



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Fermiones en AdS: Una Introducción a
la Dualidad Norma/Gravedad o
Correspondencia AdS/CFT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICA

PRESENTA:

EDZNA CLAUDIA SILVA PÉREZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. RODOLFO PATRICIO MARTÍNEZ Y ROMERO

México, Cd. Mx. 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Silva
Pérez
Edzna Claudia
55 85 69 40 96
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
307309444

2. Datos del tutor

Dr.
Rodolfo Patricio.
Martínez y Romero

3. Datos del sinodal 1

Dr.
José David
Vergara
Oliver

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Myriam
Mondragón
Ceballos

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez Quezada

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Juan Manuel
García Islas

7. Datos del trabajo escrito

Fermiones en AdS: Una introducción a la dualidad norma/gravedad o correspondencia AdS/CFT
p 81
2017

A Lulú y Aldo.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y al pueblo mexicano por permitirme convertirme en otro profesionista al servicio de la nación.

Agradezco a la Facultad de Ciencias por convertirse en mi hogar, por tanto que me ha dado; por un lugar en el aula de clase, en un laboratorio, o frente a un pizarrón, y ante todo, por los grandes profesores y todas sus enseñanzas. A todos ustedes, mil gracias.

Agradezco al Departamento de Física por el espacio que me concedió durante la realización de mi servicio social así como de este trabajo, fueron años llenos de experiencias maravillosas.

Agradezco infinitamente al Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero, por su tiempo y paciencia, por introducirme al maravilloso mundo de la física matemática, de la teoría de campos y sobretodo, de los fermiones. Gracias por tantos años de inspiración.

Agradezco a mi jurado por sus observaciones y aportaciones para este trabajo, la Dr. Myriam Mondragón Ceballos, el Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada, el Dr. Juan Manuel Gracia Islas, y sobretodo al Dr. José David Vergara Oliver, por todas las horas adicionales que le dedicó a esta tesis, por la paciencia y tantas enseñanzas, mil gracias, y mil disculpas.

Sobre todo agradezco a mi familia, mi clan de guerreras: a María del Rocío Rosalba Pérez Solís, por todo su apoyo, su devoción y su amor. A Zazilu Silva Pérez, por ser mi modelo de lucha y entrega, a Alondra Getsemaní Miramontes Vidal, ejemplo de fuerza y cariño sin límites. Y a la amada Keny Aimé Beltrán Silva, por ser mi motivación para pelear todos los días.

Agradezco a todos mis amigos y colegas: Liliana, Juan Carlos, Abraham, Sergio y a toda la gente maravillosa que se ha cruzado por mi camino, porque de todos he aprendido más de lo que alguna vez podría enseñar, en especial a mi colega el M. en C. Cesar Alberto Díaz Hernández.

Agradezco profundamente a mi colega, el M. en C. Marco Antonio Rodríguez Gracia, por siempre estar a mi lado, por ser mi gurú, confidente, estratega, mano derecha y compañero durante todo este viaje por la ciencia; ya que sin su enorme fuerza y cariño no podría haberlo logrado.

Finalmente, agradezco a Lourdes Solís Pérez por todo, por el inmenso amor, la comprensión y el cariño que me ha dado, por convertirme en la persona que soy, por estar siempre a mi lado. Aunque no lograste ver finalizado este trabajo, estas aquí hoy y para siempre.

“Es como si la propia naturaleza se guiara por el mismo tipo de criterios de consistencia y elegancia que guían al pensamiento matemático humano.”

Roger Penrose.

Resumen

La finalidad de este trabajo fue realizar un ejemplo sencillo de holografía con el objetivo de plantear una construcción heurística y elemental a nivel básico (licenciatura o “undergraduate”) de la correspondencia norma/gravedad o AdS/CFT. Dicha correspondencia, aun conjeturizada, representa una de las herramientas más útiles y sorprendentes de la teoría de cuerdas, pues es posible la descripción de teorías con y sin gravedad a la par, poniendo a prueba a uno de los mayores paradigmas en la física fundamental.

En este trabajo se estudia brevemente la correspondencia norma/gravedad o correspondencia AdS/CFT aplicada sobre fermiones en el caso más sencillo, un espinor libre de Dirac.

La base de este trabajo recae en el artículo realizado por David Tong y Joao N. Laia[23], donde se aplica la tecnología de Wilson o *renormalización holográfica* y el flujo del grupo de renormalización con el fin de conocer la estructura de la teoría de campo que reside en la frontera de la teoría dual. Para este propósito se intento escribir el escenario adecuado: utilizando elementos básicos en topología y geometría diferencial para definir a los espinores descritos por la ecuación de Dirac, así como fundamentar de forma sencilla los requerimientos y desarrollos lógicos en la teoría holográfica para demostrar, una vez más, el poder de la correspondencia.

Es a partir de los trabajos acerca de esta dualidad donde se define la conexión entre el grupo de renormalización Wilsoniano y el flujo generado por la acción que describe una ecuación radial de tipo Hamilton-Jacobi, dicha acción expone la teoría de campo que vive en la frontera de la teoría dual y a través de estudiar dicha acción en la frontera, por medio de operadores relevantes multitraza se encuentra de manera adicional un teorema que contribuye a la investigación presentada en [23] sobre bultos espinoriales a través de la correspondencia holográfica.

Índice general

Agradecimientos	V
1. Ecuación de Dirac en espacios curvos.	3
1.1. Espacios Topológicos	4
1.1.1. Mapeos conformes o continuos	4
1.1.2. Homeomorfismos e invariantes topológicos	5
1.2. Variedades	5
1.2.1. Vectores	6
1.2.2. Uno-formas y su acción	8
1.2.3. Mapas Diferenciables.	8
1.2.4. Base Dual	9
1.2.5. Tensores y campos tensoriales.	10
1.3. Tensor métrico	10
1.4. Álgebra de Lie	11
1.4.1. Flujos y Derivada de Lie	12
1.5. Derivada Exterior	13
1.5.1. Derivada de Lie de formas diferenciales	15
1.6. Conexión y derivada covariante	15
1.6.1. Conexión y transporte paralelo en una variedad Pseudo-Riemanniana	16
	XI

1.7.	Conexión de espín	19
1.7.1.	Derivada Covariante	21
1.7.2.	Estructura de Cartan e identidades de Bianchi	23
1.8.	La Ecuación de Dirac	23
1.8.1.	Espinores sobre espacios curvos	26
2.	Introducción a la dualidad norma/gravedad o correspondencia AdS/CFT.	29
2.1.	La conjetura de Maldacena: Dualidad norma/gravedad	30
2.2.	El fondo AdS	31
2.2.1.	AdS como solución a las ecuaciones de Einstein.	32
2.2.2.	El espacio-tiempo de Anti de Sitter	33
2.2.3.	Agujeros negros con geometrías AdS en el horizonte.	36
2.2.4.	La métrica AdS_{n+1}	37
2.2.5.	El parche de Poincaré	38
2.2.6.	La frontera en AdS	41
2.3.	Teorías de Campo Conformes CFT	44
2.3.1.	Las simetrías conformes	45
2.3.2.	Equivalencia de escalamiento	46
2.3.3.	Álgebra conforme	47
2.4.	AdS/CFT como invariante de escala	47
2.4.1.	Diccionario AdS/CFT	49
2.5.	El grupo de renormalización Wilsoniano	50
3.	Fermiones en el espacio de Anti de-Sitter	53
3.1.	Conexión de Espín: el lagrangiano clásico de Dirac y el parche de Poincaré	54
3.2.	Ecuación para una onda plana	56
3.3.	Evolución de espinores en AdS	60

3.3.1. Flujo entre puntos fermiónicos fijos	60
4. Conclusiones	71
A. Lista de Acrónimos	75
Bibliografía	77

Índice de figuras

2.1. “Diagrama de Penrose del fondo Anti de Sitter”	33
2.2. “Otro posible diagrama de AdS que muestra el comportamiento en la frontera”	34
2.3. “Diagrama de Penrose del fondo Anti de Sitter en el parche de Poincaré. Nótese que la coordenada temporal se representa como bolas fijas en el cilindro.” . .	40
2.4. “Diagrama de Penrose del fondo Anti de Sitter Lorentziano”	42
2.5. “Diagrama de Penrose de un diamante Euclideano”	43
2.6. “Cilindro AdS en coordenadas globales correspondientes a una CFT en la cuantización radial.”	50
3.1. “Funciones de Bessel modificadas”	59
4.1. “a) Diagrama plano correspondiente a un operador de una traza b) Diagrama no plano correspondiente a un operador de dos trazas”	73

Introducción

La correspondencia holográfica se ha convertido en una herramienta poderosa y útil proveniente de la teoría de cuerdas; esta correspondencia ha sido corroborada al describir fenómenos fuertemente acoplados en teorías de campo mediante el estudio de un fondo gravitacional a bajas energías, como el plasma de quarks y gluones[42]. Además tiene aplicaciones en estado sólido[17] y en física descrita por la dinámica de fluidos [44, 51].

El proceder con la correspondencia norma-gravedad enfatiza los hallazgos llevados a cabo por la equivalencia de una teoría cuántica de campos (QFT) con una teoría de gravedad cuántica (QG) en dimensiones mayores; a esta característica se le conoce como “holografía” pues la teoría de gravedad cuántica puede estudiar a su compañera holográfica en una dimensión menor, sobre la frontera del espacio.

Como una aplicación de la teoría, se toma un ejemplo básico y muy interesante: objetos con espín semi entero, es decir *espinores*.

El primer acercamiento a los espinores puede derivarse del estudio de la ecuación de Dirac, la cual, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon es una ecuación diferencial parcial de primer orden. Esta ecuación tiene un origen radicalmente distinto, debido a las características de los espinores.

Dentro del estudio de una teoría cuántica de la gravedad, se consideran bultos o “bulks” para campos espinoriales, para este fin, se trabajó con un lagrangiano que describe espinores libres de Dirac.

El primer capítulo de este trabajo se centra en el estudio matemático de estos campos fermiónicos. Se partió al hacer un recorrido fugaz de las bases matemáticas para la descripción de fermiones, pasando de espacios topológicos, álgebras de Lie, derivada covariante y conexión aplicadas sobre fermiones para finalmente, deducir una ecuación y lagrangiano de Dirac donde la derivada covariante es $\vec{D}_\mu = \vec{D}_\mu + \frac{1}{4}\omega_{ab,\mu}\Gamma^{ab}$ con $\omega_{ab,\mu}$ la conexión de espín o conexión uno-

forma en el bulto. Al definir la derivada covariante y la conexión de espín, se trabaja con objetos llamados *polítradas* (del alemán *vielbeins*), donde el índice griego denota espacio-tiempos del bulto y los índices latinos definen el espacio tangente a este.

Durante el segundo capítulo se hace una breve introducción a la correspondencia AdS/CFT, dicha introducción pretende sintetizar la construcción lógica que ha llevado a cabo esta equivalencia entre una teoría de campos no gravitacional con una teoría de gravedad cuántica sobre un espacio-tiempo AdS, la cual, pese a ser una conjetura, ha sido uno de los mayores logros en teoría de cuerdas, pues aunque aun se desconoce por qué ocurre esta correspondencia, ha sido muy útil al aplicarse en diversos problemas en la física de frontera.

En el tercer capítulo se aplica lo descrito en los capítulos predecesores. Se definió el lagrangiano clásico de Dirac sobre un fondo gravitacional a bajas energías, y es aquí donde se aplicó la herramienta holográfica sobre un caso sencillo: un espinor libre de Dirac.

Dicha herramienta holográfica es completamente compatible con el enfoque de Wilson; se observa un equivalente holográfico de la ecuación de Callan-Symanzik, la cual es una ecuación tipo Hamilton-Jacobi, en donde el tiempo ha sido sustituido por la coordenada radial del bulto, la cual juega el papel del inverso de la escala de energía en la teoría de campo. A esta ecuación tipo Hamilton-Jacobi le son impuestas condiciones de frontera de Neumann, de donde se obtuvieron operadores equivalentes a ímpetus canónicos.

Según los diccionarios de la dualidad, para que espinores, de lado de la teoría de gravedad cuántica, sean cantidades invariantes de norma, a su dual le corresponden operadores fermiónicos compuestos, que son formados típicamente por trazas de operadores (las trazas son invariantes de norma). Al encontrar la solución general en términos de la coordenada radial de la ecuación tipo Hamilton-Jacobi, se observa el flujo de renormalización de la teoría dual, y dado el espíritu de esta dualidad, a dicho flujo le es asociado un grupo de renormalización (RG).

Investigaciones en la dualidad han señalado que, la teoría de campo que vive en la frontera de AdS no es única, es decir, la teoría en gravedad cuántica admite dos soluciones distintas a las condiciones de frontera de Neumann, esto es, la dinámica del bulto describe dos teorías conformes duales[23]. Lo cual implica que aunque satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento son teorías distintas, pues sus operadores duales no contienen la misma información (pesos conformes diferentes), y dentro del concepto de t'Hooft [16], se consideran operadores de una o dos trazas. En este trabajo se descubrió que, estos últimos también contribuyen al flujo de renormalización.

Capítulo 1

Ecuación de Dirac en espacios curvos.

En la búsqueda de una formulación apropiada de una ecuación de movimiento relativista en conjunto con teorías cuánticas, siendo el caso de partículas sin espín o con un número pequeño de espín, es inevitable recurrir a las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac, descritas en espacios planos; así mismo se pretende realizar una extensión de estas ecuaciones para pasar de espacios planos a espacios curvos.

En este trabajo el enfoque fue sobre fermiones, partículas descritas por la ecuación de Dirac; se puede obtener una gran variedad de aplicaciones, ya que la riqueza de dicha ecuación es muy extensa empleada hacia distintos fenómenos físicos.

Es importante señalar que, para los fines de este trabajo, se desarrolla el concepto de espinores sobre espacios curvos (en particular sobre AdS) a través de la conexión de espín o conexión uno forma.

Es decir, se aplica el mismo principio de equivalencia que en un caso de caída libre, a la acción descrita por partículas fermiónicas de espín $1/2$ sobre un espacio curvo. Este principio de equivalencia se reescribe por medio la formulación de Cartan, que establece la compatibilidad métrica en la conexión de espín, que no es otra cosa que una conexión uno-forma (conexión Levi-Civita) en el formalismo de Vielbeins. Durante las primeras secciones de este capítulo, se mencionarán los conceptos matemáticos básicos, como lo son espacios topológicos, variedades y la notación tensorial; así mismo el definir las nociones de álgebras de Lie hasta llegar al concepto de conexión y derivada exterior con la finalidad de extender estas ideas hacia la construcción del formalismo de Cartán para obtener la conexión de espín.

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1.1. [31] Sea X un conjunto y $Y = \{U_i | i \in I\}$ denota una colección de dimensión finita o infinita, de subconjuntos de X . Entonces el par (X, Y) forma un *espacio topológico* si satisface:

(i) $\emptyset, X \in Y$

(ii) Si Z es una subcolección de X , la familia de subconjuntos de I , $\{U_i | i \in I\}$ satisface:

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in Y$$

(iii) Si Z_α es un subconjunto finito de I_α , se satisface que $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha \in Y$

Se dice que el conjunto X es un *espacio topológico*, mientras que el conjunto \bigcup_i es llamado el conjunto de abiertos, de tal manera que Y da una topología a X .

1.1.1. Mapeos conformes o continuos

Definición 1.1.2[31, 45] Sea X y Y conjuntos. Se define un *mapeo* donde la función f es una regla, la cual asigna $y \in Y$ para cada $x \in X$. Escribiendo

$$f : X \rightarrow Y \tag{1.1.1}$$

donde f está definida explícitamente como $f : x \mapsto f(x)$.

Pueden existir más de dos elementos en el conjunto X de tal forma que, correspondan al mismo $y \in Y$. Un subconjunto de X cuyos elementos son mapeados a $y \in Y$ bajo f se llama la *imagen inversa* de y , denotada $f^{-1}(y)$, tal que

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\} \tag{1.1.2}$$

El conjunto X es el dominio, mientras que Y es el rango del mapeo. Se define a la imagen del mapeo como $f(X) = \{y \in Y | y = f(x) \text{ para alguna } x \in X\}$ o bien, Im_f .

Si se consideran ciertas estructuras algebraicas, las cuales están presentes en los conjuntos X y Y . Si $f : X \rightarrow Y$ preserva álgebras, entonces se llama a f un *homeomorfismo*. Si un

homeomorfismo en f es biyectivo, se dice que la aplicación f es un *isomorfismo*, denotado

$$X \cong Y \tag{1.1.3}$$

En general, si X y Y espacios topológicos, un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es continuo, si la imagen inversa de un abierto en Y es un abierto en X .

1.1.2. Homeomorfismos e invariantes topológicos

Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos, se dice que el mapeo $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo si es continuo y tiene una inversa $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ también continua. Si existe un homeomorfismo entre X_1 y X_2 se dice que X_1 es isomorfo a X_2 y viceversa.[31]

En otras palabras, X_1 es homeomorfo a X_2 si existe un mapeo $f : X_1 \rightarrow X_2$ y $g : X_2 \rightarrow X_1$ tal que $fg = id_{X_2}$ y $gf = id_{X_1}$.

Si se dividen a los espacios topológicos como clases de equivalencia, de acuerdo con que tanto es posible deformar un espacio u otro por un homeomorfismo. Entonces, dos espacios topológicos son homeomorfos mutuamente si pueden deformarse uno a otro continuamente.

Si dos espacios topológicos tienen distintos invariantes topológicos no pueden ser mutuamente homeomorfos.

1.2. Variedades

Definición 1.2.1.[31] Se define a M como una *variedad* diferenciable m -dimensional si:

- (i) M es un espacio topológico
- (ii) M está provisto con una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$
- (iii) $\{U_i\}$ Es una familia de abiertos que cubren M tal que $\cup_i U_i = M$ con φ_i un homeomorfismo de U_i a un subconjunto abierto U'_i de \mathbb{R}^m .
- (iv) Dado U_i y U_j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ el mapeo $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ es infinitamente diferenciable.

Un homeomorfismo ϕ mapea U_i en un subconjunto abierto $U'_i \subset \mathbb{R}^m$, de esta forma provee coordenadas al punto $p \in U_i$. Entonces, si $U_i \neq U_j \neq \emptyset$ la transición de un sistema a otro

es suave. El par (U_i, φ_i) es llamado *carta* mientras que toda la familia es llamada *atlas*. Siendo así, el subconjunto U_i es llamado *la vecindad coordinada*, mientras que φ_i es llamada *la función coordinada*. φ_i es representada por m funciones $\{X^1(p), \dots, X^m(p)\}$. El conjunto $\{X^\mu(p)\}$ es llamado *la coordinada*. Es importante señalar que un punto sobre una variedad $p \in M$ existe de manera independiente a su coordenadas, esto quiere decir que es el mismo punto el que nos dice de qué manera determinar sus coordenadas. M es localmente Euclidiano, pues en cada vecindad coordinada U_i , M aparece como un abierto de \mathbb{R}^m , cuyo elemento es $\{X^1, \dots, X^m\}$. Nótese que no se requiere que M sea \mathbb{R}^m globalmente; basta con que éste parezca serlo localmente. Si existe un traslape entre U_i y U_j , dos sistemas coordinados se asignan a un punto en $U_i \cap U_j$. Por (iv), la transición de un sistema coordinado a otro es suave (C^∞). Entonces, el mapeo φ_i asigna m valores coordinados $x^\mu (1 \leq \mu \leq m)$ a un punto $p \in U_i \cap U_j$. Mientras que φ_j asigna $y^\mu (1 \leq \mu \leq m)$ al mismo punto; así mismo la transición y a x $x^\mu = x^\mu(y)$ está dada por m funciones de m variables. La transformación de funciones coordinadas $x^\mu = x^\mu(y)$ es la forma explícita del mapeo

$$\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}. \quad (1.2.1)$$

La unión de dos atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}$ es un atlas. Estos dos atlas se dicen ser *compatibles*. Mientras que tal compatibilidad es una relación de equivalencia, la cual es llamada *estructura diferenciable*. Lo cual concluye que si el atlas es mutuamente compatible, define a la misma estructura diferenciable M . El significado de *variedad diferenciable* reside en el hecho que se puede usar el cálculo usual en \mathbb{R}^n . La suavidad de las transformaciones de coordenadas asegura que el cálculo es independiente de las coordenadas escogidas.

1.2.1. Vectores

Sea M una variedad, se define una curva γ tal que

$$\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow M \quad (1.2.2)$$

definida como un mapeo del intervalo $\langle a, b \rangle$ en la variedad M . De esta manera se puede constreñir a la derivada como una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que el parámetro de cambio es el tiempo t tal que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu(\phi(p)) \quad (1.2.3)$$

Se puede definir un difeomorfismo entre las partes, tal que al realizar la derivada de la composición con su inversa $f \cdot \phi^{-1}(x)|_p$ con $\gamma(0) = P$.

$$\frac{df}{dt}|_p = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu|_{t=0} \quad (1.2.4)$$

con $\mu = 1, 2, \dots, n, P \in M, x \in \mathbb{R}^m$.

