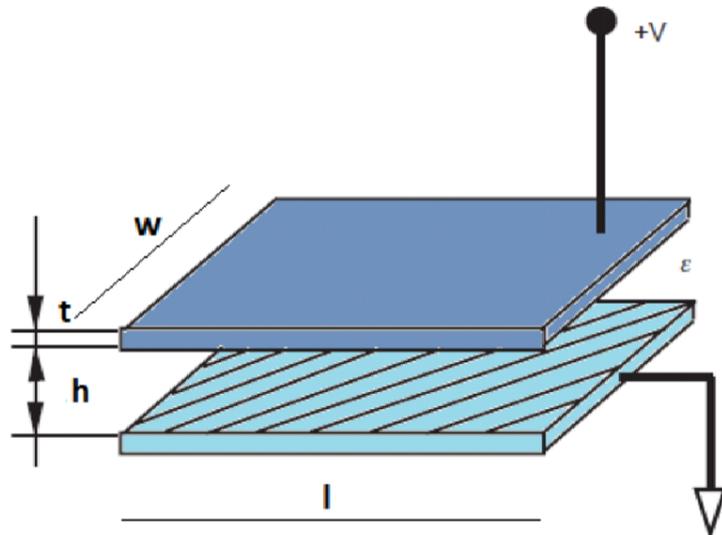


Figura 3.7: Capacitor de placas paralelas.

El gap  $h$  es mucho menor que longitud ( $l$ ) y ancho ( $w$ ).

No obstante, si el grosor de las dos placas delgadas son mucho menor que el gap  $h$  y el ancho  $w$ , la capacitancia puede ser obtenida mediante la fórmula de Palmer [28]

$$C = \epsilon \frac{w}{h} \left( 1 + \frac{2h}{\pi w} \left( 1 + \log\left(\frac{\pi w}{h}\right) \right) \right) \quad (3.34)$$

Por lo que la fuerza electrostática que actúa en la placa delgada superior sería:

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon w l}{h^2} \left( 1 + \frac{h}{\pi w} \right) V^2 \vec{k} \quad (3.35)$$

El efecto de borde juega un rol importante si el ancho  $w$  es comparable al gap  $h$ , como se muestra en el segundo caso.

### 3.2.2. Fuerza electrostática en viga gruesa

Si el grosor de la viga es comparable con el ancho  $w$  y el gap  $h$  como se muestra en la figura 3.8, la capacitancia de una viga estrecha sobre una placa infinita, estará dada por:

$$C = \epsilon l \left( \frac{w}{h} + 0,77 + 1,06 \left( \frac{w^{0,25}}{h} + 1,06 \left( \frac{t}{h} \right)^{0,5} \right) \right) \quad (3.36)$$

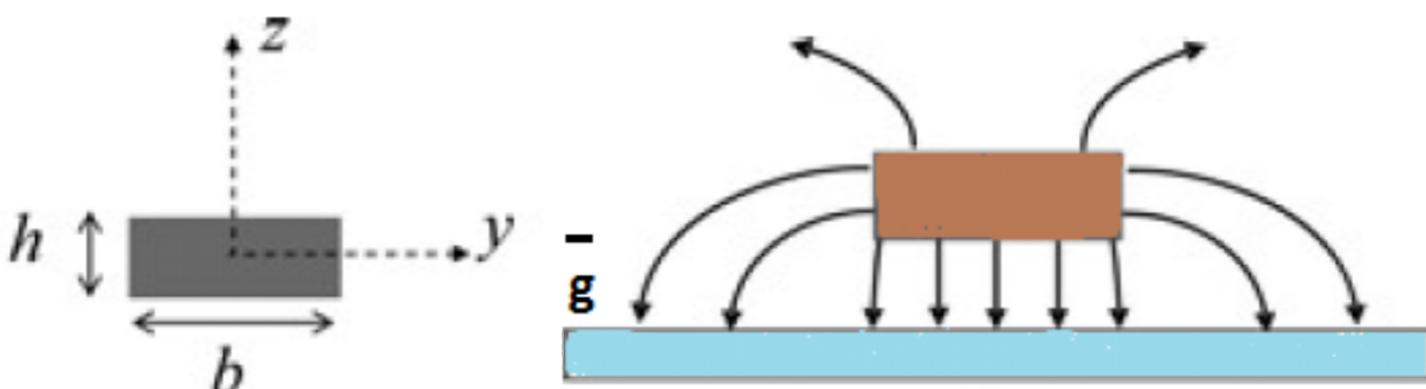


Figura 3.8: Líneas de campo eléctrico de una viga gruesa.

Por lo tanto, la fuerza electrostática que actúa en la viga rectangular será [28]:

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon w l}{h^2} \left( 1 + 0,265 \left( \frac{h}{w} \right)^{0,75} + 0,53 \left( \frac{t}{w} \right)^{0,5} \left( \frac{h}{w} \right)^{0,5} \right) V^2 \vec{k} \quad (3.37)$$

### 3.3. Constante de rigidez de interruptores RF MEMS

En interruptores RF MEMS electrostáticos, la membrana suspendida es lo suficientemente flexible para ser considerada elásticamente movable. El movimiento está dado por la fuerza electrostática provista al aplicar una diferencia de potencial entre la membrana y el electrodo fijo. La fuerza de reacción depende del comportamiento mecánico de la viga, la cual en muchos casos puede ser modelado por una constante de resorte lineal. Para obtenerla, resolvemos la ecuación Euler - Bernoulli, descrita al principio de este capítulo, proponiendo condiciones límite a la posición de la viga voladiza. De la figura 3.9, consideramos una viga tipo voladizo de  $EI$  constante, sujeta a una fuerza transversal  $F$ . Del diagrama de cuerpo libre se considera lo siguiente:

$$M = F(l - x) \qquad V = F$$

Al relacionar y reordenar los términos de la ecuación (3.15), vista en la primer sección del presente capítulo, tenemos:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M = F(l - x) \quad (3.38)$$

Para resolver la ecuación (3.38), las condiciones límite para  $x=0$  son:

$$y = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

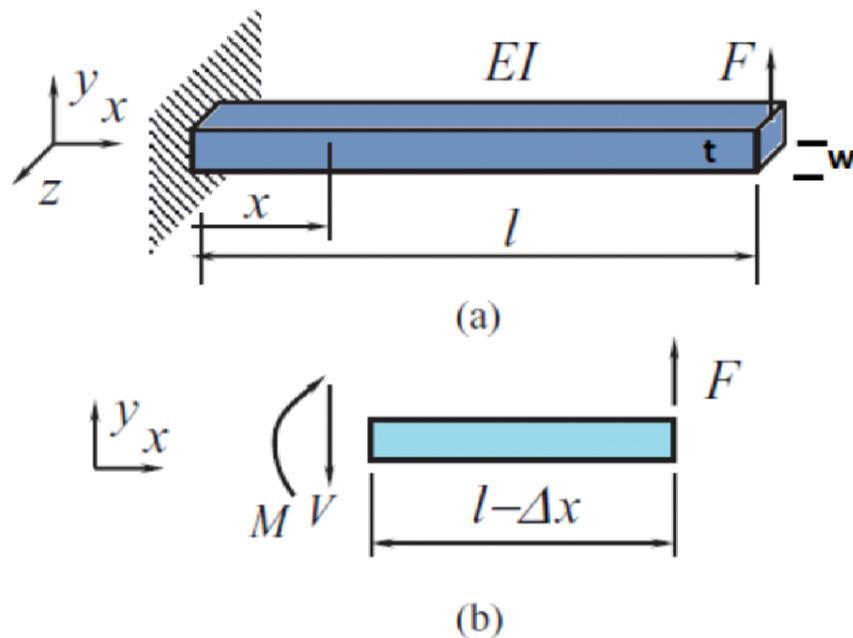


Figura 3.9: Viga sujeta a un corte transversal: a) vista en 3D, b) vista en el plano  $xy$ .

Integrando dos veces y aplicando las condiciones límite anteriores, la deflexión  $v$  de la viga voladiza sujeta a una fuerza transversal está dada por:

$$v = \frac{F}{6EI}(3lx^2 - x^3) \quad (3.39)$$

La máxima deflexión  $\delta$  en  $x = l$  está dada por:

$$\delta = v|_{x=l} = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (3.40)$$

A su vez, la viga puede ser modelada como una barra elástica, de acuerdo a la ley de Hooke que modela la fuerza de un resorte, tenemos:

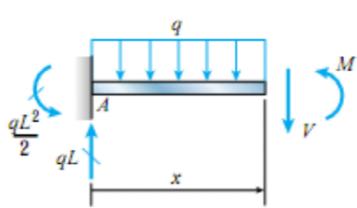
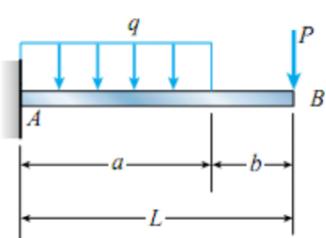
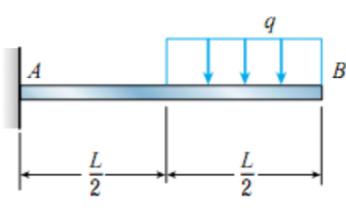
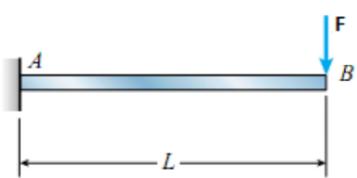
$$F = k\delta \quad (3.41)$$

Considerando a  $\delta$  como el desplazamiento realizado por la viga, la constante elástica o constante de rigidez de la viga la calculamos de las ecuaciones (3.40) y (3.41) [29]:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{3EI}{l^3} \quad (3.42)$$

La ecuación anterior es un modelo aproximado de la constante de rigidez, con la carga en el extremo libre. Utilizando el procedimiento anterior se obtiene la constante de rigidez para cualquier posición del electrodo fijo. Cada una de las expresiones están dadas en la tabla 3.1.

Tabla 3.1:  
Tipos de cargas.

Carga	Deflexión $\nu$ y desplazamiento $\delta$
	$v = -\frac{Fx^2}{24\widehat{E}I}(6L^2 - 4Lx + x^2)$ $\delta = \frac{FL^4}{8\widehat{E}I}$
	$v = -\frac{Fx^2}{24\widehat{E}I}(6a^2 - 4ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v = -\frac{Fa^3}{24\widehat{E}I}(4x - a) \quad (a \leq x \leq L)$ $\delta = \frac{Fa^3}{24\widehat{E}I}(4L - a)$
	$v = -\frac{Fbx^2}{12\widehat{E}I}(3L + 3a - 2x) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v = -\frac{F}{24\widehat{E}I}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \quad (a \leq x \leq L)$ $\delta = \frac{F}{24\widehat{E}I}(3L^4 - 4a^3L + a^4)$
	$v = -\frac{Fx^2}{6\widehat{E}I}(3L - x)$ $\delta = \frac{FL^3}{3\widehat{E}I}$

Cabe señalar que en [11], menciona que para vigas anchas con  $w \geq 5t$  o  $t \geq 5w$ , véase la figura 3.9, el módulo de Young o en este caso *módulo de Young efectivo*, estará definido como:

$$\widehat{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.43)$$

En aplicaciones prácticas, las combinaciones de varias constantes lineales de rigidez son a menudo utilizadas. Estas constantes pueden ser combinadas dando lugar a una constante de rigidez equivalente simple presentando dos casos distintos.

### 3.3.1. Constante de rigidez en paralelo

Cuando se requiere hacer una estructura más rígida, para alguna aplicación en particular, la configuración en paralelo de dos o más constantes de rigidez es a menudo utilizada.

Para derivar una expresión para la constante de rigidez equivalente, se consideran las dos constantes de rigidez mostradas en la figura 3.10. Cuando una carga ( $F$ ) es aplicada, el sistema experimenta una deflexión. En el diagrama de fuerzas mostrado en la figura 3.10 se observa que, debido a que la constante de rigidez  $k_1$  se encuentra anclada, produce una fuerza, de ahí que el extremo de la viga experimente las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . La ecuación para calcular la constante de rigidez equivalente  $k_{eq}$  se calcula como:

$$k_{eq} = k_{viga} + k_1 \quad (3.44)$$

donde  $k_{viga}$  es la mostrada en (3.42).

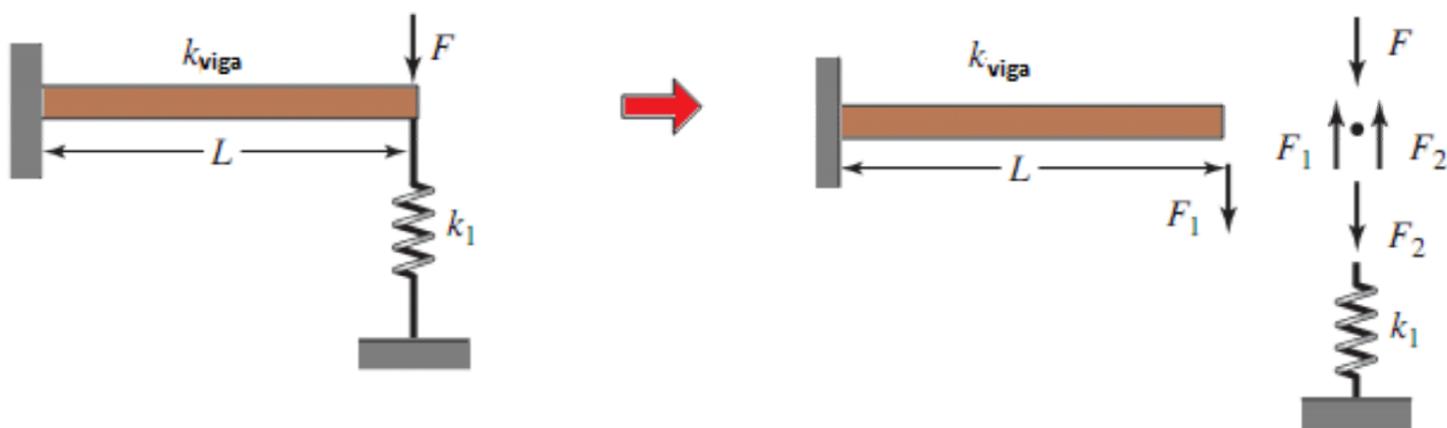


Figura 3.10: Combinación de constantes de rigidez en paralelo.

En general, si nosotros tenemos  $k_1, k_2, \dots, k_n$  constantes de rigidez conectadas de la misma manera, entonces la constante de rigidez equivalente  $k_{eq}$  puede ser obtenida como:

$$k_{eq} = k_{viga} + k_1 + \dots + k_n \quad (3.45)$$

### 3.3.2. Constante de rigidez en serie

En la mayoría de las aplicaciones en los dispositivos RF MEMS, es conveniente disminuir la constante de rigidez, por lo que se ha optado por el desarrollo de diferentes geometrías de la viga móvil. Al observar que la constante de rigidez depende de los parámetros geométricos de la viga y del material de fabricación, la modificación y el manejo de estos parámetros se vuelve una tarea relevante. En la figura 3.11 se muestra la combinación de constantes de rigidez en serie, en la que la constante equivalente es de menor valor que la constante de la viga, donde el valor de la  $k_{equivalente}$  se calcula de la siguiente manera:

$$k_s = \left( \frac{1}{k_{viga}} + \frac{1}{k_1} \right)^{-1} \quad (3.46)$$

donde  $k_{viga}$  es la mostrada en (3.42).

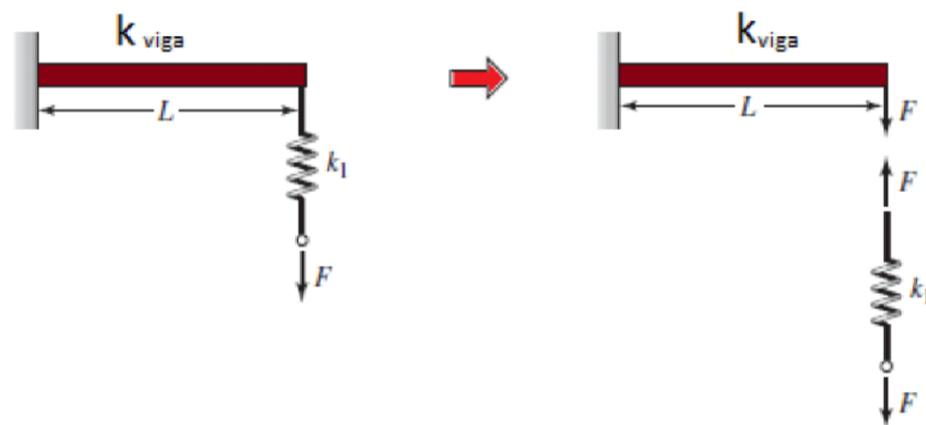


Figura 3.11: Combinación de estructuras para disminuir la constante de rigidez.

De la misma manera cuando se tienen  $k_1, k_2, \dots, k_n$  constantes de rigidez, la constante de rigidez equivalente es calculada como:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (3.47)$$

Es importante mencionar que para las vigas de tipo voladizo, un extremo de la viga se encuentra anclado, mientras el otro extremo se encuentra libre para expandirse y contraerse, por lo que, no se presenta el efecto de esfuerzo residual debido al anclaje. Sin embargo, debido al proceso de manufactura, los MEMS a menudo, requieren la utilización de estructuras multicapa o de diversos materiales. Entonces, debido a la utilización de diferentes materiales, a las capas y a las condiciones de depósito, resulta la aparición de un gradiente de esfuerzo, cuyo efecto puede ser modelado por la ecuación (3.48) [30]:

$$k_s = 2 \frac{E}{lb^2} \mu_{max} \quad (3.48)$$

Donde:

- $E$  Es el Módulo de Young
- $lb$  Es la longitud de la viga en voladizo
- $\mu_{max}$  Es el desplazamiento máximo de la viga.

### 3.4. Voltaje de jale y voltaje de liberación en interruptores RF MEMS con actuación electrostática

#### 3.4.1. Voltaje de jale

Cuando la diferencia de potencial entre las placas se incrementa demasiado, la fuerza electrostática supera la fuerza restauradora de la placa superior (la viga voladiza) llegando a colapsar y golpeando el electrodo fijo. Este fenómeno es conocido en los dispositivos RF MEMS con actuación electrostática como el efecto de jale (fenómeno de Pull-in en inglés) [9].

Al considerar el modelo de placas paralelas de la figura 3.12a, donde el electrodo móvil de masa  $m$  es la viga voladiza, de rigidez  $k$  y el electrodo fijo ubicado a una distancia  $d$  debajo de la viga, la fuerza electrostática que actúa en el electrodo superior al ser polarizadas por un  $V_{DC}$  es expresada como:

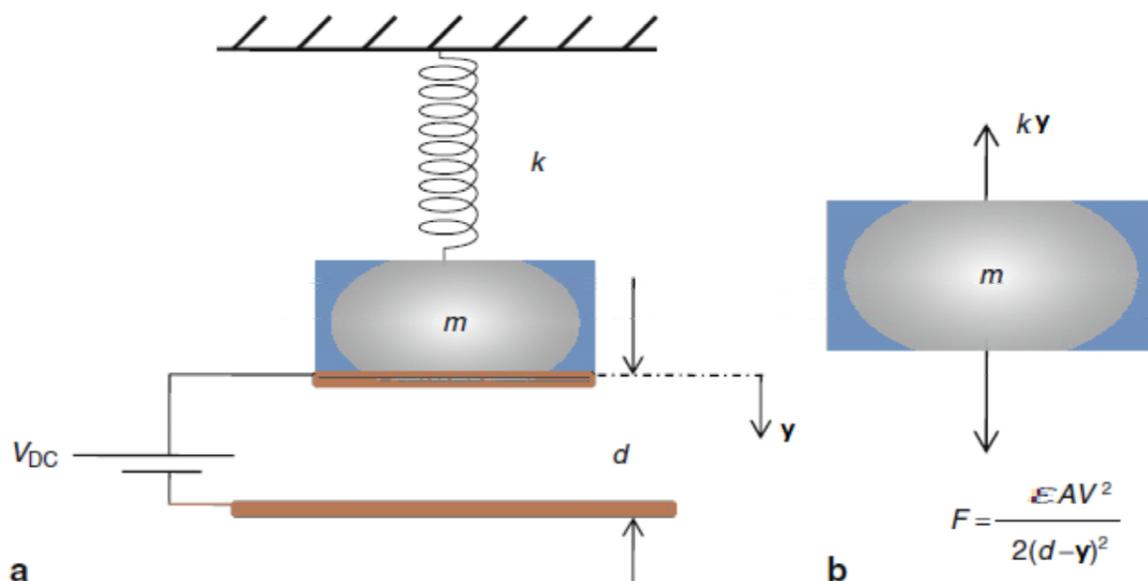


Figura 3.12: Diagrama de cuerpo libre de un sistema masa - resorte.

$$\vec{F}_e = \frac{\epsilon AV^2}{2(d-y)^2} \vec{k} \quad (3.49)$$

Del diagrama de cuerpo libre 3.12b, la fuerza de restauración de la estructura es inducida para oponerse a la fuerza electrostática, lo cual da lugar a una nueva posición de equilibrio de la estructura, por lo que la ecuación de equilibrio de la posición  $y$  puede ser escrita como:

$$ky = \frac{\epsilon AV^2}{2(d-y)^2} \quad (3.50)$$

Si analizamos como varían dichas fuerzas con una pequeña perturbación en el espacio entre placas, derivando la ecuación (3.50) podemos escribir que:

$$k = \frac{\epsilon AV^2}{2(d-y)^3} \quad (3.51)$$

Para que el sistema siga siendo estable, de la ecuación anterior,  $k > (AV^2)/(d-y)^3$ . Nótese claramente que a medida que el voltaje se incrementa, el espacio entre las placas disminuye, por consiguiente habrá un voltaje específico en el cual la estabilidad se pierda. Este es el llamado Voltaje de jale, denotado  $V_j$  y la distancia a la cual sucede dicho efecto se obtiene sustituyendo (3.51) en (3.50), la cual es:

$$y = \frac{1}{3}d \quad (3.52)$$

La gráfica 3.13 muestra en que punto colapsa la viga voladiza.

