UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INGENIERÍA QUÍMICA UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO.

P R E S E N T A:

CAMPOS OCHOA MARISOL

DIRECTOR DE TESIS:

M. en Ed. M. GENARO ALTAMIRANO GARCÍA.

Ciudad de México,2017

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme culminar una etapa más en mi vida, gracias por siempre cuidarme, acompañarme y guiarme hacia las metas que tienes preparadas para mí.

A la mejor universidad de México, la Universidad Nacional Autónoma de México quien me brindó la oportunidad de formarme profesionalmente, abriéndome las puertas al conocimiento, sembrando en mí valores importantes como la honestidad, humildad y perseverancia.

Infinitas gracias a mis padres Ernesto Campos Jacobo y Soledad Ochoa Barrera por tanta paciencia invertida en mí y en mis proyectos, sé que han entregado todo por verme crecer, tanto profesionalmente como personalmente y aquí estoy demostrando que han hecho un excelente trabajo y recordándoles que todo lo que soy ahora es por ustedes.
A mis hermanos y primas: Jorge, Emmanuel y Víctor Campos Ochoa, Laura y Yessenia Vega Ochoa. Ya que siempre han sido una fuente de apoyo e inspiración para mí.

Porque nunca sabré como agradecer todo tu cariño y comprensión que me brindaste en estos 5 años de amistad; mi querida Dany, sin duda alguna lo mejor que me paso de la Universidad.

"La vida tiene cosas buenas para ti, pero todo a su debido tiempo", gracias Yeudiel por recordármelo en los tiempos difíciles y gracias por el apoyo incondicional que me brindas.

A mis amigos y compañeros, por que supieron estar conmigo en los buenos y malos momentos, porque siempre tuvieron un consejo para toda clase de situación, gracias por las risas, enojos, desvelos y todo lo que vivimos juntos, sin duda alguna este camino fue mejor gracias a ustedes.

A mi director de tesis el Maestro Genaro Altamirano y a mis asesores, por todo el apoyo brindado.
Y gracias a mi profesor nunca olvidado Guillermo de la Luz Espinoza, porque gracias a él, le tengo tan bonito amor a la ciencia de las Matemáticas.

Gracias.

CONTENIDO

Índice de Figuras

Índice de Graficas

Índice de Tablas

RESUMEN

El presente documento tiene como principal finalidad servir de complemento, a las clases de las asignaturas Matemáticas II, Bioestadística, Diseño de equipo, Ingeniería Eléctrica, Transferencia de Calor, Ingeniería de Reactores y en general para cualquier otra asignatura de la carrera de Ingeniería Química que se imparte en la Facultad de estudios superiores Zaragoza, donde sea necesario resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden y con valor inicial, pues en este trabajo se resolvieron distintos problemas de estas asignaturas que involucran este tipo de ecuaciones, utilizando la transformada de Laplace como método alterno para resolverlas.

La idea de realizar una tesis con problemas que involucran ecuaciones diferenciales y resolverlos por el método de la transformada de Laplace, surge a partir de considerar conveniente contar con un documento que explique detalladamente la función Laplace, ya que este tema no es estudiado dentro del plan de estudios de la carrera.

Para poder aplicar el método de la transformada de Laplace en una ecuación diferencial, primeramente, se estudió la definición de la función Laplace y su transformación inversa, así como algunas de sus propiedades básicas y con base a una serie de ejemplos se formó una tabla con 26 pares de transformadas de las funciones más comunes.

Seguidamente y mediante 16 ejemplos se explicó el método para resolver una ecuación diferencial, así como un sistema de ecuaciones diferenciales, y se procedió a plantear los problemas de aplicación que involucran este tipo de ecuaciones. Cabe señalar que este documento consta con 24 problemas de temas que se imparten en las asignaturas antes mencionadas y cada uno presenta la solución finamente detallada y desglosada, esto para que el alumno tenga una mayor facilidad para el entendimiento y comprensión del método.

Con este trabajo se obtiene un documento que será de gran utilidad para alumnos de segundo semestre en adelante y profesores de la carrera de Ingeniería Química que se imparte en la FES Zaragoza y en general, para todos los estudiantes de áreas afines que requieran contar con conocimientos de este método.

INTRODUCCIÓN

Para los estudiantes de la carrera de Ingeniería Química, la Transformada de Laplace, TL, es útil en la solución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales con valor inicial. Recordando: si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial. Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con el *orden*, *grado*, si es *ordinaria* (o *parcial*), y si es *lineal* (o *no lineal*). En los procesos químicos aparece la necesidad de resolver una ecuación diferencial, la TL puede ser una herramienta muy útil para resolver ese tipo de problemas.

Dada esta razón el presente trabajo se planteó como un método alterno para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, pues a menudo se encuentran problemas con funciones que cambian cuando sus variables cambian, es decir problemas de tasa de cambio y algunos de ellos resolverlos por métodos tradicionales puede llegar a ser una tarea muy difícil y laboriosa. La transformada de Laplace nos permite resolverlas por un método sencillo, en donde es transformada la ecuación diferencial, en una ecuación que puede ser resuelta por métodos algebraicos.

Después de terminar de leer está tesis, se podrá tener una idea clara, así como una metodología para abordar problemas de este tipo, utilizando la función Laplace para resolverlos.

Con base a lo anterior, se plantearon los siguientes objetivos.

OBJETIVOS

I. Objetivo general:

Elaborar un documento que, a base de ejemplos, explique detalladamente el uso de la transformada de Laplace, para resolver problemas que involucren ecuaciones diferenciales con valor inicial, de las distintas asignaturas de la carrera de Ingeniería Química que se imparte en la FES Zaragoza y sirva como material de apoyo para los estudiantes que cursan dichas asignaturas.

El primer y segundo capítulo tienen como objetivos primordiales dirigirse a estudiantes que cursen a partir del segundo semestre y que deseen aprender un método distinto para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales y de primer orden, pues cabe mencionar que existen ecuaciones diferenciales cuya resolución es muy extensa y llega a ser un proceso laborioso, aplicando el método de la transformada de Laplace la ecuación puede resolverse de una manera más práctica y sencilla. El capítulo tercero está enfocado en resolver problemas de Ingeniería Química que son estudiados a partir del cuarto semestre en adelante y puedan ser resueltos por la transformada de Laplace, dicho nuevamente, de manera práctica y sencilla.

II. Objetivos particulares:

1.- Explicar la definición de la transformada de Laplace y desarrollarla para las funciones más comunes y utilizadas.

2.- Definir el método general, para resolver una ecuación diferencial y un sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace.

3.- Resolver detalladamente los problemas de aplicación que se ven en la carrera de Ingeniería Química, los cuales contengan ecuaciones diferenciales que puedan ser resueltas por la transformada de Laplace.

CAPÍTULO 1
La transformada de Laplace

Una transformada matemática es un recurso utilizado para resolver problemas que dé otro modo serían muy complicados de solucionar. También se puede decir que una transformada –en general- es una función, es decir, un conjunto de parejas ordenadas cuyos primeros elementos les corresponde uno y sólo un segundo elemento. El primer elemento de esa función es f(t) y el otro es justamente la transformada de Laplace ($\mathcal{L}$), o sea, la solución de la integral que es igual a F(s).

Por consiguiente, la transformada de Laplace es un tipo de transformada integral usada para la resolución de ecuaciones diferenciales, donde Laplace demostró cómo transformar esas ecuaciones diferenciales en ecuaciones que se pueden resolver por medios algebraicos.

1.1 Definición de la transforma de Laplace

La transformada de Laplace de una función f(t) se define como la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$ [1]

Donde s es un parámetro (real o complejo) tal que la integral existe cuando $t \to \infty$. Esto impone algunas restricciones sobre la parte real de s. En este trabajo sólo se considerarán valores reales de s.

[1] (Edwards, 2009, p.442)

A continuación, se presenta la resolución de las transformadas de Laplace para los valores de f(t) más comunes y más utilizados en este trabajo. Dando un total de 26 pares de transformadas, las cuales son resumidas en la tabla 1.

Resolución 1: Transformada de Laplace de la función escalón unitario f (t)=1.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t)=1, quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,(1)\,dt$$

Se resuelve la integral formada: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st}$

Sustituyendo los límites de integración de 0 a ∞:

$$F(s)= \frac{-1}{s}\left[e^{-s(\infty)} - e^{s(0)}\right] = \frac{-1}{s}\,[0-1],$$

Quedando: $F(s) = \frac{1}{s}$

Resolución 2: Transformada de Laplace de la función constante f (t)=k, en donde k es la constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t)=k, quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,(k)\,dt$$

Se resuelve la integral formada: $F(s) = \int_0^\infty k\, e^{-st} dt = \frac{-k}{s} e^{-st}$

Sustituyendo los límites de integración de 0 a ∞:

$$F(s) = \frac{-k}{s}\left[e^{-s(\infty)} - e^{s(0)}\right] = \frac{-k}{s}\,[0-1],$$

Quedando: $F(s) = \frac{k}{s}$

Resolución 3: Transformada de Laplace de la función rampa f (t)= t.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t)=t, quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt$$

Se resuelve la integral formada por el método de *Por Partes*:

$u = t,$ $\quad\int dv = \int e^{-st}\,dt$; $(resolución\ en\ el\ ejemplo\ 1)$

$du = dt,$ $\quad v = -\frac{1}{s}e^{-st},$

Utilizando la fórmula de integración por partes. $\int u dv = u\, v - \int v\, du$

$$F(s) = \int_0^\infty t\, e^{-st} dt = t\,(-\frac{1}{s}\, e^{-st}) - \int -\frac{1}{s}\, e^{-st}\ dt$$

$$F(s) = \frac{-t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}\, dt = \frac{-t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st}$$

Evaluando de 0 a ∞, quedaría:

$$F(s) = \left[\frac{-\infty}{s} e^{-s(\infty)} - \frac{-0}{s} e^{-s(0)}\right] - \frac{1}{s^2}[\, e^{-s(\infty)} - e^{-s(0)}]$$

$$F(s) = [0-0] - \frac{1}{s^2}[\,0-1]$$

Quedando: $F(s) = \frac{1}{s^2}$

Resolución 4: Transformada de Laplace de la función potencia f (t)= t^n.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t)=t^n, quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt$$

Se resuelve la integral formada por el método de *Por Partes*:

$u = t^n, \qquad \int dv = \int e^{-st}\, dt$

$du = n\, t^{n-1}\, dt, \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st},$

Utilizando la fórmula de integración por partes. $\int u dv = u\, v - \int v\, du$

$$F(s) = \int_0^\infty t^n\, e^{-st} dt = t^n\,(-\frac{1}{s}\, e^{-st}) - \int -\frac{1}{s}\, e^{-st}\ n\, t^{n-1}\, dt$$

$$F(s) = \frac{-t^n}{s} e^{-st} + \frac{n}{s}\int e^{-st}\, t^{n-1}\, dt = \frac{-t^n}{s} e^{-st} + \frac{n}{s}\ \mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

$$F(s) = \frac{-t^n}{s} e^{-st} + \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\frac{n-3}{s}\ldots..\mathcal{L}\{t\}$$

Se sabe que F(s) para la función f(t)=t es igual a $1/s^2$, sustituyendo esta solución:

$$F(s) = \frac{-t^n}{s} e^{-st} + \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\frac{n-3}{s}\ldots..\frac{1}{s^2} = \frac{-t^n}{s} e^{-st} + \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Evaluando de 0 a ∞, quedaría:

$$F(s) = \left[\frac{-\infty^n}{s} e^{-s(\infty)} - \frac{-0^n}{s} e^{-s(0)}\right] + \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Quedando: $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Resolución 5: Transformada de Laplace de la función exponencial $f(t) = e^{\alpha t}$, en donde α es cualquier constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t)=$e^{\alpha t}$, quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty e^{t(-s+\alpha)} dt$$

Se resuelve la integral formada por el método de *cambio de variable*:

$u = t(-s+\alpha)$, $\quad F(s) = \int_0^\infty e^{t(-s+\alpha)} = \int_0^\infty e^u \frac{du}{-s+\alpha}$

$du = (-s+\alpha)dt$ $\quad F(s) = \frac{1}{-s+\alpha}\int_0^\infty e^u du = \frac{1}{-s+\alpha} \cdot e^u = \frac{1}{-s+\alpha} e^{t(-s+\alpha)}$

Evaluando de 0 a ∞, quedaría:

$$F(s) = \frac{1}{-s+\alpha}\left[e^{(\infty)(-s+\alpha)} - e^{(0)(-s+\alpha)}\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{-s+\alpha}[\,0-1] = \frac{1}{-(-s+\alpha)}$$

Quedando: $\quad F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$

De la misma manera cuando $f(t) = e^{-\alpha t}$, su transformada de Laplace sería:

$$F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

Resolución 6: Transformada de Laplace de la función seno $f(t) = sen\, wt$, en donde w es una constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t), quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} sen\, wt\, dt$$

Se resuelve la integral formada por el método de *Por Partes*:

$u = e^{-st}$, $\quad \int dv = sen\, wt\, dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt$, $\quad v = \frac{-1}{w}\cos wt$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} sen\, wt\, dt = e^{-st}\left(\frac{-1}{w}\cos wt\right) - \int \frac{-1}{w}\cos wt\ (-s\, e^{-st})\, dt$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} sen\, wt\, dt = \frac{-1}{w} e^{-st}\cos wt - \frac{s}{w}\int e^{-st}\cos wt\ dt$$

La integral:

$\int e^{-st}\cos wt\ dt$; También se resuelve por partes:

$u = e^{-st}$, $\quad \int dv = \int cos\, wt\, dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt$, $\quad v = \frac{1}{w}\operatorname{sen} wt$

$\int e^{-st}\cos wt\ dt = e^{-st}\left(\frac{1}{w}\operatorname{sen} wt\right) - \int \frac{1}{w}\ \operatorname{sen} wt\ \ (-s\ e^{-st})dt$

Sustituyendo la integral anterior en la ecuación F(s):

F(s) = $-\frac{1}{w}e^{-st}\cos wt - \frac{s}{w}\left[e^{-st}\left(\frac{1}{w}\operatorname{sen} wt\right) - \int \frac{1}{w}\ \operatorname{sen} wt\ \ (-s\ e^{-st})dt\right]$

Simplificando:

F(s) = $\int_0^\infty e^{-st} sen\ wt\ dt = -\ \frac{1}{w}\ e^{-st}\ \cos wt\ - \frac{s}{w^2}\ \ e^{-st}\operatorname{sen} wt\ - \frac{s^2}{w^2}\int e^{-st}\ \operatorname{sen} wt\ \ dt$

F(s) =$\left(1+\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^\infty e^{-st} sen\ wt\ dt\ \ = -\frac{1}{w}\ e^{-st}\ \cos wt\ - \frac{s}{w^2}\ e^{-st}\operatorname{sen} wt$

F(s) =$\int_0^\infty e^{-st} sen\ wt\ dt\ \ = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[-\frac{1}{w}\ e^{-st}\ \cos wt - \frac{s}{w^2}\ e^{-st}\operatorname{sen} wt\ \right]$

Evaluando la solución de 0 a ∞, quedaría:

F(s) =$\left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{-1}{w}\left[e^{-s(\infty)}\cos w(\infty) - e^{-s(0)}\cos w(0)\right] - \frac{s}{w^2}\left[\ e^{-s(\infty)} senw(\infty) -\right.\right.$

$\left.\left. e^{-s(0)} senw(0)\right]\right]$

F(s) =$\left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{-1}{w}(0-1) - \frac{s}{w^2}(0-0)\right] = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}\right]$

Quedando: F(s) = $\frac{w}{s^2+w^2}$

Resolución 7: Transformada de Laplace de la función coseno $\boldsymbol{f(t) = \cos wt}$, en donde w es una constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t), quedando:

$$\text{F(s)} = \int_0^\infty e^{-st}\ coswt\ dt$$

Esta integral se resolvió en la resolución 6 por el método de *por partes*:

F(s) =$\int e^{-st}\cos wt\ \ dt = e^{-st}\left(\frac{1}{w}\operatorname{sen} wt\right) - \int \frac{1}{w}\ \operatorname{sen} wt\ \ (-s\ \ e^{-st})dt$

La integral:

$\int \operatorname{sen} wt\ \ (\ e^{-st}\ )\ dt$; También se resolvió en la resolución 6:

$\int \operatorname{sen} wt\ \ (\ e^{-st}\ )\ dt\ \ =\ -\frac{1}{w}\ e^{-st}\cos wt - \frac{s}{w}\int\ e^{-st}\cos wt\ \ dt$

Sustituyendo la integral anterior en la ecuación F(s):

F(s) $=\int_0^\infty e^{-st}cos\ wt\ dt = \frac{1}{w}e^{-st}\operatorname{sen} wt + \frac{s}{w}\left[-\frac{1}{w}\ e^{-st}\cos wt - \frac{s}{w}\int\ e^{-st}\cos wt\ \ dt\right]$

Simplificando:

F(s) = $\int_0^\infty e^{-st}cos\ wt\ dt\ = \frac{1}{w}e^{-st}\operatorname{sen} wt - \frac{s}{w^2}\ \ e^{-st}\cos wt\ - \frac{s^2}{w^2}\int\ \cos wt\ \ e^{-st}dt$

F(s) = $\left(1+\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^\infty\ e^{-st}cos\ wt\ dt = \frac{1}{w}\ e^{-st}\ \operatorname{sen} wt - \frac{s}{w^2}\ e^{-st}\cos wt$

F(s) = $\int_0^\infty\ e^{-st}cos\ wt\ dt = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}\ e^{-st}\ \operatorname{sen} wt - \frac{s}{w^2}\ e^{-st}\cos wt\ \right]$

Evaluando la solución de 0 a ∞, quedaría:

F(s) $=\left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}\left[e^{-s(\infty)}\operatorname{sen} w(\infty) - e^{-s(0)}\operatorname{sen} w(0)\right] - \frac{s}{w^2}\left[\ e^{-s(\infty)}cosw(\infty) -\right.\right.$

$\left.\left. e^{-s(0)}cosw(0)\right]\right]$

F(s) $=\left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}[0-0] - \frac{s}{w^2}[0-1]\right] = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{s}{w^2}\right]$

Quedando: F(s) = $\frac{s}{s^2+w^2}$

Resolución 8: Transformada de Laplace de la función seno con fase $\boldsymbol{f(t) = sen\ (wt+\alpha)}$, en donde w y α son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t), quedando:

$$\text{F(s)} = \int_0^\infty e^{-st}\ sen(wt+\alpha)\ dt$$

Se sabe que la transformada de Laplace de la función seno, es igual a:

$\int_0^\infty e^{-st}sen\ wt\ dt\ \ = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\ \left[-\frac{1}{w}\ e^{-st}\ \ \cos wt - \frac{s}{w^2}\ e^{-st}\operatorname{sen} wt\ \right]$; y α es una constante, por lo tanto, F(s) es igual a:

F(s) = $\int_0^\infty e^{-st}sen(wt+\alpha)\ dt = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\ \left[-\frac{1}{w}e^{-st}\cos(wt+\alpha) - \frac{s}{w^2}e^{-st}\operatorname{sen}(wt+\alpha)\ \right]$

Evaluando la solución de 0 a ∞, quedaría:

$$F(s) = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{-1}{w}\left[e^{-s(\infty)}\cos(w\cdot\infty+\alpha) - e^{-s(0)}\cos(w\cdot 0+\alpha)\right] - \frac{s}{w^2}\left[e^{-s(\infty)}sen(w\cdot\infty+\alpha) - e^{-s(0)}sen(w\cdot 0+\alpha)\right]\right]$$

$$F(s) = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{-1}{w}(0-\cos\alpha) - \frac{s}{w^2}(0 - sen\,\alpha)\right] = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{\cos\alpha}{w} + \frac{s\cdot sen\,\alpha}{w^2}\right]$$

Quedando: $F(s)= \frac{s\,sen\,\alpha + w\cos\alpha}{s^2+w^2}$

Resolución 9: Transformada de Laplace de la función coseno con fase $\boldsymbol{f(t) = \cos(wt+\alpha)}$, en donde w y α son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t), quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos(wt+\alpha)\,dt$$

Se sabe que la transformada de Laplace de la función coseno, es igual a:

$\int_0^\infty e^{-st}\cos wt\,dt = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}e^{-st}\,\mathrm{sen}\,wt - \frac{s}{w^2}e^{-st}\cos wt\right]$; y α es una constante, por lo tanto F(s) es igual a:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos(wt+\alpha)\,dt = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}e^{-st}\,\mathrm{sen}(wt+\alpha)\right] - \frac{s}{w^2}e^{-st}\cos(wt+\alpha)\Big]$$

Evaluando la solución de 0 a ∞, quedaría:

$$F(s) = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}\left[e^{-s(\infty)}\,\mathrm{sen}(w\cdot\infty+\alpha) - e^{-s(0)}\,\mathrm{sen}(w\cdot 0+\alpha)\right] - \frac{s}{w^2}\left[e^{-s(\infty)}\cos(w\cdot\infty+\alpha) - e^{-s(0)}\cos(w\cdot 0+\alpha)\right]\right]$$

$$F(s) = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{1}{w}[0 - sen\,\alpha] - \frac{s}{w^2}[0-\cos\alpha]\right] = \left[\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\frac{-\mathrm{sen}\,\alpha}{w} + \frac{s\cdot\cos\alpha}{w^2}\right]$$

Quedando: $F(s) = \frac{s\cos\alpha - w\,sen\,\alpha}{s^2+w^2}$

Resolución 10: Transformada de Laplace cuando $f(t) = t \ \mathrm{sen}\, w\, t$, en donde w es una constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t) quedando:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,(t\, sen\, wt)\, dt$$

Se resuelve la integral formada por el método de *Por Partes*:

$u = e^{-st}$ $\qquad \int dv = \int t\, sen\, wt\, dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt,$ $\qquad v = \frac{-1}{w}(t \cos wt) + \frac{1}{w^2} sen\, wt$

Utilizando la fórmula de integración por partes: $\int u dv = u\, v - \int v\, du$

$$F(s) = e^{-st}\left[\frac{-1}{w}\ (t \cos w) + \frac{1}{w^2} sen\ wt\ \right] - \int \left[\frac{-1}{w}\ (t \cos wt) + \frac{1}{w^2} sen\ wt\right][-s\, e^{-st}]\, dt$$

$$F(s) = \frac{-1}{w} e^{-st}\ t \cos wt + \frac{1}{w^2} e^{-st} sen\ wt - \frac{s}{w}\int e^{-st}(t \cos wt)\ dt + \frac{s}{w^2}\int e^{-st}\ \mathrm{sen}\, wt\ dt$$

La siguiente integral se resolvió en la resolución 6:

$$\frac{s}{w^2}\int e^{-st}\ \mathrm{sen}\, wt\ dt = \left[\frac{s}{w^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[-\ \frac{1}{w}\ e^{-st}\ \cos wt - \frac{s}{w^2}\ e^{-st}\ \mathrm{sen}\, wt\ \right]$$

Simplificando:

$$\frac{s}{w^2}\int e^{-st}\ \mathrm{sen}\, wt\ dt = -\frac{s}{w(s^2+w^2)} e^{-st} \cos wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)} e^{-st}\ \mathrm{sen}\, wt$$

La integral: $\int e^{-st}(t \cos wt)\ dt$ también se resuelve por partes:

$u = e^{-st}$ $\qquad \int dv = \int t\ cos\ wt\ dt$

$du = -s\, e^{-st}\, dt,$ $\qquad v = \frac{1}{w}(t\, \mathrm{sen}\, wt\ ) + \frac{1}{w^2} cos\ wt$

Utilizando la fórmula de integración por partes: $\int u dv = u\, v - \int v\, du$

$$\int e^{-st}(t \cos wt)\, dt\ = e^{-st}\left[\frac{1}{w}(t\, \mathrm{sen}\, wt\ ) + \frac{1}{w^2} \cos wt\right] - \int \left[\frac{1}{w}(t\, \mathrm{sen}\, wt\ ) + \frac{1}{w^2} cos\ w\right][-s\, e^{-st}]\, dt \qquad = \frac{1}{w} e^{-st}\ t\, \mathrm{sen}\, wt + \frac{1}{w^2} e^{-st} cos\ wt + \frac{s}{w}\int e^{-st}(\mathrm{t}\, \mathrm{sen}\, wt)\, dt + \frac{s}{w^2}\int e^{-st} \cos wt\, dt$$

La siguiente integral se resolvió en la resolución 7:

$$\frac{s}{w^2}\int e^{-st} \cos wt\ dt = \left[\frac{s}{w^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{s^2}{w^2}}\right]\left[\ \frac{1}{w}\ e^{-st}\ \ \mathrm{sen}\, wt - \frac{s}{w^2}\ e^{-st} \cos wt\right]$$

Simplificando:

$\int e^{-st}(t\cos wt)\,dt = \frac{1}{w}e^{-st}\,t\,\text{sen}\,wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}cos\;wt + \frac{s}{w}\int e^{-st}(\text{t sen}\,wt)\,dt + \frac{s}{w(s^2+w^2)}\;e^{-st}\,\text{sen}\,wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}\;e^{-st}\cos wt$

Sustituyendo las integrales anteriores en la ecuación F(s):

F(s) = $\frac{-1}{w}e^{-st}\;t\cos wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}sen\;wt - \frac{s}{w}\left[\frac{1}{w}e^{-st}\;t\,\text{sen}\,wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}cos\;wt + \frac{s}{w}\int e^{-st}(\text{t sen}\,wt)\,dt + \frac{s}{w(s^2+w^2)}\;e^{-st}\;\text{sen}\,wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}\;e^{-st}\cos wt\right] - \frac{s}{w(s^2+w^2)}e^{-st}\cos wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}e^{-st}\,\text{sen}\,wt$

Simplificando:

F(s) = $\frac{-w}{s^2+w^2}e^{-st}t\cos wt - \frac{s}{s^2+w^2}e^{-st}t\,\text{sen}\,wt + \frac{w^2-s^2}{(s^2+w^2)^2}e^{-st}sen\;wt - \frac{2\text{ws}}{(w^2+s^2)^2}e^{-st}\cos wt$

Evaluando la solución de 0 a ∞, quedaría:

F(s)=

$\left[-\frac{w}{s^2+w^2}\;e^{-s(\infty)}(\infty)cos\;w(\infty) - e^{-s(0)}(0)cos\;w(0)\right] - \left[\frac{s}{s^2+w^2}\;e^{-s(\infty)}(\infty)sen\;w(\infty) - e^{-s(0)}(0)sen\;w(0)\right] + \left[\frac{w^2-s^2}{(s^2+w^2)^2}\;e^{-s(\infty)}sen\;w(\infty) - e^{-s(0)}sen\;w(0)\right] - \left[\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}\;e^{-s(\alpha)}cos\;w(\infty) - e^{-s(0)}cos\;w(0)\right]$

F(s) = $-\left[\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}\right][0-1]$

Quedando: F(s) = $\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$

Resolución 11: Transformada de Laplace, cuando $f(t) = t\cos wt$, w es una constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t) quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,(t\,cos\,wt)\,dt$$

Esta integral se resolvió en la resolución 20 por el método de *por partes*:

$$F(s) = \int e^{-st}(t\cos wt)\,dt = \frac{1}{w}e^{-st}\,t\,\text{sen}\,wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}cos\,wt + \frac{s}{w}\int e^{-st}(\text{t}\,\text{sen}\,wt)\,dt + \frac{s}{w(s^2+w^2)}\,e^{-st}\,\text{sen}\,wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}\,e^{-st}\cos wt$$

La integral $\int e^{-st}(\text{t}\,\text{sen}\,wt)\,dt$; También se resolvió en la resolución 20:

$$\int e^{-st}(t\,\text{sen}\,wt) = -\frac{1}{w}e^{-st}\,t\cos wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}sen\,wt - \frac{s}{w}\int e^{-st}(t\cos wt)\;dt - \frac{s}{w(s^2+w^2)}e^{-st}\cos wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}e^{-st}\,\text{sen}\,wt$$

Sustituyendo la integral anterior en la ecuación F(s):

$$F(s) = \frac{1}{w}e^{-st}\,t\,\text{sen}\,wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}cos\,wt + \frac{s}{w}\left[-\frac{1}{w}e^{-st}\,t\cos wt + \frac{1}{w^2}e^{-st}sen\,wt - \frac{s}{w}\int e^{-st}(t\cos wt)\;dt - \frac{s}{w(s^2+w^2)}e^{-st}\cos wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}e^{-st}\,\text{sen}\,wt\right] + \frac{s}{w(s^2+w^2)}\,e^{-st}\,\text{sen}\,wt - \frac{s^2}{w^2(s^2+w^2)}\,e^{-st}\cos wt$$

Simplificando:

$$F(s) = \frac{w}{s^2+w^2}e^{-st}t\,\text{sen}\,wt - \frac{s}{s^2+w^2}e^{-st}t\cos wt + \frac{w^2-s^2}{(s^2+w^2)^2}e^{-st}cos\,wt + \frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}e^{-st}\,\text{sen}\,wt$$

Evaluando la solución de 0 a ∞, quedaría:

$$F(s) = \left[\frac{w}{s^2+w^2}\;e^{-s(\infty)}(\infty)sen\,w(\infty) - e^{-s(0)}(0)sen\,w(0)\right] - \left[\frac{s}{s^2+w^2}\;e^{-s(\infty)}(\infty)cos\,w(\infty) - e^{-s(0)}(0)cos\,w(0)\right] + \left[\frac{w^2-s^2}{(s^2+w^2)^2}\;e^{-s(\infty)}cos\,w(\infty) - e^{-s(0)}cos\,w(0)\right] + \left[\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}\;e^{-s(\alpha)}sen\,w(\infty) - e^{-s(0)}sen\,w(0)\right]$$

$$F(s) = \left[\frac{w^2-s^2}{(s^2+w^2)^2}\right][0-1]$$

Quedando: $F(s) = \frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$

1.2 Propiedades de la transformada de Laplace

Una vez analizada la definición de la transformada de Laplace para las funciones más comunes, se pasa a estudiar las propiedades básicas de esta transformada, las cuales son aplicadas para el cálculo de ecuaciones diferenciales.

Cabe mencionar que existen más propiedades para la función Laplace, sin embargo, para fines de este trabajo sólo se estudiarán las siguientes: linealidad, primer teorema de traslación y derivabilidad de la función Laplace.

1.2.1 Linealidad

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t) \pm g(t)\} = F(s) \pm G(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t) \pm g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[f(t) \pm\ g(t)]\ dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt\ \ \pm\ \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$ [2]

A partir de la propiedad de linealidad en la transformada de Laplace, se pueden obtener nuevas transformadas de funciones elementales, las cuales se muestran en las siguientes resoluciones.

Resolución 12: Transformada de Laplace de la función seno hiperbólico, es decir cuando $\boldsymbol{f(t) = senh\ \alpha t}$, $\boldsymbol{\alpha}$ es cualquier constante.

Se sabe que $f(t) = senh\ \alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$ por lo que al sustituirla en F(s):

F(s)=$\int_0^\infty e^{-st} senh\ \alpha t\ dt = \int_0^\infty e^{-st}\ \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{t(\alpha - s)} dt - \int_0^\infty e^{-t(\alpha + s)} dt\right]$

Se sabe que F(s) para la función exponencial es igual a:

Para $f(t) =\ e^{\alpha t}$, F(s) = $\frac{1}{s-\alpha}$ y para $f(t) =\ e^{-\alpha t}$, F(s) = $\frac{1}{s+\alpha}$

Sustituyendo estás soluciones en la ecuación principal:

$$F(s) = \ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\alpha}{s^2-\alpha^2}\right]$$

Quedando: F(s) = $\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

[2] (Edwards, 2009, p.444)

Resolución 13: Transformada de Laplace de la función coseno hiperbólico, es decir cuando $\boldsymbol{f(t) = cosh\,\alpha t}$, $\boldsymbol{\alpha}$ es constante.

Se sabe que $f(t) = cosh\,\beta t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$ por lo que al sustituir en F(s):

F(s)=$\int_0^\infty e^{-st} cosh\,\beta t\; dt = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})dt = \frac{1}{\mathbf{2}}\left[\int_0^\infty e^{t(\alpha - s)}dt + \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)}dt\right]$

Sustituyendo la transformada de Laplace de la función exponencial en la ecuación principal:

$$F(s) = \;= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-\alpha^2}\right]$$

Quedando: F(s) = $\frac{s}{s^2-\alpha^2}$

Resolución 14: Transformada de Laplace, cuando $\boldsymbol{f(t) = 1 - \cos w\,\mathrm{t}}$, w es constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t):

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}(1 - \cos wt)\; dt = \int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-st} \cos wt\;\; dt$$

Sustituyendo la transformada de Laplace de la resolución 1 y función coseno en la ecuación principal F(s):

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{w^2+s^2}$$

Quedando: $$F(s) = \frac{w^2}{s(s^2+w^2)}$$

Resolución 15: Transformada de Laplace, cuando $\boldsymbol{f(t) = sen\; wt - \mathrm{wt}\cos w\,\mathrm{t}}$, w es constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t):

F(s) = $\int_0^\infty e^{-st}(sen\; wt - wt\cos wt)dt = \int_0^\infty e^{-st} sen\; wt\; dt - w\int_0^\infty e^{-st}(t\cos wt\;)dt$

Sustituyendo la transformada de Laplace de la función seno y de la resolución 11 en la ecuación principal F(s):

$$F(s) = \frac{w}{s^2+w^2} - w\left[\frac{s^2-w^2}{(w^2+s^2)^2}\right]$$

Quedando: $$F(s) = \frac{2\,w^3}{(s^2+w^2)^2}$$

Resolución 16: Transformada de Laplace de la función convergencia exponencial $\boldsymbol{f(t) = 1 - e^{\alpha t}}$, en donde α es constante.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t) quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,(1 - e^{\alpha t})\,dt = \int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{t(\alpha - s)}dt$$

Sustituyendo la transformada de Laplace de la función constante y función exponencial en la ecuación principal F(s):

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-\alpha}$$

Quedando: $F(s) = \frac{-\alpha}{s(s-\alpha)}$

De la misma manera cuando $f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, su transformada de Laplace correspondiente sería: $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} = \frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$

Resolución 17: Transformada de Laplace de la función doble $\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)}$, en donde a y b son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t) quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)\,dt = \frac{1}{a-b}\left[\int_0^\infty e^{t(a-s)} - e^{t(b-s)}dt\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{a-b}\left[\int_0^\infty e^{t(a-s)}dt - \int_0^\infty e^{t(b-s)}dt\right]$$

Sustituyendo la transformada de Laplace de la función exponencial en la ecuación principal F(s):

$$F(s) = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right]$$

Quedando: $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$

De la misma manera cuando $f(t) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$, su transformada de Laplace correspondiente sería: $F(s) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right] = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

Resolución 18: Transformada de Laplace, cuando $\boldsymbol{f(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a-b}}\left(\mathbf{ae^{at}} - \mathbf{be^{bt}}\right)$, en donde a y b son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t) quedando:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{1}{\mathrm{a-b}}\left(a\mathrm{e}^{\mathrm{at}} - \mathrm{be}^{\mathrm{bt}}\right)\, dt = \frac{1}{a-b}\left[\int_0^\infty \left(ae^{t(a-s)} - be^{t(b-s)}\right)dt\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{a-b}\left[\int_0^\infty ae^{t(a-s)}dt - \int_0^\infty be^{t(b-s)}dt\right]$$

Sustituyendo la transformada de Laplace de la función exponencial en la ecuación principal F(s):

$$F(s) = \frac{1}{a-b}\left[a\cdot\frac{1}{s-a} - b\cdot\frac{1}{s-b}\right] = \frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right]$$

Quedando: $F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$

De la misma manera cuando $f(t) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a-b}}\left(\mathbf{ae^{-at}} - \mathbf{be^{-bt}}\right)$, su transformada de Laplace correspondiente sería: $F(s) = \frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{s+a} - \frac{b}{s+b}\right] = \frac{s}{(s+a)(s+b)}$

1.2.2 Primer teorema de traslación

El primer teorema de traslación hace referencia a la transformada de Laplace de la función exponencial por alguna otra función f(t), este teorema afirma:

$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cdot f(t)\} = F(s-a)$; Es decir: $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cdot f(t)\} = \mathcal{L}(ft)_{s\to s-a}$

Al igual: $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cdot f(t)\} = F(s+a)$; Es decir: $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cdot f(t)\} = \mathcal{L}(ft)_{s\to s+a}$[3]

A partir de este primer teorema de traslación se pueden obtener nuevas transformadas de funciones elementales, las cuales se muestran en las siguientes resoluciones.