Definición 1.2.2. Sea

$$X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv x^\mu \hat{e}_\mu \quad (1.2.5)$$

con \hat{e}_μ la base coordenada de vectores

$$V \equiv V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^\mu \partial_\mu = V^\mu \hat{e}_\mu. \quad (1.2.6)$$

De igual manera que $X[f]$ actúa sobre las funciones

$$V[f] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \quad (1.2.7)$$

con $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dicho operador actúa sobre los puntos P tales que al conjunto de todos estos vectores lo llamamos $T_p M$. A estos vectores usualmente se les conoce como *contrvariantes* en la nomenclatura del grupo de Lorentz, mientras que a sus covectores $\omega \in T_{p^*} M$ se les llama *covariantes*; es decir, $\omega_p = \omega_{p\mu} dx^\mu$ con dx^μ la base de las uno-formas.

Nótese que si $df = \partial_\mu f dx^\mu$, df como una 1-forma, entonces, como $\partial_\mu f$ es un vector covariante. Dado $\omega_p \equiv \omega_\mu dx^\mu$ y $V \equiv V^\mu \hat{e}_\mu$ se puede escribir

$$\omega_p[V] \equiv \omega_\mu V^\mu \equiv \langle \omega_p, V_p \rangle \quad (1.2.8)$$

como un invariante que es congruente con el producto interno entre vectores y uno-formas. Es decir, se puede obtener

$$df[V] = \langle df, V \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\mu \equiv V[f] \quad (1.2.9)$$

ya que $V \equiv V^\mu \partial_\mu$. El fin es que $\omega_\mu V^\mu$ sea invariante ante el grupo de difeomorfismos.

1.2.2. Uno-formas y su acción

Como T_pM es un espacio vectorial, existe un espacio vectorial dual a T_pM , cuyo elemento es la función lineal de $T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. El espacio dual es llamado el *espacio cotangente* a p , denotado como $T_{p^*}M$ [26, 31]. Un elemento $\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ de $T_{p^*}M$ es llamado el vector dual o vector tangente, mientras que en el contexto de formas diferenciales se define como una *uno-forma*.

El vector V actúa también sobre uno-formas, tal que al tomar las ecuaciones (1.2.6) y (1.2.7)

$$\begin{aligned} V[\omega] &\equiv V^\mu \omega_\mu \\ &\equiv \langle V, \omega \rangle \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

esta congruencia con el producto interno, nos indica que dicho producto es bilineal

$$\omega[V] = V[\omega]. \tag{1.2.11}$$

1.2.3. Mapas Diferenciables.

Sea $f : M \rightarrow N$ un mapeo para una variedad m -dimensional M a una variedad n -dimensional N . Un punto $p \in M$ es un mapeo a un punto $f(p) \in N$ definido $f : p \rightarrow f(p)$. Tomando una carta (U, φ) en M y (V, ψ) en N , donde $p \in U$ y $f(p) \in V$. Entonces, f tiene la presentación coordenada $\psi f \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ [31].

Si se escribe $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ y $\psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$ entonces $\psi f \varphi^{-1}$ es sólo la función vectorial (valuada) $y = \psi f \varphi^{-1}$ de m variables. Si $y = \psi f \varphi^{-1}(x)$ o, en otra notación usual $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ es C^∞ con respecto a cada x^μ . Se dice que f es suave o infinitamente diferenciable en p o en $x = \varphi(p)$. Nótese que se requiere que sea infinitamente diferenciable (C^∞) en armonía con la suavidad de las funciones de transición ψ_{ij} , donde dicha diferenciability es independiente del sistema coordenado [6, 31].

Un mapeo suave $f : M \rightarrow N$ induce naturalmente un mapeo f_* llamado el *mapeo diferencial* entre los espacios tangentes

$$f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N \tag{1.2.12}$$

La forma explícita de f es obtenida por la definición de vector tangente, como una derivada direccional sobre una curva. Si $g \in F(N)$, entonces $g \circ f \in F(M)$ donde F es el espacio de las funciones continuas a los reales.

Un vector $v \in T_p M$ actu'a en $gcirquf$ para dar un número $V[gF]$ se puede definir $f_*V \in T_{f(p)}M$ por

$$(f_*V)[g] = V[gf]. \quad (1.2.13)$$

O en términos de mapas, (U, φ) en M y $(U\psi)$ en N

$$(f_*V)[g\psi^{-1}(x)] = V[gf\varphi^{-1}(x)]. \quad (1.2.14)$$

1.2.4. Base Dual

En el estudio de uno-formas y vectores, tomando (1.2.6) junto con

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (1.2.15)$$

es decir $\omega[V] = \omega_\mu V^\mu$ define al *vector de contracción*, tal que

$$\omega[V] = \omega_\mu dx^\mu[V] \quad (1.2.16)$$

$$= \omega_\mu dx^\mu[V^\rho \hat{e}_\rho] \quad (1.2.17)$$

$$= \omega_\mu V^\mu \quad (1.2.18)$$

con $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Obsérvese que de (1.2.17), se toma la derivada total actuando sobre una base coordenada se encuentra una delta de Kronecker que indica la contracción de tensores, es decir

$$dx^\mu[\hat{e}_\rho] = \delta_\rho^\mu. \quad (1.2.19)$$

En esta construcción se observa, dadas las propiedades del tensor de Kronecker, o bien $\delta = \sum_{\mu=1}^n e^\mu \otimes e_\mu = \sum_{\mu\nu} \delta_\mu^\nu e^\mu \otimes e_\nu \in T_p M \otimes T_p^* M$. Como se trata de formas bilineales $V \in T_p M$ tal que $V : T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$. De igual forma $\omega \in T_p^* M$ tal que $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$V[\omega] = V^\mu \omega_\nu = \langle V, \omega \rangle = \langle \omega, V \rangle \quad (1.2.20)$$

es un invariante ante difeomorfismos.

1.2.5. Tensores y campos tensoriales.

En la forma usual o clásica, un vector es un objeto lineal que mapea una función o 1-forma (vector dual) a un escalar. Esto puede generalizarse a objetos multilineales llamados *tensores*, que mapean vectores o vectores duales a un escalar. Un tensor tipo (p, q) es un mapeo multilinear que mapea p -vectores a q -formas a \mathbb{R} . [6, 26, 31]

$$T : \otimes^p V * \otimes^q V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.2.18)$$

El conjunto de todos los tensores de tipo (p, q) es llamado el espacio tensorial de tipo (p, q) , denotado T_q^p . Mientras que el producto tensorial $T = \mu \otimes v \in T_q^p$ es un elemento de $T_{q+p'}^{p+p'}$ definido por

$$\begin{aligned} & T(w_1, \dots, w_p, \xi_1, \dots, \xi_{p'}; u_1, \dots, u_q; v_1, \dots, v_{q'}) \\ &= \mu(w_1, \dots, w_p, u_1, \dots, u_q) V(\xi_1, \dots, \xi_{p'}; v_1, \dots, v_{q'}). \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Si v es un vector y este es asignado suavemente a cada punto de M , es llamado el campo vectorial sobre M . En otras palabras, V es un campo vectorial si, $V[f] \in F(M)$ para alguna $f \in F(M)$.

Cada componente de un campo vectorial es una función suave de M a \mathbb{R} . $H(M)$ denota al conjunto de campos vectoriales en M . Similarmente $T_p M$ se define como un campo tensorial H de tipo (p, q) por la asignación suave de un elemento de $T_{c,p}^q$ a cada punto $c \in M$. El conjunto de los campos tensoriales de tipo (p, q) en M es denotado por $\mathfrak{T}^1(M)$ en el contexto de formas diferenciales.

1.3. Tensor métrico

En geometría elemental, el producto interno de dos vectores V y U está definido por $U \cdot V = \sum_{j=i}^m U_j V_j$, donde U_i y V_i son las componentes de los vectores en \mathbb{R}^m . En una variedad, el producto interno está definido para cada espacio tangente $T_p M$ [26].

Definición 1.3.1. Sea M una variedad diferenciable. Se define una *métrica Riemanniana* g en M como un tensor tipo $(0, 2)$ en M que satisface los siguientes axiomas para cada punto

$p \in M$.

$$(i) g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$$(ii) g_p(U, U) \geq 0 \text{ Donde la igualdad se cumple si } U = 0$$

Con $U, V \in T_p M$. Se define, entonces el producto interno entre un vector V en la variedad $T_p M$ y su vector dual $\omega \in T_{p^*} M$ como el mapeo de $T_{p^*} M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si existe la métrica g , se define el producto como $g_p(U, V)$ con $U, V \in T_p M$. Tal que, g_p da lugar a un isomorfismo entre el espacio vectorial y su espacio dual. Es decir, que el tensor métrico es una forma multilineal que mapea elementos ordenados del dual y elementos del espacio vectorial a los reales.

Para los propósitos de este trabajo, se considera la métrica de una 2-forma tal que, el mapeo lineal U, ϕ es una carta en M y a esta le asignamos sistemas coordenados x^μ . En el sentido de métrica, se puede considerar el tomar un desplazamiento infinitesimal $dx^\mu \partial_{x^\mu} \in T_p M$ tal que, [31]

$$ds^2 = g(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3.1)$$

Siendo esta la métrica usual, mientras que en un sentido estricto es un tensor $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$. Dado que se puede ver a la métrica como una matriz simétrica, se consideran sus valores propios reales y estrictamente positivos.

1.4. Álgebra de Lie

Al dotar a un grupo de una estructura topológica, se dice que este grupo es continuo, además si se le provee una estructura de variedad compatible con la estructura del grupo, se obtiene un grupo de Lie. [2, 9, 26]

Dada esta combinación de grupo se encuentran algunas propiedades, como lo es garantizar la suavidad de la variedad, entonces el espacio tangente al elemento de grupo, resume al propio grupo a través de un álgebra de Lie. Esto implica que la mayoría de los grupos de Lie son isomorfos a un grupo lineal, es decir, se puede obtener por medio de un grupo de operadores matriciales una representación lineal.

Las siguientes proposiciones conforman la estructura conocida como álgebra de Lie.

Definición 1.4.1. Sean X e Y campos vectoriales suaves sobre una variedad continua-

mente diferenciable M . Dada una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se aplica X a f para obtener una función $X[f]$ continuamente diferenciable. Al aplicar Y a esta función, se obtiene una nueva función $Y[Xf] = Y(Xf)$. El operador $f \rightarrow Y(Xf)$ no satisface la regla del producto, es decir, no puede ser un espacio vectorial. [38]

Como los vectores tangentes a una variedad en un punto son identificados por derivadas en dicho punto, los campos vectoriales pueden considerarse como operadores diferenciales, los cuales asignan funciones suaves a funciones suaves, tales que

$$[X(f)](p) = X(p)(f); \quad X \in \mathfrak{X}(M); \quad f \in C^\infty(M); p \in M \quad (1.4.1)$$

con \mathfrak{X} el conjunto de campos vectoriales. En este sentido, el campo vectorial X es un mapeo lineal, el cual satisface la regla del producto de Leibniz. Es decir, el mapeo lineal $X : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ cuyo producto está definido

$$X(fg) = X(f)g + fX(g) \quad (1.4.2)$$

Dicho mapeo lineal puede verse como $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ llamado el *conmutador* del mapeo. A dicho mapeo se le conoce como el *paréntesis de Lie*.

Cabe mencionar que en el sentido estricto, esta no es un álgebra al no cumplir con la asociatividad del producto, sin embargo nótese que la identidad de Jacobi es un sustituto para la asociatividad, lo cual no ocurre en general para paréntesis en álgebras de Lie en espacios no reales.

Para concluir esta sección se considera una última definición del conmutador de Lie.

Definición 1.4.2. Se dice que dos campos vectoriales X, Y conmutan si su paréntesis de Lie es el campo vectorial cero $\hat{0}$.

1.4.1. Flujos y Derivada de Lie

Al asociar objetos geométricos sobre campos vectoriales suaves, se piensa en curvas integrales, o bien curvas suaves sobre las cuales, el cambio de posición en cada punto es igual al valor del campo vectorial en dicho punto. Una colección de curvas integrales en un campo vectorial dado sobre una variedad determina una familia de difeomorfismos, dicho conjunto es un *flujo*. [3, 9, 26, 31]

Proposición 1.4.3. Sea X un campo vectorial suave sobre una variedad suave M . Para cada punto $p \in M$ existe $\epsilon > 0$ y una curva suave $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ que es al menos una curva integral de X .

Si se considera que X y Y campos vectoriales, *generan* un flujo, utilizando la siguiente definición se generaliza el concepto de derivada de Lie aplicada a uno-formas.

Definición 1.4.4. Sea define a $\omega \in \Omega^1(M)$ a lo largo de $X \in \mathfrak{X}$ tal que, su derivada de Lie

$$\mathfrak{L}_X \omega \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((\sigma_\epsilon) * \omega|_{\sigma_\epsilon(x)} - \omega|_x) \quad (1.4.3)$$

si se toma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ esta expresión queda de la forma

$$\mathfrak{L}_X \omega = (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu - \omega_\nu \partial_\mu X^\nu) dx^\mu \quad (1.4.4)$$

nótese que al tomar a ω en x en (1.4.3) con $(\sigma_\epsilon) * \omega|_{\sigma_\epsilon(x)} = \omega_\mu(x) dx^\mu + \epsilon [X^\nu(x) \partial_\nu \omega_\mu(x) + \partial_\mu X^\nu \omega_\nu(x)] dx^\mu$ implica (1.4.4).

Finalmente, la derivada de Lie para cualesquiera campo vectorial tiene las siguientes propiedades.

Corolario 1.4.5.[26] Sea M una variedad suave y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se cumplen las siguientes propiedades.

- (i) $\mathfrak{L}_X Y = -\mathfrak{L}_Y X$
- (ii) $\mathfrak{L}_X [Y, Z] = [\mathfrak{L}_X Y, Z] + [Y, \mathfrak{L}_X Z]$
- (iii) $\mathfrak{L}_X [X, Y] Z = [\mathfrak{L}_X \mathfrak{L}_Y Z - \mathfrak{L}_Y \mathfrak{L}_X Z]$
- (iv) Si $g \in C^\infty(M)$, entonces $\mathfrak{L}_X (gY) = (Xg)Y + g\mathfrak{L}_X Y$
- (v) Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $F_*(\mathfrak{L}_X Z) = \mathfrak{F}_* \mathfrak{X} F_* Z$

1.5. Derivada Exterior

En la sección (1.4.2.) se definió que la derivada de una 0-forma es una 1-forma al conmutar con pull-backs. Se puede extender esta definición para una n-forma arbitraria y construir así el concepto de derivada exterior, que convierte una n-forma en una n+1-forma tal que conmute

con un pull back.

Para definir un operador diferencial sobre formas suaves, esta extensión de la definición de función diferenciable considera a las n -formas como diferenciales de funciones, sin embargo, no todas estas funciones son diferenciales, se requiere, a partir de la condición de una función suave f tal que $\omega = df$, es decir ω es cerrada si y sólo si $d\omega = 0$ en cada carta. Se define, entonces para variedades suaves M, N tal que existe el operador diferencial $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$.

Teorema 1.5.1.[26] Sea M una variedad suave tal que, el operador de derivada $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ para toda k , llamado el operador de derivada exterior, que satisface las siguientes propiedades:

- (i) El operador es lineal sobre todo el campo.
- (ii) Si ω es una k -forma y η es una l -forma suave en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (en otro caso puede ser \mathbb{H}^n), entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad (1.5.1)$$

- (iii) Si V es un conjunto abierto de \mathbb{R}^m y W es un conjunto abierto de \mathbb{R}^m , entonces $F : V \rightarrow W$ es un mapeo suave y $\omega \in \Omega^k(W)$, entonces

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega) \quad (1.5.2)$$

- (iv) Para $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df es la derivada de f dada por $df(X) = Xf$

- (v) $f \circ d \equiv 0$

Para concretar las proposiciones de esta sección, el siguiente es un resultado fundamental para formas diferenciales exactas y cerradas.

Teorema 1.5.2. (Lema de Poincaré): Sea una variedad M tal que, para una r -forma $\bar{\omega} \in X(\Lambda_r TM^*)$ tal que $d\bar{\omega} = 0$ es una *forma cerrada*. Así mismo, sea $\lambda \in X(\Lambda_{r-1} TM^*)$ con $\hat{\omega} = d\lambda$. Tal que, una forma diferencial exacta es localmente cerrada.

1.5.1. Derivada de Lie de formas diferenciales

En la sección (1.4) se propuso a la derivada de Lie de campos tensoriales suaves, así mismo se plantea este argumento para formas diferenciales. Gracias a la construcción de la derivada exterior en la sección (1.5), se otorga una fórmula más eficaz para calcular derivadas de Lie y además obtener resultados significativos más profundos.

Definición 1.5.3.[6, 11, 26] Sea M una variedad suave, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sean $\omega, \eta \in \Omega^*(M)$. La derivada de Lie para formas:

$$\mathfrak{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathfrak{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathfrak{L}_X\eta) \quad (1.5.3)$$

En el siguiente teorema, se establece una formula para la derivada de Lie sobre formas; nótese que la generalización de la presente formula es el resultado de obtener operadores diferenciales sobre variedades pseudo Riemannianas y variedades complejas. Así mismo al utilizar la conexión ∇ definida en (1.6) que extiende la derivada covariante en un espacio suave sobre tensores y formas.

Así mismo se utiliza a \lrcorner como el operador de contracción, dicho operador define la *derivada interior* que es una “antiderivada” de orden -1

Teorema 1.5.4. (Fórmula mágica de Cartán)[26] Sobre una variedad suave M , para cualesquiera campo vectorial X y una forma diferencial suave ω , tal que $\mathfrak{L}_X du = d(\mathfrak{L}_X u) = d(Xu)$

$$\mathfrak{L}_X\omega = X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega) \quad (1.5.4)$$

1.6. Conexión y derivada covariante

Para definir la derivada covariante sobre vectores, es importante recalcar que esta es más que la derivada de sus componentes. Dado que derivar (1.2.6) puede escribirse como combinación lineal de su base, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \hat{e}_\mu \quad (1.6.1)$$

donde Γ son *los coeficientes de Christoffel*. Utilizando esta definición, se puede plantear la derivada sobre un vector \vec{V} tal que

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \hat{e}_\mu \quad (1.6.2)$$

sumando los índices mudos en el último término

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \hat{e}_\alpha \quad (1.6.3)$$

donde los términos dentro del parentesis son las componentes del campo vectorial. A este campo vectorial le es asociado un campo tensorial que mapea el vector base con un vector $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta}$. A dicho campo tensorial se le llama la *derivada covariante* y se denota $\nabla \vec{v}$. [47] Más adelante se da una explicación física relevante del concepto de la conexión de Christoffel

1.6.1. Conexión y transporte paralelo en una variedad Pseudo-Riemanniana

En el contexto de la relatividad general, la métrica inspirada en el espacio de Minkowsky no es una métrica Riemanniana, puesto que el producto interno no es positivo definido. Sin embargo, uno de los puntos clave en las variedades pseudo-Riemannianas, como es el caso de la relatividad general, es su isomorfismo con el dual, lo cual requiere de variedades de dimensión finita. Dada esta correspondencia, para ambas variedades la siguiente definición es equivalente.

Definición 1.6.2. Una variedad pseudo-riemanniana (M, g) es una variedad real de dimensión finita dotada de un tensor simétrico $(0, 2)$ que induce una forma g simétrica, bilineal no-degenerada en $T_p M$. Esta definición es equivalente para una variedad Riemanniana. Es decir, una variedad Riemanniana es una variedad pseudo-riemanniana de signatura $(m, 0)$.

En este espacio se define el producto interno como una forma bilineal, llamado usualmente *métrica*. A su vez, la métrica define la *curvatura* de la variedad.

Una forma intuitiva de observar la conexión afín como resultado de encajar una métrica sobre una variedad, es apartir de un ejemplo [53] de un objeto en caída libre bajo la influencia únicamente de fuerzas gravitacionales. Supongamos que desde el sistema inercial de referencia o SIR en caída libre sus coordenadas estan dadas por ξ^α , su ecuación de movimiento con respecto a su tiempo propio τ es

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.6.4)$$

donde el tiempo propio $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$, claramente puede observarse que, dada su validez en un sistema de coordenadas cartesianas, es válido para cualesquier sistema tal que $d\tau^2 = -g_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$. Al colocarse en otro SIR en el laboratorio en coordenadas cartesianas,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad (1.6.5)$$

al derivar(1.6.5) y usando la definición (1.2.19), se obtiene la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.6.6)$$

y se observa en el segundo sumando la *conexión afín*, definida por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.6.7)$$

y del elemento de línea dado por el tiempo propio en un intervalo, el tensor métrico se puede escribir

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.6.8)$$

Es importante notar que al obtener valores del tensor métrico y de la conexión afín en un punto, este permite determinar sus coordenadas locales iniciales. Esto parece señalar que, en este ejemplo de caída libre el campo que actúa como una “fuerza” de tipo gravitacional es la conexión afín, y el intervalo de tiempo propio es determinado por el tensor métrico al incrustarse en una variedad, el cual actúa a su vez como un *potencial gravitacional*. Sin estos operadores, una variedad es sólo una colección de puntos arbitrarios.

