UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA ESPECTRAL DEL PROPAGADOR ELASTICO EN UN SEMIESPACIO CON FRONTERA LIBRE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA

CARLOS VILLEGAS BLAS

MEXICO, D.F. Junio de 1990.

INDICE

SECCION V

INTRODUCCION

Dentro de la Física Matemática es conocida la gran importancia que tiene para ella el análisis espectral de los operadores autoadjuntos para la descripción de muchos fenómenos físicos tanto en el caso clásico (propagación de ondas acústicas, elásticas y electromagnéticas) como en el caso cuántico (a cada observable se le asocia un operador que, dentro de la descripción teórica, se le pide que sea autoadjunto). La estructura matemática del espectro de tales operadores autoadjuntos está estrechamente ligada con aspectos relevantes de las propiedades físicas del sistema bajo estudio.

En el presente trabajo estamos interesados en estudiar un operador en particular que es de gran importancia para el estudio de la propagación de ondas elásticas. Dicho operador sera definido como el Propagador Elástico (P.E.) quien resulta ser un operador autadjunto y positivo. Nosotros estamos interesados en estudiar los eigenvalores positivos sumergidos en el espectro continuo (ver [K] para definiciones) de tal operador en el caso de un medio elástico que ocupa una región Ω con frontera libre, contenida en un semiespacio $\mathbb{R}^3_+$ o bien en $\mathbb{R}^3$ y con la propiedad de que su complemento relativo a $\mathbb{R}^3_+$ o a $\mathbb{R}^3$ sea acotado.

El estudio de los eigenvalores positivos sumergidos en el espectro continuo para cierto tipo de operadores autoadjuntos es un tema que ya ha sido trabajado en diversas partes. En Mecánica Cuántica, por ejemplo, es conocido el caso del potencial de Wigner-Von Newman, el cual muestra que es posible tener un Hamiltoniano donde el potencial tiende a cero en ∞ y que tenga un eigenvalor (energía) positivo asociado a una eigenfunción en $L^2(\mathbb{R}^3)$ (ref [R.S.1]). Por otro lado, en la referencia [E.K], M.S.P. Eastham y H.Kalf hablan sobre las propiedades matemáticas que debe tener el potencial para que un operador autoadjunto tipo Schrödinger tenga o no eigenvalores positivos sumergidos en espectro continuo. En el caso de la física clásica, R. Weder estudió en el caso acústico en una guía de ondas (ver ref. [W1] y [W2]) las condiciones matemáticas sobre la velocidad de propagación en una guía para que el Propagador Acústico (un operador autoadjunto y positivo definido con relación a la parte espacial de la ecuación de ondas acústicas) no tenga eigenvalores positivos sumergidos en el espectro continuo.

En esta tesis presentamos varios resultados originales acerca de la ausencia de eigenvalores positivos para el Propagador Elástico siguiendo ideas de R. Weder [W1] y [W2] así como de Littman [Li].

La sección I de esta tesis se dedica a introducir las ideas físicas relevantes con el fin de obtener, de una manera ya conocida (ver [L]), la ecuación de ondas elásticas en un medio isotrópico.

En la sección II se define al P.E. (sobre un espacio de Hilbert adecuado) en conexión con la parte espacial de la ecuación de ondas obtenida en la sección I. Se demuestra que es un operador autoadjunto y positivo.

En la sección III se trabaja con uno de los dos casos de interes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Se demuestra que el espectro del P.E. en este caso es el intervalo $[0,\infty)$, el cual tambien es su espectro continuo. Se demuestra un teorema que establece la compacidad del soporte de una función **U** que satisfaga la ecuación de eigenvalores para el P.E. cuando el medio es homogéneo fuera de un conjunto acotado Π. Se prueba que U es cero en la componente conexa al infinito del complemento de Π en $\mathbb{R}^3$. De dicho Teorema se tiene la ausencia de eigenvalores positivos del P.E. en el caso de un medio homogéneo en toda Ω.

En la sección IV se expone una descomposición (ya conocida) relacionada al P.E. para el caso del semiespacio isotrópico y homogéneo para utilizarla en la demostración de un teorema expuesto en la sección V. Tal teorema establece, para el caso de Ω contenido en el semiespacio R_+^3 , la misma conclusión que el Teorema de la sección III pidiéndo además que se satisfaga la condición de frontera libre exponencialmente. De este Teorema se obtiene de manera inmediata la ausencia de eigenvalores positivos para el P.E. definido en un medio isotrópico y homogéneo que ocupa una región $\Omega \subset R_+^3$.

SECCION I

I.1 *Introducción*

En esta sección expondremos en I.2 las ideas físicas que son necesarias para definir los tensores de esfuerzos y deformaciones en un medio elástico con el fin de obtener la ecuación de ondas en un medio isotrópico (I.3). En relación a tal ecuación de ondas, se definirá en la sección siguiente al Propagador Elástico para un medio isotrópico con frontera libre. Dicho Propagador es el objeto principal de nuestro estudio en esta tesis.

1.2 Ideas basicas acerca de los tensores de esfuerzos y deformaciones.

Diremos que un cuerpo sólido responde elásticamente si al deformarlo tenemos que el trabajo necesario para llevarlo de una configuración inicial a una final es independiente de la manera en que deformemos al cuerpo. En tal caso podemos definir a la energía potencial del sólido como igual a dicho trabajo.

Si tomamos un cuerpo que responda de manera elástica, lo deformamos y después le dejamos en libertad, entonces se moverá de tal modo que se conserve la energía que le dimos inicialmente al hacer el trabajo para deformarlo.

En la práctica, la respuesta elástica se da mientras las deformaciones no sean muy grandes (como en el caso bien conocido de un resorte). En tal caso diremos que estamos en la región elástica del sólido y hablaremos de este simplemente como un medio elástico.

Será de nuestro interés el considerar un medio elástico a través del cual se propague una perturbación . Como ya se mencionó, consideraremos que la energía mecánica del medio se conserva y con ello estaremos despreciando la disipación de calor a través del sólido. Posteriormente utilizaremos este hecho al pensar al proceso de la propagación de la perturbación como un proceso termodinámicamente adiabático.

Ahora veamos una descripción simple (ver [L]) de los tensores de deformaciones y de esfuerzos donde introduciremos las caracteristicas físicas que hemos mencionado para un medio elástico. Dicha descripción no será rigurosa desde el punto de vista matemático pues se trabajará con diferenciales de cantidades físicas cuando, rigurosamente hablando, debería trabajarse con incrementos de tales cantidades. Sin embargo sabemos que dicha descripción la podemos hacer rigurosa si dada una cantidad física $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ introducimos Δf en lugar de df considerando que dado un punto fijo $x \in E$ donde f es diferenciable se tiene que:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = f'(x)\,h + r(h)$$

donde $f'(x)$ es la transformación lineal que es la derivada de f en X y $r(h)$ tiene la propiedad de que $\lim_{\|h\|_{\mathbb{R}^n} \to 0} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow 0$.

Tomemos un cuerpo sólido que experimenta una deformación. Cada punto del cuerpo será localizado por su correspondiente vector de posición **X** con respecto a algún sistema de ejes elegido. Denotaremos por U(X) al cambio en la posición que dicho punto tiene durante la deformación:

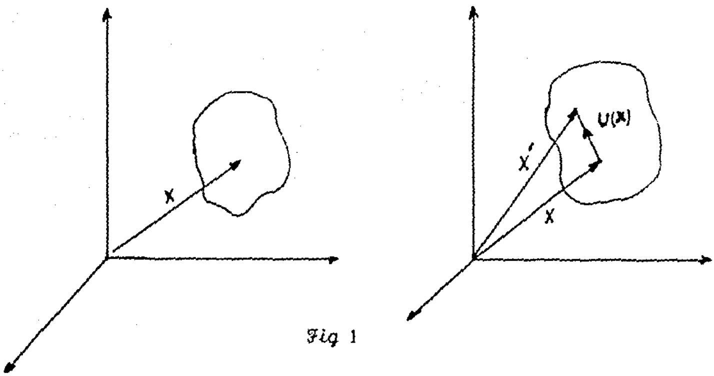


Fig 1

Así tendremos que

$$U(X) = X' - X \qquad 1.2.1$$

donde X es el vector de posición que localiza al punto A después de la deformación (ver Fig 1).

Para tener una medida adecuada de la deformación, lo que necesitamos conocer es la manera en que cambia U(X) con la posición (U podría no ser cero para toda X sin que el cuerpo se deformara : *una traslacion de cuerpo rigido*). Esto lo hacemos de la siguiente manera: Tomemos dos puntos que están separados por una distancia $|dX|$ como en la *Fig* 2 y que al deformarse el cuerpo son localizados por los vectores X_1' y X_2' respectivamente y quedan separados por una distancia $|dX'|$:

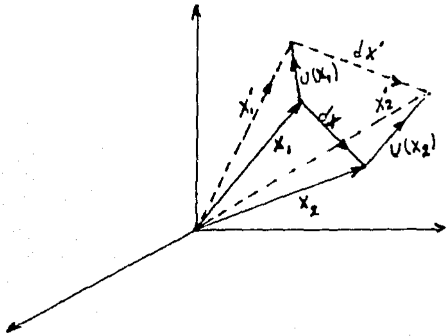


Fig 2

De la *Fig* 2 obtenemos la relación:

$$dU = U(X_2) - U(X_1) = dX' - dX \qquad 1.2.2$$

Como $|dX'|^2 = dX_i'dX_i'$ *y* $|dX|^2 = dX_idX_i$ (*en todo el trabajo utilizaremos la convencion de suma sobre indices repetidos*) tenemos de 1.2.2 :

$$|dX'|^2 = (dU_i + dX_i)(dU_i + dX_i) = (dX_j \cdot \partial U_i/\partial X_j + dX_i)\cdot$$
$$\cdot(dX_k \cdot \partial U_i/\partial X_k + dX_i)$$

$$\therefore \quad |dX'|^2 = |dX|^2 + 2U_{ik} \cdot dX_i dX_k \qquad 1.2.3$$

donde: $U_{ik} = (\partial U_i/\partial X_k + \partial U_k/\partial X_i + \partial U_l/\partial X_i \cdot \partial U_l/\partial X_k)/2.$

Supondremos deformaciones pequeñas (región elástica) de tal modo que $\partial U_i/\partial X_k$ sea pequeño para $i,k=1,2,3$. Con esto, el tercer término de la expresión para U_{ik} será despreciable en comparación con los dos primeros quedando la ecuación:

$$U_{ik} = (\partial U_i/\partial X_k + \partial U_k/\partial X_i)/2 \qquad 1.2.4$$

A la cantidad U_{ik} se le llama tensor de deformaciones.

Notemos que U_{ik} es simétrico; por lo tanto, al evaluarlo en un punto es una matriz de 3x3 que puede diagonalizarse en alguna base dependiente del punto. Si denotamos como $U_{(1)}$, $U_{(2)}$, $U_{(3)}$ a los eigenvalores de U_{ik} , la expresión de 1.2.3 en la base que diagonaliza a U_{ik} es la siguiente:

$$\sum dX_i'^2 = \sum [1+2U_{(i)}]dX_i^2$$

lo cual implica: $dX_i'^2 = [1+2U_{(i)}]dX_i^2$ para $i=1,2,3$. Entonces la deformación relativa en cada dirección es:

$$(dX_i' - dX_i)/dX_i = \sqrt{1+2U_{(i)}} - 1 \qquad i=1,2,3 \qquad 1.2.5$$

Al suponer deformaciones pequeñas (todos los $U_{(i)}$ son pequeños) tenemos de la ecuación 1.2.5 :

$$(dX_i' - dX_i)/dX_i = U_{(i)} \ . \qquad 1.2.6$$

Denotemos por dV y dV′ a los elementos de volúmen de una pequeña parte del cuerpo antes y después de la deformación respectivamente. Como $dV=dX_1dX_2dX_3$ y $dV'=dX'_1dX'_2dX'_3$ obtenemos de la ecuación 1.2.6 que el cambio relativo en el volúmen (a primer orden en $U(l)$) es :

$$(dV'-dV)/dV = \sum U(l) = \text{traza de } \mathbb{U}_{lk} \qquad 1.2.7$$

Cuando se tiene una deformación en el cuerpo esto implica la aparición de fuerzas internas que tratan de regresarlo a su estado inicial (sin deformaciones). Sea $\mathbb{F}$ la fuerza por unidad de volúmen ; o sea $\mathbb{F}dV$ es la fuerza sobre una parte del cuerpo de volúmen dV debida al resto del cuerpo y $\mathbb{F}_t=\int_V \mathbb{F}dV$ es la fuerza sobre un volúmen V. Al suponer que las fuerzas internas son de contacto (el cuerpo no está cargado por ejemplo y ,con esto, no hay interacción a distancia) es de esperarse que la contribución neta a la integral anterior provenga de los elementos de volúmen que están en la frontera. Entonces es físicamente aceptable el proponer que existe un tensor S_{lk} (llamado tensor de esfuerzos) que cumple con:

$$\mathbb{F}_l = \partial S_{lk}/\partial X_k \qquad 1.2.8$$

y de tal modo que al calcular la fuerza total sobre un volúmen V, la contribución neta a dicha fuerza provenga , al utilizar el teorema de la divergencia, de la superficie ∂V (al tener fuerzas de contacto no tendremos mas contribuciones a la fuerza calculada pues las fuerzas que provienen de los elementos de volúmen interiores a V se anulan por tercera ley de Newton). Tendremos entonces que:

$$(F_i)_i = \int_V \partial S_{ik}/\partial X_k \, dV = \int_{S=\partial V} S_{ik}\cdot n_k \, dS \qquad 1.2.9$$

donde (n_1,n_2,n_3) es el vector normal a la superficie $S=\partial V$.

