UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA COMPLEJIDAD DE LOS ÓRDENES PARCIALES BIEN FUNDADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MARIO JARDÓN SANTOS

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. GABRIELA CAMPERO ARENA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. **2017**

1. Datos del alumno
Jardón
Santos
Mario
56 88 34 31
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
309218906

2. Datos del tutor
Dra.
Gabriela
Campero
Arena

3. Datos del sinodal 1
Dr.
David
Meza
Alcántara

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Favio Ezequiel
Miranda
Perea

5. Datos del sinodal 3

M. en C.

Osvaldo

Guzmán

González

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Luis Jesús

Turcio

Cuevas

7. Datos del trabajo escrito

La complejidad de los órdenes parciales bien fundados

71 p.

2017

Introducción

Cuando se piensa en un conjunto parcialmente ordenado, hay dos tipos de subconjuntos en los que la relación de orden es, por lo general, más simple y que nos ayudan a describir la naturaleza del orden en su totalidad; se trata de las cadenas y las anticadenas. Cuando se trata de un conjunto de cardinalidad infinita surgen además preguntas que relacionan la cardinalidad de las cadenas y las anticadenas con diversas características del orden. El hecho de que todo orden parcial sobre un conjunto pueda ser visto como intersección de órdenes lineales sobre el mismo llevó al establecimiento de la teoría de la dimensión de un orden parcial por Dushnik y Miller en [DM41]. La dimensión de un orden parcial fue definida como la cantidad mínima de órdenes lineales necesaria para formar al orden parcial.

Este trabajo tratará principalmente conjuntos infinitos con órdenes parciales bien fundados. Una de las características de este tipo de órdenes es su relación con la clase de los ordinales, principalmente con el concepto de altura y el tipo de orden de sus subconjuntos (con respecto a esa altura). Toda intersección de buenos órdenes sobre un conjunto es un orden parcial bien fundado. Se relacionará la cantidad de buenos órdenes que se intersequen con características del orden bien fundado resultante como su altura y la cardinalidad de sus cadenas y anticadenas.

El primer resultado importante del trabajo establece que todo orden parcial bien fundado es intersección de buenos órdenes. Esto abre la posibilidad de redefinir dimensión o dar otro concepto parecido para órdenes parciales bien fundados. Después, usando un resultado básico de combinatoria infinita, se describe el orden resultante de intersecar una cantidad finita de buenos órdenes en un conjunto infinito.

Se describirá una descomposición de un conjunto infinito basada en los buenos órdenes que se van a intersecar, y que ayudará a mejorar la respuesta anterior para el caso en que se interseque una cantidad infinita de buenos órdenes. Esta descomposición, que se inspira en la descomposición diádica de un conjunto, fue originalmente presentada por Egbert Harzheim en [Ha64], y será usada para algunos resultados ligeramente distintos de los originales. Éstos son los resultados principales que aparecen en el capítulo 4.

El lector requerirá saber las cuestiones básicas de aritmética cardinal, así como ser familiar con el concepto de cofinalidad. Por lo demás, cierto conocimiento sobre los términos usados a la hora de tratar con teoría de órdenes será necesario, pero el mismo texto lo irá dando. Con respecto a la notación, usándose en todo momento diversos órdenes sobre varios conjuntos, la relación de orden sobre ordinales (y cardinales) se escribirá, si es estricta $\in$ y si no lo es, $\subseteq$.

Índice general

Capítulo 1

Órdenes bien fundados

Nota previa

Cada vez que en el presente trabajo aparezca el par ordenado $\langle M, < \rangle$ (o alguno similar), se hará referencia a un conjunto parcialmente ordenado *estricto*, es decir, se entenderá que la relación $<$ es antirreflexiva y transitiva. El símbolo $\leqslant$ (o alguno similar) significará " $<$ o $=$". A continuación se precisarán algunos de los conceptos de órdenes parciales que se usarán a lo largo del texto.

Definición 1.1 *Sea $\langle M, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea A un subconjunto de M.*

(i) Si para todo par $\{x, y\}$ de elementos distintos de A, $x < y$ o $y < x$, es decir, son comparables según $<$, diremos que A es una cadena del orden $\langle M, < \rangle$.

(ii) Si para todo par $\{x, y\}$ de elementos distintos de A, $x \nless y$ y $y \nless x$, es decir, son incomparables según $<$, diremos que A es una anticadena del orden $\langle M, < \rangle$.

(iii) Si $A = \{x_\beta \mid \beta \in \gamma\} \subseteq M$, donde γ es un ordinal infinito, y para ordinales $\alpha \in \beta \in \gamma$, se cumple $x_\beta < x_\alpha$, diremos que A es una cadena infinita descendente.

(iv) Si $x \in A$ y para todo $y \in A$ distinto de x, $y \nless x$, diremos que x es un elemento minimal de A. El conjunto de los elementos minimales de A lo

denotaremos como A_0*. Si para todo* $y \in A$*,* $x \leqslant y$*,* x *será llamado el mínimo de* A*.*

Definición 1.2 *Sea* $\langle M, <\rangle$ *un conjunto parcialmente ordenado. Sea* A *un subconjunto de* M*. Por* $<_{|A}$ *se entenderá la relación*

$$\{(x, y) \in <|\ x, y \in A\}.$$

Definición 1.3 *Sea* $\langle M, <\rangle$ *un conjunto parcialmente ordenado.*

(i) Si para todo subconjunto A *de* M*, distinto del vacío,* A *tiene un elemento mínimo según* $<$*, se dirá que* $\langle M, <\rangle$ *es un conjunto bien ordenando. Del mismo modo,* $<$ *será llamado un buen orden.*

(ii) Si M *es una cadena del conjunto ordenado* $\langle M, <\rangle$*, se dirá que* $\langle M, <\rangle$ *es un conjunto linealmente ordenado y que* $<$ *es un orden lineal.*

En este capítulo de carácter introductorio se define la clase de los órdenes parciales bien fundados, se dan algunas de sus características básicas y principalmente se habla de la relación que tiene con la clase de los conjuntos bien ordenados. En adelante el tema del trabajo gira alrededor de esta relación, principalmente en lo que se concluye en el teorema 1.15, que a cada orden bien fundado asigna un conjunto de buenos órdenes y es el teorema más importante de este capítulo.

Definición 1.4 *Sea $\langle M, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $<$ será llamado bien fundado si cumple alguna de las tres siguientes condiciones:*

(i) el conjunto M no contiene cadenas infinitas descendentes;

(ii) cada subconjunto de M no vacío tiene un elemento minimal;

(iii) si para todo $A \subseteq M$ que sea una cadena, $\left\langle A, <_{|A} \right\rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Para simplificar cuando el orden $<$ sea bien fundado, a menudo se dirá que $\langle M, < \rangle$ es un orden (parcial) bien fundado.

Estas tres condiciones son equivalentes. Si $\langle M, < \rangle$ no cumple (i), entonces existe $A = \{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq M$ tal que si $i \in j \in \omega$, $x_j < x_i$. Este conjunto A no tiene minimales pues, si $n \in \omega$, entonces $x_n > x_{n+1}$. Por lo tanto, $\langle M, < \rangle$ no cumple (ii). Ahora supongamos que $\langle M, < \rangle$ no cumple (ii). Existe entonces $A \subseteq M$ no vacío y sin minimales. Sea x_0 un elemento de A que sabemos que existe porque no es vacío. Si para $n \in \omega$ ya definimos $x_n \in A$, sea x_{n+1} algún elemento de A tal que $x_{n+1} < x_n$. El elemento x_{n+1} existe porque x_n no es un elemento minimal A. El conjunto formado así, recursivamente y usando el axioma de elección, $\{x_n \mid n \in \omega\}$ es una cadena descendente infinita en M según $<$. Como $\left\langle A, <_{|A} \right\rangle$ no es un conjunto bien ordenado, $\langle M, < \rangle$ no cumple (iii). Falta verificar que si no se cumple (iii), entonces no se cumple (i), o lo que es lo mismo, que si se cumple (i), entonces se cumple (iii). Si $\langle M, < \rangle$ cumple (i) y $A \subseteq M$ es una cadena, entonces, si tomamos $B \subseteq A$ no vacío, existe $x \in B$ minimal en B. Por lo tanto, para todo $y \in B$, si $x \neq y$, x y y son comparables y $y \nless x$. De esto se concluye que $x < y$, por lo cual, x es el elemento mínimo de B. Por lo tanto, todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo. Así, cada cadena de M es un conjunto bien ordenado. Entonces se cumple (iii). Veamos el inciso (iii). Si tomamos C una cadena dentro de un conjunto con un orden bien fundado $\langle M, < \rangle$, C tiene intrínsecamente relacionado un ordinal al que conocemos como su tipo de orden, denotado *ot* $\left(\left\langle C, <_{|C} \right\rangle\right)$. Es decir, cada cadena que tomemos en M, cada sección totalmente ordenada según la estructura de orden que tiene M, está relacionada a la clase de los ordinales. Una manera más profunda de relacionar la estructura de M (no sólo las cadenas) con la clase de los ordinales viene dada por la siguiente definición.

Definición 1.5 *Sea $\langle M, < \rangle$ un orden parcial bien fundado. Para la clase de los ordinales definimos recursivamente los siguientes subconjuntos de M: Sea M_0 el conjunto de los elementos minimales de M. Si η es un ordinal, y para toda $\eta' \in \eta$ ya está definido $M_{\eta'}$, entonces se define*

$$M_\eta := \left(M \backslash \left(\bigcup \{ M_{\eta'} \mid \eta' \in \eta \} \right) \right)_0 ,$$

es decir, el conjunto de minimales de $M \backslash \left(\bigcup \{ M_{\eta'} \mid \eta' \in \eta \} \right)$. Para cada ordinal η, el conjunto M_η será llamado el nivel η-ésimo de $\langle M, < \rangle$.

Notemos que para cada ordinal η, M_η es una anticadena, ya que si x y y son dos elementos de M_η, ambos son elementos minimales del conjunto $M \backslash \left(\bigcup \{ M_{\eta'} \mid \eta' \in \eta \} \right)$, por lo cual, no pueden ser comparables.

Proposición 1.6 *Sea $\langle M, < \rangle$ un orden parcial bien fundado.*

(i) Sea A un subconjunto no vacío de M. Si $y \in A$, entonces existe $x \in A_0$ tal que $x \leqslant y$.

(ii) Si η y δ son ordinales distintos, entonces $M_\eta \cap M_\delta = \varnothing$.

Demostración. (i) Sea $y \in A$. El conjunto $\{ a \in A \mid a \leqslant y \}$ es no vacío. Sea x un elemento minimal en él. Naturalmente $x \leqslant y$. Sea $z \in A$. Si $z < x$, tendríamos que $z < y$ y, por lo tanto, $z \in \{ a \in A \mid a \leqslant y \}$. Entonces tenemos tanto $z < x$ como $z \in \{ a \in A \mid a \leqslant y \}$, contradiciendo la minimalidad de x en $\{ a \in A \mid a \leqslant y \}$. Por lo tanto, para todo $z \in A$, $z \nless x$. Por lo cual, $x \in A_0$ y $x \leqslant y$.

(ii) Supongamos que $\eta \in \delta$. Por la definición 1.5,

$$M_\delta \subseteq M \backslash \left(\bigcup \{ M_{\delta'} \mid \delta' \in \delta \} \right) \subseteq M \backslash M_\eta .$$

Por lo tanto, $M_\eta \cap M_\delta = \varnothing$. ■

Del inciso (ii) se sigue que, si para todo ordinal η, M_η fuera un conjunto distinto del vacío, M sería una clase propia. Entonces existe un ordinal mínimo γ tal que M_γ es un conjunto vacío. A tal ordinal lo llamaremos la altura de $\langle M, < \rangle$ y lo designaremos $ht\,(M)$, o $ht\,(\langle M, < \rangle)$, si es posible que haya alguna confusión. Entonces tenemos que $\varnothing = M_{ht(M)}$, que es el conjunto de elementos minimales de $M \setminus (\bigcup \{M_\eta \mid \eta \in ht\,(M)\})$. Como $\langle M, < \rangle$ es un orden bien fundado, se sigue que $M \setminus (\bigcup \{M_\eta \mid \eta \in ht\,(M)\})$, al no tener elementos minimales, es un conjunto vacío. Por lo tanto, para todo $x \in M$, existe un $\eta \in ht\,(M)$ tal que $x \in M_\eta$. Además, este ordinal η, es único por el inciso (ii) de la proposición 1.6. Por la minimalidad de $ht\,(M)$, si $\eta \in ht\,(M)$, M_η es un conjunto no vacío. Entonces podemos decir que el conjunto $\{M_\eta \mid \eta \in ht\,(M)\}$ es una partición de M, y además una partición en anticadenas. Así, a cada elemento de M (como antes a cada cadena) podemos asignarle un ordinal. Si $x \in M_\eta$, diremos que x tiene altura η y lo denotaremos $ht\,(x) = \eta$. Para ver mejor cómo se refleja este concepto recién definido en la estructura del orden tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.7 *Sea $\langle M, < \rangle$ un orden parcial bien fundado.*

(i) Si $x \in M_\delta$ y $\eta \in \delta$, entonces existe $y \in M_\eta$, tal que $y < x$. Es decir, si $ht\,(x) = \delta$ y $\eta \in \delta$, existe $y \in M$ tal que $y < x$ y $ht\,(y) = \eta$.

(ii) Si $x, y \in M$ y $x < y$, entonces $ht\,(x) \in ht\,(y)$

Demostración. (i) Tenemos que, si $\eta' \in \eta$, entonces $M_{\eta'} \cap M_\delta = \varnothing$. Por lo tanto, $x \in M \setminus (\bigcup \{M_{\eta'} \mid \eta' \in \eta\})$. El conjunto de elementos minimales de $M \setminus (\bigcup \{M_{\eta'} \mid \eta' \in \eta\})$ es M_η, y, por el inciso (i), de la proposición 1.6, tenemos que existe $y \in M_\eta$ tal que $y \leqslant x$. Como $M_\eta \cap M_\delta = \varnothing$, $y < x$.

(ii) La demostración será por contrapuesta. Si $ht\,(y) \subseteq ht\,(x)$, para todo $\eta \in ht\,(y)$, $M_\eta \cap M_{ht(x)} = \varnothing$. Como $x \in M_{ht(x)}$, tenemos que $x \in M \setminus (\bigcup \{M_\eta \mid \eta \in ht\,(y)\})$. Por su definición, $M_{ht(y)}$ es el conjunto de elementos minimales de $M \setminus (\bigcup \{M_\eta \mid \eta \in ht\,(y)\}$. Como $y \in M_{ht(y)}$, y es un elemento minimal de $M \setminus (\bigcup \{M_\eta \mid \eta \in ht\,(y)\}$. Por lo tanto, $x \nless y$. ■

Los siguientes resultados, que ayudarán a demostrar algunos de los teoremas principales de este trabajo, establecen la relación que existe entre la altura de los órdenes bien fundados contenidos en $\langle M, < \rangle$, un orden parcial bien fundado, con la altura del mismo.

Proposición 1.8 *Sea $\langle M, < \rangle$ un conjunto con un orden parcial bien fundado. Sea N un subconjunto de M. El conjunto parcialmente ordenado $\left\langle N, <_{|N} \right\rangle$ es bien fundado y, por lo tanto, tenemos definida su altura $ht\,(N)$. Además $ht\,(N) \subseteq ht\,(M)$.*

Demostración. Para cada x elemento de N distingamos $ht_M\,(x)$ y $ht_N\,(x)$, las respectivas alturas de x según los conjuntos ordenados $\langle M, < \rangle$ y $\left\langle N, <_{|N} \right\rangle$. Se afirma que para todo ordinal η, si tomamos $x \in N$ tal que $ht_N\,(x) = \eta$, entonces $\eta \subseteq ht_M\,(x)$. La demostración de este enunciado es con inducción fuerte. Fijemos un ordinal η. Supongamos que para todo $\delta \in \eta$, si $x \in N$ y $ht_N\,(x) = \delta$, entonces $\delta \subseteq ht_M\,(x)$. Sea $y \in N$ tal que $ht_N\,(y) = \eta$. Por el inciso (i) de la proposición 1.7, tenemos que para todo $\delta \in \eta$ existe y_δ en N tal que $ht_N\,(y_\delta) = \delta$ y $y_\delta < y$. Por la hipótesis de inducción, para todo $\delta \in \eta$, $\delta \subseteq ht_M\,(y_\delta)$. Como $y_\delta < y$, por el inciso (ii) de la proposición 1.7, $ht_M\,(y_\delta) \in ht_M\,(y)$. Entonces, para todo $\delta \in \eta$, $\delta \in ht_M\,(y)$. Por lo tanto, $\eta \subseteq ht_M\,(y)$, con lo que concluye la inducción. Así tenemos que para todo $x \in N$, $ht_N\,(x) \subseteq ht_M\,(x)$. Sea $\eta \in ht\,(N)$. Por la definición de altura, N_η es no vacío, y por ende existe x en N tal que $ht_N\,(x) = \eta$. Entonces $\eta \subseteq ht_M\,(x) \in ht\,(M)$. Por lo tanto, $ht\,(N) \subseteq ht\,(M)$. ■

Esta proposición tiene una sencilla consecuencia en el caso en que el subconjunto N de M forme una cadena.

Proposición 1.9 *Sea $\langle M, < \rangle$ un orden parcial bien fundado. Si η es un ordinal y existe $A \subseteq M$ tal que $\left\langle A, <_{|A} \right\rangle$ es una cadena con tipo de orden η, entonces $\eta \subseteq ht\,(M)$.*

Demostración. Sea $f : \eta \longrightarrow A$ la función que establece el isomorfismo entre $\langle \eta, \in \rangle$ y $\left\langle A, <_{|A} \right\rangle$. Sea $\delta \in \eta$ y supongamos que para todo $\beta \in \delta$, $\beta \subseteq ht_A\,(f\,(\beta))$. Si tomamos $\beta \in \delta$, inmediatamente tenemos que $f\,(\beta) < f\,(\delta)$. Por la proposición 1.7, tenemos que $ht_A\,(f\,(\beta)) \in ht_A\,(f\,(\delta))$. Por lo tanto, $\beta \in ht_A\,(f\,(\delta))$. De aquí se sigue que $\delta \subseteq ht_A\,(f\,(\delta))$. Por inducción fuerte esto sucede para todo $\delta \in \eta$. Si $\delta \in \eta$, entonces $\delta \subseteq ht_A\,(f\,(\delta)) \in ht\,(A)$. Por lo tanto, $\eta \subseteq ht\,(A)$. De la proposición 1.8 se sigue que $\eta \subseteq ht\,(M)$. ■

De este resultado se puede deducir que

$$sup\left\{\eta \in OR \mid \exists A \subseteq M \ ot\left(\left\langle A, <_{|A}\right\rangle\right) = \eta\right\} \subseteq ht\left(M\right).$$

Se puede por esto tener la idea de que las cadenas del conjunto $\langle M, <\rangle$ contribuyen a hacerlo alcanzar mayor altura. O que siendo el orden de altura baja, en el caso por ejemplo que la altura de M fuese menor a la cardinalidad de M, necesariamente las cadenas de $\langle M, <\rangle$ tienen cardinalidad menor a la cardinalidad de M. Este hecho es particularmente trascendente cuando M es un conjunto infinito, pues en tal caso, aun no siendo un conjunto linealmente ordenado, M podría contener cadenas de su propia cardinalidad. (Esta desigualdad puede ser estricta. De hecho, existen órdenes parciales bien fundados de altura arbitrariamente grande que no tienen ninguna cadena infinita, lo cual se argumenta en la página 243 de [Ha10]). De momento hemos pasado por características básicas de los órdenes bien fundados que tienen un interés general dentro de la teoría de órdenes y la combinatoria infinita, como, por ejemplo, en el estudio de los árboles, que son un tipo de órdenes bien fundados. También se ha visto un poco de la relación que tienen estos órdenes con los buenos órdenes, sobre todo con los ordinales. El teorema 1.15 refuerza esa relación y abre las preguntas alrededor de las que gira este trabajo. Para entender la demostración de ese teorema serán necesarias algunas definiciones y algunos resultados que no dejarán de tener importancia en los próximos capítulos.

Definición 1.10 *Sean $\langle A_0, <_0\rangle$ y $\langle A_1, <_1\rangle$ dos conjuntos parcialmente ordenados, con A_0 y A_1 dos conjuntos ajenos. Por la suma de los dos órdenes, denotada*

$$\langle A_0, <_0\rangle + \langle A_1, <_1\rangle,$$

entenderemos al par $\langle A_0 \cup A_1, <\rangle$, donde $<$ es la relación sobre $A_0 \cup A_1$ definida

$$x < y \Longleftrightarrow \begin{cases} x, y \in A_0 & x <_0 y \\ x, y \in A_1 & x <_1 y \\ x \in A_0 & y \in A_1. \end{cases}$$

La relación $<$ recién definida es un orden parcial sobre $A_0 \cup A_1$. Si x es un elemento de $A_0 \cup A_1$, inmediatamente se tiene que $x \nless x$. La relación $<$

es entonces antirreflexiva. Sean x, y, z elementos de $A_0 \cup A_1$, tales que $x < y$ y $y < z$. Si $z \in A_0$, entonces, $y \in A_0$. Por lo tanto, $x \in A_0$. Resultando de esto que $x <_0 y <_0 z$, también $x <_0 z$. Por lo tanto, $x < z$. Supongamos que $z \in A_1$. Si $x \in A_0$, trivialmente $x < z$. Si $x \in A_1$, entonces, $y \in A_1$. Además, $x <_1 y <_1 z$, y, por lo tanto, $x <_1 z$. Se concluye que $x < z$. La relación $<$ es transitiva. Entonces, $<$ es un orden parcial sobre $A_0 \cup A_1$. Esta noción de suma de órdenes se puede generalizar de la siguiente manera.

Definición 1.11 *Sea $\langle I, \prec\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada elemento i de I, sea $\langle A_i, <_i\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Además, si $i, j \in I$ son distintos, supongamos que A_i y A_j son conjuntos ajenos. Por la suma de los órdenes $\langle A_i, <_i\rangle$ según el conjunto ordenado $\langle I, \prec\rangle$ denotada*

$$\sum_{\langle I,\prec\rangle} \langle A_i, <_i\rangle$$

entenderemos al par $\langle\bigcup\{A_i \mid i \in I\}, <\rangle$, donde la relación $<$ está definida del siguiente modo

$$x < y \Longleftrightarrow \begin{cases} x, y \in A_i & x <_i y \\ x \in A_i, y \in A_j & i \prec j. \end{cases}$$

La relación $<$ es un orden parcial sobre $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$. Indudablemente si $x \in \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ entonces $x \nless x$. Supongamos que $x < y < z$. Entonces $x \in A_i$, $y \in A_j$ y $z \in A_k$, donde $i \preceq j \preceq k$. Si $i \prec k$, entonces $x < z$. Si $i = k$, entonces, $i = j = k$. Además, $x <_i y <_i z$, por lo cual, $x <_i z$. Se concluye que $x < z$. Por lo tanto, $<$ es un orden parcial. Un caso específico de la definición 1.11 se da cuando el conjunto I es un intervalo de ordinales y $\prec$ es la pertenencia $\in$. A lo largo del texto varias veces se harán sumas de buenos órdenes según un buen orden. Siempre que se haga una de éstas se utilizará el resultado de la siguiente proposición.

Proposición 1.12 *Sea I un conjunto no vacío de ordinales y tomemos una familia de conjuntos ajenos $\{A_\beta \mid \beta \in I\}$. Para cada $\beta \in I$, sea $\langle A_\beta, <_\beta\rangle$ un conjunto bien ordenado. Entonces la suma de órdenes*

$$\sum_{\langle I,\in\rangle} \langle A_\beta, <_\beta\rangle$$

es un conjunto bien ordenado.

Demostración. Sea $<$ la relación definida por la suma. Si B es un subconjunto no vacío de $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in I\}$, podemos relacionarle el conjunto $B' := \{\beta \in I \mid B \cap A_\beta \neq \varnothing\}$. Dado que B es no vacío, B' es un subconjunto no vacío de I y, por lo tanto, tiene un ordinal mínimo δ. $A_\delta \cap B$ es un subconjunto no vacío de A_δ. Sea x el mínimo de $A_\delta \cap B$ según $<_\delta$. Veamos que x es también el mínimo de B según $<$. Si y es un elemento de B, existe $\beta \in B'$ tal que $y \in A_\beta$. Se sabe que $\delta \subseteq \beta$, pues δ es el ordinal mínimo de B'. Si $\delta \in \beta$, inmediatamente tenemos que $x < y$. Por otro lado, si $\beta = \delta$, entonces $x, y \in B \cap A_\delta$. Siendo x el elemento mínimo de $B \cap A_\delta$ según $<_\delta$, entonces $x \leqslant_\delta y$. Por lo tanto, $x \leqslant y$. Así, se concluye que x es el elemento mínimo de B según $<$. Como todo subconjunto no vacío de $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in I\}$ tiene un elemento mínimo según $<$, esta suma de órdenes resulta ser un conjunto bien ordenado. ■

La suma de dos órdenes definida en 1.10 es la misma que en 1.11, con I el intervalo de ordinales $[0, 1]$, y $\prec$ el orden usual $\in$. La proposición 1.12, por esto, nos dice que la suma de dos buenos órdenes es también un buen orden. La siguiente proposición es importante, pues establece un criterio para determinar si un orden parcial $<$, sobre un conjunto M, es igual a la intersección de un conjunto de órdenes lineales $\{<_i \mid i \in I\}$ sobre el mismo conjunto.

Proposición 1.13 *Sea $\{<_i \mid i \in I\}$ un conjunto de órdenes lineales sobre un conjunto M. Sea $<$ un orden parcial sobre M. Entonces, $< = \bigcap\{<_i \mid i \in I\}$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones para elementos x, y en M:*

(i) Si $x < y$, entonces para todo $i \in I$ $x <_i y$.