Para relacionar el tensor métrico con la conexión afín, se puede tomar la ecuación (1.6.7) y al multiplicar por $\partial \xi^\beta / \partial x^\lambda$ se obtiene

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}. \quad (1.6.9)$$

Al tomar la derivada de(1.6.8) con respecto a x^λ y por (1.6.9)

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (1.6.10)$$

Resolviendo para la conexión afín

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{\kappa\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \quad (1.6.11)$$

y tomando la inversa de $g_{\kappa\nu}$ tal que $g^{\nu\sigma}g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma$, se obtiene

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right\}. \quad (1.6.12)$$

Al observar el cambio un campo vectorial \vec{V} a lo largo de una trayectoria, se dice que este es transportado paralelamente a lo largo de una curva. En este sentido, se puede definir el transporte paralelo a lo largo de la curva γ , es decir, si $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ (con λ el parámetro de la curva) es tangente a $(\gamma(t))$ valuado en el punto t sobre un SIR local, tal que \vec{V} sea constante a lo largo de $\gamma(t)$

$$\frac{d\vec{V}^\alpha}{d\lambda} = U^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = 0 \quad (1.6.13)$$

se tiene el caso de ser un invariante del SIR, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ esto si y sólo si el transporte paralelo de \vec{V} a lo largo de \vec{U}

$$\frac{d}{d\lambda}\vec{V} = \nabla_{\vec{U}}\vec{V} = 0. \quad (1.6.14)$$

Para una variedad pseudo-Riemanniana, se puede definir conexión simétrica entre la norma de un vector y si misma, y se dice que es invariante ante transporte paralelo; a esta se le conoce como la conexión de Levi-Civita, la cual es mutuamente una métrica libre de torsión.[9]

Al considerar el transporte paralelo de un vector tangente sobre el espacio Euclideo, la forma de dicha línea es una recta, en el caso de un espacio curvo esta línea es una *geodésica*. Se dice que \vec{U} es tangente a una geodésica si y sólo si

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0$$

i.e.

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.6.15)$$

es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden y λ es llamado el *parámetro afín*. Al definir el transporte paralelo de un vector a lo largo de una trayectoria cerrada tal que se observa como cambian las componentes del vector \vec{V} , a tal cambio se le conoce como

el tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (1.6.16)$$

Cabe señalar que el tensor de Riemann provee del conmutador de derivadas covariantes.

$$R(u, v)x = \nabla_u \nabla_v x - \nabla_v \nabla_u x - \nabla_{[u, v]}x \quad (1.6.17)$$

donde (1.6.17) es la primera de las *ecuaciones de estructura de Cartán*, la segunda viene dada como

$$T(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] \quad (1.6.18)$$

que es la *torsión* o la segunda ecuación de estructura de Cartán.

1.7. Conexión de espín

Al ampliar el concepto de conexión afín, se encuentra un panorama más general al tomar en cuenta cantidades sujetas a leyes de transformación que son invariantes absolutas si estas son consideradas sobre una extensión adecuada del espacio. Desde el punto de vista matemático, esta variedad F llamada *frame manifold* es definida como la colección todos los marcos de todos los puntos de la variedad M de dimensión n es decir, la dimensión de F es $(n + n^2)$. Al aplicar el concepto de tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de relatividad general[50] sobre la 4-variedad M , donde este tensor métrico es simétrico de segundo rango, consierando entonces que la geometría del espacio-tiempo se encuentra en el elemento de línea (1.3.1); con coordenadas locales x^{μ} , donde (1.3.1) define la distancia entre dos puntos. Así mismo, a dicha métrica se le puede dotar de un formalismo en el que la base de la variedad no sea coordenada, donde e^a se define como el conjunto de vectores base. De esta forma η describe al espacio tangente a la variedad, es decir si se toma el producto interno $e_a e_b = \eta_{ab}$. De esta forma, la métrica resulta

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab} \quad (1.7.1)$$

donde los objetos $e_{\mu}^a(x)$ son los *frame fields* o *vierbeins* en el contexto de física, ya que se requiere este concepto extendido de transporte paralelo e invarianza aplicada para fermiones en relatividad general. Utilizando como base para el espacio tangente [57] generado por las derivadas parciales de las coordenadas en cualesquier punto $e_{\mu} = \partial x^{\mu}$; adicionalmente, una

base para el dual del espacio tangente, es decir, el espacio cotangente $T_p^*M : dx^\mu$ cuyos elementos duales son uno-formas. Se puede considerar la combinación lineal tal que

$$\hat{e}_a = e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.7.2)$$

donde (1.7.2) se puede tomar como un SIR que preserva orientación bajo rotaciones [31]. Se pueden escribir sus condiciones de ortonormalidad como

$$e_a^\mu e_b^\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \quad (1.7.3)$$

finalmente se puede definir el siguiente producto interno

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (1.7.4)$$

Si se considera una transformación local (tipo Lorentz) de los vierbein o *campos vielbein* tal que

$$ds^2 = d\bar{s}^2 \quad (1.7.5)$$

y deje a la métrica invariante. Si

$$\begin{aligned} \eta_{ab} dx^a dx^b &= \eta_{cd} \Lambda_a^c \Lambda_b^d dx^a dx^b \\ \text{con } \eta_{ab} &= \eta_{cd} \Lambda_a^c \Lambda_b^d \\ \Rightarrow d\bar{x}^c &= \Lambda_a^c dx^a \quad d\bar{x}^d = \Lambda_b^d dx^b \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

al ser invariante local se puede ampliar su simetría como transformaciones coordenadas generales y rotaciones locales generalizadas. Nótese en los vierbein que los índices griegos μ, ν, \dots pueden ser superiores o inferiores. Se puede escribir

$$g_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \quad (1.7.7)$$

donde los objetos e_a^μ pueden usarse para convertir tensores espacio-temporales en tensores del espacio tangente; al tomar un vector V cualesquiera dado que es independiente de la base

$$V^\mu = V^a e_a^\mu \quad V^a = e_\mu^a V^\mu \quad (1.7.8)$$

de igual forma se pueden definir los vierbein inversos de e_μ^a como $\vec{\theta}^a$

$$\vec{\theta}^a = e_\mu^a dx^\mu \quad \text{que obedece} \quad \langle \vec{\theta}^a, \vec{e}_b \rangle = \delta_a^b \quad (1.7.9)$$

y (1.7.7) en términos de los vierbein inversos se escribe como $g = g_{ab} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{ab} \vec{\theta}^a \otimes \vec{\theta}^b$ dado que, al utilizar vierbein usuales e inversos es posible invertir índices de la base coordenada a índices de la base no-coordenada. Puede verse entonces, a los vierbein como si fuesen la “raíz cuadrada” de la métrica. [50, 57] Finalmente, si los vierbein están dados por (1.7.2), tiene asociado un paréntesis de Lie:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = C_{ab}^c \vec{e}_c \quad (1.7.10)$$

donde

$$C_{ab}^c(t) = e_\nu^c [e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu](t) \quad (1.7.11)$$

1.7.1. Derivada Covariante

Como se definió la derivada covariante en (1.6), ahora aplicada a vierbeins tal que dicha derivada sea un tensor espacio-temporal de tipo (0, 2).

Se define la derivada covariante para vectores y uno-formas sobre una base no coordenada:

$$\nabla_\mu X^a = \partial_\mu X^a + \omega_{\mu b}^a X^b \quad (1.7.12a)$$

$$\nabla_\mu X_a = \partial_\mu X_a - \omega_{\mu b}^a X^b. \quad (1.7.12b)$$

El desarrollo de las definiciones en (1.6) aplica de igual forma para la conexión de espín, se tiene como propiedad la *compatibilidad métrica* $\nabla g = 0$, puede demostrarse fácilmente para este caso, obteniendo el llamado “postulado de las tétradas”

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - e_\sigma^a \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b = 0 \quad (1.7.13)$$

puesto que

$$\nabla_\mu e_\nu^a = 0 \quad , \quad \nabla_\mu \eta_{ab} = 0 \quad (1.7.14)$$

para construir la conexión afín sobre una base no-coordenada, se define la *conexión de espín* $\omega_{\mu b}^a$, con el fin de obtener las derivadas covariantes de los espinores. Se reemplazan así los coeficientes de la conexión afín por aquellos de la conexión de espín; la conexión de espín en términos de la conexión afín:

$$\omega_{\mu b}^a = e_{\nu}^a e_b^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - e_b^{\lambda} \partial_{\mu} e_{\lambda}^a. \quad (1.7.15)$$

y escribiendo la segunda en términos de la primera

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = e_a^{\nu} \partial_{\mu} e_{\lambda}^a + e_a^{\nu} e_{\lambda}^b \omega_{\mu b}^a \quad (1.7.16)$$

para cualquier base no-coordenada de 1-formas $\vec{\theta}^a = e_{\mu}^a dx^{\mu}$ se define la conexión de espín de 1-formas como

$$\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a dx^{\mu}. \quad (1.7.17)$$

Se debe recordar que una conexión métrica a grandes rasgos consiste en dos partes, donde la parte simétrica está dada por los símbolos de Christoffel y la parte antisimétrica define la *torsión*

$$T^a \equiv de^a + \omega_b^a \wedge e^b \equiv \frac{1}{2} T_b^a e^b \wedge e^c \quad (1.7.18)$$

en esta nueva notación, Elie Cartan [59] instó al desuso de escribir la torsión explícitamente en términos de la base coordenada, pues al uso excesivo de índices le llamó “libertinaje de índices”; en (1.7.18); la nueva notación, sin embargo, también puede prestarse a confusión, así que hay dos alternativas: o se puede confundir operando índices en términos de la base coordenada o se puede usar la notación de Cartán y prestarse a confusión. Tomando como hipótesis (1.7.13) y escribiendo explícitamente la torsión en términos de la base coordenada

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\lambda} &= e_a^{\lambda} T_{\mu\nu}^a \\ &= e_a^{\lambda} (\partial_{\mu} e_{\nu}^a - \partial_{\nu} e_{\mu}^a + \omega_{\mu b}^a e_{\nu}^b - \omega_{\nu b}^a e_{\mu}^b) \end{aligned} \quad (1.7.18b)$$

al desarrollar (1.7.18b) y dado que la conexión afín es

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = e_a^{\lambda} \partial_{\mu} e_{\nu}^a + e_a^{\lambda} e_{\nu}^b \omega_{\mu b}^a \quad (1.7.19)$$

se reduce la torsión como

$$\Rightarrow T_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (1.7.20)$$

notese que la torsión en (1.7.20) es cero si (1.7.19) es simétrica en sus índices inferiores.

1.7.2. Estructura de Cartan e identidades de Bianchi

De (1.7.20) se encuentra la primer ecuación de estructura de Cartan, de igual forma, al tomar la conexión de uno-forma (1.7.17) se define la curvatura como la 2-forma

$$\begin{aligned} R_b^a &= d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \\ &= \frac{1}{2} R_{bcd}^a e^c \wedge e^d \end{aligned} \quad (1.7.21)$$

finalmente si se toma la derivada covariante de (1.7.16) y de (1.7.17) las ecuaciones que se obtienen

$$dT^a + \omega_b^a \wedge T^b = R_b^a \wedge e^b \quad (1.7.22)$$

$$dR_b^a + \omega_c^a \wedge R_b^c - R_c^a \wedge \omega_b^c = 0 \quad (1.7.23)$$

son las dos identidades de Bianchi para una base no coordinada, equivalentes a (1.6.16) y (1.6.17) para una base coordinada. Estas identidades son permutaciones cíclicas de derivadas covariantes, así mismo al ser un álgebra de Lie, cumplen con la identidad de Jacobi, como cualquier conexión.

1.8. La Ecuación de Dirac

Al estudiar a los espinores en el contexto de supersimetría es posible determinar la clase de campo fermiónico al tomar la ecuación de Dirac, dicho campo debe poseer cuatro grados de libertad, esto debido a la naturaleza del espín descrita por Pauli. Para este contexto se consideran estos grados de libertad en diversas representaciones: campos fermiónicos de Dirac, Weyl y Majorana. [1]

En la descripción de espinores de Dirac, se forman campos espinoriales de cuatro componentes, para este fin una visualización sencilla es tomar campos espinoriales de dos componentes en dos componentes para obtener los cuatro grados de libertad, cosa que ocurre

en Weyl (dos campos espinoriales reales y sus correspondientes complejos); de igual forma es posible obtener dos campos espinoriales de dos componentes y, las otras dos restantes, al considerar sus antipartículas respectivas, cual es el caso de los campos de Majorana.

Dado que en la sección anterior se busco el definir campos espinoriales invariantes de norma, es decir, invariantes bajo transformaciones de Lorentz; en el contexto de altas energías, se puede tomar la ecuación de Dirac en el espacio de ímpetus

$$E\Psi = (\alpha \cdot P + \beta m)\Psi \quad (1.8.1)$$

utilizando unidades naturales, $c = \hbar = 1$. Adicionalmente las componentes

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son la representación de las matrices de Dirac en el contexto de altas energías. Igualmente $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ no son otra cosa que las matrices de Pauli de 2×2 . Si se escoge

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

con ψ y χ eigenestados de *helicidad* es decir, objetos de dos componentes con propiedades que bajo transformaciones de Lorentz están bien definidas. Del espinor de cuatro componentes de Dirac Ψ tal que, este sea invariante bajo transformaciones de Lorentz

$$\bar{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger\beta\Psi \quad (1.8.2)$$

para escribirlo en términos de objetos de dos componentes (Weyl) ψ y χ tal que sean invariantes de Lorentz

$$\psi^\dagger\chi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi$$

con esto en mente $\sigma^i = (1, \sigma)$, $\bar{\sigma}^i = (1, -\sigma)$ y se redefine entonces la matriz γ^i tal que sea invariante de Lorentz

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

notese que para los espinores de Dirac, se toma su representación irreducible, esto siguiendo las propiedades del álgebra de Clifford para espinores[46]

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} \equiv \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2\eta^{ij} I \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (1.8.3)$$

las cuales son 4 matrices e I la identidad. Nótese también que

$$\gamma^i \gamma^j = -\gamma^j \gamma^i \quad i \neq j \quad (1.8.4)$$

y además

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^k)^2 = -1 \quad , k = 1, 2, 3 \quad (1.8.5)$$

dado que $\psi^\dagger \sigma^i \psi$ y $\chi^\dagger \bar{\sigma}^i \chi$ se transforman como un 4-vector; se puede entonces reescribir la ecuación de Dirac en esta notación como

$$\sigma^i P_i \psi = m \chi$$

$$\bar{\sigma}^i P_i \chi = m \psi$$

donde el término $\sigma^i P_i$ convierte un objeto de tipo ψ en uno de tipo χ e igualmente, el término $\bar{\sigma}^i P_i$ convierte a un objeto tipo χ en uno de tipo ψ . Utilizando lo anterior, se reescribe la ecuación de Dirac como

$$\Psi(i\gamma^i \partial_i - m)\Psi = \psi^\dagger i\sigma^i \partial_i \psi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^i \partial_i \chi - m(\psi^\dagger \chi + \chi^\dagger \psi) \quad (1.8.6)$$

para dotar de una notación coordinada *ad hoc* a la notacion en gravedad general, se puede reescribir a los espinores ψ , ψ^\dagger o $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(n)}$ como

$$\begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \equiv i\sigma_2 \chi = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ -\chi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi^1 \equiv \chi_2 \quad \text{además} \quad \chi^2 \equiv -\chi_1$$

para observar sus cantidades invariantes se toma $\chi^{(1)}$ y formar $i\sigma_2\chi^{(1)}$ obteniéndose un espinor de tipo χ . De igual manera se puede definir el producto punto entre espinores de tipo $\chi^{(1)}$ con otro de tipo $\chi^{(2)} = \zeta$ tal que

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad (i\sigma_2\chi)^T \zeta$$

tal que, al ser invariante de Lorentz

$$(\chi^1\chi^2) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \chi^1\zeta_1 + \chi^2\zeta_2 = \chi^a\zeta_a$$

notese que la matriz $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ puede escribirse como $\epsilon^{\alpha\beta}$

donde $\epsilon^{\alpha\beta}$ es el tensor métrico y se redefine entonces el producto punto

$$\chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta$$

se puede reescribir $\epsilon_{\alpha\beta}$ intercambiando índices

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta. \quad (1.8.7)$$

1.8.1. Espinores sobre espacios curvos

Se ha visto a lo largo de este capítulo como definir objetos sobre una variedad, en particular interesa como transforma localmente un espinor ψ bajo Lorentz sobre un punto t es decir, si $\Lambda^a_b(t)$ es de Lorentz, transforma

$$\psi(t) \rightarrow \rho(\Lambda)\psi(t) \quad \bar{\psi}(t) \rightarrow \bar{\psi}(t)\rho(\Lambda)^{-1} \quad (1.8.8)$$

donde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ y $\rho(\Lambda)$ es la representación espinorial de la transformación. El fin es construir una acción que sea invariante, esto es, definir la derivada covariante de un vector

de Lorentz que transforme como un espinor

$$\nabla_a \psi \rightarrow \rho(\Lambda) \Lambda_a^b \nabla_b \psi \quad (1.8.9)$$

y el Lagrangiano invariante bajo esta transformación resulta

$$L = \bar{\psi} i \gamma^a \nabla_a \psi \quad (1.8.10)$$

puede notarse además cómo transforma $e_a^\mu \psi$ bajo $\Lambda(t)$, es decir:

$$e_a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \Lambda_a^b e_b^\mu \partial_\mu \rho(\Lambda) \psi = \Lambda_a^b e_b^\mu [\rho(\Lambda) \partial_\mu \rho(\Lambda) \psi + \partial_\mu \rho(\Lambda) \psi] \quad (1.8.11)$$

tomando a la derivada covariante para obtener un objeto que satisfaga (1.8.10)

$$\nabla_a \psi = e_a^\mu [\partial_\mu + \Omega_\mu] \psi \quad (1.8.12)$$

tal objeto es Ω_μ tal que, debe satisfacer

$$\Omega_\mu \rightarrow \rho(\Lambda) \Omega_\mu \rho(\Lambda)^{-1} - \partial_\mu \rho(\Lambda) \rho(\Lambda)^{-1} \quad (1.8.13)$$

para mostrar a Ω_μ explícitamente se toma la transformación infinitesimal de Lorentz $\Lambda_a^b(t) = \delta_a^b + \varepsilon_a^b(t)$ tal que, el espinor transforme como

$$\psi \rightarrow \exp\left[\frac{1}{2} i \varepsilon^{ab} \xi_{ab}\right] \psi \cong \left[1 + \frac{1}{2} i \varepsilon^{ab} \xi_{ab}\right] \psi \quad (1.8.14)$$

donde $\xi_{ab} \equiv \frac{1}{4} i [\gamma_a, \gamma_b]$ es la representación espinorial de los generadores de transformación de Lorentz, la cual además esta satisface un álgebra de Lie [31]. Bajo esta transformación infinitesimal, el objeto Ω_μ

$$\begin{aligned} \Omega_\mu &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} i \varepsilon^{ab} \xi_{ab}\right) \Omega_\mu \left(1 - \frac{1}{2} i \varepsilon^{cd} \xi_{cd}\right) - \frac{1}{2} i \partial_\mu \varepsilon^{ab} \xi_{ab} \left(1 - \frac{1}{2} i \varepsilon^{cd} \xi_{cd}\right) \\ &= \Omega_\mu + \frac{1}{2} i \varepsilon^{ab} [\xi_{ab}, \Omega_\mu] - \frac{1}{2} i \partial_\mu \varepsilon^{ab} \xi_{ab} \end{aligned} \quad (1.8.15)$$

igualmente, la conexión uno-forma bajo la transformación infinitesimal de Lorentz

$$\omega^a_b \rightarrow \omega^a_b + \varepsilon^a_c \omega^c_b - \omega^a_c \varepsilon^c_b - d\varepsilon \omega^a_b \quad (1.8.16)$$

finalmente, se escribe explícitamente Ω_μ

$$\Omega_\mu \equiv \frac{1}{2} i e^a_\nu \nabla_\mu e^{b\nu} \xi_{ab} \quad (1.8.17)$$

tal que satisfaga la propiedad de transformación (1.8.10), i.e.

$$L \equiv \bar{\psi} i \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2} i \Gamma_\mu^{bc} \xi_{bc}) \psi \quad (1.8.18)$$

con (1.8.18) un Lagrangiano escalar bajo rotaciones locales de Lorentz y bajo cambios de coordenadas. Finalmente la acción escalar

$$S_\psi = \int_\mu d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} [i \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2} i \Gamma_\mu^{bc} \xi_{bc}) + m] \psi \quad (1.8.19)$$

Capítulo 2

Introducción a la dualidad norma/gravedad o correspondencia AdS/CFT.

En física, el concepto de dualidad está presente en muchos de sus más sorprendentes descubrimientos, por mencionar algunos, la dualidad electromagnética, que combina los campos eléctrico y magnético como una misma entidad; la dualidad onda partícula que revolucionó el concepto de partículas de luz, con las consideraciones previas que proponían a la luz como una onda. Una idea más general del concepto de dualidad es la descripción de dos teorías radicalmente distintas que resultan ser completamente equivalentes.