[3] (Dennis G. Zill. 2008, p.197)

Resolución 19: Transformada de Laplace, cuando $f(t) = e^{\alpha t}\mathrm{k}$, α y k son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t):

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}(K \cdot e^{\alpha t})\ dt = K\int_0^{\infty} e^{t(\alpha-s)}dt$$

Se sabe que F(s) para la función constante es igual a:

$$F(s) = \frac{k}{s};\ \ s \to s - a\ \therefore\ F(s)\ = \frac{K}{s-\alpha}$$

De la misma manera cuando $f(t) =\ e^{-\alpha t}K$, su transformada de Laplace sería:

$$F(s) = \frac{K}{s+\alpha}$$

Resolución 20: Transformada de Laplace, cuando $f(t) = e^{\alpha t}t^{n}$, α es una constante.

Se sustituye en la integral (TL) el valor de f(t), quedando:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\ e^{\alpha t}t^{n}\ dt = \int_0^{\infty} e^{t(-s+\alpha)}t^{n}dt$$

Se sabe que F(s) para la función potencia es igual a:

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}};\ \ s \to s - a\ \therefore\ F(s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

De la misma manera cuando $f(t) = e^{-\alpha t}t^{n}$, su transformada de Laplace sería:

$$F(s) = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$$

Resolución 21: Transformada de Laplace de la función onda senoidal con amortiguación exponencial $f(t) = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,wt$, en donde w y α son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t) quedando:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\ (e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,wt)\,dt = \int_0^{\infty} e^{t(\alpha-s)}\,\mathrm{sen}\,wt\ \ dt$$

Se sabe que F(s) para la función seno es igual a:

$$F(s) = \frac{w}{w^2+s^2};\ \ s \to s - a\ \therefore\ F(s) = \frac{w}{w^2+(s-\alpha)^2}$$

De la misma manera cuando $f(t) = e^{-\alpha t}sen\ wt$, su transformada de Laplace sería:

$$F(s) = \frac{w}{w^2+(s+\alpha)^2}$$

Resolución 22: Transformada de Laplace de la función onda cosenoidal con amortiguación exponencial $f(t) = e^{\alpha t} \cos w\, t$, en donde w y α son constantes.

Se sustituye en la integral F(s) el valor de f(t), quedando:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{\alpha t} \cos wt)\, dt = \int_0^{\infty} e^{t(\alpha - s)} * \cos wt \quad dt$$

Se sabe que F(s) para la función coseno es igual a:

$$F(s) = \frac{s}{w^2+s^2}; \quad s \to s - a \;\therefore\; F(s) = \frac{s-\alpha}{w^2+(s-\alpha)^2}$$

De la misma manera cuando $f(t) = e^{-\alpha t} \cos wt$, su transformada de Laplace sería:

$$F(s) = \frac{s+\alpha}{w^2+(s+\alpha)^2}$$

1.2.3 Derivabilidad de la transformada de Laplace:

La Derivabilidad de la transformada de Laplace hace referencia a cuándo se tiene que calcular la transformada de una derivada de una función f(t). Esta propiedad es de gran importancia ya que nos demuestra que es posible transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica al poder transformar las derivadas en productos tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

Resolución 23: Transformada de Laplace, cuando $f(t) = x$.

$$\mathcal{L}\{x\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x\, dt,$$

Como evidentemente, no sabemos a qué es igual x en términos de t, entonces vamos a definir a esta transformada simplemente como:

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} e^{-st} x\, dt$$

Es el equivalente en derivadas a la derivada implícita.

Resolución 24: Transformada de Laplace, cuando $f(t) = \frac{dx}{dt}$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = F'(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx}{dt}\, dt$$

Esta integral se resuelve por el método de integración por partes:

$u = e^{-st}$ $\qquad \int dv = \int \frac{dx}{dt}\, dt$

$du = -se^{-st} dt$ $\qquad v = x$

Utilizando la fórmula de integración por partes. $\int u dv = u\, v - \int v\, du$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx}{dt}\, dt = x\, e^{-st} - \int -se^{-st} x\, dt$$

F(s) = $x\, e^{-st} + s \int e^{-st} x\, dt = x\, e^{-st} + s\bar{x}$

Evaluando la solución de 0 a∞, con la condición: $x(t=0) = x_0$ quedaría:

F(s) = $\left(xe^{-s(\infty)} - \; xe^{-s(0)}\right) + s\bar{x}$

Quedando: F(s) = $s\bar{x} - x_0$

Resolución 25: Transformada de Laplace, cuando $\boldsymbol{f(t) = \frac{d^2x}{dt^2}}$.

$$\mathcal{L}\left\{\ \frac{d^2x}{dt^2}\ \right\} = F''(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2x}{dt^2}\, dt$$

Se resuelve esta integral por el método de integración por partes:

$u = e^{-st}$ $\qquad\qquad$ $\int dv = \int \frac{d^2x}{dt^2}\, dt$

$du = -se^{-st} dt$ $\qquad\qquad$ $v = \frac{dx}{dt}$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:$\int u dv = u\, v - \int v\, du$

F(s) = $\int_0^\infty e^{-st} \frac{dx}{dt}\, dt = \frac{dx}{dt}\, e^{-st} - \int -se^{-st} \frac{dx}{dt} dt$

F(s) = $\frac{dx}{dt}\, e^{-st} + s \int e^{-st} \frac{dx}{dt} dt = \frac{dx}{dt} e^{-st} + sx\, e^{-st} + s^2\bar{x}$

Evaluando la solución de 0 a∞, con las condiciones: $x(t=0) = x_0$; $\frac{dx}{dt}(t=0) = x_1$

F(s) = $\left(\frac{dx}{dt} e^{-s(\infty)} - x_1 e^{-s(0)}\right) + \left(sxe^{-s(\infty)} - \; sx_0 e^{-s(0)}\right) + s^2\bar{x}$

Quedando: $\qquad$ F(s) = $s^2\bar{x} - sx_0 - x_1$

Que es igual a: F(s) = $s^n F(s) - s^{n-1} x - \frac{dx}{dt}$

Resolución 26: Transformada de Laplace, cuando $\boldsymbol{f(t) = \frac{d^nx}{dt^n}}$.

Si continuáramos en esta línea, para las derivadas de orden superior $\frac{d^nx}{dt^n}$, con las condiciones:

$x(t=0) = x_0$ $\qquad$ $\frac{d^2x}{dt^2}(t=0) = x_2$ $\qquad$ $\frac{d^4x}{dt^4}(t=0) = x_4$

$\frac{dx}{dt}(t=0) = x_1$ $\qquad$ $\frac{d^3x}{dt^3}(t=0) = x_3$ $\qquad$ $\frac{d^nx}{dt^n}(t=0) = x_{n-1}$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de orden n de una función f(t) es:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nx}{dt^n}\right\} = s^n\bar{x} - s^{n-1}x - s^{n-2}\frac{dx}{dt} - s^{n-3}\frac{d^2x}{dt^2} - s^{n-4}\frac{d^3x}{dt^3} \ldots . \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nx}{dt^n}\right\} = s^n\bar{x} - s^{n-1}x - s^{n-2}x' - s^{n-3}x'' - s^{n-4}x''' \ldots . x^{n-1}$$

Que cuando t=0 es igual a:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nx}{dt^n}\right\} = F^n(s) = s^n\bar{x} - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_1 - s^{n-3}x_2 - s^{n-4}x_3 \ \ldots . -x_{n-1}$$

Tabla 1.- Transformada y Transformada Inversa de Laplace para las funciones más comunes.

No.	Función	f (t)	F(s)
1	*escalón unitario*	1	$1/s$
2	*constante*	k	k/s
3	*rampa*	t	$1/s^2$
4	*potencia*	t^n	$n!/s^{n+1}$
5	*exponencial*	$e^{\alpha t}$ $e^{-\alpha t}$	$1/(s-\alpha)$ $1/(s+\alpha)$
6	*seno*	$sen\ \omega t$	$w/(s^2+w^2)$
7	*coseno*	$cos\ \omega t$	$s/(s^2+w^2)$
8	*seno con fase*	$sen\ (\omega t\ +\ \alpha)$	$(s\ sen\ \alpha + w\ cos\ \alpha)/(s^2+w^2)$
9	*coseno con fase*	$cos\ (\omega t\ +\ \alpha)$	$(s\ cos\ \alpha - w\ sen\ \alpha)/(s^2+w^2)$
10		$t\ sen\ \omega t$	$2\ \omega s\ /\ (s^2+\omega^2)^2$
11		$t\ cos\ \omega t$	$(s^2-\omega^2)\ /\ (s^2+\omega^2)^2$
12	*seno hiperbólico*	$senh\ \alpha t$	$\alpha/(s^2-\alpha^2)$
13	*coseno hiperbólico*	$cosh\ \alpha t$	$s/(s^2-\alpha^2)$
14		$1\ -\ cos\ \omega t$	$w^2/s(s^2+w^2)$
15		$sen\ \omega t - \omega t\ cos\ \omega t$	$2\ \omega^3\ /\ (s^2+\omega^2)^2$
16	*convergencia exponencial*	$1-e^{\alpha t}$ $1-e^{\alpha t}$	$-\alpha/s(s-\alpha)$ $\alpha/s\ (s+\alpha)$
17	*exponencial doble*	$1/a-b\ \ (e^{at}-e^{bt})$ $1/a-b\ \ (e^{-at}-e^{-bt})$	$1/\ (s-a)\ (s-b)$ $1/\ (s+a)\ (s+b)$
18		$1/a-b\ \ (ae^{at}-be^{bt})$ $1/a-b\ \ (ae^{-at}-be^{-bt})$	$s/\ (s-a)\ (s\ -\ b)$ $s/\ (s+\ a)\ (s+\ b)$
19		$e^{\alpha t}\ f\ (t)$ $e^{-\alpha t}\ f\ (t)$	$F\ (s-\ \alpha)$ $F\ (s+\ \alpha)$
20		$e^{\alpha t}\ t^n$ $e^{-\alpha t}\ t^n$	$n!/(s-\alpha)^{n+1}$ $n!/(s+\alpha)^{n+1}$
21	*onda senoidal con amortiguación exp.*	$e^{\alpha t}\ sen\ wt$ $e^{-\alpha t}\ sen\ wt$	$w/\{w^2+(s-\alpha)^2\}$ $w/\{w^2+(s+\alpha)^2\}$
22	*onda cosenoidal con amortiguación exp.*	$e^{\alpha t}\ cos\ wt$ $e^{-\alpha t}\ cos\ wt$	$(s-\alpha)/\{w^2+(s-\alpha)^2\}$ $(s+\alpha)/\{w^2+(s+\alpha)^2\}$
23		x	$\bar{x} = \int_0^\infty e^{-st} x\ dt$
24	*derivada*	dx/dt	$s\bar{x}-x_0$
25	*derivada cuadrática*	d^2x/dt^2	$s^2\bar{x}-sx_0-x_1$
26	*derivada n-enésima*	d^nx/dt^n	$s^n\bar{x}-s^{n-1}x-s^{n-2}x'\ \ldots.-x^{n-1}$ $s^n\bar{x}-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_1\ \ldots.-x_{n-1}$

1.3 Transformada inversa de Laplace

Se sabe que la transformada de Laplace permite pasar una función que está en términos de "t" a una nueva función que esté en términos de "s", es decir:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Ahora bien, la transformada inversa de Laplace permite pasar una función que está en términos de "s" a una nueva función que esté en términos de "t". Por lo que la transformada inversa de Laplace se puede definir como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$ [4]

De la misma manera, F(s)[$F(s)^{-1}$]=1, como sucede con las operaciones inversas.

1.4 Propiedades de la transformada inversa de Laplace

En la transformada de Laplace existen propiedades básicas que facilitan las resoluciones de funciones más complejas, dichas propiedades también son utilizadas para el cálculo de la transformada inversa, las cuales se definen a continuación:

- **Linealidad:**

  Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = F(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \pm G(s)\} = f(t) \pm g(t)$$ [5]

- **Traslación:**

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{\alpha s}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-\alpha s}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$ [6]

Para poder resolver una transformada inversa de Laplace se utiliza la tabla 1 desarrollada en el capítulo anterior, cómo ejemplos muy sencillos:

1.- Se observa que k/s, es la función cuya transformada es k, por lo tanto, k es la transformada inversa de k/s que podríamos escribir como:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k$$

[4] (Edwards, 2009, p.446)
[5] (Dennis G. Zill. 2008, p.200)
[6] (Edwards, 2009, p.446)

2.- Para la función $\mathrm{F(s)} = \left\{\frac{1}{s^3}\right\}$, se utiliza la fórmula de la función potencia:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2!}\cdot \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}$$

Por lo tanto, la transformada inversa quedaría como:

$$\frac{1}{2!}\cdot \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\} = \frac{1}{2}\ s^2$$

Como se puede observar en el ejemplo anterior fue necesario multiplicar y dividir a su vez la función por 2!, para poder hacer uso de la fórmula función potencia. Cabe destacar que en ocasiones es necesario hacer este tipo de operaciones básicas para poder aplicar las fórmulas de las transformadas de Laplace.

Sin embargo, hay funciones más complejas, que para poder encontrar su transformada inversa de Laplace es necesario descomponer la función en factores, es decir hacer uso de fracciones parciales. Tal es el caso de las funciones cuyo grado polinómico del numerador es menor al grado polinómico del denominador.
Este tipo de funciones pueden presentarse en cinco distintos casos, los cuales son descritos a continuación mediante un ejemplo.

Caso 1: Los factores del denominador son lineales e iguales:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{s^2+s-1}{s^3-6s^2+12s-8}\right\} = \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{s^2+s-1}{(s-2)(s-2)(s-2)}\right\}$$

La fracción cuyo denominador consiste en tres factores cuyas raíces son idénticas, es decir: s_1, s_2 y s_3 =2 se puede expresar mediante las fracciones parciales:

$$\frac{s^2+s-1}{(s-2)(s-2)(s-2)} = \frac{A}{(s-2)^3} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-2}$$

Multiplicando toda la igualdad por $(s-2)^3$:

$$s^2 + s - 1 = A + B(s-2) + C(s-2)^2$$

Sustituyendo la raíz:

S= 2, $5 = A,$ por lo que: $A = 5$

Se suponen valores:

S= 1, $1 = 5 + B(1-2) + C(1-2)^2$ por lo que: $-4 = -B + C$

S_3= 0, $-1 = 5 + B(0-2) + C(0-2)^2$ por lo que: $-6 = -2B + 4C$

Resolviendo este sistema de ecuaciones de 2x2, se obtienen los valores de $B = 5; C = 1$.Por lo tanto:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{s^2+s-1}{(s-2)(s-2)(s-2)}\right\} = 5F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\} + 5F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

Aplicando las propiedades de la Transformada y usando la tabla 1:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{s^2+s-1}{(s-2)(s-2)(s-2)}\right\} = \frac{5}{2!}F(s)^{-1}\left\{\frac{2!}{(s-2)^{2+1}}\right\} + \frac{5}{1!}F(s)^{-1}\left\{\frac{1!}{(s-2)^{1+1}}\right\} + F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

Quedando: $F(s)^{-1}\left\{\frac{s^2+s-1}{(s-2)(s-2)(s-2)}\right\} = \frac{5}{2}(e^{2t}\,t^2) + 5(e^{2t}\,t) + e^{2t}$

Caso 2: Los factores del denominador son lineales y diferentes:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+6s+27}{s^4-9s^2}\right\} = \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+6s+27}{(s-3)(s+3)(s-0)(s+0)}\right\}$$

La fracción cuyo denominador consiste en cuatro factores cuyas raíces son: s_1=3, s_2= -3, s3=0 y s_4= -0 se puede expresar mediante las fracciones parciales:

$$\frac{s^3+3s^2+6s+27}{(s-3)(s+3)(s-0)(s+0)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-0} + \frac{D}{s+0}$$

Multiplicando toda la igualdad por (s-3) (s+3) (s-0) (s+0):

$$s^3 + 3s^2 + 6s + 27 = A(s+3)(s-0)(s+0) + B(s-3)(s-0)(s+0)$$
$$+C(s-3)(s+3)(s+0) + D(s-3)(s+3)(s-0)$$

Sustituyendo las raíces:

S_1= 3, $81 = A(3+3)(3-0)(3+0),$ por lo que: $A = \frac{3}{2}$

S_2= -3, $45 = B(-3-3)(-3-0)(-3+0),$ por lo que: $B = -\frac{5}{6}$

S_3= 0, $27 = C(0-3)(0+0)(0+0),$ por lo que no existe valor de C

S_4= -0, $27 = D(-0-3)(-0+3)(-0-0),$ por lo que no existe valor de D

Por lo tanto:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+6s+27}{(s-3)(s+3)(s-0)(s+0)}\right\} = \frac{3}{2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \frac{5}{6}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Aplicando las propiedades de la Transformada y usando la tabla 1:

Quedando: $F(s)^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+6s+27}{(s-3)(s+3)(s-0)(s+0)}\right\} = \frac{3}{2}(e^{3t}) - \frac{5}{6}(e^{-3t})$

Caso 3: Los factores del denominador son no lineales e iguales:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{2s^3+s^2-2s+4}{s^4+8s^2+16}\right\} = \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{2s^3+s^2-2s+4}{(s^2+4)(s^2+4)}\right\}$$

La fracción, cuyo denominador consiste en dos factores cuadráticos idénticos, se puede expresar mediante las fracciones parciales:

$$\frac{2s^3+s^2-2s+4}{(s^2+4)(s^2+4)} = \frac{As+B}{(s^2+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Multiplicando toda la igualdad por $(s^2+4)^2$

$$2s^3 + s^2 - 2s + 4 = As + B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D$$

$$2s^3 + s^2 - 2s + 4 = Cs^3 + Ds^2 + (A + 4C)s + B + 4D$$

Al ser una igualdad nos queda:

$C = 2;\quad D = 1;\quad A = -2 - 4C = -10;\quad B = 4 - 4D = 0$

Por lo tanto:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{2s^3+s^2-2s+4}{(s^2+4)(s^2+4)}\right\} = -10\,F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} + 2F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\} + F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)}\right\}$$

Aplicando las propiedades de la Transformada y usando la tabla 1:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{2s^3+s^2-2s+4}{(s^2+4)(s^2+4)}\right\} = -\frac{10}{2\cdot 2}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{2\cdot 2\cdot s}{(s^2+2^2)^2}\right\} + 2F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+2^2)}\right\} + \frac{1}{1\cdot 2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2}{(s^2+2^2)}\right\}$$

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{2s^3+s^2-2s+4}{(s^2+4)(s^2+4)}\right\} = -\frac{5}{2}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{2\cdot 2s}{(s^2+2^2)^2}\right\} + 2F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+2^2)}\right\} + \frac{1}{2}F(s)^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+2^2)}\right\}$$

Quedando: $F(s)^{-1}\left\{\frac{2s^3+s^2-2s+4}{(s^2+4)(s^2+4)}\right\} = -\frac{5}{2}(t\ sen\ 2t) + 2(cos\ 2t) + \frac{1}{2}(sen\ 2t)$

Caso 4: Los factores del denominador son no lineales y diferentes:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{s^3-s-2}{s^4+5s^2+4}\right\} = \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{s^3-s-2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$$

La fracción, cuyo denominador consiste en dos factores cuadráticos distintos, se puede expresar mediante las fracciones parciales:

$$\frac{s^3-s-2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Multiplicando toda la igualdad por $(s^2+1)(s^2+4)$:

$$s^3 - s - 2 = As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Cs + Ds^2 + D$$

$$s^3 - s - 2 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + 4B + D$$

Al ser una igualdad nos queda:

$A + C = 1;$ $B + D = 0;$ $4A + C = -1;$ $4B + D = -2$

Se forman dos sistemas de ecuaciones de 2x2:

$A + C = 1$ $B + D = 0$

$4A + C = -1$ $4B + D = -2$

Resolviendo estos sistemas de ecuaciones nos queda:

$A = \frac{-2}{3};$ $B = \frac{-2}{3};$ $C = \frac{5}{3};$ $D = \frac{2}{3}$

Por lo tanto: $F(s)^{-1}\left\{\frac{s^3-s-2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = -\frac{2}{3}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{2}{3}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3}F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + \frac{2}{3}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\}$

Aplicando las propiedades de la Transformada y usando la tabla 1:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{s^3-s-2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = -\frac{2}{3}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{2}{3}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3}F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + \frac{2}{3\cdot 2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$= -\frac{2}{3}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{2}{3}\,F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3}F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + \frac{1}{3}F(s)^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$$

Quedando: $F(s)^{-1}\left\{\frac{s^3-s-2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = -\frac{2}{3}(cos\ t) - \frac{2}{3}(sen\ t) + \frac{5}{3}(cos\ 2t) + \frac{1}{3}(sen\ 2t)$

Caso 5: Los factores del denominador son lineales y no lineales:

$$\mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)(s+3)(s^2+4s+8)}\right\} = \mathrm{F(s)}^{-1}\left\{\frac{2}{[s+2][s+3][4+(s+2)^2]}\right\}$$

La fracción, cuyo denominador consiste en tres factores; dos factores lineales y un factor cuadrático, se puede expresar mediante las fracciones parciales:

$$\frac{2}{[s+2][s+3][4+(s+2)^2]} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{4+(s+2)^2}$$

Multiplicando toda la igualdad por $(s+2)(s+3)[4+(s+2)^2]$:

$$2 = As^3 + 7As^2 + 20As + 24A + Bs^3 + 6Bs^2 + 16Bs + 16B + Cs^3$$
$$+5Cs^2 + 6Cs + Ds^2 + SDs + 6D$$

$$0s^3 + 0s^2 + 0s + 2 = (A + B + C)s^3 + (7A + 6B + 5C + D)s^2$$
$$+(20A + 16B + 6C + 5D)s + 24A + 16B + 6D$$

Al ser una igualdad nos queda un sistema de 4x4:

$A + B + C = 0;$ $\quad$ $20A + 16B + 6C + 5D = 0$

$7A + 6B + 5C + D = 0;$ $\quad$ $24A + 16B + 6D = 2$

Resolviendo este sistema de ecuaciones nos queda:

$A = \frac{1}{2};$ $\quad$ $B = \frac{-2}{5};$ $\quad$ $C = \frac{-1}{10};$ $\quad$ $D = \frac{-3}{5}$

Por lo tanto:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{2}{[s+2][s+3][4+(s+2)^2]}\right\} =$$
$$\frac{1}{2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{2}{5}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{10}F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{4+(s+2)^2}\right\} - \frac{3}{5}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{4+(s+2)^2}\right\}$$

Aplicando las propiedades de la Transformada y usando la tabla 1:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{2}{[s+2][s+3][4+(s+2)^2]}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{2}{5}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{10}F(s)^{-1}\left\{\frac{s+2}{2^2+(s+2)^2}\right\} - \left(\frac{\frac{3}{5}+2}{2}\right)F(s)^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2}{2^2+(s+2)^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{2}{5}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{10}F(s)^{-1}\left\{\frac{s+2}{2^2+(s+2)^2}\right\} - \frac{13}{10}F(s)^{-1}\left\{\frac{2}{2^2+(s+2)^2}\right\}$$

Quedando:

$$F(s)^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)(s+3)[4+(s+2)^2]}\right\} = \frac{1}{2}(e^{-2t}) - \frac{2}{5}(e^{-3t}) - \frac{1}{10}(e^{-2t}\cos 2t) - \frac{13}{10}(e^{-2t}\operatorname{sen} 2t)$$

CAPÍTULO 2
Resolución de ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace.

Una ecuación diferencial con la forma:

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + cx = f(x);$$

Se le conoce como ecuación diferencial de orden superior ordinaria lineal y de coeficientes constantes.
En donde:
$n = orden\ de\ la\ ecuación$
$f(x) = función\ en\ terminos\ de\ x$
$a, b, c = constantes$

El principal objetivo de este capítulo es introducir este tipo de ecuaciones, estudiando y analizando sus soluciones obtenidas por el método de la transformada de Laplace, pues esta transformada permite obtener soluciones explicitas en problemas con valores iniciales. En conclusión, convierte este tipo de ecuaciones en problemas algebraicos en las cuales se incorporan de forma automática las condiciones iniciales.

Para poder resolver una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace es preciso seguir tres pasos básicos, los cuales son descritos a continuación:

1.- Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación diferencial, con ayuda de la tabla 1. Por lo que se obtendrá una nueva función en términos de "s".

2.- Se sustituyen las condiciones iniciales en esta nueva función y se resuelve algebraicamente despejando $\bar{x}$.

3.- Se calcula la transformada inversa de Laplace con lo cual se obtendrá la función en términos de t, es decir la solución de la ecuación diferencial.

Para poder entender este procedimiento, se describe en seguida las resoluciones de una serie de ejemplos de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1: cuando f(x)=0.

$2x'' - 3x' - 5x = 0$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0, \quad x'(0) = -2$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{2x'' - 3x' - 5x\} = \mathcal{L}\{0\}$

$2\mathcal{L}\{x''\} - 3\mathcal{L}\{x'\} - 5\mathcal{L}\{x\} = 0$

$2(s^2\bar{x} - sx - x') - 3(s\bar{x} - x) - 5\bar{x} = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$2s^2\bar{x} - 2s(0) - 2(-2) - 3s\bar{x} + 3(0) - 5\bar{x} = 0$

Simplificando:

$\bar{x}(2s^2 - 3s - 5) = -4$

$\bar{x} = \frac{-4}{(2s^2-3s-5)} = \frac{-4}{(2s-5)(s+1)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4}{(2s-5)(s+1)}\right\} = \frac{-8}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-5}\right\} + \frac{4}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{-8}{7\cdot 2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{2}{2}s-\frac{5}{2}}\right\} + \frac{4}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{-4}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{5}{2}}\right\} + \frac{4}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$

Quedando: $x = -\frac{4}{7}(e^{\frac{5}{2}t}) + \frac{4}{7}(e^{-t})$

Ejemplo 2: cuando f(x)=0

$x''' + 4x'' + x' = 0$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 1, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 3$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x''' + 4x'' + x'\} = 0$

$\mathcal{L}\{x'''\} + 4\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{x'\} = 0$

$(s^3\bar{x} - s^2x - sx' - x'') + 4(s^2\bar{x} - sx - x') + (s\bar{x} - x) = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^3\bar{x} - s^2(1) - s(-1) - (3) + 4s^2\bar{x} - 4s(1) - 4(-1) + s\bar{x} - (-1) = 0$

Simplificando:

$\bar{x}(s^3 + 4s^2 + s) = s^2 + 3s - 2$

$\bar{x} = \frac{s^2}{s^3+4s^2+s} + \frac{3s}{s^3+4s^2+s} - \frac{2}{s^3+4s^2+s}$

$\bar{x} = \frac{s^2}{s(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})} + \frac{3s}{s(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})} - \frac{2}{s(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})}$

$\bar{x} = \frac{s+3}{(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})} - \frac{2}{s(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+2-\sqrt{3})(s+2+\sqrt{3})}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2-\sqrt{3}}\right\} + \frac{9-5\sqrt{3}}{2}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s+2+\sqrt{3}}\right\}$

Quedando: $x = \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\left(e^{(-2+\sqrt{3})t}\right) + \frac{9-5\sqrt{3}}{2}\left(e^{(-2-\sqrt{3})t}\right) - 2$

Ejemplo 3: cuando f(x)=t^2.

$x'' + 6x' + 5x = t^2$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0,\quad x'(0) = 2$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x'' + 6x' + 5x\} = \mathcal{L}\{t^2\}$

$\mathcal{L}\{x''\} + 6\mathcal{L}\{x'\} + 5\mathcal{L}\{x\} = t^2$

$(s^2\bar{x} - sx - x') + 6(s\bar{x} - x) + 5\bar{x} = \frac{2}{s^3}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(0) - (2) + 6s\bar{x} - 6(0) + 5\bar{x} = \frac{2}{s^3}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 + 6s + 5)s^3 = 2 + 2$

$\bar{x} = \frac{4}{(s^2+6s+5)s^3} = \frac{4}{(s+1)(s+5)s^3}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)(s+5)s^3}\right\}$

$= \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{24}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{124}{125}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{125}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{4}{5\cdot 2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\} - \frac{24}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{124}{125}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{125}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$

Quedando: $x = \frac{2}{5}(t^2) - \frac{24}{25}(t) + \frac{124}{125} - e^{-t} + \frac{1}{125}(e^{-5t})$

Ejemplo 4: cuando f(x)=$t^3 + t^2 - 2t$.

$x'' + x' = t^3 + t^2 - 2t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 1,\quad x'(0) = \frac{1}{2}$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x''+x'\} = \mathcal{L}\{t^3 + t^2 - 2t\}$

$\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{t^2\} - 2\mathcal{L}\{t\}$

$(s^2\bar{x} - sx - x') + (s\bar{x} - x) = \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(1) - \left(\frac{1}{2}\right) + s\bar{x} - (1) = \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 + s) = \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + s + \frac{3}{2}$

$\bar{x} = \frac{6}{s^4(s^2+s)} + \frac{2}{s^3(s^2+s)} - \frac{2}{s^2(s^2+s)} + \frac{s}{(s^2+s)} + \frac{3}{2(s^2+s)}$

$\bar{x} = \frac{6}{s^5(s+1)} + \frac{2}{s^4(s+1)} - \frac{2}{s^3(s+1)} + \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2s(s+1)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^5(s+1)} + \frac{2}{s^4(s+1)} - \frac{2}{s^3(s+1)} + \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2s(s+1)}\right\}$

$= 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$

$= \frac{6}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^{4+1}}\right\} - \frac{4}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\} + \frac{2}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$

Quedando: $x = \frac{1}{4}(t^4) - \frac{2}{3}(t^3) + t^2 - 2(t) + \frac{7}{2} - \frac{5}{2}(e^{-t})$

Ejemplo 5: cuando f(x)=$2e^{-4t}$

$x'' - 3x' + 2x = 2e^{-4t}$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x'' - 3x' + 2x\} = \mathcal{L}\{2e^{-4t}\}$

$\mathcal{L}\{x''\} - 3\mathcal{L}\{x'\} + 2\mathcal{L}\{x\} = 2\mathcal{L}\{e^{-4t}\}$

$s^2\bar{x} - sx - x' - 3(s\bar{x} - x) + 2\bar{x} = 2\left(\frac{1}{s+4}\right)$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(0) - 1 - 3s\bar{x} + 3(0) + 2\bar{x} = \frac{2}{s+4}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 - 3s + 2) = \frac{2}{s+4} + 1 = \frac{s+6}{s+4}$

$\bar{x} = \frac{s+6}{(s+4)(s^2-3s+2)} = \frac{s+6}{(s+4)(s-2)(s-1)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{(s+4)(s-2)(s-1)}\right\} = \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{7}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$

Quedando: $x = \frac{1}{15}(e^{-4t}) + \frac{4}{3}(e^{2t}) - \frac{7}{5}(e^{t})$

Ejemplo 6: cuando f(x)=$3e^{2t} + t$

$x'' + 4x' + 3x = 3e^{2t} + t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = \frac{1}{2}$, $x'(0) = -2$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x'' + 4x' + 3x\} = \mathcal{L}\{3e^{2t} + t\}$

$\mathcal{L}\{x''\} + 4\mathcal{L}\{x'\} + 3\mathcal{L}\{x\} = 3\mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{t\}$

$s^2\bar{x} - sx - x' + 4(s\bar{x} - x) + 3\bar{x} = 3\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{1}{s^2}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s\left(\frac{1}{2}\right) - (-2) + 4s\bar{x} - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3\bar{x} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 + 4s + 3) = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{2}$

$\bar{x} = \frac{3}{(s-2)(s^2+4s+3)} + \frac{1}{s^2(s^2+4s+3)} + \frac{s}{2(s^2+4s+3)} = \frac{3}{(s-2)(s+3)(s+1)} + \frac{1}{s^2(s+3)(s+1)} + \frac{s}{2(s+3)(s+1)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)(s+3)(s+1)} + \frac{1}{s^2(s+3)(s+1)} + \frac{s}{2(s+3)(s+1)}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{179}{180}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

Quedando: $x = \frac{1}{5}(e^{2t}) + \frac{179}{180}(e^{-3t}) - \frac{1}{4}(e^{-t}) + \frac{1}{3}(t) - \frac{4}{9}$

Ejemplo 7: cuando f(x)=$sen\ 2t$

$4x'' + 9x = sen\ 2t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{1}{2}$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{4x'' + 9x\} = \mathcal{L}\{sen\ 2t\}$

$4\mathcal{L}\{x''\} + 9\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{sen\ 2t\}$

$4(s^2\bar{x} - sx - x') + 9\bar{x} = \frac{2}{s^2+2^2}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$4s^2\bar{x} - 4s(0) - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 9\bar{x} = \frac{2}{s^2+2^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(4s^2 + 9) = \frac{2}{s^2+4} + 2$

$\bar{x} = \frac{2}{(s^2+4)(4s^2+9)} + \frac{2}{(4s^2+9)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)(4s^2+9)} + \frac{2}{(4s^2+9)}\right\} = \frac{-2}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} + \frac{8}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+9}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+9}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{-2}{7\cdot 2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{22}{7\cdot 6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}\cdot 6}{\frac{4}{4}s^2+\frac{9}{4}}\right\} = -\frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{11}{21}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{s^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right\}$$

Quedando: $x = -\frac{1}{7}(sen\ 2t) + \frac{11}{84}\left(sen\ \frac{3}{2}t\right)$

Ejemplo 8: cuando f(x)=$\boldsymbol{cos\ 3t}$

$x'' + 3x' + 2x = cos\ 3t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0,\quad x'(0) = 4$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x'' + 3x' + 2x\} = \mathcal{L}\{cos\ 3t\}$

$\mathcal{L}\{x''\} + 3\mathcal{L}\{x'\} + 2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{cos\ 3t\}$

$(s^2\bar{x} - sx - x') + 3(s\bar{x} - x) + 2\bar{x} = \frac{s}{s^2+3^2}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(0) - (4) + 3s\bar{x} - 3(0) + 2\bar{x} = \frac{s}{s^2+3^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 + 3s + 2) = \frac{s}{s^2+9} + 4$

$\bar{x} = \frac{s}{(s^2+9)(s^2+3s+2)} + \frac{4}{(s^2+3s+2)} = \frac{s}{(s^2+9)(s+1)(s+2)} + \frac{4}{(s+1)(s+2)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+9)(s+1)(s+2)} + \frac{4}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{39}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{50}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{7}{130}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{27}{130}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{39}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{50}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{7}{130}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} + \frac{27}{130\cdot 3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot 3}{s^2+3^2}\right\}$$

Quedando: $x = \frac{39}{10}(e^{-t}) - \frac{50}{13}(e^{-2t}) - \frac{7}{130}(cos\ 3t) + \frac{9}{130}(sen\ 3t)$

Ejemplo 9: cuando f(x)=8($\boldsymbol{sen\ 3t\ cos\ 2t}$)

$x'' + \frac{5}{2}x' + x = 8\ (sen\ 3t\ cos\ 2t)$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = -1,\quad x'(0) = 0$

Se aplica la siguiente identidad trigonométrica:

$senA\ cosB = \frac{1}{2}sen(A - B) + \frac{1}{2}sen(A + B)$

$x'' + \frac{5}{2}x' + x = 8\left[\frac{1}{2}\ sen(3t - 2t) + \frac{1}{2}sen(3t + 2t)\right]$

$x'' + \frac{5}{2}x' + x = 4\ sen\ t + 4\ sen\ 5t$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\left\{x'' + \frac{5}{2}x' + x\right\} = \mathcal{L}\{4\ sen\ t + 4\ sen\ 5t\}$

$\mathcal{L}\{x''\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}\{x'\} + \mathcal{L}\{x\} = 4\mathcal{L}\{sen\ t\} + 4\mathcal{L}\{sen\ 5t\}$

$(s^2\bar{x} - sx\ - x') + \frac{5}{2}(s\bar{x} - x) + \bar{x} = 4\left(\frac{1}{s^2+1^2}\right) + 4\left(\frac{5}{s^2+5^2}\right)$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(-1) - (0) + \frac{5}{2}s\bar{x} - \frac{5}{2}(-1) + \bar{x} = 4\left(\frac{1}{s^2+1^2}\right) + 4\left(\frac{5}{s^2+5^2}\right)$

Simplificando:

$\bar{x}\left(s^2 + \frac{5}{2}s + 1\right) = \frac{4}{s^2+1} + \frac{20}{s^2+25} - s - \frac{5}{2}$