(ii) Si x es incomparable con y según $<$, entonces existen $i, j \in I$ tales que $y <_j x$ y *$x <_i y$.*

Demostración. Primero se probará que la igualdad de los órdenes implica ambos incisos. Si $< = \bigcap\{<_i \mid i \in I\}$, inmediatamente se cumple el punto (i). Para probar el punto (ii), supongamos que x y y son incomparables según $<$. Sea $i \in I$. El orden $<_i$ es lineal, por lo cual, x y y son comparables según $<_i$. Supongamos que $x <_i y$. Si para toda $j \in I$, $x <_j y$, tendríamos que $x < y$, lo que es una contradicción. Entonces existe $j \in I$ tal que $x \nless_j y$. Como el orden $<_j$ es lineal, esto implica que $y <_j x$. Así, existen $i, j \in I$ tales que $x <_i y$ y $y <_j x$.

Supongamos que se cumplen los puntos (i) y (ii). Por el punto (i), tenemos que $<\subseteq \bigcap \{<_i \mid i \in I\}$. Denotemos al orden $\bigcap \{<_i \mid i \in I\} :=<'$. Se probará que $<' \subseteq <$ por contrapositiva. Si $x \nless y$, tenemos dos opciones. Si $y < x$, entonces $y <' x$. Como la relación $<'$ es un orden, esto significa que $x \nless' y$. Por otro lado, si x y y son incomparables según $<$, entonces, por el punto (ii) existen $i, j \in I$ tales que $x <_i y$ y $y <_j x$. Esto implica que $x \nless_j y$. Por lo tanto, $x \nless' y$. Se concluye que $<= \bigcap \{<_i \mid i \in I\}$. ■

Finalmente, requeriremos de la siguiente definición.

Definición 1.14 *Sea $\langle M, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $<'$ será llamado una extensión lineal de $<$ sobre M, si $<\subseteq<'$ y $\langle M, <' \rangle$ es un conjunto linealmente ordenado.*

Con esta definición podemos reformular el inciso (i) de la proposición 1.13, del siguiente modo:

(i) Para todo $i \in I$ el orden $<_i$ es una extensión lineal de $<$.

Si ya sabemos que un conjunto O de órdenes lineales consiste en extensiones lineales de un orden $<$, para concluir que la intersección de O es $<$, sólo es necesario comprobar que todo par de elementos incomparables según $<$ es comparado de manera distinta por dos de los órdenes en O. Ahora ya tenemos todos los elementos para entender el resultado más importante de este primer capítulo.

Teorema 1.15 *Sea $\langle M, < \rangle$ un orden parcial bien fundado. Existe entonces un conjunto de buenos órdenes $\{<_i \mid i \in I\}$ sobre M tal que $<= \bigcap \{<_i \mid i \in I\}$.*

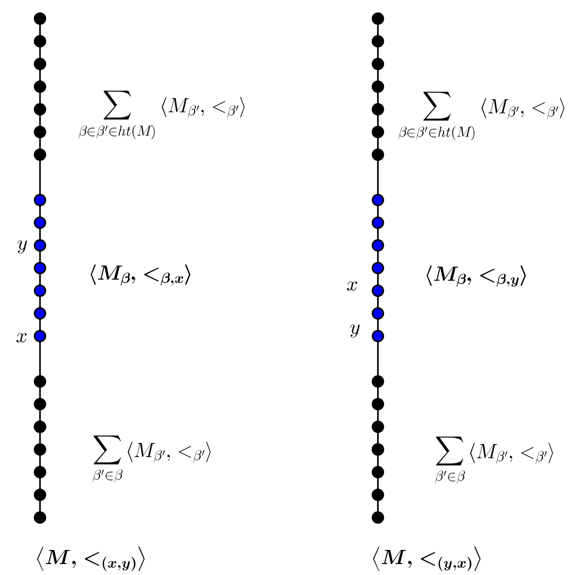
Demostración. Sea $\langle M, < \rangle$ un conjunto con un orden bien fundado. Asignemos, por medio del teorema del buen orden, a cada nivel M_β un buen orden $<_\beta$. De igual manera, si $x \in M_\beta$, asignemos además a M_β un buen orden $<_{\beta,x}$ en que x sea el mínimo (simplemente asignando un buen orden a $M_\beta \setminus \{x\}$ y sumándolo al conjunto ordenado $\langle \{x\}, \varnothing \rangle$). Sean $x, y \in M$ distintos e incomparables según $<$.

Caso 1. Supongamos que los dos elementos están en el mismo nivel M_β. Definimos los siguientes órdenes (para descargar la notación sólo se indicará bajo el signo de suma el intervalo de ordinales sobre el que se está sumando):

$$\left\langle M, <_{(x,y)} \right\rangle := \left(\sum_{\beta' \in \beta} \langle M_{\beta'}, <_{\beta'} \rangle \right) + \langle M_\beta, <_{\beta,x} \rangle + \sum_{\beta \in \beta' \in ht(M)} \langle M_{\beta'}, <_{\beta'} \rangle,$$

$$\left\langle M, <_{(y,x)} \right\rangle := \left(\sum_{\beta' \in \beta} \langle M_{\beta'}, <_{\beta'} \rangle \right) + \langle M_\beta, <_{\beta,y} \rangle + \sum_{\beta \in \beta' \in ht(M)} \langle M_{\beta'}, <_{\beta'} \rangle.$$

Estos órdenes se ejemplifican en la siguiente imagen.



Por las definiciones 1.10, 1.11 y la proposición 1.12, tenemos que $<_{(x,y)}$ y $<_{(y,x)}$ son buenos órdenes sobre el conjunto

$$\left(\bigcup_{\beta' \in \beta} M_{\beta'} \right) \cup M_\beta \cup \bigcup_{\beta \in \beta' \in ht(M)} M_{\beta'} = M.$$

Sean z y w elementos de M tales que $z < w$. Se sigue que $ht\,(z) \in ht\,(w)$. Por la construcción de ambos órdenes, tenemos que $z <_{(x,y)} w$ y $z <_{(y,x)} w$. Además, $x <_{(x,y)} y$ y $y <_{(y,x)} x$.

Caso 2. Supongamos que los elementos están en niveles distintos. Digamos que $ht\,(x) \in ht\,(y)$. De manera similar al caso anterior, definimos el siguiente orden:

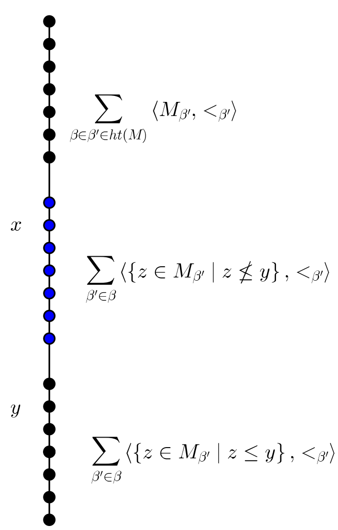
$$\left\langle M, <_{(x,y)} \right\rangle := \sum_{\beta' \in ht(M)} \left\langle M_{\beta'}, <_{\beta'} \right\rangle .$$

De manera idéntica al caso 1, si $z < w$, entonces $z <_{(x,y)} w$. Este orden cumple también $x <_{(x,y)} y$. Para tener un orden que cumpla lo inverso usaremos el siguiente:

$$\left\langle M, <_{(y,x)} \right\rangle := \left(\sum_{\beta' \subseteq ht(y)} \left\langle \{z \in M_{\beta'} \mid z \leqslant y\}, <_{\beta'} \right\rangle \right)$$

$$+ \left(\sum_{\beta' \subseteq ht(y)} \left\langle\right\rangle \{z \in M_{\beta'} \mid z \nleqslant y\}, <_{\beta'} \Bigg\rangle \right) + \left(\sum_{ht(y) \in \beta' \in ht(M)} \left\langle M_{\beta'}, <_{\beta'} \right\rangle \right).$$

Este conjunto ordenado, que es el más complicado de esta demostración, está descrito en la siguiente imagen.



$\langle \boldsymbol{M}, <_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})} \rangle$

Que se trata de un buen orden es inmediato de la proposición 1.12. Dado que $y \leqslant y$, y $y \in M_{ht(y)}$, entonces

$$y \in \bigcup_{\beta' \subseteq ht(y)} \{z \in M_{\beta'} \mid z \leqslant y\} .$$

Como x y y son incomparables, $x \nleqslant y$. Dado que $ht(x) \in ht(y)$, se sigue que

$$x \in \bigcup_{\beta' \subseteq ht(y)} \{z \in M_{\beta'} \mid z \nleqslant y\} .$$

Por la definición 1.10, $y <_{(y,x)} x$. Falta ver que el orden $<_{(y,x)}$ contiene a $<$. Sean $z, w \in M$ tales que $z < w$. Supongamos que $ht(y) \in ht(w)$. Si $ht(z) \subseteq ht(y)$, por la definición 1.10, $z <_{(y,x)} w$. Si $ht(y) \subseteq ht(z)$, por la definición 1.11, tenemos que $z <_{(y,x)} w$. Supongamos ahora que $ht(w) \subseteq ht(y)$. Si ambos elementos son menores o iguales a y o ninguno lo es, por la definición 1.11, $z <_{(y,x)} w$. Lo mismo pasa, por la definición 1.10, si $z \leqslant y$ y $w \nleqslant y$. El único caso que podría revertir el orden se daría si $w \leqslant y$ y $z \nleqslant y$. Pero, como $z < w$, si, además, $w \leqslant y$, tendríamos que $z < y$, lo cual vuelve imposible tal caso. Por lo tanto, $<_{(y,x)}$ contiene al orden $<$.Sea $[M]^2_{\nleqslant}$ el conjunto de todos los pares de M que sean incomparables. Si $z < w$, ya vimos que para todo par $\{x, y\}$, $z <_{(x,y)} w$ y $z <_{(y,x)} w$. Si z es incomparable con w según $<$, entonces $z <_{(z,w)} w$ y $w <_{(w,z)} z$. Usando la proposición 1.13, se concluye que

$$< = \bigcap_{\{x,y\} \in [M]^2_{\nleqslant}} \left(<_{(x,y)} \cap <_{(y,x)} \right) .$$

Por lo tanto, $<$ es la intersección de un conjunto de buenos órdenes. ■

Una de las grandes ventajas de trabajar con buenos órdenes, u órdenes lineales en general, es la considerable sencillez que tienen para describirse, incluso para imaginarse con respecto a los órdenes parciales en general. De ahí la importancia de relacionar un orden parcial con cierto conjunto de órdenes lineales, como fue el caso de la proposición anterior, en la que, trabajando con un orden parcial bien fundado, encontramos un conjunto de buenos órdenes con los cuales describirlo.

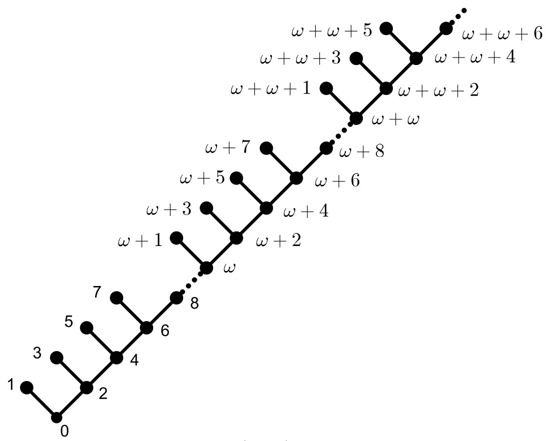
De una manera más general, Dushnik y Miller demostraron en [DM41] que todo orden parcial, no necesariamente bien fundado, es intersección de un conjunto de órdenes lineales. Una demostración de esto está también presente en [Ha10], página 206. Siendo esto posible, existe una cardinalidad mínima necesaria para un conjunto tal de órdenes lineales. Así, Dushnik y Miller llegaron al siguiente concepto.

Definición 1.16 *Sea $\langle M, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado, la dimensión de $\langle M, < \rangle$, $dim\langle M, < \rangle$ es el mínimo cardinal μ tal que existe un conjunto $O := \{<_\alpha | \, \alpha \in \mu\}$ donde cada $<_\alpha$ ordena linealmente a todo M con $< = \bigcap O$.*

El conjunto de órdenes que dimos en la proposición anterior cumple, como O en la definición, que su intersección es el orden con que habíamos iniciado. Además, todos son buenos órdenes, es decir, órdenes lineales bien fundados. Lo cual nos puede llevar a pensar que la dimensión de un conjunto con un orden parcial bien fundado $\langle M, < \rangle$ podría ser dada por un conjunto de buenos órdenes sobre el conjunto M. Si fijamos un orden bien fundado $\langle M, < \rangle$ y tomamos un conjunto O de órdenes lineales de cardinalidad $dim\langle M, < \rangle$ cuya intersección sea $<$ ¿serán esos órdenes lineales necesariamente buenos órdenes? Para responder a esta pregunta (negativamente) se da el siguiente ejemplo. Sea ν un cardinal infinito. Los ordinales menores a ν pueden ser pares o impares, según el residuo que resulte de dividirlos entre dos, usando el algoritmo de la división para ordinales (ver [AC14], p. 128). Usando estos dos tipos de ordinales, definamos la siguiente relación $\ll$ sobre ν; si x y y son elementos de ν:

$$x \ll y \textit{ si y sólo si } x \in y \text{ y } x \textit{ es par}.$$

Veamos que la relación $\ll$ es un orden bien fundado sobre ν. Ya que si $x \in \nu$, $x \notin x$, entonces $\ll$ es una relación antirreflexiva sobre ν. Supongamos que x, y, z son elementos de ν tales que $x \ll y \ll z$. Eso quiere decir que x es par y que $x \in y \in z$, es decir, $x \in z$. Por lo tanto, $x \ll z$, y la relación $\ll$ es transitiva. Sea A un subconjunto no vacío de ν. Si A sólo tiene ordinales impares, todos los elementos de A son minimales, pues ninguno es menor a otro según $\ll$. Ahora supongamos que A tiene algún ordinal par. Sea x el mínimo ordinal par en A según la pertenencia. Si existiese $y \in A$ tal que $y \ll x$, tendríamos que $y \in x$ y que y es par, lo que es una contradicción. Entonces tal ordinal x es un elemento minimal de A según $\ll$. La siguiente imagen describe el orden recién definido.

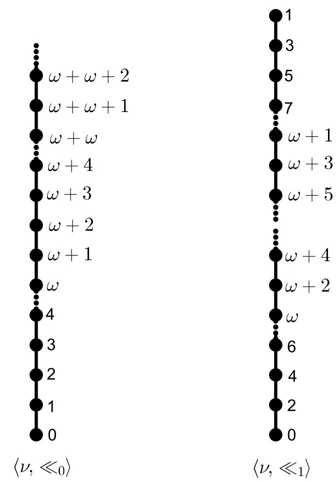


$\langle \nu, \ll \rangle$

Se construirán dos órdenes lineales que contengan a $\ll$, $\ll_0$ y $\ll_1$, para demostrar que la dimensión de $\langle M, < \rangle$ es dos. Sea $\ll_0 = \in_{|\nu}$. Para definir $\ll_1$, tomemos x y y elementos de ν:

$$x \ll_1 y \textit{ si y sólo si } \begin{cases} x \in y \text{ y } x \textit{ es par} \\ o \\ y \in x \text{ y } y \textit{ es impar.} \end{cases}$$

La relación $\ll_0$ es inmediatamente un orden lineal sobre ν que contiene a $\ll$. La relación $\ll_1$, por su definición, contiene a $\ll$. También se trata de una relación antirreflexiva. Supongamos que x y y son elementos de ν y que $x \in y$. Si x es par, entonces $x \ll_1 y$, si es impar, $y \ll_1 x$. Por lo tanto, todos los elementos de ν son comparables según $\ll_1$. Verifiquemos su transitividad. Supongamos que $x \ll_1 y \ll_1 z$. Si x es impar, entonces $y \in x$ y y es impar. Del mismo modo, $z \in y$ y z es impar. Se concluye que $z \in x$, y z es impar. Por lo tanto, $x \ll_1 z$. Si z es par, entonces $y \in z$ y y es par. Igualmente, $x \in y$ y x es par. Finalmente, $x \in z$, y x es par. Por lo tanto, $x \ll_1 z$. El caso no contemplado aún es cuando x es par y z impar. Si $x \in z$, entonces $x \ll_1 z$. Si $z \in x$, entonces $x \ll_1 z$. Por lo tanto, la relación $\ll_1$ es transitiva y resulta ser una extensión lineal de $\ll$. Los dos órdenes están descritos en la siguiente imagen.



Para verificar que $\ll=\ll_0\cap\ll_1$, falta ver que si x y y son incomparables según $\ll$, son comparados de distinta manera según $\ll_0$ y $\ll_1$. Sean x y y elementos distintos de ν incomparables según $\ll$. Sin perder la generalidad podemos suponer que $x \in y$. Entonces $x \ll_0 y$. Además, al ser incomparables según $\ll$, x es impar. Entonces $y \ll_1 x$. El conjunto $O=\{\ll_0,\ll_1\}$, nos dice que la dimensión de $\langle\nu,\ll\rangle$ es a lo más 2. Si tal dimensión fuese 1, el orden $\ll$ sería lineal, pero no es el caso. Por lo tanto, su dimensión es 2. Podemos, sin embargo, notar que $\ll_1$ no es un buen orden. Si n y m son dos números naturales y $n \in m$, entonces, al ser números impares, $2m+1 \ll_1 2n+1$. Así, el conjunto $\{2n+1 \mid n\in\omega\}$ forma una cadena descendente infinita en el conjunto ordenado $\langle\nu,\ll_1\rangle$. Entonces este conjunto O nos da una respuesta negativa a la pregunta: si $\langle M,<\rangle$ es un orden bien fundado, ¿un conjunto de extensiones lineales de $<$ que nos dé su dimensión será de buenos órdenes? Pero aún no sabemos si el conjunto O, puede ser o no sustituido por un conjunto de dos buenos órdenes. Surge la siguiente pregunta, si $\langle M,<\rangle$ es un orden parcial bien fundado, ¿existirá un conjunto O de buenos órdenes sobre M cuya intersección sea $<$ y cuya cardinalidad sea $dim\langle M,<\rangle$? Si la respuesta a esta pregunta fuese negativa para algún conjunto con un orden bien fundado $\langle M,<\rangle$ tendría perfecto sentido la siguiente definición, que está además justificada por el teorema 1.15, y que se introduce en este trabajo.

Definición 1.17 *Sea $\langle M,<\rangle$ un orden bien fundado. Llamaremos complejidad de $\langle M,<\rangle$, que denotaremos $com\langle M,<\rangle$, al mínimo cardinal μ tal que* *existe un conjunto* $O := \{<_\alpha | \ \alpha \in \mu\}$ *donde cada* $<_\alpha$ *bien ordena al conjunto* M *con* $<= \bigcap O$.

Si tomamos un orden bien fundado $\langle M, <\rangle$, la inmediata relación que existe entre los dos cardinales recién definidos es $dim\,\langle M, <\rangle \subseteq com\,\langle M, <\rangle$. Tomemos un conjunto O de buenos órdenes sobre M de cardinalidad $com\,\langle M, <\rangle$ cuya intersección sea $<$. Al ser O un conjunto de órdenes lineales sobre M cuya intersección es $<$, tiene, por la definición 1.16, cardinalidad mayor o igual a $dim\,\langle M, <\rangle$. Con estas nuevas notaciones la pregunta que se formuló antes de la última definición puede reformularse del siguiente modo; ¿para todo conjunto M con un orden bien fundado $<$, será cierto que $dim\,\langle M, <\rangle = com\,\langle M, <\rangle$? Planteada de otro modo, ¿existe M con un orden bien fundado $<$ tal que $dim\,\langle M, <\rangle \in com\,\langle M, <\rangle$? Un tipo de órdenes que podemos descartar rápidamente de la búsqueda de tal contraejemplo es el siguiente:

Definición 1.18 *Sea* $\langle M, <\rangle$ *un conjunto parcialmente ordenado. Lo llamaremos parcialmente bien ordenado si no tiene cadenas descendentes infinitas ni anticadenas infinitas.*

Obviamente estos órdenes son también bien fundados. Este tipo de órdenes es rápidamente descartable para responder a nuestra segunda pregunta. Para demostrarlo serán necesarias dos definiciones y dos teoremas.

Definición 1.19 *Sea* M *un conjunto y* κ *un cardinal. Usaremos las siguientes notaciones:*

(i) $[M]^\kappa := \{A \subseteq M \mid |A| = \kappa\}$,

(ii) $[M]^{\leqslant\kappa} := \{A \subseteq M \mid |A| \leqslant \kappa\}$,

(iii) $[M]^{<\kappa} := \{A \subseteq M \mid |A| < \kappa\}$.

Entenderemos lo análogo usando las expresiones $[M]^{\geqslant\kappa}$ *y* $[M]^{>\kappa}$.

Definición 1.20 *Sean* κ, λ *y* μ *cardinales. Con los símbolos*

$$\kappa \longrightarrow (\lambda, \mu)^2$$

queremos decir que si M es un conjunto de cardinalidad κ, y existe una función f con dominio $[M]^2$ y codominio 2, entonces existe un subconjunto M_λ de M de cardinalidad λ tal que $[M_\lambda]^2 \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ o existe un subconjunto M_μ de M de cardinalidad μ tal que $[M_\mu]^2 \subseteq f^{-1}[\{1\}]$.

Esta notación fue establecida por Erdös y Rado en [ER53]. Con ella se expresa con sencillez el siguiente teorema.

Teorema 1.21 *Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa \longrightarrow (\kappa, \aleph_0)^2$.*

Demostración. Ver [Ha10], página 187.

Teorema 1.22 *Sean $\langle M, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y A una anticadena en él. Si $<'$ es un orden parcial sobre A, entonces existe un orden lineal $\prec$ sobre todo M que contiene tanto a $<$ como a $<'$.*

Demostración. Ver [Ha10], página 54.

El siguiente teorema da una caracterización de los conjuntos parcialmente bien ordenados.

Teorema 1.23 *El conjunto ordenado $\langle M, < \rangle$ es parcialmente bien ordenado si y sólo si todas sus extensiones lineales son buenos órdenes.*

Demostración. Supongamos que un conjunto ordenado $\langle M, < \rangle$ tiene una extensión lineal $<'$, tal que tiene una cadena A descendente infinita. A cada elemento de $[A]^2$ le podemos asignar el 0 si ya eran comparables los dos elementos según $<$, o el 1 si no. Según el teorema 1.21, A tendrá un subconjunto infinito en que todos los pares ya eran comparables según $<$, o en que ninguno lo era. Entonces, M tendría una cadena descendente infinita, o una anticadena infinita según según $<$. De cualquier modo, $\langle M, < \rangle$ no es un conjunto parcialmente bien ordenado. Ahora supongamos que $\langle M, < \rangle$ no es un conjunto parcialmente bien ordenado. Si tiene una cadena descendente infinita, indudablemente ninguna de sus extensiones lineales es un buen orden. Si tiene una anticadena infinita A, podemos asignarle a A un orden $<'$ que la haga ser una cadena descendente infinita. Por el teorema 1.22, existe una extensión lineal $\prec$ de ambos órdenes. El orden $\prec$ es una extensión lineal de $<$ que tiene una cadena descendente infinita, es decir, que no es un buen orden. ■

Inmediatamente se concluye la siguiente proposición.

Proposición 1.24 *Si $\langle M, < \rangle$ es un conjunto parcialmente bien ordenado, entonces $dim \langle M, < \rangle = com \langle M, < \rangle$.*

Demostración. El conjunto O de órdenes lineales que nos dé testimonio de $dim \langle M, < \rangle$ será, por el teorema 1.23, un conjunto de buenos órdenes. Siendo la intersección de O igual a $<$, por la definición 1.17, se tiene que $com \langle M, < \rangle \subseteq |O|$. Por lo tanto, $com \langle M, < \rangle \subseteq dim \langle M, < \rangle$. De aquí se concluye la igualdad. ■

Esta igualdad se da además siempre que M sea un conjunto finito, pues de ese modo el orden no puede tener ni cadenas descendentes infinitas ni anticadenas infinitas. Si estamos interesados en encontrar un conjunto con un orden parcial bien fundado en los que haya una diferencia estricta entre *dim* y *com*, es antes que nada necesario que nos concentremos en conjuntos infinitos. Además, el orden ha de tener al menos alguna anticadena infinita. Por lo tanto, un candidato perfecto para que ambos números sean distintos es el orden $\langle M, \varnothing \rangle$ cuando M es infinito. Es decir, simplemente alguna anticadena infinita. Otro es el ejemplo que se dio en la página 14, $\langle \nu, \ll \rangle$. En este conjunto ordenado, el conjunto de los ordinales impares en ν forma una anticadena infinita de cardinalidad ν. En los siguientes capítulos se trabajará entonces solamente con conjuntos ordenados infinitos. Como consecuencia de sus principales resultados, se conocerá más sobre la relación que existe entre la complejidad y la dimensión, primero, y sobre la complejidad en general después.

Capítulo 2

Árboles y complejidad finita

Una manera de proceder a la resolución de las preguntas planteadas en el capítulo anterior podría ser la siguiente, tomar a M un conjunto (ya mencionamos la necesidad de que sea infinito), un orden bien fundado $<$ sobre M y un conjunto de buenos órdenes O sobre él para analizar al conjunto ordenado $\langle M, \bigcap O\rangle$ y posteriormente compararlo con $\langle M, <\rangle$. Si el conjunto ordenado $\langle M, \bigcap O\rangle$ cumple alguna característica que fuese consecuencia de la cardinalidad de O, y que el conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$ no cumpliese, tendríamos que la complejidad de $\langle M, <\rangle$ sería distinta a la cardinalidad de O. Así tendríamos un método para descartar cardinales en la búsqueda de la complejidad de un conjunto con un orden parcial bien fundado. Muy conveniente sería si la dimensión de $\langle M, <\rangle$ fuese uno de esos cardinales descartados. Para tal fin sería útil saber de todo un tipo de órdenes bien fundados del cual fuera sencillo calcular la dimensión.

