

4/1  
20/1



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

## MODELO LINEAL PARA INYECCION DE AGUA EN YACIMIENTOS DE ACEITE

### T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO PETROLERO  
P R E S E N T A :  
AUGUSTO CESAR PLIEGO DIAZ

Asesor de Tesis: Ing. Jorge Alberto Osorno Manzo



México, D. F.

1990

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	Introducción.	
I.	Definición del Problema	..... 1
II.	Características y Desarrollo del Modelo Matemático	..... 3
	II.1 La ley de la conservación de la masa	..... 3
	II.2 Ecuación de estado de los fluidos	..... 7
	II.3 Ley de Darcy	..... 8
	II.4 Ecuaciones de difusión	..... 9
III.	Modelo Numérico	.... 12
	III.1 Discretización en el espacio y en el tiempo	.... 13
	III.2 Forma final del Modelo numérico	.... 17
	III.3 Cálculo de las Transmisibilidades	.... 18
IV.	Método de Solución	.... 21
	IV.1 Expansión de $\Delta_t$	.... 21
	IV.2 Método IMPES	.... 23
	IV.3 Estabilidad	.... 29
V.	Programa de Cómputo	.... 32
VI.	Ejemplo de Aplicación	.... 37
VII.	Resultados y Conclusiones	.... 43
	Nomenclatura	.... 45
	Bibliografía	.... 48

## INTRODUCCION

Los hidrocarburos representan un factor importante y determinante en la economía nacional. Su importancia radica en los bienes y servicios que involucra su procesamiento, así como el volumen de ingresos y divisas que son captados por el país a través de ese concepto. Su valor se traduce como la principal fuente de suministro de energéticos y la materia prima fundamental en las industrias de refinación y petroquímica.

Dado que son un recurso no renovable requieren para su explotación de técnicas más sofisticadas que permitan incrementar su recuperación, la cual depende fundamentalmente de las propiedades del sistema roca-fluidos de la formación productora, del tipo de mecanismo de desplazamiento, así como de la tecnología utilizada en su explotación.

En la primera etapa de explotación de hidrocarburos de un yacimiento se aprovecha la energía natural del mismo, lográndose recuperaciones entre el 12 y 15% del volumen original dependiendo del tipo de yacimiento. En una segunda etapa denominada Recuperación Secundaria, se obtienen cantidades adicionales de hidrocarburos a través de la inyección de algún fluido, generalmente agua, con el propósito de reestablecer el potencial del yacimiento

alcanzándose recuperaciones entre 20 y 35% en total<sup>1,1,2,3</sup>.

El presente trabajo está orientado a desarrollar un modelo matemático que permita simular el comportamiento de un yacimiento sujeto a un proceso de desplazamiento de aceite por agua. El modelo es resuelto numéricamente utilizando la técnica de diferencias finitas, solucionando el sistema de ecuaciones lineales que se genera por medio del algoritmo de Thomas.

Los resultados más importantes que se obtienen son, la distribución de la presión y de la saturación del aceite, así como la recuperación y el error por balance de materia.

Por último hay que hacer notar que sólo se tiene una oportunidad para explotar adecuadamente un yacimiento, cualquier error que se cometa estará presente por siempre. Sin embargo un estudio de simulación de un yacimiento puede realizarse para diferentes políticas de explotación, lo cual permitirá seleccionar la óptima, logrando así una recuperación mayor y seguramente una operación más económica.

## CAPITULO I

### DEFINICION DEL PROBLEMA

Uno de los grandes problemas que enfrenta la tecnología de la explotación del petróleo es la predicción del comportamiento de los fluidos en un yacimiento sujeto a procesos de recuperación secundaria. Aún cuando las leyes que gobiernan el flujo de fluidos através de medios porosos son bien conocidas<sup>4,5,6</sup>, las operaciones de recuperación secundaria por inyección de agua plantean un problema difícil de ser tratado matemáticamente.

Una de las primeras contribuciones en esta área fué realizada en la década de los cincuentas por Buckley-Leverett<sup>7</sup>, quienes desarrollaron las ecuaciones del proceso de desplazamiento entre fluidos inmiscibles en sistemas lineales utilizando el concepto de permeabilidad relativa y la idea del desplazamiento por medio de un pistón con fugas. Esta teoría presenta limitaciones por la necesidad de solución. Posteriormente Welge<sup>8</sup> replanteó esta teoría, simplificando el cálculo de la saturación de fluido en el frente de desplazamiento, haciendo más práctico y sencillo el método anterior.

El propósito del presente trabajo es el desarrollar un modelo matemático con menores limitaciones que permita predecir de manera confiable, el flujo bifásico agua-aceite en un sistema lineal.

El modelo matemático está representado por 2 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales, cuya solución no puede obtenerse analíticamente por lo que se resolverá por técnicas numéricas.

## CAPITULO II

### CARACTERISTICAS Y DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

Los principios físicos que permiten describir matemáticamente el flujo de fluidos en un medio poroso están regido por las mismas leyes fundamentales que gobiernan el movimiento en, por ejemplo, la atmósfera, tuberías y ríos. Estas leyes se basan en la conservación de la masa, y/o de la energía, de la cantidad de movimiento y en una ecuación de estado.

#### II.1 La Ley de la Conservación de la Masa.

Este principio establece, simplemente, que la masa que entra a un volumen de control, menos la que sale es igual a la acumulación de masa en el mismo.

Considere el flujo de un solo fluido ( como una mezcla homogénea o un solo componente ) en dirección axial en un núcleo cilíndrico como se muestra en la Fig.1 . El volumen de control debe ser representativo del medio poroso, esto es, debe de ser grande comparado con el tamaño de los poros pero pequeño comparado con el tamaño del núcleo. Las propiedades físicas del medio poroso, como la porosidad, deben de asociarse con el volumen de control, de tal manera que el valor de porosidad asociado en un punto  $P$  es el valor representativo para un volumen

de control que contiene al punto  $P$ . Otras propiedades físicas se definen de la misma manera en un punto en el medio poroso. Esta es la aproximación continua, en la cual el medio poroso real se sustituye por un medio continuo ficticio para cualquier punto al que le podamos asignar parámetros y variables que sean funciones continuas de las coordenadas de tiempo y espacio.

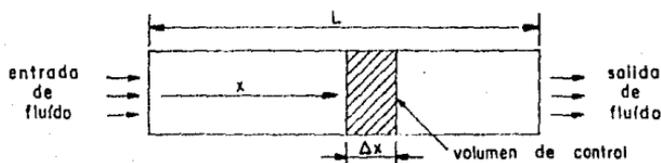


FIG. 1 Flujo lineal en un cilindro poroso de longitud  $\Delta x$

Sea  $\dot{m}_x$  la componente en la dirección  $x$  del vector de flujo másico (flujo de masa por unidad de volumen por unidad de tiempo) de un fluido de densidad  $\rho$ . Refiriéndose a la Fig.1, se observa que la entrada de masa a través de la superficie del volumen de control que se encuentra a una distancia  $x$ , durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$\dot{m}_x|_x A \Delta t$$

y que la masa que sale a través de la superficie del volumen de control que se encuentra en la distancia  $x +$

$\Delta x$ , durante el mismo intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$\dot{m}_x|_{x+\Delta x} A \Delta t$$

La diferencia entre la masa que entra y que sale debe ser igual a la acumulación de masa dentro del volumen de control. La acumulación de masa en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$\Delta V (\rho\phi)_{t+\Delta t} - \Delta V (\rho\phi)_t$$

y la extracción de masa del volumen de control, esto es, la acumulación de masa debido a una fuente o sumidero de intensidad  $Q'$  (masa por unidad de volumen por unidad de tiempo) en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$Q' \Delta V \Delta t$$

De donde se tiene:

$$(\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x}) A \Delta t = \Delta V \left[ (\rho\phi)_{t+\Delta t} - (\rho\phi)_t \right] + Q' \Delta V \Delta t$$

Dividiendo por  $\Delta V \Delta t$  y notando que  $\Delta V = A \Delta x$ , se obtiene:

$$\frac{\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{(\rho\phi)_{t+\Delta t} - (\rho\phi)_t}{\Delta t} + Q'$$

Tomando el límite conforme  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  se tendrá la ecuación de conservación de la masa para este sistema:

$$-\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + Q'$$

Nótese que  $Q'$  es positivo para una fuente, como un pozo inyector, y negativo para un sumidero, como un pozo productor, i.e. lo que entre es positivo, lo que salga es negativo.