$\bar{x} = \frac{4}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{5}{2}s+1\right)} + \frac{20}{(s^2+25)\left(s^2+\frac{5}{2}s+1\right)} - \frac{s}{s^2+\frac{5}{2}s+1} - \frac{5}{2\left(s^2+\frac{5}{2}s+1\right)}$

$\bar{x} = \frac{4}{(s^2+1)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)} + \frac{20}{(s^2+25)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)} - \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)} - \frac{5}{2\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)\right]}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+1)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)} + \frac{20}{(s^2+25)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)} - \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)} - \frac{5}{2\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+2)\right]}\right\}$

$= \frac{2012}{1515}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right\} - \frac{287}{435}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{8}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{200}{2929}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} - \frac{1920}{2929}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\}$

$= \frac{2012}{1515}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right\} - \frac{287}{435}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{8}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\} - \frac{200}{2929}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5^2}\right\} - \frac{1920}{2929\cdot 5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot 5}{s^2+5^2}\right\}$

Quedando: $x = \frac{2012}{1515}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right) - \frac{287}{435}(e^{-2t}) - \frac{8}{5}(cos\ t) - \frac{200}{2929}(cos\ 5t) - \frac{384}{2929}(sen\ 5t)$

Ejemplo 10: cuando f(t)=4 $e^t t$

$x^{IV} + 2x'' + x = 4\ e^t t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x^{IV} + 2x'' + x\} = \mathcal{L}\{4\ e^t t\}$

$\mathcal{L}\{x^{IV}\} + 2\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{x\} = 4\mathcal{L}\{e^t t\}$

$s^4\bar{x} - s^3x - s^2x' - sx'' - x''' + 2(s^2\bar{x} - sx - x') + \bar{x} = 4\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^4\bar{x} - s^3(0) - s^2(0) - s(0) - 0 + 2s^2\bar{x} - 2s(0) - 2(0) + \bar{x} = \frac{4}{(s-1)^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^4+2s^2+1)=\frac{4}{(s-1)^2}$

$\bar{x}=\frac{4}{(s-1)^2(s^4+2s^2+1)}=\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+1}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1!}{(s-1)^{1+1}}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(1)s}{(s^2+1^2)^2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$

Quedando: $x=e^t t-2(e^t)+t\ sen\ t+2(\cos t)-sen\ t$

Ejemplo 11: cuando f(t)=6 $e^{2t}t$

$x''-4x'+4x=6\,e^{2t}t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0)=1,\quad x'(0)=2$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x''-4x'+4x\}=\mathcal{L}\{6\,e^{2t}t\}$

$\mathcal{L}\{x''\}-4\mathcal{L}\{x'\}+4\mathcal{L}\{x\}=6\mathcal{L}\{e^{2t}t\}$

$s^2\bar{x}-sx-x'-4(s\bar{x}-x)+4\bar{x}=6\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x}-s(1)-2-4s\bar{x}+4(1)+4\bar{x}=\frac{6}{(s-2)^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2-4s+4)=\frac{6}{(s-2)^2}+s-2$

$\bar{x}=\frac{6}{(s-2)^2(s^2-4s+4)}+\frac{s-2}{(s^2-4s+4)}=\frac{6}{(s-2)^2(s-2)^2}+\frac{s-2}{(s-2)^2}=\frac{6}{(s-2)^4}+\frac{1}{s-2}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^4}+\frac{1}{s-2}\right\}=6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\}=\frac{6}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s-2)^{3+1}}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$

Quedando: $x=6(e^{2t}t^3)+e^{2t}$

Ejemplo 12: cuando f(t)=$e^{3t}t^2$

$x'' - 6x' + 9x = e^{3t}t^2$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 2, \quad x'(0) = 6$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x'' - 6x' + 9x\} = \mathcal{L}\{e^{3t}t^2\}$

$\mathcal{L}\{x''\} - 6\mathcal{L}\{x'\} + 9\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{e^{3t}t^2\}$

$s^2\bar{x} - sx - x' - 6(s\bar{x} - x) + 9\bar{x} = \frac{2}{(s-3)^3}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(2) - 6 - 6s\bar{x} + 6(2) + 9\bar{x} = \frac{2}{(s-3)^3}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 - 6s + 9) = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6$

$\bar{x} = \frac{2}{(s-3)^3(s^2-6s+9)} + \frac{2(s-3)}{(s^2-6s+9)} = \frac{2}{(s-3)^3(s-3)^2} + \frac{2(s-3)}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^{4+1}}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^{4+1}}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$

Quedando: $x = \frac{1}{12}(e^{3t}t^4) + 2(e^{3t})$

Ejemplo 13: cuando f(t)=$e^{-2t}sen\ 2t$

$x'' + 5x' + 6x = e^{-2t}sen\ 2t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0, \quad x'(0) = -3$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x'' + 5x' + 6x\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}sen\ 2t\}$

$\mathcal{L}\{x''\} + 5\mathcal{L}\{x'\} + 6\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}sen\ 2t\}$

$s^2\bar{x} - sx - x' + 5(s\bar{x} - x) + 6\bar{x} = \frac{2}{2^2+(s+2)^2}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s^2\bar{x} - s(0) - (-3) + 5s\bar{x} - 5(0) + 6\bar{x} = \frac{2}{2^2+(s+2)^2}$

Simplificando:

$\bar{x}(s^2 + 5s + 6) = \frac{2}{2^2+(s+2)^2} - 3$

$\bar{x} = \frac{2}{[2^2+(s+2)^2][s^2+5s+6]} - \frac{3}{s^2+5s+6} = \frac{2}{[2^2+(s+2)^2][s+2][s+3]} - \frac{3}{(s+2)(s+3)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{[2^2+(s+2)^2][s+2][s+3]}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)(s+3)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{17}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{2^2+(s+2)^2}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2^2+(s+2)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{17}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{2^2+(s+2)^2}\right\} - \left(\frac{\frac{3}{5}+2}{2}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2}{2^2+(s+2)^2}\right\}$$

Quedando: $x = \frac{7}{2}(\,e^{-2t}) - \frac{17}{5}(e^{-3t}) - \frac{1}{10}(e^{-2t}cos\ 2t) - \frac{13}{10}(e^{-2t}sen\ 2t)$

Ejemplo 14: cuando f(t)=$3e^t cos\ 2t$

$2x'' - 3x' + x = 3e^t cos\ 2t$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 2, \quad x'(0) = 3$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\{2x'' - 3x' + x\} = 3\mathcal{L}\{e^t cos\ 2t\}$$

$$2\mathcal{L}\{x''\} - 3\mathcal{L}\{x'\} + \mathcal{L}\{x\} = 3\mathcal{L}\{e^t cos\ 2t\}$$

$$2(s^2\bar{x} - sx - x') - 3(s\bar{x} - x) + \bar{x} = 3\left(\frac{s-1}{2^2+(s-1)^2}\right)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$2s^2\bar{x} - 2s(2) - 2(3) - 3s\bar{x} + 3(2) + \bar{x} = 3\left(\frac{s-1}{2^2+(s-1)^2}\right)$$

Simplificando:

$$\bar{x}(2s^2 - 3s + 1) = 3\left(\frac{s-1}{2^2+(s-1)^2}\right) + 4s$$

$$\bar{x} = \frac{3s-3}{[2^2+(s-1)^2][s^2-3s+1]} + \frac{4s}{s^2-3s+1} = \frac{3s-3}{[2^2+(s-1)^2][2s-1][s-1]} + \frac{4s}{(2s-1)(s-1)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{[2^2+(s-1)^2][2s-1][s-1]}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{(2s-1)(s-1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{-56}{17}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-1}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{6}{17}F(s)^{-1}\left\{\frac{s}{2^2+(s-1)^2}\right\} + \frac{9}{17}F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{2^2+(s-1)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \frac{-56}{17\cdot 2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{2}{2}s-\frac{1}{2}}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{6}{17}F(s)^{-1}\left\{\frac{s-1}{2^2+(s-1)^2}\right\} + \left(\frac{\frac{9}{17}+1}{2}\right)F(s)^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2}{2^2+(s-1)^2}\right\}$$

Quedando: $x = -\frac{28}{17}(\,e^{\frac{1}{2}t}) + 4(e^t) - \frac{6}{17}(e^t cos\ 2t) + \frac{13}{17}(e^t sen\ 2t)$

2.1 Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y de coeficientes constantes, también se utiliza la transformada de Laplace. El procedimiento es semejante al que se ha descrito para la resolución de ecuaciones diferenciales.

1.- Se calcula la transformada de Laplace de las ecuaciones del sistema.

2.- Se sustituyen las condiciones iniciales en las nuevas funciones y se despejan las incógnitas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del lado izquierdo, obteniendo así dos nuevas ecuaciones en términos de s con incógnitas $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

3.- Finalmente se resuelve el nuevo sistema de ecuaciones, aplicando la transformada inversa de Laplace para obtener las soluciones de “x” y de “y”

A continuación, son descritos algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 15: Resolver el sistema de ecuaciones formado por:

$x' + 0.5y = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$y' - 0.5x = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 5, \quad y(0) = 2$

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$\mathcal{L}\{x' + 0.5y\} = \mathcal{L}\{0\}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{y' - 0.5x\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{x} - x + 0.5\,\bar{y} = 0$ $\qquad$ $s\bar{y} - y - 0.5\,\bar{x} = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{x} - (5) + 0.5\,\bar{y} = 0$ $\qquad$ $s\bar{y} - (2) - 0.5\,\bar{x} = 0$

$s\bar{x} + 0.5\,\bar{y} = 5 \ldots\ldots..(3)$ $\qquad$ $s\bar{y} - 0.5\,\bar{x} = 2 \ldots\ldots..(4)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{x}$ de la ecuación 3:

$$\bar{x} = \frac{5}{s} + \frac{0.5\,\bar{y}}{s}$$

- Sustituyendo $\bar{x}$ en la ecuación 4:

$$s\bar{y} - 0.5\left(\frac{5}{s} + \frac{0.5\,\bar{y}}{s}\right) = 2$$

- Simplificando y despejando $\bar{y}$:

$$\bar{y}\left(s - \frac{1}{4s}\right) = 2 + \frac{5}{2s}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{s-\frac{1}{4s}} + \frac{5}{2s\left(s-\frac{1}{4s}\right)} = \frac{8\,s}{4s^2-1} + \frac{5}{2s^2-\frac{1}{2}} = \frac{8\,s}{(2s-1)(2s+1)} + \frac{5}{2s^2-\frac{1}{2}}$$

- Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\,s}{(2s-1)(2s+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{2s^2-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s+1}\right\} + 5F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = \frac{2}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{2}{2}s-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{2}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{2}{2}s+\frac{1}{2}}\right\} + 5F(s)^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}s^2-\frac{1}{2\cdot 2}}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right\} + 5F(s)^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}$$

Quedando: $y = e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} + 5\left(senh\ \frac{1}{2}t\right)$

- Despejando x de la ecuación 2 y resolviendo:

$$x = \frac{1}{0.5}(y')$$

$$y' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{2}\left(cosh\ \frac{1}{2}t\right)$$

$$x = \frac{1}{0.5}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{2}\left(cosh\ \frac{1}{2}t\right)\right]$$

Quedando: $x = e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t} + 5\left(cosh\ \frac{1}{2}t\right)$

Ejemplo 16: Resolver el sistema de ecuaciones formado por:

$x' + 3y = 2t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots.(1)$

$y' + 5y - 2x = -3t - 4 \ldots\ldots\ldots.(2)$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 2, \quad y(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$\mathcal{L}\{x' + 3y\} = \mathcal{L}\{2t\}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{y' + 5y - 2x\} = \mathcal{L}\{-3t - 4\}$

$s\bar{x} - x + 3\bar{y} = \frac{2}{s^2}$ $\qquad$ $s\bar{y} - y + 5\bar{y} - 2\bar{x} = -\frac{3}{s^2} - \frac{4}{s}$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{x} - (2) + 3\bar{y} = \frac{2}{s^2}$ $\qquad$ $s\bar{y} - (0) + 5\bar{y} - 2\bar{x} = -\frac{3}{s^2} - \frac{4}{s}$

$s\bar{x} + 3\bar{y} = \frac{2}{s^2} + 2 \ldots\ldots..(3)$ $\qquad$ $s\bar{y} + 5\bar{y} - 2\bar{x} = -\frac{3}{s^2} - \frac{4}{s}\ldots\ldots..(4)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{x}$ de la ecuación 3:

$$\bar{x} = \frac{2}{s^3} - \frac{3\,\bar{y}}{s} + \frac{2}{s}$$

- Sustituyendo $\bar{x}$ en la ecuación 4:

$$s\bar{y} + 5\bar{y} - 2\left(\frac{2}{s^3} - \frac{3\,\bar{y}}{s} + \frac{2}{s}\right) = -\frac{3}{s^2} - \frac{4}{s}$$

- Simplificando y despejando $\bar{y}$:

$$\bar{y}\left(s + 5 + \frac{6}{s}\right) = \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2}$$

$$\bar{y} = \frac{4}{s^3\left(s+5+\frac{6}{s}\right)} - \frac{3}{s^2\left(s+5+\frac{6}{s}\right)} = \frac{4}{s^4+5s^3+6s^2} - \frac{3}{s^3+5s^2+6s} = \frac{4}{s^2(s+2)(s+3)} - \frac{3}{s(s+2)(s+3)}$$

- Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(s+2)(s+3)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+2)(s+3)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{5}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{18}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

Quedando: $y = -\frac{1}{2}(e^{-2t}) + \frac{5}{9}(e^{-3t}) + \frac{2}{3}t - \frac{1}{18}$

- Despejando x de la ecuación 2 y resolviendo:

$$x = \frac{1}{2}(y' + 5y + 3t + 4)$$

$$y' = e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3} + 5\left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{18}\right) + 3t + 4\right]$$

Quedando: $x = -\frac{3}{4}(e^{-2t}) + \frac{5}{9}(e^{-3t}) + \frac{19}{6}t + \frac{79}{36}$

CAPÍTULO 3
Resolución de problemas de aplicación en Ingeniería Química utilizando la transformada de Laplace.

En Ingeniería química muy a menudo se encuentran problemas de aplicación que contienen ecuaciones diferenciales lineales, en los capítulos anteriores se estudió, cómo resolver una ecuación diferencial de este tipo utilizando la transformada de Laplace, en los temas siguientes se estudiarán los distintos problemas de aplicación de algunas ramas de la Ingeniería química y la utilización de la transformada de Laplace para resolver este tipo de problemas.

3.1 Aplicación a mezclas químicas

Una mezcla está formada por dos o más componentes unidos, en la cual cada uno de los componentes mantiene sus propiedades químicas, es decir no hay presencia de reacción química, una mezcla que posee una composición uniforme es conocida como solución, la cual está compuesta por un soluto y un solvente (estos pueden ser líquidos, sólidos o gaseosos); en los procesos químicos es común encontrar la operación unitaria de mezclado y es de gran importancia controlar en la operación las cantidades y concentraciones de los componentes que serán mezclados, es decir, saber con exactitud la tasa de cambio de un determinado soluto que se encuentra en cierto solvente.

En los siguientes ejemplos ilustrativos se muestran las resoluciones para encontrar la tasa de cambio de una mezcla, utilizando la transformada de Laplace para poder resolver la ecuación diferencial lineal formada.

Ejemplo1:

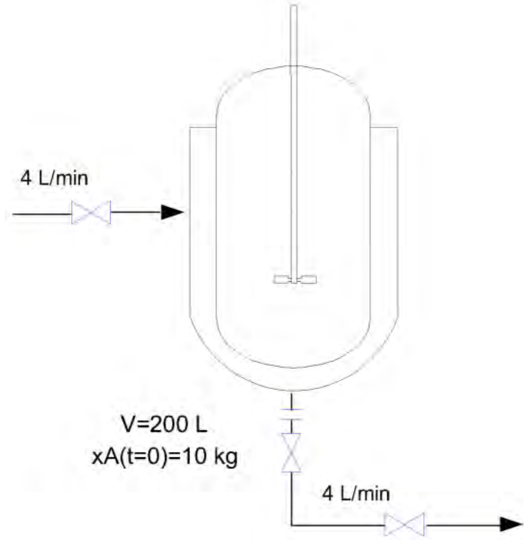


Figura 3.1.1

Un tanque (Figura 3.1.1) está lleno con 200 L de agua salada en la cual están disueltas 10 kg de sal. Una salmuera que contiene 1 kg de sal por L, se bombea dentro del tanque con una rapidez de 4 L/min y la solución bien mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. Determinar:

(a) La cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo.
(b) La cantidad de sal presente en el tanque después de 6 min.
(c) El tiempo en el que la cantidad de sal en el tanque es igual a 50 kg.
(d) Graficar la cantidad de sal en el tanque respecto al tiempo, resaltando el punto en el que la cantidad de sal dentro del tanque llega a su máximo.

Formulación matemática. Sea x el número de gramos de sal en el tanque después de t minutos. Luego dx/dt es la tasa de cambio de esta cantidad de sal y está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = tasa\ de\ cantidad\ ganada - tasa\ de\ cantidad\ perdida$$

Al tanque entra 1 kg/L de sal a razón de 4 L/min, por lo tanto, la cantidad de sal que entra por minuto es igual a:

$$\frac{4\ L}{min}\left(\frac{1\ kg}{L}\right) = 4\ {}^{kg}/_{min}$$

El tanque contiene 200 L de agua salada y debido a que hay x kilogramos de sal en cualquier tiempo t, la concentración de sal al tiempo t es x gramos por 200 L y la solución mezclada sale a la misma rapidez con la que entra, por lo tanto, la tasa de cantidad de sal perdida por minuto está dada

Figura 3.1.1

por:

$$\frac{x\ kg}{200\ L}\left(\frac{4\ L}{min}\right) = \frac{4\ x}{200}\ {}^{kg}/_{min} = \frac{x}{50}\ {}^{kg}/_{min}$$

Y la tasa de cambio queda:

$$\frac{dx}{dt} = 4\ {}^{kg}/_{min} - \frac{x}{50}\ {}^{kg}/_{min}$$

Puesto que inicialmente hay 10 kg de sal, se tiene $x = 10$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$$x' + \frac{1}{50}\ x\ = 4$$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 10$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\left\{x' + \frac{1}{50}\ x\right\} = \mathcal{L}\{4\}$$

$$\mathcal{L}\{x'\} + \frac{1}{50}\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{4\}$$

$$(s\bar{x} - x) + \frac{1}{50}\bar{x} = \frac{4}{s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$s\bar{x} - 10 + \frac{1}{50}\bar{x} = \frac{4}{s}$$

Simplificando:

$$\bar{x}\left(s + \frac{1}{50}\right) = \frac{4}{s} + 10$$

$$\bar{x} = \frac{4}{s\left(s+\frac{1}{50}\right)} + \frac{10}{s+\frac{1}{50}} = \frac{200}{s} - \frac{190}{s+\frac{1}{50}}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{200}{s} - \frac{190}{s+\frac{1}{50}}\right\} = 200\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 190\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{50}}\right\}$$

a) Quedando: $x = 200 - 190\left(e^{-\frac{1}{50}t}\right)$

La cual indica la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

b) La cantidad de sal en el tanque cuando $t = 6\ min$:

$$x = 200 - 190\left[e^{-\frac{1}{50}(6)}\right] = 31.4851\ kg\ de\ sal$$

c) El tiempo cuando $x = 50\ kg$:

$$50 = 200 - 190\left(e^{-\frac{1}{50}t}\right)$$

$$\frac{50 - 200}{-190} = e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$\text{in}\frac{15}{19} = -\frac{1}{50}\ t$$

$$t = \text{in}\frac{15}{19}(-50) = 11.8194\ min$$

d) La gráfica 3.1.1, indica que la cantidad máxima de sal dentro del tanque es de 198.5 kg al tiempo de 4h.

Gráfica 3.1.1 Kg de sal en el tanque con respecto al tiempo.

Ejemplo 2:

Un tanque (Figura 3.1.2) contiene 500 L de agua pura. Una solución de 6 kg de azúcar por litro, entra a razón de 3 L/min y sale a 3.5 L/min. Determinar:

(a) La concentración de azúcar en el tanque en cualquier tiempo.
(b) La cantidad de agua en el tanque al minuto 360.
(c) La concentración de azúcar cuando el tanque tenga 40 L de la mezcla de agua con azúcar.
(d) Graficar la concentración de azúcar en el tanque con respecto al tiempo y determinar la máxima cantidad de azúcar presente.

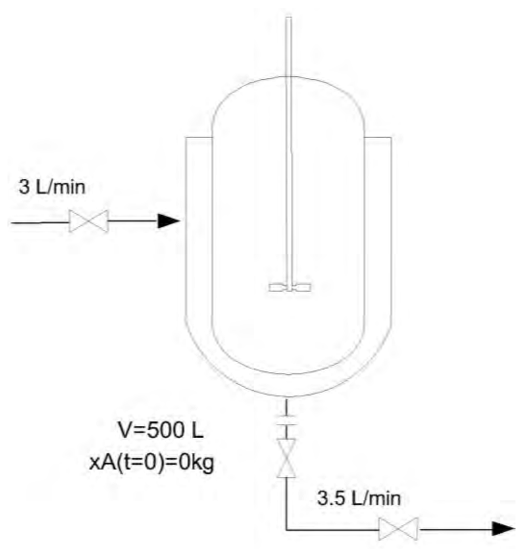


Figura 3.1.2

Formulación matemática. Sea x el número de gramos de azúcar en el tanque después de t minutos. Luego dx/dt es la tasa de cambio de esta cantidad de azúcar en el tiempo y está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = tasa\ de\ cantidad\ ganada - tasa\ de\ cantidad\ perdida$$

Al tanque entran 6 kg/L de azúcar a razón de 3 L/min, por lo tanto, se tiene que la cantidad de azúcar que entra es:

$$\frac{3\ L}{min}\left(\frac{6\ kg}{L}\right) = 18\ {}^{kg}/_{min}$$

El tanque contiene 500 L de agua pura y debido a que hay x kilogramos de azúcar en cualquier tiempo t, la concentración de azúcar al tiempo t es x kilogramos por 500 L y la solución mezclada sale a razón de 3.5 L/min, por lo tanto, la tasa de cantidad de azúcar que sale por minuto está dada por:

$$\frac{x\ kg}{500\ L}\left(\frac{3.5\ L}{min}\right) = \frac{3.5\ x}{500}\ {}^{kg}/_{min} = \frac{7}{1000}x\ \ kg/min$$

Y la tasa de cambio queda:

$$\frac{dx}{dt} = 18\ {}^{kg}/_{min} - \frac{7}{1000}x\ \ kg/min$$

Puesto que inicialmente no hay azúcar en el tanque, por lo tanto $x = 0$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$$x' + \frac{7}{1000}\ x\ = 18$$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\left\{x' + \frac{7}{1000}\ x\ \right\} = \mathcal{L}\{18\ \}$$

$$\mathcal{L}\{x'\} + \frac{7}{1000}\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{18\ \}$$

$$(s\bar{x} - x) + \frac{7}{1000}\bar{x} = \frac{18}{s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$s\bar{x} - 0 + \frac{7}{1000}\bar{x} = \frac{18}{s}$$

Simplificando:

$$\bar{x} = \frac{18}{s\left(s+\frac{7}{1000}\right)} = \frac{18000}{7(s)} - \frac{18000}{7\left(s+\frac{7}{1000}\right)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{18000}{7(s)} - \frac{18000}{7\left(s+\frac{7}{1000}\right)}\right\} = \frac{18000}{7}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{18000}{7}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{7}{1000}}\right\}$$

a) Quedando: $x = \frac{18000}{7} - \frac{18000}{7}\left(e^{-\frac{7}{1000}t}\right)$

La cual indica la cantidad de azúcar en el tanque en cualquier tiempo t.

El Volumen Total del tanque en cualquier instante, se puede deducir de la siguiente forma:

$$VT = V_o + V_e - V_s$$

Donde:

$VT = Volumen\ Total$

$V_o = Volumen\ inicial$

$V_e = Volumen\ entrante$

$V_s = Volumen\ saliente$

$$VT = 500\ L + \left(3\frac{L}{min} * t\right) - \left(3.5\ \frac{L}{min} * t\right)$$

Quedando:

$$VT = 500\ L - \left(0.5\frac{L}{min} * t\right)$$

La cual indica el volumen total del tanque en cualquier tiempo.

b) El volumen total del tanque al minuto 360:

$$VT = 500\ L - \left(0.5\frac{L}{min} * 360\ min\right) = 320\ L$$

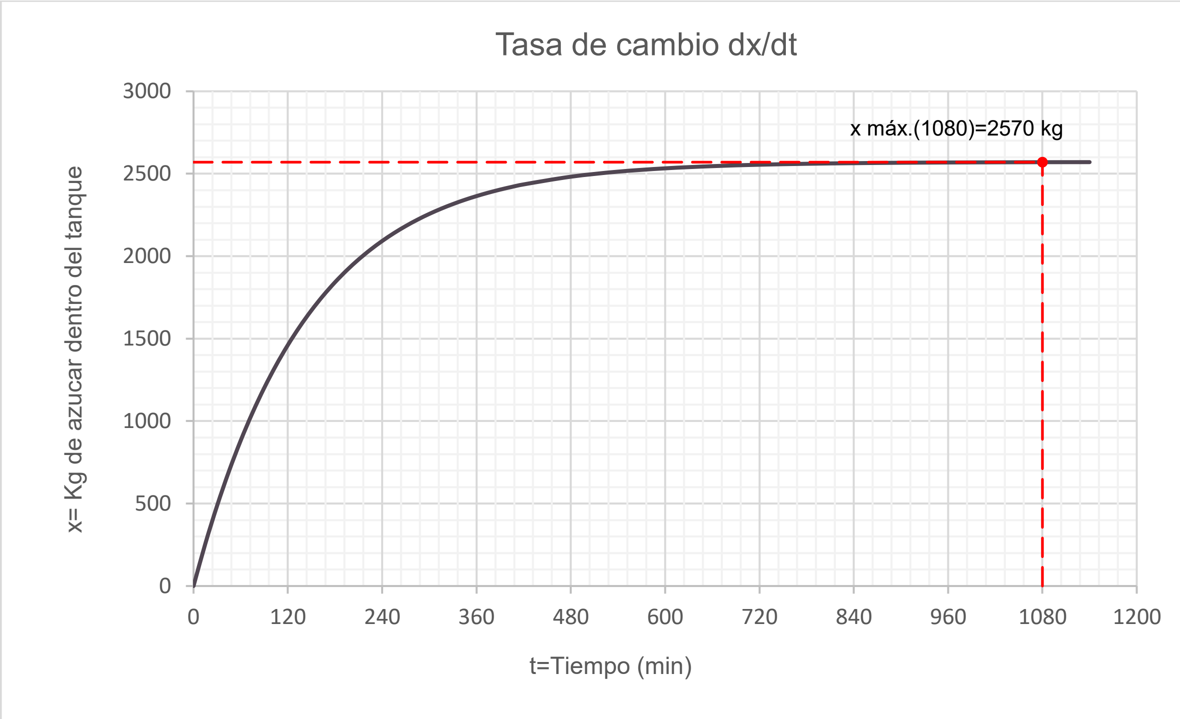
c) El tiempo, cuando el volumen total de tanque es igual a 40 L:

$$t = \frac{500L - VT}{0.5\ \ L/min} = \frac{500\ L - 40\ L}{0.5\ \ L/min} = 920\ min$$

La concentración de azúcar al minuto 920, es decir cuando el volumen del tanque es igual a 40 L:

$$x = \frac{18000}{7} - \frac{18000}{7}\left(e^{-\frac{7}{1000}(920)}\right) = 2567.3235\ kg$$

d) La gráfica 3.1.2, indica que la cantidad máxima de azúcar es de 2,570 kg al tiempo de 18h.



Gráfica 3.1.2 Kg de azúcar en el tanque con respecto al tiempo.

Ejemplo 3:
Se tienen dos tanques de mezclado en serie (Figura 3.1.3). El primer tanque (A) contiene 300 L de agua, en el cual están disueltos 25 kg de sal y el segundo tanque (B) contiene 300 L de agua pura. Se bombea líquido hacia y desde los tanques en las proporciones indicadas en la figura.
Deducir la ecuación diferencial para el tanque A y el tanque B que indique los kilogramos de sal que hay en un instante cualquiera y además graficar los kilogramos de sal de cada tanque con respecto al tiempo, indicando en que tiempo se obtienen las máximas y mínimas concentraciones de sal para cada tanque.

Formulación matemática. Sea x_A y x_B el número de kilogramos de sal en los tanques A y B respectivamente, después de t minutos. Luego $\frac{dx_A}{dt}$ y $\frac{dx_B}{dt}$ son las tasas de cambio para cada tanque de esta cantidad de sal con respecto al tiempo y están dadas por:

$$\frac{dx_A}{dt} = tasa\ de\ cantidad\ ganada\ en\ A - tasa\ de\ cantidad\ perdida\ en\ A$$

$$\frac{dx_B}{dt} = tasa\ de\ cantidad\ ganada\ en\ B - tasa\ de\ cantidad\ perdida\ en\ B$$

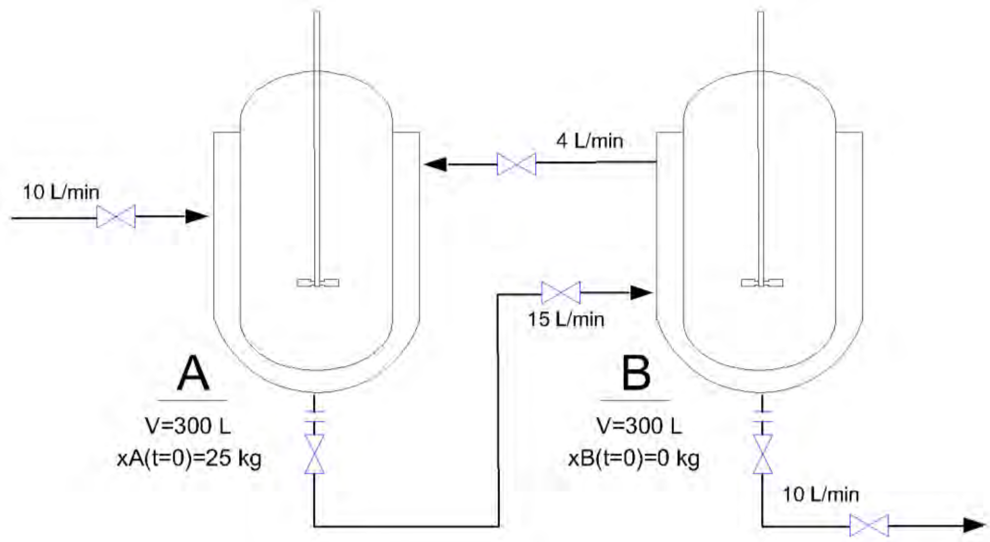


Figura 3.1.3

Al tanque A entra por una línea 10 L/min de agua pura, es decir con 0 kilogramos de sal y por una segunda línea que es proveniente del tanque B entran 4 L/min con x_B kilogramos de sal por 300 L, por lo que la tasa de cantidad de sal que entra por minuto en dicho tanque A es:

$$\frac{10\ L}{min}\left(\frac{0\ kg}{L}\right)+\frac{4\ L}{min}\left(\frac{x_B}{300\ L}\right)=\frac{x_B}{75}\ {}^{kg}/_{min}$$

Asimismo del tanque A salen x_A kilogramos de sal por 300 L, con una velocidad de flujo de 15 L/min, por lo tanto la cantidad de sal que pierde el tanque A es:

$$\frac{15\ L}{min}\left(\frac{x_A}{300\ L}\right)=\frac{x_A}{20}\ {}^{kg}/_{min}$$

La línea de salida del tanque A es la línea de entrada para el tanque B, por lo tanto, la tasa de cantidad perdida en A es igual a la tasa de cantidad ganada en B.

Del tanque B salen x_B kilogramos de sal sobre 300 L por dos líneas, una de ellas a razón de 4 L/min y por la línea final a 10 L/min, por lo tanto, la cantidad de sal que pierde por minuto el tanque B es:

$$\frac{4\ L}{min}\left(\frac{x_B}{300\ L}\right)+\frac{10\ L}{min}\left(\frac{x_B}{300\ L}\right)=\frac{7}{150}x_B\ kg/min$$

Las tasas de cambio para cada tanque resultan de la siguiente manera:

$$\frac{dx_A}{dt}=\frac{x_B}{75}\ {}^{kg}/_{min}-\frac{x_A}{20}\ {}^{kg}/_{min}$$

$$\frac{dx_B}{dt}=\frac{x_A}{20}\ {}^{kg}/_{min}-\frac{7}{150}x_B\ kg/min$$

Puesto que inicialmente hay 25 kg de sal en el tanque A y el tanque B solo es agua pura, tenemos que $x_A=25$ en $t=0$ y $x_B=0$ en $t=0$. Así, las formulaciones matemáticas completas son:

$x'_A + \frac{x_A}{20} - \frac{x_B}{75} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$x'_B + \frac{7}{150} x_B - \frac{x_A}{20} = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

Bajo condiciones iniciales: $x_A(0) = 25, \quad x_B(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$\mathcal{L}\left\{x'_A + \frac{x_A}{20} - \frac{x_B}{75}\right\} = \mathcal{L}\{0\}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\left\{x'_B + \frac{7}{150} x_B - \frac{x_A}{20}\right\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{x}_A - x_A + \frac{1}{20}\,\bar{x}_A - \frac{1}{75}\bar{x}_B = 0$ $\qquad$ $s\bar{x}_B - x_B + \frac{7}{150}\,\bar{x}_B - \frac{1}{20}\bar{x}_A = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{x}_A - (25) + \frac{1}{20}\,\bar{x}_A - \frac{1}{75}\bar{x}_B = 0$ $\qquad$ $s\bar{x}_B - (0) + \frac{7}{150}\,\bar{x}_B - \frac{1}{20}\bar{x}_A = 0$

$s\bar{x}_A + \frac{1}{20}\,\bar{x}_A - \frac{1}{75}\bar{x}_B = 25 \;\ldots\ldots..(3)$ $\qquad$ $s\bar{x}_B + \frac{7}{150}\,\bar{x}_B - \frac{1}{20}\bar{x}_A = 0 \ldots....(4)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{x}_A$ de la ecuación 3:

$$\bar{x}_A = \frac{25}{s+\frac{1}{20}} + \frac{\bar{x}_B}{75\left(s+\frac{1}{20}\right)}$$

- Sustituyendo $\bar{x}_A$ en la ecuación 4:

$$s\bar{x}_B + \frac{7}{150}\,\bar{x}_B - \frac{1}{20}\left[\frac{25}{s+\frac{1}{20}} + \frac{\bar{x}_B}{75\left(s+\frac{1}{20}\right)}\right] = 0$$

- Simplificando y despejando $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B\left[s + \frac{7}{150} - \frac{1}{1500\left(s+\frac{1}{20}\right)}\right] = \frac{5}{4\left(s+\frac{1}{20}\right)}$$

$$\bar{x}_B = \frac{5}{\left[4\left(s+\frac{1}{20}\right)\right]\left[\frac{(1500\,s+75)\left(s+\frac{7}{150}\right)-1}{1500\left(s+\frac{1}{20}\right)}\right]} = \frac{1875}{1500\,(s^2+29/300\,s+\frac{1}{600})} = \frac{5}{4(s+0.022459)(s+0.074206)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}_B\} = \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+0.022459)(s+0.074206)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}_B\} = 24.155988\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.022459}\right\} - 24.155988\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.074206}\right\}$$

Quedando: $x_B = 24.155988(e^{-0.022459\,t}) - 24.155988(e^{-0.074206\,t})$

La cual indica la cantidad de sal dentro del tanque B en cualquier tiempo t.

- Despejando x_A de la ecuación 2 y resolviendo:

$$x_A = \frac{14}{15}x_B + 20x'_B$$

$$x'_B = -0.542519(e^{-0.022459\,t}) + 1.792519(e^{-0.074206\,t})$$

$$x_A = \frac{14}{15}[24.155988(e^{-0.022459\,t}) - 24.155988(e^{-0.074206\,t})] \\ +20[-0.542519(e^{-0.022459\,t}) + 1.792519(e^{-0.074206\,t})]$$

Quedando: $x_A = 11.695206(e^{-0.022459\,t}) + 13.304791(e^{-0.074206\,t})$
La cual indica la cantidad de sal dentro del tanque A en cualquier tiempo t.

Como se observa en la gráfica 3.1.3, para el tanque A la cantidad máxima de sal es de 25 kg al inicio de la reacción y la cantidad mínima es de 0 kg después de 5 horas. En el tanque B, se llega a la cantidad máxima de sal (9.7 Kg) a los 30 minutos y la cantidad mínima es de 0 kg después de las 5 horas.