De hecho, si se calcula la torca debida a la fuerza $\mathbb{F}$ sobre una porción del cuerpo y se pide que la contribución a la torca se deba unicamente a una integral sobre la superficie de la porción, se encuentra que S_{ik} debe ser simétrico (ver [L]).

La ecuación de equilibrio cuando un cuerpo está en un campo gravitacional $\mathbb{G} = (g_1,g_2,g_3)$ y su temperatura permanece constante es:

$$\partial S_{ik}/\partial X_k + \rho g_i = 0 \quad i=1,2,3. \qquad 1.2.10$$

donde ρ es la densidad volumétrica de masa.

Esta ecuación está restringida por la condición a la frontera dadas por la fuerza externa **P** por unidad de superficie que actúa sobre la superficie externa del cuerpo. A partir de la ecuación 1.2.9 se calcula con facilidad que dicha condición es :

$$S_{ik}\cdot n_k = P_i \quad \text{en } \partial V \quad \text{para } i=1,2,3. \qquad 1.2.11$$

Nuestro centro de interés es obtener la ecuación de ondas elásticas que satisface la función U(X). De la segunda ley de Newton y de la ecuación 1.2.8 tenemos que la masa de un elemento de volúmen del cuerpo mutiplicada por su aceleración $\partial^2 U/\partial^2 t$ es igual a la fuerza que se ejerce sobre este : $F_i dV = \partial S_{ik}/\partial X_k \cdot dV$. O sea :

$$\rho\partial^2 U_i/\partial^2 t = \partial S_{ik}/\partial X_k \, . \qquad 1.2.12$$

De la ecuación 1.2.12 se observa que necesitamos conocer S_{ik} como función de U_{ik}. Para esto se encontrará una expresión de la cantidad de trabajo por unidad de volúmen δW que las fuerzas internas harían al producir una deformación δU_i. Como demostraremos mas adelante, al utilizar la primera ley de la termodinámica y la definición de la energía libre F; se encontrará que $S_{ik} = (\partial F/\partial U_{ik})_T$. Para utilizar esta última expresión, se propondrá un desarrollo para F en serie de potencias de U_{ik} quedándonos hasta la aproximación de segundo orden. Con todo lo anterior, S_{ik} quedará expresado en términos de los elementos del tensor U_{ik} y constantes a determinar que dependen del material. Lo que resta de esta sección se dedica para desarrollar lo señalado en este párrafo.

Supongamos un pequeño cambio δU_i producido por las fuerzas internas. El trabajo por unidad de volúmen, δW, que harán dichas fuerzas es $\delta W = \sum_i F_i \cdot \delta U_i$; por lo que el trabajo total sobre el volúmen V es:

$$\int_V \delta W \cdot dV = \int_V F_i \cdot \delta U_i \cdot dV = \int_V \partial S_{ik}/\partial X_k \cdot \delta U_i \cdot dV =$$
$$= \int_V \partial(S_{ik} \cdot \partial U_i)/\partial X_k \cdot dV - \int_V S_{ik} \cdot \partial \delta U_i/\partial X_k \cdot dV$$
$$= \int_{S=\partial V} S_{ik} \cdot \delta U_i \cdot n_k dS - \int_V S_{ik} \cdot \partial \delta U_i/\partial X_k \cdot dV \qquad 1.2.13$$

La integral de superficie en 1.2.13 se anula al suponer un medio no acotado que no está deformado en infinito o bien que tenga frontera libre ; el cual es el caso de interés para las siguientes secciones. Tenemos entonces de 1.2.13:

$$\int_V \delta W \cdot dV = -\int_V S_{ik} \cdot \partial\delta U_i/\partial X_k \cdot dV = -\frac{1}{2}\int_V S_{ik} \cdot (\partial\delta U_i/\partial X_k + \partial\delta U_k/\partial X_i) dV$$

$$\therefore \int_V \delta W \cdot dV = \int_V - S_{ik} \cdot \delta \mathfrak{U}_{ik} \cdot dV \qquad 1.2.14$$

La ecuación anterior implica que:

$$\delta W = - S_{ik} \cdot \delta \mathfrak{U}_{ik} \qquad 1.2.15$$

De la primera ley de la termodinámica tenemos que el cambio de la energía interna $d\xi$ del cuerpo viene dado por:

$$d\xi = T \cdot dS - dW \qquad 1.2.16$$

donde S es la entropía y T la temperatura del sistema.

De la ecuación 1.2.15 tenemos en 1.2.16:

$$d\xi = TdS + S_{ik} \cdot d\mathfrak{U}_{ik}. \qquad 1.2.17$$

De la expresión bien conocida para la energía libre $F=\xi-TS$ y de la ecuación 1.2.17 tenemos que:

$$dF = -SdT + S_{ik} \cdot d\mathfrak{U}_{ik} \qquad 1.2.18$$

y con esto llegamos a la ecuación importante:

$$S_{ik} = (\partial F/\partial \mathfrak{U}_{ik})_T \qquad 1.2.19$$

para todos los puntos del espacio.

1.3 *Medio elastico isotropico.*

De la discusión anterior vemos que necesitamos conocer una expresión de la energía libre F como función de los elementos del tensor de deformaciones U_{ik}. Propondremos que F tiene una expansión en serie de Taylor de dichos elementos considerando únicamente el desarrollo hasta segundo orden al suponer deformaciones pequeñas. Para comenzar por un caso simple tomemos la situación donde la temperatura del cuerpo fuese constante. Tenemos entonces:

$$F = F_0 + \sum_{i,k} C_{ik} U_{ik} + \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} U_{ij} U_{kl} \qquad 1.3.1$$

donde las cantidades C_{ik} y λ_{ijkl} son en general funciones de la posición (caso inhomogéneo) y caracterizan al tipo de material.

Ahora notemos que cuando no hay deformación ($U_{ik}=0$) esperamos físicamente que el tensor de esfuerzos sea también cero. Debido a que $S_{ik} = (\partial F/\partial U_{ik})_T$, el argumento anterior implica que F no puede tener términos lineales en U_{ik} y con esto todos los coeficientes C_{ik} en 1.3.1 deben ser cero.

Nos interesará un medio elástico isotrópico, el cual definiremos (ver [J.J]) pidiendo que la expresión de la energía libre F sea un escalar ante rotaciones del sistema de coordenadas, y que las componentes del tensor λ_{ijkl} no cambien al contraerlo con las rotaciones:

$$\lambda_{abcd} = R_{ia} \cdot R_{jb} \cdot R_{kc} \cdot R_{ld} \cdot \lambda_{ijkl} \qquad 1.3.2$$

donde R es cualquier matriz de rotacion en $\mathbb{R}^3$.

A parir de la condición 1.3.2 se puede ver (ref. [J.J]) que la expresión para la energía libre para un medio isotrópico dada en 1.3.1 es la siguiente:

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \cdot \lambda(X) \cdot (\sum \mathbb{U}_{ll})^2 + \mu(X) \cdot (\sum \mathbb{U}^2_{lk}) \qquad 1.3.3$$

donde $\lambda(x)$ y $\mu(x)$ son conocidos como los coeficientes de Lamé y la interpretación física de Fo es naturalmente como la energía libre del medio en ausencia de deformaciones.

De la expresión 1.3.3 para F y de 1.2.19 tenemos :

$$S_{lk} = (\partial F/\partial \mathbb{U}_{lk})_T = \lambda(X)(\sum_l \mathbb{U}_{ll}) \cdot \delta_{lk} + 2\mu(X)\mathbb{U}_{lk} \qquad 1.3.4$$

Cuando se propaga una perturbación en un sólido la temperatura de este va cambiando. Nos interesa conocer la dependencia de la energía libre F con la temperatura. Tal dependencia la supondremos proporcional al producto de $(T-T_0)$ (donde T_0 es la temperatura del sólido sin deformaciones) y de ($\sum_l \mathbb{U}_{ll}$) (que es el cambio relativo en el volúmen). Proponemos entonces :

$$F = F_0(T) - \alpha(X) \cdot k(X)(T-T_0)(\sum_l \mathbb{U}_{ll}) + \frac{1}{2} \lambda(X)(\sum_l \mathbb{U}_{ll})^2 + \mu(X)(\sum_{l,k} \mathbb{U}^2_{lk})$$

1.3.5

donde $F_0(T)$ es la energùa libre del sólido sin deformaciones, $\lambda(X)$,$\mu(X)$ son los coeficientes de Lamé ya introducidos , k(X) está dado por:

$$k(X) = \lambda(X) + \frac{1}{3}\mu(X) \qquad 1.3.6$$

y $\alpha(X)$ es el coeficiente de expansión térmica.

De 1.3.5 y 1.2.19 se tiene que:

$$S_{ik} = (\partial F/\partial U_{ik})_T = -\alpha(X)\cdot k(X)\cdot(T-T_0)\delta_{ik} + \lambda(X)\Big(\sum_i U_{ii}\Big)\delta_{ik} + 2\mu(X)U_{ik} \qquad 1.3.7$$

La interpretación de $\alpha(X)$ como el coeficiente de expansión térmica se basa en el siguiente argumento:
Si tenemos una deformación del sólido debido únicamente a un cambio en la temperatura; es decir, con ausencia de fuerzas externas, entonces $S_{ik} = (\partial F/\partial U_{ik})_T = 0$. Si en la ecuación 1.3.7 hacemos $i=k$ y sumamos sobre el ùndice i tenemos entonces de la definición de $k(X)$ (ecuación 1.3.6) :

$$\alpha(X) = \Big(\sum_i U_{ii}\Big)/(T-T_0) = \frac{\text{cambio relativo en el volùmen}}{\text{cambio en la temperatura}} . \qquad 1.3.8$$

Ahora supondremos que durante la propagación de la perturbación oscilatoria *no* se transmite calor de una parte del cuerpo a otra, o sea el proceso es adiabático. Esto es una buena aproximación si el tiempo que dura la transmisión de calor es muy grande comparado con el periodo temporal de la perturbación. En estas condiciones la entropía es una constante que podemos tomar como cero. Como $S=\partial F/\partial T$, entonces de la ecuación 1.3.5 tenemos:

$$0 = S(T) = S_0(T) - \alpha(X)\cdot k(X)\cdot\Big(\sum_i U_{ii}\Big) \qquad 1.3.9$$

donde $S_0(T)=\partial F_0(T)/\partial T$.

Supongamos que a primer orden en T:

$$S_0(T)=(T-T_0)C \quad \text{con C una constante} \qquad 1.3.10$$

Entonces de 1.3.9 y 1.3.10:

$$T-T_0 = \frac{\alpha(X)\cdot k(X)}{C}\cdot\left(\sum_i U_{ll}\right) \qquad 1.3.11$$

Al substituir 1.3.11 en 1.3.7:

$$S_{lk} = -\frac{\alpha^2(X)\cdot k^2(X)}{C}\cdot\left(\sum_i U_{ll}\right)\delta_{lk} + \lambda(X)\cdot\left(\sum_i U_{ll}\right)\delta_{lk} + 2\mu(X)\cdot U_{ik} \qquad 1.3.12$$

$$\therefore \quad S_{lk} = \lambda_{ad}(X)\cdot\left(\sum_i U_{ll}\right)\delta_{lk} + 2\mu_{ad}(X)\cdot U_{ik} \qquad 1.3.13$$

con:

$$\lambda_{ad}(X) = -\frac{\alpha^2(X)\cdot k^2(X)}{C} + \lambda(X) \qquad 1.3.14$$

y

$$\mu_{ad}(X) = \mu(X) \qquad 1.3.15$$

Las funciones $\lambda_{ad}(X)$ y $\mu_{ad}(X)$ son conocidas como los coeficientes de Lamé adiabáticos.

Nótese que de las expresiones 1.3.11, 1.3.14, 1.3.15 y considerando que $F_0(T)=(T-T_0)^2/2C$ (de acuerdo a la ecuación 1.3.10) tenemos que la expresión para la energía libre F en términos de $\lambda_{ad}(X)$ y $\mu_{ad}(X)$ es la siguiente:

$$F = \frac{1}{2}\cdot\lambda_{ad}(X)\cdot(\sum_i U_{ii})^2 + \mu_{ad}(X)\cdot(\sum_{i,k} U_{ik}^2) \qquad 1.3.16$$

Como puede verse de las ecuaciones 1.3.3, 1.3.4; 1.3.13, 1.3.16 la energía libre F y el tensor de esfuerzos S_{ik} tienen la misma estructura ya sea que se tomen los valores isotérmicos ($\lambda(X)$ y $\mu(X)$) o los adiabáticos de los coeficientes de Lamé ($\lambda_{ad}(X)$ y $\mu_{ad}(X)$).