La esencia del concepto de dualidad radica en que se trata de interpretar las distintas manifestaciones de una sola teoría. La correspondencia holográfica o AdS/CFT describe uno de los descubrimientos más excitantes de la física teórica en las últimas décadas.

La correspondencia Anti-de Sitter/Teoría de campos conforme (AdS/CFT) fue propuesta por Juan Maldacena[27–29] en 1997 como una equivalencia proveniente de las propiedades en teorías de cuerdas (Teoría de cuerdas tipo IIB y D-Branas). Por un lado, el fondo de Anti-de Sitter, el cual es en si mismo, solución de teorías de cuerdas además de una teoría relevante de gravedad cuántica (QG); entonces se tiene en este espacio una teoría de cuerdas tipo IIB de $9+1$ dimensiones con gravedad; y por otro lado, se tiene una teoría cuántica de campos como la teoría Súper Yang-Mills de cuatro dimensiones sin gravedad. La conjetura de Maldacena establece que ambas teorías, que aparentemente poseen formulaciones distintas, resultan ser

completamente equivalentes.

Para describir aspectos generales de la correspondencia holográfica, se presenta un esbozo heurístico con la finalidad de hacer más clara la asociación de teorías con y sin gravedad; a lo largo de este capítulo se construirá una idea general de como se pueden tomar los desarrollos en teorías sin gravedad como teorías de campos (como QCD)[30] y en teorías con gravedad como las teorías de cuerdas y súper cuerdas[42] cuya fusión nos permite encontrar una herramienta para entender el comportamiento de ciertas teorías de norma.

2.1. La conjetura de Maldacena: Dualidad norma/gravedad

Su esencia matemática se denomina *la conjetura de Maldacena*[29], la cual concierne a la equivalencia en teorías de cuerdas sobre el fondo $AdS_5 \times S^5$ de dimensión $9 + 1$ y una teoría de campos conforme -que puede generalizarse a $D = d - 1$ -, es decir, una teoría de campo que resulte invariante ante transformaciones de norma como Súper Yang Mills en $3 + 1$ dimensiones. La conjetura AdS/CFT era inesperada pues sus atributos describen con exactitud teorías sin gravedad de la misma forma que teorías con gravedad. Adicionalmente a la conjetura se le relacionan problemas en la teoría de SYM a las preguntas en la teoría clásica de súper cuerdas y súper gravedad.

Sin embargo, en el sentido matemático continua siendo una conjetura[41], pues se desconoce a un nivel riguroso por qué ocurre esta dualidad; esto se debe a que este descubrimiento se basa en las propiedades de una teoría de cuerdas la cual no ha sido corroborada del todo, pues tiene aun problemas para describir una teoría interactuante fuertemente acoplada; así mismo, de lado de la teoría de norma, esta no puede tener una expansión perturbativa; es por eso que se consideran modelos aproximados y más simples que no están del todo conectados a la realidad.

Al tomar estos modelos “de juguete”[14] y dando por sentado las teorías de cuerdas como ciertas, se puede encontrar en dicha dualidad una aplicación muy eficiente en teorías de súper gravedad. Esto implica que la correspondencia no tiene las mismas ambiciones que una teoría de la gran unificación (GUT) o una descripción total de nuestro universo como la teoría de cuerdas M y sus hijas cercanas; esta dualidad es en sí una aplicación de la teoría.

El nombre de correspondencia AdS/CFT se atribuye a que los ejemplos más recurrentes involucran espacios Anti-de Sitter con teorías de campo conformes; es por esta razón que se

pueden estudiar soluciones de agujeros negros en fondos curvos como AdS, pues esta es la solución más sencilla a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa. Sin embargo, en un aspecto más general, se denomina dualidad norma/cuerdas o norma/gravedad ya que teorías de gravedad resultan equivalentes a teorías de norma. Así mismo se refiere como “holografía” ya que por un lado, en la teoría con gravedad se tiene un espacio de dimensión $d + 1$ cuya información puede encontrarse en un espacio de menor dimensión, haciendo referencia a un holograma, como una fotografía, que recava toda la información de un cuerpo tridimensional en otro de una dimensión menor.

La correspondencia AdS/CFT postula que toda la física sobre un espacio-tiempo que es asintóticamente Anti-de Sitter puede ser descrita por una teoría cuántica de campos local que vive en la frontera.

Si se considera que la conjetura es cierta, esto implicaría grandes consecuencias al obtener información no perturbativa en una CFT; en particular para N grandes -Es decir, para un número grande de super simetrías-[38]; así mismo juega un rol importante en formulaciones no perturbativas en teorías de cuerdas M . Este límite para N grande o límite de t’Hooft es crucial, dado que la correspondencia AdS/CFT con gravedad ocurre cuando una teoría de norma no-abeliana tiene un número grande de grados de libertad.

De este límite N , -o límite para un número grande de grados de libertad- para las teorías de norma en general, nos regresa una teoría de cuerdas, aunque esta no sea bien conocida; sin embargo, si se organizan los diagramas de Feynman de la teoría -que pueden dibujarse en una esfera o toro-, al incrementar el género en la superficie se tiene una potencia adicional de $1/N^2$ [29, 54]. Esto parece una teoría de cuerdas con una cuerda de acoplamiento $g_s \sim 1/N$, es decir, estas pueden ser cuerdas del bulto. El bulto puede considerarse como un “hiperespacio”, es decir, un universo de dimensión menor el cual está restringido a una brana dentro de un espacio de mayor dimensión.

2.2. El fondo AdS

Como se mencionó en la sección anterior, la conjetura de Maldacena concierne a la teoría de cuerdas o una teoría M en algunos fondos de la forma $AdS_d \times M_{D-d}$, con AdS y M un espacio de compactificación de $D - d$ dimensiones (tomando $D = 10$ para cuerdas y $D = 11$ para la teoría M)[38].

El fondo se elige al establecer el flujo de la intensidad del campo como una forma diferencial.

La conjetura establece que la teoría de cuerdas o la teoría M en el fondo es matemáticamente equivalente o dual a una teoría ordinaria pero conforme en el espacio tiempo de $d - 1$ dimensiones que se interpreta como la frontera de AdS_d .

2.2.1. AdS como solución a las ecuaciones de Einstein.

De la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica [38]

$$S = -s \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{|g|} (R + \Lambda). \quad (2.2.1)$$

De Sitter y Anti De Sitter son soluciones de la ecuación de Einstein en el vacío. Dichas ecuaciones están dadas por

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \\ &= 8\pi G T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

con $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.2.3)$$

De esta manera, se observa que en espacios de Einstein con curvatura constante W

$$R = \frac{W}{2 - W} \Lambda \quad (2.2.4)$$

de donde

$$R_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{2 - W} g_{\mu\nu} \quad (2.2.5)$$

el tensor de Ricci es proporcional al tensor métrico. Para una simetría maximal

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{W(W - 1)} (g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) \quad (2.2.6)$$

con $R = 0$. Son espacios para esferas S_D y espacios de Sitter y Anti de Sitter con D dimensiones. Como se ha mencionado previamente, la constante cosmológica $\Lambda > 0$ para AdS.

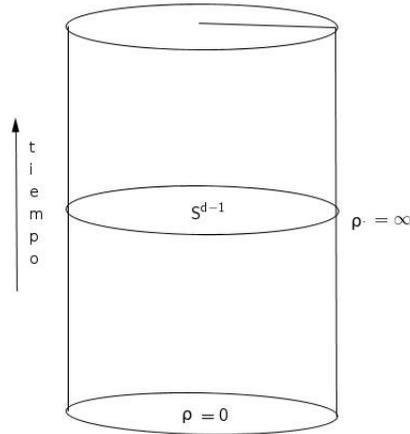


Figura 2.1: “Diagrama de Penrose del fondo Anti de Sitter”

2.2.2. El espacio-tiempo de Anti de Sitter

Como se ha mencionado en la sección (2.2.1.) -hasta el cansancio- AdS es un espacio-tiempo simétrico con curvatura negativa y solución de las ecuaciones de Einstein con constante Λ negativa. [24]

A esta variedad se le puede describir en un sistema de coordenadas globales

$$dS^2 = \frac{1}{\cos^2(\rho/R)}(dt^2 - d\rho^2 - \sin^2(\frac{\rho}{R})d\Omega_{d-1}^2) \quad (2.2.7)$$

para el espacio AdS se requiere definir una escala particular de distancia y curvatura. La coordenada radial $\rho \in [0, \pi/2]$ con $t \in (-\infty, \infty)$ siendo las coordenadas angulares Ω las cuales cubren una esfera de dimensión $(d - 1)$.

Para tener un esbozo detallado de esta idea, un ejemplo sencillo de esta situación, propuesto en [24], si la dimensión es $d = 3$ la métrica puede escribirse como

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.2.8)$$

para cubrir la esfera S^2 . Nótese que ρ va de un rango infinito, siendo la distancia espacial que, para cualesquiera $\rho < \pi/2$ de $\pi/2$ diverge, entonces AdS_{d+q} no es compacta. En coordenadas globales se puede colocar a AdS en el interior de un cilindro; observese que en tales

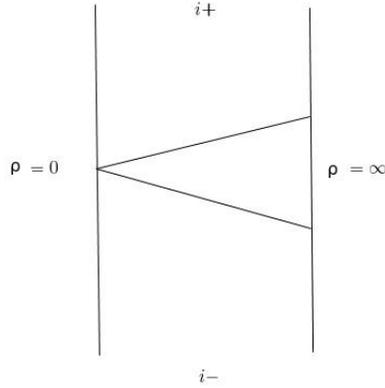


Figura 2.2: “Otro posible diagrama de AdS que muestra el comportamiento en la frontera”

coordenadas hay una simetría de traslación en el tiempo, además de simetrías de rotaciones $SO(d)$ en la esfera.[29]

De la ecuación (2.2.7) La métrica AdS en coordenadas globales puede escribirse, entonces como [28]

$$dS_{AdS_{d+1}}^2 = L^2[-(\rho^2 + 1)dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 + 1} + \rho^2 d\Omega_{d-1}^2] \quad (2.2.9)$$

con L el radio de curvatura. Observese que cerca de $\rho = 0$ parece localmente un espacio plano. Si se considera una partícula masiva moviéndose en un potencial gravitacional g_{00} , dicha partícula está sujeta a una interacción del orden $v \sim \sqrt{-g_{00}}$. Si dicha partícula es colocada en reposo, para valores grandes de ρ esta se moverá como una partícula en un potencial armónico. De esta forma, el potencial gravitacional confina a las partículas al rededor del origen.

Una partícula masiva con energía finita no puede escapar del infinito $\rho = \infty$. Por otro lado, una geodésica sin masa puede ir al infinito y regresar en un tiempo finito.

De la métrica en la ecuación (2.2.9), se elimina el factor $(1 + \rho^2)$ definiendo una nueva coordenada radial X tal que

$$dX = \frac{d\rho}{\rho^2 + 1} \quad (2.2.10)$$

lo que implica que la métrica en (2.2.9) tiene ahora un rango finito. De las figuras (1.1) y (1.2) se puede observar que el fondo AdS es un cilindro cuya dirección vertical es una representación temporal; con la frontera en $\rho = \infty$ ahora finita localmente en X . Siendo S^{d-1} la sección espacial de la superficie del cilindro. Tal métrica posee simetrías $R \times SO(d)$. Sin embargo

AdS contiene aun más simetrías, en general su grupo de simetría completo es $SO(2, d)$; el resto de estas pueden ponerse en manifiesto observando este fondo como el hiperboloide

$$-Y_{-1}^2 - Y_0^2 + Y_1^2 + \dots + Y_d^2 = -L^2 \quad (2.2.11)$$

en $R^{2,d}$.

Esto implica que en este hiperboloide, la dirección del tiempo es compacta. Es decir, que el espacio-tiempo poseé curvas cerradas de género tiempo que violan la causalidad. Sin embargo, en las aplicaciones físicas debe considerarse no compacto.

Teniendo esto en mente, Antti de Sitter se puede desenrollar, ya que, si se toma un espacio tridimensional con coordenadas (x, y, z) , este puede desenrollarse como una recta, siendo el espacio entero simplemente conexo, es decir, se puede contraer en un punto sin abandonar la superficie.

Las simetrías mencionadas en AdS son muy interesantes, por ejemplo, volviendo a la geodésica con masa en un espacio localmente plano, al aplicarse un boost en un sistema en reposo sobre una partícula con una trayectoria harmónica tal que, el nuevo sistema esté ahora en reposo. Esto quiere decir que no hay un “centro” en AdS.

Para esta descripción, se escoge un Hamiltoniano, por ejemplo[29] uno que involucre a t en LS^2 , así se escoje este “origen” y de esta manera es posible encontrar una descripción a bajas energías de una partícula en este nuevo origen. En estas coordenadas la métrica en (2.2.9) se vuelve

$$dS^2 = L^2 \frac{-dt^2 + dx_{d-1}^2 + dz^2}{\rho^2} \quad (2.2.12)$$

Observese que la frontera está en $\rho = 0$, donde se tienen cortes que muestran al grupo de simetrías de Poincaré de $d - 1$ dimensiones espaciales y el tiempo. Si al tiempo se le toma como $t \rightarrow iY_0$ se obtiene el espacio hiperboloide de AdS o bien, el espacio euclidiano. En la sección (2.2.5.) se hace énfasis en este caso.

Siendo entonces que, estas coordenadas cubren sólo una porción de la métrica inicial, debido a que el horizonte se encuentra en $\rho = \infty$. Estas coordenadas son convenientes cuando se considera una teoría conforme de campos CFT dentro del espacio de Minkowsky.

Se hace hincapie en las soluciones sobre estos espacios localmente planos, pues dentro de la teoría AdS/CFT la física en este espaciotiempo, asintóticamente AdS, puede ser descrita por una QFT local en la frontera, dado que las simetrías de AdS actúan en la frontera;

dichas simetrías envían puntos en la frontera a puntos en la frontera. De esta forma, la teoría cuántica de campos es una teoría conforme.

Puede verse además que de la métrica en (2.2.12) el reescalamiento de simetrías traslada a una dilatación de la frontera, y dado que una teoría en la frontera es invariante de escala, es un invariante conforme.

La limitante de este hallazgo se debe a que esta métrica es necesariamente no dinámica, por localizarse en la frontera.

2.2.3. Agujeros negros con geometrías AdS en el horizonte.

Los agujeros negros en cuestión tienen un horizonte cercano con AdS, debido a las propiedades inusuales de este espacio, como el tener un infinito espacial en la frontera. Parece contradictorio comparar soluciones en cuerpos con fuerte atracción gravitacional a la par de objetos cuánticos. En medio de esta construcción, se menciona de forma insistente la amplitud de una teoría de la gravedad cuántica; pues la fuerza gravitacional es una fuerza de largo alcance (sin masa, de espín entero), lo cual no ocurre en gravedad cuántica pues es lo suficientemente débil para medirse; es en altas energías (10^{19} GeV), donde la física cambia radicalmente a una escala de energía crítica. [24, 54]

Tal es el caso con la teoría electromagnética o QCD, ya que se encuentran partículas fuertemente interactuantes, donde la gravedad difiere cualitativamente. En este punto, se tratan de resolver distancias del orden de la longitud de planck ($l_{Pl} \sim 10^{-35}m$) requiriéndose energías del orden de la masa de Planck. Nótese que a este punto \hbar/l_{Pl} es donde comienzan los agujeros negros.

Parecía evidente el proceder con la correspondencia AdS/CFT. La forma clásica proviene de la termodinámica de los agujeros negros, en particular la entropía del agujero negro $S_{BH} = A/4l_{Pl}^2$ la cual es proporcional a su área superficial y no a su volumen. Esto implica que la cantidad de información existente en cualquier región del espacio-tiempo es proporcional a su área superficial.

Otra idea relevante es que, a distancias cortas, el espacio tiempo no es considerado pues no se puede obtener información del bulto, la información se localiza exclusivamente en la frontera.

Además, se considera que la energía gravitacional no está bien definida localmente, en el

caso de colocarla en el infinito, esta sí puede medirse, aunque localmente.

Dado que la energía del sistema puede representarse como el Hamiltoniano, se debe considerar a dicho hamiltoniano en la frontera al infinito para teorías gravitacionales.

2.2.4. La métrica AdS_{n+1}

La forma general de la métrica AdS puede verse en (2.2.7) y (2.2.9); es muy práctico mencionar el caso de $n + 1$, como subvariedad con un espacio pseudo euclidiano incrustado, de dimension $n + 2$ con coordenadas $Y^a = (y^0, y^1, \dots, y^{n+1})$ y una métrica $\eta_{ab} = \text{diag}(+, -, -, \dots, -, +)$ cuya longitud al cuadrado[4]

$$y^2 \equiv (y_0^2) + (y_{n+1})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \quad (2.2.13)$$

la cual se preserva por el subgrupo de Lorentz $SO(2, n)$

Para AdS_{n+1} se considera el espacio de Minkowski de $n + 1$ dimensiones, siendo la teoría invariante bajo el grupo de Poincaré, el cual, tiene dimensión $d = n + 1$ para traslaciones y $(1/2)n(n + 1)$ dimensiones adicionales para las transformaciones de Lorentz. Siendo en total $d = (1/2)(n + 1)(n + 2)$.

De hecho, el grupo de Poincaré es el grupo de isometría de un espacio plano; espacios con intervalos invariantes y así mismo cuadráticos son preservados por este grupo. De esta forma se obtiene al subespacio definido por AdS como $SO(2, n)$

En la sección (2.3.1.) se retomará el caso AdS_{n+1} para analizar sus isometrías en el grupo conforme.

Se tiene que la métrica en AdS_{n+1} pertenece al espacio incrustado tal que el grupo $SO(2, n)$ es invariante. Las teorías cuánticas en este espacio-tiempo también poseen invarianza bajo este grupo. La invarianza de grupo para teorías en AdS es muy grande, siendo así mismo para teorías en un espacio plano de la misma dimensión.

Maximizando la simetría, es decir, si AdS_{d+1} tiene un número maximal de simetrías espacio-temporales $d = (1/2)(n + 1)(n + 2)$, las cuales son equivalentes a un espaciotiempo plano de $d + 1$ dimensiones, con $d + 1$ dimensiones para traslaciones, d dimensiones para el boost y $(1/2)d(d - 1)$ dimensiones para rotaciones.

Para encontrar las simetrías de AdS, volviendo a las coordenadas globales, estas pueden

verse como solución de

$$X_a X^a \equiv X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^d (X_i)^2 = R^2 \quad (2.2.14)$$

donde el centro está en $\rho = 0$ y el infinito espacial se aproxima como $\rho \rightarrow \pi/2$

Nótese la aparición del radio R en AdS. Para mapear las coordenadas globales en X_a , se puede usar la ecuación $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ para el tiempo y $\sec^2 \rho = \tan^2 \rho + 1$, como

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cos t}{\cos \rho} = R \sec \rho \cos t \quad i = 1, \dots, n \\ X_{d+1} &= R \frac{\sin t}{\cos \rho} \\ X_i &= R \tan \rho \Omega_i \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

La ventaja de X_a recae en que todas las simetrías son rotaciones y boost triviales. En particular se tienen $1/2d(d-1)$ rotaciones alrededor de X_i con $1 \leq i \leq d$; adicionalmente se tiene una rotación entre las dimensiones X_0 y X_{d+1} , teniendo $2d$ boost que mezclan X_0 y X_{d+1} con X_i . Todas estas transformaciones pueden representarse por medio de

$$L_b^a = X^a \frac{\partial}{\partial X^b} - X^b \frac{\partial}{\partial X^a} \quad (2.2.16)$$

el cual genera al grupo $SO(2, d)$ de transformaciones lineales de X_a , dejando a la ecuación (2.2.14) invariante. Por otro lado, los generadores únicamente espaciales L_{ij} sólo generan rotaciones de Ω_d .

2.2.5. El parche de Poincaré

Existe un sistema coordenado de AdS, usado muy frecuentemente en la literatura y en mayor medida que las coordenadas globales, llamado *el parche de Poincaré* (PP). Este espacio no cubre a AdS en su totalidad, sin embargo puede extenderse -de una manera no trivial-; la razón de su extenso uso es debido a que hace manifiesto al subgrupo de Poincaré de d dimensiones el cual es un grupo conforme.

Tomando las coordenadas globales en (2.2.7) y las del parche de Poincaré

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cosh \tau}{\cos \rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 + r^2 + R^2}{z} \right) \\ X_{d+1} &= R \frac{\sin t}{\cos \rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 + r^2 - R^2}{z} \right) \\ X_i &= R \tan \rho \Omega_i \frac{R}{z} r_i \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

siendo r la coordenada espacial, cuya coordenada global es τ . Dado que z va de 0 a ∞ , es necesario que el signo de X_0 sea fijo; justo como en el caso euclideo. Si se estira el espacio, las dilataciones son generadas por

$$D = L_{0,d+1} = X \partial_z + \bar{r}_i \partial_{\bar{r}_i} \quad (2.2.18)$$

este operador actua en r al estirar el espacio. Esto puede observarse ya que $(z \partial_z + r_i \partial_{r_i}) X_i = 0$ y esto es

$$z \partial_z + \bar{r}_i \partial_{\bar{r}_i} = X^{d+1} \partial X^0 - X^0 \partial X^{d+1} \quad (2.2.19)$$

que es AdS euclidiano. Nótese que el caso euclidiano de AdS, cuyo grupo conforme es $SO(1, d+1)$ puede escribirse como

$$X_0^2 - \sum_i^{d+1} X_i^2 = R^2 \quad (2.2.20)$$

de la métrica en coordenadas globales en (2.2.7) hay un cambio de signo en el término dt^2 tal que los senos y cosenos en (2.2.15) se transforman en $\cos t \rightarrow \cosh(t)$ y $\sin(t) \rightarrow \sinh(t)$ y se obtienen las mismas coordenadas del parche de Poincaré en (2.2.17). La coordenada global temporal (τ) consiste en bolas fijas en el cilindro, de tal manera que sea τ constante. En contraste, la superficie z constante comienza en $r = 0$ en algún τ fijo con $\rho = 0$ y en $r \rightarrow \infty$ simultaneamente $\rho(r) \rightarrow \pi/2$ con $\tau \rightarrow \infty$.

