UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Singularidades en el modelado de procesos dinámicos multi-escala

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

Víctor Hugo Hernández Castillo

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Alessio Franci

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., octubre 2017

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IA105816-RA105816.

Agradezco a todas aquellas personas que colaboraron en la realización del presente trabajo, hago énfasis para mi director de tesis Dr. Alessio Franci, y a mis sinodales Dr. Marco Arieli Herrera Valdez, M. en C. Miguel Lara Aparicio, Dra. Clara Eugenia Garza Hume y Lic. Andrés Nieto Guadarrama.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los fenómenos naturales han fascinado a la humanidad desde la antigüedad. La observación y el registro han sido, en principio, medios para abordarlos. Al paso del tiempo, la sofisticación del entendimiento humano exigió herramientas más rigurosas para observar y conocer su entorno. Lo anterior permitió que algunos siglos antes de nuestra era, este conocimiento comenzara a sintetizarse en postulados, leyes, reglas y teorías. Este avance de la humanidad se fortaleció de manera notable con el trabajo de Leibniz y Newton, en el siglo XVII, por la aparición de una de las herramientas más poderosas para observar y analizar los fenómenos naturales: *las ecuaciones diferenciales*.

En el presente trabajo se introducirán desarrollos recientes de la teoría de ecuaciones diferenciales para el estudio de fenómenos naturales que muestran comportamientos con múltiples escalas temporales. Con ello se hace referencia a la teoría de bifurcaciones abordada por la teoría de singularidades y la teoría geométrica de perturbaciones singulares.

En el capítulo 5 presentamos una de las aportaciones más importantes de este trabajo, mostraremos cierto tipo diagramas de fase de *sistemas de ecuaciones diferenciales a distintas escalas temporales*, que se utilizan como modelo para describir el comportamiento de distintos fenómenos naturales y teóricos; tales diagramas son una herramienta geométrica con la cual podemos realizar un análisis global de la dinámica descrita por los mencionados sistemas. Los modelos presentados fueron tomados de [6], para los cuales realizamos algunas comprobaciones predichas por el mismo artículo, tomando este hecho como uno de los objetivos del trabajo. Otra aportación la tenemos en la argumentación realizada en los otros capítulos, que es de hecho una síntesis de una parte las teorías mencionadas en el párrafo anterior.

1.1. Una motivación: modelado de las oscilaciones de relajación

Un comportamiento universal donde se observa la presencia de múltiples escalas temporales son las oscilaciones de relajación. A lo largo de un ciclo de relajación, la variable medida muestra dos comportamientos distintos: lento y rápido. El comportamiento lento se desarrolla a lo largo de intervalos de tiempo del orden del periodo de oscilación, mientras que el comportamiento rápido se desarrolla a lo largo de intervalos de tiempo mucho más cortos que el periodo de oscilación. Por ello, la razón entre la velocidad durante las fases lentas y rápidas se acerca a cero. Se pueden observar oscilaciones de relajación en numerosas áreas del conocimiento humano, tales como mecánica, bioquímica, sistemas biológicos y electrónica. En los siguientes apartados se describen tres ejemplos experimentales de oscilaciones de relajación, dos tomados de la biología y uno de la electrónica.

1.1.1. Oscilaciones neuronales

Las células presentes en los órganos y estructuras que forman el sistema nervioso de los seres vivos son llamadas neuronas.

Este tipo de célula tiene la propiedad de cambiar su potencial eléctrico y transmitir las variaciones a otras neuronas a través de extremidades especializadas llamadas axones. Los puntos de contacto entre axones y neuronas se llaman sinapsis. En las sinapsis, la señal eléctrica proveniente de una neurona se traduce en mensajes electro-químicos que son percibidos por la neurona receptora y a su vez, propagados a otras neuronas. La comunicación electro-química neuronal permite a estas células controlar diversos procesos fisiológicos y subyace de manera fundamental a nuestra experiencia consciente.

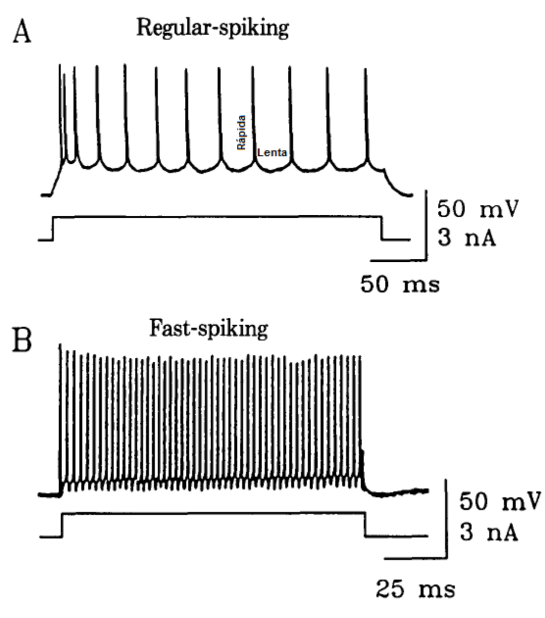


Figura 1.1: Dos patrones de disparos de diversas neuronas neocorticales: A) Impulsos regulares, B) Impulsos rápidos.