Como $\sum_i U_{ii} = \nabla\cdot U$, tenemos de 1.3.13:

$$S_{ik} = \lambda_{ad}(X)\cdot\nabla\cdot U\cdot\delta ik + 2\mu_{ad}(X)\cdot U_{ik} \qquad 1.3.17$$

Por lo tanto, bajo las condiciones físicas mencionadas anteriormente, la ecuación de ondas elásticas 1.2.12 en un medio isotrópico nos queda:

$$\partial^2 U_i/\partial t^2 = \frac{1}{\rho(X)}\frac{\partial}{\partial X_k}[(\lambda_{ad}(X)\cdot\nabla\cdot U)\delta_{ik} + 2\mu_{ad}(X)\cdot U_{ik}] \qquad 1.3.18$$

En la siguiente sección se definirá al Propagador Elástico para la parte espacial de la ecuación 1.3.18. Estudiar las eigenfunciones de tal Propagador asociadas a eigenvalores positivos es el objetivo principal de esta tesis.

SECCION II

II.1 *Introducción.*

En esta sección definiremos, sobre un espacio de Hilbert adecuado, al operador llamado el Propagador Elástico; el cual será objeto de nuestro estudio. Esto lo haremos en conexión con la ecuación de ondas en un medio isotrópico (ver ecuación 1.3.18). Demostraremos que tal operador resulta ser autoadjunto y positivo.

En el presente trabajo estaremos interesados en definir al Propagador Elástico en un medio que ocupa una región Ω en los dos siguientes casos:

1) Ω es cualquier conjunto abierto que está contenido en $\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 > 0\}$ y además se cumple que $\overline{\mathbb{R}^3_+ - \Omega}$ (clausura de $\mathbb{R}^3_+ - \Omega$) es un conjunto compacto.

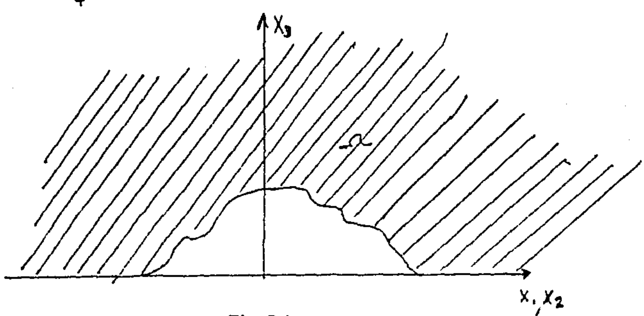


Fig 2.1

2) o bien que Ω sea un abierto en $\mathbb{R}^3$ y $\overline{\mathbb{R}^3 - \Omega}$ es un compacto:

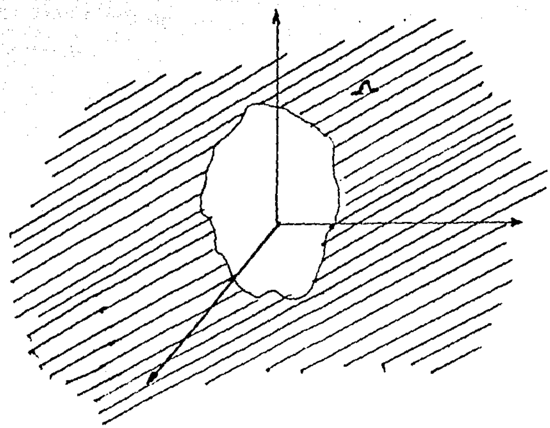


Fig 2.2

En esta sección II, Ω designará un conjunto abierto contenido en $\mathbb{R}^3_+$ o bien en $\mathbb{R}^3$.

II.2 Definicion del Propagador Elastico para un medio isotrópico.

Sabemos que el fenómeno de propagación de ondas en un medio elástico isotrópico es descrito, bajo las hipótesis físicas mencionadas al principio de este trabajo, por la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial X_j} \sigma_{ij}(U(x,t)) = 0 \qquad 2.2.1$$

con:

(i) U(x,t) es el desplazamiento que experimenta un punto en el sólido despuès de transcurrido un tiempo t suponiendo que tal punto se encontraba en la posición X al tiempo inicial t=0.

(ii) $\lambda(x)$ y $\mu(x)$ son los coeficientes de Lamé que caracterizan al material.

(iii) $\rho(x)$ es la densidad de masa del medio elástico.

(iv) $$U_{ij}(U) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \qquad 2.2.2$$

(v) $$\mathfrak{S}_{ij}(U(x,t)) = \lambda(x)(\nabla\cdot U)\delta_{ij} + 2\mu(x)\,U_{ij}(U) \qquad 2.2.3$$

Supondremos que las funciones $\lambda(x)$, $\mu(x)$ y $\rho(x)$ son medibles, positivas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. O sea, existen constantes λ_i, ρ_i, μ_i $(i=1,2)$ positivas tales que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda(x) \leq \lambda_2 \qquad 2.2.4$$

$$0 < \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2 \qquad 2.2.5$$

$$0 < \rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2 \qquad 2.2.6$$

La ecuación 2.2.1 va acompañada de condiciones a la frontera de Ω, las cuales describen la fuerza externa sobre el sólido. En particular es muy importante el estudio del caso con condición de frontera libre (no hay fuerzas externas sobre la superficie del sólido):

$$\mathfrak{S}_{ij}(U)n_j \Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad 2.2.7$$

donde (n_1, n_2, n_3) es el vector unitario perpendicular a la superficie $\partial\Omega$.

De la parte espacial de la ecuación de ondas elàsticas 2.2.1

(al hacer una separación de variables en el tiempo y el espacio) se sugiere el definir formalmente (en un principio) al operador:

$$(\mathcal{A}U)_i = -\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij}(U) \qquad 2.2.8$$

Con el fin de definir el dominio adecuado para la aplicación señalada en la ecuaci ó n 2.2.8, necesitamos introducir las siguientes definiciones:

Entenderemos por $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ como el espacio de Hilbert:

$$L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) = \left\{ \begin{array}{l} f : \Omega \to \mathbb{C}^3 / \ f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)), \ f_i(x) \text{ Lebesgue} \\ \text{medible} \quad y \quad \int_\Omega |f_i(x)|^2 dx < \infty \quad i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

2.2.9

dotado del producto escalar:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega f_i(x) \overline{g_i(x)} \, dx \quad \text{con} \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$
$$y \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)) \qquad 2.2.10$$

donde la integral es en el sentido de Lebesgue (tal y como se tomará en todo el trabajo).

Sea $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx)$ el espacio de Hilbert definido por:

$$L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx) \equiv \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}^3 / \int_\Omega |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty \right\} \qquad 2.2.11$$

dotado del producto escalar:

$$(f,g) \equiv \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} f_i(x)\,\overline{g_i(x)}\,\rho(x)\,dx$$

2.2.12

con $f(x)=(f_1,f_2,f_3)$ y $g(x)=(g_1,g_2,g_3)$

Notese que al cumplir $\rho(x)$ con la desigualdad 2.2.6, los espacios $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ y $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx)$ son el mismo conjunto y las normas provenientes de los productos escalares definidos en 2.2.10 y 2.2.12 son equivalentes (dos normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ definidas sobre un conjunto X son equivalentes si existen dos constantes positivas M_1 y M_2 tales que $C_1 \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq C_2 \|X\|_2$).

Reservaremos las letras $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para denotar a tres números cualesquiera en $\mathbb{N} - \{0\}$. Dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,definimos $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Dada una función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y α definido como arriba; denotemos por

$$D^{\alpha} g \equiv \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3^{\alpha_3}} g \qquad 2.2.13$$

donde las derivadas son tomadas en el sentido de distribuciones.

Dada una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ con $f = (f_1, f_2, f_3)$, definamos:

$$D^{\alpha} f \equiv (D^{\alpha} f_1, D^{\alpha} f_2, D^{\alpha} f_3) \qquad 2.2.14$$

con α definida como antes.

Entenderemos por $H^m(\Omega, \mathbb{C}^3)$ al espacio de Hilbert conocido como el espacio de Sobolev de orden m:

$$H^m(\Omega, \mathbb{C}^3) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}^3 / D^\alpha f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq m \}$$

2.2.15

dotado del siguiente producto escalar:

$$(U,V) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha U \, \overline{D^\alpha V} \, dx \qquad 2.2.16$$

Tomemos una función U en el espacio $H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ que tiene la propiedad de que $(\mathcal{A} U) \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ (ver ecuación 2.2.8 para la definición de $\mathcal{A}$). Diremos que U satisface la condición generalizada de frontera libre si para toda $V \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ se cumple la ecuación (ver referencia [D.G]):

$$\int_\Omega (\mathcal{A} U)_i \bar{V}_i \, f(x) dx - \int_\Omega [\lambda(x) (\nabla \cdot U)(\nabla \cdot \bar{V}) + 2\mu(x) \, \mathcal{E}_{ij}(U) \, \mathcal{E}_{ij}(\bar{V})] \, dx = 0$$

2.2.17

Nótese que al ocurrir que $U \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, $(\mathcal{A} U) \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ y $V \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$; las integrales que aparecen en la ecuación 2.2.17 están bien definidas y son finitas.

Definamos D(A) como el siguiente conjunto:

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} U \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, f(x)dx) \,/\, U \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3),\ \mathcal{A} U \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \text{ y} \\ U \text{ satisface la condición generalizada de frontera libre} \end{array} \right\}$$

2.2.18

En base a las anteriores definiciones que hemos hecho, definamos entonces al PROPAGADOR ELASTICO **A** como el siguiente operador:

$$A : D(A) \subset L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)\,dx) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)\,dx)$$

y

$$AU = \mathcal{A}\,U \qquad \text{para} \quad U \in D(A)) \tag{2.2.19}$$

Dado Ω un conjunto cumpliendo los requisitos mencionados al principio de este capítulo, diremos que Ω satisface la coindición del cono si existen θ, h constantes positivas de tal modo que para todo $X \in \Omega$ se puede construir un cono con vèrtice X, opertura θ y altura h que està completamente contenido en Ω (ver referencia [A]).

Con el requerimiento de que Ω satisfaga la condición del cono, el Propagador Elàstico resulta ser autoadjunto y positivo sobre el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)\,dx)$, lo cual probaremos en la Proposición 1.

Un comentario importante radica en que si $\partial\Omega$ es suave, $\lambda(X)$, $\mu(X)$ y $\rho(X)$ son dos veces continuamente diferenciables, entonces $D(A) \subset H^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ (ver referencia [M]) y la condición generalizada de frontera libre (ecuación 2.2.17) es la condición usual de frontera libre descrita en la ecuación 2.2.7.

Para ilustrar la importancia del estudio espectral del Propagador Elástico, mencionaremos un problema de gran importancia cuya solución está dada, mediante cálculo funcional, en términos de dicho Propagador.

Tomemos la ecuación de ondas 2.2.1 con la condición de frontera libre 2.2.7:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + AU = 0 \qquad 2.2.20$$

y

$$\sigma_{ij}(U)\, n_j \Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad 2.2.21$$

Supongamos que conocemos la perturbación y su velocidad a un tiempo inicial (problema de Cauchy):

$$U(X,0)=f(X) \qquad 2.2.22$$

y

$$(\partial U/\partial t)(X,0) = g(X) \qquad 2.2.23$$

donde $f \in D(A^{1/2})$, $A^{1/2}$ es definido mediante cálulo funcional (ver [S]) y $g \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)\, dx)$.

La solución al problema anterior (ecuaciones 2.2.20-2.2.23) está dada por (ver [L.P], [R,S.1] y [Wi]):

$$U(X,t) = \left(\cos A^{1/2} t\, f\right)(X) + \left(\frac{\operatorname{Sen} A^{1/2} t}{A^{1/2}}\, g\right)(X) \qquad 2.2.24$$

De la ecuación anterior vemos entonces que las propiedades espectrales del Propagador Elástico se verán reflejadas en las propiedades de la solución.

En cuanto a la interpretación física de la existencia de eigenvalores positivos del P.E. notemos que si U(X) es una eigenfunción de **A**, entonces la onda elástica asociada es $e^{\pm i\omega t}U(X)$; por lo que tendremos una onda que no se propaga, al transcurrir el tiempo, hacia infinito en el medio elástico (tenemos un estado acotado). En dicha onda el medio estará oscilando y tendrá además energía finita (pues U y $\mathcal{H}$ U están en $L^2(\Omega,\mathbb{C}^3)$; ver [D.G] y [Wi])

Una propiedad del Propagador Elástico que tiene mucha relevancia para nosotros es establecida en la siguiente:

PROPOSICION 1:

El Propagador Elàstico definido para un medio isotrópico que ocupa una región $\Omega\subset\mathbb{R}^3_+$ o bien $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ donde Ω es un abierto y satisface la condición del cono, es un operador autoadjunto y positivo sobre el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx)$.

PRUEBA:

De los teoremas 2.1 y 2.6 del capítulo VI §2 de la referencia [K] se prueba que:

Si t(u,v) es una forma densamente definida de dominio $D(t)\subset\mathcal{H}$ (con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert) y además t es simètrica, cerrada y acotada por abajo; entonces existe un operador autoadjunto **T** asociado a la forma **t** que es acotado por abajo y caracterizado de manera única por las condiciones:

$$D(T)\subset D(t) \qquad 2.2.25$$

y

$$t(U,V)=(TU,V) \qquad \forall\ U\in D(T)\ \text{y}\ V\in D(t) \qquad 2.2.26$$

Además, la cota inferior de **T** es la misma que la de **t**.