Hay que señalar que las coordenadas globales en conjunto con las coordenadas euclideanas y el Parche de Poincaré cubren todo el espacio AdS.

Sin embargo esto no siempre ocurre, en el caso de un espaciotiempo de Lorentz, el parche de Poincaré sólo cubre una parte de AdS. El parche es constante en el tiempo. En general, las coordenadas globales pueden representarse por $SO(2) \times SO(d)$ que es un subgrupo del

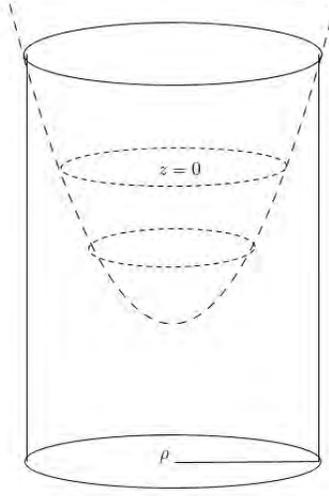


Figura 2.3: “Diagrama de Penrose del fondo Anti de Sitter en el parche de Poincaré. Nótese que la coordenada temporal se representa como bolas fijas en el cilindro.”

grupo conforme $SO(2, d)$, mientras que el parche de Poincaré hace manifiesto al grupo de Poincaré y sus dilataciones.

De (2.2.15) y (2.2.17) se pueden escribir las coordenadas de Lorentz como en el diagrama de la figura (1.4)

$$\begin{aligned}
 X_0 &= R \frac{\cos(\tau)}{\cos \rho} = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{R^2 + \bar{x}^2 - t^2}{z^2} \right) \\
 X_{d+1} &= R \frac{\sin(\tau)}{\cos \rho} = \frac{R}{z} (t) \\
 X_{i < d} &= R \tan \rho \Omega_i = \frac{R}{z} \bar{x}_i \\
 X_d &= R \tan \rho \Omega_d = \frac{z}{2} \left(1 - \frac{R^2 - \bar{x}^2 + t^2}{z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

donde \bar{x} es un vector espacial de dimensión $d - 1$. Así mismo las ecuaciones (2.2.21) pueden escribirse en términos de las coordenadas globales $(\tau, \rho, \hat{\Omega}_i)$ como

$$\begin{aligned}
 t &= R \frac{\sin(\tau)}{\cos \tau - \Omega_d \sin \rho} \\
 z &= R \frac{\cos(\rho)}{\cos \tau - \Omega_d \sin \rho}
 \end{aligned}$$

$$\bar{x}_i = R \frac{\Omega_i \sin \rho}{\cos \tau - \Omega_d \sin \rho} \quad (2.2.22)$$

de esta forma se cumple $t \rightarrow \pm\infty$ ya que sólo se tiene un rango finito en τ . De estas coordenadas se obtiene la métrica

$$dS^2 = \frac{1}{z^2} (dt^2 - dz^2 - \sum_{i=1}^{d-1} d\bar{x}_i^2) \quad (2.2.23)$$

donde z cubre sólo el rango $0 < z < \infty$. Se puede reescribir la ecuación (2.2.23) como

$$dS^2 = \frac{R^2}{z^2} (dz^2 + dx^2 - dt^2) \quad (2.2.24)$$

2.2.6. La frontera en AdS

Por medio de diagramas de Penrose, que son diagramas conformes o diagramas causales, se ha pretendido visualizar la estructura causal de este espaciotiempo. Para realizar dichos diagramas se distorsiona la geometría para mapear el espaciotiempo a una región finita, pero aun manteniendo las nociones espaciales, temporales y la distancia entre puntos. En particular, se utilizan los diagramas de Penrose para entender la estructura del infinito en la frontera. Para distorsionar su geometría sin afectar la causalidad, se puede multiplicar la métrica total por un factor de Weyl $f(x)$ enviando $g_{\mu\nu}(x)$ a $f(x)g_{\mu\nu}(x)$.

Al estudiar AdS/CFT y dadas las propiedades en la frontera del fondo M_d , se agrega el factor $1/\cos^2(\rho)$ el cual multiplica a la métrica para determinar el diagrama de Penrose de AdS. Se obtiene entonces la nueva métrica

$$dS^2 = dt^2 - d\rho^2 - \sin^2(\rho)d\Omega^2 \quad (2.2.25)$$

con $0 \leq \rho \leq \pi/2$. De esta forma sólo se puede dibujar un diagrama causal espacialmente finito que va de $-\infty$ a ∞ ; este hecho no se puede alterar debido a que los diagramas de luz se mueven a 45° en el plano $t - \rho$.

De esta manera, se cubre la variedad AdS enteramente, siendo la frontera el cilindro $R \times S^{d-1}$ que se obtiene al tomar el límite $\rho \rightarrow \pi/2$ en el infinito espacial, utilizando las coordenadas t y σ como frontera para parametrizar este cilindro.

Si se toman las coordenadas del PP

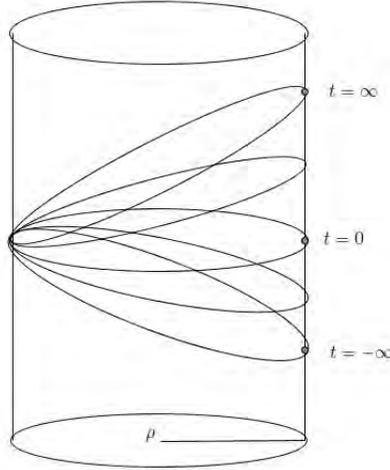


Figura 2.4: “Diagrama de Penrose del fondo Anti de Sitter Lorentziano”

$$dS^2 = \frac{1}{z^2}(dt^2 - dz^2 - \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2) \quad (2.2.26)$$

donde z cubre sólo $0 < z < \infty$

Al multiplicarse por un factor de Weyl z^2 se obtiene la métrica para un espaciotiempo plano de dimensión $d + 1$, donde su diagrama de Penrose, en forma de diamante, es el mismo que para medio espaciotiempo plano de Minkowski.

La superficie $z = 0$ es parte de la frontera M_d , debido a que el diagrama de Penrose termina de forma abrupta. De las ecuaciones (2.2.25) y (2.2.26) cuando $z \rightarrow 0$ corresponde a $\rho = \pi/2$ pero sólo en un único punto en la frontera del cilindro $\Omega_i = 0$ y $\tau = 0$ en coordenadas globales. Si se toma alguna combinación de \bar{x} y t al infinito se puede alcanzar el final del PP pero no la frontera del espaciotiempo. Sin embargo, se puede extender con libertad el pasado espaciotemporal hacia el infinito, alargándose en un tiempo finito.

Se debe recalcar que al tomar $z \rightarrow 0$ se encuentra una frontera *parcialmente distinta* para el PP en AdS. Esta frontera está parametrizada por (\bar{x}, t) y tiene la geometría de un espacio-tiempo $d - 1$ dimensional de Minkowsky.

Para tener clara la idea de la física en la frontera y la elección de un espacio como AdS,

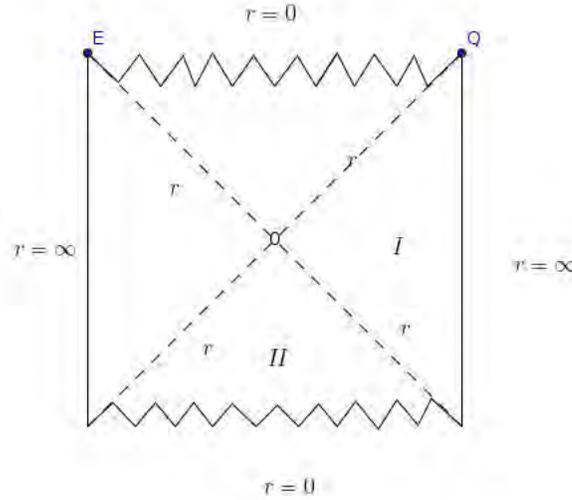


Figura 2.5: “Diagrama de Penrose de un diamante Euclideo”

se puede considerar la métrica euclidiana plana, tal que

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^3 d\Omega^2 \quad (2.2.27)$$

se pueden introducir coordenadas $2 \tan U = t + r$ y $2 \tan V = t - r$ tal que U y V vayan de $-\pi/2$ a $\pi/2$. En estas coordenadas la métrica se convierte

$$dS^2 = \frac{4dUdV}{\cos^2 U \cos^2 V} + (\tan U - \tan V)^2 d\Omega^2 \quad (2.2.28)$$

se añade entonces la transformación de Weyl al multiplicar por $\cos^2 U \cos^2 V$. En términos de las nuevas coordenadas $T = U + V$ y $R = U - V$ la métrica

$$dS^2 = dT^2 - dR^2 + \sin^2(R) d\Omega^2 \quad (2.2.29)$$

con T y R actuando sobre un diamante finito. Nótese que esta es la manera de derivar un diagrama de penrose (forma de diamante) para un espacio-tiempo plano. Siendo la frontera el “infinito conforme” cuyo diagrama es un diamante nulo. Existen puntos espaciales donde terminan geodésicas de tipo espacial y temporal, donde las superficies nulas son todos los rayos de luz aproximándose al infinito. Cabe mencionar que la frontera no es un buen espacio-

tiempo ya que no tiene métricas lorentzianas de direcciones del tipo temporal. Esto explica por qué no es trivial encontrar una descripción holográfica del espaciotiempo; dado esto, la QFT tiene que vivir en un espacio-tiempo exótico.

2.3. Teorías de Campo Conformes CFT

En la sección (2.2) se planteó un panorama general del fondo AdS, haciendo énfasis en su dualidad gravitacional, comparando las soluciones de agujeros negros con la entropía de una CFT en la frontera. Se ha descrito que la frontera M_d de AdS_{d+1} es de hecho una copia del espacio de dimensión d de Minkowski con puntos al infinito; cuyo grupo de simetría actúa en la frontera como el grupo conforme.[29, 54]

Sin embargo, al considerar las teorías de campo conformes en general, aun sin su dual gravitacional, se pueden realizar mapeos entre estados del cilindro $R \times S^{d-1}$ y operadores en el plano R^d . Siendo la dimensión del operador igual a la energía correspondiente de dicho operador. Así mismo, la dimensión del escalamiento nos da la información de cómo actúa el operador bajo transformaciones de escala.

La acción de AdS/CFT refiere que, a un estado de la teoría de campo conforme dentro del cilindro le corresponde una teoría del bulto en coordenadas globales.

Si se desea una teoría del bulto débilmente acoplada, se requiere que la teoría de campos conforme tenga una gran cantidad de campos. Una propiedad importante para una teoría débilmente acoplada es la existencia de una estructura del espacio de Fock dentro del espacio de Hilbert.

Sus energías son proporcionales -para pequeñas correcciones- a la suma de energías de cada partícula. Por otro lado, al considerar a la CFT dual, esta tiene una estructura similar al estar basada en teorías de norma para N grandes.

Una teoría de norma con N muy grande está basada en los grupos de simetría $SU(N)$ y $U(N)$ con campos en su representación adjunta. En este caso se pueden formar operadores invariantes de norma, tomando las trazas, así como los productos de estas, de sus campos fundamentales. Dado que son operadores locales, los campos pueden ser evaluados en un mismo punto del espacio-tiempo.

Dado que las simetrías en ambos casos son las mismas, se pueden dividir los estados y operadores, de acuerdo a sus leyes de conservación bajo su grupo conforme. Estas representa-

ciones están caracterizadas por el espín del operador y su dimensión de escalamiento.

2.3.1. Las simetrías conformes

Dado que, $SO(2, d)$ actúa en AdS_{d+1} como el grupo de simetrías ordinarias y en la frontera M_d como el grupo de simetrías conformes, esto implicaría que hay dos caminos para obtener una teoría física con esta simetría, por un lado, una teoría de campo conforme en la frontera M_d y por el otro, una teoría de campo relativista con o sin gravedad en AdS_{d+1} [54].

De la sección (2.2.4.) al tomar la ecuación (2.2.13) con una longitud al cuadrado

$$Y^2 \equiv (Y^0)^2 + (Y^{n+1})^2 - \sum_i^n (Y^i)^2 \quad (2.3.1)$$

la cual se preserva por el subgrupo Lorentziano $SO(2, n)$ que actúa como

$$Y^a \rightarrow Y'^a = \Lambda_b^a Y^b \quad \Lambda_b^a \in SO(2, n) \quad (2.3.2)$$

de donde se puede considerar esta teoría, localmente Minkowsky de dimensión $n + 1$, invariante bajo el grupo de Poincaré. Siendo el grupo de Poincaré el grupo de isometría de un espacio plano, es decir, que si se toman intervalos cuadráticos como en (2.3.1), estos son preservados por el grupo de Poincaré [38].

Si se considera una subvariedad de AdS cuadrática, como $Y^2 = b^2 = \text{constante}$ y se toman dos puntos cualesquiera y_0^a y dy_1^a cuya imagen correspondiente $y_0'^a$ y $dy_1'^a$ bajo la transformación de $SO(2, n)$ de $y^a \rightarrow y'^a = \Lambda_b^a y^b$. En particular, al tomarse el producto $dy_1 \cdot dy_2 = dy_1' \cdot dy_2'$ donde para cualesquiera vectores en el espacio seudoeuclidiano de dimensión $n + 2$

$$X \cdot Y \equiv \eta_{ab} X^a Y^b \quad (2.3.3)$$

donde los puntos $dy_1, dy_1', dy_2, dy_2' \in AdS_{n+1}$ esto implica que la métrica deja invariante a $SO(2, n)$

2.3.2. Equivalencia de escalamiento

Al tomar esta equivalencia cuadrática, descrita por coordenadas u, v, x^1, \dots, x^d , que obedece la ecuación

$$uv - \sum_{i,j} \eta_{ij} x^i x^j = 0 \quad (2.3.4)$$

sujeta a distintas equivalencias de escalas, como $u \rightarrow su, v \rightarrow sv, x^i \rightarrow sx^i$, con $s \neq 0 \in \mathbb{R}$. En (2.3.4) η_{ij} es la métrica de Lorentz con signatura $- + + \dots + ..$. Siendo (2.3.4) una variedad que admite la acción del grupo $SO(2, d)$ que preserva esta forma cuadrática. La compactificación de (2.3.4) describe la compactificación del espacio de Minkowski, esto puede verse al tomar $v \neq 0$, dado esto se usa la relación de reescalamiento para $v = 1$, después de que se resuelve ecuación para u . Esto permite que se dejen fijas las coordenadas espaciales estándar de Minkowski conteniendo además puntos al infinito en $v = 0$. Dicha compactificación es, topológicamente hablando, $S^1 \times S^{d-1}/Z_2$ donde Z_2 actúa como una rotación, ya que, al tomar $u = a + b$ y $v = a - b$ la ecuación se vuelve

$$a_1^2 + a_2^2 = \sum_{j=1}^d y_j^2 \quad (2.3.5)$$

escalando sólo s positivas, teniendo así un mapeo único que es copia de $S^1 \times S^{d-1}$; escalando entonces con $s = -1$ se obtiene $S^1 \times S^{d-1}/Z_2$. Teniendo así mismo curvas del tipo temporal cerradas; sin embargo, se prefiere reemplazar estas características por una cubierta universal que es topológicamente $S^{d-1} \times R$ donde R puede verse como la dirección temporal.

Como se ha mencionado previamente, grupo de isometría $SO(2, n), (SO(1, n + 1))$ actúa en la frontera como el grupo conforme actuando sobre un espacio euclidiano de Minkowsky. Para demostrar que la acción de $SO(1, n + 1)$ en la frontera no da transformaciones conformes, se puede tomar un punto en AdS_{n+1} como (u, v, \bar{y}) con

$$uv - \bar{y}^2 = b^2 \quad (2.3.6)$$

es mapeada por $SO(1, n + 1)$ a (u', v', \bar{y}') como

$$\Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

donde $\Lambda \in SO(1, n + 1)$ i.e. Λ preserva la norma $uv - \bar{y}^2$.

2.3.3. Álgebra conforme

Al considerar al espacio Euclideo de dimensión n , E^n cuyo grupo conforme es $SO(1, n + 1)$ [38], para generar dicho espacio se debe contar con cierto número de generadores, los cuales son equivalentes al número de matrices linealmente independientes y antisimétricas, siendo la dimensión del espacio $SO(1, n + 1) = (1/2)(n + 2)(n + 1)$. Comparándolo con el grupo de Poincaré de dimensión n , con n generadores de traslación y $1/2n(n - 1)$ generadores de rotación, la dimensión de la versión euclidea de Poincaré es igual a $(1/2)(n)(n + 1)$, cuya diferencia es $(n + 1)$. Agregando posibles dilataciones adicionales [38]

$$\bar{x} \rightarrow \lambda x \quad , x \in \mathbb{R} \quad (2.3.6)$$

que dan un generador, y finalmente las transformaciones conformes espaciales $\bar{x} \rightarrow \bar{x}'$ tal que

$$\frac{x'^{\mu}}{x'^2} = \frac{x^{\mu}}{x^2} + \alpha^{\mu} \quad (2.3.7)$$

Para el álgebra de Lie de un grupo conforme, se escoge una posible representación, la cual es en términos de campos escalares $\phi(x)$ la más simple, con x un n-tupla de coordenadas cartesianas. Siendo los generadores de:

(i) traslaciones: $P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$

(ii) rotaciones (Lorentz): $M_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - X_{\nu}\partial_{\mu}) = -(X_{\mu}P_{\nu} - X_{\nu}P_{\mu})$

(iii) dilataciones: $D = -X^{\mu}\partial_{\mu}$

(iv) Transformaciones especiales conformes: $K_{\mu} = i(2X_{\mu}X \cdot \partial - X^2\partial_{\mu}) = -i2X_{\mu}D + X^2P_{\mu}$

2.4. AdS/CFT como invariante de escala

Para concluir esta sección, se ha mostrado de forma introductoria la equivalencia entre teorías de gravedad cuántica en un espaciotiempo AdS que asintóticamente define una teoría de campo conforme. Así mismo, se dice que los espacios de Hilbert de ambas teorías son idénticos, i.e. $H_{CFT} = H_{AdS, QG}$ y todas sus simetrías globales, que son simetrías físicas pueden ser combinadas entre ambas teorías, en particular simetrías espaciotemporales representadas en isometrías de AdS_{d+1} , forman el grupo $SO(2, n)$ el cual actúa como el grupo conforme de

la CFT que así mismo contiene como subgrupo al grupo de Poincaré, el cual ejecuta todas las representaciones de ambas teorías.

Igualmente, si se tiene una QFT incompleta, o bien una *teoría de campo efectiva* de la gravedad, se obtiene entonces una teoría conforme aproximada. En cambio, al tener una teoría completa de la gravedad a nivel cuántico, o bien una completitud UV, conlleva al siguiente paso: Una QFT de bajas energías a una de altas energías en el régimen ultravioleta.

Al obtener dicha completez para una teoría efectiva, se obtiene la transición a una teoría de campo conforme exacta. Al colocarse en el fondo curvo, una QFT sin gravedad define teorías conformes, las cuales son no locales con operadores similares a los de QFT con correladores que son simétricos bajo el grupo conforme y obedecen la expansión de producto de operadores (OPE), aunque sin un operador de energía-momento local.

Así mismo, el descubrir que agujeros en AdS pueden verse como estados en una CFT, esto implica que se tiene una teoría invariante de escala.

Para distancias cortas -grandes energías- se puede analizar por medio de teorías UV como una teoría de campo efectiva. Esto depende de las simetrías, pues de estas se obtienen grandes consecuencias, dependiendo de cuales se preservan, rompen, si son anómalas o emergentes. La simetría espacio-temporal es esencial cuando se determina qué clase de teoría puede desarrollarse. En el caso de física de altas energías, se tienen QFT invariante conformes como invariantes de escala.

Esto, desde el punto de vista de la filosofía Wilsoniana [24] se puede ver como “el hacer un zoom” de una teoría a distancias cortas, hacia una a gran escala. A este proceso se le conoce como *renormalización*. De esta manera se puede ver a las QFT de una teoría UV a otra en el límite infrarrojo IR . Es posible que, para propagadores masivos en una teoría del bulto, al regular el área de la frontera de la CFT por el regulador infrarrojo δ , este juega el rol de un regulador UV. El flujo de renormalización ocurre al deformar la CFT en el límite UV, rompiendo simetrías conformes.