Una clase muy importante entre los órdenes parciales bien fundados es la de los llamados árboles. Se pueden definir de la siguiente manera (que es la definición más abierta).

Definición 2.1 *Sea $\langle M, <\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Lo llamaremos árbol, si para todo $x \in M$, el conjunto $\{y \in M \mid y \leqslant x\}$ es un conjunto bien ordenado según $<$.*

Es fácil ver que se trata de un orden bien fundado. Tomemos un subconjunto no vacío A de M. Si $x \in A$, el conjunto $\{y \in A \mid y \leqslant x\}$ es un subconjunto no vacío de $\{y \in M \mid y \leqslant x\}$. Siendo este último un buen orden según

$<$, existe un elemento mínimo y' de $\{y \in A \mid y \leqslant x\}$. Sea $z \in A$ y supongamos que $z \leqslant y'$. Como $y' \leqslant x$, $z \in \{y \in A \mid y \leqslant x\}$. Siendo y' el elemento mínimo de este conjunto, $y = z$. Por lo tanto, y' es un elemento minimal de A. Así, todos los subconjuntos no vacíos de M tienen un elemento minimal, y el árbol $\langle M, <\rangle$ es un conjunto con un orden parcial bien fundado.

Los árboles tienen, entonces, definidas tanto la dimensión como la complejidad. Del hecho de que en un árbol $\langle M, <\rangle$ abundan las cadenas, principalmente las del tipo $\{y \in M \mid y \leqslant x\}$, resultará la sencillez para demostrar aquí su dimensión. Fijemos de aquí en adelante un árbol $\langle M, <\rangle$ y establezcamos una notación que se usará en los próximos párrafos.

Definición 2.2 *Si $x \in M$, se definen los dos siguientes conjuntos*

$$x^{<} := \{y \in M \mid y < x\},$$

$$x^{\leqslant} := \{y \in M \mid y \leqslant x\}.$$

Como el conjunto ordenado $\langle x^{\leqslant}, <\rangle$ es un buen orden, para cada $x \in M$, existen un único ordinal η y una función f_x tales que se da el siguiente isomorfismo de orden: $\langle x^{\leqslant}, <\rangle \cong_{f_x} \langle \eta, \in\rangle$. Para cada $x \in M$ fijemos f_x la función que da este isomorfismo con dominio η e imagen $x^{\leqslant}$.

Proposición 2.3 *Sean x y y dos elementos de M.*

(i) Si $y < x$, entonces $f_y \subsetneq f_x$.

(ii) Si y es incomparable con x según $<$, entonces f_y y f_x son incompatibles.

Demostración. (i) Como y es elemento de $x^{\leqslant}$, y es elemento de la imagen de f_x. Está, entonces, definido el ordinal $\eta =: f_x^{-1}(y)$. Dado que f_x es un isomorfismo de orden, $f_{x|\eta+1}$ es un isomorfismo de orden entre $\langle \eta+1, \in\rangle$ y $\langle f_x[\eta+1], <\rangle$. Veamos que $f_x[\eta+1] = y^{\leqslant}$. Si tomamos $z \in y^{\leqslant}$, al ser también elemento de $x^{\leqslant}$, está definido $f_x^{-1}(z)$. Dado que $z \leqslant y$, por la definición de f_x, $f_x^{-1}(z) \subseteq f_x^{-1}(y) = \eta$. Por lo tanto, $f_x^{-1}(z) \in \eta+1$ y $z \in f_x[\eta+1]$. Ahora, tomemos $z \in f_x[\eta+1]$. Existe $\beta \in \eta+1$ tal que $f_x(\beta) = z$. Tenemos que $\beta \subseteq \eta$, por lo cual, $z = f_x(\beta) \leqslant f_x(\eta) = y$. Por lo tanto, $z \in y^{\leqslant}$. Se concluye que $y^{\leqslant} = f_x[\eta+1]$. Así, $f_{x|\eta+1}$ es un isomorfismo de orden entre

$\langle \eta + 1, \in \rangle$ y $\langle y^{\leqslant}, < \rangle$. Como este isomorfismo es único, $f_{x|\eta+1} = f_y$, por lo cual, $f_y \subseteq f_x$. Por otro lado, $x \in im\,(f_x) = x^{\leqslant}$, mientras que $x \notin y^{\leqslant} = im\,(f_y)$, pues $x \nleqslant y$. Entonces f_x y f_y son funciones distintas. Se concluye que $f_y \subsetneqq f_x$.

(ii) Los dominios de f_x y f_y son ordinales, por lo que podemos suponer que $dom\,(f_y) \subseteq dom\,(f_x)$. Como la imagen de f_y es $y^{\leqslant}$, existe $\eta \in dom\,(f_y)$ tal que $f_y\,(\eta) = y$. Dado que $dom\,(f_y) \subseteq dom\,(f_x)$, η es elemento de $dom\,(f_x)$. La imagen de f_x es $x^{\leqslant}$, por lo cual, $f_x\,(\eta) \leqslant x$. Como $f_y\,(\eta) = y$ y $y \nleqslant x$, por ser x y y incomparables, $f_x\,(\eta) \neq f_y\,(\eta)$. Entonces f_y y f_x son incompatibles. ■

Ayudándonos de las sucesiones f_x, y de los datos que conocimos sobre ellos en la proposición 2.3, construiremos las extensiones lineales que nos darán la dimensión del árbol $\langle M, < \rangle$. Para eso nos ayudaremos de un orden lineal $\prec$ sobre M, que podría no tener ninguna relación con $<$. Este orden lineal servirá exclusivamente como criterio para comparar a los elementos de M que no sean ya comparados por $<$, así que de él solamente es necesario que sea lineal. Así, se define la siguiente relación sobre M. Si x y y son elementos distintos de M:

$$x <_0 y \textit{ si y sólo si } \begin{cases} x < y \\ o \\ f_x\,(\eta) \prec f_y\,(\eta) \;\; si\ \eta = min\,\{\beta \mid f_x\,(\beta) \neq f_y\,(\beta)\}\,. \end{cases}$$

La relación $<_0$ extiende a $<$. Además, si $x \in M$, como $x \nless x$ y $f_x = f_x$, $x \nless_0 x$. Sean x y y dos elementos distintos de M. Si son comparables según $<$, ya son comparables según $<_0$. Si no, como f_x y f_y son incompatibles, existe un ordinal mínimo η en que tienen imágenes distintas, que son comparables según $\prec$, por lo cual, también y y x son comparables según $<_0$. Por lo tanto, $<_0$ ya relaciona de alguna manera a todos los pares de elementos distintos de M. Para que efectivamente sea una extensión lineal de $<$ en M, aún falta comprobar que es una relación transitiva.

Proposición 2.4 *La relación $<_0$ es una extensión lineal de $<$.*

Demostración. Sean x, y y z elementos de M tales que $x <_0 y <_0 z$. Si $x < y < z$, tenemos que $x < z$, por lo cual, sencillamente se tiene que $x <_0 z$. A continuación se demostrarán los casos no triviales.

Caso 1. Supongamos que $x < y$ y que y es incomparable con z según $<$. Por la proposición 2.3, $f_x \subsetneqq f_y$ y f_y es incompatible con f_z. Además, si η es el mínimo ordinal en que difieren f_y y f_z, $f_y(\eta) \prec f_z(\eta)$. Siendo tanto η como $dom(f_x)$ ordinales, deben ser comparables según la pertenencia.

Supongamos que $dom(f_x) \subseteq \eta$. Si $\beta \in dom(f_x)$, entonces $\beta \in \eta$. Sabemos que $f_x(\beta) = f_y(\beta)$, pues $f_x \subsetneqq f_y$, y que $f_y(\beta) = f_z(\beta)$, pues η es el mínimo ordinal en que difieren las funciones f_y y f_z. Entonces para todo β en el dominio de f_x, $f_x(\beta) = f_z(\beta)$. Como $dom(f_x) \subseteq \eta \in dom(f_z)$, f_x y f_z son funciones compatibles. Por la proposición 2.3, x y z son comparables según $<$. Si $z \leqslant x$, tendríamos que $z < y$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $x < z$ y $x <_0 z$.

Ahora supongamos que $\eta \in dom(f_x)$. Si $\beta \in \eta$, tenemos que $f_x(\beta) = f_y(\beta) = f_z(\beta)$, pues $f_x \subsetneqq f_y$ y η es el mínimo ordinal en que f_y y f_z difieren. Además, $f_x(\eta) = f_y(\eta) \neq f_z(\eta)$. Entonces el mínimo ordinal en que f_x y f_z difieren es η. Además, $f_x(\eta) = f_y(\eta) \prec f_z(\eta)$. Por lo tanto, $x <_0 z$.

Caso 2. Supongamos que x es incomparable con y según $<$, y que $y < z$. Por la proposición 2.3, f_x y f_y son incompatibles y $f_y \subsetneqq f_z$. Sea η el mínimo ordinal en que f_x y f_y difieren. Inmediatamente tenemos que $f_x(\eta) \prec f_y(\eta)$, pues $x <_0 y$. Si $\beta \in \eta$, entonces $f_x(\beta) = f_y(\beta)$, y $f_y(\beta) = f_z(\beta)$. Además, $f_x(\eta) \neq f_y(\eta) = f_z(\eta)$. Entonces η es el mínimo ordinal en que f_x y f_z difieren. Como $f_x(\eta) \prec f_y(\eta) = f_z(\eta)$, se concluye que $x <_0 z$.

Caso 3. Supongamos que x es incomparable con y según $<$, y y con z. Sean δ el mínimo ordinal en que f_x y f_y difieren, y η el mínimo ordinal en que f_y y f_z difieren. Tenemos que $f_x(\delta) \prec f_y(\delta)$ y $f_y(\eta) \prec f_z(\eta)$.

Caso 3.1. Supongamos que $\delta \in \eta$. Si $\beta \in \delta$, entonces $f_x(\beta) = f_y(\beta)$. Además, como $\beta \in \eta$, $f_y(\beta) = f_z(\beta)$. Por lo tanto, si $\beta \in \delta$, $f_x(\beta) = f_z(\beta)$. Por otro lado, $f_x(\delta) \neq f_y(\delta) = f_z(\delta)$, por lo cual, el mínimo ordinal en que f_x y f_z difieren es δ. Además, $f_x(\delta) \prec f_y(\delta) = f_z(\delta)$. Por lo tanto, $x <_0 z$.

Caso 3.2. Supongamos que $\delta = \eta$. Si $\beta \in \eta$, entonces $f_x(\beta) = f_y(\beta) = f_z(\beta)$. Sabemos que $f_x(\eta) \prec f_y(\eta)$ y $f_y(\eta) \prec f_z(\eta)$. Por lo tanto, $f_x(\eta) \prec f_z(\eta)$, lo cual nos indica además que η es el primer ordinal en que f_x y f_z difieren. Se concluye que $x <_0 z$.

Caso 3.3. Supongamos que $\eta \in \delta$. Si $\beta \in \eta$, entonces $f_y(\beta) = f_z(\beta)$. Además, como $\beta \in \delta$, $f_x(\beta) = f_y(\beta)$. Por lo tanto, $f_x(\beta) = f_z(\beta)$. Por otro lado, $f_x(\eta) = f_y(\eta) \neq f_z(\eta)$. Entonces el mínimo ordinal en que f_x y f_z

difieren es η. Además, $f_x(\eta) = f_y(\eta) \prec f_z(\eta)$. Por lo tanto, $x <_0 z$. ∎

Es importante notar que para que $<_0$ fuera una extensión lineal de $<$, de $\prec$ sólo fue necesario que fuera un orden lineal. Se puede, del mismo modo, tomar el orden $\prec^{-1}$, que es igualmente un orden lineal sobre M, y definir la relación $<_1$ de la manera análoga; si x, y son elementos distintos de M, entonces

$$x <_1 y \; si \; y \; sólo \; si \; \begin{cases} x < y \\ o \\ f_x(\eta) \prec^{-1} f_y(\eta) \, si \; \eta = min\{\beta \mid f_x(\beta) \neq f_y(\beta)\}. \end{cases}$$

Se obtiene, igualmente, una extensión lineal de $<$. Con las relaciones $<_0$ y $<_1$ se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.5 *Si $\langle M, < \rangle$ es un árbol que no es un orden lineal, su dimensión es dos.*

Demostración. Si no es lineal, su dimensión es mayor a uno, pues si existiese un conjunto de órdenes lineales sobre M, de un solo elemento $O = \{<'\}$ tal que $<= \bigcap O =<'$, concluiríamos que $<$ es un orden lineal. Por lo tanto, si encontramos un conjunto O de dos órdenes lineales cuya intersección sea $<$, la dimensión de $\langle M, < \rangle$ será 2. El conjunto que se propone es $\{<_0, <_1\}$. Necesitamos demostrar que $<=<_0 \cap <_1$. Se sabe que para cualesquiera $x, y \in M$, si $x < y$, entonces $x <_0 y$ y $x <_1 y$. Sólo necesitamos ver que si x, y son elementos incomparables de M según $<$, son comparados de distinta manera según los órdenes $<_0$ y $<_1$. Si x y y son incomparables, las sucesiones f_x y f_y son incompatibles. Sea η el mínimo ordinal en que difieren. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $f_x(\eta) \prec f_y(\eta)$. Entonces $x <_0 y$ y $y <_1 x$, lo que concluye la demostración. ∎

Con esto se encontró un tipo de órdenes bien fundados que tienen la misma dimensión. Ahora, si encontráramos un árbol $\langle M, < \rangle$, cuya complejidad sea mayor a 2, aunque no la conozcamos exactamente, de inmediato tendríamos que $dim \langle M, < \rangle \in com \langle M, < \rangle$.

A continuación, y en los próximos capítulos, se procederá a describir qué sucede al intersecar buenos órdenes sobre un conjunto infinito, principalmente en lo concerniente a la presencia de cadenas y anticadenas infinitas. No se pondrá ninguna restricción a los buenos órdenes, salvo por la cantidad de ellos.

La presencia de una cadena en el orden resultante nos habla de coincidencias entre los órdenes y la de una anticadena, de contradicciones entre los mismos. Si esperamos encontrar (o no) alguna cadena de cierta cardinalidad, es que esperamos que haya cierta cardinalidad de coincidencias (o no) entre la información que nos dan los órdenes. Si de éstos sabemos solamente que son buenos órdenes y la cantidad de ellos, la cuestión queda muy abierta, muy azarosa. No debería sorprender entonces que el teorema 1.21 sea clave para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.6 *Sea M un conjunto de cardinalidad infinita κ. Sean $<_0$ y $<_1$ dos buenos órdenes en M. Entonces existe $F \subseteq M$ de cardinalidad κ en que ambos órdenes coinciden. Es decir, existe $F \subseteq M$ de cardinalidad κ, que es una cadena según $<=<_0 \cap <_1$.*

Demostración. Sea $f : [M]^2 \longrightarrow 2$ la función definida por

$$f(\{x,y\}) = \begin{cases} 1 & si\ x <_0 y \text{ y } x <_1 y, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

El conjunto F que buscamos, de existir, cumpliría $[F]^2 \subseteq f^{-1}\{1\}$. Supongamos que no existe. Entonces, por el teorema 1.21, debe existir $M' \subseteq M$ infinito, tal que $[M']^2 \subseteq f^{-1}\{0\}$. De este modo, conjunto ordenado $\langle M', <_{0|M'} \rangle$ es un conjunto bien ordenado infinito. Podemos, entonces, tomar un subconjunto $\{x_n \mid n \in \omega\}$ de M', tal que si $i \in j \in \omega$, entonces $x_i <_0 x_j$. Sean $i, j \in \omega$, tales que $i \in j$. Tenemos que $x_i <_0 x_j$ y que $f(\{x_i, x_j\}) = 0$. Entonces, por la definición de f, $x_i \nless_1 x_j$, es decir, $x_j <_1 x_i$. Así, tendríamos una cadena descendente infinita según $<_1$. Dado que $<_1$ es un buen orden, esto es una contradicción. Por lo tanto, no puede existir tal conjunto M'.

Entonces existe $F \in [M]^\kappa$ tal que $[F]^2 \subseteq f^{-1}\{1\}$. Por la definición de f, tenemos que ambos órdenes coinciden en F. ■

Tomando este caso, de dos órdenes, como base, es fácil generalizar esta proposición a cualquier cantidad finita de buenos órdenes parciales sobre conjuntos infinitos.

Corolario 2.7 *Sea M un conjunto de cardinalidad infinita κ y tomemos $\{<_i \mid i \in n\}$, con $n \in \omega$, un conjunto de buenos órdenes sobre él. Entonces existe $F \subseteq M$ de cardinalidad κ en que los órdenes del conjunto $\{<_i \mid i \in n\}$ coinciden. Es decir, existe $F \subseteq M$ de cardinalidad κ que es una cadena según $<= \bigcap\{<_i \mid i \in n\}$.*

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre $n \in \omega$. El caso $n = 2$ ya lo tenemos por el teorema 2.6. Supongamos que se cumple para $n \in \omega$. Sea $\{<_i \mid i \in n+1\}$ un conjunto de buenos órdenes sobre M. Por la hipótesis de inducción, tenemos un conjunto $F \subseteq M$ de cardinalidad κ en el que los órdenes $\{<_i \mid i \in n\}$ coinciden. Entonces $\bigcap\{<_i \mid i \in n\}$, restringido a F es un buen orden. También lo es $<_{n|F}$. Aplicando el teorema 2.6, tenemos que existe $F' \subseteq F$ de cardinalidad κ en el que ambos órdenes coinciden. Por lo tanto, en F' los órdenes $<_i$, con $i \in n+1$, coinciden. ■

En el siguiente teorema, que es en parte una traducción del teorema anterior en términos de complejidad, se darán las primeras relaciones entre la complejidad de un orden bien fundado y sus características.

Teorema 2.8 *Sea $\langle M, <\rangle$ un conjunto con un orden bien fundado, con M un conjunto infinito. Si la complejidad de $\langle M, <\rangle$ es finita, entonces la altura de $\langle M, <\rangle$ es mayor o igual a $|M|$, M contiene una cadena de su misma cardinalidad y no contiene ninguna anticadena infinita.*

Demostración. Como la complejidad de $\langle M, <\rangle$ es finita, existe un conjunto finito de buenos órdenes sobre M tal que $<= \bigcap\{<_i \mid i \in n\}$. Por el corolario anterior, tenemos que M contiene una cadena F según $<$ de cardinalidad M. Tal cadena tiene tipo de orden mayor o igual a $|M|$. Por lo tanto, usando la proposición 1.9, la altura de $\langle M, <\rangle$ es mayor o igual a $|M|$.

Sea A un subconjunto infinito de M. Según el teorema 2.7, el conjunto ordenado $\left\langle A, <_{|A} \right\rangle$ no es una anticadena, ya que $<_{|A}$ es a su vez intersección finita de buenos órdenes sobre un conjunto infinito. Por lo tanto, M no contiene anticadenas infinitas según $<$. ■

Como consecuencia directa de este teorema se tiene que si la complejidad de $\langle M, < \rangle$ es finita, entonces $\langle M, < \rangle$ es un conjunto parcialmente bien ordenado. En este caso, ya sabíamos que $com \langle M, < \rangle = dim \langle M, < \rangle$.

Igualmente, si $\langle M, < \rangle$ es un orden bien fundado con alguna anticadena infinita, entonces $com \langle M, < \rangle$ ha de ser un cardinal infinito. Si, además, se trata de un árbol, como ya se sabe que $dim \langle M, < \rangle$ es uno o dos, este es un caso en que claramente $dim \langle M, < \rangle \in com \langle M, < \rangle$. En el caso de los árboles podemos, entonces, recordando el teorema 1.24, enunciar con precisión la siguiente caracterización.

Teorema 2.9 *Sea $\langle M, < \rangle$ un árbol. La dimensión de $\langle M, < \rangle$ es menor a su complejidad si y sólo si M contiene una anticadena infinita según $<$.*

Este teorema nos indica que existen órdenes parciales bien fundados en los que la dimensión y la complejidad difieren. El ejemplo de la página 14, $\langle \nu, \ll \rangle$ es un árbol en que el conjunto de los ordinales impares menores a ν forma una anticadena infinita de cardinalidad ν. Por lo tanto, su complejidad es infinita, mientras que su dimensión es 2.

Sobre la complejidad de un orden parcial bien fundado con una anticadena infinita, ya podemos asegurar que es infinita. Sin embargo, sigue quedando abierta la cuestión sobre cuál es precisamente ese número, y ni siquiera se da una cota muy buena. En efecto, si $\langle M, < \rangle$ es un orden bien fundado con anticadenas infinitas y la cardinalidad de M es un cardinal infinito κ, de momento sólo podemos afirmar que su complejidad es algún cardinal entre $\aleph_0$ y κ, pudiendo haber κ cardinales entre ellos. En los siguientes capítulos se refinará ese intervalo. Se acaba de ver la utilidad de observar la estructura de un orden que es la intersección de un conjunto de buenos órdenes para responder las preguntas planteadas al final del capítulo 1. Ahora que ya se conocen algunas características de los órdenes bien fundados con complejidad finita, se tratará con intersecciones infinitas de buenos órdenes en conjuntos infinitos, intentando ver hasta que punto se conservan tales características.

Capítulo 3

La descomposición en bloques de un conjunto

La construcción a la que se dedicará este capítulo es debida a Egbert Harzheim y ayudará a describir al conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$ dependiendo de algunas relaciones aritméticas que existan entre la cardinalidad de M y la cardinalidad de un conjunto de buenos órdenes sobre M cuya intersección sea $<$. Fue desarrollada en [Ha64] en el teorema *Satz 2*, para demostrarlo a él y a otro similar (*Satz 5*), que en este trabajo aparecen generalizados en el teorema 4.6. Este teorema, como se verá en el último capítulo, da la mejor versión posible del corolario 2.7. Sin embargo, la misma construcción servirá para la demostración de otro teorema, el 4.2, que como resultado es más débil, pero que tendrá consecuencias más concretas sobre la complejidad de ciertos órdenes bien fundados. Todo lo escrito en los próximos párrafos hasta la proposición 3.8, junto con la proposición 3.13 es una esquematización, con cambios en la notación y demostraciones más detalladas, de la construcción que aparece en [Ha64]. Las proposiciones, 3.10, 3.11 y 3.12 son la abstracción de partes de esa construcción para que puedan ajustarse a las distintas hipótesis de los teoremas 4.6 y 4.2. Se indicará cuando alguna de estas proposiciones coincida aproximadamente con una parte específica del artículo [Ha64].

Salvo cuando sea indicado, en este capítulo y en el próximo, M será un conjunto infinito de cardinalidad κ, μ un cardinal menor o igual a κ, y para cada $\alpha \in \mu$, $<_\alpha \subseteq M \times M$ una relación sobre M tal que $\langle M, <_\alpha\rangle$ es un conjunto bien ordenado. Sea $<= \bigcap \{<_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$. Dado que cada $<_\alpha$ es un buen orden, en la intersección no pueden aparecer cadenas descendentes infinitas, por lo que $\langle M, < \rangle$ es un orden parcial bien fundado. Naturalmente, $com \langle M, < \rangle$ es un cardinal menor o igual a μ.

Siendo $<$ una intersección de buenos órdenes, sus características pueden ser consecuencia de cuánto se parecen o no esos órdenes. Fijémonos en un elemento x de M, y pensemos en cuánto se parecen los órdenes $<_\alpha$ con respecto a x. Los elementos que sean mayores (respectivamente menores) a x en todos los órdenes serán mayores (respectivamente menores) en la intersección. Pero si, por ejemplo, y es menor a x según $<_0$ y mayor a x según todos los demás $<_\alpha$, ¿cuánta influencia tendría y en la existencia de cadenas o anticadenas en M según $<$? Si tomamos el conjunto de todos los elementos de M que tienen la misma relación con respecto a x que y, ¿qué influencia podría tener tal conjunto sobre la intersección de los órdenes? Salvo que serán incomparables con x según $<$, podría parecer que no mucha. La siguiente construcción, sin embargo, se basará en este tipo de conjuntos, es decir, conjuntos cuyos elementos tengan la misma relación con respecto a algún $x \in M$ según cada orden $<_\alpha$.

Definición 3.1 *Sea $A \in [M]^{\geqslant 3}$. Por la cardinalidad de A, si tomamos un orden $<_\alpha$, existe $x \in A$ que es intermedio, es decir, tal que existen $y, z \in A$ tales que $y <_\alpha x <_\alpha z$. Sea $p : [M]^{\geqslant 3} \longrightarrow M$ tal que $p(A) \in A$ y es uno de tales elementos intermedios según alguno de los órdenes.*

No es realmente importante cuál sea el elemento intermedio que se asignó en la definición anterior, ni según cuál orden. Para cada $A \in [M]^{\geqslant 3}$ podríamos sencillamente tomar a $p(A)$ como su segundo elemento según $<_0$.