Definamos en nuestro caso la forma "a" de la siguiente manera:

$$D(a)= H^1(\Omega, \mathbb{C}^3) \qquad 2.2.27$$

y

$$a(U,V)= \int_\Omega \sigma_{ij}(U) \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} dx \qquad \text{con } U,V\in D(a) \qquad 2.2.28$$

Probemos ahora que a es simètrica,cerrada y acotada por abajo:

(i) Notemos primero que a està bien definida en virtud de la expresión σ_{ij} (ecuación 2.2.3) y la definición de D(a) (ecuación 2.2.27).

Es inmediato que D(a) es denso en $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx)$ pues todos los espacios $H^m(\Omega, \mathbb{C}^3)$ definidos en 2.2.15 contienen al conjunto de funciones:

$$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^3) = \left\{ f: \Omega \to \mathbb{C}^3 \;/f \text{ tiene soporte compacto y las derivadas de todos los ordenes} \right\}$$

Como es bien conocido, dicho conjunto es denso en $H^m(\Omega, \mathbb{C}^3)$.

(ver referencias [Ag] y [A]).

(ii) a es simetrica : $a(U,V)=\overline{a(V,U)}$

Prueba

Utilizando la ecuación 2.2.3 tenemos:

$$a(U,V)= \int_\Omega [\lambda(x)(\nabla\cdot U)\delta_{ij} + 2\mu(x) \varepsilon_{ij}(U)] \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} dx =$$

$$= \int_\Omega [\lambda(x)(\nabla\cdot U)(\overline{\nabla\cdot V}) + 2\mu(x) \varepsilon_{ij}(U) \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}] dx \qquad 2.2.29$$

De la expresión para $\varepsilon_{ij}(U)$ (ecuación 2.2.2) obtenemos:

$$\mathcal{U}_{ij}(v)\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} = \mathcal{U}_{ij}(\bar{v})\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \qquad 2.2.30$$

entonces en 2.2.29 tenemos:

$$a(U,V)=\int_{\Omega}[\lambda(x)(\nabla\cdot\bar{V})\delta_{ij}+2\mu(x)\,\mathcal{U}_{ij}(\bar{V})]\frac{\partial U_i}{\partial x_j}dx$$

$$\therefore \qquad a(U,V)=\overline{a(V,U)} \qquad 2.2.31$$

(iii) a es cerrada

Prueba:

P.D.

$$\left[\begin{array}{l} U_n \to U \quad , \quad U_n\in D(a) \\ L^2(\Omega,\mathbb{C}^3,(u)dx) \\ y \\ a(U_n-U_m)\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} U\in D(a) \\ y \\ a(U_n-U)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right]$$

Debido a la expresión 2.2.2:

$$\mathcal{U}_{ij}(v)\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} = \mathcal{U}_{ij}(v)\cdot\mathcal{U}_{ij}(\bar{v}) \qquad 2.2.32$$

De esta última ecuación y de 2.2.29:

$$a(U_n - U_m) = a(U_n - U_m, U_n - U_m)$$

$$= \int_\Omega [\lambda(x) |\nabla\cdot(U_n - U_m)|^2 + 2\mu(x) |\mathcal{E}_{ij}(U_n - U_m)|^2] dx \qquad 2.2.33$$

Por hipótesis tenemos que dada $\varepsilon>0$ $\exists$ $N=N(\varepsilon)$ $\ni$ si $n,m>N$ se tiene:

$$a(U_n - U_m) < 2\mu_1 \epsilon \qquad 2.2.34$$

donde μ_1 es la constante que satisface la desigualdad 2.2.5.

Entonces de 2.2.33 y 2.2.34 es inmediato que

$$\int_\Omega 2\mu(x) |\mathcal{E}_{ij}(U_n - U_m)|^2 dx < 2\mu_1 \epsilon \qquad 2.2.35$$

y de la desigualdad 2.2.5 concluimos que:

$$\int_\Omega |\mathcal{E}_{ij}(U_n - U_m)|^2 dx < \epsilon \qquad 2.2.36$$

Por otro lado, debido a que Ω satisface la propiedad del cono, se cumple la desigualdad de Korn (ver referencia [D.L]):

Para toda $f \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$

$$\int_\Omega \mathcal{E}_{ij}(f)\cdot\mathcal{E}_{ij}(\bar{f})dx + \int_\Omega f_i \bar{f}_i \, dx \geq C_1 \|f\|^2_{H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)} \qquad 2.2.37$$

donde $\|f\|^2_{H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)} = \int_\Omega |f_i^2| dx + \sum_i \int_\Omega |\frac{\partial f}{\partial x_i}|^2 dx$ y C_1 es una constante que depende solamente del conjunto Ω.

Por hipótesis $U_n \to U$ en $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx)$, entonces $\{U_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ debido a que la norma de este espacio es equivalente a la de $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3, \rho(x)dx)$ (ver desigualdad 2.2.6). Entonces al utilizar la ecuación 2.2.36 y suponer que $\int_\Omega |U_n - U_m|^2 dx < \epsilon$ para n,m>M y N'=max{N,M} tenemos que para n,m>N' :

$$\int_\Omega [|U_{ij}(U_n - U_m)|^2 + |U_n - U_m|^2] dx < 2\epsilon \qquad 2.2.38$$

Por la desigualdad de Korn (ecuación 2.2.37) y la ecuación anterior obtenemos que:

$$\| U_n - U_m \|^2_{H^1} < \frac{2\epsilon}{C} \qquad n, m > N' \qquad 2.2.39$$

Por lo tanto, $\{U_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$. Debido a que este espacio es completo (con la norma proveniente del producto escalar que definimos en 2.2.16) entonces existe $\omega \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3) \ni U_n \xrightarrow[H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)]{} \omega$.

Ahora, dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^3)$, tenemos:

$$\left(U, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \left(U_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_{L^2} = -\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_j}, \varphi\right)_{L^2} =$$

$$= -\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\partial U_n}{\partial x_j}, \varphi\right)_{L^2} = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \varphi\right)_{L^2} \qquad 2.2.40$$

Lo cual implica que $\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial W}{\partial x_j}$ para j=1,2,3 y ,por consecuencia, $U \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ (pues $\frac{\partial W}{\partial x_j} \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$). De hecho, $U = W$ a.e. en Ω pues $U_n \xrightarrow[L^2(\Omega,\mathbb{C}^3)]{} W$ y $U_n \xrightarrow[L^2(\Omega,\mathbb{C}^3)]{} U$.

Solo nos falta probar que $a(U_n - U) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pero esto ultimo es inmediato,pues $U_n \to U$ en $H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)$.

(iv) a es acotada por abajo

Prueba:

De las ecuaciones 2.2.29 y 2.2.32 :

$$a(U,U)=\int_\Omega [\lambda(x)\,|\nabla\cdot U|^2 + 2\mu(x)\,|\varepsilon_{ij}(U)|^2 dx \qquad 2.2.41$$

Como $\lambda(x)$ y $\mu(x)$ son positivas; es inmediato que:

$$a(U,U) \geq 0 \qquad \forall \ U\in D(A) \qquad 2.2.42$$

Ahora probaremos que el propagador elàstico es el único operador que cumple con las ecuaciones 2.2.25 y 2.2.26 con respecto a la forma a definida en 2.2.27 y 2.2.28 ; es decir:

$$D(A)\subset D(a) \qquad 2.2.43$$

$$a(U,V) = (AU,V) \qquad \forall \ U\in D(A) \text{ y } v\in D(a) \qquad 2.2.44$$

Prueba:

(i) De la definición de D(A) es inmediato que este conjunto està contenido en D(a) .

(ii) Tenemos , por definición, que:

$$(AU,V)_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^3,\rho(x)dx)} = \int_\Omega (AU)_i \bar{V}_i \rho(x)\,dx \qquad 2.2.45$$

Como U∈D(A), entonces satisface la condición generalizada de frontera libre (ecuación 2.2.17) y al estar V en $H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)$ por consecuencia se tiene:

$$(AU,V)_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^3,\rho(x)dx)} = \int_\Omega [\lambda(x)(\nabla\cdot U)(\nabla\cdot\bar{V}) + 2\mu(x)\,\varepsilon_{ij}(U)\,\varepsilon_{ij}(\bar{V})]\,dx \qquad 2.2.46$$

De las ecuaciones 2.2.29, 2.2.32 es inmediato que 2.2.45 se satisface y con esto último terminamos la prueba de la proposición 1.

■

Un caso interesante ocurre cuando $\mu(x)$, $\lambda(x)$ y $\rho(x)$ son constantes (μ_o , λ_o y ρ_o respectivamente) y $\Omega = \mathbb{R}^3_+$. O sea, tenemos un medio elàstico homogèneo que ocupa el semiespacio $\mathbb{R}^3_+$. En este caso denotaremos al operador **A** como **A**o. Como δΩ es suave en este caso, tendremos entonces que $D(A_o) \subset H^2(\mathbb{R}^3_+,\mathbb{C}^3)$ así como también que se cumplirá con la condición de frontera libre $\sigma_{ij} n_j \big|_{\partial\Omega} = 0$. De las ecuaciones 2.2.18 y 2.2.19 tenemos entonces:

$$D(A_o) = \left\{ U \in H^2(\mathbb{R}^3_+,\mathbb{C}^3) \,/\, \sigma_{ij}(U) n_j \Big|_{x_3=0} = \sigma_{i3}(U)\Big|_{x_3=0} = 0\,;\ i=1,2,3 \right\} \qquad 2.2.47$$

y

$$A_0 U = \mathcal{A}_0 U = -\frac{\lambda_0+\mu_0}{\rho_0}\nabla(\nabla\cdot U) - \frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta U \qquad 2.2.48$$

SECCION III

III.1 Acerca del espectro del Propagador elástico definido en un medio homogéneo $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ con frontera libre.

En el caso cuando $\Omega\subset\mathbb{R}^3_+$ se ha probado que el espectro del Propagador Elástico **A** es el intervalo $[0, \infty)$ y ,de hecho, tal conjunto también es el espectro continuo de **A** (ver [D.G]) . Mas aún, cuando $\Omega=\mathbb{R}^3_+$, se ha probado que el operador A_0 (medio homogéneo) es absolutamente continuo y, por consecuencia, no tiene eigenvalores (ver [K] para definiciones).

Nosotros también estaremos interesados en el Propagador Elástico **A** definido en $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, donde $\overline{\mathbb{R}^3-\Omega}$ es compacto y el medio elástico es homogéneo. Probaremos en la siguiente Proposición que en este último caso el espectro de **A** también es $[0, \infty)$:

PROPOSICION 2:

El espectro del operador **A** definido en un medio homogéneo $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ donde $\overline{\mathbb{R}^3-\Omega}$ es compacto y con frontera libre es el intervalo $[0, \infty)$.

Prueba:

Notemos que en este caso el Propagador Elástico está definido por:

$$AU = -\frac{\lambda_0+\mu_0}{\rho_0}\vec{\nabla}(\nabla\cdot U) - \frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta U \qquad 3.1.1$$

con

$D(A) = \{U \in H^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ $/AU \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ y U satisface la condicion generalizada de frontera libre$\}$ 3.1.2

Para probar que $[0, \infty)$ es el espectro de **A** en este caso, utilizaremos el siguiente teorema (ver referencia [Sch]):

Dado un operador Autoadjunto **A**, $\lambda \in \sigma(A)$ (espectro de **A**) si y solo si existe una sucesion $\{U_n\} \subset D(A)$ tales que $\| U_n \| = 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ y $\|(A-\lambda)U_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

La construcción de la sucesión de funciones la haremos a partir de la función siguiente:

$$\Psi_{\omega,P} = Z\, e^{iK\cdot X} \qquad 3.1.3$$

donde $Z=(-P_2,P_1,0)$; $K=(P_1,P_2, \xi(w^2))$, $w\in\mathbb{R}$,$P=(P_1,P_2)$, $w^2\frac{\rho_0}{\mu_0} - |P|^2 > 0$ y $\xi(w^2) = \left(\frac{\omega^2\rho_0}{\mu_0} - |P|^2\right)^{1/2}$.

La divergencia y el laplaciano de la función definida en 3.1.3 son:

$$\nabla\cdot\Psi_{\omega,P} = 0 \qquad 3.1.4$$

y

$$\Delta\Psi_{\omega,P} = \frac{-\omega^2}{\mu_0}\rho_0\Psi_{\omega,P} \qquad 3.1.5$$

por lo que es inmediato que la aplicación de $\mathcal{A}$ (ecuación 3.1.1) a $\Psi_{\omega,P}$ es:

$$\mathcal{A}\Psi_{\omega,P} = w^2\,\Psi_{\omega,P} \text{ con } w^2 \text{ cualquier real positivo.} \qquad 3.1.6$$

Sea $\lambda>0$, siempre existen $w>0$ y $P=(P_1,P_2)\in\mathbb{R}$ tales que $\lambda=w^2$ y $w^2\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}-|P|^2>0$. Tomemos la función $\psi_{w,P}$ asociada a w y **P** construida como en 3.1.3.

Definamos la función $\chi_R(x)$ como sigue:

$\overline{\mathbb{R}^3-\Omega}$ es compacto, entonces existe una bola de radio Q tales que $\Omega\subset B_Q(0)$.