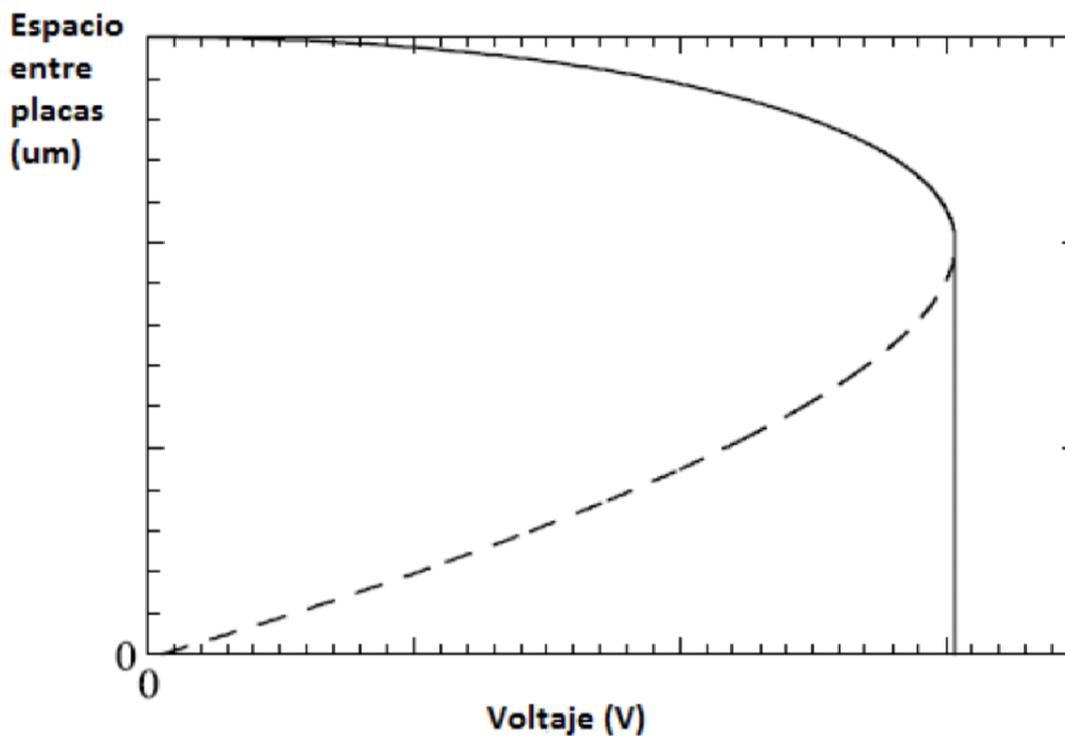


Figura 3.13: Punto crítico donde colapsa la viga.

Por tanto, para obtener  $V_j$  sustituimos (3.52) en (3.50) :

$$V_j = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{kd^3}{\epsilon A}} \quad (3.53)$$

### 3.4.2. Voltaje de liberación

El voltaje requerido para regresar el interruptor a estado abierto es llamado voltaje de liberación. Si el voltaje aplicado es disminuído debajo de este voltaje, la viga regresará a su posición original. En los interruptores de placas paralelas, al lograr contacto entre la viga

y el electrodo de actuación, la capacitancia cambia en función del grosor y la constante dieléctrica de la capa del dieléctrico, por lo que, tomando esto en cuenta, la capacitancia está dada por:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{g + \frac{t_d}{\epsilon_r}} \quad (3.54)$$

La fuerza electrostática es:

$$\vec{F}_e = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon \epsilon_0 A}{\left(g + \left(\frac{t_d}{\epsilon_r}\right)\right)^2} \vec{k} \quad (3.55)$$

La fuerza de restauración mecánica en una viga voladiza es:

$$\vec{F}_r = k(g_0 - g) \vec{k} \quad (3.56)$$

Por lo que el voltaje de liberación de la viga estará dado cuando las fuerzas sean iguales, por tanto:

$$V_{\text{liberación}} = \sqrt{\frac{2k}{\epsilon \epsilon_0 A} (g_0 - g) + \left(g + \frac{t_d}{\epsilon_r}\right)^2} \quad (3.57)$$

### 3.5. Voltaje de actuación

Para el caso de un interruptor RF MEMS, de tipo viga voladiza, con actuación electrostática, el voltaje de actuación es la diferencia de potencial necesaria para lograr que el interruptor cambie de estado. Se busca que éste sea lo más bajo posible. Para asegurar la actuación, el voltaje de actuación usualmente debe cumplir la siguiente condición:

$$V_{\text{actuación}} \geq 1,3V_{\text{jale}} \quad (3.58)$$

Por lo tanto, dentro de los valores de los voltajes de jale y de liberación, algunos programas computacionales tienen la característica de mostrar en una gráfica como se comporta el interruptor en cuestión de sus voltajes. Así que, cuando el voltaje aplicado alcanza un cierto voltaje límite, la viga voladiza cae abruptamente a la placa fija, por lo que el interruptor se activa. Sin embargo, si la magnitud del voltaje es reducido, la viga en voladizo regresará a su posición en un voltaje mucho menor que el voltaje límite, lo cual crea un comportamiento de histéresis, esto se observa en la figura (3.14), donde el cambio medido en el espacio entre placas debido al voltaje aplicado es mostrado, cuando el voltaje es incrementado y decrementado.

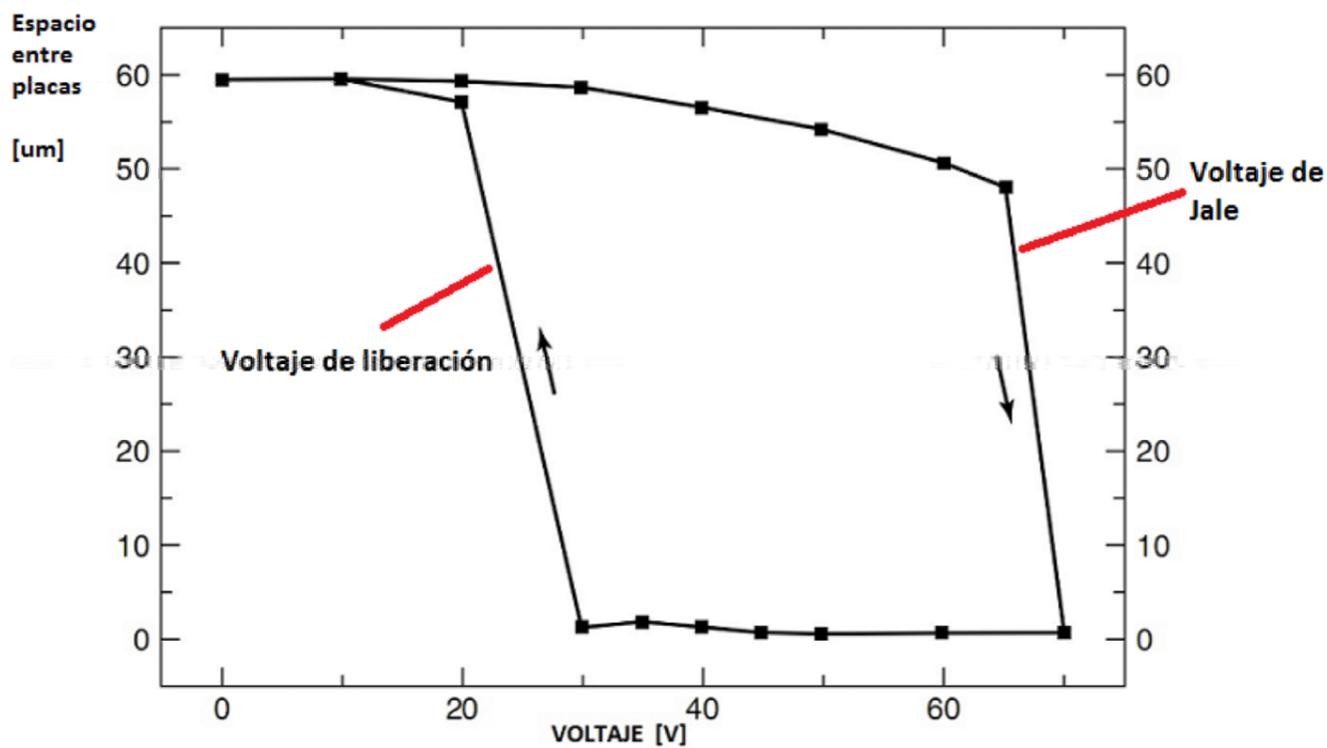


Figura 3.14: Gráfica de histéresis de un interruptor RF MEMS tipo viga voladiza.

### 3.6. Voltaje de ruptura

Promover la confiabilidad es una tarea importante para la aplicación de los interruptores RF MEMS en sistemas reales. Si el voltaje de actuación es mayor a 20 V (según el estado del arte), la ruptura entre los electrodos fijo y móvil debe ser tomada en cuenta. Las causas de la ruptura son principalmente: fallas mecánicas por fricción estática, inducción de carga dieléctrica, pandeo de la viga, condiciones de alta potencia [31], además de los defectos en la capa del dieléctrico, temperatura y propiedades geométricas, como se indica en [32]. El campo eléctrico en los dispositivos MEMS pueden variar en un intervalo entre  $1 - 3 * 10^5 V/cm$  para un espacio entre placas de  $3\mu m$  y diferencia de potencial aplicado entre 20 – 60 volts. Una manera de analizar el voltaje de ruptura de un interruptor es utilizar la trayectoria libre media del electrón, que es la distancia media recorrida por un electrón entre colisiones, que modifican tanto su dirección como energía y está dada por:

$$\lambda_e = \frac{T}{273pP_c(V)} \quad (3.59)$$

donde:

- $T$  es la temperatura en grados Kelvin .
- $p$  es la presión
- $P_c$  es la probabilidad de colisión.

La energía potencial cinética del electrón es definida como:

$$U = eV = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.60)$$

donde:

- $e$  es la carga del electrón.
- $m$  es la masa del electrón.
- $v$  es la velocidad del electrón.

Los valores de  $P_c(V)$  son aproximados de acuerdo a la energía y velocidad del electrón correspondiente a una cierta diferencia de potencial como se muestra en (3.60), por lo tanto, para  $g \leq \lambda_e$  no hay interferencia de electrones en el funcionamiento del dispositivo. Sin embargo, en casos donde la  $g \geq \lambda_e$ , que se da cuando el campo eléctrico es  $> 1 - 2MV/cm$ , ya que se presenta adición de electrones y carga dieléctrica [4].

### 3.7. Análisis modal

Un modelo masa - resorte de un grado de libertad es una buena aproximación de una viga voladiza cuando el sistema no es amortiguado o este efecto es despreciable. En reposo, la masa colgará en una posición llamada *posición de equilibrio estático*, como se observa en la figura 3.15, en la cual la fuerza del resorte es positiva y exactamente balanceada con la fuerza gravitacional en la masa que es negativa. En esta posición, la longitud del resorte es  $l_0$  más la deflexión estática ( $\delta_{estática}$ ) debida al peso  $W$  de la masa. Por todo lo anterior, se encontró, que el equilibrio estático se expresa como:

$$W = mg = k\delta_{estático} \quad (3.61)$$

Al desplazar la masa una distancia  $+x$  y después aplicando la Segunda ley de Newton, tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \delta_{estático}) + W \quad (3.62)$$

Y de (3.61), obtenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (3.63)$$

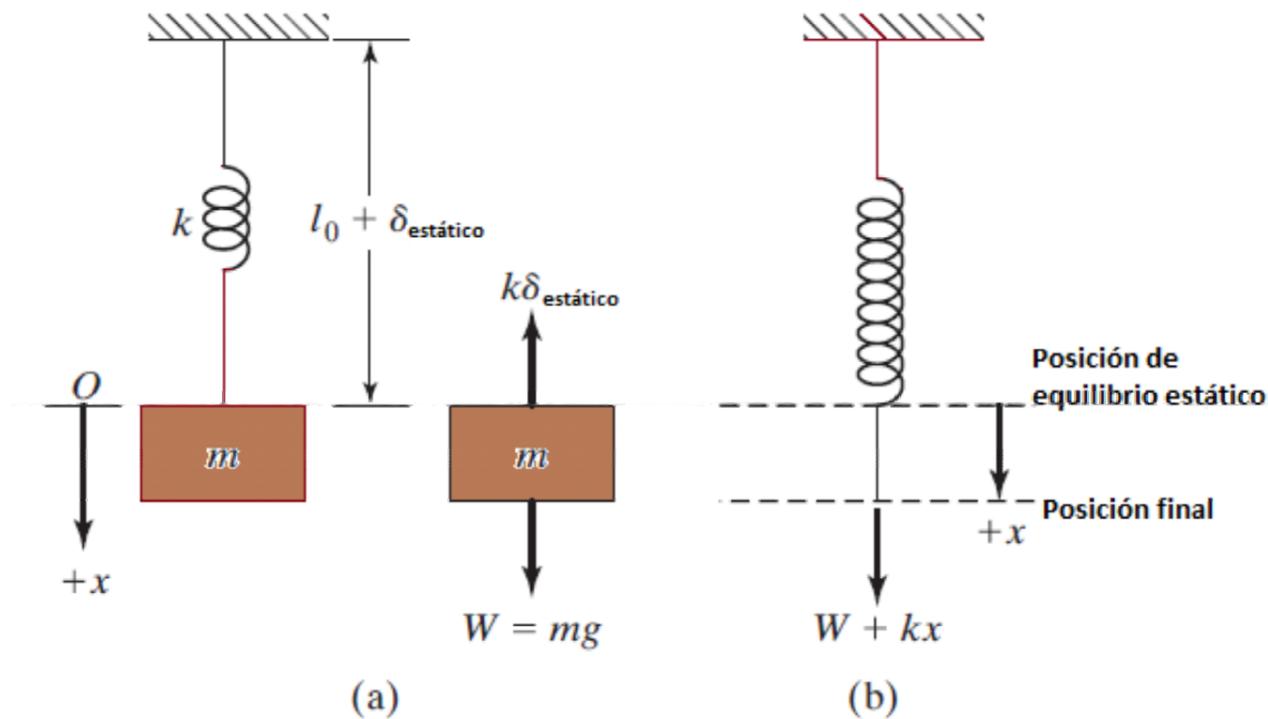


Figura 3.15: Modelo masa-resorte.

La ecuación anterior la podemos expresar en términos de la transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a 0, por lo que:

$$ms^2 + k = 0 \quad (3.64)$$

Conocida como ecuación característica del sistema [33]. Este es un sistema de segundo grado, cuyas raíces son conocidas como los eigenvalores o valores característicos del problema y en este caso son valores complejos:

$$s = \pm \left( \frac{-k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n$$

donde:

$$\omega_n = \left( \frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta expresión es conocida como la frecuencia natural del sistema y está descrita por la constante de rigidez de la viga y por la masa propia, parámetros fundamentales en el diseño de cualquier viga. Para la respuesta estática, nosotros hemos tratado a la masa y a la constante de elasticidad, como parámetros discretos. En otros casos, por ejemplo en los modelos conocidos como sistemas de *parámetros distribuidos* o *sistemas continuos*, esto no es posible. Nosotros debemos considerar a cada parámetro con infinitos puntos, los cuales a su vez pueden sufrir infinitos cambios. Esto es también conocido como *sistema de infinitos grados de libertad*.

En consecuencia, conocer el valor de la frecuencia natural determinará el buen funcionamiento del interruptor, ya que este valor se debe encontrar alejado del valor de la frecuencia de conmutación del mismo, en caso contrario se debe revisar la frecuencia de

operación o rediseñar el valor de la frecuencia natural, ya que este depende prácticamente del valor de la constante de rigidez.

Por ende, nosotros nos referimos a la ecuación Euler - Bernoulli (ecuación (3.16)), considerando que la carga de la viga depende de la posición y omitiendo componente axial y amortiguamiento. Por tanto, la ecuación de movimiento se expresa como:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p(x) \quad (3.65)$$

Para el movimiento cercano a la posición de equilibrio estático sobre su propio peso, la carga es igual a la carga inercial debido a su masa y aceleración. Debido a esto, para resolver la ecuación anterior, asumimos movimiento armónico, para que la carga pueda ser expresada como:

$$p(x) = \rho A w^2 v \quad (3.66)$$

Donde:

- $\rho$  es la densidad de la viga .
- $A$  es el área de la viga.
- $w$  es la frecuencia natural de la viga.

En consecuencia, la ecuación (3.65) queda expresada como:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho A w^2 v = 0 \quad (3.67)$$

La ecuación anterior describe el movimiento armónico de la viga y, para encontrar los modos de vibración y las frecuencias naturales, es necesario resolverla.

De [34], nosotros sustituimos las constantes por una única constante:

$$\beta^4 = \frac{\rho A w^2}{EI} \quad (3.68)$$

Sustituyendo (3.68) en (3.67) obtenemos:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \beta^4 v = 0 \quad (3.69)$$

Esta es una ecuación diferencial de cuarto orden de coeficientes constantes, para resolverla tenemos como solución general (3.70) [35]:

$$y = e^{ax} \quad (3.70)$$

Por lo que al sustituir (3.70) en (3.67), tenemos:

$$\frac{d^4 e^{ax}}{dx^4} - \beta^4 e^{ax} = 0 \quad (3.71)$$

$$a^4 e^{ax} - \beta^4 e^{ax} = 0$$

Para cumplir la igualdad de la ecuación (3.71), debemos cumplir la siguiente condición:

$$a^4 = \beta^4 \quad (3.72)$$

Por tanto:

$$a = \pm\beta; a = \pm i\beta$$

Tenemos que la solución general de la ecuación (3.68) es:

$$v = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} + Ce^{-i\beta x} + De^{i\beta x} \quad (3.73)$$

Esta solución la podemos expresar en términos geométricos por las fórmulas de Euler (véase [apendice A]), entonces:

$$v = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \quad (3.74)$$

Esta ecuación describe el movimiento de una viga en general, de modo que la frecuencia natural del sistema estará dada por:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (3.75)$$

donde el número  $\beta_n$  dependen de las condiciones límite de la viga voladiza que se verán más adelante. Sin embargo, en [34], se introduce la longitud de la viga para tener a la frecuencia natural como función de la misma, además del modo de vibración, por tanto la ecuación (3.75) queda reescrita como:

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \quad (3.76)$$

La ecuación (3.74) es resuelta con las condiciones límite de una viga tipo voladiza dadas por [36]:

$$v(0) = 0; \quad \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2}\Big|_{x=L} = 0; \quad \frac{d^3v(x)}{dx^3}\Big|_{x=L} = 0$$

De acuerdo con éstas, al sustituirlas en la ecuación (3.73), obtenemos:

$$0 = A + C$$

$$0 = (B + D)\beta$$

$$0 = (A\cosh(\beta L) - C\cos(\beta L) + B\sinh(\beta L) - D\sin(\beta L))\beta^2$$

$$0 = (B\cosh(\beta L) - D\cos(\beta L) + A\sinh(\beta L) + C\sin(\beta L))\beta^3$$

Este sistema de ecuaciones se puede trabajar como un problema de eigenvalores, por lo que buscamos la ecuación característica del sistema. Así que, reordenando términos y organizados en forma matricial, tenemos:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que tenga solución dicho sistema de ecuaciones, el determinante de la matriz incógnita debe ser igual a 0, por lo que llegamos a la ecuación trascendental:

$$\cosh(\beta L)\cos(\beta L) = -1 \tag{3.77}$$

La solución de la ecuación anterior puede ser encontrada de diferentes maneras. La tabla 3.2 muestra los cálculos de los primeros valores para los cuales la ecuación se cumple, además de ser los más utilizados para caracterizar una viga tipo voladiza. Estos valores son conocidos como eigenvalores, valores característicos o *modos naturales*.