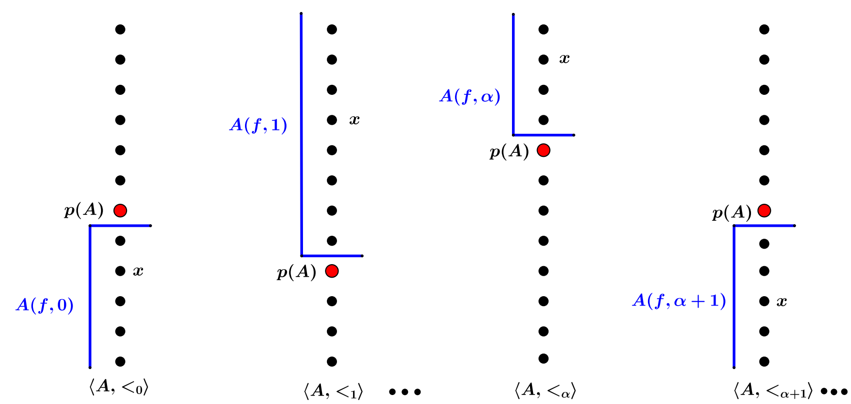
Definición 3.2 *Sean $A \in [M]^{\geqslant 3}$ y $f \in {}^{\mu}2$. Para $\alpha \in \mu$ definimos entonces*

$$A(f, \alpha) = \begin{cases} \{x \in A \mid x <_\alpha p(A)\} & si\ f(\alpha) = 0, \\ \{x \in A \mid p(A) <_\alpha x\} & si\ f(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Definimos además

$$A(f) = \bigcap_{\alpha \in \mu} A(f, \alpha).$$

Tomando un subconjunto A de M con 3 o más elementos, una función f designa qué elementos de A escoger, dependiendo de su posición con respecto a un punto que puede hacer las veces de centro de A, por no ser extremo en al menos uno de los órdenes que se intersecan. Un ejemplo se da en la siguiente imagen de cómo se hace esta elección.



Se entiende que en este caso $f(0) = 0$ y por eso $A(f,0)$ consta de los elementos de A que son menores a $p(A)$ según $<_0$. Del mismo modo $f(1) = 1 = f(\alpha)$ y $f(\alpha+1) = 0$. El elemento x, ahí señalado, está en los conjuntos $A(f,0), A(f,1), A(f,\alpha)$ y $A(f,\alpha+1)$. Si lo mismo sucede con cada ordinal en μ, se tendrá por la definición 3.2 que $x \in A(f)$. Si tomamos dos funciones f y f' en ${}^{\mu}2$, cada una de ellas designa una dirección distinta a partir de tal centro, pues si $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$ entonces $A(f,\alpha)$ y $A(f',\alpha)$ son conjuntos ajenos. La razón de esto es la siguiente: supongamos que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 1$. Si existiese $x \in A(f,\alpha) \cap A(f',\alpha)$, tendríamos que $x <_\alpha p(A) <_\alpha x$. El único otro caso posible ($f(\alpha) = 1$ y $f'(\alpha) = 0$) lleva a una idéntica contradicción. Se concluye que si $f \neq f'$, entonces $A(f)$ y $A(f')$ son conjuntos ajenos. Debe notarse también que si $f \in {}^{\mu}2$, entonces $p(A) \notin A(f)$ y, por ende, $A(f) \subsetneq A$.

Empezando con M, que al ser infinito naturalmente tiene más de tres elementos, y con el centro que ya se le asignó $p(M)$, podemos tomar el conjunto $\{M(f) \mid f \in {}^{\mu}2\}$. Este conjunto, excluyendo los casos en que $M(f)$ sea vacío, es un partición de $M \setminus \{p(M)\}$.

Dada un función en $f \in {}^{\mu}2$, $M(f)$ es claramente un subconjunto de M, por lo que si tiene más de dos elementos podemos considerar un nuevo subconjunto $(M(f))(g)$ para alguna $g \in {}^{\mu}2$. Para descargar la notación lo denotaremos $M(f)(g)$.

Si tomamos dos elementos distintos de tal partición que tengan al menos tres elementos, $M(f)$ y $M(f')$, al ser ajenos, dadas $g, g' \in {}^{\mu}2$, $M(f)(g)$ y $M(f')(g')$ serán también ajenos sin importar si g y g' son iguales o distintas. Naturalmente, si son distintas, también $M(f)(g)$ y $M(f)(g')$ son ajenos, pero ambos son subconjuntos de $M(f)$. Resumiendo, si tomamos dos sucesiones distintas de dos elementos de ${}^{\mu}2$, (f, g) y (f', g'), $M(f)(g)$ será ajeno a $M(f')(g')$, y se habrán separado inicialmente si $f \neq f'$ o posteriormente si $f = f'$. Además, $M(f)(g)$ consiste de elementos de M que tienen la misma relación en cada orden $<_\alpha$ con $p(M)$ y con $p(M(f))$. A continuación se formalizará y profundizará en estas nociones.

Para la siguiente definición, se aclara la siguiente notación. Si s es una sucesión de elementos en ${}^{\mu}2$ y $g \in {}^{\mu}2$, por $s \frown g$, se entenderá a la sucesión con dominio $dom(s) + 1$ y codominio ${}^{\mu}2$ definida para $x \in dom(s) + 1$:

$$(s \frown g)(x) = \begin{cases} s(x) & si\ x \in dom(s), \\ g & si\ x = dom(s). \end{cases}$$

Definición 3.3 *Sea $\boldsymbol{S}$ la clase de sucesiones de elementos de ${}^{\mu}2$. Definimos $Q[\varnothing] := M$.*

Si $s \in \boldsymbol{S}$ y tenemos que $s = s' \frown g$ y ya está definido $Q[s']$, sea

$$Q[s] := \begin{cases} Q[s'](g) & si\ Q[s'] \in [M]^{\geqslant 3}, \\ \varnothing & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

En el caso que el dominio de s sea un ordinal límite γ y que para todo $\gamma' \in \gamma$ ya está definido $Q\left[s_{|\gamma'}\right]$, definamos

$$Q[s] := \bigcap \left\{Q\left[s_{|\gamma'}\right] \mid \gamma' \in \gamma\right\}.$$

Sea $\boldsymbol{Q}$ la clase de los $Q[s]$ así definidos que sean no vacíos.

La razón por la que se utiliza la letra Q para estos conjuntos es por la palabra alemana *Quader*, que es la usada en [Ha64], que significa bloque. A partir de M y de una sucesión de funciones en ${}^{\mu}2$ se obtiene un subconjunto para cuya formación fueron necesarias cada una de las funciones y el orden en el que fueron tomadas. Se había ya bosquejado antes de la definición anterior el hecho de que si se toman dos caminos distintos (un camino de dos funciones) los conjuntos resultantes serán ajenos. Ahora, para toda sucesión s de elementos de ${}^{\mu}2$, de cualquier longitud, tenemos definido $Q[s]$, así que podemos generalizar a la siguiente proposición ([Ha64] p. 162, primer párrafo).

Proposición 3.4 *Sea $s \in \boldsymbol{S}$. Si $Q[s] \in \boldsymbol{Q}$ y $s' \subsetneq s$, entonces $Q[s] \subsetneq Q[s']$. Además, si $s' \subseteq s$, entonces $Q[s] \subseteq Q[s']$.*

Si s y s' elementos de $\boldsymbol{S}$ son incompatibles, entonces $Q[s]$ y $Q[s']$ son ajenos.

Demostración. La primera parte de la proposición se demostrará por inducción sobre el dominio de s. Cuando tal dominio es 0 la afirmación es trivial. Supongamos que se cumple para toda sucesión con dominio η. Sea s una sucesión en ${}^{\mu}2$ con dominio $\eta + 1$, tal que $Q[s] \in \mathbf{Q}$, es decir, es un bloque distinto del vacío. Supongamos que $s' \subsetneq s$. Es inmediato que $s' \subseteq s_{|\eta}$ y que $s = s_{|\eta} \frown s(\eta)$. Es necesario que el bloque $Q\left[s_{|\eta}\right]$ tenga al menos tres elementos, pues de lo contrario, por la definición 3.3, el bloque $Q[s]$ debería ser un conjunto vacío. Por la misma definición, tenemos igualmente que $Q[s] = Q\left[s_{|\eta}\right](s(\eta)) \subsetneq Q\left[s_{|\eta}\right]$. Si $s' = s_{|\eta}$, ya tenemos la contención $Q[s] \subsetneq Q[s']$. Si $s' \subsetneq s_{|\eta}$, por la hipótesis de inducción, se tiene que $Q\left[s_{|\eta}\right] \subsetneq Q[s']$, lo que aunado a la contención que ya teníamos nos da $Q[s] \subsetneq Q[s']$.

Supongamos que η es un ordinal límite, $dom(s) = \eta$ y que $Q[s]$ es distinto del vacío. Si $s' \subsetneq s$, entonces existe una $\eta' \in \eta$ tal que $s' = s_{|\eta'}$. Sabemos que $\eta' + 1$ es menor a η. Por la definición 3.3, se tiene que $Q[s] \subseteq Q\left[s_{|\eta'+1}\right]$. Además, como se vio en el caso de los ordinales sucesores, $Q\left[s_{|\eta'+1}\right] \subsetneq Q\left[s_{|\eta'}\right] = Q[s']$. La única manera en que esta contención no pueda ser propia es si $Q[s']$ fuese vacío. Pero en tal caso, $Q[s]$ sería vacío. Por lo tanto, $Q[s] \subsetneq Q[s']$. Termina entonces la inducción, y se concluye que si $s' \subsetneq s$, entonces $Q[s] \subsetneq Q[s']$. Trivialmente se sigue que si $s' \subseteq s$, entonces $Q[s] \subseteq Q[s']$.

Para demostrar la segunda parte de la proposición, supongamos que s y s' son sucesiones de elementos en ${}^{\mu}2$ que son incompatibles. Sea η el mínimo ordinal tal que $s(\eta) \neq s'(\eta)$. Dado que $s_{|\eta} = s'_{|\eta}$, tenemos que $Q\left[s_{|\eta}\right] = Q\left[s'_{|\eta}\right]$, de ahí que podamos denotarlos simplemente como A. Por la definición 3.3, tenemos que

$$Q\left[s_{|\eta+1}\right] = Q\left[s_{|\eta}\right](s(\eta)) = A(s(\eta))$$

y

$$Q\left[s'_{|\eta+1}\right] = Q\left[s'_{|\eta}\right](s'(\eta)) = A(s'(\eta)).$$

Sabemos que $A(s(\eta)) \cap A(s'(\eta)) = \varnothing$, pues $s(\eta)$ y $s'(\eta)$ son distintos. Por lo tanto, $Q\left[s_{|\eta+1}\right]$ y $Q\left[s'_{|\eta+1}\right]$ son ajenos. Como $s_{|\eta+1} \subseteq s$ y $s'_{|\eta+1} \subseteq s'$, de la primera parte de esta proposición se tiene que $Q[s] \subseteq Q\left[s_{|\eta+1}\right]$ y $Q[s'] \subseteq Q\left[s'_{|\eta+1}\right]$. Siendo subconjuntos de sendos conjuntos ajenos, $Q[s]$ y $Q[s']$ son conjuntos ajenos. ■

Si $x \in Q[s]$ y es distinto de $p(Q[s])$, entonces $x \in Q[s \frown f_x]$ donde f_x es la función que a cada $\alpha \in \mu$ asigna 0 si $x <_\alpha p(Q[s])$ y 1 en el caso contrario. Si $Q[s]$ tiene al menos tres elementos, está definido $p(Q[s])$ y existe $<_\alpha$ tal que $x <_\alpha p(Q[s]) <_\alpha y$ para x y y elementos de $Q[s]$. Como $f_x(\alpha) = 0$ y $f_y(\alpha) = 1$, las sucesiones $s \frown f_x$ y $s \frown f_y$ son incompatibles, y por la proposición anterior, se concluye que $Q[s \frown f_x]$ y $Q[s \frown f_y]$ son conjuntos ajenos. Así, como x y y están respectivamente en uno de los dos conjuntos, se tiene que si $Q[s]$ tiene al menos tres elementos, existen al menos dos funciones f y g tales que $Q[s \frown f]$ y $Q[s \frown g]$ son conjuntos ajenos y no vacíos.

Podemos concluir también de esta proposición que $\mathbf{Q}$ es un conjunto. Supongamos que η es un ordinal tal que existe una sucesión $s \in \mathbf{S}$ con dominio η tal que $Q[s] \in \mathbf{Q}$. Por el resultado anterior, tendríamos que $Q[\varnothing] \supsetneq Q\left[s_{|1}\right] \supsetneq \cdots \supsetneq Q\left[s_{|\eta'}\right] \supsetneq \cdots$ con $\eta' \in \eta$. Por lo tanto, existe $x_{\eta'} \in Q\left[s_{|\eta'}\right] \setminus Q\left[s_{|\eta'+1}\right] \subseteq M$, para cada $\eta' \in \eta$. Sean β, δ ordinales menores a η y supongamos que $\beta \in \delta$. Tenemos entonces que $x_\delta \in Q\left[s_{|\delta}\right]$ y $x_\beta \notin Q\left[s_{|\beta+1}\right]$. Pero, ya que $s_{|\beta+1} \subseteq s_{|\delta}$, $Q\left[s_{|\beta+1}\right] \supseteq Q\left[s_{|\delta}\right]$ y, por lo tanto, $x_\delta \neq x_\beta$. De aquí se concluye que, $|\eta| \subseteq \kappa$. Entonces, siempre que $Q[s] \in \mathbf{Q}$, es decir, que sea distinto del vacío, el dominio de s es menor a κ^+, con lo cual, $\mathbf{Q}$ es un conjunto. Para organizarlo de una manera natural se da la siguiente definición que se basa en el dominio de las sucesiones de elementos de ${}^{\mu}2$.

Definición 3.5 *Sean $E_0 = \varnothing$ y*

$$QZ_0 = \{M\} = \{Q[\varnothing]\} = \{Q[s] \in \boldsymbol{Q} \mid dom(s) = 0\}.$$

Sea η un ordinal y supongamos que hemos ya definido para cada $\eta' \in \eta$ a $E_{\eta'} \subseteq M$, y $QZ_{\eta'} \subseteq P(M)$ una familia de conjuntos no vacíos. Sea entonces

$$QZ_\eta =$$

$$\{Q[s] \in \boldsymbol{Q} \mid dom(s) = \eta\} \cup \{Q[s] \in \boldsymbol{Q} \mid dom(s) \in \eta \wedge |Q[s]| \subseteq 2\}.$$

Para E_η tenemos dos casos:

Caso 1 *Si $\eta = \eta' + 1$, para algún η', sea $E_\eta = E_{\eta'} \cup p[QZ_{\eta'}]$.*

Caso 2 *Si η es un ordinal límite, sea $E_\eta = \bigcup\{E_{\eta'} \mid \eta' \in \eta\}$.*

Es fácil ver, que si $Q[s] \in QZ_\eta$, entonces $dom(s) \subseteq \eta$. El uso de las letras QZ, es por el término alemán *Quaderzerlegung*, traducible a *descomposición en bloques*. Entonces, si η es un ordinal, QZ_η sería la η-ésima descomposición en bloques de M. El conjunto QZ_η consiste principalmente de los bloques que requirieron una sucesión de tipo η de elementos de ${}^{\mu}2$ para su formación. Se le agregan los bloques anteriores que ya no pueden descomponerse. No pueden descomponerse en el sentido de que, si $dom(s) \in \eta$ y $Q[s]$ tiene menos de tres elementos, $Q[s']$ será un conjunto vacío siempre que $s' \supsetneq s$. Esto se hace para que se conserve entre E_η y QZ_η una importante relación que se demostrará más adelante.

El conjunto $\mathbf{Q}$ está parcialmente ordenado por la contención. La manera en que estas *descomposiciones en bloques* están relacionadas con ese conjunto ordenado se da en la siguiente proposición.

Proposición 3.6 *Sea η un ordinal, y $Q[s] \in QZ_\eta$. Si $\eta' \in \eta$, entonces existe $Q[s'] \in QZ_{\eta'}$ tal que $Q[s] \subseteq Q[s']$.*

Demostración. Fijemos η y $Q[s] \in QZ_\eta$. La demostración será por inducción sobre los ordinales menores a η. Tenemos que $Q[s] \subseteq M$ y $M \in QZ_0$. Supongamos que para $\delta \in \eta$ existe un bloque $Q[s'] \in QZ_\delta$ tal que $Q[s] \subseteq Q[s']$. De la proposición 3.4, tenemos que s y s' son sucesiones compatibles. Como sus dominios son ordinales, una debe contener a la otra. Si $s \subsetneq s'$, por la misma proposición, tendríamos que $Q[s'] \subsetneq Q[s]$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto, $s' \subseteq s$.

Si $s' = s$, entonces $Q[s] \in QZ_\delta$ y, por ende, $dom(s) \subseteq \delta \in \eta$. Dado que $Q[s] \in QZ_\eta$, su cardinalidad debe ser menor o igual 2, y, por lo tanto, también es elemento de $QZ_{\delta+1}$. Por lo tanto, $Q[s]$ es subconjunto de algún elemento de $QZ_{\delta+1}$.

Supongamos que $s' \subsetneq s$. Puesto que $Q[s]$ es no vacío, podemos deducir que $Q[s']$ tiene al menos tres elementos. Por lo tanto, $dom(s') = \delta$. Tenemos que $s' \frown s(\delta) \subseteq s$ con $dom(s' \frown s(\delta)) = \delta + 1$. Por lo tanto, $Q[s] \subseteq Q[s' \frown s(\delta)] \in QZ_{\delta+1}$.

Ahora tomemos un ordinal límite δ, que sea menor o igual a η, y supongamos que para toda $\delta' \in \delta$ existe un bloque $Q[s_{\delta'}] \in QZ_{\delta'}$ tal que $Q[s] \subseteq Q[s_{\delta'}]$. Si existe $\delta' \in \delta$ tal que $dom(s_{\delta'}) \in \delta'$, tenemos que $|Q[s_{\delta'}]| \subseteq 2$. Por lo tanto, $Q[s_{\delta'}] \in QZ_\delta$, con lo que tendríamos que $Q[s]$ es subconjunto de un elemento de QZ_δ. Supongamos que para toda $\delta' \in \delta$, el dominio de $s_{\delta'}$ es δ'. Como $\varnothing \neq Q[s]$ y $Q[s] \subseteq \bigcap \{Q[s_{\delta'}] \mid \delta' \in \delta\}$, se concluye que las sucesiones $s_{\delta'}$ son compatibles. Sea $s' = \bigcup \{s_{\delta'} \mid \delta' \in \delta\}$. El dominio de s' es δ y, por lo tanto, $Q[s'] \in QZ_\delta$. Además $Q[s] \subseteq \bigcap \{Q[s_{\delta'}] \mid \delta' \in \delta\} = Q[s']$. Por lo tanto, $Q[s]$ es subconjunto de un elemento de QZ_δ. ■

Una conclusión inmediata que podemos sacar de este último resultado es que si δ y η son ordinales, con $\delta \in \eta$, entonces $\bigcup QZ_\eta \subseteq \bigcup QZ_\delta$. La siguiente proposición ([Ha64], p. 160 (4)) nos muestra la estrecha relación que existe entre los dos tipos de conjuntos definidos en la definición 3.5.

Proposición 3.7 *Para todo ordinal η, QZ_η es una partición del conjunto $M \backslash E_\eta$.*

Demostración. Primero demostraremos que cada QZ_η es una familia de conjuntos ajenos. Supongamos que $Q[s']$ es un elemento de QZ_η y que existe $Q[s]$ distinto a $Q[s']$ pero no ajeno a él. Por la proposición 3.4, s y s' son compatibles. Supongamos que $s' \subsetneq s$. Si el dominio de s' fuese menor a η, $Q[s']$ tendría dos elementos. Por lo tanto, $Q[s]$ sería vacío, y ajeno a $Q[s']$. Entonces el dominio de s' es η y el dominio de s es mayor a η, con lo cual $Q[s]$ no puede ser elemento de QZ_η.

Ahora veamos el caso en que $s \subsetneq s'$. Por la proposición 3.4, $Q[s'] \subseteq Q\left[s'_{|dom(s)+1}\right] \subsetneq Q[s]$. Si $Q[s]$ tuviese menos de tres elementos, el bloque $Q\left[s'_{|dom(s)+1}\right]$ sería vacío, por lo cual, $Q[s']$ sería vacío. Pero $Q[s']$ es un elemento de QZ_η, que es una familia de conjuntos no vacíos y, por lo tanto,

$|Q[s]| \supseteq 3$. Además, tenemos que $dom(s) \in dom(s') \subseteq \eta$. Por la construcción de QZ_η, $Q[s]$ no es uno de sus elementos. Por lo tanto, los bloques distintos y no ajenos a $Q[s']$ no son elementos de QZ_η, y este conjunto es una familia de conjuntos ajenos.

Ahora se demostrará por inducción que $\bigcup QZ_\eta = M \backslash E_\eta$, para todo ordinal η. Cuando $\eta = 0$ es un caso trivial, pues $E_0 = \varnothing$ y $QZ(E_0) = \{M\}$ que es una partición de $M \backslash \varnothing$. Supongamos que para un ordinal η se cumple que $\bigcup QZ_\eta = M \backslash E_\eta$. Si $x \in M \backslash E_{\eta+1}$, por la definición 3.5, x no es elemento de $E_\eta \cup p[QZ_\eta]$. Así, $x \notin E_\eta$ y, por la hipótesis de inducción, existe un bloque $Q[s] \in QZ_\eta$ tal que $x \in Q[s]$. Dado que $Q[s]$ es elemento de QZ_η, s es una sucesión con dominio menor o igual a η. Si $|Q[s]| \subseteq 2$, por la definición 3.5, $Q[s] \in QZ_{\eta+1}$. Si $|Q[s]| \supseteq 3$, entonces $dom(s) = \eta$. Por hipótesis, x no es elemento de $E_{\eta+1} = E_\eta \cup p[QZ_\eta]$. En particular $x \neq p(Q[s])$. Sea $f_x \in {}^{\mu}2$ tal que $x <_\alpha p(Q[s])$ si y sólo si $f_x(\alpha) = 0$. Dado que para toda $\alpha \in \mu$, $<_\alpha$ es un orden lineal, la función f_x está bien definida. Entonces, por la definición 3.2, tenemos que $x \in Q[s](f_x)$. Por la definición 3.3, se concluye que $x \in Q[s \frown f_x]$. Como el dominio de $(s \frown f_x)$ es igual a $\eta + 1$, $x \in Q[s \frown f_x] \in QZ_{\eta+1}$. De lo que resulta que $M \backslash E_{\eta+1} \subseteq \bigcup QZ_{\eta+1}$.

Ahora supongamos que $x \in E_{\eta+1}$. Tenemos entonces dos opciones, $x \in p[QZ_\eta]$, o $x \in E_\eta$. Si $x \in E_\eta$, por la hipótesis de inducción tenemos que $x \notin \bigcup QZ_\eta$. Además, ya teníamos que $\bigcup QZ_{\eta+1} \subseteq \bigcup QZ_\eta$. Por lo tanto, $x \notin \bigcup QZ_{\eta+1}$.

Si $x \in p[QZ_\eta]$, entonces existe un bloque $Q[s] \in QZ_\eta$ tal que $x = p(Q[s])$, lo que implica que $x \in Q[s]$. Además, $Q[s]$ es el único elemento de QZ_η que tiene a x, pues QZ_η es una familia de conjuntos ajenos. Como la función p está definida en $Q[s]$, por la definición 3.1, el bloque $Q[s]$ tiene al menos tres elementos. Por lo tanto, $dom(s) = \eta$. Sea $Q[s']$ que tenga como elemento a x. Por la proposición 3.4, s y s' son compatibles. Si $s \subsetneq s'$, entonces $s \frown s'(\eta) \subseteq s'$. Por las definiciones 3.2 y 3.3, $p(Q[s]) \notin Q[s \frown s'(\eta)]$, es decir, $x \notin Q[s \frown s'(\eta)]$, conjunto que es, por la proposición 3.4, un supraconjunto de $Q[s']$. Esto es una contradicción. Por otro lado, si $s' \subseteq s$, entonces $Q[s] \subseteq Q[s']$. Entonces $Q[s']$ tiene al menos tres elementos. Además, como el dominio de s es η, el dominio de s' es menor o igual a η. Por lo tanto, $Q[s']$ no es un elemento de $QZ_{\eta+1}$. Así, si $x \in Q[s']$, $Q[s'] \notin QZ_{\eta+1}$. Entonces $x \notin \bigcup QZ_{\eta+1}$. Teniendo las dos contenciones, se concluye que $\bigcup QZ_{\eta+1} = M \backslash E_{\eta+1}$.

Supongamos que η es un ordinal límite y que para todo $\eta' \in \eta$, $\bigcup QZ_{\eta'} = M \backslash E_{\eta'}$. Si $x \in M \backslash E_\eta$, como $E_\eta = \bigcup \{E_{\eta'} \mid \eta' \in \eta\}$. Entonces para todo $\eta' \in \eta$, $x \notin E_{\eta'}$. Por la hipótesis de inducción, para cada $\eta' \in \eta$, $x \in \bigcup QZ_{\eta'}$. Así, para cada $\eta' \in \eta$ existe $Q[s_{\eta'}] \in QZ_{\eta'}$ tal que $x \in Q[s_{\eta'}]$. Dado que estos conjuntos no son ajenos, se deduce de la proposición 3.4, que las sucesiones $s_{\eta'}$ son compatibles. Supongamos que para algún $\eta' \in \eta$, el dominio de $s_{\eta'}$ es menor a η'. Por la definición 3.5, la cardinalidad de $Q[s_{\eta'}]$ es menor o igual a 2. De la misma definición se deduce que $Q[s_{\eta'}] \in QZ_\eta$, es decir, que x es elemento de un elemento de QZ_η. Supongamos que para todo $\eta' \in \eta$, el dominio de $s_{\eta'}$ es igual a η'. Entonces la sucesión $s = \bigcup \{s_{\eta'} \mid \eta' \in \eta\}$ tiene dominio η y $x \in Q[s] \in QZ_\eta$. Se verifica entonces que $M \backslash E_\eta \subseteq \bigcup QZ_\eta$.