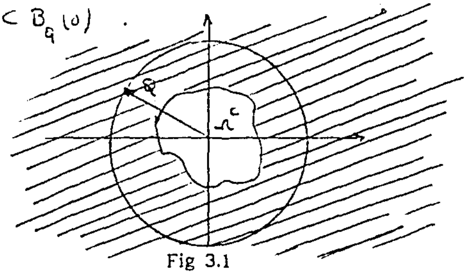


Fig 3.1

Tomemos $h(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y soporte en $[Q+1,Q+2]$:

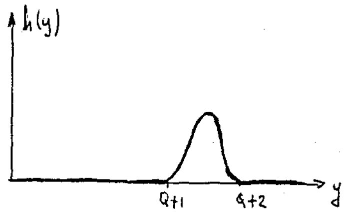


Fig 3.2

Dado $R\geq 1$ definamos

1) $$\chi_R(x)\equiv h\left(\frac{|x|}{R}\right)\quad x\in\Omega \tag{3.1.7}$$

2) $$\varphi_R(x)=\psi_{w,P}(x)\,\chi_R(x)\,C_R \tag{3.1.8}$$

donde C_R se toma de tal modo que $\|\varphi_R(x)\|=1$.

Dada $R\geq 1$ notemos que $\varphi_R(x)\in H^2(\Omega,\mathbb{C}^3)$ y además se anula en $B_{Q+1}(0)$ (bola de radio $Q+1$ centrada en el origen) así como también fuera de $B_{R\cdot(Q+2)}(0)$, por lo que es inmediato, al integrar por partes, que $\varphi_R(x)$ satisface la condición generalizada de frontera libre. Por lo tanto concluimos que $\varphi_R\in D(A)$ $\forall$ $R\geq 1$.

Ahora Probaremos que $\|(A-\lambda)\varphi_R\|\xrightarrow[R\to\infty]{}0$, con lo que tendremos $\lambda\in\sigma(A)$. Para ello notemos que:

$$A\varphi_R = w^2\varphi_R + f_1(x)\frac{C_R}{R}h'\left(\frac{|x|}{R}\right)+f_2(x)\frac{C_R}{R^2}h''\left(\frac{|x|}{R}\right) \qquad 3.1.9$$

donde $f_1(X)$ y $f_2(X)$ son funciones acotadas.

La constante de normalización C_R está dada por:

$$C_R^{-2}=\int_\Omega|\psi_{\omega,?}(x)\chi_R(x)|^2d^3x=\int_{\mathbb{R}^3}|e^{iKx}Z\chi_R(x)|^2d^3x=$$

$$=\|Z\|^2\int_{\mathbb{R}^3}\left|h\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|^2d^3\left(\frac{x}{R}\right)=C\cdot R^3 \qquad 3.1.10$$

donde C es una constante independiente de R.

Como consecuencia de 3.1.10 tenemos que:

$$\left\|f_1(x)\frac{C_R}{R}h'\left(\frac{|x|}{R}\right)\right\|\leq \text{const}\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\frac{C_R^2}{R^2}\left|h'\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|^2d^3x=$$

$$=\text{const}\cdot R\cdot C_R^2\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\left|h'\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|^2d^3\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$=\text{const}/R^2 \qquad 3.1.11$$

e igualmente:

$$\left\|f_2(x)\frac{C_R}{R^2}h''\left(\frac{|x|}{R}\right)\right\|\leq \text{const}/R^4 \qquad 3.1.12$$

De 3.1.11 y 3.1.12 es inmediato que $\|(A-\lambda)\varphi_\lambda\|\xrightarrow[R\to\infty]{}0$. ■

III.2 *Acerca de la ausencia de eigenvalores positivos del Propagador Elastico definido en un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^3$ y con frontera libre.*

Como una consecuencia de un teorema debido a R. Weder (referencia [W1]) acerca de la ausencia de eigenvalores positivos para el Propagador Elástico presentaremos ahora nuestro primer teorema para el caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Antes de ello hagamos la siguiente definición:

Tomemos un conjunto Π acotado. Entonces existe una bola de radio R que contiene a Π. Denotemos por $B_R^c(0)$ y Π^c al complemento en $\mathbb{R}^3$ de dicha bola y de Π respectivamente. Sea Π' el interior del siguiente conjunto $\{ X \in \mathbb{R}^3 /$ existe una curva continua que une a X con $B_R^c(0)$ y que está completamente contenida en $\Pi^c \}$. Llamaremos a Π' como la componente conexa al infinito del complemento de Π en $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA I

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto conexo y tales que $\mathbb{R}^3 - \Omega$ es un conjunto compacto. Supongamos que el medio es homogéneo fuera de un conjunto acotado $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Sea $U \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ tales que se cumple la siguiente ecuación en todo Ω :

$$\mathcal{H}\, U = \beta U \quad \text{con } \beta > 0 \tag{3.2.1}$$

donde $\mathcal{H}\, U$ es la aplicación definida en 2.2.8 .

Entonces

$$U = 0 \quad \text{en } \Pi' \tag{3.2.2}$$

donde Π' es la componente conexa al infinito del complemento de Π.

Debido a 3.2.1 tenemos que la siguiente ecuación es válida en Π (pues allí el medio es homogéneo y las aplicaciones $\mathcal{A}$ U y $\mathcal{A}_0$ U coinciden):

$$(\mathcal{A}_0 U)_i = -\frac{\lambda_0+\mu_0}{\rho_0}\frac{\partial \nabla\cdot U}{\partial X_i} - \frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta U_i = \beta U_i \qquad \text{en } \Pi' \qquad 3.2.3$$

con $U=(U_1,U_2,U_3)$.

Definamos $\varphi=\nabla\cdot U$. Si tomamos en 3.2.3 la derivada parcial con respecto a X_i y sumamos sobre i, tenemos que $\varphi \in H^2(\Pi', \mathbb{C}^3)$ es solución de la siguiente ecuación :

$$-\Delta\varphi = \frac{\beta}{\gamma}\varphi \qquad \text{en } \Pi' \qquad 3.2.4$$

con $\gamma = (\lambda_0+2\mu_0)/\rho_0$.

Como una aplicación simple de un teorema debido a R. Weder (referencia W1])es inmediato que $\varphi=0$ en todo Π'. Para comodidad del lector presentaremois dicho teorema en esta discusión dejando su demostración para [W1]:

Teorema:

Supongamos que tenemos dos funciones medibles $C(X,Y)$ y $C_0(Y)$ definidas en Ω un conexo de complemento compacto en $\mathbb{R}^{n+1}$(con $X\in\mathbb{R}^n$, $Y\in\mathbb{R}$) acotadas superior e inferiormente por constantes positivas y $n\geq 1$

Supongamos además que existen constantes positivas C_+,C_-,h_+,h_-, C,y γ tales que:

(i) $C_0(Y)=C_+$ para $Y\geq h_+$.

(ii) $|C_0(Y)-C_-| \leq C(1+Y)^{\frac{-1-\gamma}{2}}$ para $Y\leq h_-$.

(iii) $C(X,Y)-C_0(Y)=0$ para casi toda $Y>Y_0$ y alguna $Y_0\in\mathbb{R}$.

(iv) $|C(X,Y)-C_0(Y)| \leq C\exp(-\gamma|X|)(1+|Y|)^{-\frac{1}{2}-\gamma}$

con $|X|=(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)^{1/2}$.

Sea $U(X,Y)\in L^2(\Omega)$ solución en sentido de distribuciones en Ω de la siguiente ecuación:

$$-C^{2}(X,Y)\cdot\Delta U = \beta U \quad \text{para } \beta>0. \qquad 3.2.5$$

entonces concluimos que $U(X,Y)=0$ en Ω.

Por consecuencia, 3.2.3 se simplifica dando lugar a la siguiente ecuación:

$$-\frac{\mu_0}{\rho_i}\,\Delta\, U_i = \beta U_i \qquad \text{en } \Pi' \qquad i=1,2,3 \qquad 3.2.6$$

Aplicando nuevamente el argumento anterior a 3.2.6 concluimos que $U_i=0$ en Π' $(i=1,2,3)$ y, con esto, $U=0$ en Π'.

■

Comentario: Cuando todo el medio que ocupa a Ω es homogéneo tenemos de manera inmediata, a partir del Teorema I, el siguiente:

COROLARIO I

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un conexo de complemento compacto que es ocupado por un medio isotrópico y homogéneo. Sea $U\in H^1(\Omega,\mathbb{C}\ )$ tales que se cumple la siguiente ecuación en todo Ω:

$$\mathcal{A}_0 U = \beta U \quad \text{con } \beta>0 \qquad 3.2.7$$

donde $\mathcal{A}_0 U$ es la aplicación definida en 2.2.48.
Entonces

$$U=0 \quad \text{en todo } \Omega \qquad 3.2.8$$

Comentario: Notemos que el Teorema I no pide que U pertenezca al dominio del Propagador Elástico aunque si contempla a tal hecho como un caso particular. Del teorema I es inmediato, al satisfacerse la condición de frontera libre, el siguiente:

COROLARIO II

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto conexo de complemento compacto en $\mathbb{R}^3$. Entonces el Propagador Elástico definido sobre un medio isotrópico y homogéneo en Ω no tiene eigenvalores positivos.

Comentario:

Si $\Omega=\mathbb{R}^3$, $U \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$ y $\mathcal{A}_0 U = \beta U$ en Ω; entonces es inmediato que $U=0$, pues al definir $\varphi=\nabla\cdot U$ tenemos que $-\Delta\varphi = \frac{\beta}{\gamma}\varphi$ en $\mathbb{R}^3$. Tomando transformada de Fourier en la variable (X_1,X_2,X_3) encontramos que $k^2\hat{\varphi} = \frac{\beta}{\gamma}\hat{\varphi}$, lo cual implica que $\varphi=0$ en $\mathbb{R}^3$. De manera semejante probamos que $U=0$ en $\mathbb{R}^3$ al satisfacerse la ecuación $-\frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta U = \beta U$.

II-4 *Acerca de una descomposición relacionada al Propagador Elástico para el semiespacio isotrópico y homogénea.*

Ahora mostraremos un anàlisis del operador A_0 que Yves Dermenjian y Jean-Claude Guillot hacen en su artículo [D.G]. Este análisis lo utilizaremos para demostrar el Toerema II que expondremos posteriormente.

La idea bàsica del anàlisis para el operador A_0 que aquí presentamos radica en considerar el medio elàstico que ocupa el semiespacio $\mathbb{R}^3_+$ como un medio homogèneo, lo cual implica que el medio es invariante ante rotaciones alrrededor del eje X_3, lo que a su vez se verà reflejado matemàticamente de la siguiente manera:

Definamos al operador $\mathcal{F}$ como la transformada de Fourier en la variable $X=(X_1,X_2)$ dejando sin afectar al eje X_3 (que es con respecto al cual se tiene la invariancia ante rotaciones). Definamos al operador $\hat{A}_0 = \mathcal{F} A_0 \mathcal{F}^{-1}$. Si tomamos como (P_1,P_2) a las variables de la transformada de Fourier, tendremos que para cada $(P_1,P_2) \neq 0$ fijo existiràn un operador $\hat{A}_0(|P|,0)$,que dependerà de P_1 y P_2 solamente a travèz de $|P$ y también una matriz de rotaciones $\mathbb{D}(P_1,P_2)$ (con àngulo de rotación igual a $Arg(P_1,P_2)$) con la propiedad de que:

$$\hat{A}_0(P_1, P_2) = \mathbb{D}\, \hat{A}_0(|P|,0)\, \mathbb{D}^{-1} \qquad 4.1.1$$

Mas aún, el operador $\hat{A}_0(|P|,0)$ se descompone como la suma directa de otros dos operadores $B_1(|P|)$ y $B_2(|P|)$.