Tabla 3.2:  
5 Primeros modos naturales de una viga voladiza.

$n$	$\beta_n L$
1	1.875
2	4.694
3	7.854
4	10.99
5	14.13

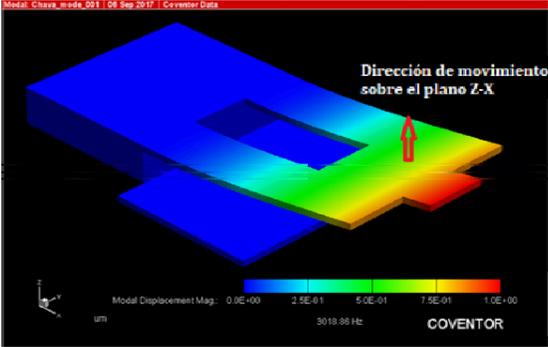
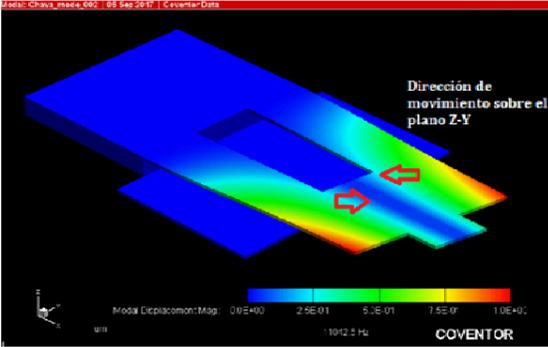
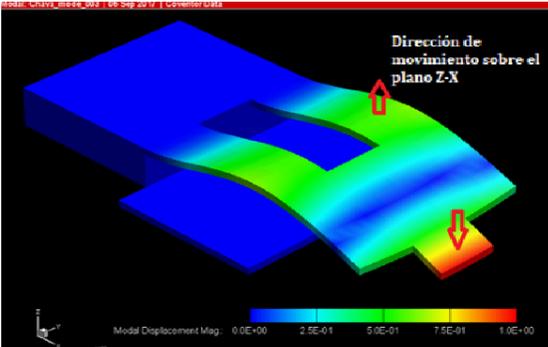
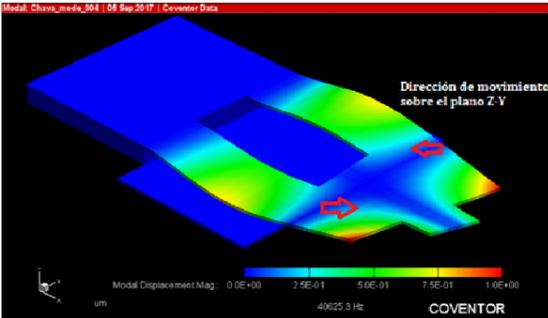
Utilizando los valores de la tabla 3.2 en la ecuación (3.77), podemos calcular la frecuencia natural en el modo de vibración que deseemos. Por lo general, se toman en cuenta los modos 1 y 3 debido a que son los modos de acuerdo a la dirección de movimiento. Nótese que por cada modo de vibración tendrá su correspondiente frecuencia natural, debido a esto, es fácil observar que el valor de dichas frecuencias naturales diferirá del obtenido en (3.64), además del interés para calcular una masa efectiva del sistema. La masa efectiva se refiere al hecho de que para una microestructura flexible de masa distribuída, no toda su porción participa en el modo particular del movimiento ni tampoco necesariamente participa en la misma proporción. Por ejemplo, en el caso de una viga en voladizo, la masa cercana al anclaje casi no contribuye al movimiento. Por lo que, la frecuencia natural estará escrita como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}} \quad (3.78)$$

donde  $k$  será la constante de rigidez equivalente del sistema. Por consiguiente, la masa efectiva puede ser calculada despejando la ecuación anterior.

Además, COVENTOR nos da la posibilidad de observar el análisis modal de un interruptor, teniendo en cuenta el tipo de fabricación, materiales, geometría, entre otros parámetros. Por lo que su uso es útil cuando se requiere observar la dirección de movimiento del interruptor como se muestra en la tabla 3.3 y así tener las consideraciones para diseño .

Tabla 3.3:  
Modos de vibración simulados en COVENTOR.

Simulación	Modo
 <p data-bbox="571 694 1119 1041">Modal Displacement Mag: 0.0E+00 2.5E-01 5.0E-01 7.5E-01 1.0E+00 3018.88 Hz COVENTOR</p>	1
 <p data-bbox="571 1169 1119 1516">Modal Displacement Mag: 0.0E+00 2.5E-01 5.0E-01 7.5E-01 1.0E+00 1072.2 Hz COVENTOR</p>	2
 <p data-bbox="571 1644 1119 1991">Modal Displacement Mag: 0.0E+00 2.5E-01 5.0E-01 7.5E-01 1.0E+00 20887 Hz COVENTOR</p>	3
 <p data-bbox="571 2139 1119 2457">Modal Displacement Mag: 0.0E+00 2.5E-01 5.0E-01 7.5E-01 1.0E+00 40625.3 Hz COVENTOR</p>	4

### 3.8. Conclusiones del capítulo

- ⇨ La ecuación Euler - Bernoulli se utiliza cuando podemos considerar que la sección transversal horizontal de la viga permanece constante durante su deflexión y es utilizada para describir el movimiento; además, permite obtener la constante de rigidez de la viga dependiendo del anclaje y la geometría de la misma. La expresión matemática es definida como:

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -q$$

- ⇨ La fuerza electrostática es generada cuando un voltaje de actuación es aplicado a un par de placas y depende de la geometría de las placas. Para placas paralelas:

$$\vec{F}_e = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2h^2} \vec{k}$$

Para viga gruesa:

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon w l}{h^2} \left( 1 + 0,265 \left( \frac{h}{w} \right)^{0,75} + 0,53 \left( \frac{t}{w} \right)^{0,5} \left( \frac{h}{w} \right)^{0,5} \right) V^2 \vec{k}$$

- ⇨ La constante de rigidez es la consideración de la elasticidad de la placa móvil. Depende del material y de la posición donde se ejerza la carga, es decir de la posición del electrodo de actuación (tabla (3.1)).
- ⇨ El voltaje de jale es el voltaje en el cual la viga es flexionada, hacia el electrodo fijo y este ocurre cuando la viga es flexionada  $\frac{1}{3}d$ .
- ⇨ El análisis modal consiste en plantear la ecuación del movimiento, a partir de los parámetros de diseño, así como de los grados de libertad que sean analizados para los modos de movimiento y este por lo regular supone resolver un problema de eigenvalores.
- ⇨ Del análisis modal se concluye que para cada modo de vibración o modo natural, tendrá su correspondiente frecuencia natural, por lo que se analiza la porción de masa que participa en el movimiento de la viga, conocida como masa efectiva de la viga.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## COMPORTAMIENTO ELECTROMECAÁNICO DINÁMICO DE INTERRUPTORES RF MEMS

*” Cuanto más comprendo la ciencia, más creo en Dios por la maravilla de la amplitud, sofisticación e integridad de su creación. Lejos de estar en desacuerdo con la ciencia, la fe cristiana tiene un sentido científico perfecto.”*

---

JOHN CARSON LENNOX, PROFESOR DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE  
OXFORD

En los dispositivos RF MEMS con actuación electrostática, tenemos como estructura básica de movimiento la viga. Este elemento mecánico en configuración serie (comúnmente en voladizo), al aplicarle cierta diferencia de potencial entre la placa superior y el electrodo fijo, induce una fuerza electrostática que ocasiona la deflexión de la placa superior. En donde las expresiones del Voltaje de Jale ( $V_j$ ) y el Voltaje de liberación describen la respuesta estática del interruptor. Sin embargo, la inclusión de la masa y fuerzas de amortiguamiento mecánicas que surgen de la viscosidad del aire, hace que el rendimiento de cualquier interruptor sea afectado al momento en el que este es conmutado, por lo tanto, es necesario describir el comportamiento dinámico con base en la frecuencia de resonancia y la frecuencia de operación o tiempo de conmutación.

Por lo anterior, el análisis de estos actuadores, en los cuales se aplican las fuerzas electrostáticas y se tienen estructuras móviles, se hace más complejo; por lo tanto, haciendo uso de los parámetros estáticos como primer punto en el presente capítulo, se presenta un modelo de parámetros concentrados que consiste en un amortiguador, la constante de



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

rigidez y la masa de la viga, para así obtener su respuesta transitoria y su comportamiento en estado estable, describiendo de manera detallada a la constante de amortiguamiento y al factor de calidad mecánico, así como los efectos que provocan al variar sus valores.

#### 4.1. Análisis dinámico de un sistema masa - resorte - amortiguador.

Hasta ahora, nosotros hemos derivado la respuesta estática del sistema sin considerar la fuerza de amortiguamiento que interviene cuando se presenta movimiento entre la placa móvil y la placa fija. En muchos casos, el voltaje aplicado a las placas (electrodo fijo y a la viga voladiza) varía con el tiempo, por tanto para describir matemáticamente esta acción modelamos el sistema mecánico dinámico como un resorte-masa-amortiguador. Este modelo de parámetros concentrados tiene la ventaja de ser simple y completo en la descripción analítica, sin embargo tiene la desventaja de ignorar el efecto de acoplamiento de las fuerzas electrostáticas con la viga, así como el hecho de considerar el anclaje. En esta ecuación de segundo grado intervienen tres términos fuerza, como se muestra en el diagrama de la figura 4.1a, los cuales son:

- $F_m$ ; La fuerza inercial que es el producto de la masa por la aceleración, relacionado con la energía cinética del sistema.
- $F_d$ ; La fuerza de amortiguamiento, es el producto del coeficiente de amortiguamiento y la velocidad.
- $F_k$ ; La fuerza de rigidez, es el producto de la constante de rigidez por la deflexión debido a la deformación elástica.
- $F$ ; Es la entrada del sistema vía fuerza externa aplicada.

Para modelar este sistema de segundo orden, se muestra el diagrama de cuerpo libre de la placa en la figura 4.1b.

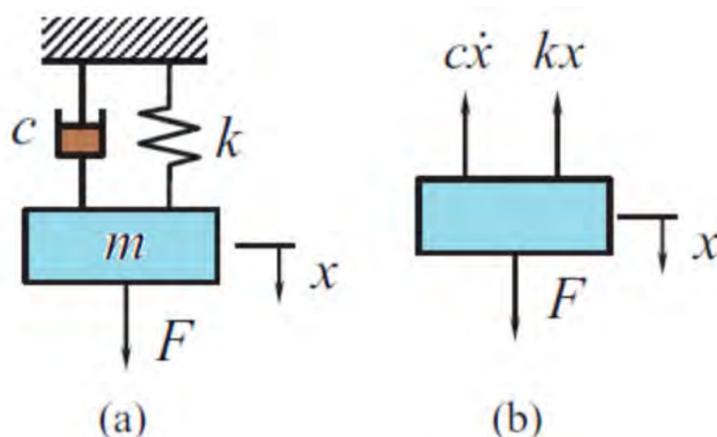


Figura 4.1: Sistema masa-resorte-amortiguador.

En dicho diagrama de cuerpo libre, podemos observar que al tomar en cuenta la fuerza de amortiguamiento, esta es asociada con la disipación de energía del sistema, por lo que involucra un movimiento y se describe con la teoría de vibración. Por tanto, al aplicar la Segunda Ley de Newton obtenemos la ecuación diferencial de movimiento siguiente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \quad (4.1)$$

$$f_m + f_d + f_k = F$$

donde la fuerza  $F$  aplicada puede ser expresada como una suma de un término constante y un término sinusoidal.

En consecuencia, la ecuación (4.1) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden no-homogénea de coeficientes constantes, así la solución consiste de dos partes: una solución homogénea  $x_h$  y una solución particular  $x_p$ . Debido a esto, la solución homogénea corresponde al caso cuando la fuerza aplicada es cero y físicamente representa el comportamiento transitorio del sistema o el movimiento del mismo, mientras que la solución particular  $x_p$  corresponde a la llamada respuesta de estado estable del sistema.

#### 4.1.1. Respuesta libre de un sistema amortiguado

Si un sistema, después de una excitación inicial, se deja moviendo en su propia frecuencia, da como resultado un movimiento conocido como *vibración libre*, en el cual ninguna fuerza externa actúa en el sistema.

En este caso,  $f(t) = 0$ , por lo tanto, la ecuación diferencial (4.1) es reescrita como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.2)$$

Cabe mencionar que  $m$ ,  $c$  y  $k$  son considerados constantes y dado que la fuerza externa es 0, esta expresión es conocida como *ecuación diferencial homogénea*, que define un sistema mecánico.

Para resolver la ecuación anterior hacemos uso de un operador  $D$  [37], por tanto la ecuación diferencial (4.2) queda expresada en términos de un operador como:

$$mD^2 + cD + k = 0$$

haciendo uso de una variable auxiliar  $\lambda$ , la ecuación anterior queda reescrita como:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (4.3)$$

Por lo que las raíces de la ecuación (4.4) son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4.4)$$

Y para mayor facilidad de manejo algebraico y de conceptos, diversos autores proponen el uso del coeficiente de amortiguamiento crítico y el factor de amortiguamiento definidos como:

$$c_c = 2\sqrt{mk}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (4.5)$$

Por lo que las raíces de la ecuación (4.3), utilizando (4.5) y la frecuencia natural del sistema  $\omega_n$ , pueden reescribirse como:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4.6)$$

Podemos observar que las raíces de la ecuación (4.3) estarán definidas por el discriminante de la raíz cuadrada. Por lo tanto, de las raíces de dicha ecuación ahora procederemos a analizar la constante de amortiguamiento, para así dar paso a la respuesta tanto estable como transitoria del interruptor y conocer que tipo de respuesta puede tener un interruptor RF MEMS dado.

#### 4.1.2. Respuesta forzada de un sistema amortiguado

Como se muestra en la figura 4.2, el interruptor RF MEMS, modelado como un sistema de placas paralelas, al ser polarizado con un cierto voltaje de actuación, a la viga o la placa superior se le induce movimiento. Para esta situación, el modelo dinámico quedará descrito con la masa  $m$ , la área de actuación  $A$ , una constante de rigidez  $k$ , un amortiguador de constante  $c$  y separada por un gap inicial  $h_0$  de la placa fija; por ende, el desplazamiento  $x$  es provocado por la fuerza electrostática y por lo tanto, la ecuación (4.1) quedará escrita como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k(h_0 - h + x) = F_e \quad (4.7)$$

Podemos observar que de la misma figura, al voltaje de polarización  $V_b$  se le suma el voltaje variable en el tiempo  $V_i$  y por lo tanto la fuerza electrostática  $F_e$  queda expresada como:

$$F_e = \frac{\epsilon AV^2}{2(h - \delta)^2} = \frac{\epsilon A(V_b + V_i)^2}{2(h - \delta)^2} \quad (4.8)$$

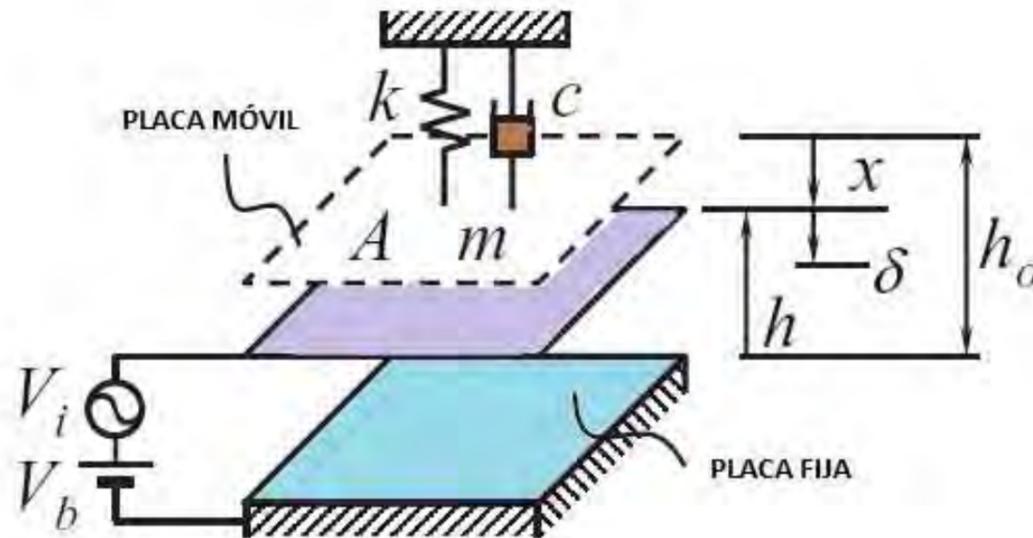


Figura 4.2: Modelo dinámico de placas paralelas.

## 4.2. Constante de amortiguamiento en interruptores RF MEMS tipo viga voladiza

La fuerza de amortiguamiento se refiere a la disipación o pérdida de energía en el sistema electro - mecánico y afecta fuertemente su rendimiento, diseño y control. Por lo que ahora hablaremos de los parámetros que intervienen en el amortiguamiento del sistema y de como influye en el comportamiento de la mayoría de los interruptores, dependiendo de su criterio de diseño y condiciones de operación. El mecanismo exacto de amortiguamiento puede tomar diferentes formas, tales como el calor generado por repetidas deformaciones mecánicas o el arrastre dinámico en el movimiento. La mayoría de los dispositivos RF MEMS experimentan amortiguamiento en diferente magnitud, el cual principalmente es debido a dos causas [24]:

- *Amortiguamiento estructural*: Esta forma de disipación de energía es debida al mecanismo interno del material, es referente a la generación de calor, sin embargo en los dispositivos MEMS el valor es pequeño.
- *Amortiguamiento fluídico*: Para los dispositivos MEMS, esta forma de amortiguamiento es más significativa y frecuentemente considerada para el diseño, debido a que es provocado por el movimiento cíclico de la estructura principalmente en un gas (como el aire) o en ambientes líquidos.

Cuando una placa móvil es ubicada en paralelo a otra placa fija y esta se mueve hacia la placa fija, la capa de aire entre las mismas es presionada tal como se muestra en la figura 4.3 [9].

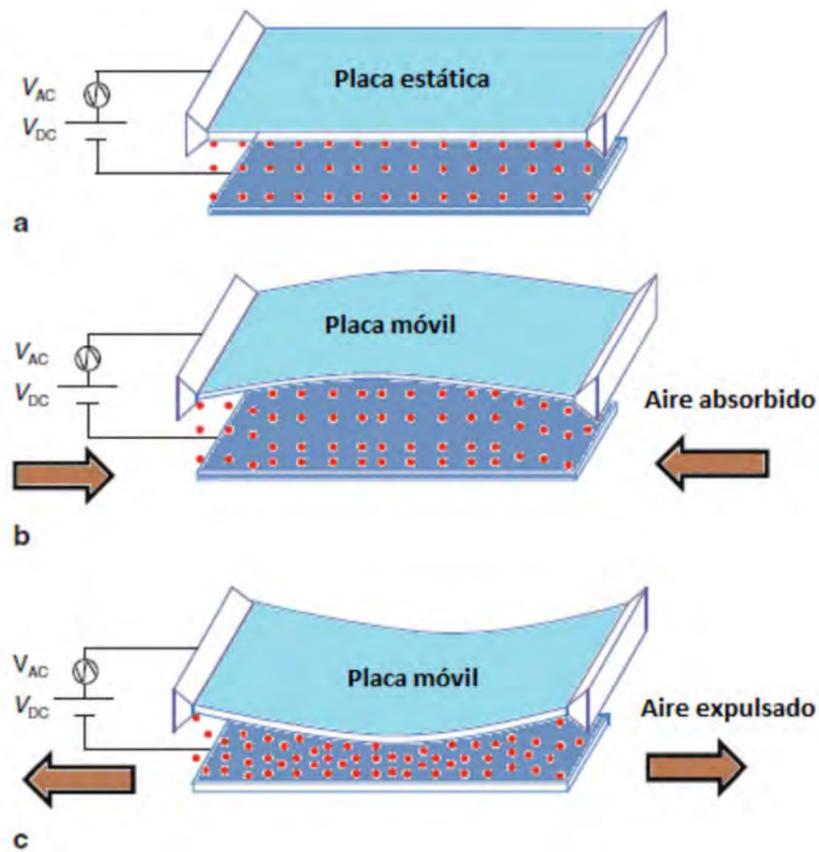


Figura 4.3: Amortiguamiento en placas paralelas.