Si $x \in E_\eta$, existe $\delta \in \eta$ tal que $x \in E_\delta$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $x \notin \bigcup QZ_\delta$. Además, ya sabemos que $\bigcup QZ_\eta \subseteq \bigcup QZ_\delta$, lo que nos dice que $x \notin \bigcup QZ_\eta$. Concluimos entonces que $\bigcup QZ_\eta = M \backslash E_\eta$. Con la inducción ya completa, se tiene que para todo ordinal η, QZ_η es una partición de $M \backslash E_\eta$. ■

De momento, lo que hemos descrito de esta descomposición en bloques de M poco ha tenido que ver con el hecho de que los órdenes $<_\alpha$ sean buenos órdenes. Tampoco se han involucrado la cardinalidad de M, κ, ni la cantidad de órdenes, μ. Sin embargo, todo fue fundamental para la siguiente proposición ([Ha64] p. 163, 164), que relaciona al cardinal μ con la descomposición en bloques de M.

Proposición 3.8 *Para todo ordinal* η, $|QZ_\eta| \subseteq (|E_\eta| + 1)^\mu$.

Demostración. Fijemos al ordinal η. Para $\alpha \in \mu$, sea λ_α el tipo de orden de E_η según $<_\alpha$. Así, podemos ver a E_η como el conjunto $\{e^\alpha_\gamma \mid \gamma \in \lambda_\alpha\}$, tal que si $\gamma \in \gamma'$, entonces $e^\alpha_\gamma <_\alpha e^\alpha_{\gamma'}$. Si $\gamma \subseteq \lambda_\alpha$ es un ordinal, definimos el siguiente conjunto

$$I^\alpha_\gamma =: \{x \in M \backslash E_\eta \mid e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x \iff \gamma' \in \gamma\}.$$

Veamos que cada I^α_γ es un intervalo del conjunto ordenado $\langle M, <_\alpha \rangle$. Supongamos que $x, y \in I^\alpha_\gamma$ son distintos. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $x <_\alpha y$. Sea $z \in M$ tal que $x <_\alpha z <_\alpha y$. Entonces z no es un elemento de E_η. Si lo fuese, existiría $\gamma' \in \lambda_\alpha$ tal que $z = e^\alpha_{\gamma'}$. Como $x <_\alpha z$, $x <_\alpha e^\alpha_{\gamma'}$ y, por la definición de I^α_γ, tendríamos que $\gamma' \supseteq \gamma$. Como $e^\alpha_{\gamma'} = z <_\alpha y$, por la misma definición, $\gamma' \in \gamma$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $z \notin E_\eta$.

Si $\gamma' \in \gamma$, entonces $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x <_\alpha z$. Si $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha z$, entonces $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha y$ y $\gamma' \in \gamma$. Verificándose así la doble implicación que está en la definición de I^α_γ, y aunado al hecho de que $z \notin E_\eta$, tenemos que z es un elemento suyo. Entonces para cada $\alpha \in \mu$ y $\gamma \subseteq \lambda_\alpha$ el conjunto I^α_γ es un intervalo según el orden $<_\alpha$.

Sea $P_\alpha =: \left\{I^\alpha_\gamma \mid \gamma \subseteq \lambda_\alpha\right\}$. El conjunto P_α tiene cardinalidad menor o igual a $|E_\eta| + 1$.

Recuérdese que $\prod_{\alpha\in\mu} P_\alpha$ es el conjunto

$$\left\{F : \mu \to \bigcup_{\alpha\in\mu} P_\alpha \mid F(\alpha) \in P_\alpha\right\}.$$

Cada $F \in \prod_{\alpha\in\mu} P_\alpha$ elige un intervalo I^α_γ por cada $\alpha \in \mu$. Así, el conjunto $\prod_{\alpha\in\mu} P_\alpha$ puede verse como el conjunto de todas las posibles elecciones de un intervalo I^α_γ en cada uno de los órdenes $\langle M, <_\alpha\rangle$.

Sea $P =: \left\{\bigcap im(F) \mid F \in \prod_{\alpha\in\mu} P_\alpha\right\}$. De esta forma, P es el conjunto de todas las posibles intersecciones hechas a partir de una elección de un intervalo en cada uno de los conjuntos P_α. Veamos que $P\backslash\{\varnothing\}$ es una partición de $M\backslash E_\eta$. Tomemos $x \in M\backslash E_\eta$. Para cada $\alpha \in \mu$, sea $\gamma_\alpha = sup\left\{\gamma + 1 \mid \gamma \in \lambda_\alpha \wedge e^\alpha_\gamma <_\alpha x\right\}$. Veamos que x es elemento de $I^\alpha_{\gamma_\alpha}$. Si $e^\alpha_\gamma <_\alpha x$, entonces $\gamma \in \gamma + 1 \subseteq \gamma_\alpha$. De igual modo, si $\gamma \in \gamma_\alpha$, entonces existe $\gamma' \in \lambda_\alpha$ tal que $\gamma \in \gamma' + 1$ y $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x$. Por lo tanto, $e^\alpha_\gamma \leqslant_\alpha e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x$. De estas dos implicaciones se deduce que $x \in I^\alpha_{\gamma_\alpha}$ y, así, $x \in \bigcap \left\{I^\alpha_{\gamma_\alpha} \mid \alpha \in \mu\right\}$. Definiendo la función F con dominio μ de tal modo que $F(\alpha) = I^\alpha_{\gamma_\alpha}$, se obtiene que $x \in \bigcap \left\{I^\alpha_{\gamma_\alpha} \mid \alpha \in \mu\right\} = \bigcap im(F) \in P$.

Sean ahora F y G dos elementos distintos de $\prod_{\alpha\in\mu} P_\alpha$. Existe un $\alpha \in \mu$ tal que $F(\alpha)$ y $G(\alpha)$ son elementos distintos de P_α. Entonces hay ordinales distintos $\gamma, \gamma' \subseteq \lambda_\alpha$ tales que $F(\alpha) = I^\alpha_\gamma$ y $G(\alpha) = I^\alpha_{\gamma'}$. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $\gamma' \in \gamma$. Si $x \in I^\alpha_\gamma$, entonces $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x$. Como $\gamma' \notin \gamma'$ y $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x$, x no es elemento de $I^\alpha_{\gamma'}$. Si $x \in I^\alpha_{\gamma'}$, veamos que $x <_\alpha e^\alpha_{\gamma'}$. De lo contrario, $x = e^\alpha_{\gamma'}$, con lo que x sería elemento de E_η, o $e^\alpha_{\gamma'} <_\alpha x$, con lo que obtendríamos que $\gamma' \in \gamma'$. Se deduce entonces que $x \notin I^\alpha_\gamma$. Por lo tanto, I^α_γ y $I^\alpha_{\gamma'}$ son conjuntos ajenos, es decir $F(\alpha)$ es ajeno a $G(\alpha)$. Entonces $\bigcap im(F)$ y $\bigcap im(G)$ son ajenos. De aquí se sigue que $P\backslash\{\varnothing\}$ es una partición de $M\backslash E_\eta$.

Ahora, veamos por inducción que los elementos de P son subconjuntos de algún elemento de QZ_η. Cada elemento no vacío de P es subconjunto de un elemento de $QZ_0 = \{M\}$. Sea $\eta' \in \eta$ y supongamos que cada elemento no vacío de P es subconjunto de un elemento de $QZ_{\eta'}$. Si $\mathbf{I} \in P\backslash\{\varnothing\}$, existe $Q[s] \in QZ_{\eta'}$ tal que $\mathbf{I} \subseteq Q[s]$. Si la cardinalidad de $Q[s]$ es menor o igual a dos, $Q[s] \in QZ_{\eta'+1}$, es decir, $\mathbf{I}$ es subconjunto de un elemento de $QZ_{\eta'+1}$. Si tal cardinalidad es mayor a dos, tenemos definido $p(Q[s])$, que es un elemento de $E_{\eta'+1} \subseteq E_\eta$. Además, tenemos que $dom(s) = \eta'$. Se sabe que $\mathbf{I} = \bigcap im(F)$, para una función F con dominio μ, tal que para todo $\alpha \in \mu$, $F(\alpha)$ es un elemento de P_α, es decir, un intervalo según $<_\alpha$ que no contiene elementos de E_η. Podemos entonces definir $f \in {}^{\mu}2$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0 & si\ F(\alpha) <_\alpha p(Q[s]), \\ 1 & si\ p(Q[s]) <_\alpha F(\alpha), \end{cases}$$

puesto que uno y sólo uno de estos dos hechos puede darse. De las definiciones 3.2 y 3.3, se sigue que $\mathbf{I} \subseteq Q[s \frown f]$. Dado que $dom(s \frown f) = \eta' + 1$, $Q[s \frown f]$ es un elemento de $QZ_{\eta'+1}$. En ambos casos $\mathbf{I}$ es subconjunto de un elemento de $QZ_{\eta'+1}$.

Sea $\eta' \subseteq \eta$ un ordinal límite y supongamos que si $\eta'' \in \eta'$, todo elemento no vacío de P es subconjunto de un elemento de $QZ_{\eta''}$. Si $\mathbf{I} \in P\backslash\{\varnothing\}$, entonces para cada $\eta'' \in \eta'$, existe $Q[s_{\eta''}] \in QZ_{\eta'}$. Si $dom(s_{\eta''}) \in \eta''$ para alguna $\eta'' \in \eta'$, de la definición 3.5 tenemos que $Q[s_{\eta''}]$ tiene cardinalidad menor o igual a dos y por ende es elemento de $QZ_{\eta'}$. Si $dom(s_{\eta''}) = \eta''$ para toda $\eta'' \in \eta'$, dado que los $Q[s_{\eta''}]$ tienen intersección no vacía, pues contienen todos a $\mathbf{I}$, las sucesiones $s_{\eta''}$ son compatibles. Si hacemos $s = \bigcup_{\eta''\in\eta'} s_{\eta''}$, resulta que $\mathbf{I} \subseteq Q[s]$. Además, $Q[s] \in QZ_{\eta'}$, porque el dominio de s es η'. De ambos modos $\mathbf{I}$ resulta ser subconjunto de un elemento de $QZ_{\eta'}$. Así, con inducción restringida a $\eta + 1$ podemos deducir que cada elemento $\mathbf{I}$ no vacío de P, es subconjunto de algún elemento de QZ_η.

Siendo tanto QZ_η como $P\backslash\{\varnothing\}$ particiones de $M\backslash E_\eta$, $P\backslash\{\varnothing\}$ es un refinamiento de QZ_η. Por lo tanto, $|QZ_\eta| \subseteq |P|$. Por la definición de P, tenemos que $|P| \subseteq (|E_\eta| + 1)^\mu$ y $|QZ_\eta| \subseteq (|E_\eta| + 1)^\mu$.■

Esta proposición nos lleva a pensar en la importancia que puede tener el resultado de exponenciar un cardinal por μ a la hora de trabajar con la descomposición en bloques.

Una exponenciación de este tipo no es más que un producto de μ cardinales. Esto, en parte, es lo que motiva la siguiente definición.

Definición 3.9 *Sea λ un cardinal infinito. Definimos a $d(\lambda)$ como el mínimo cardinal ν tal que existe un conjunto de cardinales $\{\lambda_\beta \mid \beta \in \nu\}$, todos menores a λ, cuyo producto sea mayor o igual a λ.*

El cardinal $d(\lambda)$ siempre existe y se cumple la relación $d(\lambda) \subseteq \lambda$. La razón es que 2^λ es un producto de λ cardinales menores a λ que es mayor a λ. Con esta definición, tenemos una consecuencia ([Ha64] p. 163 (VII)) de la proposición 3.8.

Proposición 3.10 *Sea λ un cardinal infinito menor o igual a κ y supongamos que $\mu \in d(\lambda)$. Si $|E_\eta| \in \lambda$, entonces $|QZ_\eta| \in \lambda$.*

Demostración. Tenemos que $|QZ_\eta| \subseteq (|E_\eta| + 1)^\mu$, por la proposición 3.8. Por hipótesis tenemos que $|E_\eta| + 1 \in \lambda$. Entonces $(|E_\eta| + 1)^\mu$ es un producto de menos que $d(\lambda)$ cardinales menores a λ, por lo que, $(|E_\eta| + 1)^\mu \in \lambda$. Por lo tanto, $|QZ_\eta| \in \lambda$. ■

Inmediatamente, usando la proposición 3.10 y la definición de los conjuntos QZ_η y E_η, se obtiene un resultado más fuerte ([Ha64] p. 164 (IX)).

Proposición 3.11 *Sea λ un cardinal infinito regular menor o igual a κ. Supongamos que $\mu \in d(\lambda)$. Entonces para cada $\eta \in \lambda$, E_η y QZ_η tienen cardinalidad menor a λ.*

Demostración. La demostración será por inducción. Cuando $\eta = 0$ tenemos que $|E_\eta| = 0$ y $|QZ_\eta| = 1$, ambos cardinales menores a λ. Supongamos que para alguna $\eta \in \lambda$, la cardinalidad de E_η y la cardinalidad de QZ_η son menores a λ. Tenemos que $|E_{\eta+1}| = |E_\eta| + |p[QZ_\eta]| \in \lambda + \lambda = \lambda$. Por la proposición 3.10, también $|QZ_{\eta+1}| \in \lambda$. Supongamos que $\eta \in \lambda$ es límite y que para todo $\eta' \in \eta$ se cumple que $|E_{\eta'}| \in \lambda$. Entonces $|E_\eta| = |\bigcup \{E_{\eta'} \mid \eta' \in \eta\}| \subseteq \sum \{|E_{\eta'}| \mid \eta' \in \eta\}$. El conjunto $\{|E_{\eta'}| \mid \eta' \in \eta\}$ sólo tiene cardinales menores a λ. Siendo λ regular, y $\eta \in \lambda$, $sup\{|E_{\eta'}| \mid \eta' \in \eta\}$ es un cardinal menor a λ. Si lo denotamos como ν, entonces $\sum\{|E_{\eta'}| \mid \eta' \in \eta\} = |\eta| \cdot \nu \in \lambda$. Por lo tanto, $|E_\eta| \in \lambda$. Por la proposición 3.10, también QZ_η tiene cardinalidad menor a λ. Por inducción tenemos que para todo $\eta \in \lambda$, E_η y QZ_η tienen cardinalidad menor a λ. ■

Proposición 3.12 *Sea λ un cardinal infinito regular menor o igual a κ y supongamos que $\mu \in d(\lambda)$. Entonces para cada $\eta \in \lambda$, QZ_η tiene al menos un elemento con cardinalidad mayor a 2.*

Demostración. Supongamos que existe $\eta \in \lambda$ tal que si $Q[s] \in QZ_\eta$, entonces $|Q[s]| \subseteq 2$. Por la proposición 3.7, tenemos que $M = E_\eta \cup \bigcup QZ_\eta$. Por lo tanto, $|M| = |E_\eta| + \sum\{|Q[s]| \mid Q[s] \in QZ_\eta\}$. Entonces, por la proposición 3.11, tendríamos que

$$|M| \subseteq |E_\eta| + 2|QZ_\eta| \in \lambda + 2\lambda = \lambda \subseteq \kappa,$$

cuando $|M| = \kappa$. Esto es una contradicción, por lo tanto, para todo $\eta \in \lambda$, existe $Q[s] \in QZ_\eta$ con al menos 3 elementos. ■

Esta última proposición ([Ha64] p. 164 párrafo posterior a (X)), nos indica que si existe tal λ menor o igual a κ, la descomposición en bloques, sigue al menos hasta λ. Sabemos que si $\eta \in \lambda$, existe $Q[s] \in QZ_\eta$ con al menos tres elementos. Existen, entonces, al menos dos elementos f, g de ${}^{\mu}2$, tales que $Q[s](f) = Q[s \frown (f)]$ y $Q[s](g) = Q[s \frown (g)]$ son no vacíos. Como el dominio de $s \frown (f)$ y $s \frown (g)$ es $\eta + 1$, estos conjuntos serán elementos nuevos de $QZ_{\eta+1}$, que no habrían aparecido antes.

Tenemos, además, que los bloques con al menos tres elementos son abundantes, al menos hasta QZ_λ, para tal λ hipotético entre μ y κ, tal que $\mu \in d(\lambda)$. Usando tal tipo de bloques y que estamos tratando con buenos órdenes se obtiene la siguiente proposición ([Ha64] p. 162 (V)).

Proposición 3.13 *Supongamos que para s una sucesión de elementos de ${}^{\mu}2$, si $\eta \in dom(s)$, entonces $Q\left[s_{|\eta}\right] \in \boldsymbol{Q}$ y tiene al menos 3 elementos. Si $\alpha \in \mu$, entonces el conjunto $\{\eta \in dom(s) | s(\eta)(\alpha) = 0\}$ es finito.*

Demostración. Supongamos que dicho conjunto es infinito. Entonces existe $\{\eta_n \mid n \in \omega\}$, subconjunto de $\{\eta \in dom\,(s) | s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\}$, tal que si $n \in m$ son dos números naturales, entonces $\eta_n \in \eta_m$. Si $n \in \omega$, por hipótesis, $Q\left[s_{|\eta_n}\right]$ y $Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right]$ tienen al menos tres elementos. Entonces están definidos $p\left(Q\left[s_{|\eta_n}\right]\right)$ y $p\left(Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right]\right)$. Dado que $\eta_n + 1 \subseteq \eta_{n+1}$, entonces $s_{|\eta_n+1} \subseteq s_{|\eta_{n+1}}$. Por la proposición 3.4, se concluye que $Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right] \subseteq Q\left[s_{|\eta_n+1}\right]$. Por la definición 3.3, se tiene además que

$$Q\left[s_{|\eta_n+1}\right] \subseteq Q\left[s_{|\eta_n}\right]\left(s\left(\eta_n\right),\ \alpha\right) = \left\{x \in Q\left[s_{|\eta_n}\right] | x <_\alpha p\left(Q\left[s_{|\eta_n}\right]\right)\right\}$$

lo último porque $s\left(\eta_n\right)(\alpha) = 0$. Entonces

$$Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right] \subseteq \left\{x \in Q\left[s_{|\eta_n}\right] | x <_\alpha p\left(Q\left[s_{|\eta_n}\right]\right)\right\}.$$

Como $p\left(Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right]\right)$ es elemento de $Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right]$, $p\left(Q\left[s_{|\eta_{n+1}}\right]\right) <_\alpha p\left(Q\left[s_{|\eta_n}\right]\right)$. Lo cual nos lleva a que el conjunto $\left\{p\left(Q\left[s_{|\eta_n}\right]\right) \mid n \in \omega\right\}$ es una cadena descendente infinita según $<_\alpha$, que es una contradicción a que $<_\alpha$ es un buen orden. ■

Tomemos una sucesión s como la descrita en la hipótesis de la proposición 3.13. Si fuese una sucesión larga, con dominio mayor a μ, esta proposición nos dice que existen bastantes ordinales en el dominio de s tales que $s\,(\eta)$ es la función constante 1.

Por las definiciones 3.2 y 3.3, siempre que involucremos a la función constante 1 en la formación de un bloque, se toman elementos que son mayores a otro en todos los órdenes $<_\alpha$. Es decir, se toman elementos que son mayores a otro según $<$, que es el orden que queríamos inicialmente describir. Esta última proposición, entonces, nos habla de una posible abundancia de estos conjuntos donde los órdenes coinciden con respecto a un elemento de M, si se pone una cota al cardinal μ.

En el próximo capítulo se usará toda esta construcción y el funcional definido en 3.9 para llegar a resultados que tendrán directa relación con la complejidad de un orden parcial bien fundado.

Capítulo 4

Resultados principales

Desde el corolario 2.7, se intuía que la complejidad de un conjunto con un orden bien fundado tenía que ver con su altura, la cardinalidad de sus cadenas y la cardinalidad de sus anticadenas. Tal corolario, poniendo una cota a la cantidad de buenos órdenes que se intersecaban sobre un conjunto infinito de cardinalidad κ, concluía que el orden bien fundado resultante:

(i) Tenía una cadena de tamaño κ,

(ii) Era de altura mayor o igual a κ, y

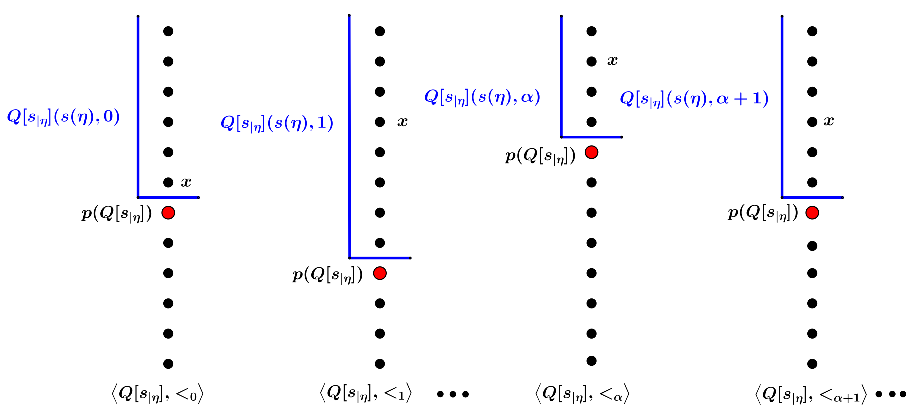
(iii) No tenía anticadenas cadenas de tamaño κ.

Los teoremas más importantes de este capítulo son el 4.2 y el 4.7. Ambos son mejoras de ese corolario, pues con cotas mayores al número de buenos órdenes que se intersecan, se concluyen los incisos (ii) y (iii) en el teorema 4.2, y los tres en el 4.7. Además, en los teoremas 4.12 y 4.16 se demuestra que esos resultados no se pueden conseguir dando mayores cotas. Como ya se insinuaba en el capítulo anterior, estas cotas dependen del funcional d o del parecido funcional d' que se definirá a continuación. Ambos funcionales están definidos a base de la exponenciación de cardinales infinitos. Por tal razón, todos estos teoremas quedan imprecisos dentro de **ZFC**. Unos resultados sobre estos funcionales disminuyen en cierto grado tales imprecisiones, pero también dan un atisbo sobre la dificultad de eliminarlas por completo. Entrando en materia, se define el siguiente funcional.

Definición 4.1 *Sea λ un cardinal infinito. Definimos a $d'(\lambda)$ como el mínimo cardinal cuya potencia sea mayor o igual a λ. Es decir, $min\{\nu \mid 2^{\nu} \supseteq \lambda\}$.*

Tomando un cardinal infinito λ, tenemos la siguiente desigualdad, $\lambda \subseteq 2^{d'(\lambda)}$. Aquí tenemos un producto de $d'(\lambda)$ cardinales menores a λ, que es mayor a λ. Siendo $d(\lambda)$ el cardinal mínimo que cumple esto, concluimos que $d(\lambda) \subseteq d'(\lambda)$.

A continuación se demostrará un teorema que dará una primera conclusión a todo el capítulo 3, relacionando, además, la complejidad de un orden parcial bien fundado con la cardinalidad de sus anticadenas infinitas. Este teorema es la principal aportación original que se hace en este trabajo. La parte central de su demostración, y de la demostración del teorema 4.6, está bosquejada en la siguiente imagen. Si tenemos una sucesión s de elementos de ${}^{\mu}2$ tal que para todo $\eta \subseteq dom(s)$ el bloque $Q\left[s_{|\eta}\right]$ tiene más de tres elementos, cada vez que $s(\eta)$ sea la sucesión constante 1, tendremos la situación de la siguiente imagen.



Ese elemento x existe, pues tenemos que $Q\left[s_{|\eta+1}\right]$ tiene al menos tres elementos y es la intersección de los conjuntos $Q\left[s_{|\eta}\right](s(\eta),\alpha)$. Así, indudablemente existirán elementos que sean mayores a $p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right)$ según el orden $<$. Esto fácilmente se puede alargar a una cadena mayor en $<$ si para algún η' mayor a η, también $s(\eta')$ es la función constante 1. Tendremos que existe x tal que $p\left(Q\left[s_{|\eta'}\right]\right) < x$. Como $p\left(Q\left[s_{|\eta'}\right]\right) \in Q\left[s_{|\eta'}\right] \subseteq Q\left[s_{|\eta+1}\right]$, y habiendo observado que todo elemento de $Q\left[s_{|\eta+1}\right]$ es mayor según $<$ que $p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right)$, tenemos que $p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right) < p\left(Q\left[s_{|\eta'}\right]\right) < x$. Con la existencia de sucesiones s que cumplan que para todo $\eta \subseteq dom(s)$ el bloque $Q\left[s_{|\eta}\right]$ tiene más de tres elementos, y en los que $s(\eta)$ sea la sucesión constante 1 para una buena cantidad de η en su dominio, es que haremos las cadenas que se piden en ambos resultados.

Teorema 4.2 *Si* $\mu \in d'(\kappa)$*, entonces* $<$ *no tiene anticadenas de tamaño* κ *y es un orden de altura al menos* κ*. Además, si* η *es un ordinal menor a* $sup\{2^\nu \mid \nu \in d'(\kappa)\}$*,* M *tiene una cadena de tipo* η*.*

Demostración. Si μ es un cardinal finito, ya sabemos, por el corolario 2.7, que M contiene una cadena de cardinalidad κ según $<$ y que no contiene anticadenas de la misma cardinalidad.

Supongamos que μ es infinito. Por hipótesis, tenemos que $2^\mu \in \kappa$. Por lo tanto, $(2^\mu)^+$ es un cardinal infinito regular menor o igual a κ. Sea $\{\nu_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$ un conjunto de cardinales menores a $(2^\mu)^+$. Todos estos cardinales son menores o iguales a 2^μ. Por lo tanto, su producto es menor o igual a $(2^\mu)^\mu = 2^\mu$, que es menor a $(2^\mu)^+$. Se concluye que μ es menor a $d\left((2^\mu)^+\right)$.