Es posible expresar el flujo másico en términos de una velocidad superficial (o de Darcy) definida por:

$$\dot{m}_x = \rho u_x$$

Sustituyendo esta velocidad en la ecuación de continuidad se tiene:

$$-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + Q' \quad \dots 1$$

de manera análoga se procedería para las direcciones Y y Z, si se tuviera flujo en tres dimensiones, por lo que la ec.(1) se puede expresar en forma vectorial quedando:

$$-\nabla \cdot \rho \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \rho\phi \quad \dots 2$$

Nótese que en las ecs.(1) y (2) se está considerando un medio poroso saturado por un solo fluido, por lo que al generalizarse para el flujo de agua y de aceite se tiene:

Tomando el límite conforme  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  se tendrá la ecuación de conservación de la masa para este sistema:

$$-\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + Q'$$

Nótese que  $Q'$  es positivo para una fuente, como un pozo inyector, y negativo para un sumidero, como un pozo productor, i.e. lo que entre es positivo, lo que salga es negativo.

Es posible expresar el flujo másico en términos de una velocidad superficial (o de Darcy) definida por:

$$\dot{m}_x = \rho u_x$$

Sustituyendo esta velocidad en la ecuación de continuidad se tiene:

$$-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + Q' \quad \dots 1$$

de manera análoga se procedería para las direcciones Y y Z, si se tuviera flujo en tres dimensiones, por lo que la ec.(1) se puede expresar en forma vectorial quedando:

$$-\nabla \cdot \rho \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \rho\phi \quad \dots 2$$

Nótese que en las ecs.(1) y (2) se está considerando un medio poroso saturado por un solo fluido, por lo que al generalizarse para el flujo de agua y de aceite se tiene:

$$-\frac{\partial(\rho_o u_{ox})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (S_o \rho_o \phi) + Q'_o \quad \dots 3$$

$$-\frac{\partial(\rho_v u_{vx})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (S_v \rho_v \phi) + Q'_v \quad \dots 4$$

## II.2 Ecuación de Estado de los Fluidos.

Las ecuaciones de estado, expresan los cambios en las densidades de los fluidos como consecuencia de los cambios en la presión y la temperatura, en este trabajo se considera que el flujo de las fases ocurre isotérmicamente.

Las densidades del agua y del aceite a condiciones de yacimiento (c.y.), están relacionadas con las densidades a condiciones estándar (c.s.) de la siguiente manera:

$$\rho_o \text{ c. y.} = \frac{1}{B_o} \rho_{oc.s.} \quad \dots 5$$

$$\rho_v \text{ c. y.} = \frac{1}{B_v} \rho_{vc.s.} \quad \dots 6$$

Considerando que las densidades de los fluidos @ c.s. son constantes, sustituyendo las Ecs. (5) y (6) en las Ecs. (3) y (4), y simplificando se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{B_o} u_o) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{B_o} \phi S_o) + Q_o \quad \dots 7$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{B_v} u_v \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{B_v} \phi S_v \right) + Q_v \quad \dots 8$$

en donde:

$$Q_o = \frac{Q'_o}{\rho_{oc.s.}}$$

$$Q_v = \frac{Q'_v}{\rho_{vc.s.}}$$

### II.3 Ley de Darcy.

Además de la ecuación de continuidad ya desarrollada, se necesita una relación entre el ritmo de flujo y el gradiente de presión en cada fase. Tal relación fué descubierta por Darcy en 1856, para flujo de una fase. La forma diferencial de esta relación es:

$$\vec{u} = - \frac{k}{\mu} (\nabla P + \rho \frac{g}{g_c}) \quad \dots 9$$

donde  $k$  es el tensor de permeabilidad absoluta del medio poroso,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $g$  es el vector de aceleración gravitacional,  $P$  es la presión del fluido,  $\rho$  la densidad y  $\vec{u}$  es la velocidad aparente. en el presente trabajo no se consideran efectos gravitacionales, quedando la ecuación:

$$\vec{u} = - \frac{k}{\mu} \nabla P \quad \dots 10$$

Para el caso de flujo bifásico agua aceite se tienen las siguientes expresiones:

$$\dot{u}_o = - \frac{kk_{ro}}{\mu_o} \nabla P_o \quad \dots 11$$

$$\dot{u}_v = - \frac{kk_{rv}}{\mu_v} \nabla P_v \quad \dots 12$$

Obsérvese que las Ecs. (11) y (12) expresan una velocidad aparente, si se quiere obtener las velocidades reales, se debe de dividir las Ecs. (11) y (12) por la porosidad del medio.

#### II.4 Ecuaciones de Difusión.

Finalmente sustituyendo en las ecs.(7) y (8) las ecs. (11) y (12) respectivamente se obtienen las ecuaciones de difusión para el aceite y para el agua:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kk_{ro}}{\mu B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) + Q_o \quad \dots 13$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kk_{rv}}{\mu B_v} \frac{\partial P_v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_v}{B_v} \right) + Q_v \quad \dots 14$$

Nótese que se tiene un sistema de 2 ecuaciones diferenciales con 4 incógnitas ( $P_o, P_v, S_o, S_v$ ) por lo que para poder resolver éste, es necesario usar las siguientes relaciones :

$$S_o + S_v = 1 \quad \dots 15$$

$$P_c = P_o - P_v \quad \dots 16$$

Despejando de la Ec.(15) la  $S_v$ , y de la Ec.(16) la  $P_v$  y sustituyéndolas en la Ec.(14) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{kk_{ro}}{\mu B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_o}{B_o} \right\} + Q_o \dots 17$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{kk_{rv}}{\mu B_v} \frac{\partial (P_o - P_c)}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi (1 - S_o)}{B_v} \right\} + Q_v \dots 18$$

Las ecs.(17) y (18) representan el modelo matemático que describe el flujo bifásico agua-aceite en un medio poroso. Para tener definido completamente el problema es necesario involucrar las condiciones iniciales y de frontera. Las condiciones de frontera que se utilizan son las de frontera externa cerrada, o de no flujo, que matemáticamente son expresadas:

$$\left. \frac{\partial P_\ell}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial P_\ell}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

con las condiciones iniciales siguientes:

$$P_\ell(x, 0) = P_h$$

y

$$S_{\ell}(x,0) = S_{\ell a}$$

donde  $\ell = o.v.$

En el desarrollo del modelo matemático se encuentran de manera implícita las siguientes suposiciones:

- \* Yacimiento lineal, heterogéneo y anisótropo.
- \* Flujo laminar e isotérmico.
- \* Fluidos compresibles.
- \* El yacimiento es de aceite bajosaturado.
- \* No ocurre intercambio de masa entre las fases.
- \* No existe reacción química entre el medio poroso y los fluidos.
- \* No se presenta efecto electrocinético.
- \* No existe efecto de Klinkenberg (si se usa para simular inyección de gas).
- \* Se considera término fuente o sumidero.
- \* Se desprecia efecto gravitacional
- \* Se considera efecto capilar
- \* Medio poroso compresible.
- \* No se toma en cuenta el efecto de frontera.