Donde el movimiento está descrito por la siguiente ecuación de Reynolds para flúidos:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.9)$$

donde  $P$  es la función de la presión fluídica,  $h$  es el espacio entre placas.

Considerando un par de placas rectangulares con longitud  $L$ , mucho más grande que el ancho  $B$ , como la mostrada en la figura 4.4 [29]. El eje de importancia es el eje  $x$  que es en la dirección del ancho de la placa, por lo que la ecuación queda reescrita como:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.10)$$

Al integrar dos veces la ecuación anterior, nosotros obtenemos la función de presión amortiguada de la placa:

$$P(x, t) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (4.11)$$

De la misma figura 4.4 observamos que las condiciones límite para resolver la ecuación 4.11 están dadas por el ancho de la viga ( $B$ ), por lo que estas son dadas como:

$$P\left(\pm \frac{1}{2} B\right) = 0 \quad (4.12)$$

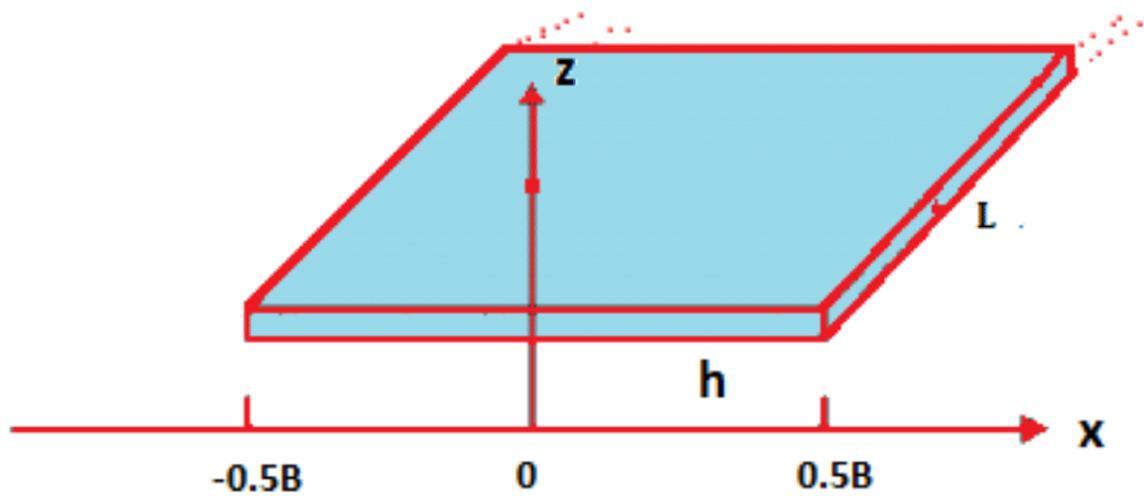


Figura 4.4: Geometría del amortiguamiento de una placa larga rectangular.

Así, la solución de la ecuación (4.11), con las condiciones límite dadas, es:

$$P(x, t) = -\frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \left[ \frac{1}{4} B^2 - x^2 \right] \quad (4.13)$$

A su vez, como se observó en la figura anterior, suponemos que el amortiguamiento máximo se da en  $x = 0$  (centro de la placa), por lo que la ecuación de presión quedará reescrita como:

$$P(x, t) = -\frac{3\mu}{2h^3} \frac{dh}{dt} B^2 \quad (4.14)$$

La presión se define como fuerza entre unidad de área, por lo que despejando la fuerza tenemos que :

$$F = PA$$

El área de la placa la definimos como:

$$A = \int L dx$$

Así que, considerando a  $L$  constante, la fuerza debida al amortiguamiento se expresa como:

$$F = -\frac{3\mu}{2h^3} B^2 L \frac{dh}{dt} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dx \quad (4.15)$$

Resolviendo la integral, la fuerza queda expresada como:

$$F = -\frac{3\mu}{2h^3} B^3 L \frac{dh}{dt} \quad (4.16)$$

Donde el coeficiente de amortiguamiento es descrito como:

$$c = \frac{3 \mu B^3 L}{2 h^3} \quad (4.17)$$

Se hace énfasis en que la solución de la ecuación (4.13) sólo es válida cuando L es mucho mayor a B.

### 4.3. Análisis dinámico en estado estable.

Uno de los parámetros fundamentales de los interruptores RF MEMS es el del tiempo de conmutación, el cual se puede obtener resolviendo la ecuación (4.7) que modela el comportamiento de un interruptor bajo la acción de una fuerza electrostática inducida a cierto voltaje de actuación. Haciendo la aproximación a un sistema de placas paralelas, la ecuación es reescrita como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k(x) = \frac{\epsilon A V^2}{2(x + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} \quad (4.18)$$

Y como puede observarse la ecuación diferencial de segundo grado anterior es no lineal, por lo que se utilizó el método de diferencias finitas para obtener el desplazamiento de la viga voladiza. Recordando que una función  $f(x)$  se puede aproximar en el punto  $a$  mediante el desarrollo de la serie de Taylor, tenemos que:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \quad (4.19)$$

Al hacer el  $\Delta x = h = x - a$ , entonces la expresión anterior es reescrita como:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{h}{1!} + f''(a) \frac{h^2}{2!} + f'''(a) \frac{h^3}{3!} + \dots \quad (4.20)$$

Ahora se realiza un análisis alrededor de  $x$ , con el valor de  $h$  tanto hacia la izquierda como a la derecha, teniendo las dos siguientes ecuaciones:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x) \frac{h^2}{2} + f'''(x) \frac{h^3}{6} + \dots \quad (4.21)$$

Y

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x) \frac{h^2}{2} - f'''(x) \frac{h^3}{6} + \dots \quad (4.22)$$

Se deduce que entre menor sea el valor de  $h$  es posible omitir los términos  $h^2, h^3, h^4 \dots$  por lo que de (4.21) y (4.22) tendremos:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \quad (4.23)$$

conocida como *diferencia hacia adelante*. Y

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x) - f(x-h)] \quad (4.24)$$

conocida como *diferencia hacia atrás*. Además si restamos (4.22) de (4.21) tenemos:

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] \quad (4.25)$$

que es la llamada *aproximación por diferencia central a la  $f'(x)$*

Se puede observar que dependiendo de los términos  $h$  que se desprecien de las ecuaciones (4.21) y (4.22), se podrán obtener las *diferencias finitas centrales para  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ ,  $f^{IV}(x)$ ,...  $f^n(x)$* .

Por otro lado, el problema a resolver en el presente trabajo es dado por un valor de frontera no lineal para una ecuación de la forma:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta$$

Ya que cada término es un parámetro físico de los interruptores de manera general, quedando la ecuación siguiente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k(x) = \frac{\epsilon AV^2}{2(x + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} \quad (4.26)$$

al dividir entre la masa de la viga voladiza en el modo que se desea analizar y aplicando la aproximación por diferencia central definida en (4.25) con  $f(x+h) = z_{i+1}$ ,  $f(x) = z_i$  y  $f(x-h) = z_{i-1}$  quedando:

$$\frac{z_{i+1} + z_{i-1} - 2z_i}{h^2} + \frac{b}{m} \frac{z_{i+1}}{z_{i-1}} + \frac{k}{m} z_i = \frac{\epsilon AV^2}{2m(z_i + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} \quad (4.27)$$

Se observa que mediante el método de aproximaciones finitas, se ha introducido la variable  $i$ , la cual consecuentemente será utilizada para las iteraciones para ir aproximando la función del punto  $a$  al punto  $b$ , como se observa en la figura (4.5).

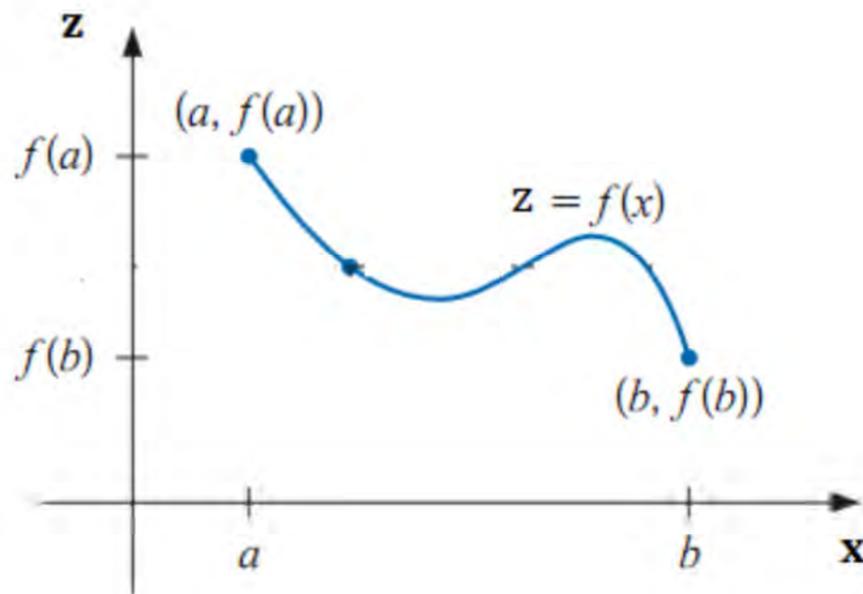


Figura 4.5: Gráfica que muestra una función dada de a hacia b.

Dado que, este método resulta de emplear condiciones límite y de aproximar la función con un cierto porcentaje de error, dependiendo del número de términos permitidos, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{m}h^2 - 2\right)x_1 - \frac{\epsilon AV^2 h^2}{2m(x_1 + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} + \left(1 + \frac{ch^2}{2mh}\right)x_2 + \left(1 - \frac{ch^2}{2mh}\right)x_0 &= 0 \\ \left(1 - \frac{ch}{2m}\right)x_1 + \left(\frac{k}{m}h^2 - 2\right)x_2 - \frac{\epsilon AV^2 h^2}{2m(x_2 + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} + \left(1 + \frac{ch^2}{2mh}\right)x_3 &= 0 \\ \left(1 - \frac{ch}{2m}\right)x_2 + \left(\frac{k}{m}h^2 - 2\right)x_3 - \frac{\epsilon AV^2 h^2}{2m(x_3 + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} + \left(1 + \frac{ch^2}{2mh}\right)x_4 &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \left(1 - \frac{ch}{2m}\right)x_{n-1} + \left(\frac{k}{m}h^2 - 2\right)x_n - \frac{\epsilon AV^2 h^2}{2m(x_n + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2} + \left(1 + \frac{ch^2}{2mh}\right)x_n &= 0 \end{aligned}$$

por cada  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Nosotros ocupamos el método de Newton para sistemas no lineales para aproximar la solución a este sistema. Una secuencia de iteraciones  $\{(z_1^k, z_2^k, \dots, z_N^k)^t\}$  es generada que converge a la solución del sistema de ecuaciones, considerando que la aproximación inicial  $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_N^0)^t$  es lo suficientemente cerrada. Dado a que tenemos términos no lineales, se forma la matriz Jacobiana triangular siguiente:

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & \dots \\ C & A & B & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C & A & B & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C & A & B \end{pmatrix}$$

Donde:

$$A = \left( \frac{k}{m} h^2 - 2 \right) - \frac{\epsilon A V^2 h^2}{2m \left( z_n + \frac{t_d}{\epsilon_0} \right)^2}$$

$$B = \left( 1 + \frac{c h^2}{2m h} \right)$$

$$C = \left( 1 - \frac{c h}{2m} \right)$$

El método de Newton para sistemas no lineales requiere que cada iteración del sistema lineal  $J(z_1, \dots, z_N)(v_1, \dots, v_N)^t$  sea calculado para  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , ya que:

$$z_i^k = z_i^{k-1} + v_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, N$$

para resolver el sistema lineal anterior, en el presente trabajo se utilizó el método de factorización LU.

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos el comportamiento del sistema, mostrado en la figura 4.6:

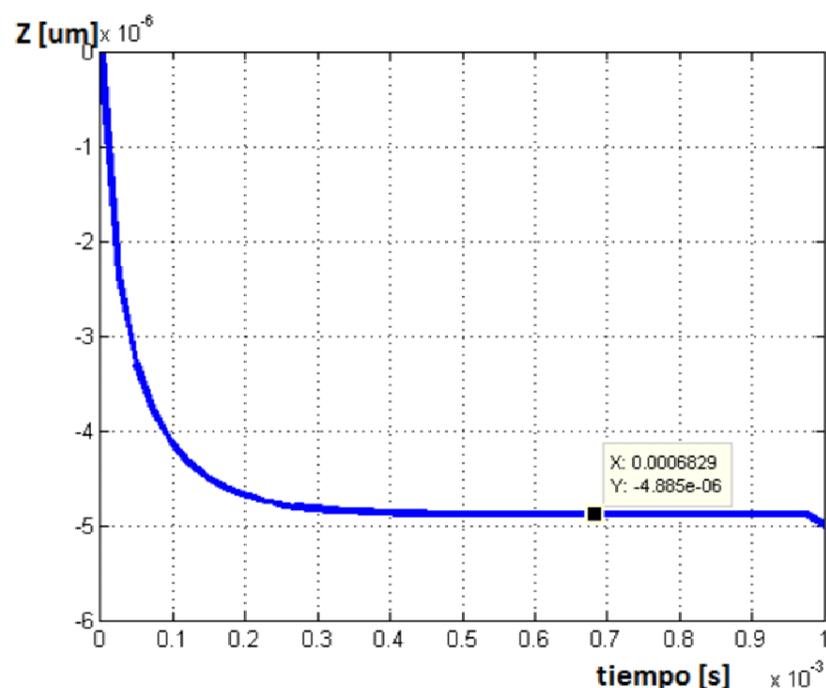


Figura 4.6: Respuesta en estado estable de un interruptor RF MEMS.

La figura 4.6 ilustra el desplazamiento de la viga voladiza con respecto al tiempo, es decir, el tiempo de conmutación o el tiempo que tarda la viga en colapsar hasta el electrodo.

## 4.4. Análisis transitorio

La respuesta transitoria se lleva a cabo cuando el interruptor se deja de polarizar, por lo que la fuerza de restitución crece hasta el punto donde es mayor que la fuerza con la que fue excitado el sistema y en consecuencia se libera la viga del electrodo fijo. Al ocurrir lo anterior, se pueden presentar cuatro casos diferentes, los cuales son:

- $\zeta = 1$  Críticamente amortiguado
- $\zeta < 1$  Subamortiguado
- $\zeta > 1$  Sobreamortiguado
- $\zeta = 0$  Críticamente estable

### 4.4.1. Sistema críticamente amortiguado

Para  $\zeta = 1$ , nosotros obtenemos una doble raíz,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$ . En la figura 4.7 se muestra la respuesta típica de esta condición, que tiene como solución general:

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \quad (4.28)$$

donde A y B son constantes definidas por las condiciones iniciales del sistema.

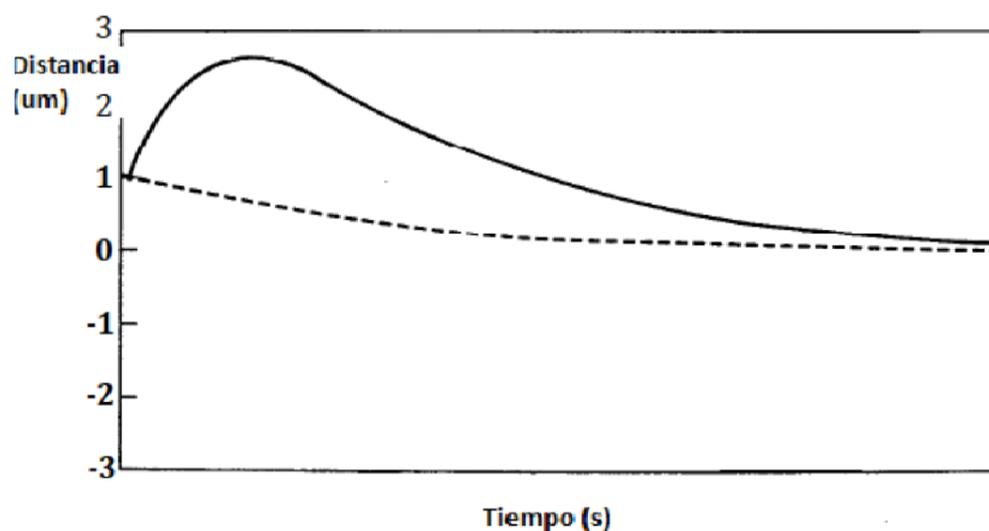


Figura 4.7: Movimiento críticamente amortiguado con  $\zeta = 1$ .

### 4.4.2. Sistema subamortiguado

Para la condición donde  $\zeta < 1$ , la solución general estará dada por el siguiente modelo:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + B \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)) \quad (4.29)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes definidas por las condiciones iniciales del sistema, además podemos definir la frecuencia de amortiguamiento como:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.30)$$

En la figura 4.8 se gráfica la respuesta de un sistema con diferentes valores de  $\zeta$  que varía en un intervalo entre 0 y 1.

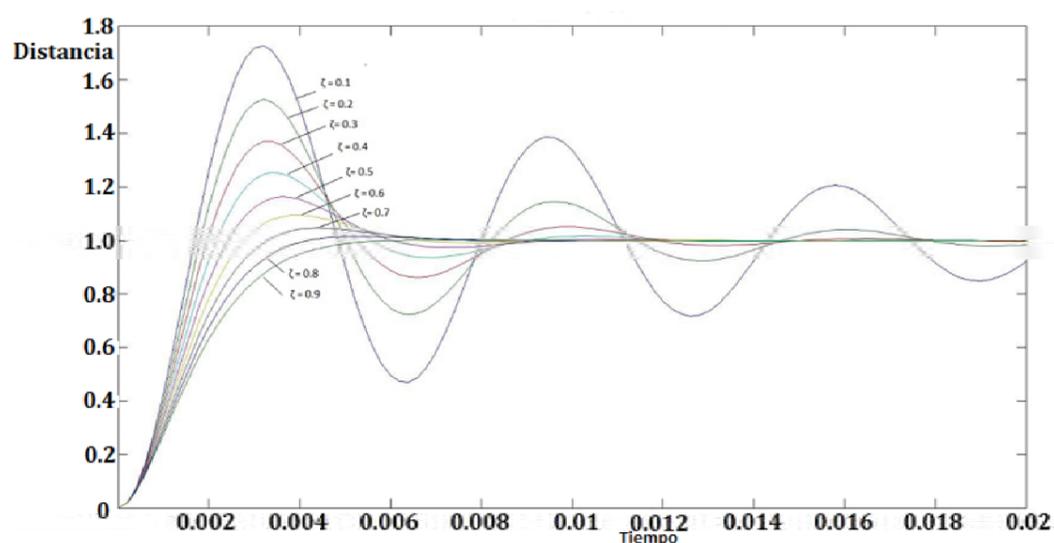


Figura 4.8: Movimiento subamortiguado con diferentes valores entre  $0 < \zeta < 1$ .

### 4.4.3. Sistema sobreamortiguado

Cuando  $\zeta > 1$ , las dos raíces permanecen en el campo de los números reales, pero debido a los signos, podemos observar que cuando una raíz incrementa, la otra disminuye. Por lo cual, la solución general está escrita como:

$$x = Ae^{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} + Be^{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} \quad (4.31)$$

El comportamiento de este tipo de sistema se muestra en la figura 4.9, donde se observa que es similar al comportamiento del movimiento críticamente amortiguado.