Veamos explicitamente lo mencionado en el pàrrafo anterior:

De las ecuaciones 2.2.47 y 2.2.48 que definen al operador A_c tenemos que $\hat{A}_c$ es la integral directa del campo de operadores autoadjuntos $\left(\hat{A}_c(P_1,P_2)\right)_{(P_1,P_2)\in\mathbb{R}^2}$:

$$\hat{A}_o = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \hat{A}_o(P_1,P_2)\, dP_1\, dP_2 \qquad 4.1.2$$

donde

$$\hat{A}_o(P_1,P_2) = \frac{1}{\rho_o}\begin{bmatrix} -\mu_o \frac{d^2}{dX_3^2} + (\lambda_o+2\mu_o)P_1^2 + \mu_o P_2^2 , & (\lambda_o+\mu_o)P_1 P_2 , & -i P_1(\lambda_o+\mu_o)\frac{d}{dX_3} \\ (\lambda_o+\mu_o)P_1P_2 , & -\mu_o\frac{d^2}{dX_3^2} + \mu_o P_1^2 + (\lambda_o+2\mu_o)P_2^2 , & -iP_2(\lambda_o+\mu_o)\frac{d}{dX_3} \\ -iP_1(\lambda_o+\mu_o)\frac{d}{dX_3} , & -iP_2(\lambda_o+\mu_o)\frac{d}{dX_3} , & -(\lambda_o+2\mu_o)\frac{d^2}{dX_3^2} + \mu_o|P|^2 \end{bmatrix}$$

4.1.3

y

$$D(\hat{A}_c(P_1,P_2)) = \Big\{ U\in H^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^3) \;/\; \frac{dU_1}{dX_3}(0) + iP_1U_3(0) = 0,$$

$$\frac{dU_2}{dX_3}(0) + iP_2U_3(0) = 0,$$

$$(\lambda_o+2\mu_o)\frac{dU_3}{dX_3}(0) + i\lambda_o P_1 U_1(0) +$$

$$+ i\lambda_o P_2 U_2(0) = 0 \Big\} \qquad 4.1.4$$

Dado $(P_1,P_2)\neq 0$ definimos a la matriz de rotación alrrededor del eje X_3 por un ángulo igual a Arg(P_1,P_2) como:

$$\mathbb{D}(P_1,P_2) = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} P_1 & -P_2 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & |P| \end{bmatrix} \qquad 4.1.5$$

De la ecuación 4.1.3 tenemos que el operador $\mathbb{D}^{-1}(P_1, P_2) \cdot \hat{A}_0(P_1, P_2) \cdot$ $\cdot \mathbb{D}(P_1, P_2)$ tiene la cualidad de que su dependencia en (P_1, P_2) es solo a travèz de $|P| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$; esto es:

Definamos al operador $\hat{A}_0(|P|, 0)$ como:

$$\hat{A}_0(|P|, 0) = \mathbb{D}^{-1}(P_1, P_2)\, \hat{A}_0(P_1, P_2)\, \mathbb{D}(P_1, P_2) \qquad 4.1.6$$

con

$$D(\hat{A}_0(|P|, 0)) = \mathbb{D}^{-1}\, D(\hat{A}_0(P_1, P_1)) \qquad 4.1.7$$

Veamos una expresión explicita para la ecuación 4.1.6. De las ecuaciónes 4.1.3 y 4.1.5 tenemos que para todo $V \in D(\hat{A}_0(|P|, 0))$:

$$\hat{A}_0(P_1, P_2)\mathbb{D} V =$$

$$= \frac{1}{|P|\rho_0} \begin{bmatrix} -\mu_0 P_1 V_1'' + \mu_0 P_2 V_2'' + P_1 |P|^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) V_1 - \mu_0 P_2 |P|^2 V_2 - i P_1 |P| (\lambda_0 + \mu_0) V_3' \\ -\mu_0 P_2 V_1'' - \mu_0 P_1 V_2'' + P_2 |P|^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) V_1 + \mu_0 P_1 |P|^2 V_2 - i P_2 |P| (\lambda_0 + \mu_0) V_3' \\ -i(\lambda_0 + \mu_0) |P|^2 V_1' + \mu_0 |P|^4 V_3 - |P| (\lambda_0 + \mu_0) V_3'' \end{bmatrix}$$

4.1.8

Como

$$\mathbb{D}^{-1}(P_1, P_2) = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & 0 \\ -P_2 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & |P| \end{bmatrix} \qquad 4.1.9$$

obtenemos entonces

$$\hat{A}_0(|P|,0)\,V = \mathbb{D}^{-1}\hat{A}_0(P_1,P_2)\,\mathbb{D}\,V =$$

$$= \frac{1}{\rho_0}\begin{bmatrix} -\mu_0 V_1'' + |P|^2(\lambda_0+2\mu_0)V_1 - i\,|P|(\lambda_0+\mu_0)V_3' \\ -\mu_0 V_2'' + \mu_0 |P|^2 V_2 \\ -i(\lambda_0+\mu_0)|P|V_1' + \mu_0|P|^2V_3 - (\lambda_0+2\mu_0)V_3'' \end{bmatrix} \qquad 4.1.10$$

Notese que de la ecuación 4.1.10 es justificable la notación empleada en 4.1.6 puesto que la expresión final del producto $\mathbb{D}^{-1}\hat{A}_0(P_1,P_2)\,\mathbb{D}$ se obtiene de la expresión 4.1.3 para $\hat{A}_0(P_1,P_2)$ haciendo $P_1=|P|$ y $P_2=0$.

Las condiciones a la frontera que debe cumplir $V \in D(\hat{A}_0(|P|,0))$ las obtenemos de la siguiente manera:

De 4.1.7 tenemos que existe $U \in D(\hat{A}_0(P_1,P_2))$ tales que $U = \mathbb{D}(P_1,P_2)V$, con lo cual:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} P_1V_1 - P_2V_2 \\ P_2V_1 + P_1V_2 \\ |P|\,V_3 \end{bmatrix} \qquad 4.1.11$$

De las ecuaciones 4.1.4 y 4.1.11 obtenemos:

$$\frac{dV_1}{dx_3}(0) + i\,|P|\,V_3(0) = 0 \qquad 4.1.12$$

$$\frac{dV_2}{dx_3} = 0 \qquad 4.1.13$$

$$(\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{dV_3}{dX_3}(0) + i\lambda_0 |P| V_1(0) = 0 \qquad 4.1.14$$

Nótese que las ecuaciones 4.1.12–4.1.14 que caracterizan al dominio de $\hat{A}_0(|P|,0)$ se obtienen de una manera inmediata a partir de la especificación para el dominio de $\hat{A}_0(P_1,P_2)$ (ecuación 4.1.4) haciendo $P_1 = |P|$ y $P_2=0$.

Dado $V \in D(\hat{A}_0(|P|,0))$ definamos al operador Π como el que al actuar sobre el vector $V=(V_1,V_2,V_3)$ nos da (V_1,V_3,V_2):

$$\Pi \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad 4.1.15$$

De las ecuaciones 4.1.10–4.1.14 es inmediato que el operador $\hat{A}_0(|P|,0)$ es la suma directa de dos operadores que llamaremos $B_1(|P|)$ y $B_2(|P|)$:

$$\hat{A}_0(|P|,0) = \Pi\, B_1(|P|) \oplus B_2(|P|)\, \Pi \qquad 4.1.16$$

donde

(a)

$$D(B_1(|P|)) = \left\{ \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} \in H^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2) \;/\; \frac{dV_1}{dX_3}(0) + i|P|V_3(0) = \right. \\ \left. = (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{dV_3}{dX_3}(0) + i|P|\lambda_0 V_1(0) = 0 \right\} \qquad 4.1.17$$

$$
y \quad B_1(|P|)\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \rho_0^{-1}\begin{bmatrix} -\mu_0\dfrac{d^2}{dX_3^2} + (\lambda_0+2\mu_0)|P|^2 , & -i|P|(\lambda_0+\mu_0)\dfrac{d}{dX_3} \\ -i|P|(\lambda_0+\mu_0)\dfrac{d}{dX_3} , & (\lambda_0+2\mu_0)\dfrac{d^2}{dX_3^2} + \mu_0|P|^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{4.1.18}
$$

(b)

$$
D(B_2(|P|)) = \left\{ V_2 \in H^2(\mathbb{R}_+) \;/\; \frac{dV_2}{dX_3}(0) = 0 \right\} \tag{4.1.19}
$$

$$
y \qquad B_2(|P|)V_2 = -\mu_0\rho_0^{-1}\frac{d^2V_2}{dX_3^2} + \mu_0\rho_0^{-1}|P|^2V_2 \tag{4.1.20}
$$

Los operadores $B_1(|P|)$ y $B_2(|P|)$ resultan ser autoadjuntos. De 4.1.19 es inmediato, al integrar por partes, que $\left(-\frac{d^2V_2}{dX_3^2}, V_2\right) = \int_0^\infty \overline{\left(-\frac{d^2V_2}{dX_3^2}\right)} V_2 \, dX_3 \geq 0$. O sea, el operador $-\mu_0\rho_0^{-1}\frac{d^2V_2}{dX_3^2}$ con condición a la frontera 4.1.19 es un operador positivo. El término multiplicativo en 4.1.20 ($\mu_0\rho_0^{-1}|P|^2$) solo traslada el espectro de $\mu_0\rho_0^{-1}\frac{d^2V_2}{dX_3^2}$ por una cantidad $\mu_0\rho_0^{-1}|P|^2$. Por lo anterior, el operador $B_2(|P|)$ es autoadjunto y su espectro es $[\mu_0\rho_0^{-1}|P|^2, \infty)$.

Con respecto al operador $B_1(|P|)$ con $p\neq 0$, ocurre que tiene solo un eigenvalor simple (de multiplicidad uno) igual a $C_R^2|P|^2$ donde:

(i) $$0 < C_R^2|P|^2 < \left(\frac{\mu_0}{\rho_0}\right)|P|^2 \tag{4.1.21}$$

(ii) C_R^2 es la única solución de la ecuación:

$$\left(1-\frac{x^2\rho_0}{\mu_0}\right)^2-\left(1-\frac{x^2\rho_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(1-\frac{x^2\rho_0}{\lambda_0+2\mu_0}\right)^{1/2}=0 \qquad 4.1.22$$

y además cumple con (i).

La demostración de este hecho se da en detalle en la referencia [G].

Una vez descrito el análisis anterior para el operador A_0 estamos en condiciones de establecer el teorema II acerca de las funcionesque satisfacen la ecuación de eigenvalores del Propagador Elástico definido en $\Omega\subset\mathbb{R}^3_+$ que tienen la propiedad de que la condición de frontera libre se satisface exponencialmente en $\partial\Omega$, o sea $|S_{(i)}|\Big|_{\partial\Omega} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ exponencialmente para $i=1,2,3$. En la demostración de dicho teorema utilizaremos los simbolos $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$, $\hat{\mathcal{A}}_0(P_1,P_2)$, $\hat{\mathcal{A}}_0(|P|,0)$, $\mathcal{B}_1(|P|)$ y $\mathcal{B}_2(|P|)$ para la expresión formal (sin relación a sus dominios) de los operadores A, A_0, $\hat{A}_0(P_1,P_2)$, $\hat{A}_0(|P|,0)$, $B_1(|P|)$ y $B_2(|P|)$ respectivamente.

El Teorema II se establecerá suponiendo que el medio isotrópico es homogéneo fuera de una cierta bola centrada en el origen; lo cual no es muy restrictivo fisicamente hablando, pues tal es caso en muchas de las aplicaciones.

V-1 *Un Teorema acerca de la compacidad del soporte de las eigenfunciones del Propagador Elástico en un medio isotrópico contenido en un semiespacio con frontera libre.*

TEOREMA II

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3_+$ un conjunto abierto y tal que $\overline{\mathbb{R}^3_+ - \Omega}$ es un conjunto compacto.

Supongamos que existen constantes positivas a_i, b_i, c_i $(i=1,2)$ tales que:

$$a_1 \leq \rho(x) \leq a_2 \qquad 5.1.1$$

$$b_1 \leq \lambda(x) \leq b_2 \qquad 5.1.2$$

$$c_1 \leq \mu(x) \leq c_2 \qquad 5.1.3$$

y además el medio elástico es homogéneo fuera de un conjunto acotado $\Pi \subset \mathbb{R}^3_+$.

Supongamos que existe $U \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ con la propiedad de que $\mathcal{A}U \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ y tales que para alguna $\beta > 0$ se satisface la ecuación:

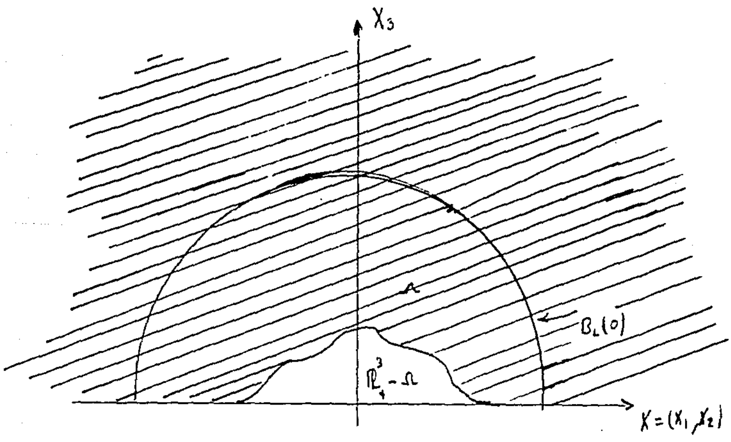
$$\mathcal{A}U = \beta U \qquad \text{en } \Omega \qquad\qquad 5.1.4$$

donde la aplicación $\mathcal{A}U$ es definida en 2.2.8

Si $|S_{13}(U)|_{\partial\Omega} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ exponencialmente (la condición de frontera libre se satisface exponencialmente), entonces **U** se anula en Π' (la componente conexa al infinito del complemento de Π en $\mathbb{R}^3_+$).

PRUEBA:

Como Π es acotado, entonces existe una bola $B_R(0)$ de radio R centrada en el origen que lo contiene. Tomemos $L>R$ de tal modo que $B_L(0)$ contenga a $\mathbb{R}^3_+ - \Omega$:



Definamos a la función $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B_{L+1}(0) \\ 1 & \text{si } x \notin B_{L+2}(0) \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Extendamos U a todo $\mathbb{R}^3_+$:

$$\tilde{U}(X) = \begin{cases} U(X) & \text{si } X \in \Omega \\ 0 & \text{si } X \in \mathbb{R}^3_+ - \Omega \end{cases} \tag{5.1.6}$$

Sea $V = \phi \tilde{U}$. Es inmediato que al estar $U \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ y cumplirse $\mathcal{A} U \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ entonces tenemos que U está en $H^1(\mathbb{R}^3_+ - \overline{B}_{L+1}, \mathbb{C}^3)$ y además se cumple que $\mathcal{A} U \in L^2(\mathbb{R}^3_+ - \overline{B}_{L+1}, \mathbb{C}^3)$; con lo que U pertenece al espacio $H^2(\mathbb{R}^3_+ - \overline{B}_{L+1}, \mathbb{C}^3)$ (pues la frontera de la bola $B_{L+1}(0)$ es suave) y por consecuencia $V \in H^2(\mathbb{R}^3_+, \mathbb{C}^3)$.