### CAPITULO III

#### MODELO NUMERICO

Las Ecs. (17) y (18), a las que se llegó en el capítulo anterior, definen el Modelo Matemático que representa el flujo bifásico agua-aceite en un medio poroso lineal. Tales ecuaciones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no-lineales las cuales no tienen solución analítica, por lo que se utilizará la técnica de discretización por diferencias finitas, para resolverlas.

Antes de discretizar las ecuaciones anteriores se presentará el desarrollo de las aproximaciones discretas a las derivadas espaciales y del tiempo. La idea básica detrás de cualquier método de aproximación es remplazar el problema original por otro problema que sea más sencillo de resolver y cuya solución sea aproximada en algún sentido a la solución del problema original.

En la aproximación por medio de diferencias finitas, en lugar de tratar de encontrar una función continua, suficientemente suave la cual satisfaga la ecuación planteada, se buscan sólo valores aproximados de la solución, sobre un conjunto finito de puntos

discretos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dentro del intervalo  $(0, L)$ . Los puntos  $x_i$  se llaman nodos o puntos de la malla. De esta manera la ecuación diferencial se reemplaza por un conjunto de ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones se llaman "ecuaciones en diferencias finitas" y así el problema se reduce a un problema algebraico.

Básicamente, existen tres métodos para la discretización de cualquier operador, como lo son las derivadas parciales, estos son:

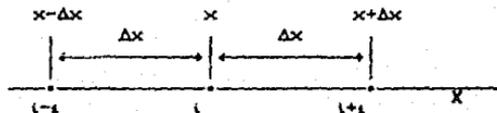
1. Método de Diferencias Finitas (Serie de Taylor).
2. El Método Integral.
3. El Método Variacional.

En el presente trabajo, se discretizará por medio del método de la serie de Taylor.

### III.1 Discretización en el Espacio y en el Tiempo.

#### Discretización en el Espacio.

Considérese una malla de nodos centrados con espaciamiento constante  $\Delta x$ , esto es:



El espaciamiento de malla está definido por:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = L/N \quad i=1, N$$

donde la distancia entre dos puntos consecutivos es la diferencia finita  $x$ .

Ahora expándase una función  $U$  cualquiera, en  $U_{i+1}$  y  $U_{i-1}$  en serie de Taylor alrededor de  $U_i$ :

$$U_{i+1} = U_i + U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} + U_i''' \frac{h^3}{6} + \dots$$

$$U_{i-1} = U_i - U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} - U_i''' \frac{h^3}{6} + \dots$$

Manipulando las dos series anteriores se pueden obtener las aproximaciones en diferencias finitas, para la primera derivada de  $U$ , es decir  $U_i'$ , entre las que se encuentran:

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} \quad \text{Diferencia Progresiva}$$

$$U_i' = \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{Diferencia Regresiva}$$

$$U_i' = \frac{U_{i+1/2} - U_{i-1/2}}{\Delta x} \quad \text{Diferencia Central}$$

La aproximación en diferencias centrales para la segunda derivada  $U_i''$  es:

$$U_i'' = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Una forma más común de expresar la ecuación

anterior es:

$$(U')' = (U'_{i+1/2} - U'_{i-1/2}) / \Delta x$$

donde

$$U'_{i+1/2} = (U_{i+1} - U_i) / \Delta x \quad \text{y} \quad U'_{i-1/2} = (U_i - U_{i-1}) / \Delta x$$

Si la malla presenta un espaciamento variable como se muestra en la Fig.2;

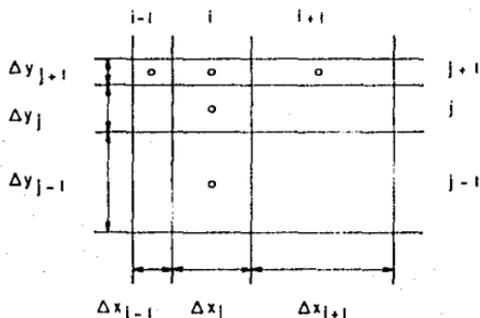


FIG. 2 Malla variable

la distancia entre los nodos (centros de los bloques) se obtiene de la siguiente manera:

$$\xi_{i+1/2} = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) \quad \forall i$$

Para mostrar la diferencia en la discretización

para el caso de malla con espaciamento constante y aquella con espaciamento variable, considérese la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Xi \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = 0$$

donde  $\Xi = \Xi(x)$

considerando un espaciamento constante se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Xi \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = \frac{\Xi_{i+1/2} (U_{i+1} - U_i) - \Xi_{i-1/2} (U_i - U_{i-1})}{\Delta x^2} = 0$$

y para un espaciamento variable:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Xi \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = \Xi_{i+1/2} \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_i \xi_{i+1/2}} - \Xi_{i-1/2} \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x_i \xi_{i-1/2}} = 0$$

Esta aproximación es más general por lo que es la que se utilizará en la discretización del modelo matemático.

#### Discretización en el Tiempo.

Para la primera derivada con respecto al tiempo se utilizará la aproximación en diferencias regresivas que es:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i = (U_i^{n+1} - U_i^n) / \Delta t$$

$$= \Delta_t U / \Delta t$$

### III.2 Forma Final del Modelo Numérico.

Aplicando a las Ecs. (17) y (18) las aproximaciones en diferencias finitas presentadas anteriormente, multiplicando ambas por el volumen de la celda  $\Delta V_{cl} = \Delta x_i \Delta y \Delta z$ , se llega al modelo numérico el cual se presenta a continuación:

$$\Delta_x (T_o \Delta_x P_o)_i + q_{oi} = \frac{V_{cl}}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i \dots \dots \dots 19$$

$$\Delta_x (T_v \Delta_x (P_o - P_c))_i + q_{vi} = \frac{V_{cl}}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi(1-S_o)}{B_v} \right)_i \dots \dots \dots 20$$

donde

$$\Delta_x (T_o \Delta_x P_o) = T_{oi+1/2} (P_{oi+1} - P_{oi}) - T_{oi-1/2} (P_{oi} - P_{oi-1})$$

$$\begin{aligned} \Delta_x (T_v \Delta_x (P_o - P_c)) &= T_{vi+1/2} ((P_o - P_c)_{i+1} - (P_o - P_c)_i) \\ &\quad - T_{vi-1/2} ((P_o - P_c)_i - (P_o - P_c)_{i-1}) \end{aligned}$$

donde las transmisibilidades son:

$$T_{oi+1/2} = \left[ \frac{k_r \ell}{\mu_l B_l} \frac{\Delta y \Delta z}{\zeta} \right]_{i+1/2}$$

$$T_{oi-1/2} = \left[ \frac{k_r \ell}{\mu_l B_l} \frac{\Delta y \Delta z}{\zeta} \right]_{i-1/2}$$

$q_A$  = ritmo de producción o de inyección del bloque  $i$  e condiciones estandar.

$V_{ci}$  = volumen del bloque  $i = \Delta x_i \Delta y \Delta z$

$\ell = 0, v$

### III.3 Cálculo de las Transmisibilidades.

Las transmisibilidades  $T_{i+1/2}$  y  $T_{i-1/2}$  que aparecen en las ecuaciones en diferencias finitas Ecs. (10) y (18), contienen términos dependientes de la presión como son,  $B_p$ ,  $\mu_p$ , y términos que dependen de la saturación como  $k_{r,p}$ . Estas variables se evalúan generalmente en el paso de tiempo anterior o sea explícitamente ( $t^n$ ), sin importar que las presiones estén referidas implícitamente.