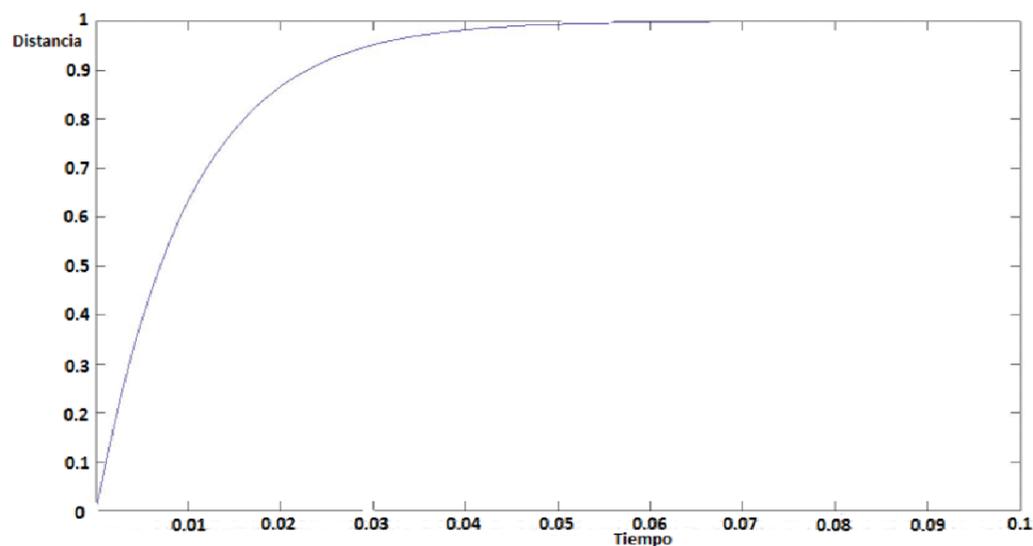


Figura 4.9: Movimiento sobreamortiguado con  $\zeta > 1$ .

#### 4.4.4. Sistema críticamente estable

Nótese este caso, donde  $\zeta = 0$ , es un caso ideal, ya que al no tener amortiguamiento, el sistema no tendría pérdidas y tendría un comportamiento como se muestra en la figura 4.10, como se mencionó en el capítulo anterior el modelo está descrito como:

$$x = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) \quad (4.32)$$

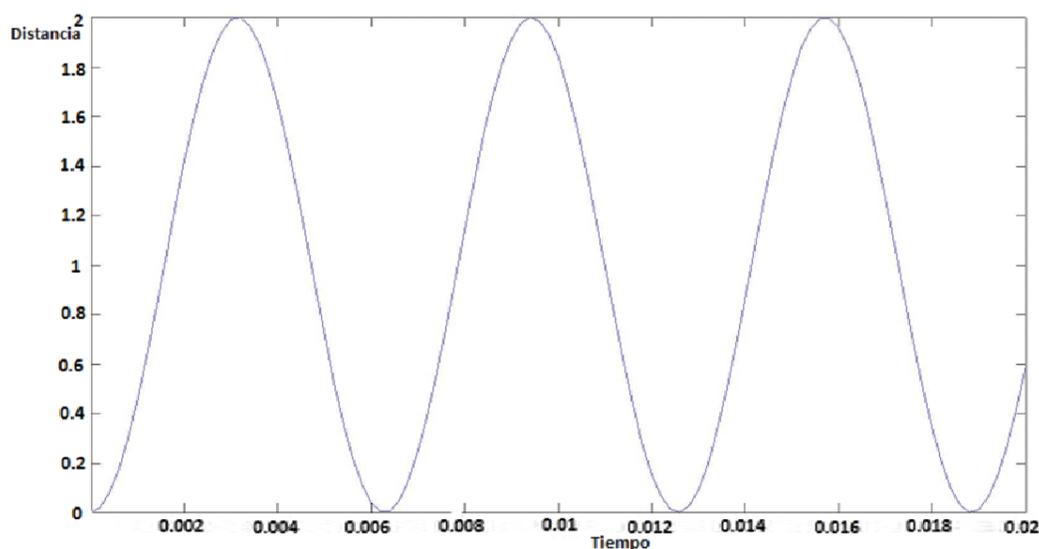


Figura 4.10: Movimiento críticamente estable con  $\zeta = 0$ .

### 4.5. Factor de calidad mecánico.

Hay varios mecanismos de disipación de energía en los dispositivos MEMS, los cuales se relacionan con el ambiente de la estructura móvil y el material de la estructura fija, así como de su fabricación. Por ende, se clasifican las causas del amortiguamiento en 2 grupos: externas e internas. Sin embargo, para el diseño de microestructuras, los mecanismos de disipación externos son los que en la mayoría de las aplicaciones se toman en cuenta, ya que incluyen las pérdidas debido al dieléctrico (aire) y pérdidas por el movimiento del anclaje dependiendo de la geometría de la viga voladiza. Cada fuente de disipación de energía puede ser descrita en términos del factor de calidad y este puede ser expresado en términos de los factores individuales como:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \dots = \sum_j \frac{1}{Q_j} \quad (4.33)$$

Nótese que el factor de calidad total estará limitado por el componente más pequeño, como se observa en la ecuación (4.33).

En la dinámica del interruptor, las anclas de la viga voladiza o soportes presentan momento flexionante o fuerza cortante, de acuerdo con [38], por consecuencia se deriva una expresión analítica para modelar estas pérdidas por anclaje, descritas como:

$$Q_s^{vol} = \alpha_{vol} \left(\frac{L}{t}\right)^3 \quad (4.34)$$

donde  $L$  y  $t$  son la longitud y el grosor de la viga respectivamente y  $\alpha_{vol}$  es el coeficiente de pérdidas por anclaje para la viga voladiza, la cual depende del modo de vibración y de la razón de Poisson. Este dato es dado mediante la tabla 4.1 [9]:

Tabla 4.1:  
Coeficientes de pérdidas por anclaje para viga voladiza

No. de modo	$\alpha_{vol}$
1	2.081
2	0.173
3	0.064
4	0.033
5	0.020

De igual manera, el medio en el que se establece el sistema forma parte del paradigma de diseño del mismo, por lo que las pérdidas son modeladas de acuerdo al factor de calidad. Diversas investigaciones, en años recientes han encontrado la dependencia del amortiguamiento con la presión de las moléculas en un medio determinado, predicho por el factor de calidad. Por lo que en [9], reconociendo que una microestructura real no puede ser aislada en el espacio, pero puede existir en proximidad a otras superficies y al sustrato, la expresión para calcular el factor de calidad es:

$$Q = \frac{b\sqrt{E\rho}}{\mu} \left(\frac{t}{L}\right)^2 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \quad (4.35)$$

donde  $d$  es la distancia que separa la viga voladiza del sustrato,  $b$  el ancho y  $E$  el módulo de Young.

Y de todo lo anterior, el factor de calidad mecánico total puede ser definido de diferentes maneras según [11] y de las cuales dependiendo de los puntos de diseño pueden ser utilizadas. Una definición es la razón de la frecuencia central  $f_c$  al ancho de banda, el cual está definido como  $\Delta f = f_2 - f_1$ , donde  $f_2$  y  $f_1$  representan la frecuencia de corte superior e inferior, respectivamente, a las cuales la energía del sistema es la mitad de la energía máxima en resonancia. Y es expresada como:

$$Q = \frac{f_c}{\Delta f} \quad (4.36)$$

No obstante, cuando la geometría de las anclas no presenta un amortiguamiento considerable, es posible realizar una aproximación del factor de calidad total utilizando el factor de amortiguamiento, por tanto la expresión queda reescrita como:

$$Q_{total} \cong \frac{1}{2\zeta} \quad (4.37)$$

En la gráfica de la figura (4.11), se ilustra el factor de calidad mecánico dentro de la respuesta en frecuencia.

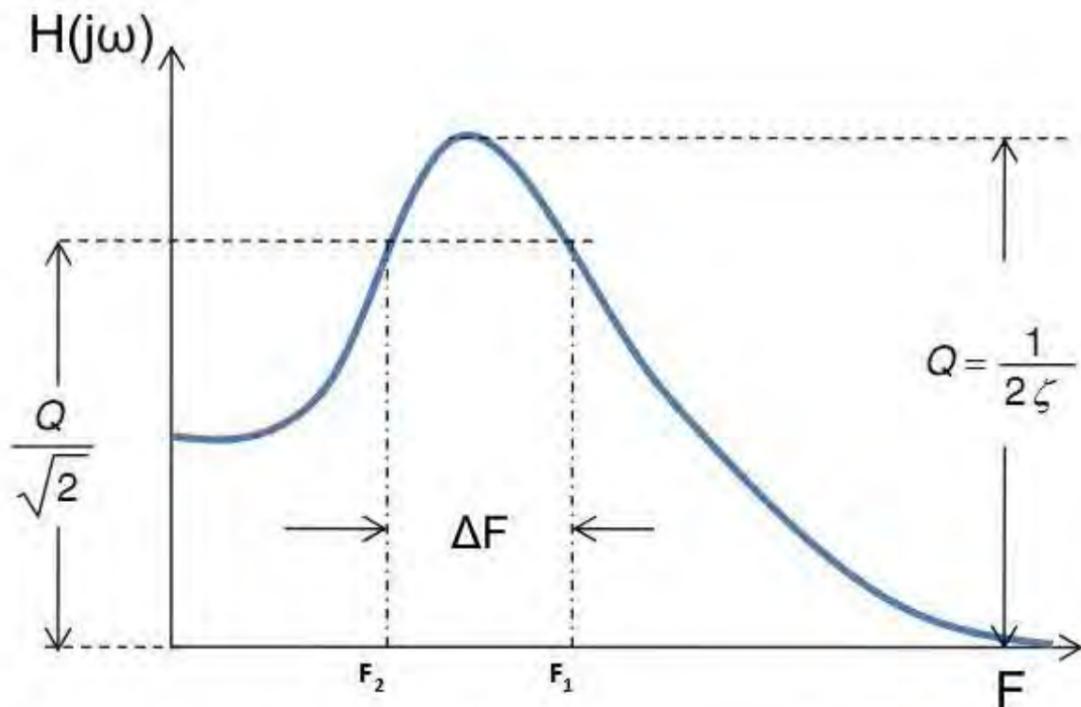


Figura 4.11: Respuesta en frecuencia de un modelo masa-resorte-amortiguador.

Teniendo las expresiones anteriores, la ecuación (4.1) puede ser expresada en el dominio de la frecuencia utilizando la transformada de Laplace, quedando dicha ecuación expresada como:

$$F(S) = mS^2 + cS + kS \quad (4.38)$$

Normalizando por la masa y despejando la función de transferencia, la ecuación (4.38) queda reescrita como:

$$H(S) = \frac{1}{S^2 + \frac{c}{m}S + \frac{k}{m}} \quad (4.39)$$

Sustituyendo la variable  $S = j\omega$  y reordenando términos, la ecuación queda reescrita como:

$$H(j\omega) = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{j\omega}{Q\omega_0}\right)} \right) \quad (4.40)$$

En la figura (4.12) se presenta la función de transferencia para distintos valores del factor de calidad mecánico [4].

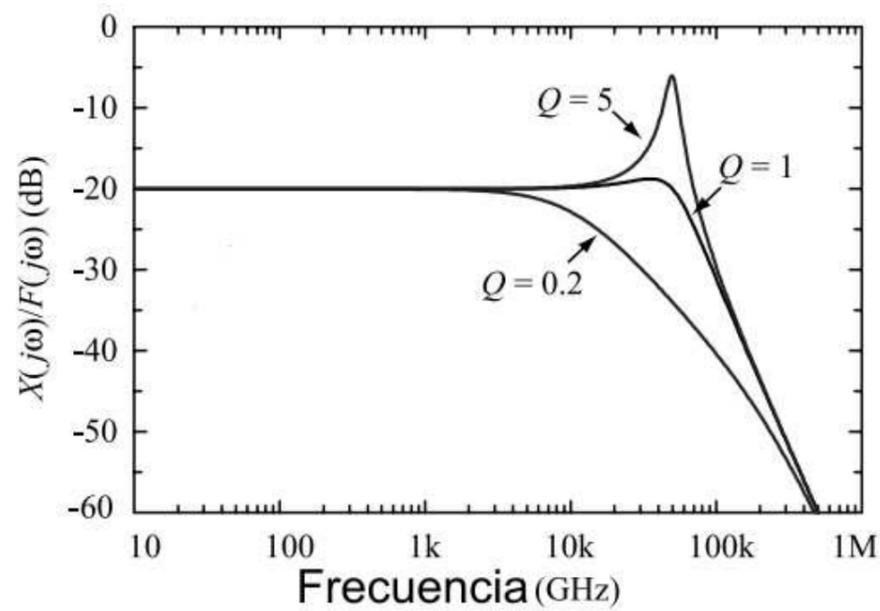


Figura 4.12: Función de transferencia para distintos valores de  $Q$  de un modelo masa-resorte-amortiguador.

Como se puede observar, dependiendo de como se quiera diseñar será el valor del factor de calidad, sin embargo se ha mostrado que para valores de  $Q \leq 0,5$  resulta en un tiempo de conmutación lento, mientras que un  $Q \geq 2$  resulta en un tiempo de asentamiento grande cuando el interruptor es liberado por lo que se recomienda un diseño entre  $0,5 \leq Q \leq 2$ .

## 4.6. Conclusiones del capítulo

- ⇒ La ecuación que describe el desplazamiento de la viga voladiza, es la obtenida mediante la Segunda Ley de Newton enunciada como sigue:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k(x) = \frac{\epsilon AV^2}{2(x + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2}$$

- ⇒ El coeficiente de amortiguamiento depende de la longitud de las placas paralelas, además del dieléctrico y la distancia media entre las mismas. Y se define como:

$$c = \frac{3 \mu B^3 L}{2 h^3}$$

- ⇒ Hay diferentes métodos de solución para ecuaciones no lineales, sin embargo el método de diferencias finitas es utilizado debido a las condiciones de inicio que tiene el interruptor (espacio entre las placas, tiempo cero y distancia recorrida).
- ⇒ Cuando el interruptor es liberado de la acción de la fuerza electrostática, se presenta una transición entre el estado de cerrado y abierto, por lo que se presentan tres casos dependiendo del coeficiente de amortiguamiento de la ecuación homogénea de segundo grado: Sistema críticamente estable, subamortiguado y sobreamortiguado.
- ⇒ El factor de calidad mecánico sirve para describir una fuente de disipación de energía, además en la práctica es utilizado para caracterizar el interruptor donde para un diseño apropiado el valor del mismo debe estar entre  $0,5 \leq Q \leq 2$ . Se define como:

$$Q_{total} \cong \frac{1}{2\zeta}$$

---

---

## CAPÍTULO 5

---

# ANÁLISIS ELECTRODINÁMICO DE INTERRUPTORES RF MEMS

*”La fuerza viva (energía) es un don con el que Dios ha dotado a la naturaleza y por tanto ésta no puede ser creada ni destruida.”*

---

JAMES PRESCOTT JOULE, FÍSICO INGLÉS 1818-1889

Hasta ahora se ha hecho un análisis únicamente electromecánico, ya que es relevante el análisis de la respuesta cuando el interruptor es polarizado por el voltaje de actuación, así como cuando este es liberado. Como se definió, los interruptores RF MEMS son dispositivos que permiten u obstruyen una onda electromagnética cuando esta pasa a través de una línea de transmisión, por lo que es necesario realizar un análisis del comportamiento electromagnético para conocer los parámetros que influyen de una manera significativa en el comportamiento electrodinámico del interruptor. Así que, en el presente capítulo primero se detalla el circuito eléctrico equivalente que modela al interruptor RF MEMS tipo viga voladiza, en serie, colocado dentro de una línea de transmisión y después se describen las diferentes pérdidas que sufre la onda electromagnética en los dos diferentes estados del interruptor cuando lo atraviesan. Por último, se describe el factor de calidad de conmutación que caracteriza al interruptor a través de la razón de impedancias entre estado abierto y estado cerrado del mismo.

### 5.1. Circuito equivalente

De acuerdo con [4], el circuito eléctrico equivalente de un interruptor RF MEMS tipo viga voladiza puede ser modelado con base a 4 efectos eléctricos que se presentan en la



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

estructura mecánica:

- ⇒ Efecto capacitivo.
- ⇒ Efecto ohmico o resistivo.
- ⇒ Efecto inductivo.
- ⇒ La línea de transmisión.

### 5.1.1. Efecto capacitivo

El interruptor tipo viga voladiza en configuración serie, puede ser diseñado de diferentes maneras, una de ellas es al tomar en cuenta las áreas de contacto entre la viga en voladizo con uno o más electrodos de actuación, por ejemplo, como se observa en la figura 5.1, donde a) es un interruptor que contiene dos áreas de contacto y b) contiene solo una área de contacto.

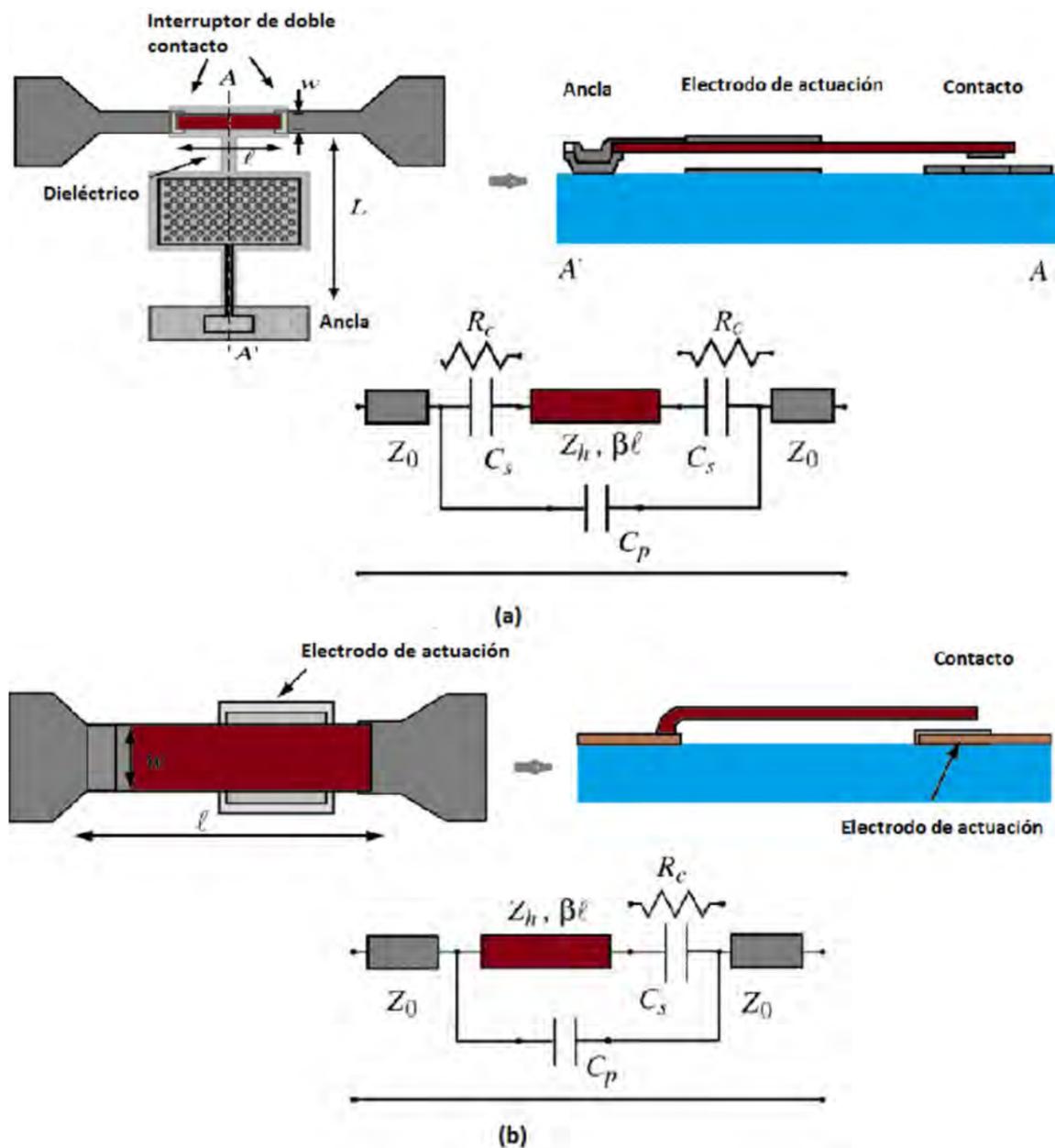


Figura 5.1: Modelo eléctrico equivalente de la viga voladiza: a) electrodo en medio de la viga, b) electrodo en el mismo punto de contacto.

Donde  $Z_h$  es la impedancia característica del interruptor. Nótese que dependiendo de las áreas de contacto, será el modelado del efecto capacitivo del interruptor, es decir, como se observa del lado derecho de la figura 5.1, al tener dos áreas de contacto, en estado abierto habrá dos efectos capacitivos, mientras que si únicamente se tiene una área de contacto, el valor será de un solo efecto capacitivo 5.1b.

Es importante remarcar que el efecto capacitivo se presenta cuando el interruptor se encuentra apagado o en estado abierto, ya que este surge por el hecho de que se encuentran como placas paralelas con aire como dieléctrico. Por tanto, para un interruptor con una área de contacto, la capacitancia en estado abierto estará dada por:

$$C_{abierto} = \frac{C_s}{2} + C_p \quad (5.1)$$

donde  $C_s$  es la capacitancia en serie entre la línea de transmisión con el interruptor, y  $C_p$  es la capacitancia parásita entre los extremos de la línea de transmisión.