Entonces los cardinales μ y $(2^\mu)^+$ cumplen las hipótesis de la proposición 3.12. Dado que el ordinal 2^μ es menor a $(2^\mu)^+$, QZ_{2^μ} tiene un elemento $Q[s]$ que tiene al menos tres elementos. Por la definición 3.5, se sabe que $dom(s) = 2^\mu$. Si η es un elemento del dominio de s, sabemos que $s(\eta)$ es un elemento de ${}^\mu 2$. Esto nos da dos opciones, $s(\eta)$ es la función constante 1, o existe $\alpha \in \mu$ tal que $s(\eta)(\alpha) = 0$. Esto se resume en la siguiente igualdad:

$$dom(s) = \left(\bigcup_{\alpha \in \mu} \{\eta \in dom(s) \mid s(\eta)(\alpha) = 0\}\right) \cup$$
$$\{\eta \in dom(s) \mid s(\eta)(\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in \mu\}.$$

Por la proposición 3.13, tenemos que

$$|\bigcup_{\alpha \in \mu} \{\eta \in dom(s) \mid s(\eta)(\alpha) = 0\}| \subseteq \aleph_0 \cdot \mu = \mu.$$

De aquí se deduce que $|\{\eta \in dom(s) \mid s(\eta)(\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in \mu\}| = 2^\mu$. Supongamos que η en el dominio de s es tal que $s(\eta)$ es la función constante 1. Dado que $Q\left[s_{|\eta}\right]$ y $Q\left[s_{|\eta+1}\right]$ contienen a $Q[s]$, ambos conjuntos tienen al menos tres elementos. Como $s_{|\eta+1} = s_{|\eta} \frown s(\eta)$, por la definición 3.3,

$$Q\left[s_{|\eta+1}\right] = Q\left[s_{|\eta}\right](s(\eta)) = \bigcap_{\alpha \in \mu} \left\{x \in Q\left[s_{|\eta}\right] \mid p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right) <_\alpha x\right\}.$$

Si $x \in Q\left[s_{|\eta+1}\right]$, entonces, para toda $\alpha \in \mu$, $p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right) <_\alpha x$. Por lo tanto, $p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right) < x$. Tal x existe porque $Q\left[s_{|\eta+1}\right]$ tiene al menos tres elementos. Así, M tiene al menos dos elementos comparables según $<$. Por lo tanto, $\langle M, <\rangle$ no es una anticadena.

Ahora tomemos M' un subconjunto de M de cardinalidad κ. El conjunto M' y los órdenes $<_{\alpha\ |M'}$ cumplen las mismas condiciones que M y los órdenes $<_\alpha$ y, por ende, $\left\langle M', <_{|M'}\right\rangle$ no es una anticadena. Por lo tanto, $\langle M, <\rangle$ no tiene anticadenas de tamaño κ. Como cada nivel de M según $<$ es una anticadena, cada nivel tiene menos de κ elementos. Si κ es un cardinal regular, M tiene al menos κ niveles y, por lo tanto, su altura según $<$ es al menos κ.

Ahora supongamos que κ es un cardinal singular. En particular se trata de un cardinal límite, por lo cual existe un conjunto de cardinales regulares $\{\kappa_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$ menores a κ cuyo supremo es κ. Como 2^μ es menor a κ, podemos suponer, además, que todos son mayores a 2^μ. Tomemos una partición de M, $\{N_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$ tal que para toda $\beta \in \kappa$, $|N_\beta| = \kappa_\beta$. Para cada $\beta \in cf(\kappa)$, μ es menor a $d'(\kappa_\beta)$. Por lo recién demostrado, tenemos que los conjuntos ordenados $\left\langle N_\beta, <_{|N_\beta}\right\rangle$ tienen altura mayor o igual a κ_β. Por lo tanto, usando la proposición 1.8, resulta que el conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$ tiene altura mayor o igual a κ_β, para cada $\beta \in cf(\kappa)$. De aquí que la altura del conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$ sea mayor o igual a κ.

Recordemos que el conjunto $\{\eta \in dom(s) \mid s(\eta)(\alpha) = 1\ \forall\alpha \in \mu\}$ tiene cardinalidad 2^μ y, ya que el dominio de s es 2^μ, su tipo de orden es 2^μ. Se puede entonces denotar así, $\{\eta_\gamma \mid \gamma \in 2^\mu\}$, donde $\eta_\delta \in \eta_\gamma$ si $\delta \in \gamma$. Observamos ya que si $s(\eta)$ es la función constante 1, entonces para cada $x \in Q\left[s_{|\eta+1}\right]$, $p\left(Q\left[s_{|\eta}\right]\right) < x$. Entonces, para cada $\gamma \in 2^\mu$, como $s(\eta_\gamma)$ es la función constante 1, si $x \in Q\left[s_{|\eta_\gamma+1}\right]$, $p\left(Q\left[s_{|\eta_\gamma}\right]\right) < x$. Si $\gamma \in \gamma' \in 2^\mu$, entonces $\eta_\gamma \in \eta_\gamma + 1 \subseteq \eta_{\gamma'}$. Sabemos que $p\left(Q\left[s_{|\eta_{\gamma'}}\right]\right) \in Q\left[s_{|\eta_{\gamma'}}\right] \subseteq Q\left[s_{|\eta_\gamma+1}\right]$ y, por ende, $p\left(Q\left[s_{|\eta_\gamma}\right]\right) < p\left(Q\left[s_{|\eta_{\gamma'}}\right]\right)$. Así, tenemos que $\left\{p\left(Q\left[s_{|\eta_\gamma}\right]\right) \mid \gamma \in 2^\mu\right\}$ es una cadena de tipo 2^μ según $<$.

Si $\eta \in sup\{2^\nu \mid \nu \in d'(\kappa)\}$, entonces existe $\mu' \in d'(\kappa)$, tal que $\eta \in 2^{\mu'}$. Si $\nu = \mu \cdot \mu'$, 2^ν es el máximo cardinal entre 2^μ y $2^{\mu'}$. Por lo tanto, η es menor a 2^ν, que es menor a κ. Así, $(2^\nu)^+$ es un cardinal regular menor o igual a κ. Además, todo producto de μ cardinales menores a $(2^\nu)^+$ es menor o igual a $(2^\nu)^\mu$, y

$$(2^\nu)^\mu = \left(2^{\mu'\cdot\mu}\right)^\mu = 2^{\mu'\cdot\mu} = 2^\nu.$$

Se concluye que $\mu \in d\left((2^\nu)^+\right)$. Así, μ y $(2^\nu)^+$ cumplen las hipótesis de la proposición 3.12. Entonces existe $Q[s] \in QZ_{2^\nu}$ que tiene al menos tres elementos. Además, por la proposición 3.13, tenemos que

$$|\bigcup_{\alpha\in\mu}\{\eta \in dom\,(s) \mid s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\}| \subseteq \aleph_0 \cdot \mu = \mu \subseteq \nu \in 2^\nu.$$

Por lo cual $|\,\{\eta \in dom\,(s) \mid s\,(\eta) = 1\ \forall\alpha \in \mu\}\,| = 2^\nu$. Desde aquí se puede rehacer la prueba que nos da una cadena de tamaño 2^ν, la cual contiene una cadena de tipo η. Por lo tanto, si $\eta \in sup\,\{2^\nu \mid \nu \in d'(\kappa)\}$, el conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$ tiene una cadena de tipo η. ■

Después de la larga descripción de la descomposición en bloques hecha en el capítulo anterior tenemos un resultado que relaciona la cardinalidad de un conjunto de buenos órdenes con las características de su intersección. Así, podemos pensar en las consecuencias directas sobre las preguntas sobre la complejidad que nos hicimos en los capítulos anteriores. El siguiente teorema presenta dos consecuencias del teorema 4.2 sobre el concepto de complejidad.

Teorema 4.3 *Sea $\langle M, <\rangle$ un conjunto infinito con un orden parcial bien fundado. Sea κ la cardinalidad de M. Si com$\langle M, <\rangle$ es menor a $d'(\kappa)$, entonces $\langle M, <\rangle$ no tiene anticadenas de tamaño κ y su altura es mayor o igual a κ.*

Por otro lado, si $\langle M, <\rangle$ tiene una anticadena infinita de cardinalidad ν, entonces la complejidad de $\langle M, <\rangle$ es mayor o igual a $d'(\nu)$.

Demostración. La primera parte del teorema es simplemente la traducción del teorema 4.2 usando el concepto de complejidad. La segunda es una consecuencia algo más indirecta. Supongamos que $\langle M, <\rangle$, con su orden parcial bien fundado tiene una anticadena A de cardinalidad infinita ν. Sea μ un cardinal menor a $d'(\nu)$. Sea $\{<_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$ un conjunto de buenos órdenes sobre M. Sea $<'$ la intersección de este conjunto de órdenes. Por el teorema 4.2, el orden $\left\langle A, <'_{|A}\right\rangle$ no tiene anticadenas de tamaño ν. Entonces $<$ es distinto a $<'$. Por lo tanto, la complejidad de $\langle M, <\rangle$ es distinta a μ. Siendo así para cada cardinal μ menor a $d'(\nu)$, la complejidad de $\langle M, <\rangle$ es mayor o igual a $d'(\nu)$. ■

Si ν es un cardinal infinito, indudablemente $d'(\nu)$ es también un cardinal infinito. Del segundo capítulo sabemos que si un conjunto con orden parcial bien fundado tiene una anticadena infinita, su complejidad es a su vez infinita. Ahora sabemos que si tiene una anticadena infinita de cardinalidad ν, la complejidad del orden es a su vez mayor o igual a $d'(\nu)$. Pasamos de acotar inferiormente la complejidad de un orden parcial bien fundado con una anticadena de tamaño ν por $\aleph_0$, a acotarla por $d'(\nu)$. Recordemos el ejemplo, del orden parcial bien fundado $\langle \nu, \ll \rangle$ visto en la página 14. Ahora ya sabemos que su complejidad es mayor o igual a $d'(\nu)$.

Para ver que esto es indudablemente una mejora, tomemos un orden parcial bien fundado $\langle M, < \rangle$ con una anticadena de tamaño $\mathfrak{c}^+$. Obviamente, $2^{\aleph_0}$ es menor a $\mathfrak{c}^+$, por lo cual $d'(\mathfrak{c}^+)$ es estrictamente mayor a $\aleph_0$. Entonces la complejidad de $\langle M, < \rangle$ es mayor a $\aleph_0$. En particular, mejoramos la cota inferior para la complejidad de cualquier anticadena de cardinalidad mayor o igual a $\mathfrak{c}^+$.

El teorema 4.2 da más información que el teorema 2.6, en cuanto a las cotas inferiores a la complejidad de ciertos órdenes. Sin embargo las conclusiones son más débiles en el teorema 4.2 que en el 2.6. Específicamente, el teorema 4.2 no asegura que haya una cadena de cardinalidad κ según la intersección de los órdenes, mientras sí hay tal cadena en la intersección del teorema 2.6. Exploremos qué modificación de las hipótesis del teorema 4.2 es necesaria para que tal cadena exista.

Los funcionales d y d' tienen una definición similar, relacionada a la exponenciación de cardinales. ¿Qué pasaría si la cantidad de órdenes a intersecar fuese menor a $d(\kappa)$ en vez de menor a $d'(\kappa)$? Para poder responder esta pregunta se usará la siguiente proposición, para cuya redacción es necesaria esta definición.

Definición 4.4 *Si s es una sucesión, denotemos $C(s)$, el conjunto de los intervalos del dominio de s en que s sea constante y maximales con esta característica. En $C(s)$ podemos definir el siguiente orden: para A y B elementos de $C(s)$, $A \prec B$ si y sólo si para todo $a \in A$ y $b \in B$, $a \in b$. Así, tenemos un conjunto bien ordenado. Al tipo de orden de $\langle C(s), \prec \rangle$ lo llamaremos el número de cambio de s, y lo denotaremos $c(s)$. Al δ-ésimo elemento de $C(s)$ lo denotaremos $C_\delta(s)$.*

Proposición 4.5 *Sean κ un cardinal infinito regular y ν un cardinal menor a κ. Sea, además, S un conjunto de sucesiones de elementos de ν, que cumpla lo siguiente:*

(i) si $s \in S$ e I es un intervalo en su dominio en el que la sucesión es constante, entonces $|I| \in \kappa$;

(ii) si s es una sucesión de elementos de ν con dominio un cardinal límite γ, y para todo $\beta \in \gamma$ existe $s_\beta \in S$ tal que $s_{|\beta} \subseteq s_\beta$, entonces a su vez existe $s' \in S$ tal que $s \subseteq s'$;

(iii) existe un cardinal λ tal que $\lambda \subseteq d(\kappa)$, $\lambda \in \kappa$ y para toda $s \in S$, $c(s) \in \lambda$.

Entonces $sup\{dom(s) \mid s \in S\} \in \kappa$.

Demostración. Si $\rho \in d(\kappa)$ y $s \in S$, definamos a $s \restriction_\rho$ como s restringida a los primeros ρ intervalos constantes de s. Es decir,

$$s \restriction_\rho := \left\langle s(\tau) \mid \tau \in \bigcup_{\sigma \in \rho} C_\sigma(s) \right\rangle.$$

Sea además S_ρ el conjunto de todos los $s \restriction_\rho$ tal que $s \in S$.

Veamos que para todo $\rho \in \lambda$, $|S_\rho| \in \kappa$. Esto se demostrará por inducción restringida a λ. Si $s \in S$, resulta inmediato ver que $s \restriction_0 = \varnothing$. Por lo tanto, $|S_0| = 1 \in \kappa$. Sea $\rho \in \lambda$ y supongamos que $|S_\rho| \in \kappa$. Si $s \restriction_{\rho+1} \in S_{\rho+1}$, entonces existe $x \in \nu$ y $\delta \in \kappa$ tal que $s \restriction_{\rho+1} = s \restriction_\rho \frown \langle x \rangle_{\gamma \in \delta}$ (donde por $\langle x \rangle_{\gamma \in \delta}$ entendemos la sucesión constante en x con dominio δ). Dado que el codominio de las sucesiones en S es ν, x debe ser un elemento de ν, y δ debe ser un elemento de κ pues, de lo contrario, el dominio de s contendría un intervalo constante de cardinalidad mayor o igual a κ, contradiciendo lo supuesto en el inciso (i).

Fijemos $s \restriction_\rho \in S_\rho$ y $x \in \nu$. Supongamos que para toda $\delta \in \kappa$ existe $\delta' \in \kappa$ mayor o igual a δ tal que $s \restriction_\rho \frown \langle x \rangle_{\gamma \in \delta'} \in S_{\rho+1}$. Tomemos la sucesión $g = s \restriction_\rho \frown \langle x \rangle_{\gamma \in \kappa}$. Su dominio es un ordinal límite ($dom(s \restriction_\rho) + \kappa$), y si tomamos $\beta \in dom(g)$, existe $\delta \in \kappa$ tal que $g_{|\beta} \subseteq s \restriction_\rho \frown \langle x \rangle_{\gamma \in \delta}$. Supusimos que existe $\delta' \in \kappa$ mayor o igual a δ tal que $s \restriction_\rho \frown \langle x \rangle_{\gamma \in \delta'} \in S_{\rho+1}$. La sucesión $s \restriction_\rho \frown \langle x \rangle_{\gamma \in \delta'}$ contiene a $g_{|\beta}$ y, siendo elemento de $S_{\rho+1}$, está contenida en algún elemento de S. Entonces para cada $\beta \in dom(g)$, $g_{|\beta}$ está contenida en algún elemento de S. Por el inciso (ii), g sería una subsucesión de algún elemento de S, pero g tiene un intervalo constante de tamaño κ lo que contradice el inciso (i). Por lo tanto, fijos $s\restriction_\rho \in S_\rho$ y $x \in \nu$, existe $\delta_{s\restriction_\rho,x} \in \kappa$ tal que si $s\restriction_\rho \frown \langle x\rangle_{\eta\in\delta} \in S_{\rho+1}$, entonces $\delta \in \delta_{s\restriction_\rho,x}$. De esto se sigue que:

$$S_{\rho+1} \subseteq \bigcup_{s\restriction_\rho \in S_\rho} \bigcup_{x\in\nu} \left\{ s_\rho \frown \langle x\rangle_{\eta\in\delta} \mid \delta \in \delta_{s_\rho,x} \right\}.$$

Tenemos que $\left|\left\{ s\restriction_\rho \frown \langle x\rangle_{\eta\in\delta} \mid \delta \in \delta_{s\restriction_\rho,x}\right\}\right| \in \kappa$, pues el conjunto que lo indica es $\delta_{s\restriction_\rho,x}$ que es un ordinal menor a κ. El cardinal ν es, por hipótesis, menor a κ y por hipótesis de inducción tenemos que $|S_\rho| \in \kappa$. Por lo tanto, al ser κ un cardinal regular, la unión que contiene a $S_{\rho+1}$ es de cardinalidad menor a κ, por lo cual $|S_{\rho+1}| \in \kappa$.

Ahora supongamos que $\rho \in \lambda$ es un ordinal límite tal que si $\rho' \in \rho$, entonces $|S_{\rho'}| \in \kappa$. Si $s\restriction_\rho \in S_\rho$, se tiene que $\bigcup_{\rho'\in\rho} s\restriction_{\rho'} = s\restriction_\rho$. La función f que para cada $\rho' \in \rho$ está definida así, $f(\rho') = s\restriction_{\rho'}$, es un elemento de $\prod_{\rho'\in\rho} S_{\rho'}$ y, por su definición, tenemos que $s|\rho = \bigcup im(f)$. Por lo tanto, se da la siguiente contención

$$S_\rho \subseteq \left\{ \bigcup im(f) \mid f \in \prod_{\rho'\in\rho} S_{\rho'} \right\}.$$

De esta contención se deduce que la cardinalidad de S_ρ es menor o igual a la cardinalidad de $\prod_{\rho'\in\rho} S_{\rho'}$. Por hipótesis de inducción, para toda $\rho' \in \rho$, $|S_{\rho'}|$ es menor a κ, y tenemos que ρ es menor a $\lambda \subseteq d(\kappa)$. Por lo tanto, $|\prod_{\rho'\in\rho} S_{\rho'}| = \prod \{|S_{\rho'}| \mid \rho' \in \rho\}$ es menor a κ. Se concluye que $|S_\rho| \in \kappa$. Con esto demostramos que para todo $\rho \in \lambda$, $|S_\rho| \in \kappa$.

Por la definición 4.4, tenemos que si $s \in S$, $s = s\restriction_{c(s)}$, y además, por el inciso (iii), $c(s) \in \lambda$. Por lo tanto, si $s \in S$, $s \in S_{c(s)}$, y de ahí se sigue que $S \subseteq \bigcup \{S_\rho \mid \rho \in \lambda\}$. Finalmente concluimos que $|S| \subseteq \sum \{|S_\rho \mid \rho \in \lambda|\}$. Esta suma es menor a κ, porque κ es regular y tanto λ como todos los sumandos son menores a κ. Por lo tanto, $|S| \in \kappa$.

Si $s \in S$, por los incisos (i) y (iii), tenemos que $dom(s)$ es unión de menos de λ y, por ende, menos de κ intervalos de cardinalidad a su vez menor a κ. Una vez más, por la regularidad de κ, concluimos que para toda $s \in S$, $|dom(s)| \in \kappa$. Entonces $sup\{dom(s) \mid s \in S\} \in \kappa$, ya que es un supremo de menos de κ ordinales menores a κ. ■

Teorema 4.6 *Sea κ un cardinal regular y $\mu \in d(\kappa)$. Entonces el orden $<$ tiene una cadena de cardinalidad κ, tiene altura mayor o igual a κ y no tiene anticadenas de tamaño κ.*

Demostración. Si $\mu \in \aleph_0$, la demostración está dada en el corolario 2.7. Supongamos, entonces, que $\aleph_0 \subseteq \mu$. Utilizando las definiciones del capítulo 3, sea

$$S := \left\{ s \in \mathbf{S} \mid \forall \eta \in dom\,(s)\, |Q\left[s_{|\eta}\right]| \supseteq 3 \wedge |Q\,[s]\,| \subseteq 2 \right\}.$$

El conjunto S se puede ver como el límite del proceso de descomposición en bloques de M. Supongamos que s' es una sucesión tal que $Q\,[s']$ tiene al menos tres elementos. Veamos que la sucesión s' se puede extender a una sucesión s que sea elemento de S. Si para cada extensión σ de s', el conjunto $Q\,[\sigma]$ tuviese al menos tres elementos, por la proposición 3.4, $Q\,[s']$ sería una clase propia. Entonces existe σ una extensión de s' tal que $|Q\,[\sigma]\,| \subseteq 2$. Sea s la mínima restricción de σ tal que $Q\,[s]$ tiene menos de tres elementos. La sucesión σ es extensión de s y s', por lo que estas sucesiones son compatibles. Si $s \subsetneq s'$, el conjunto $Q\,[s']$ tendría menos de dos elementos. Por lo tanto, s es extensión de s', y por ser la mínima restricción de σ tal que $Q\,[s]$ tiene menos de dos elementos, s es elemento de S.

Como $\mu \in d(\kappa)$, tenemos que $2^\mu \in \kappa$. Si $\nu = 2^\mu$, entonces S se puede ver como un conjunto de sucesiones con codominio el cardinal ν que es menor a κ. Sea g una sucesión de elementos ${}^{\mu}2$ con dominio un ordinal límite y supongamos que si $\eta \in dom\,(g)$, entonces existe $s^\eta \in S$ tal que $g_{|\eta} \subseteq s^\eta$. Tomemos $\eta \in dom\,(g)$ y la sucesión $s^{\eta+1}$. Por lo que supusimos, tenemos que $g_{|\eta} \subseteq g_{|\eta+1} = s^{\eta+1}$. Por lo tanto, $g_{|\eta} = s^{\eta+1}_{|\eta}$. Por la definición de S, el conjunto $Q\left[s^{\eta+1}_{|\eta}\right]$ tiene al menos tres elementos. Entonces tenemos que para toda $\eta \in dom\,(g)$, $Q\left[g_{|\eta}\right]$ tiene al menos tres elementos. Si $Q\,[g]$ tiene menos de tres elementos, por la definición de S, tendríamos que $g \in S$. Si $Q\,[g]$ tiene al menos tres elementos, g se puede extender a una sucesión s que sea elemento de S. De cualquier modo g está contenida en un elemento de S. Por lo tanto, el conjunto S cumple el inciso (ii) de la proposición 4.5.

Si $s \in S$, sabemos que

$$dom\,(s) = \bigcup_{\alpha \in \mu} \{\eta \in dom\,(s) \mid s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\}$$

$$\cup \{\eta \in dom\,(s) \mid \forall \alpha \in \mu\ s\,(\eta)\,(\alpha) = 1\}\,.$$

Por la proposición 3.13, tenemos que

$$|\,\{\eta \in dom\,(s) \mid \exists \alpha \in \mu\ s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\}\,| =$$
$$|\bigcup_{\alpha\in\mu}\{\eta \in dom\,(s) \mid s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\}\,| \subseteq \aleph_0 \cdot \mu = \mu$$

ya que μ es infinito. Supongamos que $c\,(s) \supseteq \mu^+$. Tenemos que

$$\mu^+ = \bigcup_{\alpha\in\mu}\left\{\beta \in \mu^+ \mid \forall \eta \in C_\beta\,(s)\ \ s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\right\} \cup$$

$$\left\{\beta \in \mu^+ \mid \forall \eta \in C_\beta\,(s)\ \ \forall \alpha \in \mu\ s\,(\eta)\,(\alpha) = 1\right\}.$$

Uno de estos dos uniendos debe tener μ^+ elementos. Si es el primero, puesto que μ^+ es un cardinal regular, existiría $\alpha \in \mu$ tal que

$$A_\alpha := \left\{\beta \in \mu^+ \mid \forall \eta \in C_\beta\,(s)\ \ s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\right\}$$

tiene cardinalidad μ^+. Para cada $\beta \in A_\alpha$, existe $\eta_\beta \in C_\beta\,(s) \subseteq dom\,(s)$ tal que $s\,(\eta_\beta)\,(\alpha) = 0$. Si β y β' son elementos distintos de A_α, entonces $C_\beta\,(s)$ es ajeno a $C_{\beta'}\,(s)$. Entonces el conjunto $\{\eta \in dom\,(s) \mid s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\}$ sería un conjunto de cardinalidad al menos μ^+. Pero ya sabíamos que es un conjunto finito. Por lo tanto, el conjunto

$$\bigcup_{\alpha\in\mu}\left\{\beta \in \mu^+ \mid \forall \eta \in C_\beta\,(s)\ \ s\,(\eta)\,(\alpha) = 0\right\}$$

tiene menos de μ^+ elementos. Entonces, el conjunto

$$A := \left\{\beta \in \mu^+ \mid \forall \eta \in C_\beta\,(s)\,\forall \alpha \in \mu\ s\,(\eta)\,(\alpha) = 1\right\}$$

habría de tener cardinalidad μ^+. Sea β un elemento de A y tomemos a $\eta_\beta := sup\,\{\eta + 1 \mid \eta \in C_\beta\,(s)\}$. El elemento η_β pertenece al siguiente intervalo, $C_{\beta+1}\,(s)$ y, de hecho, es su primer elemento. Dado que $C_\beta\,(s)$ es un intervalo en el que s es constante y es maximal con esa propiedad, tenemos que $s\,(\eta_\beta)$ no es la función constante 1. Además, si β es distinto a β', entonces $C_{\beta+1}\,(s)$ y $C_{\beta+1}\,(s)$ son ajenos y, por lo tanto, η_β y $\eta_{\beta'}$ son distintos. Concluimos, entonces, que $\{\eta_\beta \mid \beta \in A\}$ es un conjunto de cardinalidad μ^+

contenido, en $\{\eta \in dom(s) \mid \exists\alpha \in \mu\ s(\eta)(\alpha) = 0\}$, cuya cardinalidad recién vimos que era menor o igual a μ. Por estas contradicciones concluimos que para toda $s \in S$, $c(s) \in \mu^+$.

Sabemos que $\mu^+ \subseteq d(\kappa)$. Además, ya se observó que $2^\mu \in \kappa$, por lo cual, $\mu^+ \in \kappa$. Si hacemos que $\lambda = \mu^+$, ya tenemos que el conjunto S cumple el inciso (iii) de la proposición 4.5.