Cuando se está calculando la transmisibilidad para el aceite

$$T_{oi+1/2} = \left[ \frac{k_{ro} \Delta y \Delta z}{\mu_o B_o k} \right]_{i+1/2}$$

se necesita conocer los valores de  $k_{ro}$ ,  $B_o$ , etc. en la posición  $i+1/2$ , entre los puntos  $i$  e  $i+1$ . Sin embargo, sólo se conocen las presiones y las saturaciones en estos últimos. Las propiedades dependientes de la presión son generalmente promediadas arítmicamente o tomadas en el punto corriente arriba. El punto corriente arriba es  $i+1$ , si el flujo es de  $i+1$  a  $i$ , y es  $i$  si el flujo es en la dirección opuesta. Los casos reportados en la

literatura<sup>9,10,11</sup>, han demostrado la supremacía de esta última técnica sobre la primera y otras.

El valor de la permeabilidad relativa entre los bloques  $i$  e  $i+1$  puede obtenerse por medio de:

a). Un promedio pesado

$$k_{r_{i+1/2}} = w(k_r)_{\text{upstream}} + (1-w)(k_r)_{\text{downstream}}$$

b). Un promedio de  $k_r$  pesada según la saturación

c). Un promedio armónico

Se recomienda categóricamente el uso de la técnica corriente arriba, porque las técnicas a y b presentan errores en perfiles de saturación abruptos.

El término  $k/\xi$  restante en el cálculo de las transmisibilidades se obtuvo utilizando un promedio armónico. Considérese la geometría mostrada en la Fig. 3 que consiste en dos bloques adyacentes con diferentes permeabilidades absolutas:

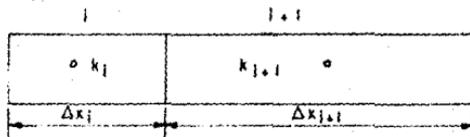


FIG. 3 Bloques de longitudes y permeabilidades diferentes

sabiendo que la ley de Darcy relaciona la caída de

presión con el ritmo de flujo:

$$q = \left[ \frac{k}{\zeta} \right]_m \frac{A}{\mu} (P_i - P_{i+1})$$

donde A es el área transversal igual a  $\Delta y \Delta z$ , y además considerando que  $P_i - P_{i+1} = P_i - P_{i+1/2} + P_{i+1/2} - P_{i+1}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{k}{\zeta} \right]_{i+1/2} &= \frac{1}{\frac{\Delta x_i / 2}{k_i} + \frac{\Delta x_{i+1} / 2}{k_{i+1}}} \\ &= \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i \Delta x_{i+1} + k_{i+1} \Delta x_i} \end{aligned}$$

Esta técnica de valuación es superior al promedio aritmético de  $k/\zeta$  de los dos bloques, cuando se alcanzan condiciones de flujo estable.

Por tanto las transmisibilidades se calculan como:

$$T_{\Delta+1/2} = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i \Delta x_{i+1} + k_{i+1} \Delta x_i} (\Delta y \Delta z) (k_r \zeta)_{\text{upstream}} \left[ \frac{1}{\mu \zeta B \rho} \right]_{\text{upstream}}$$

Las anteriores se evalúan a partir de las distribuciones de presión y saturación conocidas, o sea explícitamente, o al nivel de tiempo anterior  $t^n$

## CAPITULO IV

### METODO DE SOLUCION

En el capítulo anterior se derivó la discretización en diferencias finitas, de las ecuaciones que describen el flujo bifásico agua-aceite, Ecs (19) y (20).

La idea principal del método de solución seleccionado, IMPES, es reducir las ecuaciones de flujo multifásico en una sola ecuación con una incógnita, que es la presión de alguna de las fases. Para lograr esto es necesario expandir los términos que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones, de una manera conveniente, y luego sumarlas de alguna manera. La expansión que se haga debe de ser consistente con el balance de materia.

#### IV.1 Expansión de $\Delta_t$ .

*La expansión que se utiliza en este trabajo, y que es consistente, como se puede probar, es la siguiente:*

$$\Delta_t(ab) = a^{n+1}\Delta_t b + b^n\Delta_t a$$

ya que se reduce idénticamente a  $(ab)^{n+1} - (ab)^n$ .

Se eligió ésta porque al operar en los lados

derechos de las ecuaciones (19) y (20), se evita la aparición de saturaciones evaluadas al nivel de tiempo desconocido  $n+1$ .

Expandiendo el lado derecho de la ecuación del aceite Ec.(19), se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta_i \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) &= \left( \frac{\phi}{B_o} \right)^{n+1} \Delta_i S_o + S_o^n \Delta_i \left( \frac{\phi}{B_o} \right) \\ &= S_o^n \left\{ \phi^{n+1} \Delta_i \left( \frac{1}{B_o} \right) + \left( \frac{1}{B_o} \right)^n \Delta_i \phi \right\} + \left( \frac{\phi}{B_o} \right)^{n+1} \Delta_i S_o \\ &= S_o^n \left[ \phi^{n+1} c_{1+c_f \delta P_{res}} \left( \frac{1}{B_o} \right) + \left( \frac{1}{B_o} \right)^n \phi^n c_f \right] \Delta_i P_o + \left( \frac{\phi}{B_o} \right)^{n+1} \Delta_i S_o \end{aligned}$$

donde se toma en cuenta que:  $\phi^{n+1} = \phi^n (1 + c_f \delta P_{res})$ .  
de manera análoga, para el agua Ec. (20) se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta_i \left( \frac{\phi(1-S_o)}{B_v} \right) &= (1-S_o)^n \left[ \phi^{n+1} c_{1+c_f \delta P_{res}} \left( \frac{1}{B_v} \right) + \left( \frac{1}{B_v} \right)^n \phi^n c_f \right] \Delta_i (P_o - P_o) \\ &+ \left( \frac{\phi}{B_v} \right)^{n+1} \Delta_i (1-S_o) \end{aligned}$$

nótese que:

$$P_{reservoir} = (P_o + P_v) / 2$$

y que  $\delta P_{res}$  es igual al cambio de presión de poro del yacimiento.

#### IV.2 Método IMPES.

El método de solución que se utiliza es el IMPES, "Implicit Pressure Explicit Saturation", y la suposición básica de éste es "La presión capilar no cambia a lo largo de un período de tiempo"<sup>P</sup>, es decir, ésta y las permeabilidades relativas se calculan a partir de los valores conocidos de saturación, por tanto:

$$\Delta_i P_{cov} = 0$$

de donde se deduce que:

$$\Delta_i P_o = \Delta_i P_v$$

En este caso se ha elegido como incógnita, la presión del aceite. Además a partir de la constancia de la suma de las saturaciones se tiene:

$$\Delta_i (S_o + S_v) = \Delta_i (1) = 0$$

de donde  $\Delta_i S_v = -\Delta_i S_o$ , con lo que se puede tomar  $S_o = S$ . Nótese también que  $\delta P_{res} = \delta P$ . Al substituir los lados derechos en las ecuaciones respectivas, se obtienen las siguientes:

$$\Delta(T_{\Delta P}^n \Delta P_{\Delta t}) + q_o = \frac{V_{ci}}{\Delta t} \left\{ S^n \phi^n \left[ (1 + c_r \Delta P) \left( \frac{1}{B_o} \right)' + \frac{c_f}{B_o^n} \right] \Delta_t P + \left( \frac{\phi}{B_o} \right)^{n+1} \Delta_t S \right\} \dots\dots\dots 21$$

$$\Delta(T_{\Delta P}^n \Delta P_{\Delta t}) + q_v = \frac{V_{ci}}{\Delta t} \left\{ (1 - S) \phi^n \left[ (1 + c_r \Delta P) \left( \frac{1}{B_v} \right)' + \frac{c_f}{B_v^n} \right] \Delta_t P - \left( \frac{\phi}{B_v} \right)^{n+1} \Delta_t S \right\} \dots\dots\dots 22$$

Los términos  $\left( \frac{1}{B_o} \right)'$  y  $\left( \frac{1}{B_v} \right)'$  contienen las incógnitas  $B_o^{n+1}, B_o^{n+1}$  y  $p^{n+1}$ . Para evitar la no linealidad, estos valores específicos se aproximan con el último valor iterado disponible. Es importante notar que estos términos son pendientes de cuerdas trazadas entre los valores respectivos evaluados a los niveles de tiempo "n" y "n+1".