Mientras que para un interruptor con dos áreas de contacto, la capacitancia en estado abierto estará dada por:

$$C_{abierto} = C_s + C_p \quad (5.2)$$

A su vez, la capacitancia serie ( $C_s$ ) está compuesta de una componente de placas paralelas ( $C_{pp} = \frac{\epsilon A}{g}$ ) y una componente de borde la cual está alrededor del 30-60% de la componente de placas paralelas ( $C_{pp}$ ). Y la capacitancia parásita está relacionada con los materiales utilizados en el sustrato y normalmente es menor que  $2fF$ .

### 5.1.2. Efecto resistivo

Por otro lado, en el momento que el interruptor es actuado y la viga entra en contacto con el electrodo de actuación, se manifiesta un efecto resistivo como se muestra en la figura 5.2, la cual es dependiente de la longitud y el ancho del área de contacto y su valor es calculado con base a las pérdidas de la línea.

Podemos mencionar que la componente  $R_{sl}$  de la resistencia en serie es debida a las pérdidas de la línea de transmisión y puede ser calculada como:

$$\alpha = \frac{R_{sl}}{2Z_0} \quad (5.3)$$

donde  $\alpha$  es las pérdidas de la línea.

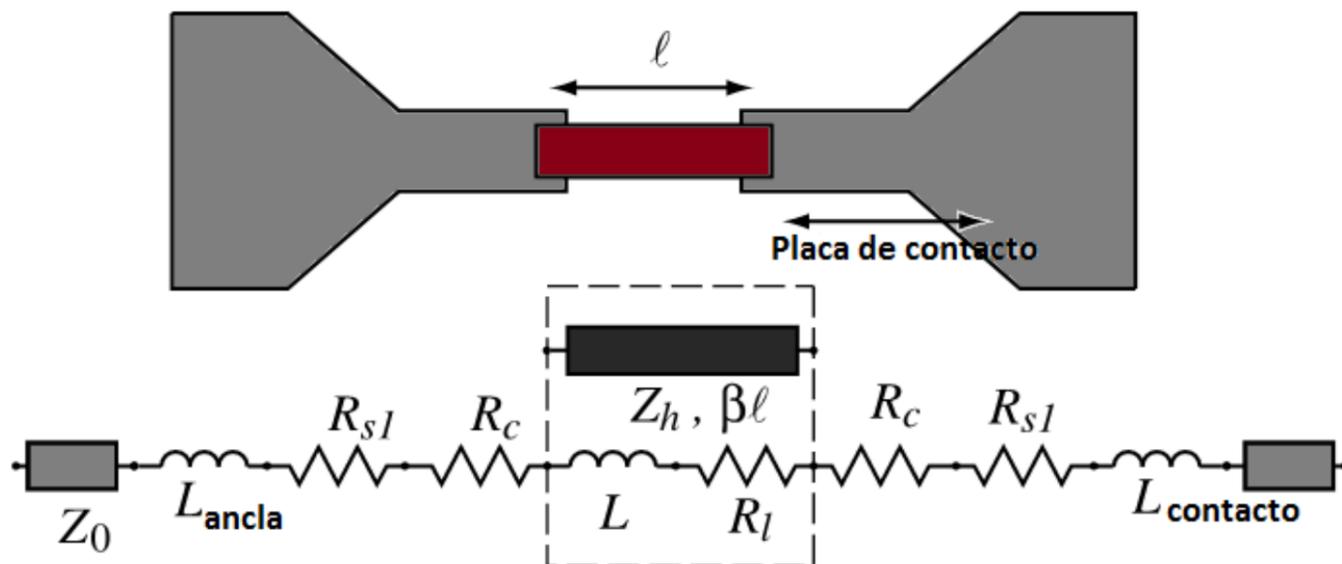


Figura 5.2: Circuito equivalente para el interruptor en configuración serie en estado cerrado.

Así que, la resistencia total del interruptor estará dada de acuerdo a lo mostrado en la figura 5.2 y es expresada como:

$$R_s = 2R_c + 2R_{sl} + R_l \quad (5.4)$$

donde  $R_{sl}$  es la resistencia equivalente por las pérdidas de la línea,  $R_c$  es la resistencia equivalente por cada uno de los contactos metal-metal que haya en el interruptor (para el caso de la figura 5.2 son dos) y  $R_l$  es la resistencia equivalente del interruptor.

### 5.1.3. Inductancia

Como se observa en la misma figura 5.2, el interruptor en estado cerrado, además de presentar pérdidas debido al contacto, presenta un efecto inductivo debido a la distribución de corriente que se genera al entrar en contacto la viga con la línea de transmisión (con longitud  $\ell$ ), por lo que la inductancia en el modelo eléctrico equivalente en estado cerrado estará dada por:

$$L = \frac{Z_h \beta \ell}{\omega} = \frac{Z_h \ell}{\nu_p} \quad \text{para } \ell < \frac{\lambda_g}{12} \quad (5.5)$$

donde  $\nu_p$  es la velocidad de fase de la línea de transmisión de alta impedancia ( $\nu_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{eff}}}$ )

### 5.1.4. Línea de transmisión

Las líneas de transmisión son redes de parámetros distribuidos donde los voltajes y corrientes pueden variar tanto en magnitud como en fase sobre su longitud; además de que

son los elementos por los cuales se transfiere la energía electromagnética de un punto a otro en el espacio. La línea de transmisión tiene al menos dos conductores como se muestra en la figura 5.3.

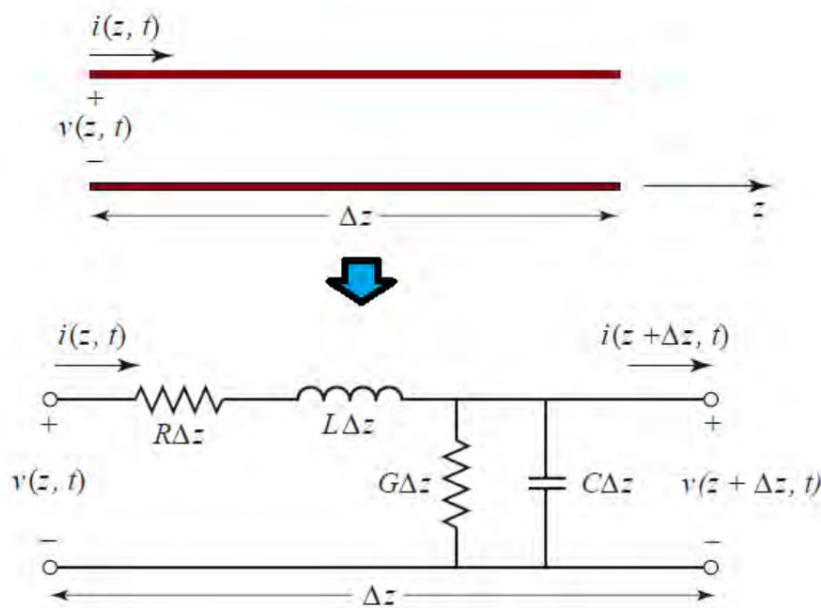


Figura 5.3: Representación de una línea de transmisión.

Existen varios tipos de líneas de transmisión, algunas de ellas son: el cable coaxial, la guía de onda, la línea cinta, la microcinta ranurada y la guía de onda coplanar, entre otras.

Debido a su proceso de fabricación, versatilidad en el tipo de montaje y a que no requiere perforaciones adicionales para su conexión a tierra, la guía de onda coplanar es la línea de transmisión más utilizada en los interruptores RF MEMS. Esta puede ser vista de manera típica como una línea ranurada con un tercer conductor centrado en la región de en medio (ranurada) con un ancho  $W$  y un plano de tierra (se puede considerar infinito para la misma línea ranurada) como se observa en la figura 5.4.

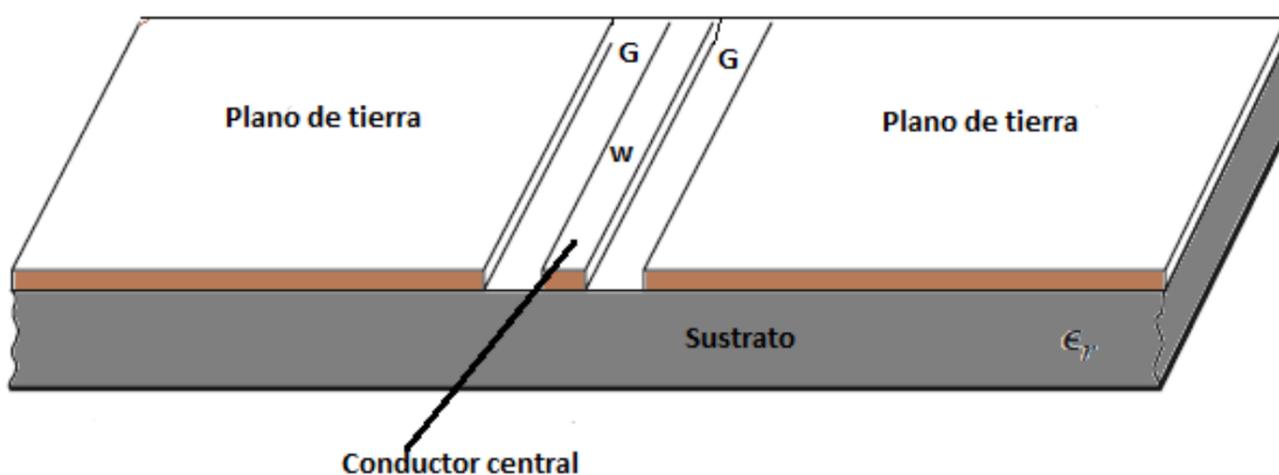


Figura 5.4: Guía de onda coplanar (CPW).

En [39], la impedancia característica de la CPW  $Z_0$  está expresada como:

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{K(k_0'')}{K(k_0)} \quad (5.6)$$

donde:

$$k_0 = \frac{W}{W + 2G}$$

$$k_0'' = \sqrt{1 - k_0^2}$$

Las principales características que presentan los interruptores RF MEMS que utilizan este tipo de línea de transmisión son buenas características de transmisión y de reflexión de ondas, linealidad y bajo consumo de potencia [40].

### 5.1.5. Circuito eléctrico final

Con base en los elementos descritos en los párrafos anteriores tendremos dos circuitos eléctricos equivalentes para modelar el funcionamiento del interruptor RF MEMS, ya que debemos considerar cuando se encuentra en estado abierto y cuando se encuentra en estado cerrado. Por tanto, el circuito eléctrico equivalente del interruptor en estado abierto tendrá una estructura similar a la figura 5.5.

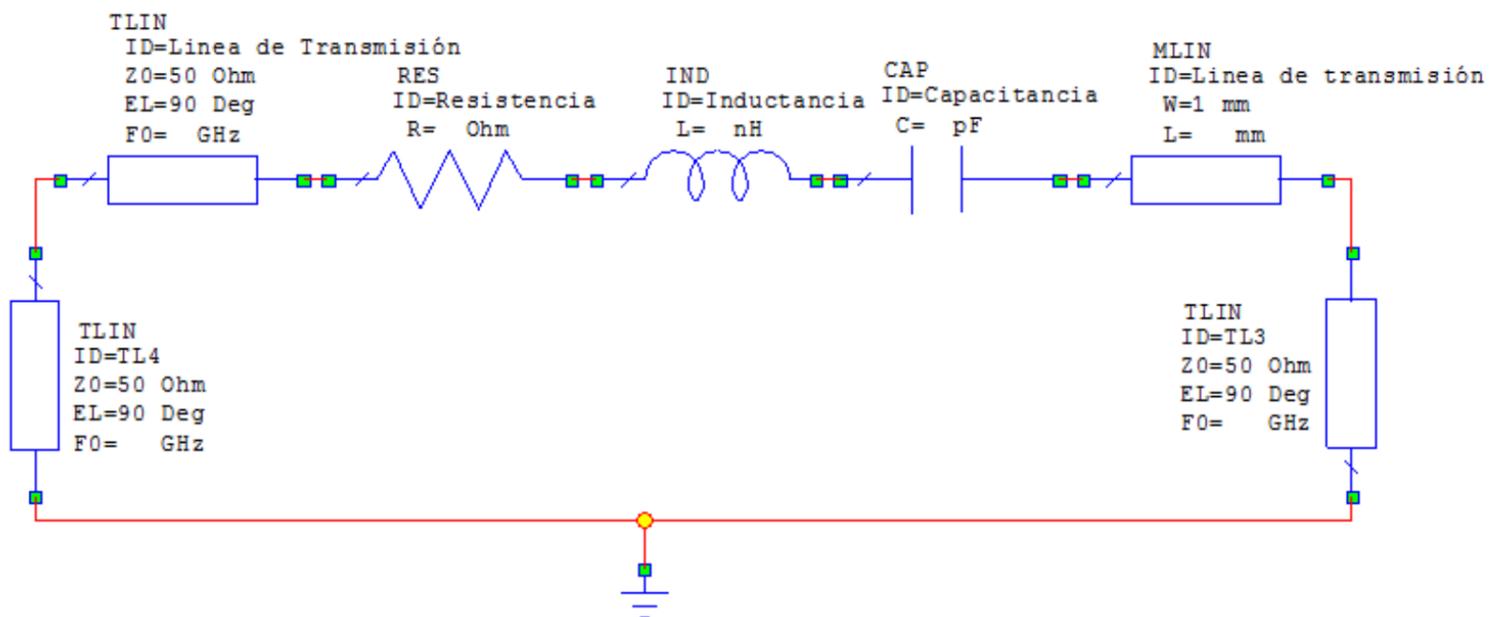


Figura 5.5: Circuito eléctrico del interruptor en estado abierto.

Mientras que el circuito eléctrico equivalente del mismo interruptor en estado cerrado será similar al mostrado en la figura 5.6.

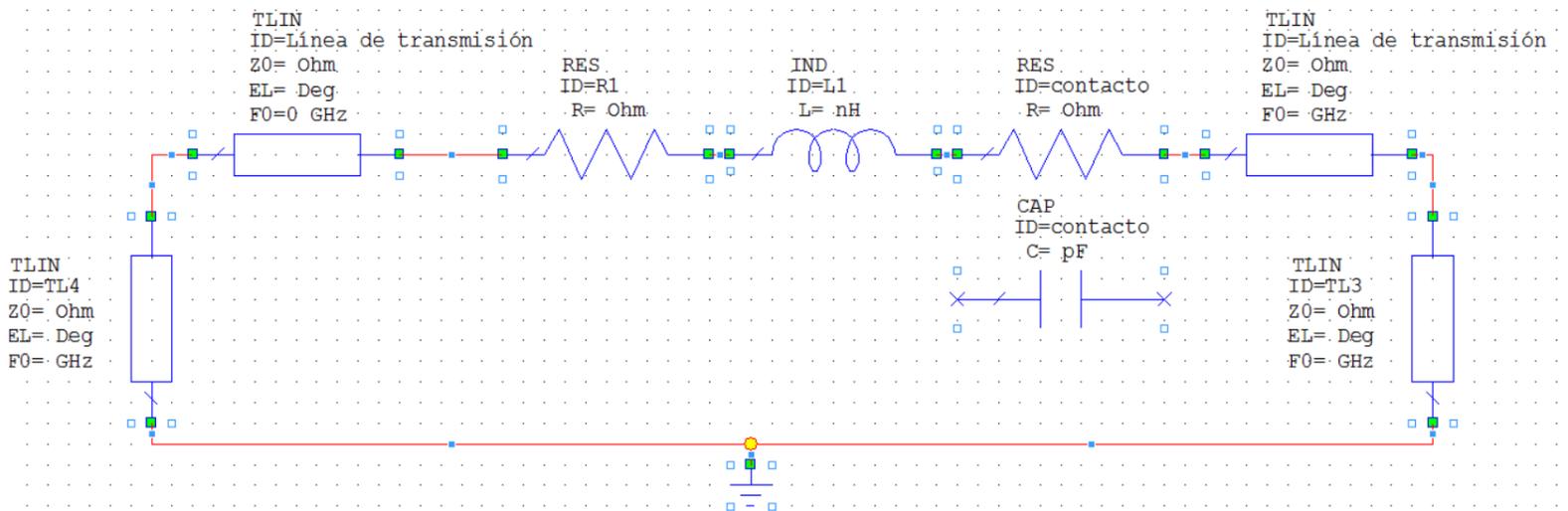


Figura 5.6: Circuito eléctrico del interruptor en estado cerrado.

Donde se observa que las impedancias representan a la línea de transmisión utilizada, la resistencia representa las pérdidas por el contacto mencionadas anteriormente y teniendo en consideración que en el primer caso se encuentra la capacitancia entre placas y un cierto efecto inductivo, mientras que en el segundo modelo, en caso que sea contacto capacitivo la capacitancia cambiará a un cierto valor o tenderá a cero si el contacto es metal-metal, además de la línea de transmisión y el valor de la inductancia cambia por lo señalado.

## 5.2. Parámetros S del interruptor

En circuitos para microondas, los puertos de entrada y de salida se relacionan con líneas de transmisión. Para ilustrar este hecho tenemos que definir un plano de referencia, que es simplemente una cierta sección transversal de la línea de transmisión que entra en el dispositivo como se observa en la figura 5.7.

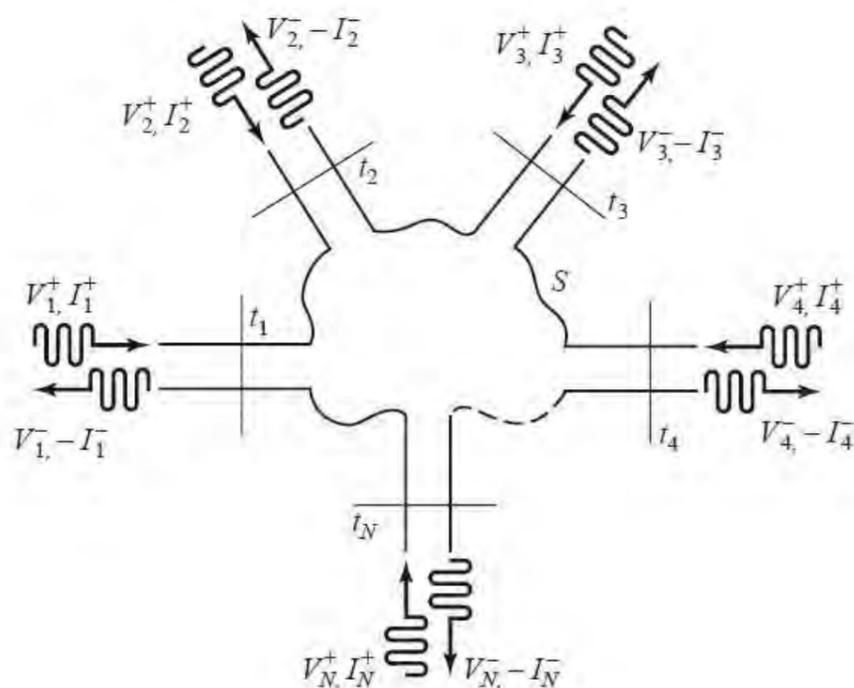


Figura 5.7: Una red arbitraria en microondas.

Utilizando ley de Ohm tendríamos un sistema de ecuaciones de la forma :

$$[V] = [Z][I] \quad (5.7)$$

Sin embargo por el hecho de que en microondas no se pueden medir corrientes y voltajes, además de que no se pueden analizar dichos circuitos con leyes de Kirchoff, la matriz  $Z$  no se utiliza. No obstante, ya que el voltaje de onda incidente ( $V^+$ ) y el voltaje de onda reflejada ( $V^-$ ) son más fáciles de medir se tiene que:

$$[V^-] = [S][V^+] \quad (5.8)$$

donde la matriz  $S$  es conocida como matriz de dispersión ( $S$  debido a su nombre en inglés *Scattering*). Así que, de (5.8), tenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} V_1^- &= S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ + \dots + S_{1N}V_N^+ \\ V_2^- &= S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ + \dots + S_{2N}V_N^+ \\ &\vdots \\ V_N^- &= S_{N1}V_1^+ + S_{N2}V_2^+ + \dots + S_{NN}V_N^+ \end{aligned}$$

De aquí podemos definir a  $S_{11}$  como sigue:

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} \Big|_{V_2^+=V_3^+=\dots=V_N^+=0} \quad (5.9)$$

Este primer elemento de la matriz  $S$  es el *coeficiente de reflexión* en la entrada 1 cuando otras líneas conectadas están terminadas en carga acoplada (es decir en su impedancia característica). Y en dado caso que hubiese varias entradas, de manera general el coeficiente de reflexión estará dado por:

$$S_{ii} = \frac{V_i^-}{V_i^+} \Big|_{V_k^+=0, k \neq i} \quad (5.10)$$

A su vez, definimos a  $S_{21}$  de la manera siguiente:

$$S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} \Big|_{V_2^+=V_3^+=V_N^+=0} \quad (5.11)$$

Y este elemento de la matriz  $S$  es conocido como *coeficiente de transmisión* del puerto 1 al puerto 2 cuando otras líneas se encuentran conectadas excepto la entrada 1 y están terminadas en líneas acopladas.