Teorías cuánticas de campos bien definidas pueden usarse como CFT, dado que se pueden ajustar o remover los cortes de una UV de una QFT al mandar energías infinitas a distancias iguales a cero. De esta forma se puede concluir que estudiando teorías de campos conformes equivaldría a estudiar teorías cuánticas de campos bien definidas.

Por otro lado, desde el punto de vista de la filosofía de Weinberg [24] se puede considerar a una QFT como el único medio de obtener una teoría invariante de Lorentz, unitaria y

local para dispersión de partículas. Para esta teoría de dispersión, se definen operadores de creación y aniquilación, los cuales son invariantes de grupo de Poincaré. Estos operadores están motivados por el principio de descomposición por acumulación, es decir, que cada proceso no afecta a las partículas interactuantes, en términos de la distancia. Así mismo, la matriz S es la responsable de fundamentar una teoría de la dispersión.

Sin embargo, la interacción cambia la definición de las simetrías de Poincaré, dado que estas simetrías no actúan de igual modo en el caso de partículas libres y partículas interactuantes. Estas simetrías deben contener estados asintóticos de la matriz S para describir partículas con una teoría invariante local.

Los conceptos de simetrías de Poincaré, el tener una teoría unitaria y el principio de descomposición por acumulación pueden, sin embargo, reemplazarse por simetrías conformes, unitariedad y simetrías cruzadas. De esta manera, ambos puntos de vista terminan correlacionados, ya que en un espacio plano de matrices S se pueden derivar un límite de funciones de correlación en CFT donde la escala dual de longitud en AdS en $R \rightarrow \infty$. Así mismo se puede observar que la localidad en QFT produce una matriz S covariante de Poincaré; además al tener QFT en AdS se pueden obtener buenas funciones de correlación para una CFT. Así mismo al analizar la completez UV para teorías de gravedad cuántica se puede entender por qué la gravedad en AdS debe ser una teoría de campos conforme.

2.4.1. Diccionario AdS/CFT

Existe un diccionario desde el punto de vista del fondo AdS desde donde se compara con su CFT dual[24]. Desde una perspectiva general, y bajo la condición de una construcción heurística para cualquier CFT se pueden considerar las siguientes equivalencias:

Las teorías conformes consisten en el grupo de transformaciones de Poincaré, que involucran transformaciones de escala y transformaciones especiales conformes. Para obtener las simetrías adicionales estas pueden derivarse de inversiones con respecto a un punto, donde $x^i \rightarrow x^i/x^2$. Estas son transformaciones de coordenadas que no dejan a la métrica invariante, pero ante un reescalamiento por factores de escala son dependientes del espacio-tiempo.

Las CFT se pueden cuantizar en el modo standard sobre superficies localmente planas. Alternativamente se puede realizar una cuantización radial en el espacio euclideo.

La cuantización radial se comienza en un punto y se va expandiendo en esferas hacia el exterior. Este método asocia los espacios de Hilbert de cierta CFT sobre una región pequeña

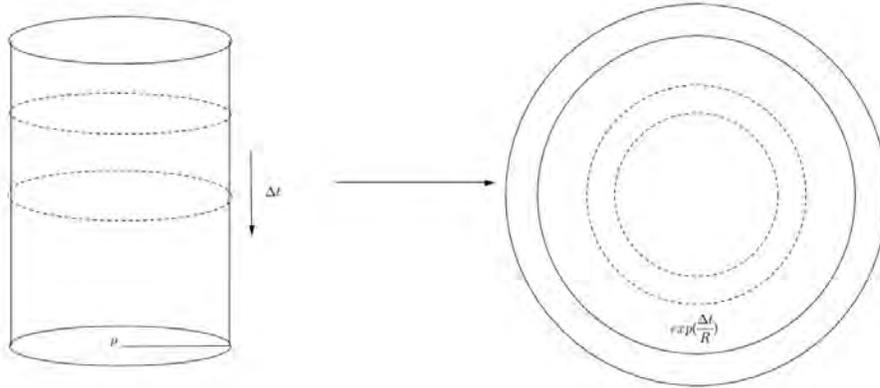


Figura 2.6: “Cilindro AdS en coordenadas globales correspondientes a una CFT en la cuantización radial.”

alrededor de un punto. La asociación de estados se produce en estos pequeños círculos sobre una región pequeña alrededor de un punto (ver Fig (2.6)). Tal asociación de estados se produce en estos pequeños círculos expansivos que contienen operadores en su centro, lo que conduce a la correspondencia entre operadores y estados.

Usando la simetría conforme, es permitido mover estos operadores, por ejemplo, si se toma un operador $O(0)$ en el origen se obtiene $O(x)$ en algún punto x . Es decir, los correladores de los operadores en una CFT están fijos por simetría. Así mismo, como en mecánica cuántica, en una CFT de la multiplicación de operadores se obtiene un nuevo operador. Así se define un producto de operadores expansivos (OPE), el cual tiene un radio finito de convergencia.

No hay necesidad de la existencia de una integral de trayectoria [25, 54]

Las corrientes conservadas son de extrema importancia. Si se tienen corrientes J_μ con espín 1 satisfacen $\partial^\mu J_\mu = 0$ y generan simetrías globales. En el caso de corrientes para espines iguales a 2 se tiene a $T_{\mu\nu}$. Por último, es necesario señalar que, de lo contrario, se considera que la teoría es no-local. [24]

2.5. El grupo de renormalización Wilsoniano

Cómo se vio al final de la sección anterior, se ha creado un diccionario para definir una teoría conforme desde el punto de vista de gravedad cuántica, proponiendo como uno de

los mayores retos la invariancia de escalamiento. Existe una búsqueda insistente para este problema, a través de una formulación precisa del grupo de renormalización para la teoría holográfica (RG). Utilizando el diccionario AdS/CFT se entiende que se toma una teoría de campo QFT local definida sobre la frontera de AdS; es claro que no existe una evolución temporal en la QFT, el problema ahora parece ser la evolución de la teoría.

Para abordar el problema, la herramienta matemática asociada a una variación de escalamiento es el llamado grupo de renormalización. Si se considera la aproximación de Wilson[18, 22, 49] mencionada en la sección anterior, suponiendo que el espacio AdS *confina* a dicha QFT local que vive en la frontera. Se muestra el comportamiento *holográfico* cuando a la teoría de gravedad cuántica se le asocia una teoría de menor dimensión que es localmente plana quedando de sobra una coordenada extra: la coordenada radial. A dicha coordenada radial le es asociada la escala de energía de la teoría en la frontera. Esto es, identificando la QFT que reside en el bulto espacio-temporal confinado, entonces se realiza un corte: este corte se divide en dos factores, el factor IR como la integral de trayectoria en la QFT dual con un corte UV, mientras que el factor UV corresponde entonces, a la acción Wilsoniana integrando fuera los campos sobre el corte de escala[18]. Esto sugiere que existe una correspondencia entre la QFT y el RG Wilsoniano.

Puede verse que, la teoría en el bulto requiere que esta se escriba como una integral de trayectoria, bajo la sugerencia de Wilson, al hacer un corte, se separa la integral de trayectoria en dos modos: uno de energía inferior y otro de energía superior. Si z es la coordenada radial

$$z = \int DM_{k\delta < 1} DM_{k\delta > 1} e^{-S} = \int DM_{k\delta < 1} e^{-S(\delta)} \quad (2.5.1)$$

con M asociada a campos genéricos de contorno. Como se vio en la sección (1.4.1.), esta integración progresiva genera un *flujo*, este flujo sustituye las deltas y epsilon de la integral de trayectoria -donde $\delta = \infty$ y se obtiene la trayectoria completa- reduciendo el problema a un análisis dimensional [18]. Este proceso tiene grandes repercusiones, pues si se toman sistemas fuertemente acoplados con su dual gravitacional, se puede conocer dicho sistema a bajas energías (la cual es detectable sólo bajo un número muy pequeño de acoplamientos sobre puntos fijos); así mismo, para física a corta distancia, la física microscópica puede ser cada vez más integrable.

De esta forma se clarifica una vez más el diccionario AdS/CFT: Al asociar la coordenada radial extra en el bulto a la escala de energías de una QFT, el flujo radial de dicha geometría

puede asociarse al flujo del grupo de renormalización Wilsoniano. Hay que señalar de forma adicional que esta herramienta no es trivial, ya que es difícil hacer la separación de esta integral de trayectoria y preservar al mismo tiempo estructuras importantes, como simetrías o invarianza de norma. Es por esta razón que para que se considere a la gravedad cuántica un problema resuelto se deben definir observables simples y adecuados (o de “juguete”).

Capítulo 3

Fermiones en el espacio de Anti de-Sitter

En el capítulo uno se hizo un rápido vistazo a las herramientas matemáticas para trabajar sobre espacios curvos (como De Sitter o Anti de Sitter); y además, en la sección (1.7) se definieron las polítradas o vielbeins, que permiten trabajar con espinores, esta formulación y sus propiedades operacionales son la herramienta esencial para analizar el siguiente ejemplo de holografía.

En este capítulo se trabaja a partir de los principios de la correspondencia norma-gravedad, definida en el espacio-tiempo AdS puro, con la ecuación de Dirac en el caso más sencillo: la partícula libre. Una vez que se obtienen sus ecuaciones de movimiento, se observa como evoluciona un espinor en AdS_4 , AdS_5 , y cómo es dicha evolución con respecto a la escala de energía, es aquí donde la dirección radial en el bulto puede asociarse al inverso de la escala de energía de la teoría dual en la frontera. En este sentido, se utilizará el enfoque Wilsoniano, que desde el punto de vista de la dualidad, consiste en hacer un corte sobre la coordenada radial cerca de la frontera de AdS y así establecer dos límites con el fin de integrar los grados de libertad en esta región para conocer como evolucionan las cantidades físicas, y en particular, las constantes de acoplamiento ante este reescalamiento. Esto es equivalente, de lado de la teoría de gravedad, a tener una ecuación tipo Hamilton-Jacobi; pues al tomar la derivada de la acción total, esta debe ser cero para que la energía no cambie. La física bajo este corte puede abordarse utilizando el grupo de renormalización Wilsoniano, siendo particularmente útil en el límite a bajas energías y donde se define el *flujo* radial en la geometría del bulto, el cual se puede interpretar como el flujo del grupo de renormalización (Wilsonian flowing

RG)[49].

Una vez que se utiliza el RG Wilsoniano, al imponer condiciones de frontera de tipo Newmann, se concentra toda la física en un punto fijo, es decir, todo el flujo del grupo de renormalización se localiza en puntos fijos. Un caso interesante es donde la física puede encontrarse justo entre dos puntos fijos.

El presente capítulo se presenta como una aportación sutil a los resultados del trabajo realizado por Joao Laia y David Tong[23] donde se consideran flujos del grupo de renormalización Wilsoniano actuando sobre campos en bultos espinoriales, poniendo suma atención en los operadores entre los flujos de la teoría holográfica y su dual conforme. Dentro del contexto de t'Hooft para una expansión a N grande[16], se considera el operador O como un operador de una sola traza, y O^2 como un operador doble traza; siendo el flujo inducido por el operador de doble traza el tema central del presente trabajo.

3.1. Conexión de Espín: el lagrangiano clásico de Dirac y el parche de Poincaré

En la sección (2.25) se introduce el sistema coordenado más usual en holografía: el Parche de Poincaré. De la ecuación (2.2.24) el parche o cuña de Poincaré puede escribirse como

$$ds^2 = \frac{L^2}{\rho^2}(d\rho^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \quad (3.1.1)$$

sobre este sistema coordenado, se busca resolver el Lagrangiano de Dirac, siendo el caso clásico (Grassmann) el foco de interes, se tiene

$$L = i\bar{\psi}\left[\frac{1}{2}(\Gamma^\mu \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \Gamma^\mu) - m\right]\psi \quad (3.1.2)$$

cuyos índices $\mu = \rho, 0, 1, 2, 3$ para AdS en cinco dimensiones. Cabe aclarar la notación para abordar este problema. Se consideran las tétradas planteadas en la sección (1.7) en cinco dimensiones; es decir, la *pentrada* posee cinco índices curvos escritos en términos griegos, mientras que los índices planos son escritos con índices latinos. Para el lagrangiano libre de

Dirac del bulto, donde las matrices Γ satisfacen (1.8.3), para

$$(D_\mu \Gamma^\mu - m)\psi = 0 \quad (3.1.3)$$

considerando la definición de polítrada de la sección (1.7) tal que se satisfaga de la ecuación (1.7.1), escogiendo una base tal que, en términos de la base no coordinada (1.7.7)

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \Gamma^a \quad \text{con} \quad \mu = \rho, 0, 1, 2, 3 \quad (3.1.4)$$

tal que pueda obtener

$$\omega_{ab,\mu} = e_a^\rho e_b^\nu \Gamma_{\rho\mu\nu} \quad (3.1.5)$$

entonces, tomando

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu G_{\sigma\rho} + \partial_{\rho\sigma} - \partial_\sigma G_{\nu\rho} - \partial_a G_{\rho\mu}) \quad (3.1.6)$$

donde la conexión es (1.7.15); sustituyendo $\mu = \rho, 0, 1, 2, 3$ en (3.1.7) se obtiene $\Gamma_{\mu\rho}^\nu = -\frac{1}{\rho}$.

Con esto se busca “aplanar los extremos” en la ecuación (3.1.1) entonces

$$dS^2 = \frac{L^2}{\rho^2} (d\rho^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.1.7)$$

donde la conexión de espín

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{\rho} (\delta_\rho^a \delta_\mu^b - \delta_\mu^a \delta_\rho^b) \quad (3.1.8)$$

intercambiando súper índices por sub índices en (3.1.8)

$$\omega_{ab,\mu} = \frac{1}{\rho} (\eta_{\rho a} \eta_{\mu b} - \eta_{\mu a} \eta_{\rho b}) \quad (3.1.9)$$

obteniendo la forma requerida para satisfacer (3.1.2), obteniéndose al operador de derivada covariante

$$\vec{D}_\mu = \vec{\partial}_\mu + \frac{1}{4} \omega_{ab,\mu} \Gamma^{ab} \quad (3.1.10)$$

con $\Gamma^{ab} = \frac{1}{2} [\Gamma^a, \Gamma^b]$.

3.2. Ecuación para una onda plana

De estas nuevas coordenadas y sustituyendo en (3.1.4) se obtiene

$$\Gamma^\mu D_\mu = \Gamma^\mu \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{ab,\mu} \Gamma^{ab} \quad (3.2.1)$$

como $e_a^\mu \Gamma^a = \frac{\rho}{L} \gamma^4$

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu D_\mu &= \frac{\rho}{L} (\partial_t + \frac{1}{4\rho} [\gamma^r, \gamma^0]) + \frac{\rho}{L} \gamma^1 (\partial_x + \frac{1}{4\rho} [\gamma^r, \gamma^x]) + \\ &+ \frac{\rho}{L} \gamma^2 (\partial_y + \frac{1}{4\rho} [\gamma^r, \gamma^y]) + \frac{\rho}{L} \gamma^3 (\partial_z + \frac{1}{4\rho} [\gamma^r, \gamma^z]) \end{aligned}$$

tomando el lagrangiano en la ecuación (3.1.2)

$$[-i\Gamma^\mu k_\mu + \Gamma^4 \partial_\rho - \frac{1}{\rho} (\frac{d}{2} - m)] \quad (3.2.2)$$

multiplicando (3.2.2) se puede obtener la ecuación de Klein-Gordon

$$[\partial_\rho^2 - k^2 - \frac{d}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} (\frac{d^2}{4} - m^2) + \frac{d}{2\rho^2} + \frac{m}{\rho^2} \Gamma^4] \psi = 0 \quad (3.2.3)$$

tomando la ecuación de Dirac (3.1.3) con la signatura $K_\mu = (-\omega, \vec{k})$ (nótese que $K^\mu = (\omega, \vec{k})$ sin embargo, usamos la signatura “al revés”)

$$[-i\gamma^\mu K_\mu + \gamma^r \partial_\rho - \frac{1}{\rho} (\frac{d}{2} \Gamma^r + m)] \psi(\rho) = 0 \quad (3.2.4)$$

usando $\pm m$ aplicada a la ecuación (3.2.4). Al obtener K-G para una onda plana, es decir

$$\Psi(\rho, x) = e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\rho) \quad (3.2.5)$$

con $(\vec{k} = x, y, z)$

$$\begin{aligned} i\rho\gamma^0\omega - \frac{1}{2}\gamma^r + \rho\gamma^r\partial_\rho - \rho i\vec{r} \cdot \vec{k} - \frac{1}{2}\gamma^r(d-1) \\ \Gamma^\mu D_\mu = i\rho\gamma^0\omega - i\rho\vec{r}\vec{k} + \rho\gamma^r\partial_\rho - \frac{\gamma^r d}{2} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

de (3.2.6) implica

$$[-i\gamma^\mu k_\mu + \gamma^0 \partial_\rho - \frac{1}{\rho}(\frac{d}{2}\gamma^r + m)][-i\gamma^\mu k_\mu + \gamma^0 \partial_\rho - \frac{1}{\rho}(\frac{d}{2}\gamma^r - m)]\psi(\rho) = 0$$

tomando los dos últimos términos como $(\frac{d^2}{4} - m^2)$ se obtiene

$$[\partial_\rho^2 - k^2 - \frac{d}{2\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(\frac{d^2}{4} - m^2) + \frac{d}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}m\gamma^r]\psi = 0. \quad (3.2.7)$$

ahora se define

$$\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^r) \quad (3.2.8)$$

$$\text{con } \Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \quad \Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$$

$$\gamma^r \Lambda_+ = \Lambda_+ \quad , \quad \gamma^r \Lambda_- = -\Lambda_-$$

se define también

$$A \equiv [\partial_\rho^2 - k^2 - \frac{d}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}(\frac{d^2}{4} - m^2) + \frac{d}{\partial\rho^2}]$$

y la ecuación resulta

$$(A + \frac{m}{\rho^2}\gamma^r)\psi_\pm = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\text{pero } [\Lambda_\pm, A + \frac{m}{\rho^2}\gamma^r] = 0$$

$$\Rightarrow A(\Lambda_+ + \Lambda_-)\psi = -\frac{m\gamma^r}{\rho^2}(\Lambda_+ + \Lambda_-)\psi$$

restando

$$(A\Lambda_+ - A\Lambda_-)\psi = -\frac{m}{\rho^2}\Lambda_+\psi \mp \frac{m}{\rho^2}\Lambda_-\psi$$

$$\Rightarrow A\Lambda_\pm\psi = \mp \frac{m}{\rho^2}\Lambda_\pm\psi$$

$$\text{y como } (A \pm \frac{m}{\rho^2})\Lambda_\pm\psi = 0$$

se puede escribir

$$(A\Lambda_+ - A\Lambda_-)\psi = -\frac{m}{\rho^2}\Lambda_+\psi - \frac{m}{\rho^2}\Lambda_-\psi$$

$$\Rightarrow A\Lambda_{\pm} = \mp \frac{m}{\rho^2} \Lambda_{\pm} \psi$$

se tiene

$$(A \pm \frac{m}{\rho^2})\Lambda_{\pm}\psi = 0 \quad \text{esto es} \quad \psi_{\pm} \equiv \Lambda_{\pm}\psi.$$

se puede escribir igualmente

$$\begin{aligned} & [\rho^2 \partial_{\rho}^2 - k^2 - \frac{d}{\rho} \partial_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} (\frac{d^2}{4} - m^2) + \frac{d}{2\rho^2} \pm \frac{m}{\rho^2}] \psi_{\pm} = 0 \\ \Rightarrow & [\rho^2 \partial_{\rho}^2 - \rho d \partial_{\rho} - (k^2 \rho^2 + m^2 - \frac{d^2}{4} - \frac{d}{2} \mp m)] \psi_{\pm} = 0 \end{aligned}$$

haciendo el cambio $\psi_{\pm} = \rho^{\frac{d+1}{2}} \varphi_{\pm}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \partial_{\rho} \psi_{\pm} = (\frac{d+1}{2}) \rho^{(\frac{d-1}{2})} \varphi_{\pm} + \rho^{(\frac{d+1}{2})} \partial_{\rho} \varphi_{\pm} \\ \Rightarrow & \partial_{\rho}^2 \psi_{\pm} = (\frac{d+1}{2}) (\frac{d-1}{2}) \rho^{(\frac{d-3}{2})} \varphi_{\pm} + (d+1) \rho^{(\frac{d-1}{2})} \varphi'_{\pm} + \rho^{(\frac{d+1}{2})} \varphi''_{\pm} \\ & \rho^2 \partial_{\rho}^2 \varphi_{\pm} + (d+1) \rho \partial_{\rho} \varphi_{\pm} + (\frac{d^2-1}{4}) \varphi_{\pm} \\ \Rightarrow & \partial_{\rho}^2 \psi_{\pm} = (\frac{d+1}{2}) (\frac{d-1}{2}) \rho^{(\frac{d-3}{2})} \varphi_{\pm} + (d+1) \rho^{(\frac{d-1}{2})} \varphi'_{\pm} + \rho^{(\frac{d+1}{2})} \varphi''_{\pm} \\ \Rightarrow & \rho^2 \partial_{\rho}^2 \varphi_{\pm} + (d+1) \rho \partial_{\rho} \varphi_{\pm} + (\frac{d^2-1}{4}) \varphi_{\pm} \\ & - d (\frac{d+1}{2}) \varphi_{\pm} - \rho d \partial_{\rho} \varphi_{\pm} - (k^2 \rho^2 + m^2 - \frac{d}{4} - \frac{d}{2} \mp m) \varphi_{\pm} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$[\rho^2 \partial_{\rho}^2 + \rho \partial_{\rho} - (k^2 \rho + m^2 \mp m + \frac{1}{4})] \varphi_{\pm} = 0$$

haciendo un nuevo cambio de variable

$$\nu_{\pm}^2 \equiv m^2 \mp m + \frac{1}{4} = (m \mp \frac{1}{2})^2 \quad \text{y} \quad x \equiv k\rho$$

se obtienen dos casos para ν , por un lado

$$\nu_{\pm} = (m \mp 1/2) \quad \text{entonces} \quad m \mp 1/2 = n \quad n = 0, 1, 2$$