Al multiplicar la Ec.(21) por un factor A, sumándola a la Ec.(22), y haciendo que todos los factores que están asociados con  $\Delta S$  se anulen o sea que:

$$A \left[ \frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} \Delta_i S - \left[ \frac{\phi}{B_v} \right]^{n+1} \Delta_i S = 0$$

de donde se concluye que:  $A = \left[ \frac{B_o}{B_v} \right]^{n+1}$

Recuérdese que las unidades manejadas son las de Darcy, por lo que si se quiere utilizar otro sistema, se debe realizar la transformación correspondiente. En este trabajo se utilizan las unidades inglesas de campo con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} & AT_{oi+i/2}^n (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) - AT_{oi-i/2}^n (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + \\ & + T_{vi+i/2} \left[ (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_{i+i} - (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_i \right] - \\ & - T_{vi-i/2} \left[ (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_i - (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_{i-1} \right] + \\ & + 887.3115 C A q_o + q_v = \\ & = 158.0364 \frac{V}{\Delta t} (C A C_{10} + C_{20}) (P_i^{n+1} - P_i^n) \end{aligned}$$

donde:

$$A = \left[ \frac{B_o}{B_v} \right]^{n+1}$$

$$C_{10} = S^n \phi^n \left\{ (1 + C_f \delta P) \left( \frac{1}{B_o} \right)' + \frac{C_f}{B_o^n} \right\}$$

$$C_{20} = (1 - S^n) \phi^n \left\{ (1 + C_f \delta P) \left( \frac{1}{B_v} \right)' + \frac{C_f}{B_v^n} \right\}$$

$$\left( \frac{1}{B_o} \right)' = \frac{\frac{1}{B_o^{n+1}} - \frac{1}{B_o^n}}{p^{n+1} - p^n}$$

$$\left( \frac{1}{B_v} \right)' = \frac{\frac{1}{B_v^{n+1}} - \frac{1}{B_v^n}}{p^{n+1} - p^n}$$

Cabe mencionar que los términos  $C_{10}$ ,  $C_{20}$  y  $A$ , se actualizan en cada iteración hasta alcanzar la tolerancia fijada para la presión. Ordenando términos se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left\{ AT_{oi-1/2}^n + T_{vi-1/2}^n \right\} P_{i-1}^{n+1} \\
& + \\
& \left\{ -AT_{oi+1/2}^n - AT_{oi-1/2}^n - T_{vi+1/2}^n - T_{vi-1/2}^n - 158.0364 \frac{V_c}{\Delta t} (AC_{10} + C_{10}) \right\} P_i^n \\
& + \\
& \left\{ AT_{oi+1/2}^n + T_{vi+1/2}^n \right\} P_{i+1}^{n+1} \\
& = \\
& - \left[ 158.0364 \frac{V_c}{\Delta t} (AC_{10} + C_{20}) P_i^n - T_{vi+1/2}^n P_{covi+1}^n + T_{vi+1/2}^n P_{covi}^n \right. \\
& \left. T_{vi-1/2}^n P_{covi}^n - T_{vi-1/2}^n P_{covi-1}^n + 887.3115(Aq_o + q_v) \right] \dots 23
\end{aligned}$$

Al aplicar la Ec.(23) a cada una de las celdas de la malla se genera un sistema de ecuaciones algebraicas tridiagonal, el cual se resuelve por el algoritmo de Thomas<sup>10</sup>

Una vez que se ha encontrado la nueva distribución de presiones; se procede a calcular la distribución de la saturaciones, utilizando explícitamente cualquiera de las dos ecuaciones de flujo, i.e., tomando la del aceite se tiene:

$$S_{oi}^{n+1} = \frac{B_{oi}^{n+1} \left[ \frac{\Delta t (ACT_{oi} \Delta P_{oi} + 887.3115 q_{oi})}{158.0364 V_{ci}} + \frac{\phi_t^n S_{oi}^n}{B_{oi}^n} \right]}{\phi_t^{n+1}}$$

En la figura 4 se presenta el diagrama de bloques del método de solución IMPES.

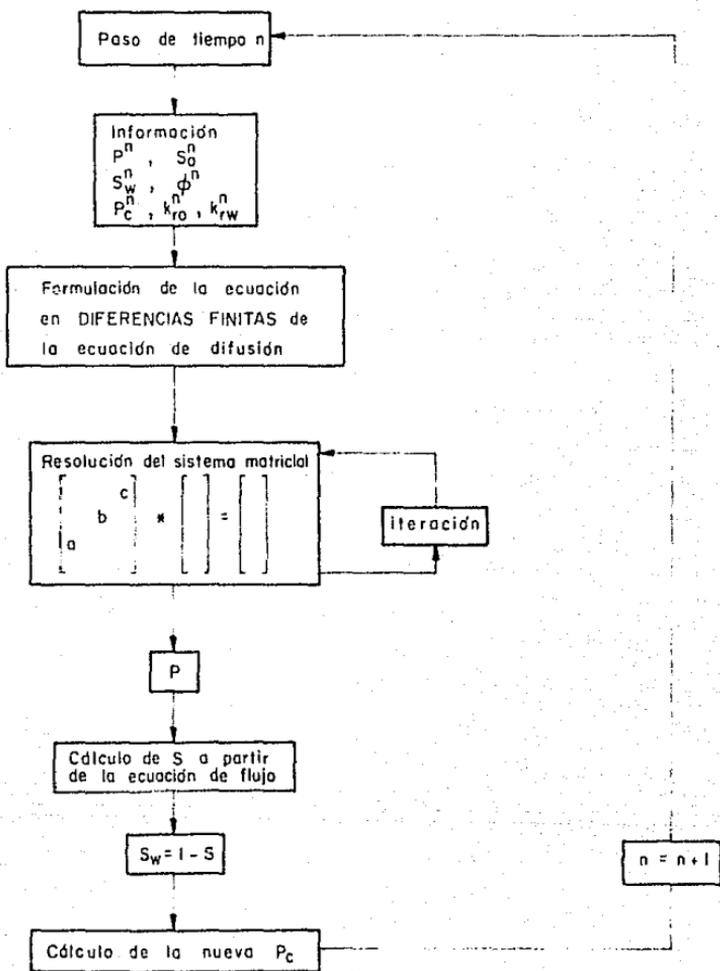


FIG. 4 Diagrama de bloques del método IMPES

#### IV.3 Estabilidad. P.44,45.

Al utilizar un modelo numérico, para aproximar la solución de una ecuación, es necesario preguntarse que efecto tienen sobre la solución numérica, el tamaño de los incrementos de tiempo que se utilizan. Para estudiar los errores que se generan y que se propagan por buscar de manera iterativa esta solución aproximada, el ingeniero recurre a los criterios de estabilidad.

Existen dos limitaciones posibles de estabilidad las cuales pueden analizarse independientemente, ya sea por análisis de Fourier o por análisis matricial.