Y de la misma manera, en dado caso que haya más entradas en el sistema, el coeficiente de transmisión estará dado por:

$$S_{ij} = \frac{V_i^-}{V_j^+} \Big|_{V_k^+ = 0, k \neq j} \quad (5.12)$$

Dado que, a la línea de transmisión se le conoce como un elemento recíproco, es decir, que sus propiedades no dependen del sentido de la corriente, los elementos de la matriz  $S$  tendrán la siguiente propiedad:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (5.13)$$

### 5.2.1. Pérdidas por retorno

De la teoría de líneas de transmisión [41], la potencia que entrega un generador determinado a una línea de transmisión terminada en una impedancia de carga  $Z_L$  puede ser expresada (figura 5.8) como:

$$P_{\text{generador}} = P_{\text{inc}} + P_{\text{ref}} \quad (5.14)$$

donde  $P_{\text{inc}}$  es la potencia de la onda incidente y  $P_{\text{ref}}$  es la potencia de la onda reflejada del sistema. Nótese que  $P_{\text{ref}}$  representa las pérdidas que tendrá dicho sistema, por lo que siempre se buscará minimizar este valor.

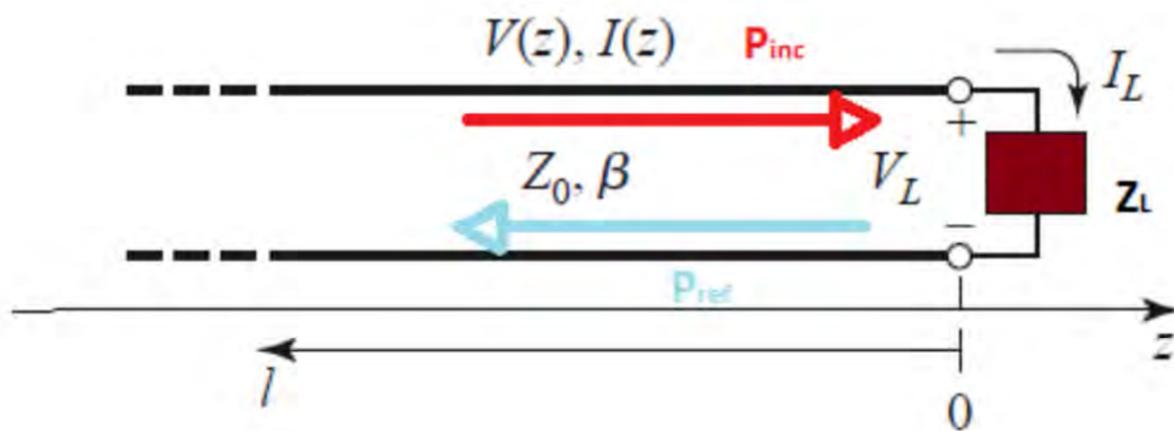


Figura 5.8: Línea de transmisión terminada en una carga con impedancia  $Z_L$ .

Al colocar el interruptor dentro de una línea de transmisión, tenemos el circuito de la figura 5.9, donde la impedancia  $Z_{1,2}$  es la impedancia del interruptor, en el cual el subíndice 1 indica la impedancia del interruptor en estado cerrado y el subíndice 2 la impedancia en estado abierto. El generador, denotado por  $V$ , posee una impedancia igual a la impedancia característica de la línea de transmisión  $Z_0$  (donde es colocado el interruptor), además se indican los voltajes incidentes (+) y los reflejados (-) en ambos puertos del circuito.

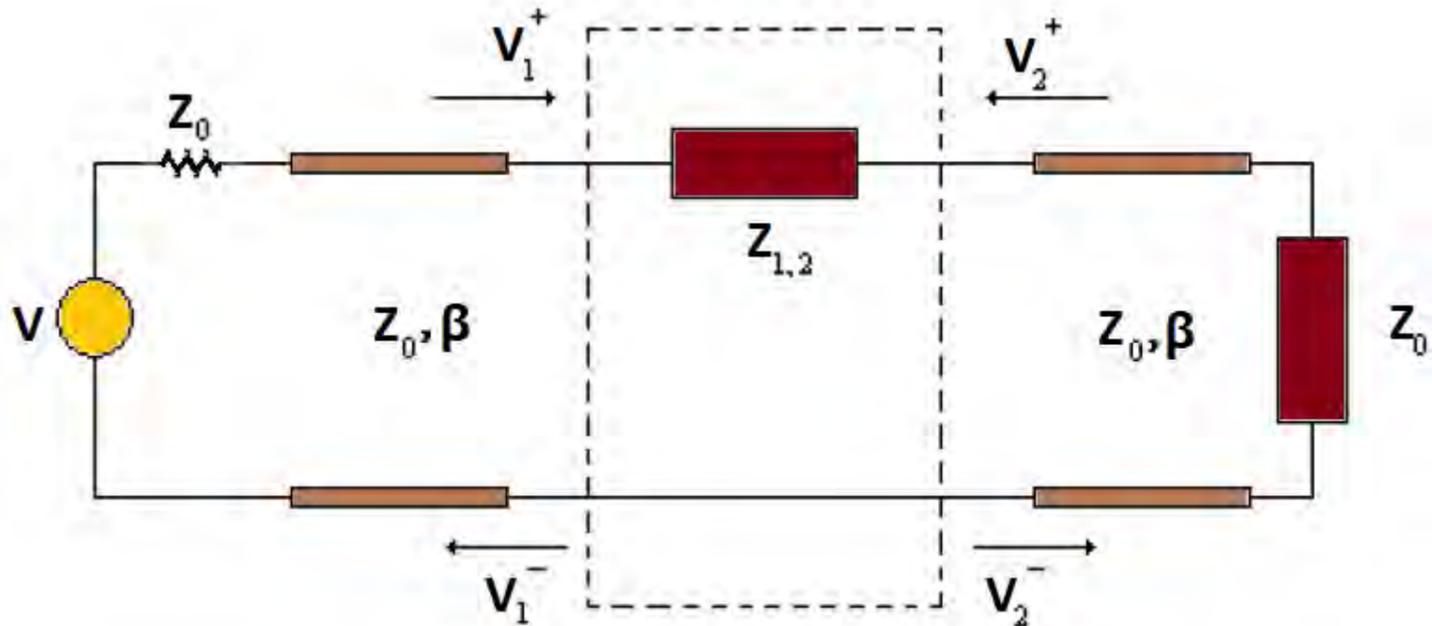


Figura 5.9: Línea de transmisión terminada en una carga con impedancia  $Z_L$ .

Así que, a la razón entre el voltaje de onda reflejada y el voltaje de onda incidente se le conoce como coeficiente de reflexión ( $\Gamma$ ) y éste está dado por el parámetro  $S_{11}$  del circuito de la figura 5.10. Por lo que tenemos:

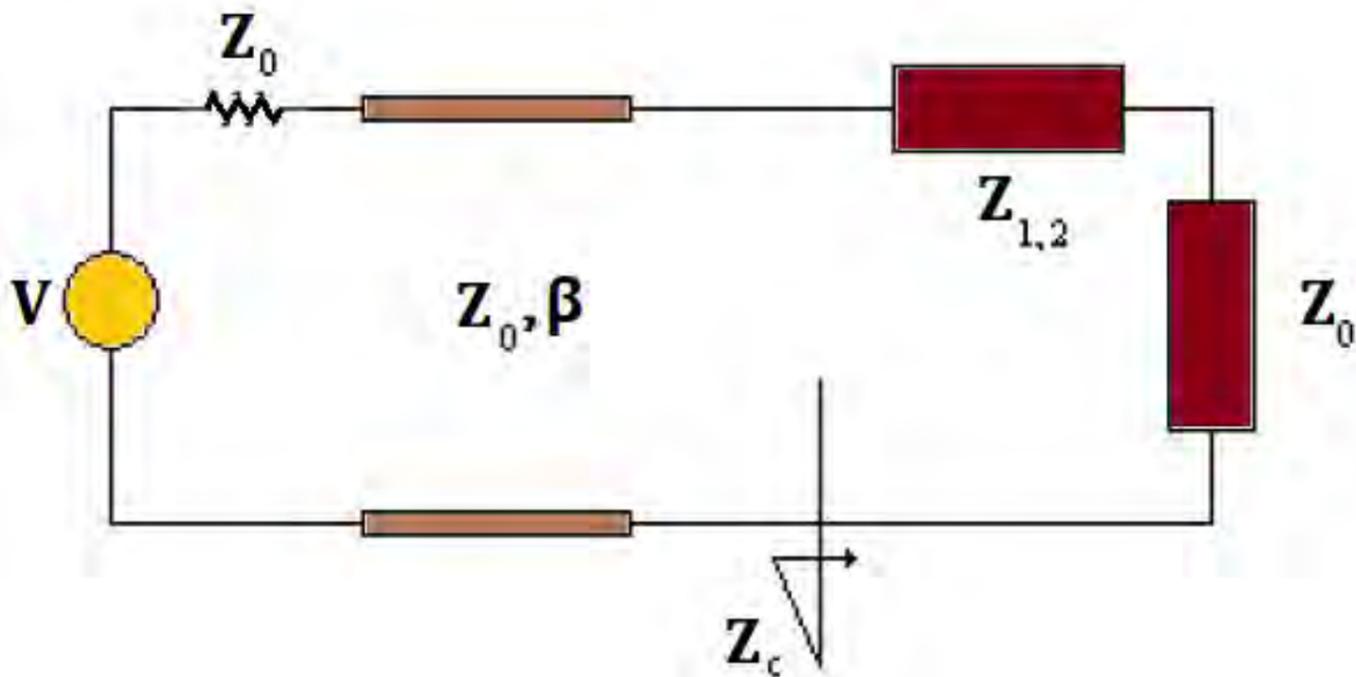


Figura 5.10: Circuito equivalente para calcular  $S_{11}$ .

$$\Gamma = \frac{V_1^-}{V_1^+} \Big|_{V_2^+=0} = S_{11} \quad (5.15)$$

Recordando que el coeficiente de reflexión está definido como:

$$\Gamma = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} \quad (5.16)$$

Por lo tanto de la figura 5.9, la impedancia de carga de la línea  $Z_c$  es expresada como:

$$Z_c = Z_{1,2} + Z_0 \quad (5.17)$$

sustituyendo (5.17) en la ecuación (5.16), tenemos:

$$S_{11} = \Gamma_1 = \frac{Z_{1,2} + Z_0 - Z_0}{Z_{1,2} + Z_0 + Z_0} = \frac{Z_{1,2}}{Z_{1,2} + 2Z_0} \quad (5.18)$$

De la ecuación anterior se desprende que cuando la carga es conectada, no toda la energía de la señal será entregada a la carga. Estas son las llamadas pérdidas por retorno ( $RL$  por sus siglas en inglés) y su valor en dB estará dado como:

$$RL = -20 \log |\Gamma| dB \quad (5.19)$$

Nótese que para cuando  $\Gamma = 0$ , las pérdidas por retorno son nulas, es decir, toda la potencia es entregada y no hay potencia reflejada, mientras que cuando el coeficiente de reflexión  $\Gamma = 1$ , las pérdidas por retorno son muy grandes, es decir, toda la potencia es reflejada.

### 5.2.2. Pérdidas de inserción y aislamiento

Las pérdidas de inserción ( $IL$  por sus siglas en inglés) son las pérdidas que una señal sufre cuando esta pasa a través del interruptor en estado cerrado. Se pueden calcular mediante la relación de la potencia que posee la señal en un punto dado de la línea de transmisión a la salida del dispositivo conmutado y la potencia que poseía la señal en ese mismo punto antes de conmutar el dispositivo. También es posible calcularlos por medio del elemento  $S_{21}$  de la matriz  $S$  conocido como *coeficiente de transmisión*. Para facilitar el cálculo se empleará el circuito de la figura 5.11, que se obtiene de simplificar el circuito de la figura 5.9.

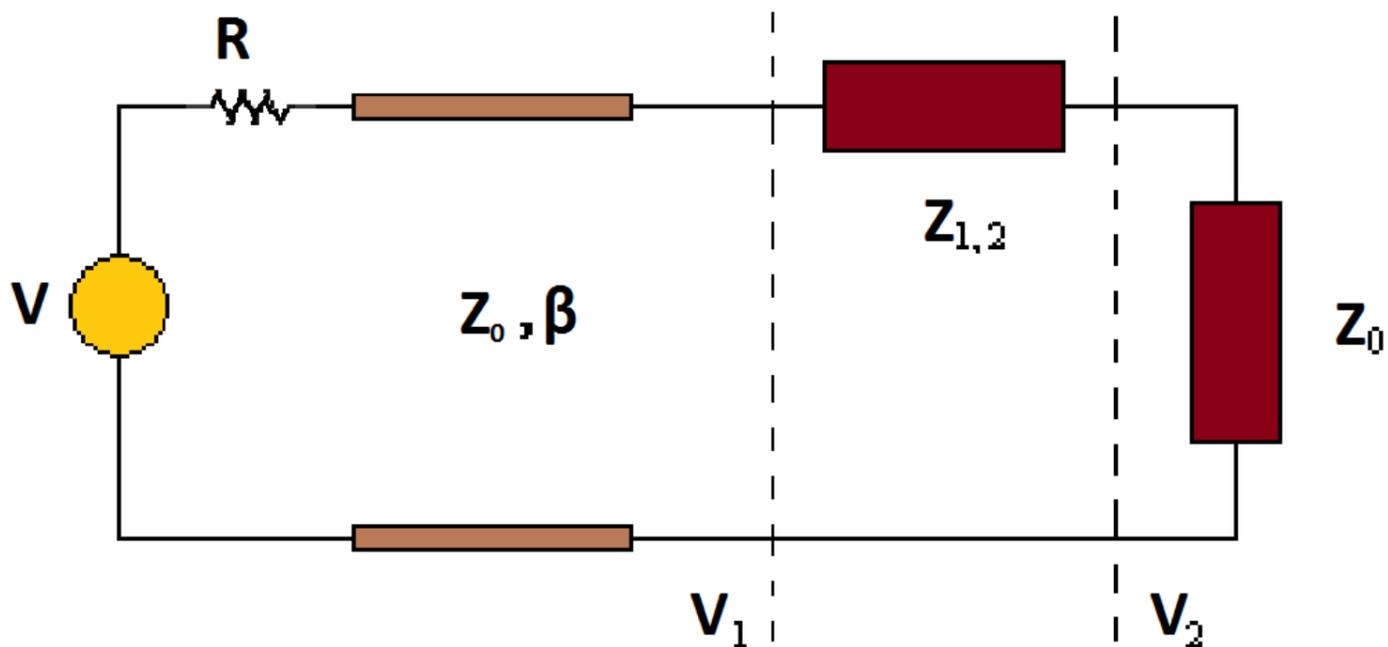


Figura 5.11: Circuito equivalente.

Reescribiendo la ecuación (5.11) dado el bipuerto de la figura 5.9, tenemos:

$$S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} \Big|_{V_2^+ = 0} \quad (5.20)$$

Los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  indicados son la suma de los voltajes incidentes y reflejados en cada uno de los puertos. Por lo que:

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- \quad (5.21)$$

$$V_2 = V_2^+ + V_2^- \quad (5.22)$$

Recordando el resultado de (5.18) y a la definición de  $S_{21}$  en la ecuación (5.20), los voltajes anteriores son reescritos como:

$$V_1 = 2V_1^+ \left( \frac{Z_{1,2} + Z_0}{Z_{1,2} + 2Z_0} \right) \quad (5.23)$$

$$V_2 = V_2^- \quad (5.24)$$

Observando el circuito de la figura 5.11, podemos expresar a  $V_1$  como función de  $V_2$  con base en un divisor de tensión, por lo que  $V_2$  quedará escrito como:

$$V_2 = \left( \frac{Z_0}{Z_{1,2} + Z_0} \right) V_1 \quad (5.25)$$

Por lo que la relación  $\frac{V_2}{V_1}$  queda definida como:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0}{Z_{1,2} + Z_0} \quad (5.26)$$

Relacionando (5.23) y (5.24) con (5.26) se obtiene:

$$\frac{V_2^-}{V_1^+} = 2 \left( \frac{Z_0}{Z_{1,2} + Z_0} \right) \left( \frac{Z_{1,2} + Z_0}{Z_{1,2} + 2Z_0} \right) \quad (5.27)$$

Por lo que:

$$S_{21} = \frac{2Z_0}{Z_{1,2} + 2Z_0} \quad (5.28)$$

Este parámetro  $S$  nos da la información deseada. Cuando el interruptor se encuentra en estado cerrado, el valor a considerar es con el subíndice 1, por lo que estaremos hablando de las *pérdidas de inserción*. Por otro lado, cuando el interruptor se encuentra en estado abierto, el valor a considerar es con el subíndice 2, aquí se estará hablando de *aislamiento*.

El aislamiento puede entenderse como la relación que existe entre la potencia de la señal medida a la entrada del interruptor y la potencia de la señal a la salida del mismo, cuando

este se encuentra en estado abierto [42] .

Nótese que cualquiera que fuere el caso, normalmente se expresan en términos de decibelios, por lo que:

$$P_{\text{inserción, aislamiento}} = -20 \log |S_{21}| \text{dB} \quad (5.29)$$

### 5.3. Factor de calidad de conmutación

Para efectos de diseño o de optimización es necesario describir el llamado *Factor de calidad de conmutación* (CQF por sus siglas en inglés), el cual es una figura de mérito que permite caracterizar dispositivos conmutables, ya que refleja la diferencia entre las impedancias de entrada de los dos estados del interruptor.

Dado que podemos expresar a un interruptor como la carga de un bipuerto recíproco idealmente sin pérdidas [43], podemos modelar el sistema con la línea de transmisión como un bipuerto, el cual estará cambiando el valor de la carga entre dos estados, por lo que tendrá dos impedancias de entrada como se observa en la figura 5.12. Recordando que el subíndice 1 indica el estado cerrado y el subíndice 2 el estado abierto, de la misma manera los superíndices respectivamente.

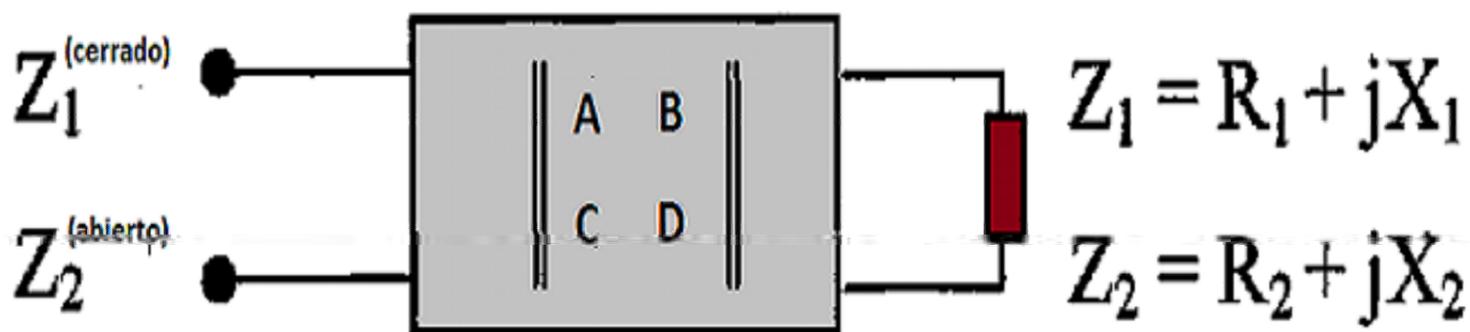


Figura 5.12: Bipuerto recíproco sin pérdidas usado para transformar el par de impedancias de carga  $Z_1$  y  $Z_2$  en el par de impedancias  $Z_{in}^{\text{cerrado}}$  y  $Z_{in}^{\text{abierto}}$ .