En presencia de estímulos suficientemente grandes, las variaciones en el potencial eléctrico neuronal muestran las características de oscilaciones de relajación. En la figura 1.1 (tomada de [4], página

100) se observan fases muy rápidas, en las cuales el potencial eléctrico sube y baja en un lapso de pocos milisegundos.

Este comportamiento define los picos neuronales. En alternancia con los picos hay fases relativamente muchos más largas donde el potencial varía poco, y permanece cerca de un valor de reposo.

1.1.2. Diodo láser auto pulsante (DLAP)

Un DLAP es un dispositivo óptico activo capaz de producir un tren continuo de impulsos luminosos cuya frecuencia de repetición depende de la corriente suministrada. En la figura 1.2 se observa la densidad de fotones emitida $S(t)$ con respecto al tiempo para distintos valores de corriente suministrada I_{bias}.

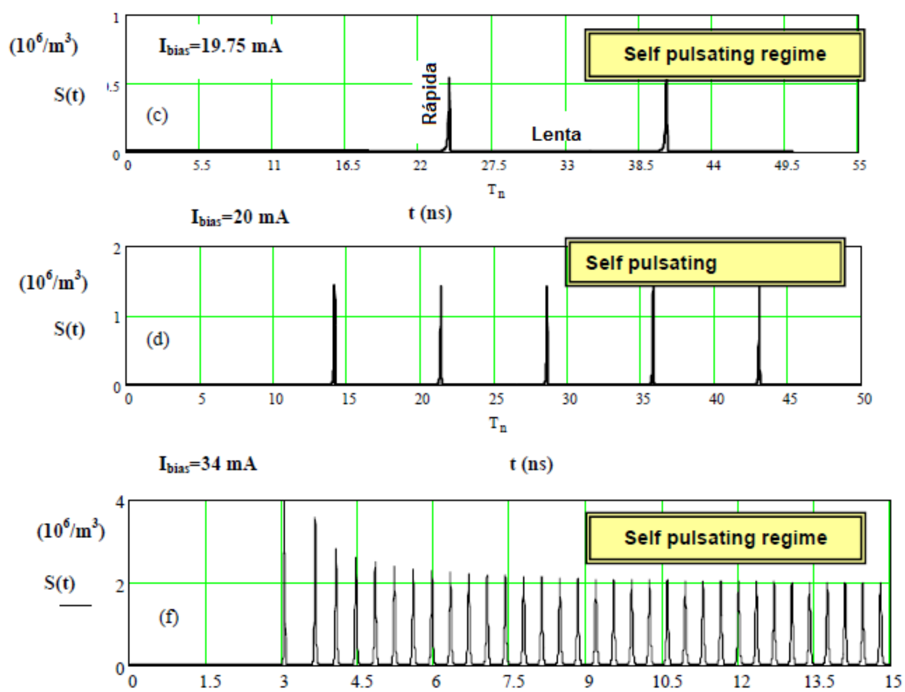


Figura 1.2: Dinámicas temporales de un DLAP para tres valores de la corriente I_{bias}.

La figura de este ejemplo fue tomada de [19]. Este tipo de láser puede emplearse como codificador/transmisor de información caótica: la transmisión de información puede ser enmascarada por una señal caótica. En la figura 1.2 se observa con claridad la presencia de dos escalas temporales en la alternancia entre picos luminosos (rápidos) y fases silentes (lentas).

1.1.3. Actividad eléctrica del corazón

El corazón posee células capaces de generar pulsos eléctricos (similares a los pulsos neuronales pero más lentos) de manera periódica. La células cardíacas se acoplan de forma eléctrica y sincronizan sus pulsos para generar las contracciones responsables de bombear la sangre a través del cuerpo. Existen dos estructuras que organizan grupos de células cardíacas cuando funcionan como marcapasos eléctricos: el nódulo sinoauricular (SA, principal generador del ritmo cardiaco) y el nódulo atrioventricular (AV). El SA envía señales eléctricas al AV, nódulo donde se amplifican y envían a otras partes del corazón, propagando así la actividad eléctrica del SA.