Gráfica 3.1.3 Kg de sal en el tanque A y B, con respecto al tiempo.

Ejemplo 4:
Un colorante sólido disuelto en un líquido no volátil (Figura 3.1.4), entra al tanque A con una velocidad de 15 L/min y con una concentración de 0.5 kg/L de solución. La solución bien homogeneizada, sale del tanque a una velocidad de 12 L/min y entra a un segundo tanque B del cual sale, posteriormente a una velocidad de 10 L/min. Inicialmente el primer tanque contiene 4 kg de colorante disueltos en 200 L de solvente y el segundo tanque 3 kg de colorante en 100 L del solvente.
Encontrar dos ecuaciones que determinen los kilogramos de colorante en cada tanque, en cualquier tiempo, y graficar esta tasa de cambio, indicando en que tiempo se obtienen las máximas y mínimas concentraciones de colorante para cada tanque.

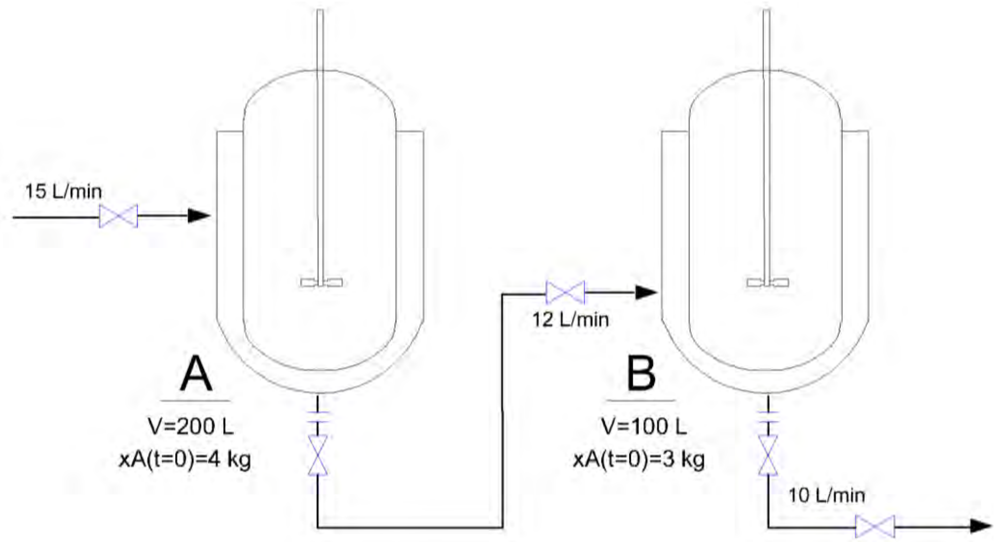


Figura 3.1.4

Formulación matemática. Sea x_A y x_B el número de kilogramos de colorante en los tanques A y B respectivamente, después de t minutos. Luego $\frac{dx_A}{dt}$ y $\frac{dx_B}{dt}$ son las tasas de cambio para cada tanque de esta cantidad de colorante con respecto al tiempo y están dadas por:

$$\frac{dx_A}{dt} = tasa\ de\ cantidad\ ganada\ en\ A - tasa\ de\ cantidad\ perdida\ en\ A$$

$$\frac{dx_B}{dt} = tasa\ de\ cantidad\ ganada\ en\ B - tasa\ de\ cantidad\ perdida\ en\ B$$

Al tanque entran 15 L/min de solución con una concentración de 0.5 kg/L, por lo tanto la tasa de cantidad ganada en el tanque A:

$$\frac{15\ L}{min}\left(\frac{0.5\ kg}{L}\right) = \frac{15}{2}\ {}^{kg}/_{min}$$

Asimismo del tanque A salen x_A kilogramos de sal por 200 L a razón de 12 L/min, por lo tanto la cantidad de colorante que pierde por minuto el tanque A es:

$$\frac{12\ L}{min}\left(\frac{x_A}{200\ L}\right) = \frac{3}{50}\ x_A\ \ kg/min$$

La línea de salida del tanque A es la línea de entrada para el tanque B, por lo tanto, la tasa de cantidad perdida en A es igual a la tasa de cantidad ganada en B.

Del tanque B, la línea de salida es de 10 L/min con x_B kilogramos de colorante por 100 L, por lo que la cantidad de colorante que pierde el tanque B por minuto es:

$$\frac{10\ L}{min}\left(\frac{x_B}{100\ L}\right) = \frac{1}{10}x_B\ \ kg/min$$

Por lo tanto, las tasas de cambio para cada tanque resultan de la siguiente manera:

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{15}{2}\ {}^{kg}/_{min} - \frac{3}{50}\ x_A\ \ kg/min$$

$$\frac{dx_B}{dt} = \frac{3}{50}\ x_A\ \ kg/min - \frac{1}{10}x_B\ \ kg/min$$

Puesto que inicialmente hay 4 y 3 kilogramos de colorante en los tanques A y B respectivamente, se tiene que $x_A = 4$ en $t = 0$ y $x_B = 3$ en $t = 0$. Así, las formulaciones matemáticas completas son:

$$x'_A + \frac{3}{50}\ x_A = -\frac{15}{2} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$x'_B + \frac{1}{10}x_B - \frac{3}{50}\ x_A = 0 \dots\dots\dots (2)$$

Bajo condiciones iniciales: $x_A(0) = 4, \quad x_B(0) = 3$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$$\mathcal{L}\left\{x'_A + \frac{3}{50}\ x_A\right\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{15}{2}\right\} \qquad \mathcal{L}\left\{x'_B + \frac{1}{10}x_B - \frac{3}{50}\ x_A\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$s\bar{x}_A - x_A + \frac{3}{50}\ \bar{x}_A = -\frac{15}{2\ s} \qquad s\bar{x}_B - x_B + \frac{1}{10}\ \bar{x}_B - \frac{3}{50}\bar{x}_A = 0$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$$s\bar{x}_A - (4) + \frac{3}{50}\ \bar{x}_A = -\frac{15}{2s} \qquad s\bar{x}_B - (3) + \frac{1}{10}\ \bar{x}_B - \frac{3}{50}\bar{x}_A = 0$$

$$s\bar{x}_A + \frac{3}{50}\ \bar{x}_A = -\frac{15}{2s} + 4 \dots\dots..(3) \qquad s\bar{x}_B + \frac{1}{10}\ \bar{x}_B - \frac{3}{50}\bar{x}_A = 3 \dots....(4)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{x}_A$ de la ecuación 3:

$$\bar{x}_A = \frac{15}{2s\left(s+\frac{3}{50}\right)} + \frac{4}{s+\frac{3}{50}} = \frac{8s+15}{2s\left(s+\frac{3}{50}\right)}$$

- Sustituyendo $\bar{x}_A$ en la ecuación 4:

$$s\bar{x}_B + \frac{1}{10}\,\bar{x}_B - \frac{3}{50}\left[\frac{8s+15}{2s\left(s+\frac{3}{50}\right)}\right] = 3$$

- Simplificando y despejando $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B\left[s+\frac{1}{10}\right] = 3 + \frac{3}{100}\left[\frac{8s+15}{s\left(s+\frac{3}{50}\right)}\right]$$

$$\bar{x}_B = \frac{3}{s+\frac{1}{10}} + \frac{3}{100}\left[\frac{\frac{8s+15}{s\left(s+\frac{3}{50}\right)}}{s+\frac{1}{10}}\right] = \frac{3}{s+\frac{1}{10}} + \frac{3}{100}\left[\frac{8s+15}{s^3+\frac{4}{25}s^2+\frac{3}{500}s}\right] = \frac{3}{s+\frac{1}{10}} + \frac{3}{100}\left[\frac{8s+15}{\left(s+\frac{3}{50}\right)\left(s+\frac{1}{10}\right)(s+0)}\right]$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}_B\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{10}}\right\} + \frac{3}{100}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s+15}{\left(s+\frac{3}{50}\right)\left(s+\frac{1}{10}\right)(s+0)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}_B\} = \frac{219}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{10}}\right\} - \frac{363}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{3}{50}}\right\} + 75F(s)^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

Quedando: $x_B = \frac{219}{2}\left(e^{-\frac{1}{10}t}\right) - \frac{363}{2}\left(e^{-\frac{3}{50}t}\right) + 75$

La cual indica la cantidad de colorante en el tanque B en cualquier tiempo t.

- Despejando x_A de la ecuación 2 y resolviendo:

$$x_A = \frac{5}{3}x_B + \frac{50}{3}x'_B$$

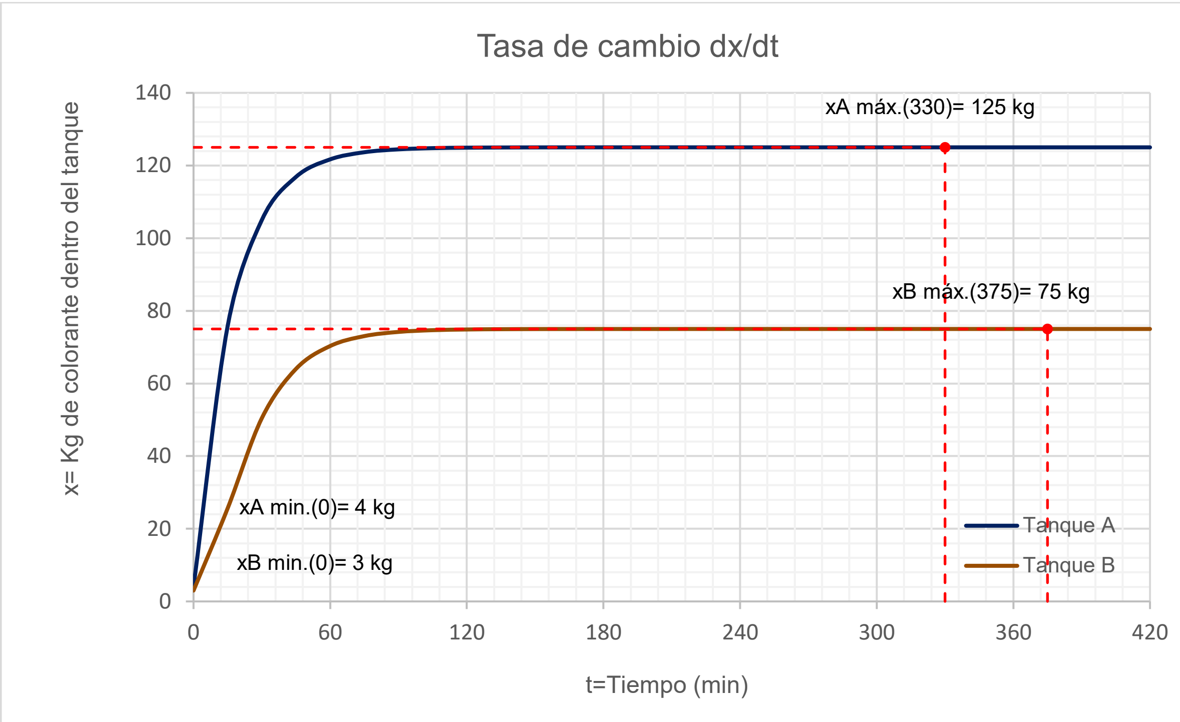
$$x'_B = -\frac{219}{20}\left(e^{-\frac{1}{10}t}\right) + \frac{1089}{100}\left(e^{-\frac{3}{50}t}\right)$$

$$x_A = \frac{5}{3}\left[\frac{219}{2}\left(e^{-\frac{1}{10}t}\right) - \frac{363}{2}\left(e^{-\frac{3}{50}t}\right) + 75\right] + \frac{50}{3}\left[-\frac{219}{20}\left(e^{-\frac{1}{10}t}\right) + \frac{1089}{100}\left(e^{-\frac{3}{50}t}\right)\right]$$

Quedando: $x_A = -121\left(e^{-\frac{3}{50}t}\right) + 125$

La cual indica la cantidad de colorante en el tanque A en cualquier tiempo t.

Como se observa en la gráfica 3.1.4, en el tanque A, la cantidad máxima de colorante es de 125 kg al tiempo de 5.5 h y la cantidad mínima es de 4 kg al inicio. En el tanque B, la cantidad máxima de sal es de 75 kg al tiempo de 6.25 h y la cantidad mínima es de 3 kg al inicio.



Gráfica 3.1.4 Kg de colorante dentro del tanque A y B, con respecto al tiempo.

3.2 Aplicación en la Ingeniería de las reacciones químicas.

Una reacción química describe como las moléculas de varias sustancias conocidas como reactivos se unen para formar nuevas sustancias llamadas productos. Por ejemplo, la reacción: $4\ Al + 3\ O_2 \rightarrow 2\ Al_2O_3$, indica que cuatro moléculas de aluminio se combinan con tres moléculas de oxígeno para producir dos moléculas de óxido de aluminio.

Existen muchas maneras de clasificar las reacciones químicas, una de las más sencillas es según su estructura:

Nombre	Descripción	Representación
De síntesis o de combinación	Dos o más sustancias (reactivos) reaccionan para formar un único compuesto (productos).	A + B → C
De descomposición	Una sustancia compuesta se descompone en los elementos que lo conforman.	A → B + C
De sustitución	Una sustancia sustituye el lugar de alguno, de los elementos de un compuesto, de tal manera que el elemento sustituido queda libre.	AB + C → AC + B
De doble sustitución	Se produce un intercambio entre los elementos de las sustancias que componen la reacción química.	AB + CD → AC + BD

Tabla 3.2.1 Clasificación de las reacciones químicas según su estructura molecular.

Otra forma de clasificarlas y que probablemente en la Ingeniería de las reacciones químicas es el método más útil, es según el número y tipo de fases implicadas, de donde resaltan dos grupos: sistemas homogéneos y sistemas heterogéneos. Una reacción es homogénea si se lleva a cabo en una fase, heterogénea si se realiza en dos o más fases.

En una reacción química, la tasa a la cual se forma un producto A, se llama velocidad de reacción (v_A) y está definida como el número de moles de un reactivo A (x_A) por unidad de volumen que han reaccionado después de un tiempo t:

$$v_A = \frac{dx_A}{dt}$$

Como se sabe algunas reacciones ocurren muy rápidamente, otras muy lentamente y esto se debe a que existen variables que afectan directamente a la velocidad de reacción, en el caso de los sistemas homogéneos, la temperatura y la presión son variables muy evidentes. Esta proporcionalidad entre la velocidad de reacción y estas variables es conocida como constante de velocidad (k). Al igual la concentración de la sustancia reaccionante (C_A) es una variable fundamental que afecta a la velocidad de reacción, por lo tanto, la tasa dx/dt de una reacción está dada por:

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = f\begin{bmatrix} \begin{matrix} términos \\ dependientes \\ de\ la\ temperatura \end{matrix} & \cdot & \begin{matrix} términos \\ dependientes \\ de\ la\ concentración \end{matrix} \end{bmatrix} = k\ [{C_A}^a]$$

Donde "a" es el orden de la reacción que describe la forma en el que la velocidad de reacción depende de la concentración de la sustancia reaccionante. Este número (entero o fraccionado) se obtiene experimentalmente y no está necesariamente relacionado a la estequiometria de la reacción a menos que la reacción sea elemental, recordando que una reacción elemental es aquella en la que consta de una sola etapa a diferencia de las reacciones complejas que constan de varias etapas, es decir varias reacciones elementales para llegar al compuesto formado.

Con base a los valores más comunes de orden de reacción, las reacciones químicas se pueden clasificar de la manera siguiente:

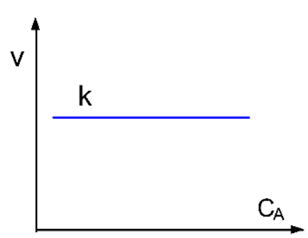
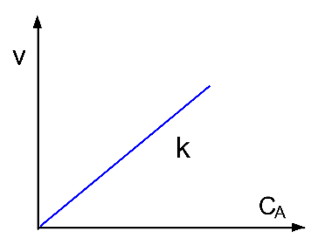
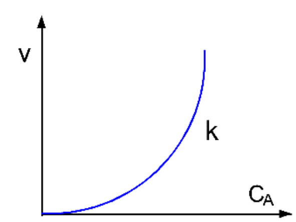
Nombre	Reacciones de orden cero n=0	Reacciones de primer orden n=1	Reacciones de segundo orden n=2
Representación	 $v = k\left[{C_A}^0\right] = k$	 $v = k\left[{C_A}^1\right]$	 $v = k\left[{C_A}^2\right]$
Descripción	La velocidad de reacción es constante y entonces, independiente de la concentración del reactante.	La velocidad de reacción es directamente proporcional a la concentración del reactante.	La velocidad de reacción es proporcional al cuadrado de la concentración del reactante.

Tabla 3.2.3 Clasificación de las reacciones químicas según su orden de reacción.

3.2.1 Reversibilidad de las reacciones químicas.

Otra característica fundamental de las reacciones químicas consiste en la reversibilidad de la reacción. En una reacción reversible (Figura 3.2.1) los reactivos no se transforman totalmente en productos, ya que estos vuelven a formarse en reactivos, dando lugar así a un proceso de doble sentido; al contrario de lo que sucede en una reacción irreversible (Figura 3.2.2), en la cual la reacción química se prolonga hasta agotar las sustancias reaccionantes.

$A + B \leftrightarrow C + D$

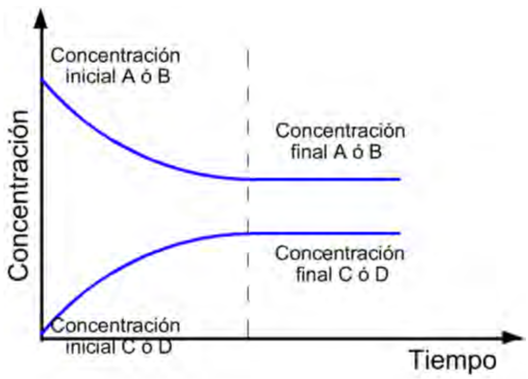


Figura 3.2.1 Ejemplo de reacción reversible

$A + B \rightarrow C$

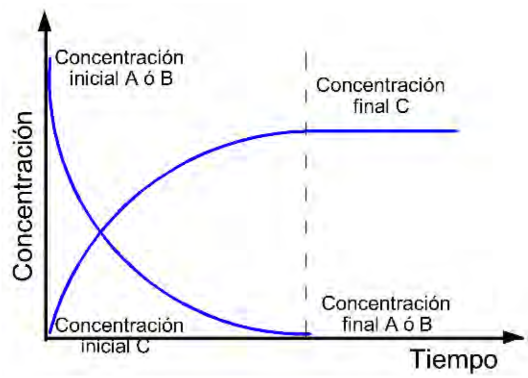


Figura 3.2.2 Ejemplo de reacción irreversible

Ejemplo 5:

En un reactor (Figura 3.2.3) se lleva a cabo una reacción química elemental, de primer orden, irreversible y de descomposición, donde A se descompone en B.

$$A \rightarrow B$$

Inicialmente se tiene 5 gmol de A y la constante de velocidad k de A a B = 0.01.

Plantear las ecuaciones diferenciales de la velocidad de reacción de cada sustancia (A, B) y determinar:

(a) La concentración de A y B en el reactor en cualquier tiempo.
(b) Graficar la cantidad de A y B en el reactor respecto al tiempo.
(c) El tiempo de reacción final.
(d) La concentración y velocidad de reacción de A y B en el reactor, después de 30 minutos.

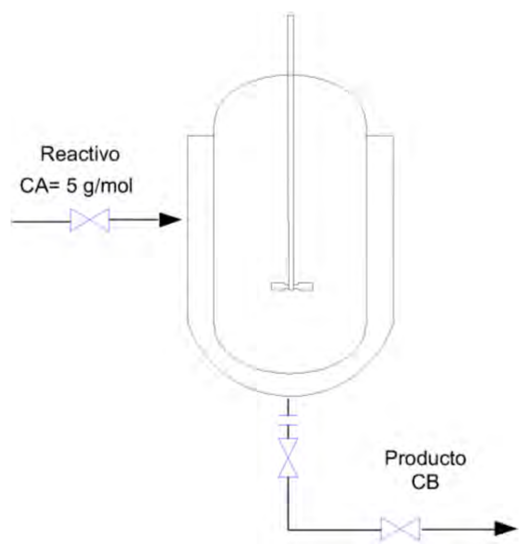


Figura 3.2.3

Formulación matemática. Sea C_A y C_B la concentración de los reactivos A y B respectivamente, después de un periodo de tiempo t. Luego $\frac{dC_A}{dt}$ y $\frac{dC_B}{dt}$ son las velocidades de reacción de los reactivos y están dadas por:

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A; \quad \frac{dC_B}{dt} = kC_A$$

Donde la velocidad de reacción del reactivo A es negativa por que indica su desintegración para formar el reactivo B, y la velocidad de reacción de B es positiva indicando la concentración de A para formar B.

Puesto que inicialmente se tienen 5 gmol de A y 0 gmol de B, se tiene que $C_A = 5$ en $t = 0$ y $C_B = 0$ en $t = 0$. Además, la constante de velocidad es igual a 0.01, así las formulaciones matemáticas completas son:

$C'_A + 0.01C_A = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$C'_B - 0.01C_A = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$

Bajo condiciones iniciales: $C_A(0) = 5, \quad C_B(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$\mathcal{L}\{C'_A + 0.01C_A\} = \mathcal{L}\{0\}$ $\quad$ $\mathcal{L}\{C'_B - 0.01C_A\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_A - C_A + 0.01\bar{C}_A = 0$ $\quad$ $s\bar{C}_B - C_B - 0.01\bar{C}_A = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{C}_A - (5) + 0.01\bar{C}_A = 0$ $\quad$ $s\bar{C}_B - (0) - 0.01\bar{C}_A = 0$

$s\bar{C}_A + 0.01\bar{C}_A = 5 \dots\dots (3)$ $\quad$ $s\bar{C}_B - 0.01\bar{C}_A = 0 \dots\dots (4)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{C}_A$ de la ecuación 3:

$$\bar{C}_A = \frac{5}{(s+0.01)}$$

- Sustituyendo $\bar{C}_A$ en la ecuación 4:

$$s\bar{C}_B - 0.01\left[\frac{5}{s+0.01}\right] = 0$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_B$:

$$\bar{C}_B = 0.01\left[\frac{\frac{5}{s+0.01}}{s}\right] = 0.05\left[\frac{1}{s^2+0.01s}\right] = 0.05\left[\frac{1}{s(s+0.01)}\right]$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_B\} = 0.05\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s)(s+0.01)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_B\} = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.01}\right\}$$

a) Quedando: $C_B = -5(e^{-0.01t}) + 5$

La cual indica la concentración de B en el reactor en cualquier tiempo t.

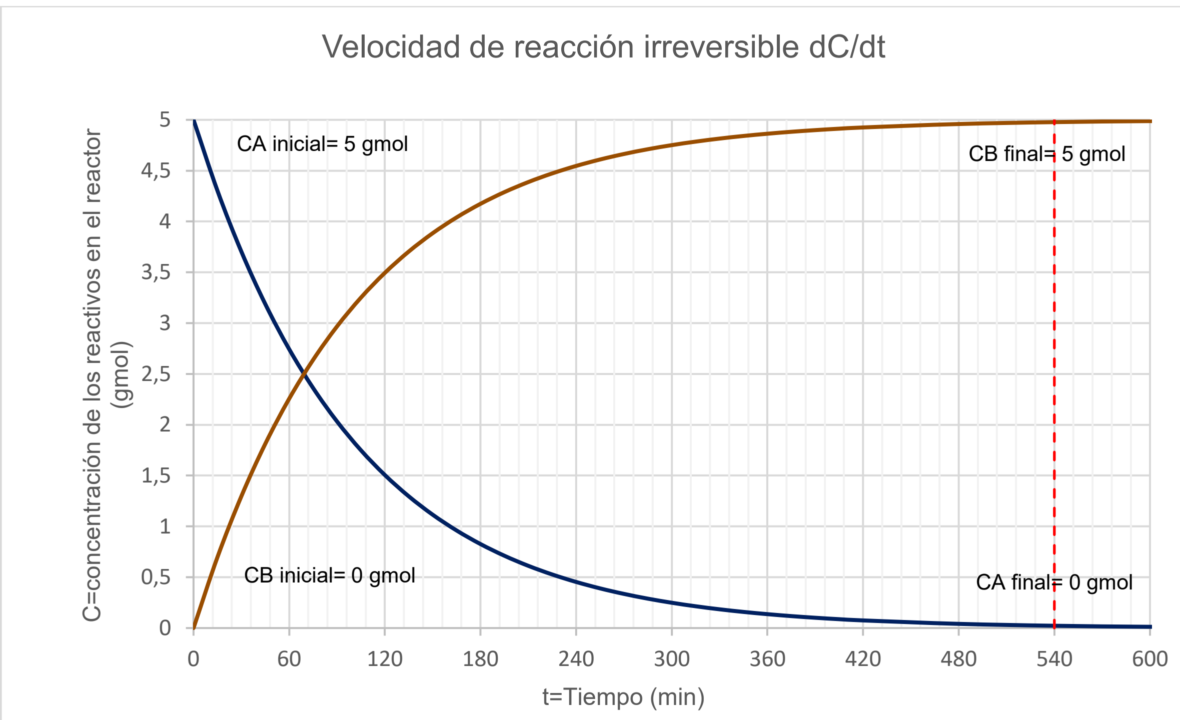
- Despejando C_A de la ecuación 2 y resolviendo:

$$C_A = \frac{1}{0.01} C'_B$$
$$C'_B = 0.05(e^{-0.01t})$$
$$C_A = \frac{1}{0.01}[0.05(e^{-0.01t})]$$

Quedando: $C_A = 5(e^{-0.01\,t})$

La cual indica la concentración de A en el reactor en cualquier tiempo t.

b) La gráfica 3.2.1, indica la concentración de los reactivos A y B con respecto al tiempo señalando las concentraciones iniciales y finales de cada reactivo.



Gráfica 3.2.1 Concentración de los reactivos A y B dentro del reactor con respecto al tiempo, para una reacción irreversible

c) Como se observa en la gráfica anterior el tiempo de reacción final es de 540 min, que es igual a 9h.

d) Concentración y velocidad de reacción de A y B en el reactor, después de 30 minutos:

$C_A = 5\left(e^{-0.01(30)}\right) = 3.7041\ gmol$
$C_B = -5\left(e^{-0.01(30)}\right) + 5 = 1.2959\ gmol$

$\frac{dC_A}{dt} = -0.01(3.7041) = -0.037041\ gmol/min$
$\frac{dC_B}{dt} = 0.01(3.7041) = 0.037041\ gmol/min$

Ejemplo 6:
Del ejemplo anterior, considerar ahora que la reacción química es reversible, es decir: A↔B, con una constante de velocidad k_2 de B a A = 0.045, recordando que la constante de velocidad k_1 de A a B=0.01.
Determinar:
a) La concentración de A y B en el reactor en cualquier tiempo.
b) Graficar la cantidad de A y B en el reactor respecto al tiempo.
c) El tiempo de reacción final.
d) La concentración y velocidad de reacción de A y B en el reactor, después de 30 minutos.

Formulación matemática. Las velocidades de reacción $\frac{dC_A}{dt}$ y $\frac{dC_B}{dt}$ para los reactivos A y B considerando la reacción reversible, están dadas por:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1C_A + k_2C_B; \qquad \frac{dC_B}{dt} = k_1C_A - k_2C_B$$

Puesto que inicialmente hay 5 gmol de A y 0 gmol de B, se tiene que $C_A = 5$ en $t = 0$ y $C_B = 0$ en $t = 0$. Además, considerando el valor de las constantes de velocidad, las formulaciones matemáticas completas son:
$C'_A + 0.01C_A - 0.045C_B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots (1)$
$C'_B - 0.01C_A + 0.045C_B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$
Bajo condiciones iniciales: $C_A(0) = 5, \quad C_B(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:
$\mathcal{L}\{C'_A + 0.01C_A - 0.045C_B\} = \mathcal{L}\{0\}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{C'_B - 0.01C_A + 0.045C_B\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_A - C_A + 0.01\bar{C}_A - 0.045\bar{C}_B = 0$ $\qquad$ $s\bar{C}_B - C_B - 0.01\bar{C}_A + 0.045\bar{C}_B = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{C}_A-(5)+0.01\bar{C}_A-0.045\bar{C}_B=0$ $\qquad$ $s\bar{C}_B-(0)-0.01\bar{C}_A+0.045\bar{C}_B=0$

$s\bar{C}_A+0.01\bar{C}_A-0.045\bar{C}_B=5\ldots\ldots(3)$ $\qquad$ $s\bar{C}_B-0.01\bar{C}_A+0.045\bar{C}_B=0\ldots\ldots(4)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{C}_A$ de la ecuación 3:

$$\bar{C}_A=\frac{5}{s+0.01}+\frac{0.045\,\bar{C}_B}{s+0.01}$$

- Sustituyendo $\bar{C}_A$ en la ecuación 4:

$$s\bar{C}_B-0.01\left[\frac{5}{s+0.01}+\frac{0.045\,\bar{C}_B}{s+0.01}\right]+0.045\bar{C}_B=0$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_B$:

$$\bar{C}_B\left[s-\frac{0.00045}{s+0.01}+0.045\right]-\frac{0.05}{s+0.01}=0$$

$$\bar{C}_B=0.05\left[\frac{\frac{1}{s+0.01}}{s-\frac{0.00045}{s+0.01}+0.045}\right]=0.05\left[\frac{\frac{1}{s+0.01}}{\frac{s^2+0.055s}{s+0.01}}\right]=0.05\left[\frac{s+0.01}{s(s+0.01)(s+0.055)}\right]$$

$$\bar{C}_B=\frac{0.05s}{(s+0.01)(s^2+0.055s)}+\frac{0.0005}{(s+0.01)(s^2+0.055s)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_B\}=0.05\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s(s+0.01)(s+0.055)}\right\}+0.0005\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+0.01)(s+0.055)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_B\}=\frac{10}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{10}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.055}\right\}$$

Quedando: $C_B=-\frac{10}{11}(e^{-0.055t})+\frac{10}{11}$

La cual indica la concentración de B en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C_A de la ecuación 2 y resolviendo:

$$C_A=\frac{9}{2}C_B+100C'_B$$

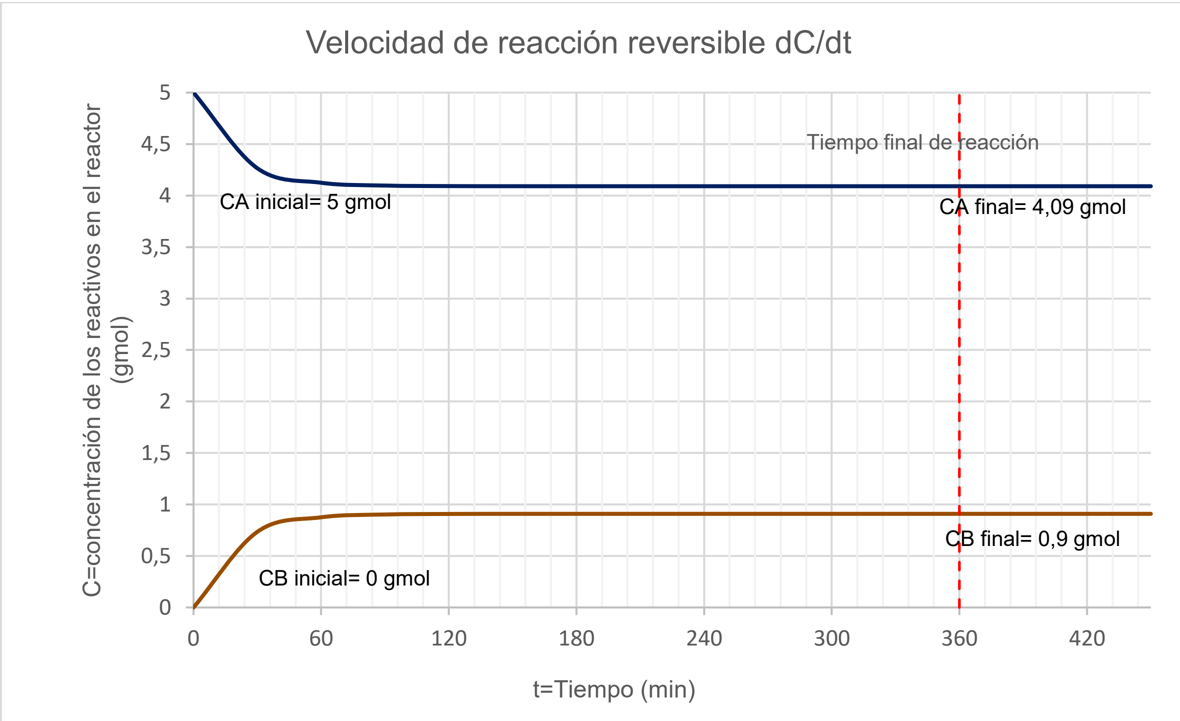
$$C'_B=\frac{1}{20}(e^{-0.055t})$$

$$C_A=\frac{9}{2}\left[-\frac{10}{11}(e^{-0.055t})+\frac{10}{11}\right]+100\left[\frac{1}{20}(e^{-0.055t})\right]$$

Quedando: $C_A=\frac{10}{11}(e^{-0.055\,t})+\frac{45}{11}$

La cual indica la concentración de A en el reactor en cualquier tiempo t.

(b) La gráfica 3.2.2, indica la concentración de los reactivos A y B con respecto al tiempo, señalando las concentraciones iniciales y finales de cada reactivo.



Gráfica 3.2.2 Concentración de los reactivos A y B dentro del reactor con respecto al tiempo, para una reacción reversible.

(c) Como se observa en la gráfica anterior el tiempo de reacción final es de 360 min, que es igual a 6h.

(d) Concentración y velocidad de reacción de A y B en el reactor, después de 30 minutos:

$$C_A = \frac{10}{11}\left(e^{-0.055(30)}\right) + \frac{45}{11} = 4.2655\ gmol$$

$$C_B = -\frac{10}{11}\left(e^{-0.055(30)}\right) + \frac{10}{11} = 0.7345\ gmol$$

$$\frac{dC_A}{dt} = -0.01(4.2655) + 0.045(0.7345) = -0.0096025\ gmol/min$$

$$\frac{dC_B}{dt} = 0.01(4.2655) - 0.045(0.7345) = 0.0096025\ gmol/min$$

3.2.2 Reacciones químicas consecutivas.

Las reacciones químicas consecutivas son aquellas en las cuales sus productos formados actúan como reactivos de otra reacción posterior: $A \rightarrow B \rightarrow C$. Se debe diferenciar las reacciones del tipo:

$$A + B \rightarrow C$$
$$C + D \rightarrow E$$

de las del tipo:

$$A + B \rightarrow C$$
$$C + B \rightarrow E$$

Estas últimas se llaman reacciones consecutivas competitivas, mientras las del primer grupo se llaman reacciones consecutivas no competitivas.

Ejemplo 7:
En un reactor (Figura .2.4) se lleva a cabo una reacción química elemental, consecutiva no competitiva y de primer orden:

$$A \rightarrow B \leftrightarrow C \rightarrow D$$

Donde:
k1= Constante de velocidad de A a B = 0.01
k2= Constante de velocidad de B a C = 0.02
k3= Constante de velocidad de C a B = 0.03
k4= Constante de velocidad de C a D = 0.01
Con condiciones iniciales:
C_A (t=0) = 5 gmol, C_B (t=0) = C_C (t=0) = C_D (t=0) = 0 gmol
Plantear las ecuaciones diferenciales de la velocidad de reacción de cada sustancia (A, B, C, D) y determinar:

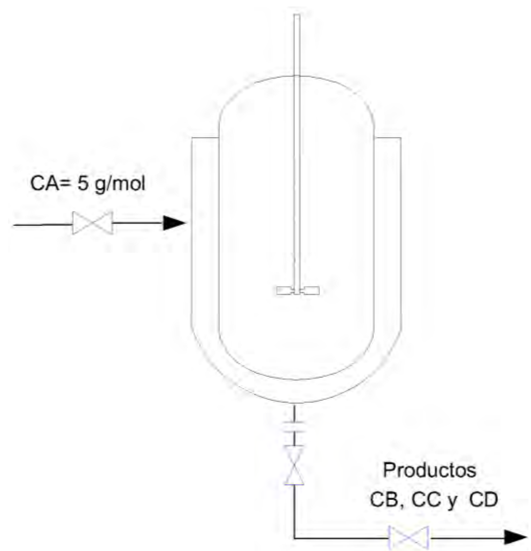


Figura 3.2.4

(a) Las concentraciones de cada sustancia en cualquier tiempo.
(b) Graficar las concentraciones de cada sustancia respecto al tiempo, resaltando los puntos de concentración inicial y final para cada sustancia.
(c) Determinar el tiempo de reacción final.
(d) La concentración y velocidad de reacción de A, B, C y D en el reactor, después de 45 minutos.