Usando las impedancias  $Z_{1,2}$  como cargas del bipuerto obtenemos las impedancias de entrada como:

$$Z_{in}^{(1)} = R_{in}^1 + jX_{in}^1 \quad (5.30)$$

$$Z_{in}^{(2)} = R_{in}^2 + jX_{in}^2 \quad (5.31)$$

Considerando tres condiciones deseables para circuitos tipo reflectivos y circuitos tipo transmitivos, las cuales son:

$$X_{in}^1 = X_{in}^2 = 0$$

$$R_{in}^1 \ll Z_0$$

$$R_{in}^2 \gg Z_0$$

tenemos que las impedancias de entrada son puramente resistivas. Así que se define al factor de calidad de conmutación (CQF por sus siglas en inglés) como a la relación entre éstas.

$$K = \frac{R_{in}^2}{R_{in}^1} \quad (5.32)$$

Además se observa en la figura 5.12 que para realizar la transformación de impedancias se define trabajar con la matriz de parámetros ABCD enunciada como sigue:

$$A_T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & jb \\ jc & d \end{pmatrix}$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números reales que cumplen la siguiente condición de reciprocidad

$$ad + cb = 1 \quad (5.33)$$

El par de impedancias del dispositivo conmutable  $Z_{1,2} = R_{1,2} + jX_{1,2}$  son transformadas en las impedancias de entrada del bipuerto quedando:

$$Z_{in}^{1,2} = \frac{a(R_{1,2} + iX_{1,2} + ib)}{ic(R_{1,2} + iX_{1,2}) + d} \quad (5.34)$$

por lo que la parte real e imaginaria de las impedancias son:

$$R_{in}^{1,2} = \frac{R_{1,2}}{d^2} * \frac{1}{1 - 2\frac{c}{d}X_{1,2} + (\frac{c}{d})^2(R_{1,2}^2 + X_{1,2}^2)} \quad (5.35)$$

Y

$$X_{in}^{1,2} = \frac{1}{d^2} \frac{bd + (ad - bc)X_{1,2} - ca(R_{1,2}^2 + X_{1,2}^2)}{1 - 2\frac{c}{d}X_{1,2} + (\frac{c}{d})^2(R_{1,2}^2 + X_{1,2}^2)} \quad (5.36)$$

Pero dado a que la ecuación (5.36) es igual a cero, entonces tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$bd + (ad - bc)X_1 - ca(R_1^2 + X_1^2) = 0$$

$$bd + (ad - bc)X_2 - ca(R_2^2 + X_2^2) = 0$$

Despejando tenemos:

$$(R_{1,2}^2 + X_{1,2}^2) = \frac{bd + (ad - bc)X_{1,2}}{ac} \quad (5.37)$$

Sustituyendo (5.37) en (5.35) se obtiene

$$R_{in}^{1,2} = \frac{R_{1,2}}{d} * \frac{a}{1 - \frac{c}{d}X_{1,2}} \quad (5.38)$$

Introduciendo nuevas variables para facilitar cálculos:

$$n^2 = \frac{a}{d}$$

$$y = \frac{c}{d}$$

$$z = \frac{b}{d}$$

la ecuación (5.38) queda reescrita como:

$$R_{in}^{1,2} = R_{1,2} * \frac{n^2}{1 - yX_{1,2}} \quad (5.39)$$

Usando la definición de (5.32) y (5.39) nosotros obtenemos:

$$K = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 - yX_1}{1 - yX_2} \quad (5.40)$$

Reordenando (5.40)

$$K = \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} \frac{X_2 - X_1}{1 - yX_2} y \quad (5.41)$$

Análogamente uno puede encontrar que:

$$\frac{1}{K} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} \frac{X_1 - X_2}{1 - yX_1} y \quad (5.42)$$

La suma de (5.42) con (5.41) y acomodando términos:

$$K + \frac{1}{K} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1^2(1 - yX_2) - R_2^2(1 - yX_1)}{(1 - yX_1)(1 - yX_2)} \frac{X_1 - X_2}{R_1 R_2} \quad (5.43)$$

Por otro lado, al combinar las nuevas variables para calcular z tenemos:

$$z = \frac{n^2(yR_1^2 + yX_1^2 - X_1)}{1 - yX_1} = \frac{n^2(yR_2^2 + yX_2^2 - X_2)}{1 - yX_2} \quad (5.44)$$

Reordenando (5.44) tenemos:

$$X_1 - X_2 = \frac{R_1^2(1 - yX_2) - R_2^2(1 - yX_1)}{(1 - yX_2)(1 - yX_1)}y \quad (5.45)$$

Sustituyendo (5.45) en (5.43) se concluye que:

$$K + \frac{1}{K} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{(X_1 - X_2)^2}{R_1R_2} \quad (5.46)$$

Dado que el factor de calidad de conmutación es un valor grande, podemos despreciar el término  $\frac{1}{K}$ , por lo tanto:

$$K = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{(X_1 - X_2)^2}{R_2R_1} \quad (5.47)$$

Esta ecuación nos define de forma general el factor de calidad de conmutación.

Cualquier dispositivo conmutable idealmente tiene un factor de calidad de conmutación infinito debido a que la impedancia en estado abierto es infinita y la impedancia en estado cerrado es cero, sin embargo en aplicaciones reales se reporta un  $k > 1000$ , dado esta condición pueden presentarse dos casos distintos:

\* Para el caso en donde la parte imaginaria del dispositivo conmutable es cambiada ( $R_2 \cong R_1, X_2 > X_1$ ):

$$K = \frac{(X_1 - X_2)^2}{R_2R_1} \quad (5.48)$$

\* Para el caso cuando la parte real del dispositivo conmutable es cambiado ( $R_2 > R_1, X_2 = X_1$ ):

$$K = \frac{R_2}{R_1} \quad (5.49)$$

Nótese que para el primer caso la parte imaginaria ( $X_1$  y  $X_2$ ) están definidos como:

$$X_1 = \frac{1}{\omega C_1}$$

$$X_2 = \frac{1}{\omega C_2}$$

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones anteriores en (5.48), la ecuación queda reescrita como:

$$K = \frac{(1 - n)^2}{(\omega C_1)^2 R_1 R_2} \quad (5.50)$$

Donde  $n$  es la relación de capacitancias.

$$n = \frac{C_1}{C_2} \quad (5.51)$$

## 5.4. Conclusiones del capítulo

- ⇒ El circuito eléctrico equivalente se modela en dos partes:
  - ◆ Estado abierto: el cual contiene la impedancia de la línea de transmisión, la resistencia equivalente, la inductancia del interruptor y la capacitancia formado por la separación de las placas.
  - ◆ Estado cerrado: el cual consta prácticamente de los mismos elementos, sin embargo, cambian de valor, además si el contacto es metal-metal no se presenta capacitancia al contacto, sino resistencia de contacto.
- ⇒ El aislamiento se refiere a que tanto la señal puede atravesar el interruptor, cuando este se encuentra en estado abierto, por lo que se cuantifica con el parámetro  $S_{21}$  en estado cerrado.
- ⇒ Las pérdidas de inserción son las pérdidas que una señal sufre cuando pasa a través de un interruptor en estado cerrado, se cuantifica con el parámetro  $S_{21}$  en estado abierto.
- ⇒ Las pérdidas por retorno son las referentes a las pérdidas que ocasiona la onda reflejada cuando atraviesa la línea de transmisión. Y se define como:

$$RL = -20 \log |\Gamma| dB$$

- ⇒ El factor de calidad de conmutación es una figura de merito que permite caracterizar dispositivos conmutables y se define como:

$$K = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{(X_1 - X_2)^2}{R_2 R_1}$$

donde se observa que  $K$  debe ser un valor muy grande y para esto se presentan dos diferentes casos:  $(R_2 \cong R_1, X_2 > X_1)$  ó  $(R_2 > R_1, X_2 = X_1)$

---

---

# CONCLUSIONES GENERALES

- ⇒ Existen más de 40 diferentes posibilidades para el diseño de un interruptor MEMS, que resultan de la combinación de los mecanismos de actuación, tipos de movimiento, tipos de contacto y configuración eléctrica.
- ⇒ La actuación electrostática se basa en la aplicación de una diferencia de potencial entre dos placas, entre sus ventajas se encuentran: que no se requiere de material especializado, proceso de fabricación compatible con CI, baja potencia de consumo, tiempo de conmutación lenta. Su desventaja es la no linealidad de la fuerza electrostática y un voltaje de actuación alto, que en los recientes años ha ido disminuyendo.
- ⇒ Los parámetros estáticos reportados en el estado del arte son: la constante de rigidez ( $k$ ), el voltaje de actuación, el voltaje de jale ( $V_j$ ) y la frecuencia natural. Los parámetros dinámicos que son tomados en cuenta para el diseño de MEMS son: el factor de calidad mecánico ( $Q$ ), el tiempo de conmutación y la constante de amortiguamiento. Y los parámetros electrodinámicos que son utilizados para caracterizar un buen diseño de los interruptores son: aislamiento, las pérdidas de inserción y pérdidas por retorno.
- ⇒ Para describir el movimiento de los interruptores RF MEMS, se reporta el uso de dos ecuaciones de movimiento: la ecuación Euler-Bernoulli y la fórmula de d'Álambert en 1D. La primera describe la deflexión de la viga, mientras que la segunda describe el desplazamiento de la misma.
- ⇒ La ecuación Euler - Bernoulli se utiliza cuando podemos considerar que la sección transversal horizontal de la viga permanece constante durante su deflexión y es utilizada para describir el movimiento; además, permite obtener la constante de rigidez de



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

la viga dependiendo del anclaje y la geometría de la misma. La expresión matemática es definida como:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -q$$

- ⇒ La constante de rigidez es la consideración de la elasticidad de la placa móvil. Depende del material y de la posición donde se ejerza la carga, es decir de la posición del electrodo fijo.
- ⇒ El análisis modal consiste en plantear la ecuación del movimiento, a partir de los parámetros de diseño, así como de los grados de libertad que sean analizados para los modos de movimiento y este por lo regular supone resolver un problema de eigenvalores.
- ⇒ La ecuación que describe el desplazamiento de la viga voladiza, es la obtenida mediante la Segunda Ley de Newton enunciada como sigue:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k(x) = \frac{\epsilon AV^2}{2(x + \frac{t_d}{\epsilon_0})^2}$$

- ⇒ El coeficiente de amortiguamiento queda definido en función de la longitud de las placas paralelas, además del dieléctrico y la distancia media entre las mismas. Y se define como:

$$c = \frac{3 \mu B^3 L}{2 h^3}$$

- ⇒ El factor de calidad mecánico sirve para describir la disipación de energía, además de caracterizar el sistema. Un diseño apropiado debe tener un factor de calidad  $Q$  entre 0,5 y 2. Éste se define como:

$$Q_{total} \cong \frac{1}{2\zeta}$$

- ⇒ El circuito eléctrico equivalente se modela en dos partes:

- ◆ Estado abierto: el cual contiene la impedancia de la línea de transmisión, la resistencia equivalente, la inductancia del interruptor y la capacitancia formado por la separación de las placas.
- ◆ Estado cerrado: el cual consta prácticamente de los mismos elementos, sin embargo, cambian de valor, además si el contacto es metal-metal no se presenta capacitancia, sino resistencia de contacto.

- ⇒ Los parámetros de dispersión se utilizan para caracterizar los sistemas de microondas, de ellos se obtiene el aislamiento  $S_{21}$ , las pérdidas de inserción  $S_{21}$  y las pérdidas por retorno  $S_{11}$ .
- ⇒ El factor de calidad de conmutación es una figura de mérito que permite caracterizar dispositivos conmutables y se define como:

$$K = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{(X_1 - X_2)^2}{R_2 R_1}$$

donde se observa que  $K$  debe ser un valor muy grande y para esto se presentan dos diferentes casos:  $(R_2 \cong R_1, X_2 > X_1)$  ó  $(R_2 > R_1, X_2 = X_1)$



---

---

# APÉNDICE A

---

## MODELOS MATEMÁTICOS

### A.0.1. Fórmulas de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (\text{A.1})$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (\text{A.2})$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{cosh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (\text{A.4})$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (\text{A.5})$$

$$f \quad (\text{A.6})$$

### A.0.2. Serie de Taylor

Suponemos que una función  $f(x)$  definida por la serie de potencias :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (\text{A.7})$$

tiene convergencia en  $|x - x_0| = R$ , para  $R \neq 0$ . Se dice que su dominio  $D$  es  $|x - x_0| < R$ .



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Entonces:

⇒  $f(x)$  es una función continua en  $D$ : Es decir, que si  $x_1$  y  $x_2$  son puntos del dominio entonces

$$|f(x_1) - f(x_2)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |x_1 - x_2| \rightarrow 0$$

⇒  $f(x)$  tiene derivada en todo punto de  $D$ . Donde de igual manera, puede ser aproximada como una serie de potencias de la forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

Donde el coeficiente  $a_k$  también puede ser expresado como:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{o} \quad f^{(k)}(x_0) = k! a_k \quad \text{para} \quad k \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

Por tanto, la serie de Taylor se define como:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (\text{A.9})$$

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Richard P. Feynman. There's plenty of room at the bottom. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1:1–7, 1959. (Citado en página 3.)
- [2] P. D. Grant and M. W. Denhoff. A comparison between rf mems switches and semiconductor switches. *Proc. IEEE International Conference on MEMS, NANO and Smart Systems (ICMENS'04)*, pages 515–21, Aug. 2004. (Citado en página 3.)
- [3] Ai-Qun Liu. *RF MEMS Switches and Integrated Switching Circuits*. Springer, 2010. (Citado en página 5.)
- [4] Gabriel M. Rebeiz. *RF MEMS Theory, Design and Technology*. John Wiley & Sons, 2003. (Citado en páginas 5, 53, 76 y 79.)
- [5] Héctor J. De los Santos. *Introduction to Microelectromechanical Microwave Systems*. Artech House, 2004. (Citado en página 5.)
- [6] Stephen D. Senturia. *Microsystem design*. Kluwer Academic Publishers, 2001. (Citado en páginas 7 y 10.)
- [7] Nazmul Islam. *Microelectromechanical Systems and Devices*. InTech, Chapters published, 2012. (Citado en página 8.)
- [8] S. Yamada K Tanaka H.Tobushi, A. Ikai and C. LExcellent. Thermomechanical properties of tini shape memory alloy. *Journal of Physique IV Colloque*, pages 385–393, 1996. (Citado en página 10.)
- [9] Mohammad I. Younis. *MEMS Linear and Nonlinear Static and Dynamics*. Springer, 2011. (Citado en páginas 11, 49, 65 y 75.)



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- [10] David Macci Jacopo Iannacci, Alena Repchankova and Martín Niessner. A measurement procedure of technology-related model parameters for enhanced rf - mems design. *International Workshop on Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement*, pages 6–7, 2009. (Citado en página 13.)
- [11] Ki Bang Lee. *Principles of Microelectromechanical Systems*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2011. (Citado en páginas 15, 39, 42, 46 y 75.)
- [12] Benitez Zúñiga Ignacio Cuauhtemoc. *Desplazador de fase MEMS para la banda de súper alta frecuencia*. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015. (Citado en página 17.)
- [13] Coventor Inc. <http://www.coventor.com/>, 2017. (Citado en página 17.)
- [14] Ramirez Palma Mario Rodolfo. *Interruptor MEMS para Aplicaciones en un Desplazador de Fase para la banda de Súper Alta Frecuencia*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015. (Citado en página 17.)
- [15] Hamood Ur Rahman and Tim Hesketh Rodica Ramer. Low actuation voltage rf mems series switch with novel beam design. *International Conference on Emerging Technologies*, 2008. (Citado en páginas 21 y 31.)
- [16] George Rahul Paul and Usha Kiran K. Low actuation voltage: Rf mems series switch. *International Conference WISPNET*, pages 2383–2385, 2016. (Citado en páginas 23 y 31.)
- [17] Vijay Nath. *Proceedings of the International Conference on Nano-electronics, Circuits & Communication Systems*. Springer, lecture notes in electrical engineering 403 edition, 2017. (Citado en página 24.)
- [18] Alessandro Granaldi and Paolo Decuzzi. The dynamic response of resistive microswitches: switching time and bouncing. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, pages 1108–1115, 2006. (Citado en página 24.)
- [19] E Cretu L Mol, L A Rocha and R F Wolffenbuttel. Squeezed film damping measurement a parallel-plate mems in the free molecule regime. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, pages 19–25, 2009. (Citado en página 25.)
- [20] Ashish Kumar Sharma and Navneet Gupta. Microelectromechanical system (mems) switches for radio frequency applications - a review. *Sensors & Transducers*, 148:11–21, 2013. (Citado en página 25.)

- 
- [21] Gao Feng Qi Chenkun, Zhao Xianchao and Li Han-Xiong. Modeling and identification of nonlinear distributed parameter dynamics of the micro- cantilever. *Proceedings of the 3.3rd Chinese Control Conference*, 2014. (Citado en página 25.)
- [22] Hamood Ur Rahman and Rodica Ramer. Supported bars novel cantilever beam design for rf mems series switches. *9th IEEE Conference on Nanotechnology*, pages 255–258, 2009. (Citado en páginas 27 y 31.)
- [23] Xinyi Li Yiling Wang Yulin Huang, Jingfu Bao and Yijia Du. A 4-bit switched-line phase shifter based on mems switches. *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (IEEE-NEMS 2015)*, pages 405–408, 2015. (Citado en página 28.)
- [24] James J. Allen. *Micro Electro Mechanical System Design*. Taylor & Francis Group, 2005. (Citado en páginas 34 y 65.)
- [25] James M. Gere. *Mechanics of Materials*. Thomson, sixth edition, 2004. (Citado en página 39.)
- [26] Markus Zahn. *Electromagnetic Field Theory: a problem solving approach*. John Wiley & Sons Inc, first edition, 1979. (Citado en página 40.)
- [27] Frederick J. Milford y Robert W. Christy John R. Reitz. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, cuarta edition, 2001. (Citado en página 40.)
- [28] M. Porfiri R.C. Batra and D. Spinello. Capacitance estimate for electrostatically actuated narrow microbeams. *Micro & Nano Letters online no. 20065046*, 1, Issue 2:71–73, 2006. (Citado en páginas 43 y 44.)
- [29] Minhang Bao. *Analysis and Design Principles of MEMS Devices*. Elsevier, first edition, 2005. (Citado en páginas 45 y 66.)
- [30] Chaitali Anil Muley and Syed A. Naveed. Modelling of cantilever based mems rf switch. *Fourth International Conference on Computing Communications and Networking Technologies (ICCCNT)*, pages 1–5, 2013. (Citado en página 48.)
- [31] M. Aldrigo and M. Dragoman. Reducing dielectric breakdown in mems switches via a cnts array embedded in a si3n4 substrate. *International Semiconductor Conference (CAS)*, pages 47–50, 2014. (Citado en página 52.)
- [32] M Barbato V Mulloni and G Meneghesso. Long-term lifetime prediction for rf-mems switches. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, pages 1–9, 2016. (Citado en página 52.)

- [33] Singiresu S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Prentice Hall, fifth edition, 2011. (Citado en página 54.)
- [34] William T. Thomson and Marie Dillon Dahleh. *Theory of Vibration with Applications*. Pearson Education, fifth edition, 2005. (Citado en páginas 55 y 56.)
- [35] Erwin Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Limusa Wiley, tercera edición, 2012. (Citado en página 55.)
- [36] Leonard Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice-Hall International, INC, first edition, 1997. (Citado en página 56.)
- [37] John Bird. *Higher Engineering Mathematics*. Elsevier, fifth edition, 2006. (Citado en página 63.)
- [38] Ahmet Erbil Zhili Hao and Farrokh Ayazi. An analytical model for support loss in micromachined beam resonators with in-plane flexural vibrations. *Sensors and Actuators*, pages 156–164, 2003. (Citado en página 74.)
- [39] L. J. Peter Linnér Spartak Gevorgian and Erik L. Kollberg. Cad models for shielded multilayered cpw. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, pages 772–779, 1995. (Citado en página 84.)
- [40] Mendoza Rosales Domingo Teodoro. *Desarrollo de interruptores MEMS para la banda de súper alta frecuencia con aplicaciones en desplazadores de fase*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013. (Citado en página 84.)
- [41] David M. Pozar. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc, fourth edition, 2012. (Citado en página 87.)
- [42] Cancino Alatorre Luis Alberto and Noriega Sacristán Erick Alberto. *Diseño y Simulación de un Interruptor MEMS Magnetostático para Aplicaciones en Alta Frecuencia*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006. (Citado en página 91.)
- [43] Orest G. Vendik Irina B. Vendik and Erik L. Kollberg. Commutation quality factor of two - state switchable devices. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, pages 802–808, 2000. (Citado en página 91.)