La actividad eléctrica de las células cardíacas puede medirse de forma no invasiva a través del electrocardiograma que registra de manera indirecta la actividad eléctrica colectiva de grupos de células cardíacas. La figura 1.3 (tomada de [22]) muestra un ejemplo de electrocardiograma clínico. La presencia de dos escalas temporales es evidente en la rapidez de los pulsos colectivos (rápidos) y las fases silentes entre dos pulsos (lentas).

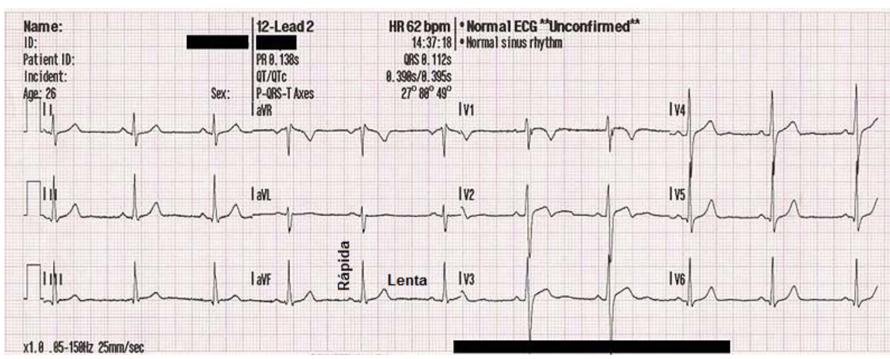


Figura 1.3: Electrocardiograma.

1.1.4. Conclusión acerca de los ejemplos

Los ejemplos citados provienen de áreas de conocimiento aparentemente ajenas. Sin embargo, las variables medidas, ya sea el potencial eléctrico neuronal, la intensidad luminosa emitida por un DLAP, o bien, la actividad eléctrica colectiva de grupos de células cardíacas, tienen en común un comportamiento: *la presencia de distintas escalas temporales*. Cada ejemplo puede ser descrito matemáticamente a través de modelos detallados especificados en [10], [4], [6], [16], [12], [1], [24], [19], [3], [21]. Estos modelos son definidos por ecuaciones diferenciales que, como los datos experimentales, muestran distintas escalas temporales. Estos ejemplos y observaciones motivan el objetivo del presente trabajo: introducir una herramienta matemática para la caracterización de los posibles comportamientos observados mediante ecuaciones diferenciales con múltiples escalas temporales.

1.2. Síntesis del contenido de los capítulos

Sintetizamos en los siguientes párrafos el contenido de cada uno de los capítulos.

En la sección 2.1 introducimos una técnica básica de la dinámica, nos referimos a la interpretación de una ecuación diferencial como un campo vectorial. Esta técnica es gráfica y cualitativa, nos permitirá identificar elementos dinámicos en el campo vectorial, tales como puntos fijos atractores o repulsores del flujo [9]. El análisis de la estabilidad lineal es otra técnica, se aborda de manera analítica para determinar los elementos dinámicos en el campo vectorial.

En la sección 2.2 introducimos las ecuaciones diferenciales ordinarias parametrizadas (EDOP) de primer orden, una extensión del caso anterior. Exploramos en las EDOP algunas bifurcaciones y explicaremos los cambios en su interpretación como un campo vectorial dependiente de un parámetro. Presentamos una lista de las bifurcaciones elementales y algunas propiedades inherentes.

Finalizamos el capítulo 2 con la sección 2.3 formulando una par de preguntas que nos introducen a las ideas desplegadas en el capítulo 3.

(i) ¿Cómo demostrar que una ecuación genérica $g(x, \lambda) = 0$ posee una bifurcación dada?

(ii) ¿Cómo predecir cuál es el diagrama de bifurcación en presencia de perturbaciones de la forma $g(x, \lambda) + \varepsilon p(x, \lambda) = 0$?

Hemos dividido en tres secciones el capítulo 3 donde introducimos la teoría de bifurcación y la teoría de despliegue con el enfoque de la teoría de las singularidades tomado de [17].

En la sección 3.1 formalizamos un tipo de equivalencia entre problemas de bifurcación que nos permitirá reconocer semejanzas cualitativas (una de ellas es el lugar geométrico que los representa). Exponemos el *problema de reconocimiento*, que consiste en determinar las condiciones necesarias para afirmar que dos problemas de bifurcación son equivalentes en el sentido mencionado. Daremos solución a esta cuestión a través de criterios matemáticos.