Como $\phi = 1$ fuera de un compacto, entonces V también satisface la condición de frontera libre exponencialmente.

Por otro lado, notemos que en el complemento de $B_L(0)$ el medio es homogéneo y la aplicación $\mathcal{A}$ (definida en 2.2.8) coincide con $\mathcal{A}_0$ (ecuación 2.2.48); por lo que la ecuación 5.1.4 nos dice que:

$$\mathcal{A}_0 U = \beta U \quad \text{fuera de } B_L(0) \tag{5.1.7}$$

Denotemos por ρ_0 , λ_0 , y μ_0 a los valores constantes que $\rho(x)$,$\lambda(x)$ y $\mu(x)$ toman en el complemento de $B_L(0)$ respectivamente.

Notemos que de la expresión para $\mathcal{A}_0 U$ (ecuación 2.2.48) tenemos la siguiente ecuación:

$$\mathcal{A}_0 V = \phi \left[-\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\rho_0}\right)\vec{\nabla}(\nabla\cdot\hat{U}) - \frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta\hat{U}\right] + G$$

-------5.1.8

donde la componente i de G es:

$$G_i = -\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\rho_0}\right)\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_i}\right)\nabla\cdot\hat{U} + \frac{\partial}{\partial X_i}(\nabla\phi\cdot\tilde{U}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_0}{\rho_0}\left[(\Delta\phi)\tilde{U}_i + 2\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}U_i\right]\right] \qquad 5.1.9$$

Definamos:

$$\mathcal{A}_0 \tilde{U} = -\frac{(\lambda_0+\mu_0)}{\rho_0}\vec{\nabla}(\nabla\cdot\tilde{U}) - \frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta\hat{U} \qquad 5.1.10$$

donde las derivadas son en sentido de distribuciones.

Debido a que $\mathcal{A}_0\tilde{U} = \mathcal{A}_0 U$ fuera de $B_L(0)$ y al satisfacerse la ecuación 5.1.7 tenemos:

$$\phi\mathcal{A}_0\tilde{U} = \beta\phi\tilde{U} = \beta V \qquad 5.1.11$$

Por lo tanto, al substituir 5.1.10 en 5.1.8 y utilizando 5.1.11 tenemos:

$$\mathcal{A}_0 V=\beta V+G \qquad 5.1.12$$

Notemos que G es de soporte compacto (el cual está contenido entre las bolas de radios L+1 y L+2) por lo que existe una constante $M\in\mathbb{R}$ tales que $G(X_1,X_2,X_3)=0$ para $X_3>M$. De hecho, G es una función continua, por lo cual $G\in L^2(\mathbb{R}^3_+, \mathbb{C}^3)$ y con esto $\mathcal{A}_0 V\in L^2(\mathbb{R}^3_+, \mathbb{C}^3)$. Nótese que **V** no necesariamente está en el dominio de $\mathbf{A}_0$ puesto que podría no satisfacer la condición de frontera libre en $X_3=0$.

Sea $\mathcal{F}$ el operador transformada de Fourier en la variable $X=(X_1,X_2)$. Si aplicamos $\mathcal{F}$ en ambos lados de la ecuación 5.1.12 tenemos:

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_0\mathcal{F}^{-1}\hat{V}=\beta\hat{V}+\hat{G} \qquad 5.1.13$$

con

$$\hat{V} = \mathcal{F} V \qquad 5.1.14$$

y

$$\hat{G} = \mathcal{F} G \qquad 5.1.15$$

Sea $\hat{\mathcal{A}}_0=\mathcal{F}\mathcal{A}_0\mathcal{F}^{-1}$, entonces:

$$\hat{\mathcal{A}}_0 \hat{V}=\beta\hat{V}+\hat{G} \qquad 5.1.16$$

Si consideramos la ecuación 5.1.16 para cada $(P_1,P_2)\neq 0$ fijo, tenemos entonces:

$$\hat{\mathcal{H}}_o(P_1,P_2)\hat{V}=\beta\hat{V}+\hat{G} \qquad 5.1.17$$

De la ecuación 4.1.1 tenemos en 5.1.17

$$\mathbb{D}\,\hat{\mathcal{H}}_o(|P|,0)\,\mathbb{D}^{-1}\hat{V}=\beta\hat{V}+\hat{G} \qquad 5.1.18$$

Si definimos $S=\mathbb{D}^{-1}\hat{V}$, entonces de 5.1.18 tenemos:

$$\mathcal{H}_o(|P|,0)\,S=\beta S+H \qquad 5.1.19$$

con $H=\mathbb{D}^{-1}\hat{G}$.

Debido a la ecuación 4.1.16 tenemos para $(P_1,P_2)\neq 0$ (con $S=(S_1,S_2,S_3)$):

$$\beta_1(|P|)\begin{bmatrix} S_1 \\ \\ S_3 \end{bmatrix}-\beta\begin{bmatrix} S_1 \\ \\ S_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1 \\ \\ H_3 \end{bmatrix} \qquad 5.1.20$$

y

$$\beta_2(|P|)\,S_2-\beta S_2=H_2 \qquad 5.1.21$$

Un hecho muy importante radica en que al estar G en $L^2(\mathbb{R}^3_+,\mathbb{C}^3)$

y ser de soporte compacto, entonces $\hat{G}(P_1,P_2,X_3)$ tiene una extensión análitica a todo el plano complejo como una función de $|P|=\sqrt{P_1^2+P_2^2}$.

Como la condición de frontera se satisface exponencialmente cuando $|X| \longrightarrow \infty$, entonces $\frac{\partial}{\partial X_3} S_2(P,0)$ es analítica en $|P|$ en alguna banda $|\mathrm{Im}(z)| < \gamma$.

Demostraremos que:

$$S(P_1,P_2,X_3)=0 \text{ para casi todo } (P_1,P_2)\in \mathbb{R}^2 \quad y \ X_3>M \ . \qquad 5.1.22$$

Con esto tendremos:

$$\hat{V}(P_1,P_2,X_3)=0 \text{ para casi todo } (P_1,P_2)\in \mathbb{R}^2 \quad y \ X_3>M \ . \qquad 5.1.23$$

Por transformada inversa de Fourier:

$$V(X_1,X_2,X_3)=0 \quad \text{para } X_3>M \qquad 5.1.24$$

lo que a su vez implica:

$$U(X_1,X_2,X_3)=0 \quad \text{para } X_3>M \qquad 5.1.25$$

O sea que U se anula fuera de la banda $0<X_3\leq M$.

Para probar 5.1.22 veamos primero explícitamente la ecuación

5.1.21:

$$-\mu_0 \rho_0^{-1} \frac{d^2 S_2}{dX_3^2} + \mu_0 \rho_0^{-1} |P|^2 S_2 - \beta S_2 = H_2 \qquad 5.1.26$$

donde $H_2=0$ para $X_3>M$.

Denotemos como $W_2(P_1,P_2,X_3)$ a la solución del problema siguiente en el intervalo $[0, \infty)$ (ver [C.L]):

$$-\mu_0 \rho_0^{-1} \frac{d^2 W_2}{dX_3^2} + \mu_0 \rho_0^{-1} |P|^2 W_2 - \beta W_2 = H_2 \qquad 5.1.27$$

con $W_2=0$ para $X_3>M$.

Notemos que $W_2(P_1,P_2,X_3)$ y $\frac{\partial}{\partial X_3} W_2(P_1,P_2,X_3)$ son funciones analíticas de la variable $|P|$ considerando inclusive que esta toma valores en todo el plano complejo (ver [C.L]). En particular $\frac{\partial}{\partial X_3} W_2(P_1,P_2,0)$ es analítica como función de $|P|$.

Sea

$$Z_2=S_2-W_2 \qquad 5.1.28$$

entonces Z_2 es solución al problema:

$$-\mu_0 \rho_0^{-1} \frac{d^2 Z_2}{dX_3^2} + \mu_0 \rho_0^{-1} |P|^2 Z_2 - \beta Z_2 = 0$$

$Z_2 \in H^2(0,\infty)$, $\frac{\partial}{\partial X_3} Z_2(P_1,P_2,0)$ es analítica como función de $|P|$ en la banda $|\mathrm{Im}(z)| < \gamma$ 5.1.29

Ahora, si $|P|^2 < \beta \rho_0/\mu_0$, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 5.1.29 son periódicas, por lo cual no están en $L^2(0,\infty)$ y con esto $Z_2(P_1,P_2,X_3)$ debe ser la combinación lineal nula de dichas soluciones:

$$Z_2(P_1,P_2,X_3)=0 \qquad \text{para} \qquad 0<|P|^2<\beta\rho_0/\mu_0 \qquad 5.1.30$$

Nótese que la desigualdad en 5.1.30 tiene sentido pues $\beta>0$. De 5.1.30 tenemos en particular que :

$$\frac{\partial}{\partial X_3} Z_2(P_1,P_2,0)=0 \qquad \text{para} \qquad 0<|P|^2<\beta\frac{\rho_0}{\mu_0} \qquad 5.1.31$$

Dada la analiticidad de $\frac{\partial}{\partial X_3} Z_2(P_1,P_2,0)$ en $|P|$, tenemos de 5.1.31:

$$\frac{\partial}{\partial X_3} Z_2(P_1,P_2,0)=0 \qquad \text{para casi toda } (P_1,P_2)\subset \mathbb{R}^2 \qquad 5.1.32$$

Por lo tanto Z_2 satisface, para casi toda (P_1,P_2), el siguiente problema tomando a $|P|$ como parámetro:

$$-\mu_0\rho_0^{-1}\frac{d^2 Z_2}{dX_3^2}+\mu_0\rho_0^{-1}|P|^2 Z_2-\beta Z_2=0$$
$$Z_2\in H^2(0,\infty) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial X_3} Z_2(P_1,P_2,0)=0 \qquad 5.1.33$$

Ahora, para $|P|^2<\beta\rho_0/\mu_0$ ya sabemos que la única solución al problema 5.1.33 es $Z_2=0$. Si $|P|^2>\beta\frac{\rho_0}{\mu_0}$, la única solución en

$L^2(0,\infty)$ de la ecuación diferencial en 5.1.33 es $\exp\left(-\sqrt{|P|^2-\rho\frac{\rho_0}{\mu_0}}\,X_3\right)$; pero la parcial con respecto a X_3 de esta función satisface la condición a la frontera solo si C=0. Si $|P|^2=\rho\frac{\rho_0}{\mu_c}$ no existe solución en $L^2(0,\infty)$ a la ecuación diferencial en 5.1.33. Hemos demostrado que:

$$Z_2(P_1,P_2,X_3)=0 \qquad \text{para casi toda } (P_1,P_2)\in\mathbb{R}^2 \qquad 5.1.34$$

En virtud de la ecuación 5.1.28, tenemos que al anularse W_2 para $X_3>M$:

$$S_2(P_1,P_2,X_3)=0 \qquad \text{para casi toda } (P_1,P_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ y } X_3>M \qquad 5.1.35$$

Ahora veamos la ecuación 5.1.20. Definamos:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1 \\ W_3 \end{bmatrix} \qquad 5.1.36$$

donde $\begin{bmatrix} W_1 \\ W_3 \end{bmatrix}$ es la solución a la ecuación 5.1.20 en todo $[0,\infty)$ y se anula para $X_3>M$ (ver [C.L]). Además $\begin{bmatrix} W_1 \\ W_3 \end{bmatrix}$ es analítica como función de $|P|$ en todo el plano complejo (como en el caso de W_2) así como también lo son las funciones $\frac{\partial}{\partial X_3}W_i(P_1,P_2,X_3)$ $i=1,2$ (ver [C.L]). En particular, dichas funciones son analíticas para $X_3=0$. Como la condición de frontera libre se satisface exponencialmente, entonces $\frac{\partial Z_1}{\partial X_3}+i|P|Z_3$ y $(\lambda_0+2\mu_0)\frac{\partial Z_3}{\partial X_3}+i|P|\lambda_0 Z_1$

son funciones analíticas en $|P|$ en la banda $|Im(z)|<\gamma$.