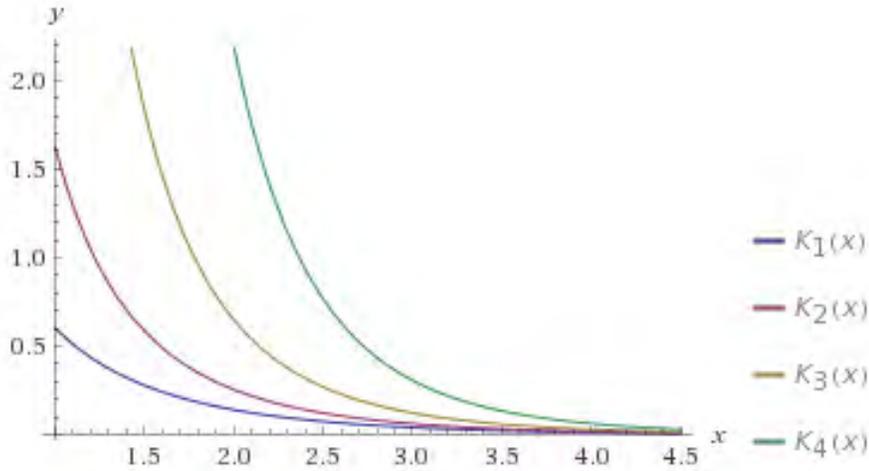


Figura 3.1: “Funciones de Bessel modificadas”

$$\Rightarrow m = n \pm 1/2 \quad \text{con} \quad n \neq 0 \quad \text{para el signo negativo}$$

es decir, m es semientero

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - (x^2 + \nu_{\pm}^2) \right] \psi_{\pm} = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\text{con} \quad \psi^{\pm}(x) = x^{\left(\frac{d+1}{2}\right)} [C_{\nu}^{\pm} I_{\nu}(x) + C_{-\nu}^{\pm} I_{-\nu}(x)]$$

que es la solución a las ecuaciones de Bessel. Debido a las condiciones para que se satisfagan las funciones de Bessel usuales $J_{\nu}(k\rho)$, así como las funciones de Neumann y cualquier combinación lineal, como lo son las ecuaciones de Hankel[52]; se toman dos soluciones para (3.2.11). Si ν es un número entero, se pueden tomar las funciones de Bessel usuales $J_{\nu}(x)$, pero nuestra atención se centra en el caso de ν semientero, la primer solución para este problema es tomar las funciones modificadas de Bessel $I_{\nu}(x)$; como otra posible solución, se utiliza una función de Hankel $H_{\nu}(xi)$ tal que satisfaga la misma relación de recurrencia, teniendo como segunda solución una función Bessel modificada de segundo tipo.

3.3. Evolución de espinores en AdS

El estudiar la evolución de un espinor en AdS en la teoría dual de gravedad cuántica establece una conexión íntima sobre como evolucionan los operadores asociados a la teoría de campos con respecto la escala de energía. Como se mencionó en la sección (2.5.) para este fin se recurre a la tecnología de Wilson, al confinar AdS en una “caja” a la cual se le realiza un corte y se imponen condiciones de contorno (Condiciones usuales para D-Branas: Dirichlet y Neumann, este caso se usarán estas últimas) e integrando al bulto sobre sus grados de libertad se obtiene una acción en la frontera S_F . [49] Es decir, a la teoría de gravedad cuántica de $D = d + 1$ cuya cordenada radial extra en el bulto puede asociarse al inverso de la escala de energía de la teoría en la frontera, siendo este el flujo del grupo de renormalización de Wilson RG.

Otra característica impresindible de la tecnología de Wilson es que el RG simplifica la caracterización a bajas energías de la QFT, puesto que un corte *efectivo* en la región de interes del bulto recaba toda la información necesaria de la teoría y elimina la premura de maximizar en todo el espacio-tiempo, es decir, el corte Wilsoniano implica que todas las teorías son efectivas.

3.3.1. Flujo entre puntos fermiónicos fijos

Reproduciendo la escencia de [23], al analizar el corte Wilsoniano a la cuña de Poincaré, cuando $\rho \rightarrow 0$ como el límite correspondiente a un corte UV; dicho corte se coloca en $r = \epsilon$

De lado de la teoría con gravedad en $D = d + 1$ dimensiones, se tiene que la acción fermiónica

$$S = \int_{\rho \geq \epsilon} d^{d+1}x \sqrt{-g} [L(\bar{\psi}, \psi)] + S_F[\bar{\psi}, \psi, \epsilon] \quad (3.3.1)$$

con la ecuación (3.1.2) el lagrangiano que describe un espinor libre de Dirac, donde la derivada covariante es (3.1.10). Es aquí donde se imponen condiciones de frontera [18, 49] tipo Neumann

$$\Pi = \frac{\delta S_F}{\delta \bar{\psi}} \quad , \quad \bar{\Pi} = \frac{\delta S_F}{\delta \psi} \quad (3.3.2)$$

donde Π no es otra cosa que los ímpetus canónicos de los campos espinoriales para la coordenada radial

$$\Pi = -\frac{i}{2} \sqrt{-g} e_a^\rho \Gamma^a \psi \quad \bar{\Pi} = -\frac{i}{2} \sqrt{-g} \bar{\psi} e_a^\rho \Gamma^a$$

con Γ^a las matrices gamma con índices del espacio tangente acompañados de los vielbein. Obsérvese que a es el índice que señala al espacio tangente, es decir, la dirección radial de AdS. Al imponer tales condiciones de frontera, existe un término conforme que preserva la acción en la frontera

$$S_F = \frac{i}{2} \int_{\rho=\epsilon} \sqrt{-\gamma} f \bar{\psi} \psi d^d x \quad (3.3.3)$$

donde $\gamma = gg^{rr}$ es la métrica inducida y f es una constante por determinar. De las condiciones de Neumann, se obtiene:

$$M\psi = 0 \quad , \quad M = fI + \Gamma^4 \quad (3.3.4)$$

donde M es una matriz de 4×4 . Nótese que $\Gamma^4 \equiv \gamma^5$, dado que las matrices γ son de naturaleza par, considerando el hecho de que $(\Gamma^4)^2 = 1$ dicha matriz M es de rango dos. Sin embargo, en el caso de la ecuación de Dirac, sobran grados de libertad, pues la ecuación es estrictamente de primer orden. Esto implicaría que las distintas componentes de los espinores corresponden tanto a variables de posiciones como a variables de ímpetu. Para solucionar el problema con los grados de libertad sobrantes, y considerando que el rango de M es dos, se obtienen sólo dos posibles soluciones:

$$f = \pm 1 \quad (3.3.5)$$

tomando el primer caso $f = 1$ (cuantización alternativa) se obtiene ψ_+ o un espinor derecho como sigue:

$$\psi_+ \equiv \frac{1}{2}(1 + \Gamma^4)\psi = 0 \quad , \quad \psi_- = \frac{1}{2}(1 - \Gamma^4)\psi = 0 \quad (3.3.6)$$

mientras que en el caso $f = -1$ (cuantización estándar) con ψ_- un espinor izquierdo. Dado que en la sección (3.2.) al obtener la solución a la ecuación de movimiento de Dirac, se obtiene un comportamiento descrito por funciones de Bessel; dada una transformada de Fourier para las direcciones cercanas a la frontera, cuando $\rho \rightarrow 0$

$$\psi(k, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ik \cdot x} \psi(x, \rho) d^d x \quad (3.3.7)$$

se pueden obtener la forma de los espinores izquierdos y derechos respectivamente. Debe notarse que el estudiar los casos en los que $\psi_+ = 0$ o $\psi_- = 0$ depende de la masa del bulto.

$$\begin{aligned} \psi_-(k, \rho) &= A(k)\rho^{d/2-mL} + B(k)\rho^{d/2+mL+1} \\ \psi_+(k, \rho) &= D(k)\rho^{d/2-mL} + C(k)\rho^{d/2+mL+1} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

con A, B, C, D espinores; dado que nos acercamos a la frontera, es pertinente que las soluciones de (3.3.8) se asocien a la escala de energía

$$E \sim \int_{\rho \geq \epsilon} d^{d+1} \sqrt{-g} \bar{\psi} H \psi \sim \int_{\rho \geq \epsilon} d\rho \frac{1}{\rho^{d+1}} [\bar{A} C \rho^{d-2mL+1} - \bar{D} B \rho^{d+2mL+1}] \quad (3.3.9)$$

dada la naturaleza de Wilson, en la búsqueda de la renormalización de la acción en la frontera, a partir de la ecuación (3.3.9) se observa que en el punto $mL \geq 1/2$ el término $\bar{D}B$ es normalizable, mientras que el término de lado izquierdo $\bar{A}B$ es no normalizable y se obtiene $\psi_- = 0$ en la frontera. Idem el caso cuando $mL \leq -1/2$ donde $\bar{A}B$ se vuelve normalizable mientras que $\bar{D}B$ ya no lo es y $\psi_+ = 0$ en la frontera.

Nuestro interés recae en el intervalo donde ambos puntos fijos $-1/2 < mL < 1/2$ son normalizables[19]. Se tiene que para cada uno de los casos -cuantización alternativa o estandard- se obtienen dos teorías distintas descritas por las mismas ecuaciones de movimiento; obsérvese también que las condiciones son equivalentes a unas ecuaciones de Hamilton Jacobi sobre la coordenada radial ρ , como si dicha coordenada fuese el tiempo, es decir $\epsilon = \rho$

$$S[\epsilon + S\delta\epsilon] - S\delta[\epsilon] = \int_{\rho=\epsilon+\delta\epsilon}^{\rho=\epsilon} d^{d+1} \sqrt{-g} L + S_F[\psi(x, \epsilon + \delta\epsilon)] - S_F[\psi(\epsilon)] \quad (3.3.10)$$

tomando la variación de la acción en (3.3.3)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\epsilon} &= - \int_{\rho=\epsilon} d^d x \times \sqrt{-g} L + \int_{\rho=\epsilon} \left(-\frac{\delta S_F}{\delta \psi} \partial_\rho \psi + \partial_\rho \bar{\psi} \frac{\delta S_F}{\delta} \right) \\ &= \int_{\rho=\epsilon} d^d x H + \frac{\partial S_F}{\partial \epsilon} \Big|_{\rho=\epsilon} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

asociando la escala de energía al Hamiltoniano, donde la variable de ímpetu no es más que el ímpetu canónico conjugado

$$\begin{aligned} H &\equiv \sum P \dot{q} - L \\ H &\equiv \sum \Pi \dot{q} - L \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

entonces el hamiltoniano radial

$$\begin{aligned} H &= -\bar{\Pi} \partial_\rho \psi + \partial_\rho \bar{\psi} \Pi - \sqrt{-g} L \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{-g} [e_a^\mu \bar{\psi} (\Gamma^a \vec{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \Gamma^a) \psi - 2, \bar{\psi} \psi] \end{aligned}$$

$$-\frac{i}{2}\sqrt{-g}[e_a^\mu\bar{\psi}(2\Gamma^a\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{bc,\mu}\{\Gamma^a\Gamma^b\})\psi - 2m\bar{\psi}\psi] \quad (3.3.13)$$

con

$$\Gamma^{bc} = \frac{1}{2}[\Gamma^b, \Gamma^c]$$

en este caso la conexión es cero, debido al anticonmutador y por ser términos que no se encuentran en la diagonal. Pido que las cantidades de la acción no dependan del corte

$$\frac{dS}{d\epsilon} = 0 \quad (3.3.14)$$

entonces dS no depende de ϵ

$$\therefore \frac{\partial S_F}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\epsilon} = - \int_{\rho=\epsilon} d^d x H \quad (3.3.15)$$

se requiere agregar términos a la acción para observar el comportamiento de las teorías que obedecen estas ecuaciones de movimiento.

$$\frac{\partial S_F}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\epsilon}$$

se repite (3.3.13) y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_F}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial S_F}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\epsilon} = - \int d^d x H \\ H &= -\bar{\Pi}\partial_\rho\psi + \partial_r\bar{\psi}\Pi - \sqrt{-g}L \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

si tomamos AdS puro, sin perturbar

$$\frac{1}{4}\omega_{bc,\mu}\{\Gamma^a, \Gamma^{bc}\} = 0$$

entonces (3.3.16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} H &= -\frac{i}{2}\sqrt{-g}[e_a^\mu\bar{\psi}(2\gamma^a\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_{bc,\mu}\{\Gamma^a, \Gamma^{bc}\})\psi - 2m\bar{\psi}\psi] \\ &= -i\sqrt{-g}m\bar{\psi}\psi \\ \Rightarrow \frac{\partial S_F}{\partial \epsilon} &= -im \int d^d x \bar{\psi}\psi \end{aligned}$$

obteniendo así el flujo de renormalización. Al resolver AdS puro para un fermión, la función beta para esta deformación

$$\beta = E \frac{\partial g}{\partial E} = \epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon}$$

con el fin de buscar que la acción se mantenga

$$\partial_\mu \psi = 0$$

para hacer un análisis del flujo RG para fermiones, dado que el propósito principal fue tomar el caso de AdS_4 y AdS_5 . considerando AdS en 4 dimensiones, entonces si $D = d + 1$ es la frontera con $d = 2$ se tiene entonces la QFT en la frontera tiene $D = 2 + 1$; mientras que AdS en 5 dimensiones Γ^4 corresponde a la cordenada radial con la QFT en $D = d + 1$ con $d = 3$ esto es $D = 3 + 1$

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2$$

$$\Gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\gamma^\mu = (i\sigma^3, \sigma^2, \sigma^3)$; como Γ^4 y Γ^5 son equivalentes y tienen la propiedad de que ambas conmuten, dichas soluciones:

$$\psi_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma^4)\psi$$

y tomando la ecuacion (3.3.3) para AdS en cuatro o cinco dimensiones

$$S_F = -\frac{i}{2} \int_{\rho=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} [\bar{\psi} + \eta] = -\frac{i}{2} z^{-d} (\psi + \eta) \quad (3.3.17)$$

hay una corriente que genera al campo, la teoría podia tener dos flujos de renormalización, esta corriente se llama fuente de renormalización. Dado que esta es la acción real, entonces a los impentus canónicos

$$\Pi = \frac{\delta S_F}{\delta \bar{\psi}} = -\frac{i}{2} \sqrt{-\gamma} [\psi + \eta] = -\frac{i}{2} z^{-d} (\psi + \eta)$$

$$\Pi = -\frac{i}{2} z^{-d} \Gamma^4 \psi$$

$$\Gamma^4 \psi = (\psi + \eta)$$

porque la identidad

$$\psi = \psi_+ + \psi_- = \frac{1}{2}(1 + \Gamma^4)\psi + \frac{1}{2}(1 - \Gamma^4)\psi$$

$$\Gamma^4 \psi = \psi_+ - \psi_-$$

$$\Rightarrow \psi_+ + \psi_- = \psi_+ + \psi_- + \eta$$

la fuente se comporta como $\psi_- = -2\eta$. Esto indica que el término más divergente va de la mano del espinor A

$$\eta \sim A$$

$$\Rightarrow \eta \sim A \xi^{x/2 - mL} \eta$$

$$\sim A \xi^{mL - d/2} \eta$$

esta última es el caso de interes. En la interpretación de la dualidad, si η es una fuente (en S_F) es el valor promedio del campo en presencia de una fuente

$$\langle \Psi \rangle_A$$

de lado de la teoría de campo (corresponde a un operador) que es la fuente el valor de espectación del operador.

$$\int dj \langle O \rangle$$

en los casos

$$\eta^+ \frac{1}{2}(1 - \Gamma^4) \quad \text{o} \quad \eta^- \frac{1}{2}(1 + \Gamma^4)$$

y el coeficiente conforme

$$\eta \sim A \xi^{d/2 - mL} \quad \text{y} \quad A \sim \xi^{mL - d/2}$$

$$\Delta_+ = d/2 + mL \tag{3.3.18}$$

con (3.3.18) el coeficiente conforme. Considerando a ψ como un espinor en el bulto y a Ψ como un operador de valor de expectación en la QFT. En la cuantización alternativa es exactamente al revés; como se vio para el caso de la cuantización estandar $f = -1$. La fuente va como

$$\eta \sim \xi^{d/2 - mL}$$

$$\langle \Psi \rangle_A \sim D(k)$$

del dual. Y el peso conforme es (3.3.18), mientras que en la cuantización alternativa, cuando el espinor es D

$$f = 1 \quad , \quad \psi_+ = 0$$

$$\langle \Psi \rangle_D \sim A(k) \quad , \quad \Delta_- = d/2 - mL$$

Si se añade un término nuevo en la frontera, se obtiene una nueva teoría asociada a ese término. Usando $\psi_{\pm} = 0$ se reduce a la mitad de grados de libertad

$$\Delta S_{Dirac} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \xi \Psi(k) \psi(k) \quad (3.3.19)$$

de lado de una QFT

$$\text{como } \psi_+ \sim \begin{pmatrix} \psi_{1+} \\ \psi_{2+} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene paridad, y

$$\psi_- \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{1-} \\ \psi_{2-} \end{pmatrix}$$

tiene helicidad. Nótese que el término extra viola paridad. Como se comparten simetrías de la teoría del bulto en la teoría de campo en la frontera ocurre lo anterior. En [23] dice que si se agrega el término que viola paridad en (3.3.19)

$$S_F = \frac{i}{2} \int_{z=\epsilon} d^d \sqrt{-\gamma} d\bar{\psi} \psi$$

el término de frontera se modifica también

$$\Rightarrow \frac{i}{2} \int_{z=\epsilon} d^d \sqrt{-\gamma} [f(\epsilon) \bar{\psi} \psi + g(\epsilon) \bar{\psi} \Gamma^5 \psi]$$

si $m\psi = 0$ implica que

$$m = f(\epsilon) + \Gamma^4 + g(\epsilon) \Gamma^5$$

pues $\bar{\psi}(f - \Gamma^4 + \Gamma^5)\psi = 0$ entonces

$$\bar{\psi}\Gamma^4\psi = 0$$

$$\bar{\psi}(f + g\Gamma^5)\psi = 0$$

se tiene una relación entre los bilineales

$$f\psi\bar{\psi} = -g\psi\Gamma\psi$$

se aplica una deformación de Dirac. Donde Ψ es un operador fermionico y para que sea invariante entre ambas teorías, se ve como

$$tr(\psi\lambda_\alpha)$$

cómo sólo dependen del parámetro ϵ , para f y g

$$m = f(\epsilon) + \Gamma^4 + g(\epsilon)\Gamma^5 f^2(\epsilon) + g^2(\epsilon) = 1$$

con estas propiedades, se resuelve una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + 2(1 - f^2) = 0 \quad (3.3.20)$$

en el bulto, g debe ser la constante de acoplo para un operador de doble traza, de la ecuación (3.3.20)

$$f(\epsilon) = \frac{1 - A^2\epsilon^{2mL}}{1 + A^2\epsilon^{4mL}}$$

dado que con g se obtiene una constante de acoplo

$$\epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon} = 2mg\sqrt{1 - g^2} = \beta$$

siendo esta β la función beta de la deformación de Dirac, mientras que g esta relacionada a la constante de acoplo del operador de doble traza. Si se toma el límite UV $f \rightarrow 1$ y $g \rightarrow 0$ implica que $\epsilon \rightarrow 0$, en el caso de tomar el límite IR $f \rightarrow 0$ y $g \rightarrow 0$ lo que implica a $\epsilon \rightarrow \infty$. Para resumir lo anterior con la finalidad de construir una “receta”: si se propone una deformación cualquiera

$$\Delta S_{\text{Deformación}} \equiv i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \xi \bar{\psi}(k) \Gamma^\mu \vec{\mu}_\mu \psi(k) \quad (3.3.21)$$

con $\vec{\mu}_\mu = (1, 0, 0, 0)$ en reposo. mientras tanto en la frontera

$$S_F = \frac{i}{2} \int_{\rho=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} [f(\epsilon) \bar{\psi} \psi + g(\epsilon) \bar{\psi} \Gamma^\mu \vec{\mu}_\mu$$