La primera de estas limitaciones proviene del tratamiento o evaluación en forma explícita de las variables, i.e., el esquema IMPES maneja la presión capilar de manera explícita y por lo tanto existe un límite de estabilidad que depende del valor de  $dP_c/dS$ .

Por medio de un análisis matricial se puede demostrar<sup>P</sup>, que tal límite es:

$$\Delta t \leq V_p \left\{ \frac{1}{2 \left| p_c \right| \frac{T_v T_o}{T_r}} + \frac{S_v B_v}{T_r B_v'} \right\}$$

donde

$$T_t = B_t T_t \quad \text{y} \quad T_r = T_o + T_v$$

La segunda limitante resulta del manejo explícito de las transmisibilidades, que son las variables no lineales involucradas más importantes.

Por medio de un análisis de Fourier, y de la teoría de Buckley-Leverett, suponiendo flujo bifásico incompresible con presión capilar nula y despreciando efectos gravitacionales se llega a<sup>9</sup>:

$$\Delta t < \Delta x / u_f$$

lo que significa que el frente de invasión puede avanzar únicamente una distancia de un bloque por paso de tiempo, o que el gasto através de cualquier bloque por paso de tiempo debe ser menor que su volumen poroso.

En el pasado, un criterio útil y práctico era "seleccione un paso de tiempo tal que ocurra un cambio menor del 10 ó 20% en la saturación del fluido en el bloque en que se encuentre el pozo"<sup>11</sup>. Para un modelo de muchas celdas de dimensiones diferentes, este criterio se puede expresar como:

$$\Delta t_{\max} = \min \left\{ \left[ \frac{0.1 \phi \Delta x \Delta y h S_o}{\sigma \cdot \sigma_{15} q_{T0}} \right]_{L=1, n} \right\}$$

Así, el incremento máximo de tiempo es menor que el tiempo requerido para producir un décimo del volumen poroso de la celda más pequeña que contenga un pozo

## CAPITULO V

### PROGRAMA DE COMPUTO

Una vez expandida la ecuación de difusión en diferencias finitas, se codifica el programa que simula el problema planteado.

El lenguaje utilizado es FORTRAN 77, las propiedades de los fluidos, las permeabilidades relativas, y la presión capilar se proporcionan en forma de tabla. Sobre las subrutinas que utiliza el programa cabe señalar algunos detalles.

**Subrutina PLAF.** Esta subrutina calcula las pendientes de manera lineal, entre los valores que se proporcionan en forma de tabla y que se utilizan en la subrutina de interpolación ZLINE.

**Subrutina THOMAS.** Esta subrutina resuelve un sistema matricial tridiagonal<sup>10,14</sup>, y presenta ventajas de almacenamiento y de tiempo de cómputo sobre la técnica de eliminación Gaussiana.

**Error por el Método de Balance de Materia.** Un criterio para determinar la compatibilidad de los valores

de presión y de saturación que se obtienen de una simulación es el error por el método de balance de materia. Una forma de calcular éste, es conociendo los volúmenes de aceite en el yacimiento al principio y al final del intervalo de tiempo. La diferencia entre los valores deberá ser igual a la producción total durante el intervalo, esto es:

$$MBEI = \frac{\sum_1^m \left[ V_c \phi \frac{S_o}{B_o} \right]^n - \sum_1^m \left[ V_c \phi \frac{S_o}{B_o} \right]^{n+1}}{q_o \Delta t} - 1$$

donde  $V_c$  es el volumen de celda y la sumatoria se toma para las  $m$  celdas. Cabe advertir que es necesario obtener un valor pequeño de error por el método de balance de materia, pero esto no es suficiente para afirmar que la solución sea correcta. Un error pequeño indica que el aceite total que se tiene en el yacimiento a un nivel de tiempo  $n+1$  es correcto, pero de ninguna manera esto garantiza que el aceite esté distribuido correctamente entre todas las celdas<sup>14</sup>.

Volumen Poroso Inyectado. Se obtiene con la siguiente expresión:

$$V_{pi} = \frac{5.614 q_{ve} c. y. t}{AL \phi^{n+1}}$$

en donde A es el área transversal en pie<sup>2</sup>, L es la longitud total en pie,  $q_{v\phi c. y.}$  es el gasto total de inyección de agua,  $\phi^{n+1}$  es la porosidad al nivel de tiempo  $n+1$ , en fracción, y t es el tiempo acumulado en la simulación, en días.

Presión de Fondo Fluyendo. Como en el programa se especifica el gasto de producción y el de inyección, la  $P_{vf}$  se calcula para ambos casos con la siguiente expresión<sup>44</sup>

$$P_{vf} = P \mp \frac{q\mu BC \ln(r_e/r_w) - a/4 + S_D}{0.00707k k_r \Delta z}$$

donde:

$$r_e = \sqrt{\frac{\Delta x \Delta y}{\pi}}$$

..

Recuperación de Aceite. El cálculo de la recuperación de aceite se realizó en base al volumen original de la siguiente manera<sup>4d</sup>:

$$Rec = \frac{\sum_1^n (V_c \phi S_o)_{inicial} - \sum_1^n (V_c \phi S_o)^{n+1}}{\sum_1^n (V_c \phi S_o)_{inicial}}$$

La Fig.5 muestra el diagrama de bloques del programa.

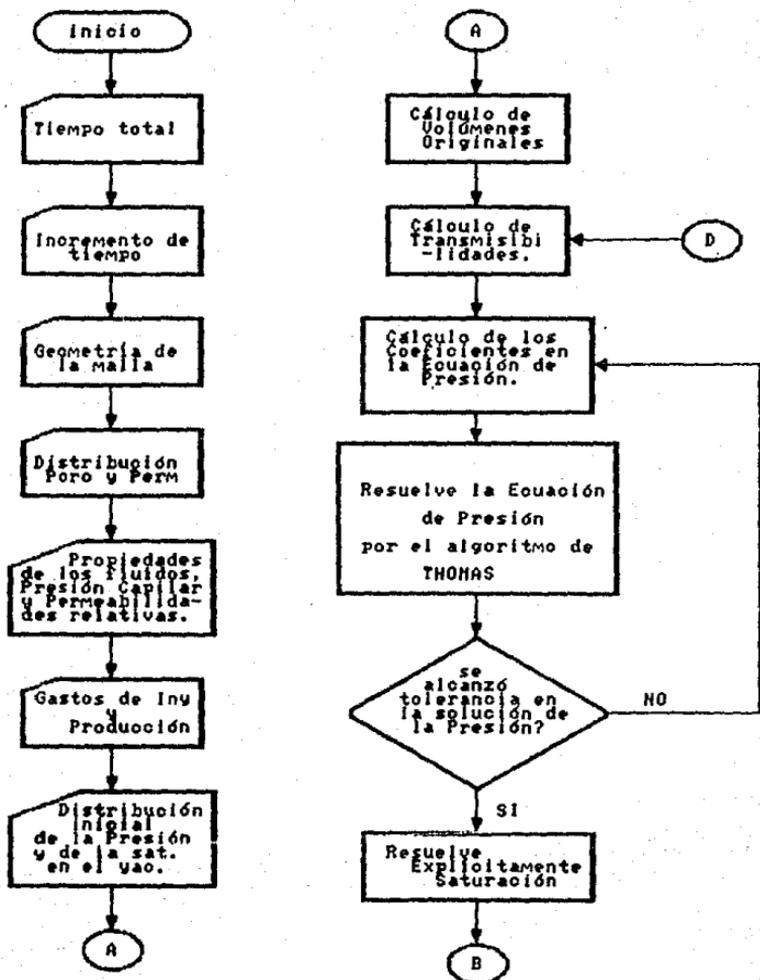


Figura 5. Diagrama de Bloques del Programa.