Si $\delta \in \kappa$, por la proposición 3.12, sabemos que existe s tal que $Q[s] \in QZ_\delta$ y tiene al menos tres elementos. Existe $s' \in S$ tal que $s \subsetneq s'$ y que tiene, entonces, dominio mayor al dominio de s que es δ. Por lo tanto, para toda $\delta \in \kappa$ existe $s' \in S$ tal que $\delta \in dom(s')$, es decir, $sup\{dom(s) \mid s \in S\} \supseteq \kappa$.

Entonces el conjunto S cumple los incisos (ii) y (iii) de la proposición 4.5, mientras que no cumple su conclusión. Por lo tanto, no cumple el inciso (i), es decir, existe $s \in S$ e I un intervalo del dominio de s en el que es constante y tal que $|I| \supseteq \kappa$. Sabíamos ya que el conjunto $\{\eta \in dom(s) \mid \exists\alpha \in \mu\ s(\eta)(\alpha) = 0\}$ tiene cardinalidad menor o igual a μ que es menor a κ. Como la cardinalidad de I es κ, existe $\beta \in I$ tal que $s(\beta)$ es la función constante 1. Como I es un intervalo en el que s es constante, si $\beta \in I$, $s(\beta)$ es la función constante 1. Podemos tomar un subconjunto de I, indicado por κ, $\{\beta_\delta \mid \delta \in \kappa\}$, tal que $\delta \in \delta'$ si y sólo si $\beta_\delta \in \beta_{\delta'}$. Si $\delta \in \delta' \in \kappa$, tenemos que $Q\left[s_{|\beta_{\delta'}}\right] \subseteq Q\left[s_{|\beta_{\delta+1}}\right]$, y que tienen al menos tres elementos. Usando una argumentación idéntica a la del teorema 4.2 tenemos que $p\left(Q\left[s_{|\beta_\delta}\right]\right) < p\left(Q\left[s_{|\beta_{\delta'}}\right]\right)$, con lo que conseguimos la cadena que buscábamos. La existencia de esta cadena implica directamente que la altura del conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$ es mayor o igual κ.

Ahora tomemos $A \in [M]^\kappa$. La descomposición en bloques se pudo hacer en el conjunto A con el conjunto de buenos órdenes sobre él $\left\{<_{\alpha|A}, \alpha \in \mu\right\}$. Ambos conjuntos cumplen las hipótesis de este teorema. Entonces el conjunto ordenado $\left\langle A, <_{|A}\right\rangle$ tiene una cadena de cardinalidad κ. Entonces A no es una anticadena del conjunto ordenado $\langle M, <\rangle$. Entonces este conjunto no contiene anticadenas de tamaño κ. ■

Este teorema unifica los teoremas *Satz 2* y *Satz 5* de [Ha64], pues el primero pide que el cardinal κ sea sucesor, y el segundo que sea un cardinal límite y regular.

Antes de demostrar que las cotas dadas en los teoremas 4.2 y 4.6 son precisas, y dar más consecuencias de estos teoremas sobre el tema de la complejidad, se procederá a generalizar el teorema 4.6 a todos los cardinales infinitos.

Teorema 4.7 *Si $\mu \in min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$, entonces el orden $<$ tiene una cadena de cardinalidad κ. El orden tiene además altura mayor o igual a κ y no tiene anticadenas de tamaño κ.*

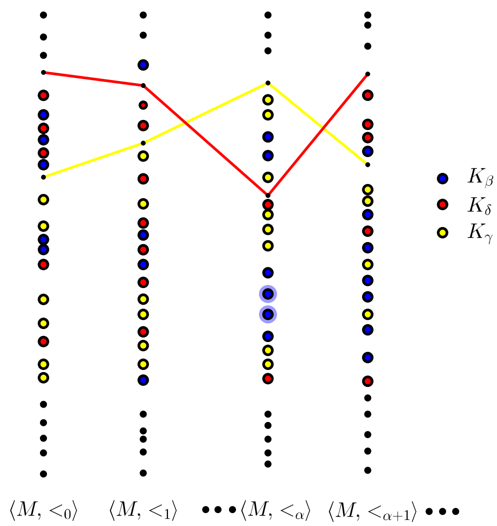
Demostración. En el caso que κ sea un cardinal regular tenemos que $d(\kappa) = d(cf(\kappa))$ y la demostración se reduce a aplicar el teorema 4.6. Por lo tanto, el caso de interés es cuando κ es un cardinal singular. En tal caso, podemos expresar a κ como el supremo de $\{\nu_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$, donde cada uno de los cardinales ν_β es menor a κ y mayor a la cofinalidad de κ y forman una sucesión creciente. Puesto que $\mu \in d(\kappa)$, tenemos que para cada $\beta \in cf(\kappa)$, ν_β^μ es menor a κ. Como κ es un cardinal límite, también $\left(\nu_\beta^\mu\right)^+$ es menor a κ. Como $\nu_\beta \in \left(\nu_\beta^\mu\right)^+$ para toda $\beta \in cf(\kappa)$, tenemos que

$$\kappa = sup\{\nu_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\} \subseteq sup\left\{\left(\nu_\beta^\mu\right)^+ \mid \beta \in cf(\kappa)\right\} \subseteq \kappa$$

y, por lo tanto, que

$$\kappa = sup\left\{\left(\nu_\beta^\mu\right)^+ \mid \beta \in cf(\kappa)\right\}.$$

Podemos entonces tomar una partición $\{N_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$ de M, donde para cada $\beta \in cf(\kappa)$, el conjunto N_β tiene cardinalidad $\kappa_\beta =: \left(\nu_\beta^\mu\right)^+$. Podemos también suponer que cada uno de estos cardinales κ_β es distinto tomando en cuenta que forman una sucesión de cardinales menores a κ cuyo supremo es κ y, por lo tanto, debe de haber $cf(\kappa)$ cardinales distintos entre ellos cuyo supremo sea κ. Fijemos un κ_β y un conjunto $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$ de cardinales menores a κ_β. El producto $\prod\{\tau_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$, ya que cada uno de los cardinales es menor o igual a ν_β^μ, es menor o igual a $\left(\nu_\beta^\mu\right)^\mu = \nu_\beta^\mu$, que es menor a κ_β, por lo cual, $\mu \in d(\kappa_\beta)$. Por esto, y porque cada cardinal κ_β es regular, cada conjunto N_β con el conjunto de buenos órdenes sobre él $\left\{<_{\alpha|N_\beta}\mid \alpha \in \mu\right\}$, cumple las hipótesis del teorema 4.6. Entonces existe para cada $\beta \in cf(\kappa)$, $K_\beta \in [N_\beta]^{\kappa_\beta}$ en el que todos los órdenes $<_\alpha$ coinciden. Podemos, además, suponer que $ot\left\langle K_\beta, <_{|K_\beta}\right\rangle = \kappa_\beta$, simplemente tomando los primeros κ_β entre ellos. La unión de los conjuntos K_β tiene cardinalidad κ, y todos los órdenes $<_\alpha$ coinciden en subconjuntos suyos arbitrariamente grandes. Sin embargo, nada nos asegura que para β, δ y γ ordinales distintos, la relación entre los elementos de los respectivos conjuntos K_β, K_δ y K_γ sea la misma según cada orden $<_\alpha$. Bien puede darse la situación del siguiente dibujo.

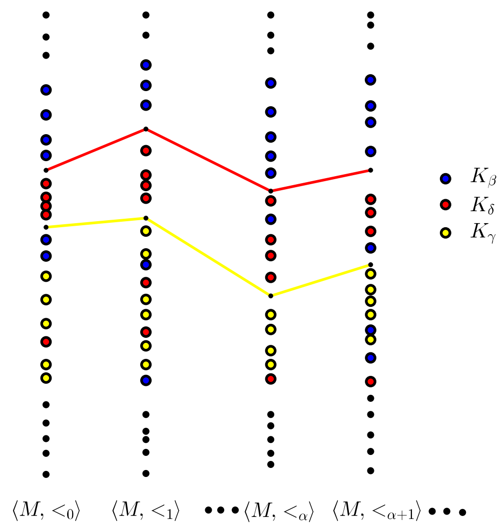


Supongamos que la línea roja representa la altura a partir de la cual ya no hay elementos de K_δ según cada uno de los órdenes $<_\alpha$, y que lo mismo hace línea amarilla con el conjunto K_γ. En el conjunto ordenado $\langle M, <_1\rangle$ hay elementos de K_δ que son mayores a todos los elementos de K_γ. Pero pasando al conjunto ordenado $\langle M, <_\alpha\rangle$ es evidente que tal relación no se conserva en todos los conjuntos ordenados.

De cualquier modo, usando estos conjuntos se construirá la cadena de tamaño κ que pide el teorema. Lo siguiente nos servirá para distinguir de qué elementos nos podemos deshacer. Si $\alpha \in \mu$ y $\beta \in cf(\kappa)$, definamos el conjunto $K_\beta^\alpha := \{ht_\alpha(x) \mid x \in K_\beta\}$ (donde $ht_\alpha(\alpha)$ es la altura de x según el orden $<_\alpha$). Si fijamos $\alpha \in \mu$,

$$\left\langle K_\beta, <_{|K_\beta}\right\rangle \cong \left\langle K_\beta, <_{\alpha|K_\beta}\right\rangle \cong \left\langle K_\beta^\alpha, \in\right\rangle.$$

El primer isomorfismo existe porque en ese conjunto todos los órdenes $<_\alpha$ coinciden, y el segundo porque se trata de una cadena dentro de un orden parcial bien fundado con las correspondientes alturas, como resultado de la proposición 1.7. Sean además $s_\beta^\alpha := sup\ K_\beta^\alpha$. Como ya teníamos que $ot\left\langle K_\beta, <_{|K_\beta}\right\rangle = \kappa_\beta$, tenemos que s_β^α es un ordinal con cofinalidad κ_β. Por esto tenemos que si γ y δ son ordinales distintos, los ordinales s_γ^α y s_δ^α son también distintos. Si $s_\gamma^\alpha \in s_\delta^\alpha$, como $s_\delta^\alpha := sup\ K_\delta^\alpha = sup\{ht_\alpha(x) \mid x \in K_\delta\}$, existe $x \in K_\delta$ tal que $s_\gamma^\alpha \in ht_\alpha(x)$. Todo elemento de K_γ tiene menor altura según $<_\alpha$ que x, es decir, es menor que x. Entonces todo elemento de K_δ a partir de x es mayor a todo elemento de K_γ según $<_\alpha$. Si pudiésemos asegurar que $s_\gamma^\alpha \in s_\delta^\alpha$ para toda $\alpha \in \mu$, entonces podríamos tener una porción de K_δ cuyos elementos fuesen mayores a todos los elementos de K_γ según todos los órdenes $<_\alpha$, como se ejemplifica en la siguiente imagen.



Así, ya estaríamos más cerca de escoger de entre los elementos de los conjuntos K_β los que formen una cadena de tamaño κ. Para esto volveremos a aplicar el teorema 4.6 en otro conjunto con otros buenos órdenes.

Si $\alpha \in \mu$, definamos el orden $\prec_\alpha$ sobre $cf(\kappa)$ del siguiente modo: $\beta \prec_\alpha \beta'$ si y sólo si $s_\beta^\alpha \in s_{\beta'}^\alpha$. Para cada $\alpha \in \mu$, el par $\langle cf(\kappa), \prec_\alpha\rangle$ es un conjunto bien ordenado. Tenemos, además, el buen orden $\prec_\mu := \in_{|cf(\kappa)}$ usual sobre $cf(\kappa)$. Tenemos a $\{\prec_\alpha \mid \alpha \subseteq \mu\}$, que es un conjunto de buenos órdenes de cardinalidad menor o igual a $\mu + 1$, que es menor a $d(cf(\kappa))$, sobre un conjunto de cardinalidad $cf(\kappa)$ que es un cardinal regular. Por lo tanto, usando el teorema 4.6, existe $N \in [cf(\kappa)]^{cf(\kappa)}$ en el que todos estos órdenes coinciden. El conjunto N es cofinal en $cf(\kappa)$. Dado que $sup\{\kappa_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\} = \kappa$, también tenemos que $sup\{\kappa_\beta \mid \beta \in N\} = \kappa$.

Si $\beta \in N$, como N es cofinal en $cf(\kappa)$, está bien definido el ordinal

$\beta' = min\ N \backslash (\beta + 1)$. Tenemos que $\beta \in \beta'$, pues β' es el sucesor de β, en N. Esto implica que, $\beta \prec_\mu \beta'$, y $\kappa_\beta \in \kappa_{\beta'}$. Dado que en N coinciden todos los órdenes $\prec_\alpha$, si tomamos $\alpha \in \mu$, entonces $\beta \prec_\alpha \beta'$, es decir, $s^\alpha_\beta \in s^\alpha_{\beta'}$, que es precisamente la situación que se ejemplifica en el dibujo anterior. Si $\alpha \in \mu$, definamos el conjunto $U^\alpha_\beta := \left\{x \in K_{\beta'} \mid ht_\alpha(x) \in s^\alpha_\beta\right\}$. Como $s^\alpha_\beta \in s^\alpha_{\beta'} = sup\ K^\alpha_{\beta'}$, existe $\eta \in K^\alpha_{\beta'}$ tal que $s^\alpha_\beta \in \eta$. Entonces existe $y \in K_{\beta'}$ tal que $s^\alpha_\beta \in ht_\alpha(y)$. Si $x \in U^\alpha_\beta$, entonces $ht_\alpha(x) \in s^\alpha_\beta \in ht_\alpha(y)$, es decir, $x <_\alpha y$. Entonces U^α_β es un subconjunto acotado del conjunto ordenado $\langle K_{\beta'}, <_\alpha\rangle$ cuyo tipo de orden es $\kappa_{\beta'}$, por lo cual la cardinalidad de U^α_β es menor a $\kappa_{\beta'}$. Si tomamos $U_\beta := \bigcup\left\{U^\alpha_\beta \mid \alpha \in \mu\right\}$, dado que $\mu \in d(\kappa_{\beta'}) \subseteq \kappa_{\beta'}$, que es un cardinal regular, tenemos que $|U_\beta| \in \kappa_{\beta'}$.

Definamos $C_\beta =: K_{\beta'} \backslash U_\beta$. La cardinalidad de C_β es $\kappa_{\beta'}$. El conjunto C_β, al ser un subconjunto de $K_{\beta'}$, es un conjunto en el que todos los órdenes $<_\alpha$ coinciden. Sea δ un elemento de N, tal que $\beta \in \delta$. Sean $x \in C_\beta$ y $y \in C_\delta$ y fijemos $\alpha \in \mu$. Como x es un elemento de $K_{\beta'}$, $ht_\alpha(x) \in s^\alpha_{\beta'}$. Como y es un elemento de C_δ, y no es elemento de U_δ, y por ende no es elemento de U^α_δ. Entonces $s^\alpha_\delta \subseteq ht_\alpha(y)$. Sabemos que $\beta' \subseteq \delta$, es decir, $\beta' \preceq_\mu \delta$. Como β', $\delta \in N$, donde todos los órdenes $\prec_\alpha$, se concluye que para toda $\alpha \in \mu$ $\beta' \preceq_\alpha \delta$. De esto se sigue que $s^\alpha_{\beta'} \subseteq s^\alpha_\delta$, p. Entonces $ht_\alpha(x) \in ht_\alpha(y)$, es decir, $x <_\alpha y$. Por lo tanto, todo elemento de C_β es menor a todo elemento de C_δ según cada orden $<_\alpha$, lo cual también significa que son conjuntos ajenos. Sea $C =: \bigcup\{C_\beta \mid \beta \in N\}$. Como la cardinalidad de cada C_β es mayor a κ_β, la cardinalidad de C es mayor o igual que $sup\{\kappa_\beta \mid \beta \in N\}$ que es κ. Como C es un subconjunto de M, su cardinalidad resulta ser precisamente κ. Además, ya observamos que todos los elementos de C son comparables del mismo modo según cada orden $<_\alpha$. La cadena que buscábamos en el orden $<= \bigcap\{<_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$ es entonces C. ■

Pasemos a ver una consecuencia inmediata del teorema 4.7 sobre la complejidad de un orden parcial bien fundado.

Corolario 4.8 *Sea $\langle M, <\rangle$ un conjunto con un orden parcial bien fundado. Sea M de cardinalidad infinita κ. Si la complejidad de $\langle M, <\rangle$ es menor a $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$, entonces M contiene una cadena de cardinalidad κ según $<$.*

Recién se demostraron tres teoremas que están relacionados con las cuestiones planteadas desde el primer capítulo. Los tres incluyen en sus hipótesis a alguno de los funcionales d o d'. Por la naturaleza de estos funcionales, las cotas que establecen estos teoremas, las cuales son correctas según se demostrará más adelante, son imprecisas. Fuera de los cardinales de cofinalidad numerable y sus sucesores, cardinales en que vale $\aleph_0$, el funcional d no está determinado. Por otro lado el funcional d' solamente está determinado en los cardinales $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Así, fijo un cardinal κ casi es imposible saber a qué cardinal se refieren los teoremas. A continuación se tratarán brevemente dos cuestiones sobre la imprecisión de estos resultados. Como esta imprecisión tiene que ver con la exponenciación de cardinales el siguiente resultado, cuya demostración aparece en [AC14], en la página 236, será necesario.

Teorema 4.9 *Para cualesquiera κ y λ cardinales infinitos, el valor de κ^λ es κ, 2^λ o $\mu^{cf(\mu)}$ para algún cardinal μ tal que $cf(\mu) \subseteq \lambda \in \mu \subseteq \kappa$.*

La primera cuestión es la utilidad del teorema 4.2. Las consecuencias de este teorema son más débiles que las los teoremas 4.6 y 4.7. Para la demostración del teorema 4.2, se usaron menos resultados previos que para demostrar el 4.6, y, además, en su demostración está implícito que $d(\kappa) \subseteq d'(\kappa)$. En principio la definición de d es más fuerte que la definición de d', y en ese hecho se podría basar que las consecuencias del teorema 4.6 sean más fuertes que las del teorema 4.2. Si la diferencia entre las consecuencias de estos teoremas simplemente se basara en la definición de $d(\kappa)$ y $d'(\kappa)$ y para todo cardinal infinito regular κ, $d(\kappa)$ fuese igual a $d'(\kappa)$, entonces el teorema 4.2 sería irrelevante en cardinales regulares. Aunque hubiera algún κ tal que $d(\kappa) \in d'(\kappa)$, se daría la misma irrelevancia si fuese posible llegar a la conclusión de los teoremas 4.6 y 4.7 con las hipótesis del teorema 4.2, es decir, si la demostración dada en el teorema 4.2 fuese mejorable. A continuación veremos que sí hay cardinales κ tales que $d(\kappa)$ y $d'(\kappa)$ son distintos.

Teorema 4.10 *Sea κ un cardinal infinito. Los siguientes dos enunciados son equivalentes:*

(i) Existe un cardinal singular μ tal que $2^{cf(\mu)} \in \mu \subseteq \kappa \subseteq \mu^{cf(\mu)}$.

(ii) $d(\kappa) \in d'(\kappa)$.

Demostración. Supongamos cierto el inciso (i). Sea $\{\mu_\eta \mid \eta \in cf(\mu)\}$ un conjunto de cardinales menores a μ, y por ende menores a κ, cuyo supremo sea μ. Su producto es $\mu^{cf(\mu)}$, que es mayor o igual a κ. Entonces $d(\kappa) \subseteq cf(\mu)$, de lo que se sigue que $2^{d(\kappa)} \subseteq 2^{cf(\mu)} \in \mu \subseteq \kappa$. Por lo tanto, se concluye que $d(\kappa) \in d'(\kappa)$.

Ahora supongamos que se cumple el inciso (ii). Sea $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in d(\kappa)\}$ un conjunto de cardinales cuyo producto sea mayor o igual a κ. Tal producto es $\nu^{d(\kappa)}$, donde ν es el supremo de $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in d(\kappa)\}$. Tenemos, según el teorema 4.9, tres resultados posibles para esta exponenciación. Si $\nu^{d(\kappa)} = \nu$, se tendría que $\kappa \subseteq \nu$. El cardinal ν es el supremo de un conjunto de $d(\kappa)$ cardinales menores a κ, por lo cual $\kappa = \nu$ y $cf(\kappa) \subseteq d(\kappa)$. Como $d(\kappa) \in d'(\kappa) \subseteq \kappa$, $2^{cf(\kappa)}$ es menor a κ. Por lo tanto, κ es singular y $2^{cf(\kappa)} \in \kappa \subseteq \kappa^{cf(\kappa)}$. Así, se concluye el inciso (i).

La segunda opción es que $\nu^{d(\kappa)} = 2^{d(\kappa)}$. Pero el inciso (ii) implica que $2^{d(\kappa)} \in \kappa$. Por lo tanto, esta igualdad no es posible.

Ahora supongamos que existe un cardinal singular μ tal que $cf(\mu) \subseteq d(\kappa) \in \mu \subseteq \nu$ y que $\nu^{d(\kappa)} = \mu^{cf(\mu)}$. Entonces $\mu \subseteq \kappa \subseteq \mu^{cf(\mu)}$. Si $\mu \subseteq 2^{cf(\mu)}$, se seguiría que $\kappa \subseteq \mu^{cf(\mu)} \subseteq 2^{cf(\mu)} \subseteq 2^{d(\kappa)}$, lo que nos llevaría a que $d'(\kappa) \subseteq d(\kappa)$ contradiciendo al inciso (ii). Por lo tanto, $2^{cf(\mu)} \in \mu$, con lo que acabamos de concluir el inciso (i). ■

Así, de este teorema se sigue que existen cardinales arbitrariamente grandes en los que no se da el inconveniente de que los funcionales d y d' sean iguales. Sea ν un cardinal regular y supongamos que $2^\nu = \aleph_\beta$. El cardinal $\mu = \aleph_{\beta+\nu}$ es un cardinal singular de cofinalidad ν. Como $2^\nu \in \mu$, tenemos que $2^{cf(\mu)} \in \mu$. Entonces, según el teorema anterior, en todos los cardinales entre μ y $\mu^{cf(\mu)}$, que como mínimo son μ y μ^+, los funcionales d y d' difieren. Siendo ν cualquier cardinal regular, tales cardinales pueden ser arbitrariamente grandes. Tenemos ya que aunque no estén determinados, existen cardinales regulares κ en los que las hipótesis de los teoremas 4.3 y 4.6 son distintas. Demostrando que sus cotas son precisas, se tendrá que existen cardinales en los que ambos teoremas son distintos.

Este teorema también ayuda a ver que los funcionales d y d' tienen comportamientos muy distintos. Si tomamos dos cardinales ν y κ tales que $\nu \in \kappa$, es sencillo ver que $d'(\nu) \subseteq d'(\kappa)$, pues si la potencia de algún cardinal μ es menor a ν, también es menor a κ. Entonces el funcional d' es monótonamente creciente. Sea ν un cardinal infinito y $\kappa := (2^\nu)^+$ y supongamos que existe un cardinal singular μ tal que $2^{cf(\mu)} \in \mu \subseteq \kappa$. Como κ es un cardinal regular, $\mu \in \kappa$, es decir, $\mu \subseteq 2^{\nu}$. De aquí se obtiene que $2^{cf(\mu)} \in 2^{\nu}$ y, por ende, que $cf(\mu) \in \nu$. Entonces $\mu^{cf(\mu)} \subseteq (2^{\nu})^{cf(\mu)} = 2^{\nu \cdot cf(\mu)} = 2^{\nu} \in \kappa$. Por lo tanto, para este κ no existe un cardinal μ que cumpla el inciso (i) del teorema 4.10, por lo cual $d(\kappa) = d'(\kappa)$. Así, el funcional d alcanza al funcional d' en cada sucesor de una potencia. Si κ es un cardinal de cofinalidad numerable existe un conjunto de cardinales menores a κ, $\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$ cuyo supremo es κ. Entonces el producto de tal conjunto es mayor o igual a κ y $d(\kappa) = \aleph_0$. Como los sucesores de potencias y los cardinales de cofinalidad numerable son arbitrariamente grandes, aquí queda patente que el funcional d tiene un comportamiento muy volátil, alcanzando valores arbitrariamente grandes para volver pronto a $\aleph_0$.

Esta observación ayuda a introducir la segunda cuestión, que es sobre el teorema 4.7. Por imprecisos que sean, los siguientes enunciados son claros en cuanto a su significado: $\mu \in d(\kappa)$, $\mu \in d'(\kappa)$, $\mu = d(\kappa)$ y $\mu = d'(\kappa)$. Sin embargo, $\mu \in \min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$ y más aun $\mu = \min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$ son enunciados menos claros. Si pudiéramos determinar cuál de esos dos cardinales indeterminados es el mínimo, el enunciado del teorema 4.7 sería más claro. Sin embargo, como recién se observó, el funcional d es bastante volátil, y de este funcional depende cuál sea tal mínimo. Esta dificultad probablemente sea la razón por la que este teorema no fue enunciado así en [Ha64]. En este artículo, Harzheim, con una prueba análoga, demuestra un teorema similar (*Satz 6*), usando **GCH**, en el que en vez de $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$ pone el cardinal que en la notación de este trabajo sería $d(d(\kappa))$, requiriendo que el cardinal κ sea límite. En la misma demostración señala que la hipótesis generalizada del continuo implica que para un cardinal singular κ, $d(\kappa) = cf(\kappa)$, por lo que el cardinal que usa realmente es $d(cf(\kappa))$, que además, en este caso, resulta ser menor o igual a $d(\kappa)$. Este hecho queda implícito en toda la demostración, aprovechándose de que μ resulta ser menor al funcional d aplicado a una sucesión de cardinales regulares menores a κ, y sólo posteriormente se utiliza que $\mu \in d(cf(\kappa))$. Dándome cuenta que para llegar a tal sucesión de cardinales sólo era preciso que μ fuese menor a $d(\kappa)$, y teniendo el afán de generalizar y presentar un teorema que fuese cierto en **ZFC**, fue que demostré este teorema pidiendo que μ fuese menor al triplemente impreciso cardinal $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$, el cual resulta ser una cota precisa. En este trabajo no se demostrará si este mínimo es determinable. Sin embargo, se mostrará que lo sugerido por **GCH**, es decir, que para todo cardinal κ,

$d(cf(\kappa)) \subseteq d(\kappa)$, es una posibilidad razonable, así como es complicada su negación.