en el caso de un sistema de referencia en reposo $g(\epsilon) \bar{\psi} \Gamma^0 \psi$

existen dos formas del mismo operador, como se muestra en (3.3.8); como $A^\dagger \rightarrow \langle \Psi \rangle$ es el valor promedio del operador dual, en este caso O^2 el operador doble traza, pues cada operador O es una traza, y en este caso se tiene $\langle \Psi \rangle, \langle \Psi \rangle$ es decir, de dos trazas. De la variación de la acción en la frontera en (3.3.15) y el hamiltoniano obtenido en (3.3.16)

$$= \Pi = -\frac{i}{2} \sqrt{-g} e_a^\rho \Gamma^a \psi$$

con $\sqrt{-g} = \rho^{-(d+1)}$ dado que $\sqrt{-\gamma} = \rho^{-d}$ y

$$e_a^\rho = \frac{\rho}{L} \delta_a^\rho \quad (\rho = a) \quad L=1$$

se tiene

$$\begin{aligned} f(\epsilon) \psi + g(\epsilon) \Gamma^0 \psi &= -\Gamma^4 \psi \\ \Rightarrow [\Gamma^4 - f(\epsilon) + g(\epsilon) \Gamma^0] [\Gamma^4 - f(\epsilon) + g(\epsilon) \Gamma^0] \psi &= 0 \end{aligned}$$

con $\gamma^\mu = (i\sigma^3, \sigma^2, \sigma^1)$

$$\Rightarrow 1 - f^2 + g^2 = 0 \quad \therefore f^2 + g^2 = 1$$

teniendo así que $S = S_{F_{ext}} + S_F$ tal que este último término de frontera deba compensar a la acción y así compensar los infinitos. Así el término de frontera se anula y el lagrangiano queda invariante; es decir, la finalidad es añadir un termino de frontera tal que compense la variación en el bulto. En nuestro caso, se considera una deformacion que deje invariante al lagrangiano, se hace una deformación de Dirac[23], de (3.3.19), se enciende la fuente

$$\Delta_{\text{fuente}} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)} \bar{\eta}(k) \Psi(k) + \bar{\Psi}(k) \eta(k) \quad (3.3.22)$$

y de lado de la teoría de campo, z no es otra cosa que la ecuación (2.5.1) la cual evoca la

tecnología de Wilson. Si se deriva funcionalmente a z

$$\frac{\delta^2 z}{\delta\eta(x_1)\delta\bar{\eta}(x_2)} \equiv \langle\psi(x_1), \psi(x_2)\rangle$$

con η el término de fuente. Al encender la fuente se encienden campos del estilo $\Psi\partial^{2n}\Psi$, $\Psi\partial\Psi$, $\Psi\partial^{2n}\partial\Psi$, etcétera, a estos operadores se les conoce como operadores de derivada de orden superior (Higher Derivative Operators). A estos operadores también se les llama descendientes conformes. Ahora, se busca un término de frontera apropiado

$$S_F = \frac{i}{2} \int d^d x \sqrt{-\gamma} [f(k^2, \epsilon)\bar{\psi}\psi + g(k^2)\bar{\psi}\Gamma^5\psi + ia(k^2)\bar{\psi}\Gamma^5\cancel{k}\psi + ih(k^2)\bar{\psi}\cancel{k}\psi - \bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta]$$

esta k^2 se escoge de tal forma que el término cuadrático de una transformación cuya propiedad es ser continua y derivable, es decir $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = -\omega^2 + \vec{k}^2$. Tomando la ecuación de momento canónico, la derivada resulta

$$-\Gamma^4\psi = [f\psi + g\Gamma^3\psi + ia\Gamma^5\cancel{k}\psi + ih\cancel{k}\psi\eta]$$

como por un lado $m\psi = \eta$ con $m^{(-)}m\psi = m^{(-)}\eta = 0$ y se tiene

$$[-f + g\Gamma^5 + ia\Gamma^5\cancel{k} + ih\cancel{k} + \Gamma^4][f + g\Gamma^5 + ia\Gamma^5\cancel{k} + ih\cancel{k} + \Gamma^4] = 0$$

ahora, para que el término se compense, se requiere demostrar que $a = 0$. Haciendo la multiplicación anterior, se obtiene

$$-f^2g^2 - a^2k^2 - h^2k^2 + 2ia\Gamma^4\Gamma^5\cancel{k} = \Gamma_1k^0 + \Gamma_1k^i$$

multiplicando Γ^4 por Γ^5

$$\Gamma^4 \cdot \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\cancel{k} = k_0\Gamma^0 + k_1\Gamma^1 + k_2\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3k_0 \\ i\sigma^3k_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_1\sigma^1 \\ k_1\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_2\sigma^2 \\ k_1\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
i\Gamma^4\Gamma^5 k &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ik_0\sigma^3 + k_1\sigma^i \\ ik_0\sigma^3 + k_1\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k_0\sigma^3 + ik_1\sigma^i & 0 \\ 0 & -k_0\sigma^3 + ik_1\sigma^i \end{pmatrix} \\
\Rightarrow -k_0\sigma^3 + ik_1\sigma^i &= \begin{pmatrix} -k^0 & 0 \\ 0 & k^0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & k^1 \\ k^1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & ik^2 \\ ik^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k^0 & ik^1 + k^2 \\ ik^1 + k^2 & k^0 \end{pmatrix} \neq 0
\end{aligned}$$

que es una contradicción, pues esta última ecuación no puede ser cero, se deduce entonces que

$$\therefore a = 0$$

que es lo que se quería demostrar. Dado que la acción se compensa de esta forma, es posible enunciar el siguiente teorema.

Teorema: No existen descendientes de doble traza de la forma $\Psi \partial^{2m} \not{\partial} \Psi$, los únicos descendientes posibles son de una traza.

Capítulo 4

Conclusiones

El propósito de este ejemplo de dualidad fue tomar la coordenada radial “extra” del espacio-tiempo AdS, la cual es asociada al inverso de la escala de energía de la CFT dual, y observar su evolución con respecto a esta escala. Por su naturaleza de tipo Hamilton-Jacobi fue natural el pensar que esta evolución podría verse como una ecuación de flujo; siendo posible estudiar el flujo de renormalización de la teoría dual sobre la frontera.

La dualidad es tan poderosa tal que permite estudiar el comportamiento a bajas o altas energías de la teoría dual QFT, lo cual no siempre es posible a altas escalas de energías. Es por eso tan interesante la dualidad norma/gravedad, ya que permite entender la renormalización de la teoría de campo y obtener resultados no perturbativos al analizarlo como un sistema a bajas energías.

Por ejemplo, en esa tesis descubrimos que el flujo de renormalización tiene dos puntos fijos, y uno de esos puntos fijos en el límite UV, está asociado a los operadores doble traza.

Como fue propuesto en [18, 49], el flujo corresponde a dos teorías de campo distintas que aunque tienen las mismas ecuaciones de movimiento, sus pesos conformes son diferentes. El propósito de [23] fue analizar el flujo entre los límites IR y UV, propuesto en [19]. Una vez impuestas las condiciones de frontera para espinores, al encender una fuente, es posible alejarse del estado base de la teoría al agregar estos nuevos términos fuente al Lagrangiano que vive en la frontera (3.3.23).

Citando a [23] se plantea que si el término de fuente rompe simetrías traslacionales en el Lagrangiano, son sus operadores multitraza asociados a la teoría los que preservan simetrías, dada su naturaleza de Grassmann; dichas simetrías muestran la necesidad de encender oper-

adores descendientes que contienen derivadas de orden superior.

El caso de interés para este trabajo fue el encender fuentes de tipo $\Psi\partial^2\cancel{\partial}\Psi$ en una deformación de Dirac(3.3.22); para concluir con una sutil contribución al trabajo de [23] por medio del último teorema, el cual prueba que para esta fuente aparentemente no existen descendientes multitraza, pudiéndose obtener únicamente descendientes de una sola traza.

Una de las conclusiones mas importantes de esta tesis es que nos confirma la relevancia de los operadores multitraza, los diagramas que son de nuestra atención son los diagramas planos y no planos.

La relevancia de los operadores multitraza recae en el concepto de simetrías $1/N$ de t'Hooft[16] dado que la construcción de una teoría con N grande conduce al uso de operadores normalizados *traza*

$$O_\alpha = \frac{1}{N} Tr F_\alpha(\Phi_i)$$

donde F_α son funciones arbitrarias, Φ_i campos $SU(N)$ y O_α el operador de una traza. Así mismo se define la funcional de acción

$$I = N^2 P(O_\alpha)$$

con P una función arbitraria del operador de una traza, esto en el caso de que P sea lineal, así O_α es una acción de una sola traza mientras que términos no lineales en P tienen como resultado interacciones multi-traza. Igualmente dichos operadores multi-traza corresponden a estados multi-partícula en AdS de lado de una CFT.[55]

Para explicar esta idea, se considera un sistema de N branas, dado que dentro del contexto de t'Hooft las interacciones entre cuerdas abiertas están guiadas por medio de la constante de acoplo g_0 . Dichas cuerdas oscilan en branas i, j con $i \neq j$, así mismo se deben de sumar todas las contribuciones sobre condiciones iniciales y finales de principio a fin sobre la cuerda, y dada la complejidad de tal suma, esta puede representarse por medio de diagramas que van dados por la constante de acoplamiento de t'Hooft definida como $\lambda = g_{YM}^2 N$. [58]

Entonces, la amplitud de la cuerda sujeta a las branas i, j viene dada como

$$A_1 = \varsigma_0 \lambda$$

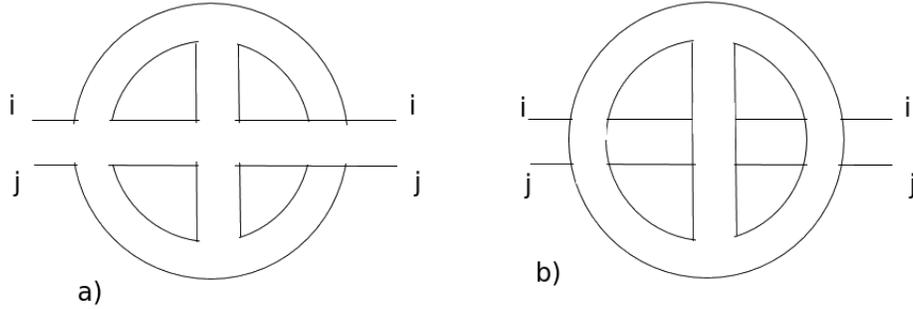


Figura 4.1: “a) Diagrama plano correspondiente a un operador de una traza b) Diagrama no plano correspondiente a un operador de dos trazas”

donde ς es una constante que depende de g_{YM} . Si se agrega una nueva interacción, esta se representa como una nueva frontera en el diagrama, por ejemplo, en la figura 4.1 a) se observa un diagrama plano con una sólo interacción de la brana i a la j mientras que en el diagrama 4.1 b) se observa una doble interacción. Si se suman todas las interacciones, la suma de amplitudes resulta

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma_n \lambda^n = f_0(x)$$

y entonces, cada vez que se agrega una tira al diagrama, se obtiene un factor extra de λ/N , siendo la amplitud total

$$A = f_0(x) + f_2(x) \frac{1}{N^2} + f_4 \frac{1}{N^4} + \dots$$

dado que, en este límite cuando $N \rightarrow \infty$ con λ fijo, se tiene que $g_{YM} \rightarrow 0$, siendo entonces natural pensar que sólo contribuyen los primeros términos de la serie. Siendo posible encontrar contribuciones relevantes en las interacciones de una y dos trazas.

El operador de doble-traza nos permite encontrar el flujo del grupo de renormalización entre las dos distintas teorías de campo conformes relacionadas mutuamente por una transformación de Legendre, y es justo en este rango donde los términos de frontera se vuelven normalizables. En este ejemplo, los operadores de doble-traza permiten observar la física entre puntos fijos, por un lado, si se toma el límite donde $f \neq 0$ define una teoría en el límite UV, mientras que en el flujo en el otro punto fijo nos da condiciones de frontera para la teoría en el límite IR. Así el operador de doble-traza dota de una deformación relevante y de esta

forma se rompe la invarianza conforme en la teoría de norma.[13]

Una de estas consecuencias es que los operadores doble traza, que se creía que no eran relevantes, tienen una contribución fundamental en el comportamiento de la QFT. Siendo la conclusión crucial de este trabajo que, al obtener operadores descendientes de una sola traza en una deformación de Dirac, ya no es posible encontrar deformaciones relevantes, dado que, se puede ver a los operadores multi-traza como la “llamada telefónica” que “comunica” a los espinores A, B, C y D.

Con esta misma construcción, es posible en una contribución adicional en el futuro para bultos espinoriales en AdS/CFT el corroborar la existencia de descendientes multi-traza para fuentes de la forma $\Psi\partial^{2n}\Psi$ o $\Psi\phi\Psi$.

Trabajos recientes en dualidad sugieren a los operadores multi-traza como una manera en que dos objetos físicos relevantes puedan comunicarse entre si, por ejemplo en [40] se propone una interacción entre dos fronteras de agujeros negros que podrían estar relacionados con la teleportación cuántica al comunicarse por medio de agujeros de gusano, retomando la propuesta de un puente tipo Einstein-Rosen.

Apéndice A

Lista de Acrónimos

AdS Espacio Anti de Sitter, variedad Lorentziana con constante cosmológica negativa

CFT Teoría de campos conforme *Conformal Field Theory*

EFT Teoría de campo efectiva *Effective Field Theory*

GUT Teoría de la gran unificación *Grand Unified Theory*

H Espacio de Hilbert

IR Régimen infrarrojo

OPE Producto expansivo de operadores *Operator product expansion*

PP Parche de Poncaré *Poincare Patch*

QCD Cromodinámica Cuántica *Quantum Chromodynamics*

QFT Teoría cuántica de campos *Quantum Field Theory*

QG Gravedad Cuántica *Quantum Gravity*

RG Grupo de Renormalización *Renormalization Group*

SIR *Sistema Inercial de Referencia*

SO Grupo especial ortogonal *Special orthogonal group*

SU Grupo especial unitario *Special unitary group*

SYM Súper Yang Mills

U Grupo unitario *Unitary group*

UV Régimen ultravioleta

Bibliografía

- [1] I. J. R. Aitchison. *Supersymmetry in particle physics: An elementary introduction*. 200.
- [2] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1987. ISBN 978-1-4757-2063-12.
- [3] Marcel Berger. *A Panoramic view of Riemannian Geometry*. Springer, 2002.
- [4] Nelson R.F. Braga C. A. Ballón Bayona. Anti-de sitter boundary in poincaré coordinates. *arXiv:hep-th/0512152v3*, 2007.
- [5] S. J. Chang. *Introduction to Quantum Field Theory*. World Scientific, 1990. ISBN 9971506270.
- [6] Siddhartha Sen Charles Nash. *Topology and Geometry for Physicists*. Dover Publications, 2011. ISBN 978-0486478524.
- [7] C. Csaki. Tasi lectures on extra dimensions and branes. *arXiv:hep-ph/0404096*, 2004.
- [8] Juan F. Pedraza César A. Agón, Alberto Guijosa. Radiation and a dynamical uv/ir connection in ads/cft. *arXiv:1402.5961v3*, 2014.
- [9] Jean Claude Dutailly. *Mathematics for theoretical physics*. Springer, 2nd ed^{ón}., 2014.
- [10] D.Z. Freedman E. D'Hoker. Supersymmetric gauge theories and the ads/cft correspondence. *arXiv:hep-th/0201253*, 2002.
- [11] Harley Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, 1989. ISBN 0486661695.
- [12] R. Friedman. *On threefolds with trivial canonical bundle, Complex geometry and Lie theory*. Springer-Verlag, 1993. ISBN 3-540-56235-4.

- [13] Steven S. Gubser y Indrajit Mitra. Double-trace operators and one-loop vacuum energy in ads/cft. 2002.
- [14] Alberto Guijosa. Introducción a la dualidad norma-gravedad. notas del curso de posgrado. <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/holografiatema.pdf>, 2014.
- [15] Nick Halmagyi. Introduction to gauge/gravity duality, lecture 2. 2011.
- [16] Gerard 'T. Hooft. Large n. *arXiv:hep-th/0204069*, 2002.
- [17] Gary T. Horowitz. Introduction to holographic superconductors. *arXiv:1002.1722*, 2010.
- [18] Joseph Polchinski Idse Heemskerk. Holographic and wilsonian renormalization groups. *arXiv:1010.1264v2*, 2011.
- [19] Nabil Iqbal y Hong Liu. Real-time response in ads/cft with application to spinors. *arXiv:0903.2596v3*, 2009.
- [20] Petter W. Michor J. Slovák Ivan Kolár. *Natural Operations in differential Geometry*. Springer-Verlag, 1993. ISBN 3-540-56235-4.
- [21] s.D. Drell J. D. Bjorken. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [22] Herman Verlinde Jan De Boer, Erik Verlinde. On the holographic renormalization group. *arXiv:hep-th/9912012v1*, 1999.
- [23] David Tong Joao N. Laia. Flowing between fermionic fixed points. *arXiv:1108.2216v3*, 2012.
- [24] Jared Kaplan. Lectures on ads/cft from the bottom up. <http://www.pha.jhu.edu/~jaredk/AdSCFTCourseNotesPublic.pdf>, 2013.
- [25] E. Witten L. Susskind. The holographic bound in anti-de sitter space. *arXiv:hep-th/9805114*, 1998.
- [26] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2nd ed^{ón}., 2013. ISBN 978-1-4419-9881-8.
- [27] J. Maldacena. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *arXiv:hep-th/9711200*, 1997.

-
- [28] Juan Maldacena. Tasi 2003 lectures on ads/cft. *arXiv:hep-th/0309246*, 2004.
- [29] Juan Maldacena. The gauge/gravity duality. *arXiv:1106.6073v2*, 2014.
- [30] David Mateos. String theory and quantum chromodynamics. *arXiv:0709.1523v1*, 2007.
- [31] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press, 2nd ed^{ón}., 2003. ISBN 9780750306065.
- [32] H. Nastase. Introduction to ads-cft. *arXiv:0712.0689*, 2007.
- [33] J. Maldacena H. Ooguri Yaron Oz Ofer Aharony, Steven S. Gubser. Large n field theories string theory and gravity. *arXiv:hep-th/9905111v3*, 1999.
- [34] Eleftherios Papantonopoulos. *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The Ads/CFT Correspondence*. Springer, 2011. ISBN 978-3-642-04863-0.
- [35] R. Penrose. *Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Alfred A. Knopf, 2004. ISBN 978-0679454434.
- [36] R. Penrose. *Cycles of Time: An Extraordinary New View of the Universe*. Bodley Head, 2012. ISBN 978-0-224-08036-1.
- [37] R. Peschanski. Introduction to string theory and gauge/gravity duality for students in qcd and qgp phenomenology. *arXiv:0804.3210*, 2008.
- [38] Jens L. Petersen. Introduction to maldacena conjecture on ads/cft. *arXiv:hep-th/9902131*, 1999.
- [39] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, 2nd ed^{ón}., 2006. ISBN 0-387-29246-2.
- [40] Aron Wall Ping Gao, Daniel Louis Jafferis. Traversable wormholes via a double trace deformation. 2016.
- [41] J. Polchinski. Introduction to gauge/gravity duality. *arXiv:1010.6134*, 2010.
- [42] S. E. Vazquez R. C. Myers. Quark soup al dente: Applied superstring theory. *arXiv:0804.2423v1*, 2008.
- [43] A.R. Hibbs R. P. Feynman. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, NY, USA, 1965.

- [44] Mukund Rangamani. Gravity and hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence. *arXiv:0905.4352v3*, 2011.
- [45] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2nd ed^{ón}., 1991.
- [46] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd ed^{ón}., 1996. ISBN 0 521 47242 3.
- [47] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [48] Flip Tanedo y Yuhsin Tsai. Warped penguins: Derivations a.k.a. a pedagogical guide to bulk fermions in rs. *arXiv:1004.2037*, 2010.
- [49] Mukund Rangamani Thomas Faulkner, Hong Liu. Integrating out geometry: Holographic wilsonian rg and the membrane paradigm. *arXiv:1010.4036v*, 2011.
- [50] Andrew J. Hanson. Tohru Eguchi, Petter B. Gilkey. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1980.
- [51] Mukund Rangamani Veronika E Hubeny, Shiraz Minwalla. The fluid/gravity correspondence. *arXiv:1107.5780v1*, 2011.
- [52] George B. Arfken Hans J. Weber y Frank E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 7th ed^{ón}., 1985.
- [53] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and sons, Inc., 1972.
- [54] E. Witten. Anti de sitter space and holography. *arXiv:hep-th/9802150*, 1998.
- [55] Edward Witten. Multi-trace operators, boundary conditions, and ads/cft correspondence. *arXiv:hep-th/0112258v3*, 2002.
- [56] M. E. Peskin y D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [57] Jeffrey Yepez. Einstein's vierbein field theory of curved space. *arXiv:1106.2037*, 2008.
- [58] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2nd ed^{ón}., 2009.

- [59] Élie Cartan. *The Theory of Spinors*. Dover Publications, 1981. ISBN 978-0-486-64070-9.