Formulación matemática. Sea C_A,C_B, C_C y C_D las concentraciones de los reactivos A, B, C y D respectivamente, después de un periodo de tiempo t. Luego $\frac{dC_A}{dt}\frac{dC_B}{dt}$, $\frac{dC_C}{dt}$ y $\frac{dC_D}{dt}$, son las velocidades de reacción para los reactivos respectivamente, y están dadas por:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1C_A; \quad \frac{dC_B}{dt} = k_1C_A - k_2C_B + k_3C_C$$
$$\frac{dC_D}{dt} = k_4C_C; \quad \frac{dC_C}{dt} = k_2C_B - k_3C_C - k_4C_C$$

Puesto que inicialmente hay 5 gmol de A y 0 gmol para todos los demás reactivos, se tiene que $C_A = 5$ en $t = 0$ y $C_B, C_C, C_D = 0$ en $t = 0$. Además, sustituyendo el valor de las constantes de velocidad, las formulaciones matemáticas completas son:

$C'_A + 0.01C_A = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$
$C'_B - 0.01C_A + 0.02C_B - 0.03C_C = 0 \dots\dots\dots (2)$
$C'_D - 0.01C_C = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$
$C'_C - 0.02C_B + 0.04C_C = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$
Bajo condiciones iniciales: $C_A(0) = 5,\ C_B(0) = C_C(0) = C_D(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.
Se calcula la transformada de Laplace para las funciones:

$\mathcal{L}\{C'_A + 0.01C_A\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_A - C_A + 0.01\bar{C}_A = 0$

$\mathcal{L}\{C'_B - 0.01C_A + 0.02C_B - 0.03C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_B - C_B - 0.01\bar{C}_A + 0.02\bar{C}_B - 0.03\bar{C}_C = 0$

$\mathcal{L}\{C'_D - 0.01C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_D - C_D - 0.01\bar{C}_C = 0$

$\mathcal{L}\{C'_C - 0.02C_B + 0.04C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_C - C_C - 0.02\bar{C}_B + 0.04\bar{C}_C = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{C}_A - (5) + 0.01\bar{C}_A = 0$
$s\bar{C}_A + 0.01\bar{C}_A = 5 \dots\dots (5)$

$s\bar{C}_B - (0) - 0.01\bar{C}_A + 0.02\bar{C}_B - 0.03\bar{C}_C = 0$
$s\bar{C}_B - 0.01\bar{C}_A + 0.02\bar{C}_B - 0.03\bar{C}_C = 0 \dots (6)$

$s\bar{C}_D - (0) - 0.01\bar{C}_C = 0$
$s\bar{C}_D - 0.01\bar{C}_C = 0 \dots\dots (7)$

$s\bar{C}_C - (0) - 0.02\bar{C}_B + 0.04\bar{C}_C = 0$
$s\bar{C}_C - 0.02\bar{C}_B + 0.04\bar{C}_C = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (8)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{C}_A$ de la ecuación 5:

$\bar{C}_A = \frac{5}{s+0.01}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_A\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.01}\right\}$

Quedando: $C_A = 5(e^{-0.01t})$

La cual indica la concentración de A en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando $\bar{C}_B$ de la ecuación 8:

$\bar{C}_B = 50s\bar{C}_C + 2\bar{C}_C$

- Sustituyendo $\bar{C}_A$ y $\bar{C}_B$ en la ecuación 6:

$s(50s\bar{C}_C + 2\bar{C}_C) - 0.01\left(\frac{5}{s+0.01}\right) + 0.02(50s\bar{C}_C + 2\bar{C}_C) - 0.03\bar{C}_C = 0$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_C$:

$\bar{C}_C(50s^2 + 3s + 0.01) - \frac{0.05}{s+0.01} = 0$

$\bar{C}_C = 0.05\left[\frac{\frac{1}{s+0.01}}{50s^2+3s+0.01}\right] = \frac{0.05}{50}\left[\frac{1}{(s+0.01)(s+0.00354)(s+0.0564)}\right]$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_C\} = 0.001\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+0.01)(s+0.00354)(s+0.0564)}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_C\} = -3.3333\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.01}\right\} + 2.9265\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.00354}\right\} + 0.4068\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.0564}\right\}$

Quedando: $C_C = -3.3333(e^{-0.01t}) + 2.9265(e^{-0.00354t}) + 0.4068(e^{-0.0564t})$

La cual indica la concentración de C en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C_B de la ecuación 4 y resolviendo:

$C_B = \frac{1}{0.02}C'_C + 2C_C$

$C'_C = 0.0333(e^{-0.01t}) - 0.0104(e^{-0.00354t}) - 0.0230(e^{-0.0564t})$

$C_B = \frac{1}{0.02}[0.0333(e^{-0.01t}) - 0.0104(e^{-0.00354t}) - 0.0230(e^{-0.0564t})]$
$+2[-3.3333(e^{-0.01t}) + 2.9265(e^{-0.00354t}) + 0.4068(e^{-0.0564t})\ ]$

Quedando: $C_B = -5(e^{-0.01\,t}) + 5.333(e^{-0.00354t}) - 0.3364(e^{-0.0564t})$

La cual indica la concentración de B en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C'_D de la ecuación 3 y resolviendo:

$C'_D = 0.01C_C$

$C'_D = 0.01[-3.3333(e^{-0.01t}) + 2.9265(e^{-0.00354t}) + 0.4068(e^{-0.0564t})\ ]$

$C'_D = -0.033333(e^{-0.01t}) + 0.029265(e^{-0.00354t}) + 0.004068(e^{-0.0564t})$

Integrando:

$C_D = 3.3333(e^{-0.01t}) - 8.2669(e^{-0.00354t}) - 0.0721(e^{-0.0564t}) + C$

Despejando la constante C, bajo condiciones de C_D=0 en t=0

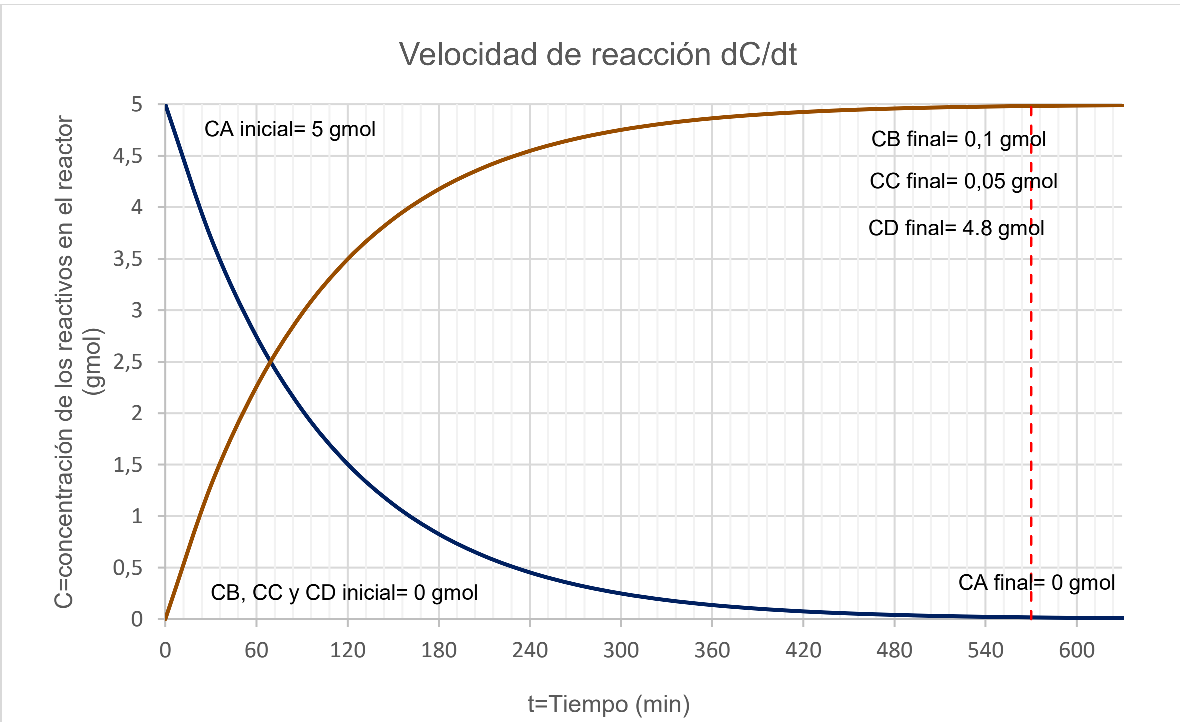
$$C = 0 - 3.3333\left(e^{-0.01(0)}\right) + 8.2669\left(e^{-0.00354(0)}\right) + 0.0721\left(e^{-0.0564(0)}\right) = 5$$

Por lo que C_D queda:

$$C_D = 3.3333(e^{-0.01t}) - 8.2669(e^{-0.00354t}) - 0.0721(e^{-0.0564t}) + 5$$

La cual indica la concentración de D en el reactor en cualquier tiempo t.

b) La gráfica 3.2.3 indica la concentración del reactivo A y de los productos formados con respecto al tiempo, señalando las concentraciones iniciales y finales para cada reactivo.



Gráfica 3.2.3. Concentración de los reactivos A, B, C y D dentro del reactor con respecto al tiempo, para una reacción consecutiva.

c) El tiempo de reacción final es de 570 min, que es igual a 9.5 h.

d) Concentración y velocidad de reacción de los reactivos en el reactor, después de 45 minutos:

$$C_A = 5\left(e^{-0.01(45)}\right) = 3.1881\ gmol$$

$$C_B = -5\left(e^{-0.01\ (45)}\right) + 5.333\left(e^{-0.00354(45)}\right) - 0.3364\left(e^{-0.0564(45)}\right) = 1.3329\ gmol$$

$$C_C = -3.3333\left(e^{-0.01(45)}\right) + 2.9265\left(e^{-0.00354(45)}\right) + 0.4068\left(e^{-0.0564(45)}\right) = 0.4023\ gmol$$

$$C_D = 3.3333\left(e^{-0.01(45)}\right) - 8.2669\left(e^{-0.00354(45)}\right) - 0.0721\left(e^{-0.0564(45)}\right) + 5 = 0.0702\ gmol$$

$$\frac{dC_A}{dt} = -0.01(3.1881) = -0.031881\ gmol/min$$
$$\frac{dC_B}{dt} = 0.01(3.1881) - 0.02(1.3329) + 0.03(0.4023) = 0.0173\ gmol/min$$
$$\frac{dC_C}{dt} = 0.02(1.3329) - 0.04(0.4023) = 0.0106\ gmol/min$$
$$\frac{dC_D}{dt} = 0.01(0.4023) = 0.004023\ gmol/min$$

3.2.3 Reacciones químicas paralelas.

Las reacciones químicas paralelas son aquellas en las cuales se llevan a cabo dos o más reacciones simultáneas y en el mismo sentido. Los reactivos reaccionan según dos esquemas diferentes para dar productos distintos:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$$
$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{D}$$

Ejemplo 8:
En un reactor (Figura 3.2.5) se lleva a cabo una reacción química elemental, consecutiva no competitiva, paralela y de primer orden:

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow & B & \\ \searrow & \updownarrow & \\ & C \rightarrow & D \end{array}$$

Donde:
k1 es la constante de velocidad de A a B = 0.4
k2 es la constante de velocidad de B a C = 0.1
k3 es la constante de velocidad de C a B = 0.97
k4 es la constante de velocidad de A a C = 0.1
k5 es la constante de velocidad de C a D = 0.38
Con condiciones iniciales:

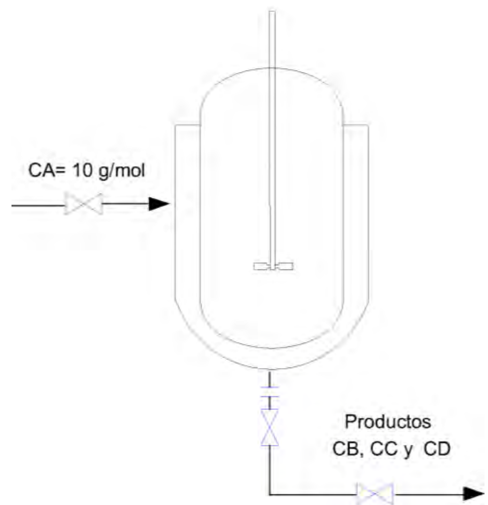


Figura 3.2.5

C_A (t=0) = 10 gmol, C_B (t=0) = C_C (t=0) = C_D (t=0) = 0 gmol
Plantear las ecuaciones diferenciales de la velocidad de reacción de cada sustancia (A, B, C, D) y determinar:

(a) Las concentraciones de cada sustancia en cualquier tiempo.
(b) Graficar la concentración de cada sustancia respecto al tiempo, resaltando los puntos de concentración inicial y final para cada sustancia.

Formulación matemática. Sea C_A,C_B, C_C y C_D las concentraciones de los reactivos A, B, C y D respectivamente, después de un periodo de tiempo t. Luego $\frac{dC_A}{dt}$ $\frac{dC_B}{dt}$, $\frac{dC_C}{dt}$ y $\frac{dC_D}{dt}$, son las velocidades de reacción para los reactivos respectivamente, y están dadas por:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1C_A - k_4C_A; \qquad \frac{dC_B}{dt} = k_1C_A - k_2C_B + k_3C_C$$
$$\frac{dC_D}{dt} = k_5C_C; \qquad \frac{dC_C}{dt} = k_2C_B + k_4C_A - k_3C_C - k_5C_C$$

Puesto que inicialmente hay 10 gmol de A y 0 gmol para todos los demás reactivos, se tiene que $C_A = 10$ en $t = 0$ y $C_B, C_C, C_D = 0$ en $t = 0$. Además, sustituyendo el valor de las constantes de velocidad, las formulaciones matemáticas completas son:

$C'_A + 0.5C_A += 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .\ldots (1)$

$C'_B - 0.4C_A + 0.1C_B - 0.97C_C = 0 \ldots\ldots\ldots .(2)$

$C'_D - 0.38C_C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ...\ldots (3)$

$C'_C - 0.1C_B - 0.1C_A + 1.35C_C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .... (4)$

Bajo condiciones iniciales: $C_A(0) = 10,\ C_B(0) = C_C(0) = C_D(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para las funciones:

$\mathcal{L}\{C'_A + 0.5C_A\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_A - C_A + 0.5\bar{C}_A = 0$

$\mathcal{L}\{C'_B - 0.4C_A + 0.1C_B - 0.97C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_B - C_B - 0.4\bar{C}_A + 0.1\bar{C}_B - 0.97\bar{C}_C = 0$

$\mathcal{L}\{C'_D - 0.38C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_D - C_D - 0.38\bar{C}_C = 0$

$\mathcal{L}\{C'_C - 0.1C_B - 0.1C_A + 1.35C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_C - C_C - 0.1\bar{C}_B - 0.1\bar{C}_A + 1.35\bar{C}_C = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{C}_A - (10) + 0.5\bar{C}_A = 0$

$s\bar{C}_A + 0.5\bar{C}_A = 10 \ldots\ldots .. (5)$

$s\bar{C}_B - (0) - 0.4\bar{C}_A + 0.1\bar{C}_B - 0.97\bar{C}_C = 0$

$s\bar{C}_B - 0.4\bar{C}_A + 0.1\bar{C}_B - 0.97\bar{C}_C = 0 \ldots .(6)$

$s\bar{C}_D - (0) - 0.38\bar{C}_C = 0$

$s\bar{C}_D - 0.38\bar{C}_C = 0 \ldots\ldots .. (7)$

$s\bar{C}_C - (0) - 0.1\bar{C}_B - 0.1\bar{C}_A + 1.35\bar{C}_C = 0$

$s\bar{C}_C - 0.1\bar{C}_B - 0.1\bar{C}_A + 1.35\bar{C}_C = 0 \ldots (8)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{C}_A$ de la ecuación 5:

$\bar{C}_A = \frac{10}{s+0.5}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_A\} = 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.5}\right\}$

Quedando: $C_A = 10(e^{-0.5t})$

La cual indica la concentración de A en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando $\bar{C}_B$ de la ecuación 8 y sustituyendo:

$\bar{C}_B = 10s\bar{C}_C - \bar{C}_A + 13.5\bar{C}_C$

- Sustituyendo $\bar{C}_A$ y $\bar{C}_B$ en la ecuación 6:

$$s\left(10s\bar{C}_C - \frac{10}{s+0.5} + 13.5\bar{C}_C\right) - 0.4\left(\frac{10}{s+0.5}\right) + 0.1\left(10s\bar{C}_C - \frac{10}{s+0.5} + 13.5\bar{C}_C\right) - 0.97\bar{C}_C = 0$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_C$:

$$\bar{C}_C(10s^2 + 14.5s + 0.38) - \frac{5}{s+0.5} - \frac{10s}{s+0.5} = 0$$

$$\bar{C}_C = [5 + 10s]\left[\frac{\frac{1}{s+0.5}}{10s^2+14.5s+0.38}\right] = \left[\frac{5+10s}{10}\right]\left[\frac{1}{(s+0.5)(s+0.0267)(s+1.4233)}\right]$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_C\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{5+10s}{10}\right]\left[\frac{1}{(s+0.5)(s+0.0267)(s+1.4233)}\right]\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_C\} = 0.716023\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.0267}\right\} - 0.716023\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1.4233}\right\}$$

Quedando: $C_C = 0.716023(e^{-0.0267t}) - 0.716023(e^{-1.4233t})$

La cual indica la concentración de C en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C_B de la ecuación 4 y resolviendo:

$$C_B = \frac{1}{0.1}C'_C - C_A + 13.5C_C$$

$$C'_C = -0.01912(e^{-0.0267t}) + 1.01912(e^{-1.4233t})$$

$$C_B = \frac{1}{0.1}[-0.01912(e^{-0.0267t}) + 1.01912(e^{-1.4233t})] - 10(e^{-0.5t}) + 13.5[0.716023(e^{-0.0267t}) - 0.716023(e^{-1.4233t})]$$

Quedando: $C_B = -10(e^{-0.5\,t}) + 9.47514(e^{-0.0267t}) + 0.52485(e^{-1.4233t})$

La cual indica la concentración de B en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C'_D de la ecuación 3 y resolviendo:

$$C'_D = 0.38C_C$$

$$C'_D = 0.38[0.716023(e^{-0.0267t}) - 0.716023(e^{-1.4233t})]$$

$$C'_D = 0.27208(e^{-0.0267t}) - 0.27208(e^{-1.4233t})$$

Integrando:

$$C_D = -10.19117(e^{-0.0267t}) + 0.19117(e^{-1.4233t}) + C$$

Despejando la constante C, bajo condiciones de C_D=0 en t=0

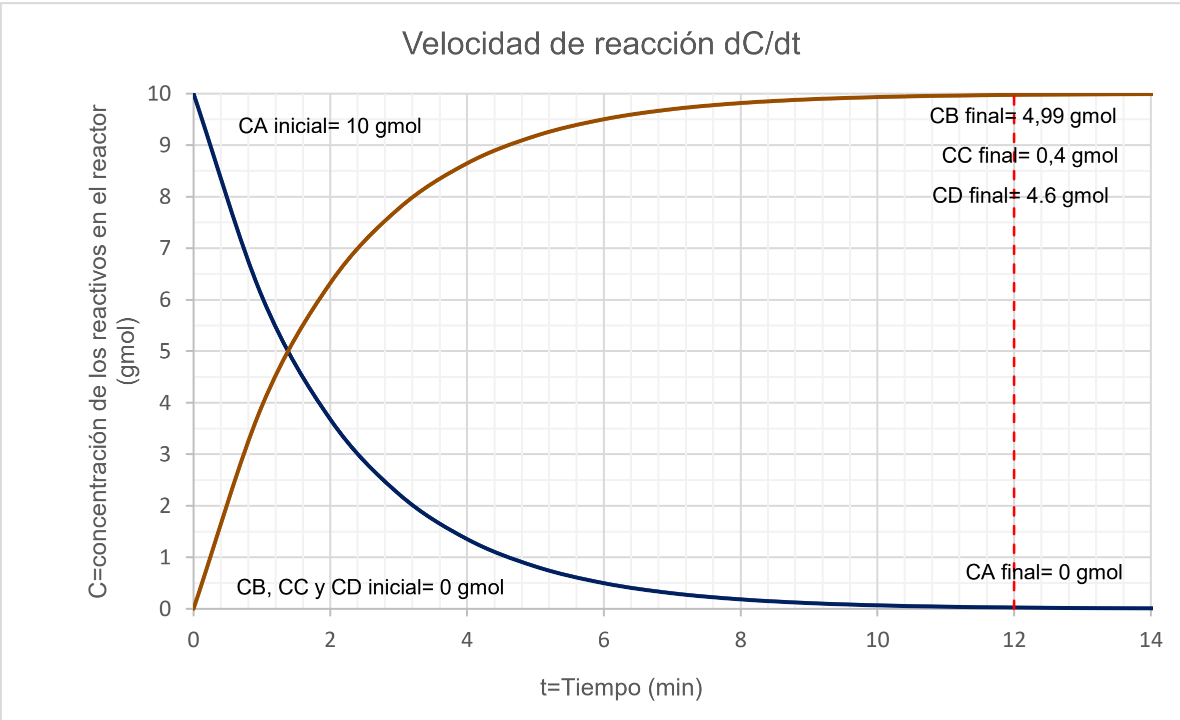
$$C = 0 + 10.19117\left(e^{-0.0267(0)}\right) - 0.19117\left(e^{-1.4233(0)}\right) = 10$$

Por lo que C_D queda:

$C_D = -10.19117(e^{-0.0267t}) + 0.19117(e^{-1.4233t}) + 10$

La cual indica la concentración de D en el reactor en cualquier tiempo t.

(b) La gráfica 3.2.4, indica la concentración de los reactivos A y de los productos formados con respecto al tiempo, señalando las concentraciones iniciales y finales de cada reactivo.



Gráfica 3.2.4 Concentración de los reactivos A, B, C y D dentro del reactor con respecto al tiempo, para una reacción química paralela.

3.2.4 Reacciones químicas en cadena.

Las reacciones químicas en cadena son un caso particular de las reacciones consecutivas ya que, en ellas, uno de los productos intermedios es siempre un radical libre, el cual reacciona con los reactivos u otros radicales. El proceso de reacción en cadena consta de tres etapas definidas. La primera se llama iniciación y es aquí, en donde se forman los primeros radicales libres. La segunda etapa es la propagación y se caracteriza por la interacción de un radical libre con un reactivo generando un radical libre de otra especie. La tercera etapa se denomina terminación y en ella se verifica la unión de dos radicales libres entre sí.

Ejemplo 9:

En un reactor (Figura 3.2.6) se lleva a cabo la reacción de descomposición del acetaldehído, de acuerdo a la ecuación:

$CH_3CHO \rightarrow CH_4 + CO$

Es una reacción compleja por lo tanto está formada de las siguientes etapas:

Etapa 1 de iniciación:

$\mathrm{CH_3CHO} \rightarrow \mathrm{CH_3} + \mathrm{CHO};$

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} + C$$

Etapa 2 de propagación:

$\mathrm{CHO} \rightarrow \mathrm{CO} + \mathrm{H};\quad \mathrm{H} + \mathrm{CH_3CHO} \rightarrow \mathrm{H_2} + \mathrm{CH_3CO};$

$\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{D} + \mathrm{E}\qquad\qquad \mathrm{E} + \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{F} + \mathrm{G}$

Etapa 3 de terminación:

$CH_3 + \mathrm{CH_3CHO} \rightarrow \mathrm{CH_4} + \mathrm{CH_3CO};\quad CH_3\mathrm{CO} \rightarrow \mathrm{CH_3} + \mathrm{CO};$

$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{H} + \mathrm{G}\qquad\qquad \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{D}$

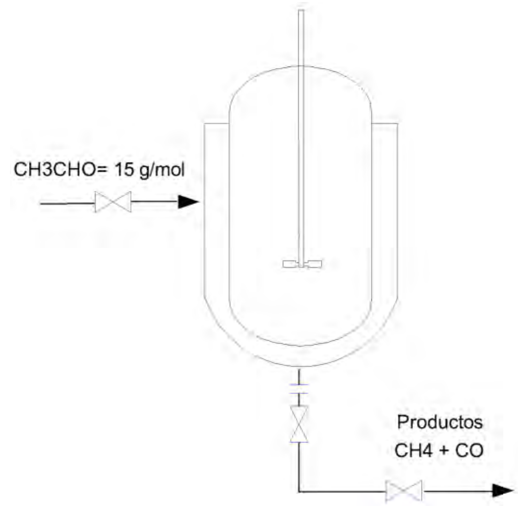
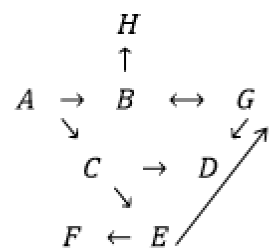


Figura 3.2.6

La anterior reacción se representa esquemáticamente:



Donde:

k1 es la constante de velocidad de A a B = 0.35

k2 es la constante de velocidad de A a C = 0.2

k3 es la constante de velocidad de C a D = 0.5

k4 es la constante de velocidad de C a E = 0.1

k5 es la constante de velocidad de E a F = 0.38

k6 es la constante de velocidad de E a G = 0.4

k7 es la constante de velocidad de B a H = 0.15

k8 es la constante de velocidad de B a G = 0.25

k9 es la constante de velocidad de G a B = 0.2

k10 es la constante de velocidad de G a D = 0.15

Se tiene las siguientes condiciones iniciales:

C_A (t=0) = 15 gmol;

C_B (t=0) = C_C (t=0) = C_D (t=0) = C_E (t=0) = C_F (t=0) = C_G (t=0) = C_H (t=0) = 0 gmol

Plantear las ecuaciones diferenciales de la velocidad de reacción de cada sustancia (A, B, C, D, E, F, G, H) y determinar:

(a) Las concentraciones de cada sustancia en cualquier tiempo.

(b) Graficar la concentración de cada sustancia respecto al tiempo, resaltando los puntos de concentración inicial y final para cada sustancia.

(c) Determinar el tiempo de reacción final.

Formulación matemática. Sea C_A,C_B, C_C, C_D, C_E, C_F, C_G y C_H las concentraciones de los reactivos A, B, C, D, E, F y G respectivamente, después de un periodo de tiempo t. Luego $\frac{dC_A}{dt}$, $\frac{dC_B}{dt}$, $\frac{dC_C}{dt}$, $\frac{dC_D}{dt}$, $\frac{dC_E}{dt}$, $\frac{dC_F}{dt}$, $\frac{dC_G}{dt}$ y $\frac{dC_H}{dt}$ son las velocidades de reacción para los reactivos respectivamente, y están dadas por:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1C_A - k_2C_A; \qquad \frac{dC_B}{dt} = k_1C_A + k_9C_G - k_7C_B - k_8C_B;$$
$$\frac{dC_C}{dt} = k_2C_A - k_3C_C - k_4C_C; \qquad \frac{dC_D}{dt} = k_{10}C_G + k_3C_C;$$
$$\frac{dC_E}{dt} = k_4C_C - k_5C_E - k_6C_E; \qquad \frac{dC_F}{dt} = k_5C_E;$$
$$\frac{dC_G}{dt} = k_6C_E + k_8C_B - k_9C_G - k_{10}C_G \qquad \frac{dC_H}{dt} = k_7C_B;$$

Puesto que inicialmente hay 15 gmol de A y 0 gmol para todos los demás reactivos, se tiene que $C_A = 15$ en $t = 0$ y $C_B, C_C, C_D, C_E, C_F, C_G, C_H = 0$ en $t = 0$. Además, sustituyendo el valor de las constantes de velocidad, las formulaciones matemáticas completas son:

$C'_A + 0.55C_A = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
$C'_B - 0.35C_A - 0.2C_G + 0.4C_B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$
$C'_C - 0.2C_A + 0.6C_C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$
$C'_D - 0.15C_G - 0.5C_C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$
$C'_E - 0.1C_C + 0.78C_E = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$
$C'_F - 0.38C_E = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$
$C'_G - 0.4C_E - 0.25C_B + 0.35C_G = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$
$C'_H - 0.15C_B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$

Bajo condiciones iniciales:

$C_A(0) = 10, C_B(0) = C_C(0) = C_D(0) = C_E(0) = C_F(0) = C_G(0) = C_H(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para las funciones:

$\mathcal{L}\{C'_A + 0.55C_A\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_A - C_A + 0.55\bar{C}_A = 0$

$\mathcal{L}\{C'_B - 0.35C_A - 0.2C_G + 0.4C_B\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_B - C_B - 0.35\bar{C}_A - 0.2\bar{C}_G + 0.4\bar{C}_B = 0$

$\mathcal{L}\{C'_C - 0.2C_A + 0.6C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_C - C_C - 0.2\bar{C}_A + 0.6\bar{C}_C = 0$

$\mathcal{L}\{C'_D - 0.15C_G - 0.5C_C\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_D - C_D - 0.15\bar{C}_G - 0.5\bar{C}_C = 0$

$\mathcal{L}\{C'_E - 0.1C_C + 0.78C_E\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_E - C_E - 0.1\bar{C}_C + 0.78\bar{C}_E = 0$

$\mathcal{L}\{C'_F - 0.38C_E\} = \mathcal{L}\{0\}$
$s\bar{C}_F - C_F - 0.38\bar{C}_E = 0$

$\mathcal{L}\{C'_G - 0.4C_E - 0.25C_C + 0.35C_G\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_G - C_G - 0.4\bar{C}_E - 0.25\bar{C}_B + 0.35\bar{C}_G = 0$

$\mathcal{L}\{C'_H - 0.15C_B\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\bar{C}_H - C_H - 0.15\bar{C}_B = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\bar{C}_A - (15) + 0.55\bar{C}_A = 0$

$s\bar{C}_A + 0.55\bar{C}_A = 15 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$

$s\bar{C}_B - (0) - 0.35\bar{C}_A - 0.2\bar{C}_G + 0.4\bar{C}_B = 0$

$s\bar{C}_B - 0.35\bar{C}_A - 0.2\bar{C}_G + 0.4\bar{C}_B = 0 \dots. (10)$

$s\bar{C}_C - (0) - 0.2\bar{C}_A + 0.6\bar{C}_C = 0$

$s\bar{C}_C - 0.2\bar{C}_A + 0.6\bar{C}_C = 0 \dots\dots.. (11)$

$s\bar{C}_D - (0) - 0.15\bar{C}_G - 0.5\bar{C}_C = 0$

$s\bar{C}_D - 0.15\bar{C}_G - 0.5\bar{C}_C = 0 \dots\dots\dots.. \dots (12)$

$s\bar{C}_E - (0) - 0.1\bar{C}_C + 0.78\bar{C}_E = 0$

$s\bar{C}_E - 0.1\bar{C}_C + 0.78\bar{C}_E = 0 \dots\dots. (13)$

$s\bar{C}_F - (0) - 0.38\bar{C}_E = 0$

$s\bar{C}_F - 0.38\bar{C}_E = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \dots. (14)$

$s\bar{C}_G - (0) - 0.4\bar{C}_E - 0.25\bar{C}_B + 0.35\bar{C}_G = 0$

$s\bar{C}_G - 0.4\bar{C}_E - 0.25\bar{C}_B + 0.35\bar{C}_G = 0 \dots\dots. (15)$

$s\bar{C}_H - (0) - 0.15\bar{C}_B = 0$

$s\bar{C}_H - 0.15\bar{C}_B = 0 \dots\dots\dots\dots (16)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{C}_A$ de la ecuación 5:

$\bar{C}_A = \frac{15}{s+0.55}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_A\} = 15\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.55}\right\}$

Quedando: $C_A = 15(e^{-0.55t})$

La cual indica la concentración de A en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando $\bar{C}_C$ de la ecuación 11 y sustituyendo $\bar{C}_A$:

$\bar{C}_C(s + 0.6) = 0.2\left(\frac{15}{s+0.55}\right)$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_C$:

$\bar{C}_C = \frac{3}{(s+0.55)(s+0.6)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_C\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+0.55)(s+0.6)}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_C\} = 60\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.55}\right\} - 60\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.6}\right\}$

Quedando: $C_C = 60(e^{-0.55t}) - 60(e^{-0.6t})$

La cual indica la concentración de C en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando $\bar{C}_E$ de la ecuación 13 y sustituyendo $\bar{C}_C$:

$$\bar{C}_E(s+0.78) = 0.1\left(\frac{3}{(s+0.55)(s+0.6)}\right)$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_E$:

$$\bar{C}_E = \frac{0.3}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_E\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.3}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_E\} = \frac{600}{23}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.55}\right\} - \frac{100}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.6}\right\} + \frac{500}{69}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.78}\right\}$$

Quedando: $C_E = \frac{600}{23}(e^{-0.55t}) - \frac{100}{3}(e^{-0.6t}) + \frac{500}{69}(e^{-0.78t})$

La cual indica la concentración de E en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando $\bar{C}_F$ de la ecuación 14 y sustituyendo $\bar{C}_E$:

$$\bar{C}_F(s) = 0.38\left(\frac{0.3}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)}\right)$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_F$:

$$\bar{C}_F = \frac{0.114}{s(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_F\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.114}{s(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_F\} = -\frac{4560}{253}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.55}\right\} + \frac{190}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.6}\right\} - 3.53029\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.78}\right\} + \frac{190}{429}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

Quedando: $C_F = -\frac{4560}{253}(e^{-0.55t}) + \frac{190}{9}(e^{-0.6t}) - 3.53029(e^{-0.78t}) + \frac{190}{429}$

La cual indica la concentración de F en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando $\bar{C}_B$ de la ecuación 10 y sustituyendo $\bar{C}_A$:

$$\bar{C}_B(s+0.4) = 0.35\left(\frac{15}{s+0.55}\right) + 0.2\bar{C}_G$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_B$:

$$\bar{C}_B = \frac{5.25}{(s+0.55)(s+0.4)} + \frac{0.2\bar{C}_G}{s+0.4}$$

- Sustituyendo $\bar{C}_C$, $\bar{C}_E$ y $\bar{C}_B$ en la ecuación 15:

$$\bar{C}_G(s+0.35) - 0.4\left(\frac{0.3}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)}\right) - 0.25\left(\frac{5.25}{(s+0.55)(s+0.4)} + \frac{0.2\bar{C}_G}{s+0.4}\right) = 0$$

- Simplificando y despejando $\bar{C}_G$:

$$\bar{C}_G\left(\frac{s^2+0.75s+0.14}{s+0.4}\right)(-0.05) = \frac{0.12}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)} + \frac{1.3125}{(s+0.55)(s+0.4)}$$

$$\bar{C}_G = -\frac{2.4}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)(s+0.35)} - \frac{26.25}{(s+0.55)(s+0.35)(s+0.4)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_G\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2.4}{(s+0.55)(s+0.6)(s+0.78)(s+0.35)} - \frac{26.25}{(s+0.55)(s+0.35)(s+0.4)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}_G\} = \frac{3875}{23}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.55}\right\} - \frac{3200}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.6}\right\} + 134.8163\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.78}\right\}$$
$$-\frac{117675}{43}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.35}\right\} + 3500\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.4}\right\}$$

Quedando: $C_G = \frac{3875}{23}(e^{-0.55t}) - \frac{3200}{3}(e^{-0.6t}) + 134.8163(e^{-0.78t})$
$-\frac{117675}{43}(e^{-0.35t}) + 3500(e^{-0.4t})$

La cual indica la concentración de G en el reactor en cualquier tiempo t.