La hipótesis del cardinal singular, **SCH**, dice que para todo cardinal infinito λ, $\lambda^{cf(\lambda)} = 2^{cf(\lambda)} + \lambda^{+}$. Este enunciado es más débil que la hipótesis generalizada del continuo y nos da la misma respuesta con respecto a qué cardinal es $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$.

Teorema 4.11 *Si κ un cardinal infinito, suponiendo la hipótesis del cardinal singular, se tiene que $d(cf(\kappa))$ es menor o igual a $d(\kappa)$.*

Demostración. El caso relevante es cuando κ es un cardinal singular. Si $\mu \in d(cf(\kappa))$, inmediatamente tenemos que $\mu \in cf(\kappa)$. Como 2^{μ} es un producto de μ cardinales menores a $cf(\kappa)$, $2^{\mu} \in cf(\kappa) \in \kappa$. Por lo tanto, también $\mu \in d'(\kappa)$.

Tomemos un conjunto de cardinales menores a κ, $\{\nu_{\alpha} \mid \alpha \in \mu\}$. Su producto es ν^{μ}, donde ν es el supremo del conjunto $\{\nu_{\alpha} \mid \alpha \in \mu\}$. Esta exponenciación, según el teorema 4.9, tiene tres resultados posibles. Supongamos que $\nu^{\mu} = \nu$. El cardinal μ es menor a $cf(\kappa)$ y ν es el supremo de μ cardinales menores a κ. Por lo tanto, $\nu^{\mu} = \nu \in \kappa$.

Supongamos que $\nu^{\mu} = 2^{\mu}$. Se observó ya que $2^{\mu} \in \kappa$. Por lo tanto, en este caso también, $\nu^{\mu} \in \kappa$.

Supongamos que existe un cardinal λ, tal que $cf(\lambda) \subseteq \mu \in \lambda \subseteq \nu$ y $\nu^{\mu} = \lambda^{cf(\lambda)}$. Usando **SCH**, tenemos que $\lambda^{cf(\lambda)} = 2^{cf(\lambda)} + \lambda^{+}$. Sabemos que $2^{\mu} \in \kappa$, y que $cf(\lambda) \subseteq \mu$, por lo cual $2^{cf(\lambda)} \in \kappa$. También teníamos que $\nu \in \kappa$ y, por ende, $\lambda \in \kappa$. Siendo κ un cardinal límite, $\lambda^{+} \in \kappa$. Por lo tanto, $\nu^{\mu} = \lambda^{cf(\lambda)} \in \kappa$.

Cualquier valor posible de ν^{μ} es menor a κ. Entonces $\mu \in d(\kappa)$, se concluye que $d(cf(\kappa)) \subseteq d(\kappa)$. ■

Para que la negación de esta hipótesis se cumpla se requiere de cardinales grandes (ver [Gi91]). Entonces la existencia de un cardinal κ tal que $d(\kappa) \in d(cf(\kappa))$ también lo requeriría. Esto nos habla de la consistencia de simplemente escribir el cardinal $d(cf(\kappa))$ en la hipótesis del teorema 4.7, lo que lo clarificaría como enunciado, pero también de la dificultad de definir las condiciones óptimas para poder ponerlo en tal hipótesis.

Los teoremas 4.7 y 4.2 nos dicen qué sucede con una intersección de buenos órdenes si la cantidad de ellos es menor a cierta cota. De ambos, además, salieron conclusiones sobre la complejidad de los órdenes parciales bien fundados. Es hora de probar que las cotas que se dieron son las óptimas. Primero será con la cota dada en el teorema 4.2.

Teorema 4.12 *Si $\mu \supseteq d'(\kappa)$, existen μ buenos órdenes sobre κ cuya intersección es vacía. Es decir, el orden resultante es una anticadena de tamaño κ y, por ende, no tiene altura κ.*

Demostración. Si $\mu \supseteq d'(\kappa)$, entonces $2^{\mu} \supseteq \kappa$. Podemos tomar para cada $\beta \in \kappa$ una función distinta f_β que sea elemento de ${}^{\mu}2$. Definamos para cada $\alpha \in \mu$ los siguientes dos órdenes:

$$\langle \kappa, <_{\alpha,0} \rangle := \langle \{\beta \in \kappa \mid f_\beta(\alpha) = 0\}, \in \rangle + \langle \{\beta \in \kappa \mid f_\beta(\alpha) = 1\}, \in \rangle$$

$$\langle \kappa, <_{\alpha,1} \rangle := \langle \{\beta \in \kappa \mid f_\beta(\alpha) = 1\}, \in \rangle + \langle \{\beta \in \kappa \mid f_\beta(\alpha) = 0\}, \in \rangle$$

Puesto que μ es un cardinal infinito, acabamos de definir μ órdenes para κ. Se trata buenos órdenes ya que son la suma de dos buenos órdenes. Sean β y γ dos elementos distintos de κ. Tenemos que $f_\beta \neq f_\gamma$ y, por lo tanto, existe un $\alpha \in \mu$ tal que $f_\beta(\alpha) \neq f_\gamma(\alpha)$. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $f_\beta(\alpha) = 0$. Por la definición, tenemos que $\beta <_{\alpha,0} \gamma$ y que $\gamma <_{\alpha,1} \beta$. De aquí que estos órdenes satisfagan lo que pedía el teorema. ■

Del teorema 4.3 ya se deducía que la complejidad de una anticadena de cardinalidad infinita ν, por ejemplo $\langle \nu, \varnothing \rangle$, era mayor o igual que $d'(\nu)$. Ahora el teorema 4.12 señala que la complejidad de tal anticadena es precisamente $d'(\nu)$, pues existen $d'(\nu)$ buenos órdenes sobre ν cuya intersección es vacía.

Usemos el ejemplo $\langle \nu, \ll \rangle$, de la página 14, cuya complejidad se sabía ya que era mayor o igual a $d'(\nu)$, para encontrar la complejidad exacta de otro conjunto ordenado. Sean $imp(\nu)$ el conjunto de los ordinales impares menores a ν y $par(\nu)$ el conjunto de los ordinales pares menores a ν. Estos conjuntos son de cardinalidad ν. Por el teorema 4.12, sabemos que existe un conjunto de buenos órdenes $\{\prec_\alpha \mid \alpha \in d'(\nu)\}$ sobre $imp(\nu)$ cuya intersección es vacía. Sea $<_{d'(\nu)}$ la restricción de la pertenencia al conjunto ν. Si α es un ordinal menor a $d'(\nu)$, definimos el siguiente buen orden sobre ν:

$$\langle \nu, <_\alpha \rangle := \langle par(\nu), \in \rangle + \langle imp(\nu), \prec_\alpha \rangle .$$

Veamos que el conjunto $O := \{<_\alpha \mid \alpha \subseteq d'(\nu)\}$ nos señala que la complejidad de $\langle \nu, \ll \rangle$ es $d'(\nu)$. Supongamos que x y y son elementos de ν tales que $x \ll y$. Por la definición de este orden sabemos que $x \in y$ y que x es par. Inmediatamente tenemos que $x <_{d'(\nu)} y$. Si y es par, como $x \in y$, para cada $\alpha \in d'(\nu)$, $x <_\alpha y$, lo que también sucede si y es impar, pues para cada $\alpha \in d'(\nu)$ el orden $<_\alpha$ considera a los impares mayores a los pares.

Ahora, supongamos que x y y son elementos de ν incomparables según $\ll$. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $x \in y$. Entonces x debe ser un ordinal impar, así como $x <_{d'(\nu)} y$. Es necesario que alguno de los otros buenos órdenes contradiga este hecho. Si y es par, es claro, para cualquier $\alpha \in d'(\nu)$, que $y <_\alpha x$. Supongamos que y es impar. Sabemos que para cada $\alpha \in \mu$, el orden $\prec_\alpha$ compara a x y y y la intersección de estos órdenes es vacía. Entonces existen β y δ en $d'(\nu)$ tales que $x \prec_\beta y$ y $y \prec_\delta x$, por lo cual $x <_\beta y$ y $y <_\delta x$. Por lo tanto, $\ll = \bigcap O$ y la complejidad de $\langle \nu, \ll \rangle$ es $d'(\nu)$.

Ahora que ya tenemos resultados precisos sobre la complejidad de ciertos conjuntos con su orden parcial bien fundado, se procederá a demostrar que la cota que se dio en el teorema 4.7 fue buena. Los siguientes tres teoremas están inspirados en teoremas de Harzheim (respectivamente *Satz 3, Satz 8* y *Satz 7* de [Ha64]). Sin embargo, los enunciados y las demostraciones fueron cambiados para que los tres pudieran concluir en el teorema 4.16, que es la última de las aportaciones originales de este trabajo.

Teorema 4.13 *Supongamos que κ es un cardinal infinito y $d(\kappa) \subseteq \mu \in cf(\kappa)$. Entonces existen μ buenos órdenes sobre M cuya intersección no tiene cadenas de tamaño κ.*

Demostración. Sea ν el mínimo cardinal tal que $\nu^\mu \supseteq \kappa$. Notemos que $\nu \in \kappa$. Como $\mu \supseteq d(\kappa)$, tenemos que existe un conjunto $\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$ de cardinales menores a κ cuyo producto es mayor o igual a κ. Tal producto es igual a $sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha \in \mu\}^\mu$. Tal supremo, ya que μ es menor a $cf(\kappa)$ y todos los cardinales κ_α son menores a κ, es menor a κ. Por lo tanto, existe un cardinal menor a κ cuya potencia a la μ es mayor a κ. Si ν es el mínimo, entonces es menor a κ.

Como $\kappa \subseteq \nu^{\mu}$, podemos suponer que M es un subconjunto de ${}^{\mu}\nu$. Sea $\prec$ un buen orden sobre M. Si $\alpha \in \mu$, definimos el orden $\langle M, <_{\alpha} \rangle$ del siguiente modo:

$$\langle M, <_{\alpha} \rangle := \sum_{\beta \in \nu} \langle \{ f \in M \mid f(\alpha) = \beta \}, \prec \rangle .$$

Cada $<_{\alpha}$ es un buen orden sobre el conjunto M. Sea, al igual que en este capítulo y el anterior, $< := \bigcap \{ <_{\alpha} \mid \alpha \in \mu \}$. Supongamos que $\langle M, < \rangle$ contiene una cadena de tamaño κ, digamos, $C := \{ f_{\delta} \mid \delta \in \kappa \}$, donde si $\delta \in \eta \in \kappa$, entonces $f_{\delta} < f_{\eta}$. Si $\delta \in \kappa$, tenemos que $f_{\delta} < f_{\delta+1}$. Tratándose de dos funciones distintas, entonces existe $\alpha(\delta) \in \mu$ tal que $f_{\delta}(\alpha(\delta)) \neq f_{\delta+1}(\alpha(\delta))$. Como $f_{\delta} <_{\alpha(\delta)} f_{\delta+1}$, ya que $< \subseteq <_{\alpha(\delta)}$, se sigue que $f_{\delta}(\alpha(\delta)) \subseteq f_{\delta+1}(\alpha(\delta))$. Concluimos que $f_{\delta}(\alpha(\delta)) \in f_{\delta+1}(\alpha(\delta))$. Si η es tal que $\delta \in \eta \in \kappa$, tenemos que $\delta + 1 \subseteq \eta$ y, por lo tanto, $f_{\delta+1} \leqslant_{\alpha(\delta)} f_{\eta}$. De ahí que $f_{\delta+1}(\alpha(\delta)) \subseteq f_{\eta}(\alpha(\delta))$ y, por lo tanto, $f_{\delta}(\alpha(\delta)) \in f_{\eta}(\alpha(\delta))$.

Tomemos la función $\alpha(\ ) : \kappa \longrightarrow \mu$. Dado que μ es menor a la cofinalidad de κ, existen $A \in [\kappa]^{\kappa}$ y $\alpha \in \mu$, tales que si $\delta \in A$, entonces $\alpha(\delta) = \alpha$.

Tomemos la función $g : A \longrightarrow \nu$ definida para cada $\delta \in A$ del siguiente modo,

$$g(\delta) = f_{\delta}(\alpha) .$$

Sean δ y η elementos de A tales que $\delta \in \eta$. Entonces tenemos que $f_{\delta}(\alpha) = f_{\delta}(\alpha(\delta)) \in f_{\eta}(\alpha(\delta)) = f_{\eta}(\alpha)$, es decir, $g(\delta) \in g(\eta)$. Por lo tanto, la función g es inyectiva y $|A| \subseteq \nu$. Pero lo primero que observamos fue que $\nu \in \kappa$ y sabemos que $\kappa = |A|$, por lo cual tenemos una contradicción. De ahí que tal cadena C no pueda existir. ■

Este teorema ya nos señala que si $d(\kappa) \in cf(\kappa)$ y κ es un cardinal regular, el teorema 4.6 da una cota precisa. Tomemos un cardinal regular κ, tal que $d(\kappa) \in d'(\kappa)$. El orden $\langle M, < \rangle$ construido en el teorema anterior no tiene cadenas de tamaño κ. Sin embargo, al ser $<$ la intersección de menos de $d'(\kappa)$ buenos órdenes sobre un conjunto de cardinalidad κ, el conjunto ordenado

$\langle M, < \rangle$ no tiene anticadenas de tamaño κ, y, quizás más sorprendentemente, tiene altura mayor o igual a κ.

Para tener una imagen más completa de este resultado, aún falta generalizar el teorema 4.13 a cardinales singulares, además de que no se ha contemplado el caso en que $d(\kappa) = cf(\kappa)$. Lo primero se corregirá en el siguiente teorema.

Teorema 4.14 *Supongamos que κ es un cardinal infinito y $d(cf(\kappa)) \subseteq \mu \in cf(\kappa)$. Entonces existen μ buenos órdenes de M cuya intersección no tiene cadenas de tamaño κ.*

Demostración. En el caso de que κ sea un cardinal regular el teorema 4.13 da la demostración. Supongamos entonces que κ es un cardinal singular. Sea $\kappa = sup\{\kappa_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$, donde cada uno de los cardinales κ_β es menor a κ, y sea $\mathbf{M} := \{N_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$ una partición de M, donde para cada $\beta \in cf(\kappa)$, la cardinalidad de N_β es κ_β. Tenemos que $d(cf(\kappa)) \subseteq \mu \in cf(cf(\kappa)) = cf(\kappa)$. Según el teorema 4.13, existe para cada $\alpha \in \mu$, un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $cf(\kappa)$, tal que el conjunto ordenado $\langle cf(\kappa), \bigcap\{\prec_\alpha \mid \alpha \in \mu\}\rangle$ no contiene cadenas de tamaño $cf(\kappa)$. Si $\beta \in cf(\kappa)$, asignemos un buen orden $\ll_\beta$ al conjunto N_β. Si $\alpha \in \mu$, definamos el siguiente orden:

$$\langle M, <_\alpha \rangle := \sum_{\langle cf(\kappa), \prec_\alpha \rangle} \langle N_\beta, \ll_\beta \rangle .$$

Se trata de buenos órdenes sobre M. Sean $A \subseteq M$ de cardinalidad κ y $A' := \{\beta \in cf(\kappa) \mid A \cap N_\beta \neq \varnothing\}$. Tenemos que $|A'| = cf(\kappa)$, pues $A \subseteq \bigcup\{N_\beta \mid \beta \in A'\}$, y si la cardinalidad de A' fuese menor a $cf(\kappa)$, la cardinalidad de $\bigcup\{N_\beta \mid \beta \in A'\}$ sería menor a κ (ya que sería la unión de menos de $cf(\kappa)$ conjuntos de cardinalidad menor a κ), y la cardinalidad de A sería menor a κ. Sabemos ya que $cf(\kappa)$ no contiene cadenas de cardinalidad $cf(\kappa)$ según el orden $\bigcap\{\prec_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$, y por eso A' no es una cadena tal. Entonces existen $\alpha, \alpha' \in \mu$ y $\beta, \beta' \in A'$ tales que $\beta \prec_\alpha \beta'$ y $\beta' \prec_{\alpha'} \beta$. Sean $x \in N_\beta \cap A$ y $y \in N_{\beta'} \cap A$ (sabemos que estas intersecciones no son vacías). Tenemos entonces que $x <_\alpha y$ y que $y <_{\alpha'} x$, es decir, x y y son incomparables según $<$ (la intersección de los órdenes $<_\alpha$). Por lo cual A no es una cadena según $<$. Así, tenemos que M no contiene cadenas de tamaño κ según $<$. ■

Con los dos teoremas anteriores ya casi se tiene que si μ es el mínimo entre $d(\kappa)$ y $d(cf(\kappa))$ entonces es posible tomar μ buenos órdenes sobre un conjunto de cardinalidad κ cuya intersección no contenga cadenas de cardinalidad κ, lo que es señalar que la cota dada en el teorema 4.7 es buena. Sin embargo, se sigue dependiendo de que tal mínimo sea menor a $cf(\kappa)$. Para cubrir la falla y finalmente redondear están los siguientes dos teoremas.

Teorema 4.15 *Supongamos que $cf(\kappa) \subseteq \mu$. Entonces existen μ buenos órdenes sobre M cuya intersección no contiene cadenas de cardinalidad κ.*

Demostración. Supongamos primero que $\mu = cf(\kappa)$. Tomemos $\mathbf{M} := \{N_\beta \mid \beta \in cf(\kappa)\}$ una partición de M tal que si $\beta \in cf(\kappa)$ la cardinalidad de N_β es menor a κ. Sea $\prec$ un buen orden sobre M. Tomemos $\alpha \in \mu$ y definamos el orden

$$\langle M, <_\alpha \rangle := \langle N_\alpha, \prec \rangle + \langle M \backslash N_\alpha, \prec \rangle .$$

Para cada $\alpha \in \mu$ la relación $<_\alpha$ es un buen orden sobre M. Si $A \in [M]^\kappa$ y $A' := \{\beta \in cf(\kappa) \mid A \cap N_\beta \neq \varnothing\}$, por la definición de $\mathbf{M}$ tenemos que $|A'| = cf(\kappa)$. Existen entonces α y α' en A' distintos tales que $A \cap N_\alpha$ y $A \cap N_{\alpha'}$ son no vacíos. Sean $x \in A \cap N_\alpha$ y $y \in A \cap N_{\alpha'}$. Tenemos entonces que $x <_\alpha y$ y que $y <_{\alpha'} x$. Entonces A no es una cadena según $<$ (la intersección de los órdenes $<_\alpha$). Por lo tanto, $\langle M, < \rangle$ no contiene cadenas de cardinalidad κ. Si $cf(\kappa) \in \mu$, con agregar más buenos órdenes sobre M a los expuestos en esta demostración tendríamos que su intersección a su vez no tendría cadenas de cardinalidad κ. ■

Teorema 4.16 *Supongamos que $\mu \supseteq min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$. Entonces existen μ buenos órdenes sobre un conjunto de cardinalidad κ, cuya intersección no tiene cadenas de cardinalidad κ.*

Demostración. Supongamos primero que $\mu = min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$. Si $d(cf(\kappa)) \subseteq d(\kappa)$, tenemos que $\mu = d(cf(\kappa))$. Sabemos que $d(cf(\kappa)) \subseteq cf(\kappa)$. Si $\mu = d(cf(\kappa))$ es menor a $cf(\kappa)$, por el teorema 4.14, tenemos que existen μ órdenes sobre M cuya intersección no tiene cadenas de tamaño κ. Si $\mu = d(cf(\kappa)) = cf(\kappa)$, por el teorema 4.15, tenemos el mismo resultado.

Falta ver el caso en que $d(cf(\kappa)) \nsubseteq d(\kappa)$, es decir, $d(\kappa) \in d(cf(\kappa))$. Como $d(cf(\kappa)) \subseteq cf(\kappa)$, en este caso tenemos que $\mu = d(\kappa) \in cf(\kappa)$, y para este caso el teorema 4.13 nos da el resultado deseado. Así, tenemos que si $\mu = min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$, es posible que M no contenga cadenas de cardinalidad κ según $<$. Si μ es mayor $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$, sólo necesitamos agregar órdenes para obtener el mismo resultado. ■

Se sabía ya que todos los órdenes bien fundados sobre un conjunto de cardinalidad κ que tienen complejidad menor a $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$ tienen, y en abundancia, cadenas de cardinalidad κ. Ahora también se sabe que los órdenes bien fundados en conjuntos de cardinalidad κ que no tienen cadenas de cardinalidad κ "comienzan"precisamente a partir de la complejidad $min\{d(\kappa), d(cf(\kappa))\}$.

Con los teoremas de este capítulo se concluyeron algunas cuestiones sobre la complejidad de un orden parcial bien fundado. Incluso se llega a un resultado concreto: la complejidad del orden $\langle \nu, \ll \rangle$ de la página 14. También se concluye una aparentemente fuerte relación entre el concepto de complejidad y los funcionales d y d'. De éstos podemos de hecho dar definiciones alternativas. Si κ es un cardinal infinito, entonces $d'(\kappa) = com\langle \kappa, \varnothing \rangle$, y, si es regular,

$$d(\kappa) =$$
$$min\left\{com\langle M, < \rangle \mid |M| = \kappa \wedge \forall A \in [M]^{\kappa} \left\langle A, <_{|A} \right\rangle \ no\ es\ lineal\right\}.$$

Así, como tantos otros cardinales indeterminados, los cardinales $d(\kappa)$ y $d'(\kappa)$ tienen una definición en términos de combinatoria.

Se mencionó ya al principio del capítulo 3, que el teorema 4.6 es una generalización de dos teoremas que aparecieron en [Ha64], en el siguiente sentido. En las hipótesis de ambos teoremas se pedía que la cardinalidad del conjunto M fuese regular, pero en uno se pedía que tal cardinalidad fuese sucesor y en el otro que fuera límite. Que en este trabajo sólo se pida para tal resultado que la cardinalidad sea regular no es la única diferencia. En [Ha64] sólo se concluye que los órdenes coinciden en un conjunto de cardinalidad κ, sin mencionar que eso es equivalente a que el orden resultante de intersecarlos tiene una cadena da cardinalidad κ, y mucho menos que, como sencillas consecuencias, tal orden tiene altura κ y no tiene anticadenas de tamaño κ. De hecho, en tal artículo, jamás se piensa en la intersección de los buenos órdenes que se usan. La demostración de que esa cota era buena, parecida a la del teorema 4.13, sólo señalaba que los órdenes definidos ahí no coincidían en ningún conjunto de cardinalidad κ, sin, obviamente, aclarar si la intersección de ellos fuera un orden de altura menor a κ o tuviera o no anticadenas de cardinalidad κ. La sensación de que esa intersección podía fallar en tener altura menor a κ o tener anticadenas de cardinalidad κ fue una de la primeras motivaciones de este trabajo. Dicho en términos de la misma, la primera búsqueda fue la complejidad de una anticadena infinita. Se descubrió usando las construcciones e ideas del mismo artículo y esos teoremas resultaron ser distintos a los del artículo. Esa intersección sí podía tener altura κ y no tener ninguna anticadena de tamaño κ.

El primer paso para llegar a estos resultados fue cambiar la pregunta de ¿cuánto coinciden tal cantidad de buenos órdenes? a ¿cómo se ve su intersección? Se tiene inmediatamente que tal intersección es un orden bien fundado. Como se concluyó que todo orden bien fundado es intersección de un conjunto de buenos órdenes el concepto de complejidad estaba a la mano. Aún sin esa palabra, los resultados de este trabajo llevaron a la conclusión de que la presencia (o ausencia) de cadenas y anticadenas influye sobre tal concepto. Los más concretos tuvieron más que ver con la presencia de anticadenas. Un árbol con una anticadena de tamaño ν es un orden donde se pueden tomar ν "caminos" diferentes. El cardinal ν entonces influye en la "complejidad" de ese árbol. Por otro lado, los teoremas aquí demostrados señalan que a menor cantidad de buenos órdenes su intersección es más parecida a un buen orden, es decir, más "simple". Con este tipo de imágenes en la mente fue que se escogió la palabra "complejidad" para el concepto alrededor del cual giró este trabajo.

Si se concluyó que entre los árboles la complejidad es distinta a la dimensión, y de hecho un concepto mucho más rico, queda abierta la cuestión de cuan distintos son esos conceptos entre los órdenes bien fundados en general. También queda un vacío en cuanto a resultados concretos sobre la complejidad. Podrían contribuir para conseguirlos otras características que no fueran la altura, las cadenas o las anticadenas. Además de la consistencia de $d(\kappa) \in d(cf(\kappa))$, dado que estos funcionales tienen definiciones que usan combinatoria, pueden abrirse más preguntas sobre los mismos y su relación con otros cardinales indeterminados.

Bibliografía

[AC14] José Alfredo Amor Montaño, Gabriela Campero Arena y Favio Ezequiel Miranda Perea, *Teoría de conjuntos, Curso intermedio*, Temas de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Segunda edición, (2014)

[DM41] B. Dushnik y E. Miller, *Partially ordered sets*, American Journal of Mathematics, 63, (1941), 600-610

[ER53] P. Erdös y R. Rado, *A problem on ordered sets*, Journal of the London Mathematical Society, 28, (1953), 426-438

[Gi91] M. Gitik, *The strength of the failure of the Singular Cardinal Hypothesis*, Annals of Pure and Applied Logic, 51, (1991) 215-240

[Ha10] Egbert Harzheim, *Ordered Sets*, Advances in Mathematics, Springer, (2010)

[Ha64] Egbert Harzheim, *Mehrfach wohlgeordnete Mengen und eine Verschärfung eines Satzes von Lindenbaum*, Fundamenta Mathematicae, 53, (1964), 155-172