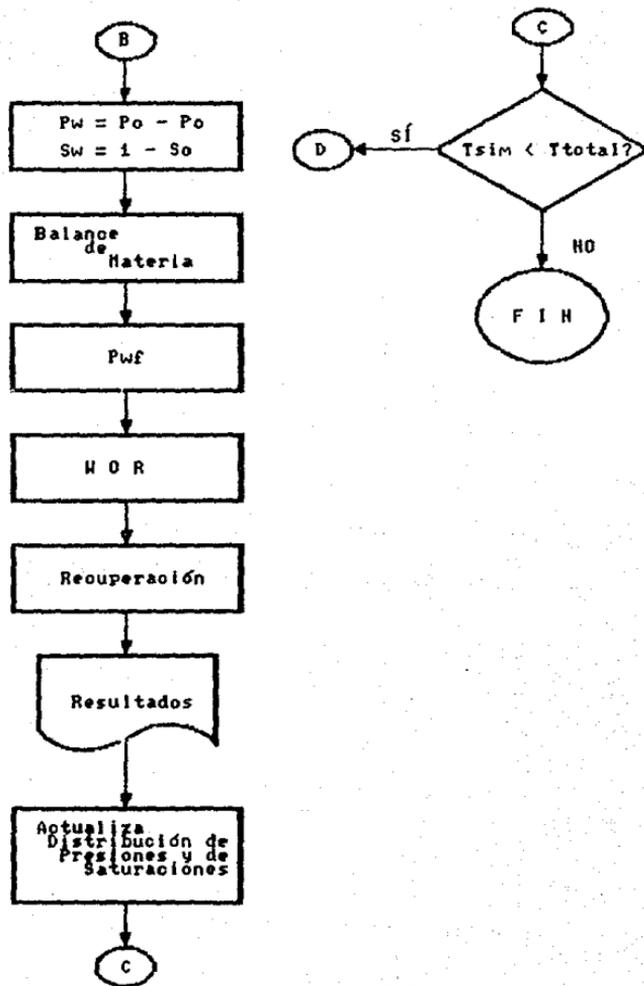


Figura 5. Diagrama de Bloques del Programa (cont.)

CAPITULO VI  
EJEMPLO DE APLICACION

Para validar la eficiencia del simulador que se desarrolló en el presente trabajo, se tomaron dos ejemplos de la literatura. El primero de ellos se tomó de las referencias 2,4,13, en las que se comparan los resultados numéricos con los que arroja la teoría de Buckley-Leverett. Los datos necesarios para correr el simulador se presentan a continuación:

Gasto de Inyección = 78 BPD

$\mu_o = \mu_v = 1$  cp

Porosidad de la formación = 0.20

Los fluidos son incompresibles.

Area Transversal = 10000 pie<sup>2</sup>

Longitud del Yacimiento = 1000 pie

Número de Bloques = 1000' / 25' = 40

Incremento de Tiempo = 10 días.

En la Fig. 6, se muestran las curvas de permeabilidades relativas al agua y al aceite, así como la de flujo fraccional de agua.

En la figura 7, se presentan los resultados.

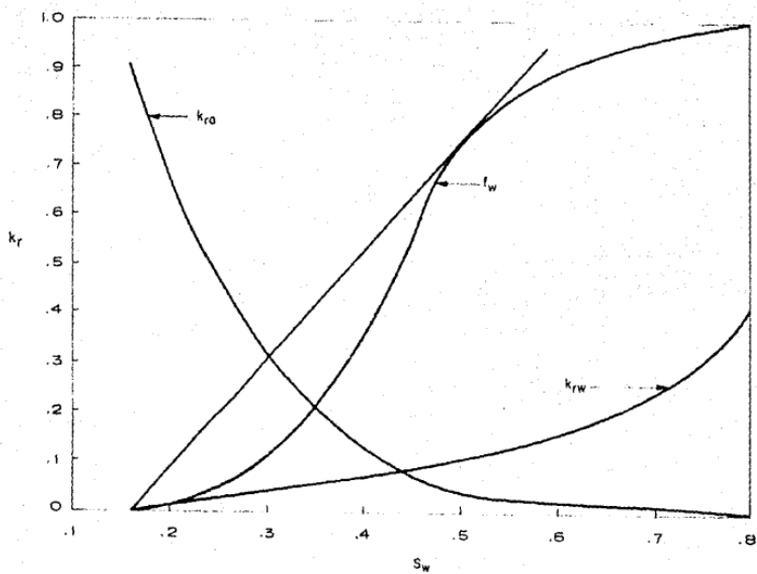
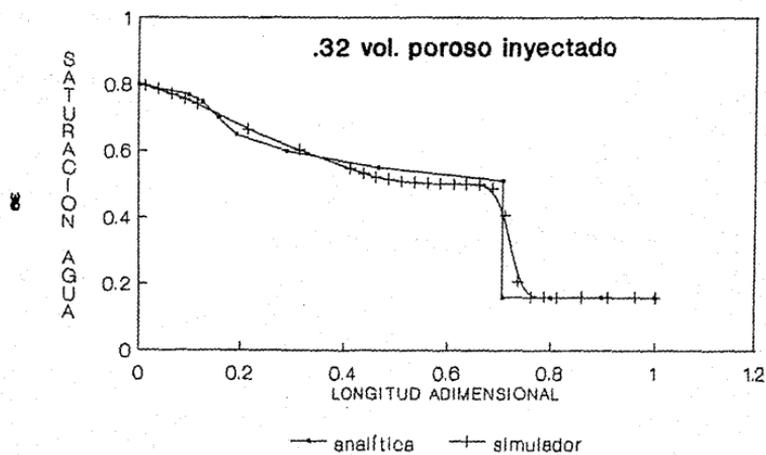


FIG. 6 Curvas de permeabilidad relativa agua-aceite y de flujo fraccional de agua

# DESPLAZAMIENTO UNIDIMENSIONAL AGUA ACEITE



PDAC

Fig. 7

Finalmente se realizó la segunda corrida de validación, utilizando los datos de la referencia 14, para el paquete BOAST (Black Oil Applied Simulation Tool)<sup>15</sup>. En las Figs. 8 y 9 se comparan los resultados.

Una forma adicional de probar la estabilidad del programa, es realizar una corrida con gastos de inyección y de producción iguales a cero. De esta forma los resultados de presión y de saturación que se obtengan, deben de ser bastante aproximados a los valores iniciales de presión y saturación que se tengan inicialmente.