- Sustituyendo $C_B$de la ecuación 7 y resolviendo:

$$C_B = 4C'_G - 1.6C_E - 1.4C_G$$

$$C_B = 4\left[-\frac{8525}{92}(e^{-0.55t}) + 640(e^{-0.6t}) - 105.1567(e^{-0.78t}) + 957.8198(e^{-0.35t}) - 1400(e^{-0.4t})\right] - 1.6\left[\frac{600}{23}(e^{-0.55t}) - \frac{100}{3}(e^{-0.6t}) + \frac{500}{69}(e^{-0.78t})\right] - 1.4\left[\frac{3875}{23}(e^{-0.55t}) - \frac{3200}{3}(e^{-0.6t}) + 134.8163(e^{-0.78t}) - \frac{117675}{43}(e^{-0.35t}) + 3500(e^{-0.4})\right]$$

Quedando: $C_B = -\frac{14910}{23}(e^{-0.55\,t}) + \frac{12320}{3}(e^{-0.6t}) - 620.9638(e^{-0.78t})$
$+7662.5583(e^{-0.35t}) - 10500(e^{-0.4t})$

La cual indica la concentración de B en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C'_D de la ecuación 3 y resolviendo:

$$C'_D = 0.15C_G + 0.5C_C$$

$$C'_D = 0.15\left[\frac{3875}{23}(e^{-0.55t}) - \frac{3200}{3}(e^{-0.6t}) + 134.8163(e^{-0.78t}) - \frac{117675}{43}(e^{-0.35t}) + 3500(e^{-0.4})\right] + 0.5[60(e^{-0.55t}) - 60(e^{-0.6t})]$$

$$C'_D = \frac{5085}{92}(e^{-0.55\,t}) - 190(e^{-0.6t}) + 20.22245(e^{-0.78t}) - \frac{70605}{172}(e^{-0.35t})$$
$$+525(e^{-0.4t})$$

Integrando:

$$C_D = -100.4941(e^{-0.55\,t}) + \frac{950}{3}(e^{-0.6t}) - 25.9262(e^{-0.78t}) + 1172.8405(e^{-0.35t})$$
$$-\frac{2625}{2}(e^{-0.4t}) + C$$

Despejando la constante C, bajo condiciones de C_D=0 en t=0

$$C = (0) + 100.4941\left(e^{-0.55\,(0)}\right) - \frac{950}{3}\left(e^{-0.6(0)}\right) + 25.9262\left(e^{-0.78(0)}\right) - 1172.8405\left(e^{-0.35(0)}\right) + \frac{2625}{2}\left(e^{-0.4(0)}\right) = -50.5869$$

Por lo que C_D queda:

$$C_D = -100.4941(e^{-0.55\,t}) + \frac{950}{3}(e^{-0.6t}) - 25.9262(e^{-0.78t}) + 1172.8405(e^{-0.35t}) - \frac{2625}{2}(e^{-0.4t}) - 50.5869$$

La cual indica la concentración de D en el reactor en cualquier tiempo t.

- Despejando C'_H de la ecuación 8 y resolviendo:

$$C'_H = 0.15C_B$$

$$C'_H = 0.15\left[-\frac{14910}{23}(e^{-0.55\,t}) + \frac{12320}{3}(e^{-0.6t}) - 620.9638(e^{-0.78t}) + 7662.5583(e^{-0.35t}) - 10500(e^{-0.4t})\right]$$

$$C'_H = -\frac{4473}{46}(e^{-0.55\,t}) + 616(e^{-0.6t}) - 93.1446(e^{-0.78t}) + 1149.3837(e^{-0.35t}) - 1575(e^{-0.4t})$$

Integrando:

$$C_H = 176.79842(e^{-0.55\,t}) - \frac{3080}{3}(e^{-0.6t}) + 119.4162(e^{-0.78t}) - 3283.95343(e^{-0.35t}) + \frac{7875}{2}(e^{-0.4t}) + C$$

Despejando la constante C, bajo condiciones de C_H=0 en t=0

$$C = (0) - 176.79842\left(e^{-0.55\,(0)}\right) + \frac{3080}{3}\left(e^{-0.6(0)}\right) - 119.4162\left(e^{-0.78(0)}\right) + 3283.95343\left(e^{-0.35(0)}\right) - \frac{7875}{2}\left(e^{-0.4(0)}\right) = 76.9055$$

Por lo que C_H queda:

$$C_H = 176.79842(e^{-0.55\,t}) - \frac{3080}{3}(e^{-0.6t}) + 119.4162(e^{-0.78t}) - 3283.95343(e^{-035t}) + \frac{7875}{2}(e^{-0.4t}) + 76.9055$$

La cual indica la concentración de H en el reactor en cualquier tiempo t.

3.3 Aplicaciones en Transferencia de Calor.

Siempre que exista una diferencia de temperaturas en un cuerpo o entre cuerpos se habla de una transferencia de calor. Hay tres mecanismos en los que el calor se puede transferir; conducción, convección y radiación.

3.3.1 Transferencia de calor por conducción.

Cuando existe una diferencia de temperatura en un medio estacionario que puede ser un sólido o un fluido se utiliza el término, conducción para hacer referencia a la transferencia de calor que se producirá a través del medio, este flujo de calor presenta una relación directamente proporcional a la diferencia de temperatura dT, así como al área de transferencia de calor A, y una relación inversamente proporcional al espesor dx. De aquí se deduce la ecuación:

$$Q = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$q = \frac{Q}{A} = -k \cdot \frac{dT}{dx}$$

Que es conocida como ecuación de Fourier, donde k es una constante de proporcionalidad llamada conductividad térmica y esta especificada para cada material y q es el flux de calor que representa la cantidad de calor en un área determinada.

Para estudiar el uso de esta ecuación se proponen los siguientes ejemplos:

Ejemplo 10:

Una pieza de aluminio puro de 2m de espesor tiene una cara a 25ºC y la cara opuesta a 55ºC. Si la conducción térmica es 202 J/s·m·ºC, encontrar:

(a) La temperatura en la pieza, como una función de la distancia del espesor x.
(b) ¿Cuál es la tempera de la pieza de metal, a la mitad de su espesor?
(c) Graficar la temperatura de la pieza con respecto al espesor de esta y resaltar el punto anterior.

Formulación matemática. Sea T la temperatura de la pieza de metal después de x distancia. Luego dT/dx es la tasa de cambio de esta temperatura y está dada por:

$$q = -202\,\frac{J}{s \cdot m \cdot ℃} * \frac{dT}{dx}$$

Puesto que en la distancia cero la temperatura es de 25ºC, se tiene que $T = 25℃$ en $x = 0$. Así, la formulación matemática completa es: $-\frac{q}{202} = \frac{dT}{dx}$

Bajo condiciones iniciales: $T(0) = 25$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\{T'\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{q}{202}\right\}$$

$\mathcal{L}\{T'\} = -\frac{1}{202}\mathcal{L}\{q\}$

$(s\bar{T} - T) = -\frac{q}{202\cdot s}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{T} - 25 = -\frac{q}{202\cdot s}$

Simplificando:

$\bar{T} = -\frac{q}{202\, s^2} + \frac{25}{s}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{T}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{q}{202\, s^2} + \frac{25}{s}\right\} = -\frac{q}{202}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 25\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

Quedando: $T = -\frac{q}{202}(x) + 25$

En esta ecuación, q es una constante, bajo condiciones de T=55ºC en x=2 m:

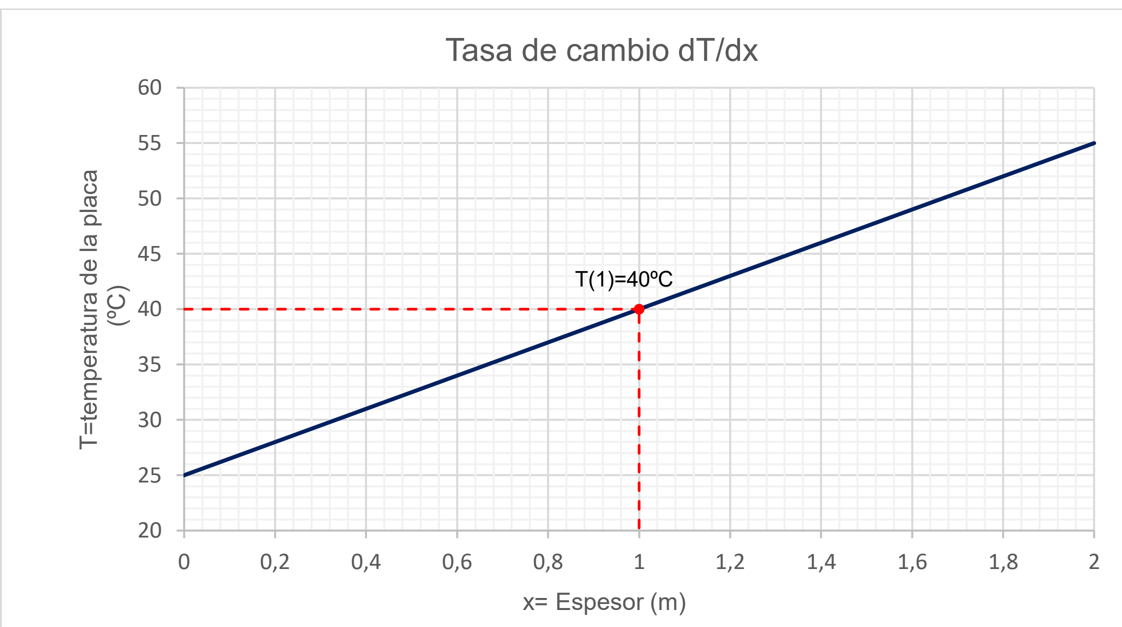
$55℃ = -\frac{q}{202\,\frac{J}{s\cdot m\cdot ℃}}(2\ m) + 25℃$

$q = \frac{55℃ - 25℃}{2\ m}\left(-202\,\frac{J}{s\cdot m\cdot ℃}\right) = -3{,}030\,\frac{J}{s\cdot m^2}$

a) Por lo tanto: $T = \frac{3{,}030}{202}(x) + 25$
b) La temperatura de la pieza de aluminio a 1 m de espesor:

$T = \frac{3{,}030\,\frac{J}{s\cdot m^2}}{202\,\frac{J}{s\cdot m\cdot ℃}}(1\ m) + 25℃ = 40℃$

c) La grafica 3.3.1 indica la temperatura de la pieza de aluminio con respecto al espesor de esta, señalando la temperatura de la pieza a mitad del espesor.



Gráfica 3.3.1 Temperatura de la pieza de aluminio con respecto al espesor.

3.3.2 Transferencia de calor por convección y radiación.

El término convección, se refiere a la transferencia de calor que ocurre entre un fluido y una superficie solida cuando están a diferentes temperaturas. Hay dos tipos de transferencia de calor por convección: convección natural en la cual el movimiento del fluido resulta de causas naturales como la diferencia de densidades y la convección forzada en donde una fuerza motriz exterior mueve el fluido sobre la superficie que se encuentra a temperatura distinta.

La radiación se presenta en todas las superficies con temperatura finita, ya que emiten energía en forma de ondas electromagnéticas, no requiere un medio a diferencia de la conducción y convección.

En esta sección se estudiará una de las aplicaciones más importantes que existen en las ecuaciones diferenciales; la ley de enfriamiento de Newton que nos dice que la rapidez con la que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente que lo rodea y matemáticamente se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = h\,(T - T_m)$$

Donde T es la temperatura del cuerpo, Tm es la temperatura del medio y k es una constante conocida.
Para ver el uso de esta ecuación se proponen los siguientes problemas:

Ejemplo 11:
La carne puesta en un congelador se enfría con una rapidez proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del congelador. Si un asado que se encuentra a la temperatura ambiente de 68ºF se introduce en un congelador de 20ºF y si la temperatura del asado después de 2 horas es de 40ºF, encontrar:

(a) La temperatura de la carne en cualquier tiempo.
(b) ¿Cuál es la temperatura de la carne después de 5 horas?
(c) Graficar la temperatura de la carne en el congelador con respecto al tiempo.

Formulación matemática. Sea T la temperatura del asado en el congelador después de t minutos. Luego dT/dt es la tasa de cambio de esta temperatura y está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = h\,(T - T_m) = h(T) - h(20)$$

Puesto que inicialmente el asado se encuentra a una temperatura de 68ºF, se tiene que $T = 68$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$$T' - kT = -(20)\,h$$

Bajo condiciones iniciales: $T(0) = 68$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{T' - hT\} = \mathcal{L}\{-20\,h\}$

$\mathcal{L}\{T'\} - h\,\mathcal{L}\{T\} = -\mathcal{L}\{20\,h\}$

$(s\bar{T} - T) - h\bar{T} = -\frac{20\,h}{s}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{T} - 68 - h\bar{T} = -\frac{20\,h}{s}$

Simplificando:

$\bar{T} = -\frac{20\,h}{s(s-h)} + \frac{68}{s-h} = \frac{20}{s} + \frac{48}{s-h}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{T}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{s} + \frac{48}{s-h}\right\} = 20\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 48\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-h}\right\}$

Quedando: $T = 48(e^{ht}) + 20$

Despejando la constante h, bajo condiciones de $T = 40°\text{F}$ en $t = 2\,hr$

$40 = 48\left(e^{h(2)}\right) + 20$

$\frac{40 - 20}{48} = e^{2(h)}$

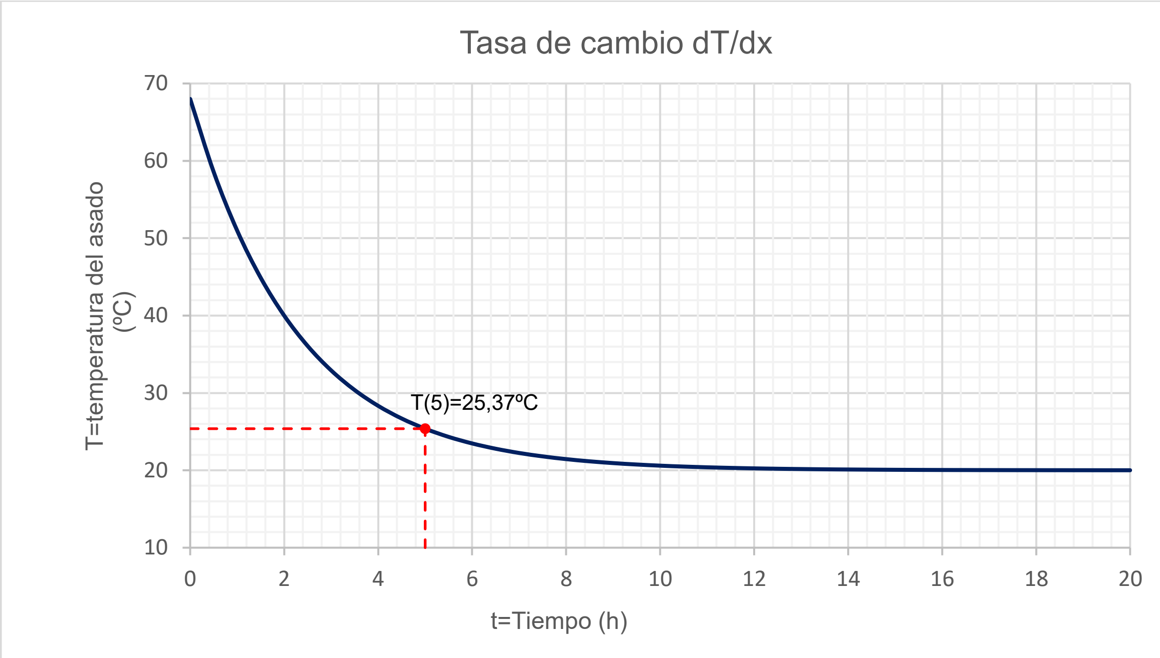
$h = \frac{\text{In}\,\frac{5}{12}}{2}$

a) Por lo tanto: $T = 48\left(e^{\frac{\text{In}\frac{5}{12}}{2}t}\right) + 20$

b) La temperatura de la carne después de 5 horas:

$T = 48\left(e^{\frac{\text{In}\frac{5}{12}}{2}(5)}\right) + 20 = 25.3791°\text{F}$

c) La grafica 3.3.2 indica el descenso de la temperatura del asado con respecto al tiempo.



Gráfica 3.3.2 Descenso de la temperatura del asado con respecto al tiempo.

Ejemplo 12:

Se calienta etanol a su temperatura de punto de ebullición que es de 78.4ºC. El etanol se remueve del calor y se guarda en una cámara que se encuentra a una temperatura constante de 50ºC. Después de 3 min la temperatura del etanol es 68.4ºC.

(a) Encontrar la temperatura del etanol en cualquier instante del tiempo.
(b) ¿Cuál es la temperatura del etanol después de 6 min?
(c) ¿Cuándo la temperatura del etanol será de 55ºC?
(d) Graficar la temperatura del etanol en la cámara con respecto al tiempo y resaltar los puntos antes mencionados.

Formulación matemática. Sea T la temperatura del etanol en la cámara después de t minutos. Luego dT/dt es la tasa de cambio de esta temperatura y está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = h\,(T - T_m) = h(T) - h(50)$$

Puesto que inicialmente el etanol se encuentra a su temperatura de ebullición de 78.4ºC, así la formulación matemática completa es:

$$T' - hT = -50\,h$$

Bajo condiciones iniciales: $T(0) = 78.4$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{T' - hT\} = \mathcal{L}\{-50\,(h)\}$

$\mathcal{L}\{T'\} - h\,\mathcal{L}\{T\} = -\mathcal{L}\{50\,(h)\}$

$(s\bar{T} - T) - h\bar{T} = -\frac{50\,(h)}{s}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{T} - 78.4 - h\bar{T} = -\frac{50\,(h)}{s}$

Simplificando:

$\bar{T} = -\frac{50\,(h)}{s(s-h)} + \frac{78.4}{s-h} = \frac{50}{s} + \frac{28.4}{s-h}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{T}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{50}{s} + \frac{28.4}{s-h}\right\} = 50\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 28.4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-h}\right\}$

Quedando: $T = 28.4(e^{ht}) + 50$

Despejando la constante h, bajo condiciones de $T = 68.4℃$ en $t = 3\,min$.

$68.4 = 28.4\left(e^{h(3)}\right) + 50$

$$\frac{68.4 - 50}{28.4} = e^{3(h)}$$

$$h = \frac{\text{In}\,\frac{46}{71}}{3}$$

a) Por lo tanto: $T = 28.4\left(e^{\frac{\text{In}\frac{46}{71}}{3}t}\right) + 50$

b) La temperatura del etanol después de 6 min:

$$T = 28.4\left(e^{\frac{\text{In}\frac{46}{71}}{3}(6)}\right) + 50 = 61.9211℃$$

c) ¿Cuándo la temperatura del etanol será de 55ºC?

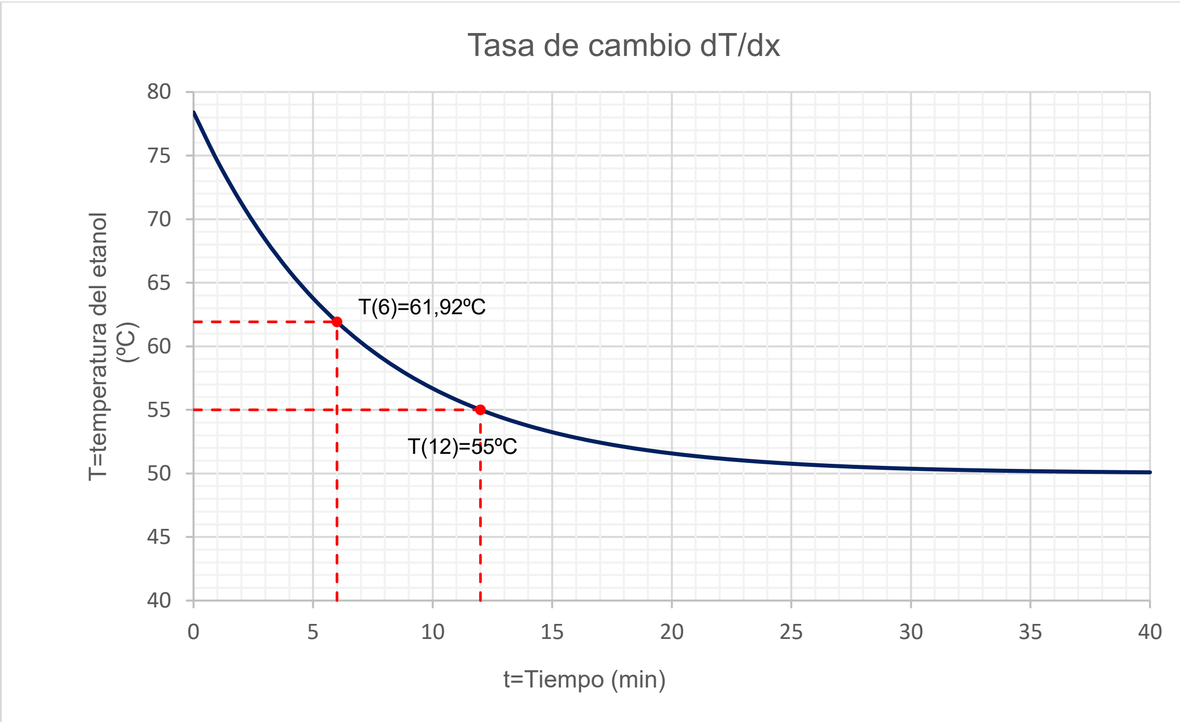
Despejando la variable tiempo de la ecuación de temperatura:

$$t = \frac{3\,\text{In}\,\frac{T-50}{28.4}}{\text{In}\,\frac{46}{71}}$$

Sustituyendo la temperatura y resolviendo:

$$t = \frac{3\,\text{In}\,\frac{55-50}{28.4}}{\text{In}\,\frac{46}{71}} = 12.0055\text{ min}$$

d) La grafica 3.3.3 indica el enfriamiento de la temperatura del etanol con respecto al tiempo.



Gráfica 3.3.3 Temperatura del etanol con respecto al tiempo.

Ejemplo 13:

Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 95ºF al exterior, ahí la temperatura es de 15ºF, después de 2 minutos el termómetro marca 40ºF.

(a) ¿Cuánto marcara el termómetro en 4 min?
(b) ¿Cuánto tardara el termómetro en alcanzar la temperatura de 20ºF?
(c) Graficar la temperatura del termómetro y resaltar los puntos antes mencionados.

Formulación matemática. Sea T la temperatura del termómetro en el exterior después de t minutos. Luego dT/dt es la tasa de cambio de esta temperatura y está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = h\,(T - T_m) = h(T) - h(15)$$

Puesto que inicialmente el termómetro se encuentra a la temperatura del aire de 95ºF, así la formulación matemática completa es:

$$T' - hT = -15\,(h)$$

Bajo condiciones iniciales: $T(0) = 95$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{T' - hT\} = \mathcal{L}\{-15\,(h)\}$

$\mathcal{L}\{T'\} - h\,\mathcal{L}\{T\} = -\mathcal{L}\{15\,(h)\}$

$(s\bar{T} - T) - h\bar{T} = -\frac{15\,(h)}{s}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{T} - 95 - h\bar{T} = -\frac{15\,(h)}{s}$

Simplificando:

$\bar{T} = -\frac{15\,h}{s(s-h)} + \frac{95}{s-h} = \frac{15}{s} + \frac{80}{s-h}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{T}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{15}{s} + \frac{80}{s-h}\right\} = 15\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 80\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-h}\right\}$

Quedando: $T = 80(e^{kt}) + 15$

Despejando la constante h, bajo condiciones de T=40ºF en t=2 min

$40 = 80\left(e^{h(2)}\right) + 15$

$$\frac{40-15}{80} = e^{2(h)}$$

$$\text{In}\,\frac{5}{16} = 2(h)$$

$$h = \frac{\text{In}\,\frac{5}{16}}{2}$$

a) La temperatura del termómetro después de 4 min:

$$T = 80\left(e^{\frac{\text{In}\frac{5}{16}}{2}(4)}\right) + 15 = 22.8125°\text{F}$$

b) ¿Cuándo la temperatura del termómetro será de 20ºF?

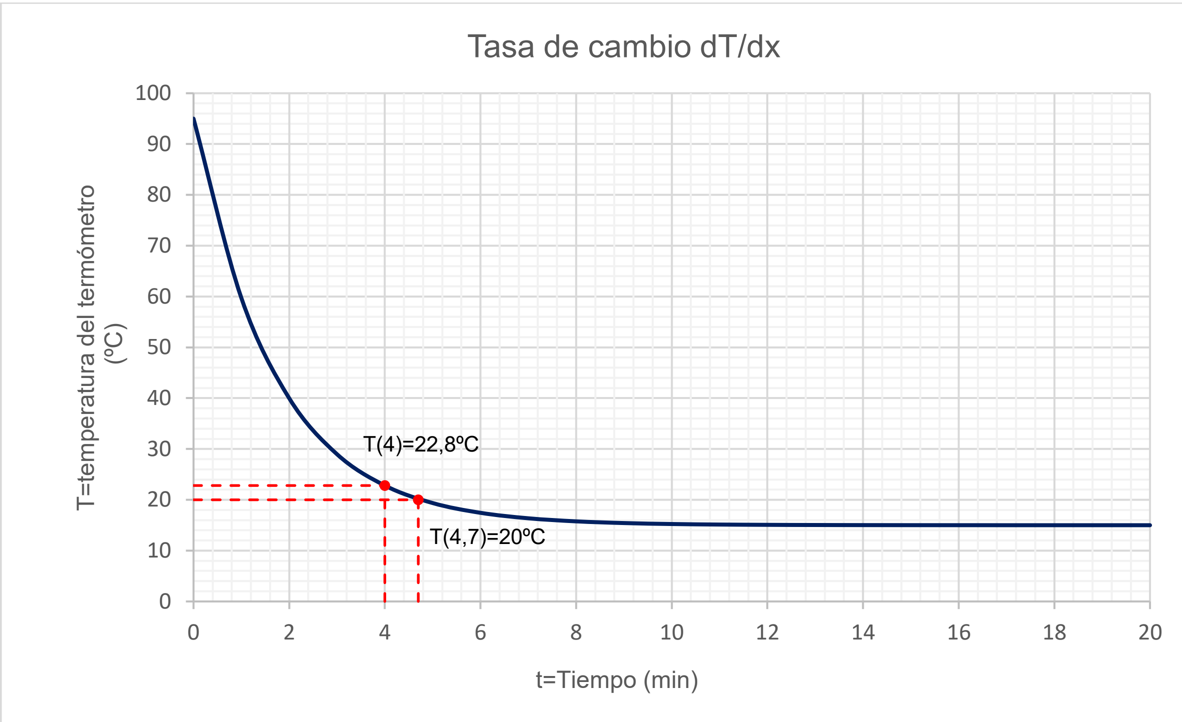
Despejando la variable tiempo de la ecuación de temperatura:

$$t = \frac{2\,\text{In}\frac{T-15}{80}}{\text{In}\,\frac{5}{16}}$$

Sustituyendo la temperatura y resolviendo:

$$t = \frac{2\ \mathrm{In}\dfrac{20-15}{80}}{\mathrm{In}\ \dfrac{5}{16}} = 4.767376\ \mathrm{min}$$

c) La grafica 3.3.4 indica el descenso de la temperatura del termómetro con respecto al tiempo.



Gráfica 3.3.4 Temperatura del termómetro con respecto al tiempo.

3.4 Aplicaciones en la Ingeniería Eléctrica.

La electricidad proviene del movimiento de partículas llamadas electrones y protones, y produce principalmente tres efectos: luminosos, magnéticos y térmicos. El medio físico para lograr esta producción de fenómenos es el circuito eléctrico y consta básicamente de una fuente de energía, un conductor y un dispositivo que aproveche la energía eléctrica, la presión que ejerce esta fuente de energía se le denomina tensión o voltaje. Los conductores pueden tener alta o baja capacidad para dejar fluir la energía eléctrica a estos términos se les conoce como conductancia y resistencia respectivamente, es decir a mayor conductancia existe una menor resistencia y a mayor resistencia menor conductancia. Para introducir una mayor resistencia al circuito eléctrico se utiliza uno o más resistores.

Un circuito eléctrico puede ser continuo o alterno, un circuito es continuo (c-c), cuando la corriente eléctrica fluye en la misma dirección y alterno cuando la corriente eléctrica cambia de dirección (c-a).

En los circuitos de corriente continua c-c existe una relación entre la tensión, corriente y resistencia, esta relación se conoce como ley de Ohm y nos dice: *la corriente es directamente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia.* Y se expresa según la ecuación:

$$\mathrm{I} = \mathrm{E}/\mathrm{R}$$

Donde la corriente (I) es igual a la tensión (E) dividida entre la resistencia (R). Con unidades de medición Ampares (A), Volts (V) y Ohms (Ω) respectivamente.

Se dice que un circuito eléctrico está abierto cuando no permite el paso de la corriente eléctrica, y cerrado cuando permite dicho flujo. En un circuito la corriente eléctrica puede seguir solo una trayectoria, a este tipo de circuito se le conoce como circuito en serie (Figura 3.4.1). En cambio, un circuito en paralelo es aquel en el que existen uno o más puntos donde la corriente eléctrica se separa y sigue distintas trayectorias (Figura 3.4.2).

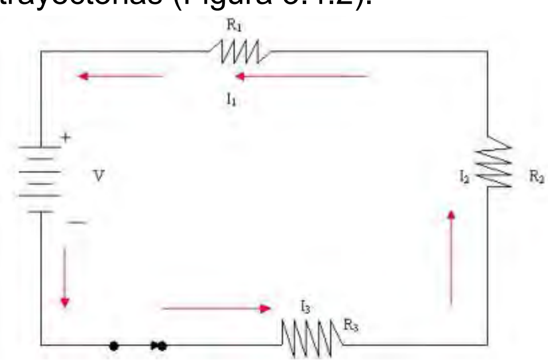


Figura 3.4.1 Circuito eléctrico en serie

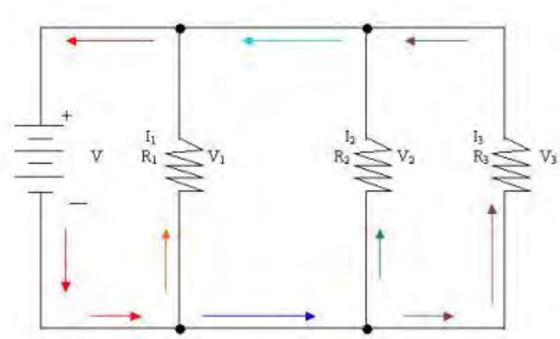


Figura 3.4.2 Circuito eléctrico en paralelo

La primera ley de Kirchhoff nos explica que *la suma algebraica de las corrientes eléctricas en un circuito paralelo es igual a cero.*

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = I_1 + I_2 + \cdots I_n = 0$$

3.4.1 Circuitos RL

El circuito eléctrico pose una propiedad que se opone a cualquier cambio de dirección de la corriente eléctrica, esta propiedad es conocida como inductancia, para introducir inductancia en el circuito se embobina un conductor, el cual recibe el nombre de inductor. Los circuitos que contienen tanto resistencia (R) como inductancia (L) se llaman circuitos RL, están conectados en serie o en paralelo (Figura 3.4.3) y pueden constar de unos o más resistores y más de una bobina.

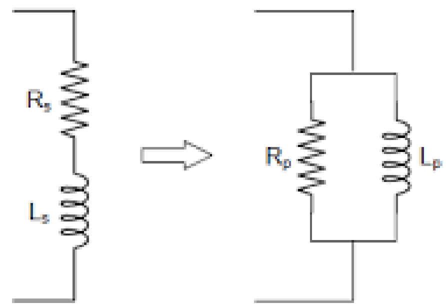


Figura 3.4.3 Circuito RL en serie y paralelo

Un inductor actúa generando un nuevo voltaje o voltaje inducido para contrarrestar la dirección de la corriente, este voltaje inducido también es conocido como fuerza electromotriz o fem y se puede determinar conociendo el valor de la inductancia (L) dada en Henrios (H), así como el cambio de la corriente en un intervalo de tiempo ($\mathrm{dI/dt}$):

$$fem = \mathrm{L}\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}}$$

Este tipo de circuitos suelen ser más complejos, por lo que la ley de Ohm es imposible de aplicar. Por lo tanto, para resolver este tipo de circuitos es necesario hacer uso de la segunda ley de Kirchhoff, la cual nos explica que *la suma algebraica de las caídas de tensión o voltaje en cualquier trayectoria cerrada es igual al voltaje aplicado*. Y se expresa por la siguiente ecuación:

$$\sum \mathrm{E} = \sum \mathrm{R\,I}$$

Para ver el uso de esta ecuación y explicar el circuito RL se propone el siguiente problema, utilizando la transformada de Laplace para resolverlo.

Ejemplo 14:
Se tiene un circuito RL en serie (Figura 3.4.4), en donde se conecta una bobina con resistencia 12 Ω e inductancia 3 H, con un generador de voltaje E(t). Determine la corriente (I) que fluye en el tiempo t (s), después de que se cerró el circuito, si el generador de voltaje E(t) es:

$$\mathrm{E(t) = \ 12\ (batería\ de\ 12\ V)}$$

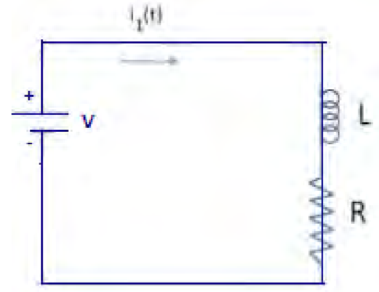


Figura 3.4.4 Circuito RL en serie

Además, graficar la corriente con respecto al tiempo y resaltar la corriente máxima e indicar que dirección tomo la corriente, en el circuito eléctrico.

Formulación matemática. Sea E(t) el suministro de voltaje que es igual a la suma de caídas de voltaje del inductor y resistor en el circuito. Por lo tanto, la ecuación está dada por:

$$L\frac{dI}{dt} \quad + \quad RI = E(t)$$
$$voltaje\ del\ inductor\ +\ \ voltaje\ del\ resistor = voltaje\ aplicado$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de resistencia, inductancia y voltaje aplicado:

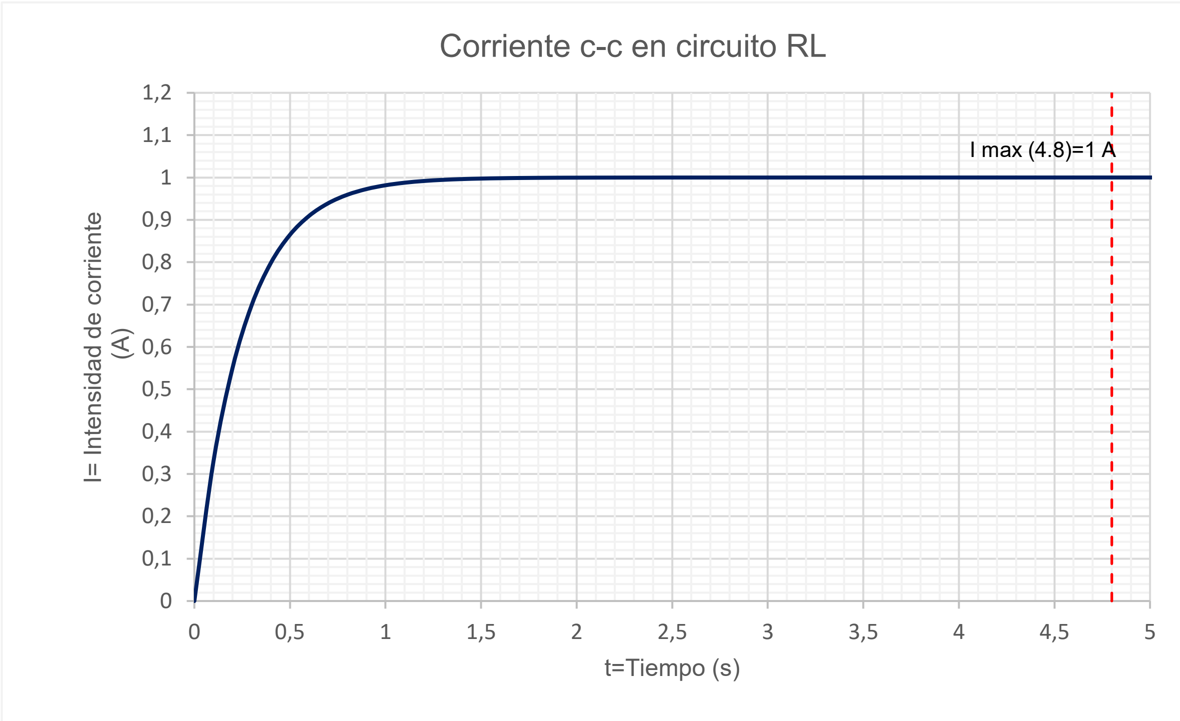
a) $3\frac{dI}{dt} + 12\,I = 12$

Puesto que en tiempo cero el circuito se encuentra abierto, no existe flujo de corriente eléctrica por lo que: $I(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:
$\mathcal{L}\{3I' + 12I\ \} = \mathcal{L}\{12\}$
$3\mathcal{L}\{I'\} + 12\ \mathcal{L}\{I\} = \mathcal{L}\{12\}$
$3(s\bar{I} - I) + 12\bar{I} = \frac{12}{s}$
Sustituyendo las condiciones iniciales:
$3s\bar{I} - 3(0) + 12\bar{I} = \frac{12}{s}$
Simplificando:
$\bar{I} = \frac{12}{s(3s+12\,)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}$
Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:
$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{I}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$

Quedando: $I = 1 - e^{-4t}$
La cual indica la corriente eléctrica en el circuito en cualquier tiempo t.