Por consecuencia, $[Z_1,Z_3]$ satisface el problema:

$$\beta_1(|P|)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

y $\frac{\partial z_1}{\partial x_3} + i|P|z_3$, $(\lambda_0+2\mu_0)\frac{\partial z_3}{\partial x_3} + i|P|\lambda_0 z_1$ son funciones analíticas de $|P|$ en la banda $|Im(z)|<\gamma$ 5.1.37

Ahora mostraremos que si $|P|^2 < a$ (donde a es una constante positiva que definiremos posteriormente) entonces las cuatro soluciones linealmente independientes a la ecuación diferencial en 5.1.37 son periódicas y con ello no están en $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$. Por lo tanto $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix}$ =0 si $|P|^2 < a$. Veamos como es que ocurre esto:

La ecuación diferencial en 5.1.37 nos dice explícitamente que:

$$-\frac{\mu_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} + \frac{(\lambda_0+2\mu_0)}{\rho_0}|P|^2 z_1 - i|P|\frac{(\lambda_0+\mu_0)}{\rho_0}\frac{\partial z_3}{\partial x_3} = \beta z_1$$

5.1.38

$$-i|P|\frac{(\lambda_0+\mu_0)}{\rho_0}\frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{(\lambda_0+2\mu_0)}{\rho_0}\frac{\partial^2 z_3}{\partial x_3^2} + \frac{\mu_0|P|^2}{\rho_0}z_3 = \beta z_3$$

5.1.39

Propongamos como solución de 5.1.38 y 5.1.39 como lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \\ B \end{bmatrix} \exp(-|P| K x_3) \qquad 5.1.40$$

Esta función satisface 5.1.38 y 5.1.39 solo si

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mu_0}{\rho_0}|P|^2 K^2 + \left[\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\rho_0}|P|^2-\beta\right] \ , & i|P|^2\frac{(\lambda_0+\mu_0)}{\rho_0}K \\ \\ i|P|^2\frac{(\lambda_0+\mu_0)}{\rho_0}K \ , & -\frac{(\lambda_0+2\mu_0)}{\rho_0}|P|^2K^2+\left[\frac{\mu_0|P|^2}{\rho_0}-\beta\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 5.1.41$$

Para que tengamos soluciones distintas de las triviales necesitamos que el determinante de la matriz que aparece en la última ecuación sea nulo. Esto implica una ecuación de segundo grado en K^2 :

$$AK^4 + DK^2 + C = 0 \qquad 5.1.42$$

con

$$A = |P|^4 \mu_0 \ \frac{\lambda_0+2\mu_0}{\rho_0^2} \qquad 5.1.43$$

$$B = \frac{|P|^2}{\rho_0}\left[-\frac{2\mu_0 |P|^2}{\rho_0}(\lambda_0 + 2\mu_0) + \beta(\lambda_0 + 3\mu_0)\right] \qquad 5.1.44$$

$$C = |P|^4 \mu_0 \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)}{\rho_0^2} - \beta \frac{|P|^2}{\rho_0}(\lambda_0 + 3\mu_0) + \beta^2 \qquad 5.1.45$$

Ahora, la ecuación 5.1.42 tiene cuatro raices negativas $k^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ si ocurre que B>0 , C>0 y $B^2 - 4AC$ >0. Si tal fuera el caso, K sería imaginario puro con lo que tendríamos cuatro soluciones de 5.1.42 que son linealmente independientes, periódicas y, por lo tanto, no están en $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$.

Ahora, B>0 si y solo si (ver ecuación 5.1.44):

$$\beta(\lambda_0 + 3\mu_0) > 2\mu_0 |P|^2 \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)}{\rho_0}$$

y esto ocurre si y solo si

$$|P|^2 < \beta \frac{(\lambda_0 + 3\mu_0)\rho_0}{2\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)} \qquad 5.1.46$$

Utilizando la ecuación 5.1.45 vemos que C>0 si ocurre que

$$|P|^2 < \beta \frac{\rho_0}{\lambda_0+3\mu_0} \qquad 5.1.47$$

Como $\beta \frac{\rho_0}{\lambda_0+3\mu_0} < \beta \frac{\rho_0}{\lambda_0+2\mu_0} \frac{(\lambda_0+3\mu_0)}{2\mu_0}$,concluimos de 5.1.46 y 5.1.47 que si $|P|^2 < \frac{\beta\rho_0}{(\lambda_0+3\mu_0)}$, entonces B>0 y C>0.

Por otro lado, de 5.1.43 —5.1.45 tenemos que $B^2-4AC = |P|^4\beta^2(\lambda_0+\mu_0)^2/\rho_0^2$, lo cual siempre es positivo sin restricción sobre $|P|$. Entonces, si tomamos a= $\beta\rho_0/(\lambda_0+3\mu_0)$ tenemos que A, B y B^2-4AC son positivos y, con ello, el que tengamos cuatro soluciones de la ecuación diferencial en 5.1.37 que son oscilatorias y que por lo tanto no están en $L^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^2)$. Como $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix}$ debe pertenecer a $L(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^2)$ y además debe ser combinación lineal de las cuatro soluciones encontradas, entonces $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix}(P_1,P_2,X_3)=0$. Esto último implica en particular que:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z_1}{\partial X_3}(P_1,P_2,0) + i|P|z_3(P_1,P_2,0) = 0 \\ y\quad &(\lambda_0+2\mu_0)\frac{\partial z_3}{\partial X_3}(P_1,P_2,0) + i|P|\lambda_0 z_1(P_1,P_2,0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{para } |P|^2 < a \qquad 5.1.49$$

Dada la analiticidad señalada en la ecuación 5.1.37; tenemos de 5.1.49 que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{z}_1}{\partial x_3}(p_1,p_2,0) + i\,|p|\,\hat{z}_3(p_1,p_2,0) = 0 \\ \text{y} \\ (\lambda_0+2\mu_0)\dfrac{\partial \hat{z}_3}{\partial x_3}(p_1,p_2,0) + i\,|p|\,\lambda_0\,\hat{z}_1(p_1,p_2,0) = 0 \end{array}\right\} \text{para casi todo } (P_1,P_2)\in \mathbb{R}^2 \qquad 5.1.50$$

Pero las ecuaciones en 5.1.50 son las que definen las condiciones de frontera para el dominio de $B_1(|P|)$. Por lo tanto, $\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix}$ es solución del problema:

$$B_1(|P|)\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{para casi todo } (P_1,P_2)\in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix} \in D(B_1(|P|)) \qquad 5.1.51$$

Como se mencionó en la sección anterior, $B_1(|P|)$ solamente tiene un eigenvalor (igual a $c_R^2\,|P|^2$); entonces salvo cuando $\beta = c_R^2\,|P|^2$ se tiene $\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix} = 0$ para el problema 5.1.51. De la ecuación 5.1.36 tenemos que para $X_3>M$:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix}(p_1,p_2,X_3) = 0 \qquad \text{para casi toda } (P_1,P_2)\in \mathbb{R}^2,\ X_3>M \qquad 5.1.52$$

De las ecuaciones 5.1.35 y 5.1.52 concluimos que

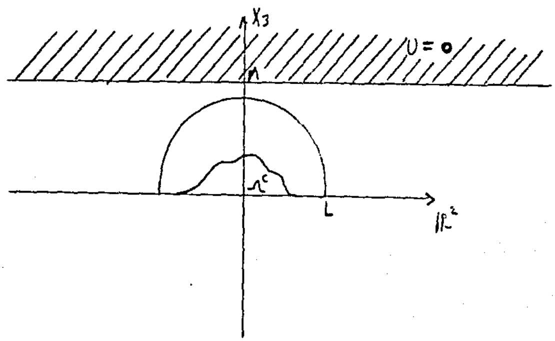
$$S(P_1,P_2,X_3)=0 \qquad \text{para casi toda} \qquad (P_1,P_2)\in \mathbb{R}^2 \quad ,X_3>M \qquad 5.1.53$$

lo cual demuestra la ecuación 5.1.25.

Por otro lado, en todos los puntos de Π' (la componente conexa al infinito del complemento de Π) se satisface la ecuación:

$$\mathcal{A}_c U = \beta U \qquad \text{en } \Pi' \qquad 5.1.54$$

Hasta ahora hemos probado que U se anula en parte de Π' (para $X_3>M$):



Ahora probaremos que **U** se anula en todo Π'.

La ecuación 5.1.54 nos dice explícitamente que:

$$\frac{(\lambda_0+\mu_0)}{\rho_0}\frac{\partial \nabla\cdot U}{\partial X_i} - \frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta U_i = \beta U_i \qquad \text{en } \Pi' \quad (i=1,2,3) \qquad 5.1.55$$

Sea $\varphi = \nabla \cdot U$. Si tomamos la parcial con respecto a X_i en 5.1.55 y sumamos sobre i tenemos:

$$-\Delta\varphi = \frac{\beta}{\gamma}\varphi \qquad \text{en } \Pi' \qquad 5.1.56$$

donde $\gamma = (\lambda_0 + \mu_0)/\rho_0$.

Como $U(X_1,X_2,X_3)=0$ para $X_3>M$ entonces $\nabla \cdot U(X_1,X_2,X_3)=0$ para $X_3>M$ y de un teorema de continuación única de la referencia [R.S.2] (donde se necesita que Π' sea conexo) concluimos que $\varphi = 0$ en Π'.

De la conclusión anterior es inmediato de la ecuación 5.1.55 que:

$$-\frac{\mu_0}{\rho_0}\Delta U_i = \beta U_i \quad \text{en } \Pi' \quad (i=1,2,3) \qquad 5.1.57$$

Como $U(X_1,X_2,X_3)=0$ para $X_3>M$ tenemos que, al utilizar el teorema de continuación única mencionado anteriormente, la función U debe anularse en todo Π' . Lo cual completa la demostración.

■

V-2

Acerca de la ausencia de eigenvalores positivos para el Propagador Elástico en un medio isotrópico homogéneo y contenido en un semiespacio con frontera libre.

Como una consecuencia inmediata del Teorema II tenemos el siguiente Corolario cuando el medio es homogéneo en todo Ω.

COROLARIO

Sea $\mathbf{U}=(U_1,U_2,U_3)\in H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ donde $\Omega\subset\mathbb{R}^3_+$ es un conjunto abierto, conexo, con la propiedad de que $\overline{\mathbb{R}^3_+ - \Omega}$ es un compacto y el medio elástico que ocupa Ω es isotrópico y homogéneo.
Supongamos que para algún $\beta>0$ se satisface en todo Ω la siguiente ecuación:

$$\mathcal{A}_0 U = \beta U \qquad 5.2.1$$

donde la aplicación $\mathcal{A}_0$ está definida en 2. 2. 48 .

Si ocurre que $S_{13}(\mathbf{U})\Big|_{\partial\Omega} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ exponencialmente, entonces tenemos que:

$$U=0 \quad \text{en } \Omega \qquad 5.2.2$$

Cuando U satisfece la condición de frontera libre y el medio es homogéneo en todo Ω tenemos a partir del teorema II el siguiente:

COROLARIO

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3_+$ un conjunto abierto, conexo y con la propiedad de que $\mathbb{R}^3_+ - \Omega$ es un compacto. Entonces el Propagador Elástico definido en un medio homogéneo e isotrópico que ocupa la región Ω no tiene eigenvalores positivos.

[A] Adams, R. " Sobolev Spaces". Academic Press, 1975.

[Ag] Agmon, S. "Lectures on elliptic boundary value problems". Van Nostrand, 1963.

[Au] Auld, B.A . "Acoustic fields and waves in solids, I and II". Wiley Interscience, 1973.

[C.L] Coddington,E. and Levinson, N. "Theory of ordinary differential equations". New York, McGraw Hill, 1955.

[D.G] Dermenjian, Y. and Guillot , J.C. " Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary . The limiting absorption principle ". Mathematical Methods in Applied Sciences, 10 , pp 87-129 (1988).

[D.L] Duvaut, G. and Lions, J.L. "Les inéquations en Mecánique et en Physique ". Dunod , Paris , 1972.

[E.K] Eastham, MSP. and Kalf, H. "Schrödinger-type operators with continuos spectra". Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[G] Guillot, J.C. "Existence and Uniqueness of Raleigh surface waves. Propagation along a free boundary".

Mathematical Methods in Applied Sciences, 8, pp 289-310 (1986).

[J.J] Jeffreys, H. and Jeffreys, B.S. "Methods of Mathematical Physics". 3rd ed. Cambridge University Press, 1972.

[K] Kato , T. "Pertubation theory for linear operators". Springer Verleg, 1976.

[L] Landau, l..D. "Theory of Elasticity". Pergamon Press, 1970.

[L.P] Lax, P and Phillips,R. Scattering theory for automorphic functions. Annals of Mathematics studies. Princeton University Press. 1976

[Li] Littman, W. "Spectral properties of operators arising in acoustic waves. Propagation in an ocean of variable depth". Applied Math. and Optimization, 8, pp 189-196 (1982).

[M] Mizohata,S. The theory of partial differential equations. Cambridge, University Press, 1973.

[R.S.1] Reed, M. and Simon, B. "Methods of Modern Math. Physics" Vol IV. Academic Press, 1978.

[R.S.2] Reed , M. and Simon, B. "Methods of Modern Math. Physics". Vol III. Academic Press, 1979.

[S] Stone, R. "Linear transformations in Hilbert Spaces and their applications to analysis". New York, The American Society, 1932.

[Sch] Schechter,M. "Spectra of Partial Differentia Operators". North Holland Publising Company, 1971.

[W1] Weder, R. "Absence of eingevalues of the Acoustic Propagation in deformed wave guides". Rocky Mountains journal of Mathematics. 18, 2 pp 495-503 (1988).

[W2] Weder, R. "The limiting Absorption Principle at thresholds". Journal of Math Pure and Appl. 67 (1988) 313-338.

[Wi] Wilcox, C.H. "Sound propagation in Stratified Fluids". Springer Verlag Vol 50, 1979.