COMPORTAMIENTO DE PRESION  
COMPARACION DE RESULTADOS

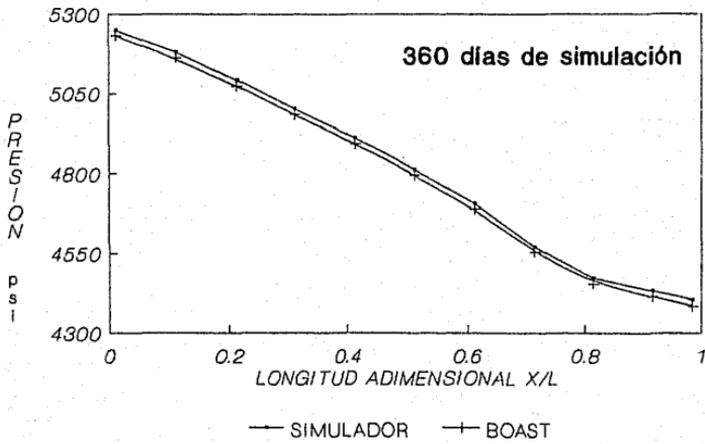


FIG. 8

DISTRIBUCION DE SATURACIONES  
COMPARACION DE RESULTADOS

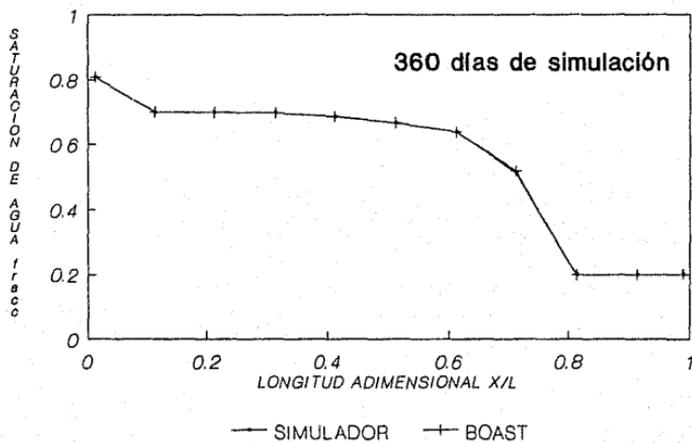


FIG. 9

## CAPITULO VII

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Analizando los resultados obtenidos al aplicar el simulador, se puede inferir lo siguiente:

Para el primer ejemplo de validación, se obtuvieron prácticamente los mismos resultados, en la distribución de la saturación del agua. Con respecto a la presión, estas referencias no aportan datos para la comparación.

Para el segundo ejemplo de aplicación, las diferencias entre las presiones calculadas por los dos simuladores, son mínimas, siendo la máxima diferencia de 20 lb/pg<sup>2</sup> (1.41 kg/cm<sup>2</sup>), para un tiempo total de 360 días. Esta diferencia se debe a que el paquete BOAST utiliza un método diferente de solución del sistema de ecuaciones. Con respecto a los resultados de saturaciones las diferencias que se presentaron entre los dos simuladores, fueron despreciables.

Por lo anterior, se concluye que el simulador desarrollado cumplió exitosamente, con el objetivo fijado, que era reproducir o simular el proceso de inyección de agua para desplazar aceite. Pero además,

resulta útil para:

- Simular un proyecto piloto de inyección de agua.
- Ajustar la historia de un yacimiento sujeto a un proceso de inyección de agua.
- Realizar un análisis de sensibilidad de los resultados, variando las propiedades de los fluidos y/o de las rocas.
- Simular pruebas de desplazamiento sobre núcleos en el laboratorio.
- Usarse didácticamente.
- Simular inyección de gas, a un yacimiento bajosaturado, considerando fluidos inmiscibles.

## NOMENCLATURA

Sólo se presentan las unidades finales de las variables más importantes.

- $\dot{m}_x$  Vector de flujo másico en la dirección x.
- $\rho$  Densidad ( $\text{lb}_m/\text{pie}^3$ ).
- x distancia en la dirección x (pie).
- $\Delta t$  Intervalo de tiempo (día).
- A Area transversal igual a  $\Delta y \Delta z$  ( $\text{pie}^2$ ).
- $\Delta x$  Diferencial de x.
- $\Delta V$  Diferencial de volumen igual a  $A \Delta x$ .
- $\phi$  Porosidad (fracción).
- $Q'$  Término fuente o sumidero.
- $\partial$  Símbolo de derivación parcial.
- $u_x$  Rapidez superficial o de Darcy en la dirección x.
- $\vec{u}$  Velocidad superficial ( $u_x, u_y, u_z$ ).
- $\nabla$  Operador divergencia ( $\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ )
- S Saturación (en la ecuación de  $P_{vf}$  representa el factor de daño) (fracción).
- B Factor de volumen.
- Q Igual a  $Q'/\rho$ .
- $\nabla$  Operador gradiente.
- k Permeabilidad absoluta (md).

- $P$  Presión. ( $\text{lb}_f/\text{pg}^2$ ).  
 $\mu$  Viscosidad (Ccp).  
 $g$  Aceleración de la gravedad.  
 $g_c$  Constante de transformación de unidades.  
 $k_r$  Permeabilidad relativa.
- $P_c$  Presión capilar ( $\text{lb}_f/\text{pg}^2$ ).  
 $L$  Longitud del yacimiento (pie).  
 $N$  Número de ecuaciones o nodos.  
 $U$  Variable cualquiera de  $x$  y  $t$ .  
 $E$  Variable cualquiera de  $U$ .  
 $\xi$  Distancia entre los nodos.  
 $\delta$  Variación.
- $\Delta_x$  Operador de discretización en la dirección  $x$ .  
 $\Delta_t$  Operador de discretización en el tiempo.  
 $q$  Ritmo de inyección o de producción BPD @ c.s..  
 $V_c$  Volumen de celda ( $\text{pie}^3$ ).  
 $T$  Transmisibilidad ( $q = T \Delta P$ ) (md-pie/cp).  
 $\omega$  Factor de promedio.  
 $A$  Factor para resolver el sistema.
- $C_{10}$  Variable de abreviación.  
 $C_{20}$  Variable de abreviación.  
 $r_e$  Radio de drenaje (pie).  
 $r_w$  Radio del pozo (pie).  
 $P_{vf}$  Presión de fondo fluyendo ( $\text{lb}_f/\text{pg}^2$ ).  
 $u_f$  Velocidad del frente (pie/seg).

Subíndices:

o aceite.

v agua.

i contador.

t total.

Superíndices indican nivel de tiempo.

## BIBLIOGRAFIA.

1. Oh S.G., y Slattery J.C.; "Interfacial tension required for significant displacement of residual oil."; SPEJ, June 1979.
2. Terán de la Garza, B.; "Métodos de recuperación secundaria."; publicación del IMP # 74B8/181.
3. Facultad de Ingeniería, UNAM; "Apuntes de Recuperación Secundaria" México, D.F.
4. Muskat, M.; "The flow of homogeneous fluids through porous media." New York, Ann Arbor, J.W. Edward, 1946.
5. Collins, R.E.; "Flow of fluids through porous materials."; Reinhold Publishing corporation, 1961.
6. Scheidegger, A.E.; "The physics of flow through porous media."; Toronto: University of Toronto Press, 1974.
7. Buckley, S.E.; y Leverett, M.C.; "Mechanism of fluid displacement in sands."; Trans. AIME (1942), 146, 107.

8. Welge, H.J.; "A simplified method for computing oil recovery by gas and water drive."; Trans AIME (1952), 195, 91.

9. Aziz, K., y Settari, A.; "Petroleum reservoir simulation."; Applied science publishers LTD, London, 1978.

10. Forsythe, E. et al. : "Computer methods for mathematical computations." Prentice-Hall inc. 1977.

11. Crichlow, H.B.: "Modern reservoir engineering-a simulation approach."; Prentice-Hall Inc. 1977.

12. O'Brien, G.G., Hyman, M.A., y Kaplan, S.: "A study of the numerical solution of partial differential equations."; Journal of mathematics and physics, (1950) V. 29, pp. 223.

13. Coats, K.H.; "Elements of reservoir simulation.". Engineering Institutes, College of Engineering, June 9-13, 1969. University of Texas.

14. Facultad de Ingeniería, UNAM; "Apuntes de simulación matemática de los yacimientos."; 1984. México D.F.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

15. French J.R. y Bujnowski S.W.: "Boast: A three Dimensional Three-Phase Black Oil Applied Simulation Tool (version 1.1) 1: Technical Description and Fortran Code. United States Department of Energy, DOE/BC/10033-3, september, 1982.

16. Pirson, S.J.; "Oil reservoir engineering, New York, Mc Graw-Hill, 1988. 2<sup>a</sup> Ed. pp. 577.