La grafica 3.4.1 indica la Intensidad de corriente eléctrica del circuito con respecto al tiempo, fluyendo en una sola dirección considerándose así un circuito de corriente continua, con una corriente máxima de 1 A al tiempo 4.8 s.



Gráfica 3.4.1 Intensidad de corriente eléctrica con respecto al tiempo en un circuito RL de corriente continua.

Ejemplo 15:
Del ejemplo anterior, considerar ahora que el generador de voltaje es:

$$\mathrm{E(t)} = 240\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,100\pi\mathrm{t}\ (240\ \mathrm{V}, 50\ \mathrm{ciclos})$$

Determine la corriente (I) que fluye en el tiempo t (s), después de que se cerró el circuito, si el generador de voltaje y además graficar la corriente con respecto al tiempo y resaltar la corriente máxima e indicar que dirección tomo la corriente, en el circuito eléctrico.
Puesto que en tiempo cero el circuito se encuentra abierto, no existe flujo de corriente eléctrica por lo que: $I(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\{3I' + 12I\} = \mathcal{L}\{240\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,100\pi\mathrm{t}\}$$

$$3\mathcal{L}\{I'\} + 12\,\mathcal{L}\{I\} = 240\sqrt{2}\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,100\pi\mathrm{t}\}$$

$$3(s\bar{I} - I) + 12\bar{I} = 240\sqrt{2}\left(\frac{100\pi}{s^2+(100\pi)^2}\right)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$3s\bar{I} - 3(0) + 12\bar{I} = \frac{24{,}000\sqrt{2}\pi}{s^2+(100\pi)^2}$$

Simplificando:

$$\bar{I} = \frac{24{,}000\sqrt{2}\pi}{[s^2+(100\pi)^2][3s+12]} = \frac{12\sqrt{2}\pi}{5\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)(3s+12)} - \frac{4\sqrt{2}\pi\, s}{5\left[\pi^2+\frac{1}{625}\right][s^2+(100\pi)^2]} + \frac{16\sqrt{2}\pi}{5\left[\pi^2+\frac{1}{625}\right][s^2+(100\pi)^2]}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

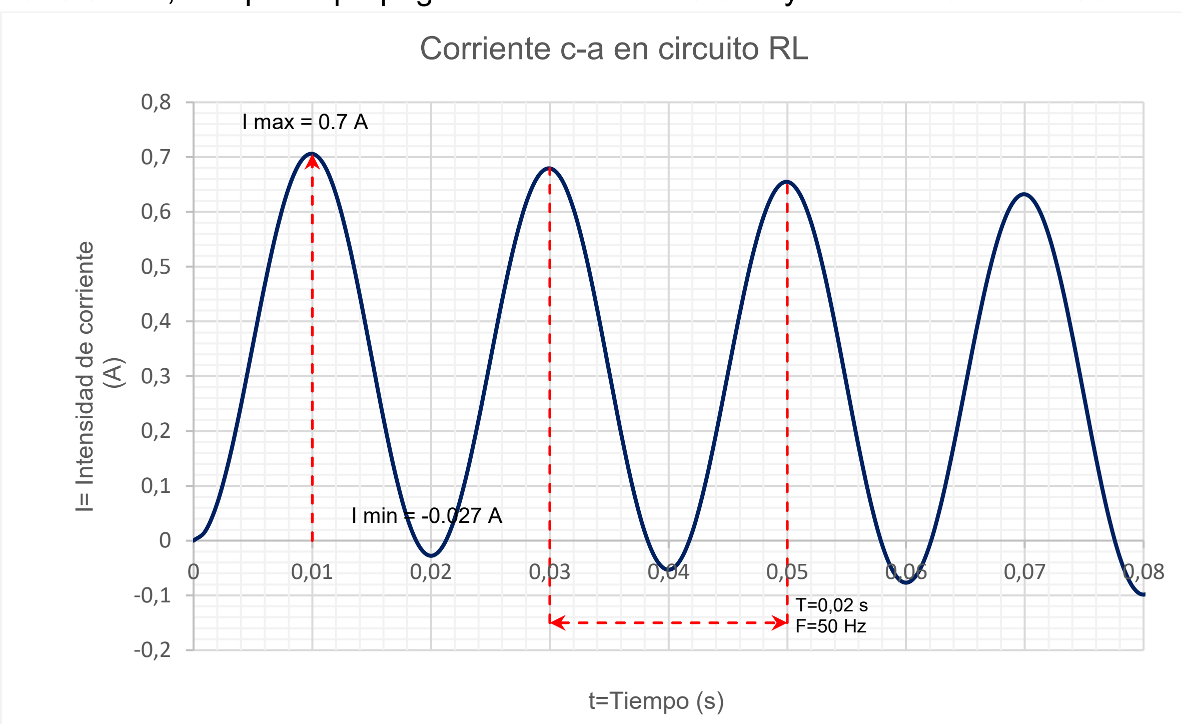
$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{I}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12\sqrt{2}\pi}{5\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)(3s+12)} - \frac{4\sqrt{2}\pi\, s}{5\left[\pi^2+\frac{1}{625}\right][s^2+(100\pi)^2]} + \frac{16\sqrt{2}\pi}{5\left[\pi^2+\frac{1}{625}\right][s^2+(100\pi)^2]}\right\}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}\pi}{5\cdot 3\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}s+\frac{12}{3}}\right\} - \frac{4\sqrt{2}\pi}{5\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(100\pi)^2}\right\} + \frac{16\sqrt{2}\pi}{5\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)100\pi}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot 100\pi}{s^2+(100\pi)^2}\right\}$$

Quedando: $I = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)}(e^{-4t}) - \frac{4\sqrt{2}\pi}{5\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)}(\cos 100\pi t) + \frac{4\sqrt{2}}{125\left(\pi^2+\frac{1}{625}\right)}(\operatorname{sen} 100\pi t)$

La cual indica la corriente eléctrica en el circuito en cualquier tiempo t.

La grafica 3.4.2 indica la Intensidad de corriente eléctrica del circuito eléctrico con respecto al tiempo, fluyendo en diferentes direcciones considerándose así un circuito de corriente alterna, con una corriente máxima de 0.7 A, corriente mínima de -0.027 A, tiempo de propagación de onda de 0.02 s y una frecuencia de 50 Hz.



Gráfica 3.4.2 Intensidad de corriente eléctrica con respecto al tiempo en un circuito RL de corriente alterna.

Ejemplo 16:

Se tiene un circuito RL en paralelo (Figura 3.4.5), en donde se conectan tres bobinas con resistencia R_1=15 Ω, R_2=65 Ω y R_3=120 Ω e inductancias L_1 =3 H y L_2= 2.5 H con un generador de voltaje E(t)=300 Volts. Determine:

a) Las corrientes (I) que fluyen en el tiempo t (s), después de que se cerró el circuito.
b) Graficar las corrientes con respecto al tiempo.
c) Indicar que dirección toman las corrientes en el circuito eléctrico.

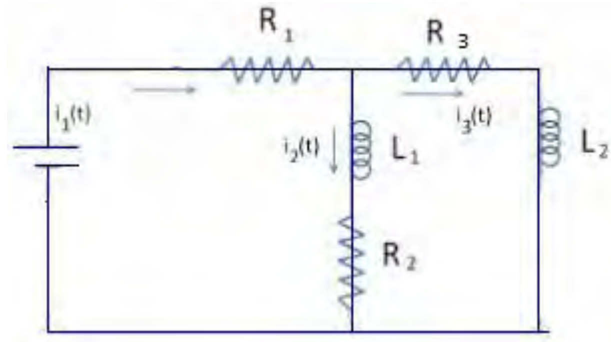


Figura 3.4.5 Circuito RL conectado en paralelo

Formulación matemática. Sea E(t) el suministro de voltaje que es igual a la suma de caídas de voltaje de los inductores y resistores en el circuito en paralelo. Por lo tanto, las ecuaciones están dadas por:

$$L_1\frac{dI_2}{dt} + R_1I_1 + R_2I_2 = E(t)$$
$$L_2\frac{dI_3}{dt} + R_1I_1 + R_3I_3 = E(t)$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Sustituyendo la corriente I_1 en las ecuaciones anteriores:

$$L_1\frac{dI_2}{dt} + (R_1 + R_2)I_2 + R_1I_3 = E(t)$$
$$L_2\frac{dI_3}{dt} + (R_1 + R_3)I_3 + R_1I_2 = E(t)$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores los valores de resistencia, inductancia y voltaje aplicado:

$$3\frac{dI_2}{dt} + 80\, I_2 + 15\, I_3 = 300 \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1)$$
$$2.5\frac{dI_3}{dt} + 135\, I_3 + 15I_2 = 300 \dots\dots\dots\dots\dots.(2)$$

Puesto que en tiempo cero el circuito se encuentra abierto, no existe flujo de corriente eléctrica por lo que: $I_2(0) = I_3(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$$\mathcal{L}\{3I'_2 + 80\, I_2 + 15I_3\} = \mathcal{L}\{300\} \qquad \mathcal{L}\{2.5I'_3 + 135I_3 + 15\, I_2\} = \mathcal{L}\{300\}$$

$$3(s\bar{I}_2 - I_2) + 80\,\bar{I}_2 + 15\,\bar{I}_3 = \frac{300}{s} \qquad 2.5(s\bar{I}_3 - I_3) + 135\,\bar{I}_3 + 15\,\bar{I}_2 = \frac{300}{s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$$3s\bar{I}_2 - 3(0) + 80\,\bar{I}_2 + 15\,\bar{I}_3 = \frac{300}{s} \qquad 2.5\,s\bar{I}_3 - 2.5(0) + 135\,\bar{I}_3 + 15\,\bar{I}_2 = \frac{300}{s}$$

$$3s\bar{I}_2 + 80\,\bar{I}_2 + 15\,\bar{I}_3 = \frac{300}{s} \ldots\ldots..(3) \qquad 2.5s\bar{I}_3 + 135\,\bar{I}_3 + 15\,\bar{I}_2 = \frac{300}{s} \ldots....(4)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\bar{I}_2$ de la ecuación 3:

$$\bar{I}_2 = \frac{300}{s(3s+80)} - \frac{15\bar{I}_3}{3s+80}$$

- Sustituyendo $\bar{I}_2$ en la ecuación 4:

$$2.5s\bar{I}_3 + 135\,\bar{I}_3 + 15\left[\frac{300}{s(3s+80)} - \frac{15\bar{I}_3}{3s+80}\right] = \frac{300}{s}$$

- Simplificando y despejando $\bar{I}_3$:

$$\bar{I}_3\left[2.5s - \frac{225}{(3s+80)} + 135\right] = \frac{300}{s} - \frac{4500}{s(3s+80)}$$

$$\bar{I}_3 = 300\left[\frac{\frac{1}{s}}{\frac{7.5\,s^2+605s+10575}{3s+80}}\right] - 4500\left[\frac{\frac{1}{s(3s+80)}}{\frac{7.5\,s^2+605s+10575}{3s+80}}\right] = \frac{120s+2600}{s(s+25.61)(s+55.0567)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{I}_3\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{120s+2600}{s(s+25.61)(s+55.0567)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{I}_3\} = 1.8439\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 0.6275\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+25.61}\right\} - 2.4714\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+55.0567}\right\}$$

Quedando: $I_3 = 0.6275(e^{-25.61\,t}) - 2.4714(e^{-55.0567\,t}) + 1.8439$

La cual nos indica la cantidad de corriente tres en cualquier tiempo.

- Despejando I_2 de la ecuación 2 y resolviendo:

$$I_2 = 20 - \frac{1}{6}I'_3 - 9\,I_3$$

$$I'_3 = -16.0703(e^{-25.61\,t}) + 136.0671(e^{-55.0567\,t})$$

$$I_2 = 20 - \frac{1}{6}[-16.0703(e^{-25.61\,t}) + 136.0671(e^{-55.0567\,t})]$$

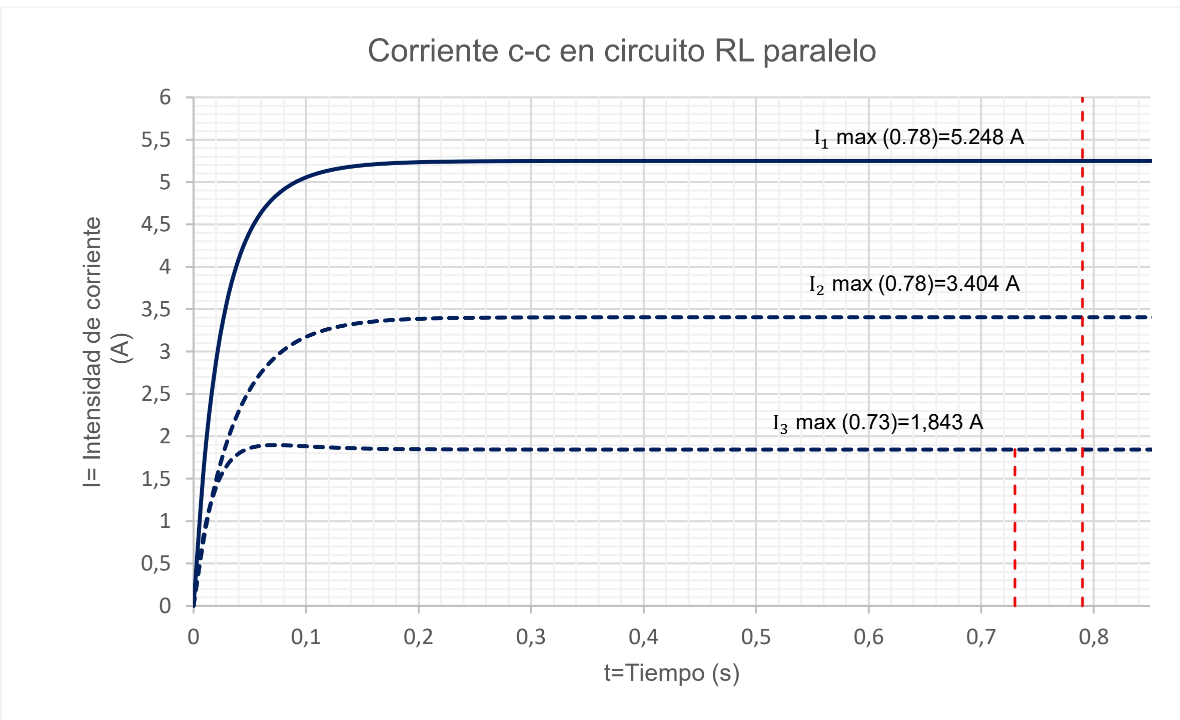
$$-9[\,0.6275(e^{-25.61\,t}) - 2.4714(e^{-55.0567\,t}) + 1.8439\,]$$

Quedando:
$I_2 = -2.9691(e^{-25.61\,t}) - 0.43525(e^{-55.0567\,t}) + 3.4049$
La cual nos indica la cantidad de corriente dos en cualquier tiempo.

- La corriente uno es la suma de las dos corrientes anteriores, por lo tanto:

$I_1 = I_2 + I_3$
$I_1 = -2.9691(e^{-25.61\,t}) - 0.43525(e^{-55.0567\,t}) + 3.4049$
$+0.6275(e^{-25.61\,t}) - 2.4714(e^{-55.0567\,t}) + 1.8439$
Quedando:
$I_1 = -2.3416(e^{-25.61\,t}) - 2.90665(e^{-55.0567\,t}) + 5.2488$
La cual indica la cantidad de corriente uno en cualquier tiempo.

La grafica 3.4.3 indica la Intensidades de corriente eléctrica del circuito eléctrico paralelo con respecto al tiempo, fluyendo las corrientes en una sola dirección considerándose así un circuito de corriente continua, con una corriente máxima de 5.248 A.



Gráfica 3.4.3 Intensidad de corriente eléctrica con respecto al tiempo, en un circuito RL paralelo de corriente continua.

3.4.2 Circuitos RC

La capacitancia es la propiedad de un circuito eléctrico que le permite mediante un campo electrostático almacenar energía eléctrica y liberar esta energía posteriormente. Se Puede introducir capacitancia a un circuito eléctrico con un dispositivo llamado capacitores.

La capacitancia está definida por la siguiente ecuación:

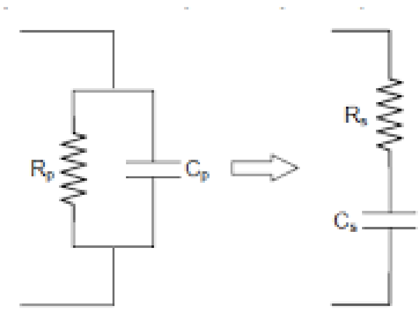


Figura 3.4.6 Circuito RC en paralelo y serie

$$C = Q/E$$

Donde C es la capacitancia, dada en farades (F), Q es la carga en una placa medida en coulombs (C) y E es la caída de tensión del capacitor. Entre la carga Q existe una relación con la corriente: $I = \frac{dQ}{dt}$

Un circuito con resistencia (R) y capacitancia (C) se conoce como un circuito RC y pueden estar conectados en serie o en paralelo. (Figura 3.4.6).

Al conectar el capacitor en un circuito, inicialmente se encontrará descargado es decir no contiene energía eléctrica por lo tanto $Q = 0$ en $t = 0$. Cuando comienza a fluir la corriente eléctrica empezará a cargarse el capacitor, de forma que una vez alcanzada la carga máxima, la intensidad de corriente en el circuito es cero.

Para ver el uso de esta ecuación y explicar el circuito RC se propone el siguiente problema, utilizando la transformada de Laplace para resolverlo.

Ejemplo 17:

Se tiene un circuito RC en serie, en donde se conecta una resistencia de 200 Ω y un capacitor de 2.5×10^{-4} F, con un generador de voltaje E(t) (Figura 3.4.7).

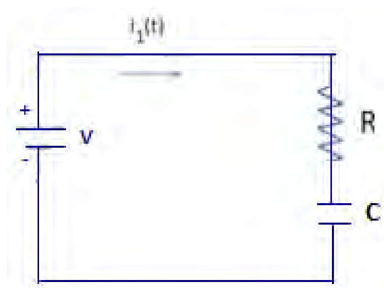


Figura 3.4.7 Circuito RC en serie

Determine la carga del capacitor (Q) y la corriente que fluye en el tiempo t (s), después de que se cerró el circuito, si el generador de voltaje E(t) está dado por:

$$E(t) = 100e^{-5t} \text{ (Volts)}$$

Al igual graficar la carga del capacitor y la corriente con respecto al tiempo y resaltar el punto en que la carga llega a su máximo y la intensidad de corriente a cero amperes, indicando que dirección toma la corriente del circuito RC.

Formulación matemática. Sea E(t) el suministro de voltaje que es igual a la suma de caídas de voltaje del capacitor y resistor en el circuito. Por lo tanto, la ecuación está dada por:

$$R\frac{dQ}{dt} \quad + \quad \frac{Q}{C} = E(t)$$

$$voltaje\ del\ resistor\ +\ \ voltaje\ del\ capacitor = voltaje\ aplicado$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de resistencia, capacitancia y voltaje aplicado: $200\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{2.5\times10^{-4}} = 100e^{-5t}$

En tiempo cero la carga del capacitor es cero, por lo tanto:

$Q(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\left\{200Q' + \frac{Q}{2.5\times10^{-4}}\right\} = \mathcal{L}\{100e^{-5t}\}$$

$$200\mathcal{L}\{Q'\} + 4000\ \mathcal{L}\{Q\} = 100\mathcal{L}\{e^{-5t}\}$$

$$200(s\bar{Q} - Q) + 400\bar{Q} = 100\frac{1}{s+5}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$200s\bar{Q} - 200(0) + 4000\bar{Q} = \frac{100}{s+5}$$

Simplificando:

$$\bar{Q} = \frac{100}{(s+5)(200s+4000\ )} = \frac{1}{30(s+5)} - \frac{20}{3(200s+4000)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{Q}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{30(s+5)} - \frac{20}{3(200s+4000)}\right\} = \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} - \frac{20}{3\cdot200}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{200\cdot\frac{1}{200}}{\frac{200}{200}s+\frac{4000}{200}}\right\}$$

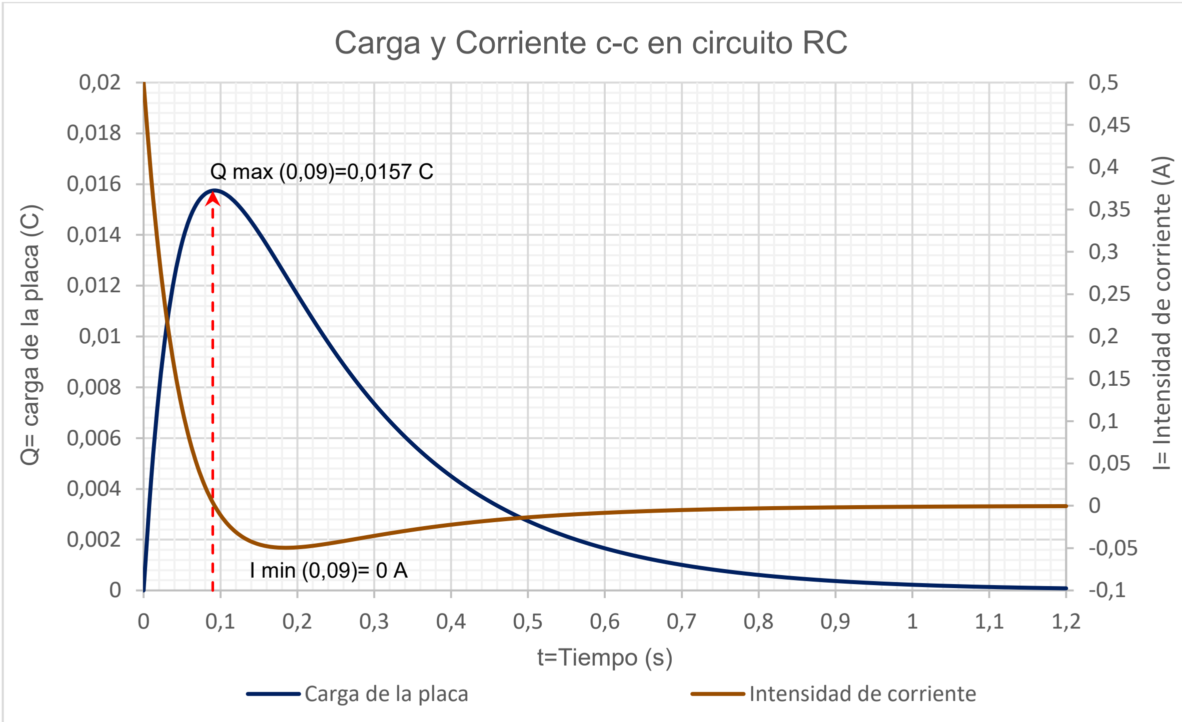
Quedando: $Q = \frac{1}{30}(e^{-5t}) - \frac{1}{30}(e^{-20t})$

La relación que existe entre la carga Q y la corriente I, está dada por:

$I = \frac{dQ}{dt}$; Por lo que al derivar Q se obtiene I:

$$I = -\frac{1}{6}(e^{-5t}) + \frac{2}{3}(e^{-20t})$$

La grafica 3.4.4 indica la carga e Intensidad de corriente eléctrica del circuito eléctrico en serie con respecto al tiempo, fluyendo la corriente en una sola dirección considerándose así un circuito de corriente continua, con una carga máxima de 0.0157 C al tiempo de 0.09 s.



Gráfica 3.4.4 Carga e Intensidad de corriente eléctrica con respecto al tiempo, en un circuito RC en serie de corriente continua.

3.4.3 Circuitos RLC

Se le conoce como circuito RLC a aquellos circuitos que tienen las tres propiedades; Inductancia (L), capacitancia (C) y resistencia (R) y pueden estar conectadas en serie o en paralelo.

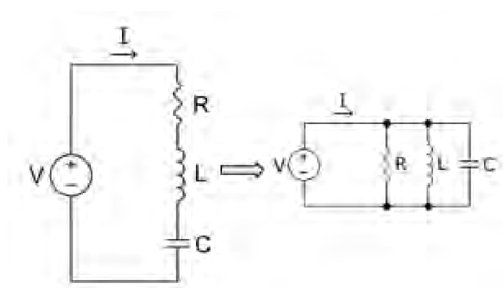


Figura 3.4.8 Circuito RLC en serie y paralelo

Ejemplo 18:

Encuentre la carga en el capacitor de un circuito RLC en serie (Figura 3.4.8.), cuando la inductancia L=5/3 H, la resistencia R=15 Ω, la capacitancia C=1/30 F, la carga en tiempo cero Q (0)=0 C y la corriente en tiempo cero I(0)=0 A.
si el generador de voltaje E(t) es:

$$\mathrm{E(t)} = 300 \ \mathrm{Volts}$$

Graficar la carga del capacitor y la corriente con respecto al tiempo y resaltar el punto en que la carga llega a su máximo y la intensidad de corriente a cero amperes, indicando que dirección toma la corriente del circuito RCL.

Formulación matemática. Sea E(t) el suministro de voltaje que es igual a la suma de caídas de voltaje del inductor, capacitancia y resistor en el circuito. Por lo tanto, la ecuación está dada por:

$$L\frac{dI}{dt} \quad + \quad RI \quad + \quad \frac{Q}{C} = E(t)$$

$$voltaje\ inductor + voltaje\ resistor + voltaje\ capacitor = voltaje\ aplicado$$

La relación que existe entre la carga Q y la corriente I, está dada por:

$I = \frac{dQ}{dt}$; Por lo que al sustituir I en la ecuación anterior:

$$L\frac{d^2Q}{dt} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de resistencia, inductancia, capacitancia y voltaje aplicado:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{d^2Q}{dt} + 15\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{1/30} = 300$$

En el tiempo cero: $Q(0) = 0$ y $Q'(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\left\{\frac{5}{3}Q'' + 10Q' + 30Q\right\} = \mathcal{L}\{300\}$

$\frac{5}{3}\mathcal{L}\{Q''\} + 15\,\mathcal{L}\{Q'\} + 30\mathcal{L}\{Q\} = \mathcal{L}\{300\}$

$\frac{5}{3}(s^2\bar{Q} - sQ - Q') + 15(s\bar{Q} - Q) + 30\bar{Q} = \frac{300}{s}$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$\frac{5}{3}s^2\bar{Q} - \frac{5}{3}(0) - \frac{5}{3}(0) + 15s\bar{Q} - 15(0) + 30\bar{Q} = \frac{300}{s}$

Simplificando:

$\bar{Q} = \frac{300}{s\left(\frac{5}{3}s^2+15s+30\right)} = \frac{10}{s} - \frac{20}{s+3} + \frac{10}{s+6}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{Q}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s} - \frac{20}{s+3} + \frac{10}{s+6}\right\} = 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\}$

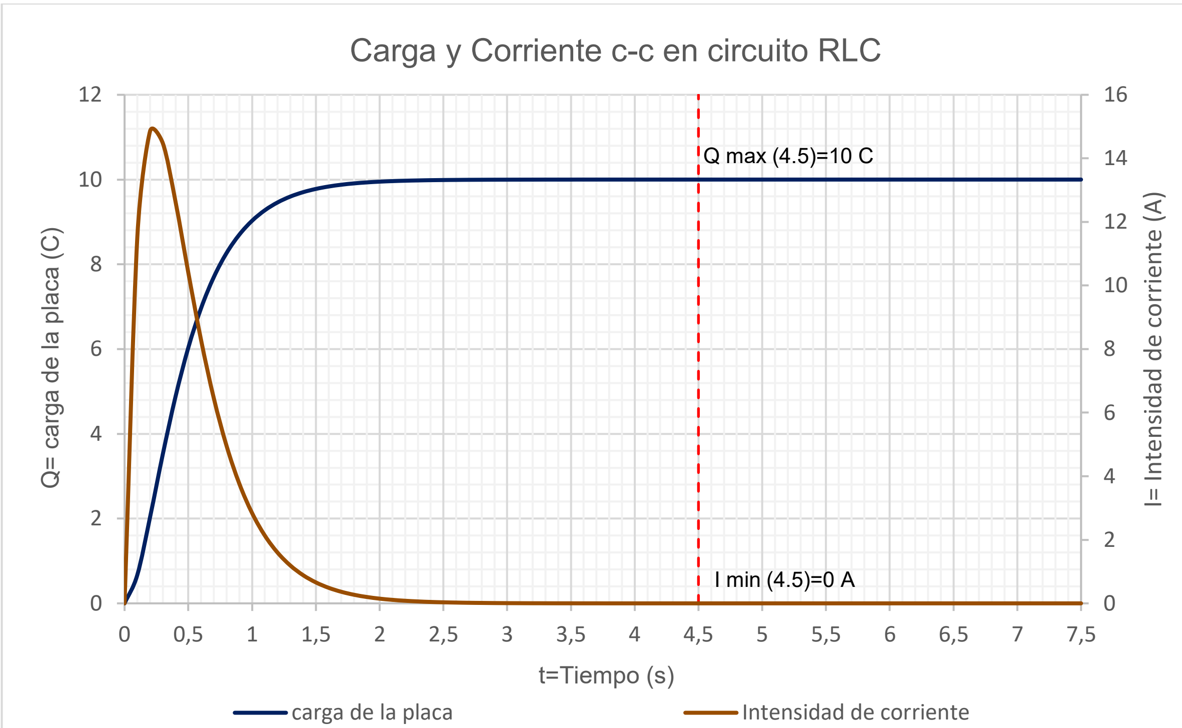
Quedando: $Q = 10 - 20(e^{-3t}) + 10(e^{-6t})$

La relación que existe entre la carga Q y la corriente I, está dada por:

$I = \frac{dQ}{dt}$; Por lo que al derivar Q se obtiene I:

$I = 60(e^{-3t}) - 60(e^{-6t})$

La grafica 3.4.5 indica la carga e Intensidad de corriente eléctrica del circuito eléctrico en serie con respecto al tiempo, fluyendo la corriente en una sola dirección considerándose así un circuito de corriente continua, con una carga máxima de 10 C al tiempo de 4.5 s.



Gráfica 3.4.5 Carga e Intensidad de corriente eléctrica con respecto al tiempo, en un circuito RLC en serie de corriente continua.

Ejemplo 19:
Del ejemplo anterior, considerar ahora que el generador de voltaje es:

$$\mathrm{E(t)} = 50\cos t \text{ Volts}$$

Graficar la carga del capacitor y la corriente con respecto al tiempo y resaltar el punto en que la carga llega a su máximo y la intensidad de corriente a cero amperes, indicando que dirección toma la corriente del circuito RCL.

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{d^2Q}{dt}+15\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{\frac{1}{30}} = 50\cos t$$

En el tiempo cero: $Q(0) = 0$ y $Q'(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{5}{3}Q''+15Q'+30Q\right\} = \mathcal{L}\{50\cos t\}$$

$$\frac{5}{3}\mathcal{L}\{Q''\}+15\,\mathcal{L}\{Q'\}+30\mathcal{L}\{Q\} = 50\mathcal{L}\{\cos t\}$$

$$\tfrac{5}{3}(s^2\bar{Q}-sQ-Q')+15(s\bar{Q}-Q)+30\bar{Q} = 50\left(\tfrac{s}{s^2+1}\right)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$\tfrac{5}{3}s^2\bar{Q}-\tfrac{5}{3}(0)-\tfrac{5}{3}(0)+15s\bar{Q}-15(0)+30\bar{Q} = \tfrac{50\,s}{s^2+1}$$

Simplificando:

$$\bar{I} = \frac{50s}{(s^2+1)\left(\frac{5}{3}s^2+15s+30\right)} = \frac{60}{37(s+6)}-\frac{3}{s+3}+\frac{51s}{37(s^2+1)}+\frac{27}{37(s^2+1)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{I}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{60}{37(s+6)}-\frac{3}{s+3}+\frac{51s}{37(s^2+1)}+\frac{27}{37(s^2+1)}\right\}$$

$$= \frac{60}{37}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+\frac{51}{37}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{27}{37}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

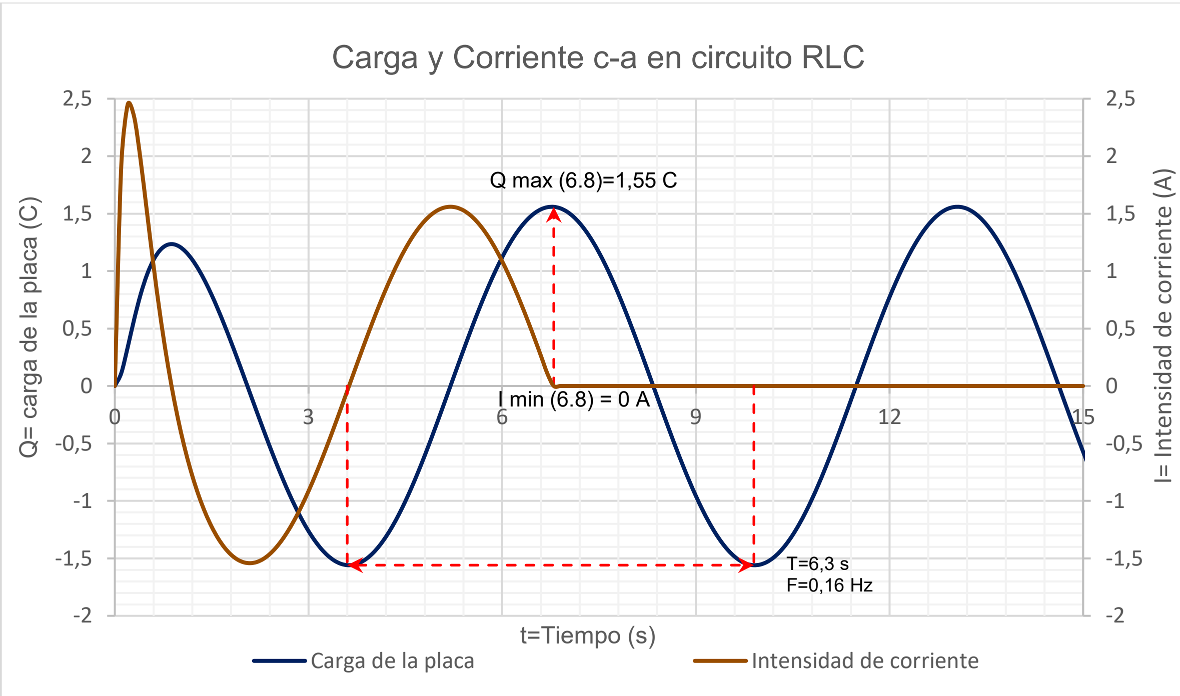
Quedando: $I = \frac{60}{37}(e^{-6t})-3(e^{-3t})+\frac{51}{37}(\cos t)+\frac{27}{37}(sen\ t)$

La relación que existe entre la carga Q y la corriente I, está dada por:

$I = \frac{dQ}{dt}$; Por lo que al derivar Q se obtiene I:

$$I = -\frac{360}{37}(e^{-6t})+9(e^{-3t})-\frac{51}{37}(sen\ t)+\frac{27}{37}(\cos t)$$

La grafica 3.4.6 indica la carga e Intensidad de corriente eléctrica del circuito eléctrico en serie con respecto al tiempo, fluyendo la corriente en diferentes direcciones considerándose así un circuito de corriente alterna, con una carga máxima de 1.55 C al tiempo de 6.8 s, tiempo de propagación de onda de 6.3 s y una frecuencia de 0.16 Hz para el capacitor.



Gráfica 3.4.6 Carga e Intensidad de corriente eléctrica con respecto al tiempo, en un circuito RLC en serie de corriente alterna.

3.5 Aplicaciones en Diseño de equipo

3.5.1 Deflexión de vigas

Muchas estructuras como edificios o puentes se construyen mediante vigas, recordando que una viga se puede definir como una serie de miembros estructurales que se extienden y pueden soportar una carga.

El uso de vigas está sumamente extendido por lo cual se utilizan en la construcción desde rascacielos a plantas químicas de cualquier área.

Una viga horizontal uniforme que se encuentra sostenida únicamente en sus extremos y en ausencia de cualquier carga (incluido su peso) presenta un eje longitudinal de simetría en forma de línea recta (Figura 3.5.1a). Al aplicar la fuerza de su propio peso o por influencia de alguna fuerza externa, la viga se pandearía o deformaría a esta deformación se le llama deflexión (Figura 3.5.1b).