En la sección 3.2 presentamos la teoría de despliegue. Formalizamos la idea de perturbación usando el concepto de equivalencia entre problemas de bifurcación mencionado en la sección anterior. Aprenderemos a reconocer aquellas funciones que tengan la cualidad de generar a todas las pequeñas perturbaciones de una bifurcación elemental dada a partir de un espacio de parámetros. Definimos el concepto de *despliegue universal*. El tamaño del espacio de parámetros es la *codimensión* de la bifurcación, un concepto pilar de la teoría.

Establecida matemáticamente la idea de perturbación, definiremos los diagramas persistentes de una bifurcación; estos son caracterizados por conservar su forma bajo ínfimas perturbaciones. Será la *variedad de transición*, un subconjunto del espacio de parámetros que lo organizará completamente en distintas clases que poseerán respectivamente representantes de los distintos diagramas persistentes de una bifurcación dada.

Seremos capaces de establecer un camino formal para construir a todos los diagramas persistentes de algunas bifurcaciones. Esta habilidad será determinante en la justificación de posteriores contenidos en los capítulos 4 y 5.

En la sección 3.3 citamos el *teorema de clasificación* que establece que las bifurcaciones de codimensión ≤ 3 son 11. Resumimos información en algunas tablas de estas 11 bifurcaciones relacionadas con la teoría de despliegue.

En el capítulo 4 introducimos la teoría geométrica de las perturbaciones singulares [13]. En la sección 4.1 presentamos algunas generalidades del objeto matemático más importante de este trabajo, nos referimos a los *sistemas rápido-lento*. Son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión 2 o más, sujetos a dos escalas temporales, una rápida y una lenta. Las dos escalas temporales inherentes al sistema rápido-lento dan lugar a la dinámica rápida y la dinámica lenta, respectivamente.

Los sistemas rápido-lento modelan sistemas con múltiples escalas temporales. Nos servirán para introducir la modelación de algunos fenómenos naturales y teóricos que poseen distintas escalas temporales.

Las soluciones en el tiempo de los sistemas rápido-lento, exhiben trayectorias que a su vez muestran los objetos dinámicos que el sistema posea, tales como: puntos atractores, puntos repulsores, ciclos límite atractores, biestabilidad, dinámica rápida, dinámica lenta, ceroclinas, etcétera.

Damos dos ejemplos de sistemas rápido-lento, uno que muestra una dinámica sencilla y el otro que muestra una dinámica más elaborada. El *diagrama de fase singular* aparece por primera vez en nuestro trabajo; es una herramienta gráfica que muestra los objetos dinámicos globales del sistema, su argumentación matemática la presentamos en la siguiente sección y fue tomada de [13].

En la sección 4.2 justificamos a través de los teoremas de Fenichel la existencia de un flujo muy parecido al que describe la dinámica singular. Este flujo es aplastado exponencialmente hacia la variedad crítica, y al estar lo suficientemente cerca, hace la transición de escalas temporales al seguir su curso sobre el lugar geométrico que Fenichel llama la variedad lenta; el curso de las trayectorias de este flujo es muy parecido al descrito por la dinámica lenta. Otro resultado relevante en esta teoría, es la existencia de la variedad estable e inestable, de las ramas normal hiperbólicas de la variedad crítica en los sistemas rápido-lento. Son subconjuntos del espacio donde están definidas las soluciones del sistema, con la cualidad de ser una familia de condiciones iniciales del sistema que resultan ser atraídas o rechazadas por una rama normal hiperbólica de la variedad crítica.

En el capítulo 5 conjuntamos la teoría de singularidades establecida en el capítulo 3 y la teoría geométrica de perturbaciones singulares del capítulo 4, para construir sistemas rápido-lento organizados por una singularidad.

Explotamos la teoría de despliegue que nos aporta el despliegue universal de una singularidad y su capacidad de organizador en clases, a las bifurcaciones persistentes de la singularidad dada. Tomamos a estos despliegues universales para definir a la ceroclina de la variable rápida en el sistema rápido-lento. Con esto creamos *un mapeo entre los diagramas persistentes y las dinámicas del sistema rápido-lento*. Así, por cada diagrama persistente de una singularidad dada, podemos obtener los objetos dinámicos globales del sistema al variar los parámetros de despliegue y bifurcación.

En las secciones 5.2 y 5.3 presentamos un par de sistemas rápido-lento propuestos en [6], determinamos las distintas dinámicas globales en función de los distintos parámetros tomados del espacio de despliegue y de los distintos valores del parámetro de bifurcación. Hacemos una lista de los objetos dinámicos que pueden crear estos modelos.