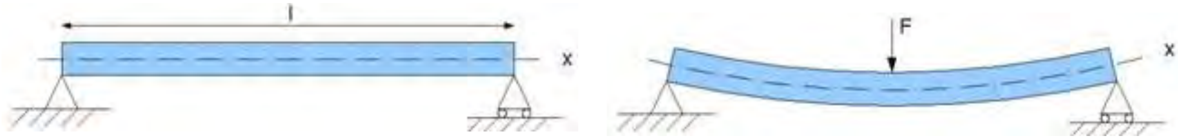


Figura 3.5.1 Deflexión de una viga horizontal
(a) Eje de simetría lineal *(b) Curva de deflexión*

Un modelo matemático adecuado de la curva de deflexión es la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w$$

Dónde:

- El producto EI se denomina rigidez constante a la flexión de la vida y depende de E que es una constante conocida como módulo de Young de elasticidad del material de la viga, e I que es el momento de inercia de un corte transversal de la viga.
- w es la densidad de la fuerza actuando verticalmente sobre la viga en un punto x.

La integración de la ecuación anterior nos da

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = wx + A;$$

de una segunda integración se obtiene

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}wx^2 + Ax + B;$$

una más da

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C;$$

y finalmente la integración final queda

$$EI\ y = \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx + D.$$

Donde A, B, C y D son constantes que se determinan por el modo en que la viga está sujeta en sus extremos, donde $x = 0$ y $x = L$. (Tabla 3.5).

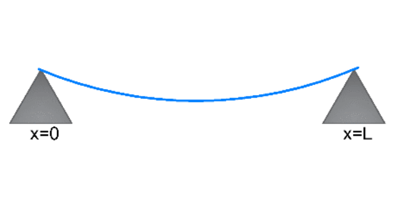
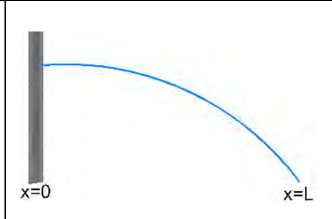
Simplemente apoyada en ambos extremos	Empotrada en ambos extremos	Empotrada en el extremo izquierdo y libre en el extremo derecho
		
$y = y'' = 0$	$y = y' = 0$	$y'' = y''' = 0$
$y(0) = y''(0) = 0$ $y(L) = y''(L) = 0$	$y(0) = y'(0) = 0$ $y(L) = y'(L) = 0$	$y''(0) = y'''(0) = 0$ $y''(L) = y'''(L) = 0$

Tabla 3.5. Condiciones a la frontera según el soporte de las vigas

Las condiciones de la tabla 3.5 junto con la ecuación diferencial de cuarto orden, constituyen un problema con valores en la frontera.
Para entender el uso de esta ecuación se proponen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 20:
Una viga horizontal de acero de longitud L, que se encuentra unida por una bisagra en cada extremo, se flexiona bajo la acción de su propio peso y de una carga comprensiva P (Figura 3.5.2).

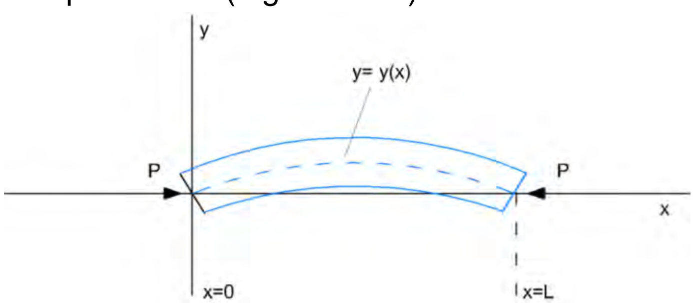


Figura 3.5.2 Deflexión de una viga horizontal de acero

(a) Hallar la deflexión como una función de $x, P, w, EI\ y\ L$. Con las condiciones de frontera correspondientes a su soporte.
(b) Graficar la deflexión de la viga de acero suponiendo los siguientes valores: Longitud $L = 400\ cm$, módulo Young $E = 5 \times 10^{12}\ g/cm \cdot s^2$, fuerza de su peso $w = 5\ EI$, sección transversal circular $I = 2.04\ cm^4$ y una fuerza compresiva $P = 2.6 \times 10^8\ dyn$.
(c) Encontrar la deflexión máxima para la viga de acero, con las condiciones mencionadas anteriormente.

Formulación matemática. La deflexión de una viga satisface la ecuación de cuarto orden:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = w$$

La viga está unida o empotrada tanto en su extremo izquierdo ($x = 0$) como en el derecho ($x = L$). Por lo tanto, las condiciones a la frontera son:

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(L) = 0, \qquad y'(L) = 0$$

Al aplicar $y'(0) = 0$ implica que la contante C es igual a cero y $y'(L) = 0$ da:

$$EI(0) = \frac{1}{6}wL^3 + \frac{1}{2}AL^2 + BL + C;$$

Lo que permite concluir que $B = -\frac{1}{6}wL^2 - \frac{1}{2}AL$

Al aplicar $y(0) = 0$ implica que la contante D es igual a cero y $y(L) = 0$ da:

$$EI(0) = \frac{1}{24}wL^4 + \frac{1}{6}AL^3 + \frac{1}{2}BL^2 + CL + D;.$$

Lo que permite concluir que: $A = -\frac{1}{2}wL$

Sustituyendo A en$B$: $B = \frac{1}{12}wL^2$

Al sustituir las dos constantes encontradas en la ecuación de segundo orden nos queda la siguiente ecuación diferencial, que satisface la deflexión de la viga empotrada en ambos extremos: $EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}wx^2 - \frac{1}{2}wLx + B$

La fuerza de compresión se suma en la ecuación diferencial anterior, obteniendo:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = \frac{1}{2}wx^2 - \frac{1}{2}wLx + B$$

Con condiciones a la frontera: $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$$\mathcal{L}\left\{EIy'' + Py - \frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx\right\} = \mathcal{L}\{B\}$$

$$EI\mathcal{L}\{y''\} + P\mathcal{L}\{y\} - \frac{1}{2}w\mathcal{L}\{x^2\} + \frac{1}{2}wL\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{B\}$$

$$EI(s^2\bar{y} - sy - y') + P\bar{y} - \frac{1}{2}w\left(\frac{2}{s^3}\right) + \frac{1}{2}wL\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{B}{s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$EIs^2\bar{y} - EIs(0) - EI(0) + P\bar{y} - \frac{w}{s^3} + \frac{wL}{2s^2} = \frac{B}{s}$$

Simplificando:

$$\bar{y} = \frac{B}{s(EIs^2+P)} - \frac{wL}{2s^2(EIs^2+P)} + \frac{w}{s^3(EIs^2+P)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s(EIs^2+P)} - \frac{wL}{2s^2(EIs^2+P)} + \frac{w}{s^3(EIs^2+P)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{PB-wEI}{P^2s} - \frac{w\,L}{2Ps^2} + \frac{w}{PS^3} - \frac{sEI[PB-wEI]}{P^2(EIs^2+P)} + \frac{wLEI}{2P(EIs^2+P)}\right\} = \frac{PB-wEI}{P^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$-\frac{wL}{2P}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{w}{P\cdot 2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot 2!}{s^{2+1}}\right\} - \frac{EI[PB-wEI]}{P^2\cdot EI}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\frac{EI}{EI}s^2+\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)^2}\right\} + \frac{wLEI}{2P\cdot EI\cdot\sqrt{\frac{P}{EI}}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\cdot\sqrt{\frac{P}{EI}}}{\frac{EI}{EI}s^2+\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)^2}\right\}$$

Quedando: $y = \frac{PB - wEI}{P^2} - \frac{wL}{2P}(x) + \frac{w}{2P}(x^2) - \frac{PB - wEI}{P^2}\left(\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \frac{wL}{2P\sqrt{\frac{P}{EI}}}\left(sen\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$

Sustituyendo $B = \frac{1}{12}wL^2$ en la ecuación anterior:

a) $y = -\frac{wL}{2P}(x) + \frac{w}{2P}(x^2) + \frac{\frac{1}{12}PwL^2 - wEI}{P^2}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \frac{wL}{2P\cdot\sqrt{\frac{P}{EI}}}\left(sen\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$

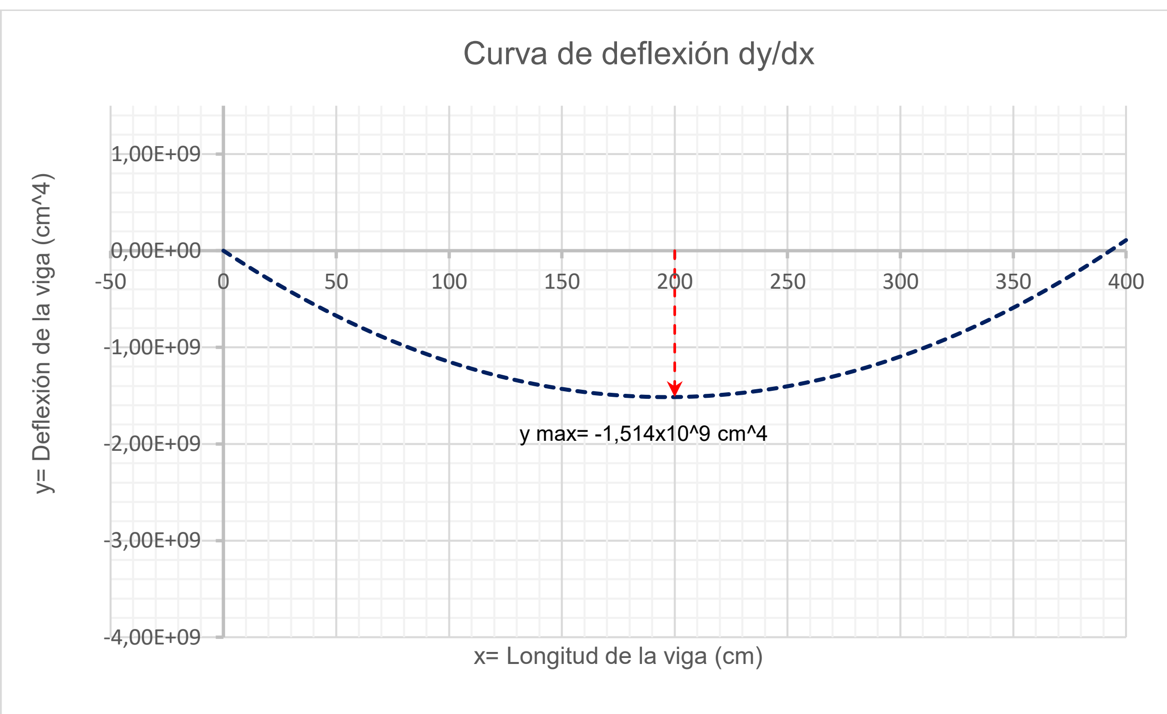
Esta ecuación indica la deflexión de la viga en cualquier punto x.

b) Sustituyendo los valores de Longitud, módulo Young, fuerza de su propio peso, sección transversal circular y de la fuerza compresiva en la ecuación anterior:

$$y = -15.6923 \times 10^6 cm^3(x) - 18.5089 \times 10^7 cm^4\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2.6 \times 10^8}{4.08 \times 10^{12} cm^2}}x\right)$$

$$+19.6576 \times 10^8 cm^4\left(sen\sqrt{\frac{2.6\times10^8}{4.08\times10^{12}cm^2}}\,x\right) + 39.2308 \times 10^3 cm^2(x^2)$$

c) La grafica 3.5.1 indica la deflexión de la viga con respecto a su longitud, con una deflexión máxima de -1.514x10^9 cm^4.



Gráfica 3.5.1 Deflexión de una viga horizontal bajo presión de su propio peso y una carga compresiva.

3.6 Aplicaciones a problemas de crecimiento y decaimiento.

La ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = ax$, dice que la tasa de cambio de una cantidad x es proporcional en cualquier instante a x precisamente.

Si la constante de proporcionalidad; a es positiva y x es positivo, entonces dx/dt será positivo y x aumentará. En este caso se habla de problemas de crecimiento.

Por otro lado, si a es negativa y x es positivo, entonces dx/dt será negativo y x decrecerá, entonces se habla de problemas de decaimiento.

3.6.1 Desintegración radiactiva

La tasa de desintegración de una sustancia radiactiva $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ es proporcional en cualquier instante, a la cantidad de sustancia radiactiva(x) que está presente en un tiempo determinado.

Para entender el uso de la ecuación anterior, se proponen los siguientes ejemplos:

Ejemplo 21:

El isótopo radiactivo C^{14} (carbono 14) tiene una vida media de 5,600 años aproximadamente. Un análisis de los restos fósiles de un dinosaurio muestra que contiene el 5% de la cantidad original de isotopo radiactivo. Asumiendo que la vida media del C^{14} es aproximadamente 5,600 años, determinar:

a) Una ecuación que indique la cantidad de carbono 14 en cualquier tiempo.
b) La edad del fósil.
c) Graficar la tasa de desintegración radiactiva con respecto al tiempo.

Formulación matemática. Sea x el porcentaje de isotopo radiactivo C^{14} presente en el fósil después de t años. Luego dx/dt es la tasa de cambio de esta cantidad en el tiempo y está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

Puesto que inicialmente la cantidad de C^{14} es del 100%, se tiene que $x = 100$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$$x' - \alpha x = 0$$

Bajo condiciones iniciales: $x(0) = 100$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{x' - \alpha x\} = \mathcal{L}\{0\}$

$\mathcal{L}\{x'\} - \alpha\, \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\}$

$(s\bar{x} - x) - k\bar{x} = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{x} - 100 - k\bar{x} = 0$

Simplificando:

$\bar{x} = \frac{100}{(s-k\,)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s-k}\right\} = 100\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\}$

Quedando: $x = 100(e^{kt})$

Despejando la constante k, bajo condiciones de la vida media del carbono 14 es decir que x=50 en t=5600 años.

$$50 = 100\left(e^{k(5600)}\right)$$

$$\frac{50}{100} = e^{5600k}$$

$$\text{In}\ \frac{1}{2} = 5600k$$

$$k = \frac{\text{In}\ \frac{1}{2}}{5600}$$

(a) Por lo tanto: $x = 100\left(e^{\frac{\text{In}\frac{1}{2}}{5600}t}\right)$

La cual indica la cantidad de carbono 14 en cualquier tiempo t.

(b) Despejando t, para determinar la edad del fósil:

$$x = 100(e^{kt})$$

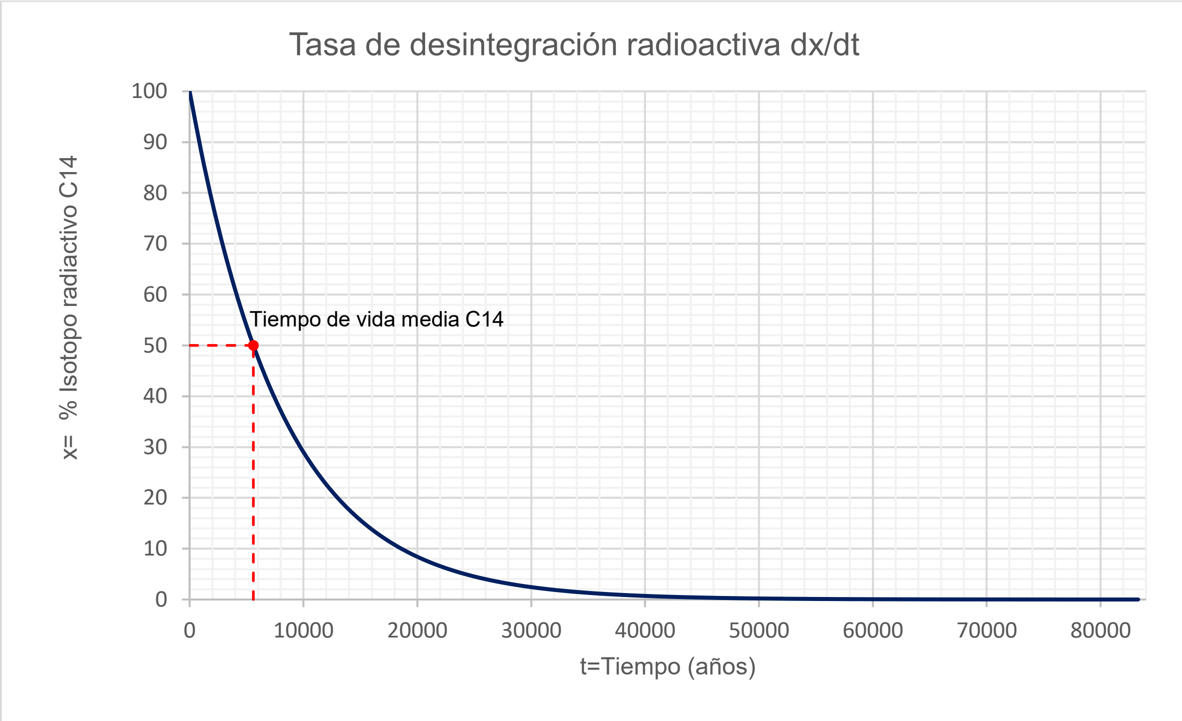
$$5 = 100\left(e^{\frac{\text{In}\frac{1}{2}}{5600}t}\right)$$

$$\frac{5}{100} = e^{\frac{\text{In}\frac{1}{2}}{5600}t}$$

$$\text{In}\frac{5}{100} = \frac{\text{In}\ \frac{1}{2}}{5600}\ t$$

$$t = 5600\frac{\text{In}\frac{5}{100}}{\text{In}\ \frac{1}{2}} = 24{,}202.79\ años.$$

(c) La grafica 3.6.1 indica el porcentaje de isotopo radiactivo carbono 14, con respecto al tiempo.



Gráfica 3.6.1 Tasa de desintegración radioactiva del isotopo carbono 14.

Ejemplo 22:

Una sustancia radiactiva R_1 decae dentro de una sustancia R_2 que también es radiactiva. En el tiempo t, hay N_1 de átomos de R_1 y N_2 átomos de R_2, los cuales están relacionados mediante las ecuaciones:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1$$
$$\frac{dN_2}{dt} = \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2$$

Sujetas a las condiciones de que $N_1=N_0$ y $N_2=0$, cuando t=0.

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, obteniendo N_1 y N_2 en función de t, α_1y α_2.

Formulación matemática. Sea N_1 y N_2 el número de átomos de las sustancias radiactivas R_1 y R_2 respectivamente, después de t años. Luego $\frac{dN_1}{dt}$ y $\frac{dN_2}{dt}$ son las tasas de cambio para cada sustancia de esta cantidad de átomos respecto al tiempo y están dadas por:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1; \;\; \frac{dN_2}{dt} = \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2$$

Puesto que inicialmente hay N_0 y 0 átomos en las sustancias N_1 y N_2 respectivamente, se tiene que $N_1 = N_0$ en $t = 0$ y $N_2 = 0$ en $t = 0$. Así, las formulaciones matemáticas completas son:

$N'_1 + \alpha_1 N_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots(1)$

$N'_2 + \alpha_2 N_2 - \alpha_1 N_1 = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$

Bajo condiciones iniciales: $N_1(0) = N_0, \quad N_2(0) = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales formado, por el método de la transformada de Laplace.

Se calcula la transformada de Laplace para ambas funciones:

$\mathcal{L}\{N'_1 + \alpha_1 N_1\} = \mathcal{L}\{0\}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{N'_2 + \alpha_2 N_2 - \alpha_1 N_1\} = \mathcal{L}\{0\}$

$s\overline{N}_1 - N_1 + \alpha_1 \overline{N}_1 = 0$ $\qquad$ $s\overline{N}_2 - N_2 + \alpha_2 \overline{N}_2 - \alpha_1 \overline{N}_1 = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales y dejando las incógnitas del lado izquierdo:

$s\overline{N}_1 - (N_0) + \alpha_1 \overline{N}_1 = 0$ $\qquad$ $s\overline{N}_2 - (0) + \alpha_2 \overline{N}_2 - \alpha_1 \overline{N}_1 = 0$

$s\overline{N}_1 + \alpha_1 \overline{N}_1 = N_0 \ldots\ldots..(3)$ $\qquad$ $s\overline{N}_2 + \alpha_2 \overline{N}_2 - \alpha_1 \overline{N}_1 = 0 \ldots....(4)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado:

- Despejando $\overline{N}_1$ de la ecuación 3:

$$\overline{N}_1 = \frac{N_0}{(s+\alpha_1)}$$

- Sustituyendo $\overline{N}_1$ en la ecuación 4:

$$s\overline{N}_2 + \alpha_2 \overline{N}_2 - \alpha_1 \left[\frac{N_0}{(s+\alpha_1)}\right] = 0$$

- Simplificando y despejando $\overline{N}_2$:

$$\overline{N}_2[s + \alpha_2] = \alpha_1 \left[\frac{N_0}{(s+\alpha_1)}\right]$$

$$\overline{N}_2 = \alpha_1 \left[\frac{\frac{N_0}{(s+\alpha_1)}}{s+\alpha_2}\right] = \alpha_1 \left[\frac{N_0}{s^2+(\alpha_1+\alpha_2)s+(\alpha_1\cdot\alpha_2)}\right] = \alpha_1 \cdot N_0 \left[\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}\right]$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\overline{N}_2\} = \alpha_1 \cdot N_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\overline{N}_2\} = \frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_2-\alpha_1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha_1}\right\} + \frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_1-\alpha_2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha_2}\right\}$$

Quedando: $N_2 = \frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_2 t})$

La cual indica la cantidad de átomos en la sustancia R_2 en cualquier tiempo t.

- Despejando N_1 de la ecuación 2 y resolviendo:

$$N_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}N_2 + \frac{1}{\alpha_1}N'_2$$

$N'_2 = \frac{(-\alpha_1)(\alpha_1 N_0)}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}) + \frac{(-\alpha_2)(\alpha_1 N_0)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_2 t})$

$N_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_2 t})\right] + \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{(-\alpha_1)(\alpha_1 N_0)}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}) + \frac{(-\alpha_2)(\alpha_1 N_0)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_2 t})\right]$

Resolviendo:

$N_1 = \frac{\alpha_2 N_0}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\alpha_2 N_0}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_2 t}) - \frac{\alpha_1 N_0}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}) - \frac{\alpha_2 N_0}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{-\alpha_2 t})$

Quedando: $x_A = N_0(e^{-\alpha_1 t})$
La cual indica la cantidad de átomos en la sustancia R_2 en cualquier tiempo t

3.6.2 Crecimientos Poblacionales

La tasa de variación o cambio de la población de una especie p en el tiempo t es decir $\frac{dp}{dt}$ y al no existir emigración ni inmigración es igual a $r \cdot p(t)$ en donde r representa la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad de la especie. El modelo más simple es conocido como la ley de Malthus para el crecimiento de una población y considera a r como una constante, es decir que no depende ni del tiempo ni de la población. Entonces la ecuación diferencial se escribe como:

$$\frac{dp}{dt} = ap;$$

en donde a es una constante de proporcionalidad.
Para ver el uso de esta ecuación se proponen los siguientes ejemplos:

Ejemplo 23:
El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5,000 a 15,000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa de rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias, encontrar:

a) Una ecuación que determine el número de bacterias en el cultivo al tiempo t.
b) Calcular el número de bacterias al cabo de 20 horas.
c) ¿Cuándo llegara a 135,000 el número de bacterias?
d) Graficar el crecimiento poblacional del cultivo de bacterias.

Formulación matemática. Sea p el número de bacterias en el cultivo después de cierto tiempo t . Luego dp/dt es la tasa de cambio de esta cantidad en el tiempo y está dada por:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p$$

Puesto que inicialmente el número de bacterias es de 5,000 se tiene que $p = 5000$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$$p' - \alpha p = 0$$

Bajo condiciones iniciales: $p(0) = 5000$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{p' - \alpha p\} = \mathcal{L}\{0\}$

$\mathcal{L}\{p'\} - \alpha\,\mathcal{L}\{p\} = \mathcal{L}\{0\}$

$(s\bar{p} - p) - k\bar{p} = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{p} - 5000 - k\bar{p} = 0$

Simplificando:

$\bar{p} = \frac{5000}{(s-k)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{p}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5000}{s-k}\right\} = 5000\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\}$

Quedando: $p = 5000(e^{kt})$

Despejando la constante k, bajo condiciones del crecimiento de bacterias registrado, es decir que p=15000 en t=10 horas.

$15000 = 5000\left(e^{k(10)}\right)$

$\frac{15000}{5000} = e^{10k}$

$\text{In } 3 = 10k$

$k = \frac{\text{In } 3}{10}$

(a) Por lo tanto: $p = 5000\left(e^{\frac{\text{In } 3}{10}t}\right)$

La cual indica el crecimiento de bacterias en el cultivo en cualquier tiempo t.

(b) Numero de bacterias, después de 20 horas:

$p = 5000\left(e^{\frac{\text{In } 3}{10}(20)}\right) = 45{,}000\ bacterias$

(c) Tiempo en que el número de bacterias es igual a 135,000:

Despejando t y sustituyendo el número de bacterias:

$$p = 5000(e^{kt})$$

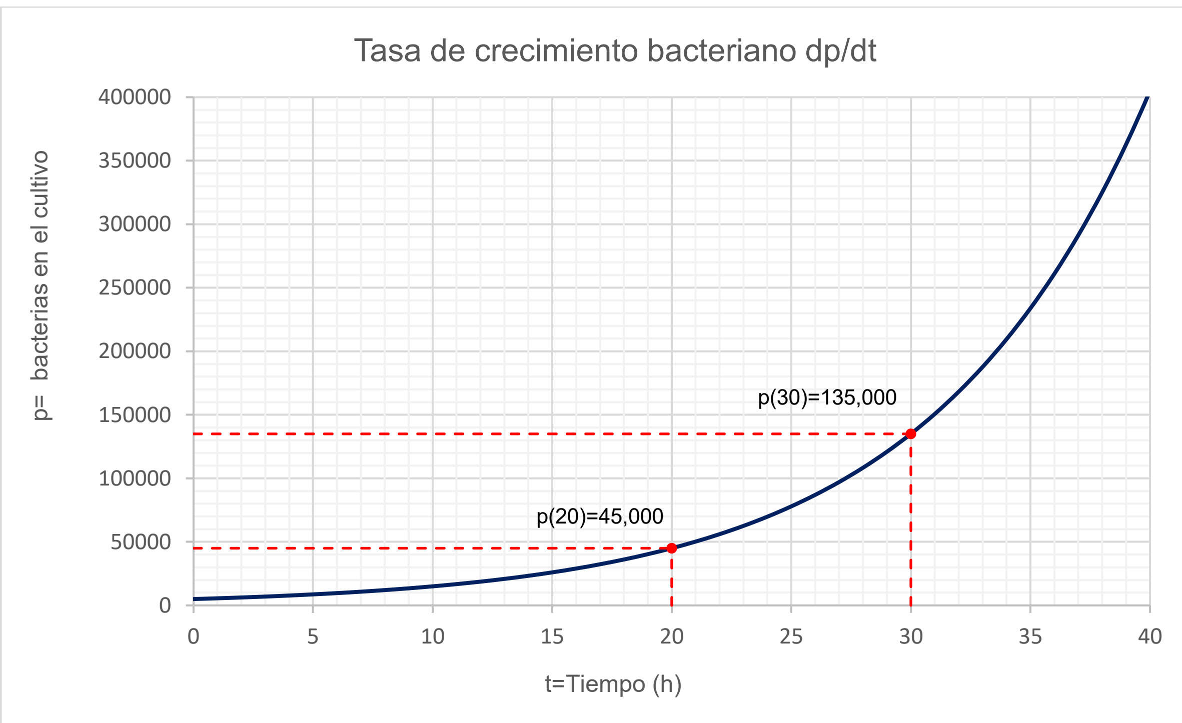
$$p = 5000\left(e^{\frac{\text{In } 3}{10}t}\right)$$

$$\frac{p}{5000} = e^{\frac{\text{In } 3}{10}t}$$

$$\text{In}\frac{p}{5000} = \frac{\text{In } 3}{10}\ t$$

$$t = 10\,\frac{\text{In}\dfrac{p}{5000}}{\text{In } 3} = 10\,\frac{\text{In}\dfrac{135000}{5000}}{\text{In } 3} = 30\ horas$$

(d) La grafica 3.6.2 indica el crecimiento bacteriano en el cultivo con respecto al tiempo.



Gráfica 3.6.2 Tasa de crecimiento bacteriano en el cultivo.

Ejemplo 24:

Si en un análisis de una botella de leche pura de vaca se encuentran 600 organismos (bacterias) el día de ser ordeñada, después de 24 horas es decir al primer día se encuentran 950 organismos, al tercer día (72 horas) se pasteuriza la leche eliminando gran cantidad de bacterias, determinar:

(a) El número de bacterias que contiene la leche sin pasteurizar en cualquier tiempo.
(b) Las bacterias contenidas en la botella, antes de ser pasteurizada.
(c) Graficar el crecimiento de bacterias en la leche, antes de su pasteurización.

Formulación matemática. Sea p el número de bacterias en la leche después de cierto tiempo t . Luego dp/dt es la tasa de cambio de esta cantidad en el tiempo y está dada por:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p$$

Puesto que inicialmente el número de bacterias en la leche es de 600 se tiene que $p = 600$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$$p' - \alpha p = 0$$

Bajo condiciones iniciales: $p(0) = 600$

Se calcula la transformada de Laplace para la ecuación, con ayuda de la tabla 1:

$\mathcal{L}\{p' - \alpha p\} = \mathcal{L}\{0\}$

$\mathcal{L}\{p'\} - \alpha\, \mathcal{L}\{p\} = \mathcal{L}\{0\}$

$(s\bar{p} - p) - k\bar{p} = 0$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$s\bar{p} - 600 - k\bar{p} = 0$

Simplificando:

$\bar{p} = \frac{600}{(s-k)}$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa y resolviendo con tabla 1:

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{p}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{600}{s-k}\right\} = 600\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\}$

Quedando: $p = 600(e^{kt})$

Despejando la constante k, bajo condiciones del crecimiento de bacterias registrado, es decir que p=950 en t=24 horas.

$950 = 600\left(e^{k(24)}\right)$

$\frac{950}{600} = e^{24k}$

$k = \frac{\text{In}\ \frac{19}{12}}{24}$

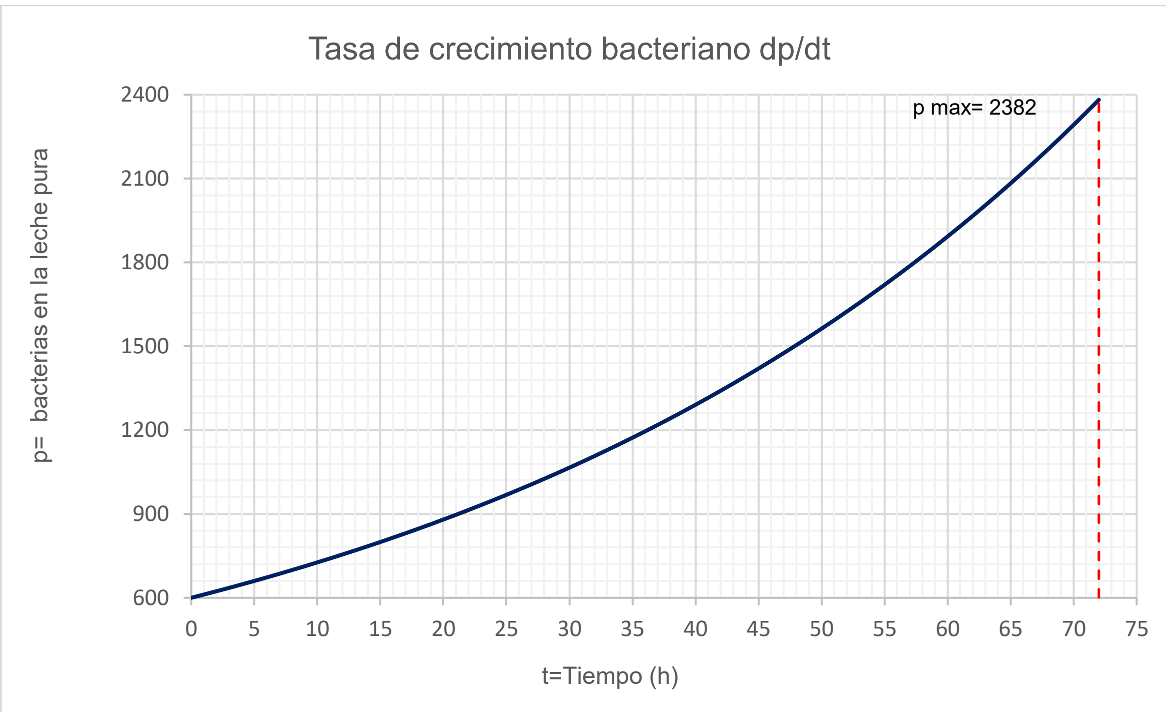
(a) Por lo tanto: $p = 600\left(e^{\frac{\ln\frac{19}{12}}{24}t}\right)$

La cual indica el crecimiento de bacterias en la leche antes de su pasteurización en cualquier tiempo t.

(b) Numero de bacterias en la leche, después de 72 horas:

$$p = 600\left(e^{\frac{\ln\frac{19}{12}}{24}(72)}\right) = 2{,}382\ bacterias$$

(c) La grafica 3.6.3 indica el crecimiento bacteriano en la leche con respecto al tiempo, antes de su pasteurización.



Gráfica 3.6.3 Tasa de crecimiento bacteriano en la leche pura de vaca.

CONCLUSIONES

El uso de La transformada de Laplace como método alterno para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales, es un método sencillo, que permite resolver este tipo de ecuaciones por medios algebraicos, lo cual, en algunos casos, facilita la resolución de la ecuación. Es por ello, que este documento ofrece un número considerable de ejemplos, que invitan al alumno a utilizar la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales y más aún, en aquellas ecuaciones donde la solución por métodos comunes es más complicada.

Para estudiantes de Ingeniería química, se espera que este documento sea de gran apoyo, para aprender el método de la transformada de Laplace y ponerlo en práctica en los problemas que se presentan en las distintas asignaturas de la carrera. Ya que, en este material se plantearon una gran variedad de problemas teóricos de estas asignaturas, así como la solución detallada y en algunos de ellos la representación gráfica del problema planteado.

Se desea que este documento logre su cometido de favorecer el aprendizaje de los alumnos y servir de apoyo a los profesores, ya que este es el objetivo primordial de esta tesis.

RECOMENDACIONES

1. Para favorecer una mayor capacidad de entendimiento y aprendizaje en los alumnos, es conveniente que las ecuaciones diferenciales que se plantearon en este documento sean resueltas por métodos tradicionales, con el fin de comparar los resultados obtenidos por ambos métodos.

2. Se recomienda extender el documento, haciendo el uso del programa matemático MATLAB, programando y realizando hojas de cálculo para los problemas planteados, con el fin de agilizar las resoluciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. **Dennis G. Zill**. (2008). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. 2a ed. México: Iberoamericana.

2. **CH. Edwards, JR. David E. Peeney.** (2009). *Ecuaciones diferenciales, elementales y problemas con condiciones en la frontera.* 3a ed. México: Prentice Hall.

3. **William E. Boyce.** (2012). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* 3a ed. México: Limusa.

4. **M. Braun.** (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* 2a ed. México: Iberoamericana.

5. **Nagle, R. Kent** (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* 4a ed. México: Pearson.

6. **Aurray R. Spiegel Ph. D.** (1970). *Transformadas de Laplace.* 1a ed. Panama: Mc Graw-Hill.

7. **Shiff, Joel L.** (1999). *The Laplace transform: theory and applications*. New York: Springer Verlag.

8. **Doetsch Gustav** (1974). *Introduction to the theory and application of the laplace transformation.* Berlin: Springer Verlag.

9. **James R. Welty.** (1994). *Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa.* 2a ed. México: Limusa.

10. **Harry Mileaf.** (1985). *Electricity one-seven.* 3 ed. México: Limusa. Vol. 1, 2, 3 y 4.
11. **Octave Levenspiel.** (2004). *Ingeniería de las reacciones químicas.* 3a ed. México: Limusa.

12. **Donald Q. Kern.** (1999). *Procesos de transferencia de calor.* México: Mc Graw-Hill book company.

13. **J. P. Holman**. (1999). *Transferencia de calor*. México: Mc Graw-Hill book Company.

14. **Altamirano G**. (2014). *La Transformada de Laplace.*

15. **FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA** – UNAM.
(2017). (Web) Zaragoza.unam.mx