En el capítulo 6 presentamos las conclusiones de nuestro trabajo. Agregamos un apéndice, relacionado con generalidades de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que se utilizarán a lo largo de los capítulos.

Finalmente, las gráficas y simulaciones presentes en esta tesis, fueron realizados en Matlab.

Capítulo 2

Bifurcaciones escalares

Este capítulo está formado por tres secciones, las cuales tienen la intención de presentar nuestros primeros objetos de estudio más simples con el enfoque requerido; estamos hablando de las ecuaciones diferenciables ordinarias (EDO) de primer orden. A lo largo de los capítulos estaremos manejando conceptos generales asociados a las EDO y analizados en el Apéndice A.

Presentamos, en la primera sección, las ecuaciones diferenciales ordinarias unidimensionales, y utilizamos una técnica gráfica para determinar el comportamiento global de las soluciones. En la segunda sección presentamos (EDO) sujetas a un parámetro, y la influencia del mismo sobre el espacio fase. Finalizamos el capítulo en la tercera sección con un par de preguntas que motivan los conceptos que veremos en el siguiente capítulo.

2.1. Dinámica de EDO de la forma $\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}$

Los casos más sencillos de EDO escalares son las **ecuaciones diferenciales ordinarias lineales** de primer orden con condición inicial:

$$\dot{x} = ax \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.2}$$

donde $x, a \in \mathbf{R}$. Cualquier sistema (2.1) tiene una única solución en el espacio fase para todas las condiciones iniciales $x_0 \in \mathbf{R}$. Esta solución está dada por $x(t) = x_0 e^{at}$.

Sin embargo, estamos más interesados en los **sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias** de primer orden con condición inicial, cuya forma es:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$
$$x(0) = x_0 \tag{2.4}$$

donde $f : E \to \mathbf{R}$ es una función C^1 y E es una conjunto abierto de $\mathbf{R}$. Vea las formalidades en el Apéndice A.

A continuación presentaremos una técnica básica para el análisis de la dinámica de los sistemas unidimensionales no-lineales (2.3) para $x \in \mathbf{R}$. Nos referimos a la **interpretación de una ecuación diferencial de primer orden como un campo vectorial** sobre la recta real [9].

Utilizaremos un **análisis gráfico** de la función $f(x)$ para determinar el flujo global de un sistema de la forma $\dot{x} = f(x)$. Vamos a considerar al plano cartesiano $X - \dot{X}$, donde $\dot{X}$ funge como el comúnmente utilizado eje vertical Y. Para ello consideremos la figura 2.1. Imaginemos que un flujo se mueve a lo largo del eje X con una velocidad local $f(x)$, donde este supuesto flujo es llamado **fluido fase**, y el eje X es el **espacio fase**. El flujo se desplaza a la derecha cuando $f(x) > 0$ y hacia la izquierda cuando $f(x) < 0$. Los puntos donde la gráfica de f cruza el eje X corresponde a los puntos fijos del sistema (2.3).

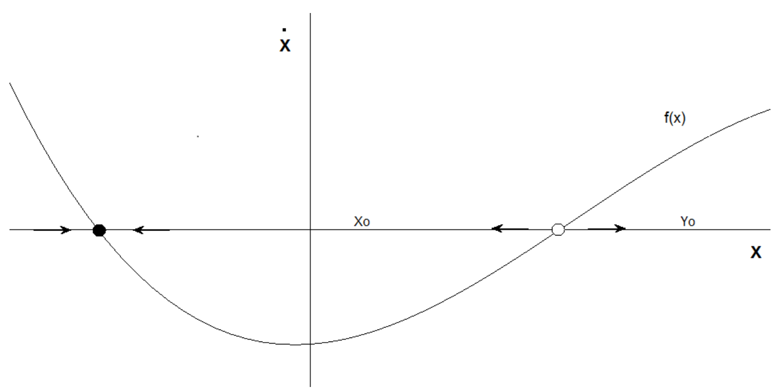


Figura 2.1: Diagrama de fase de una ecuación diferencial ordinaria no lineal.

Establecida esta regla gráfica observamos que se deriva una naturaleza para el flujo y para los puntos fijos, que podemos observar en la figura 2.1. El punto fijo negro que está a la izquierda posee una naturaleza atractora en cuanto al flujo, por otra parte, el punto fijo blanco que está a la derecha tiene una naturaleza repulsora.

Para observar la dinámica del sistema (2.3), comenzamos incluyendo en el sistema una condición inicial arbitraria x_0, ubicamos una partícula imaginaria en tal punto y observamos cómo es llevada por el flujo.

Conforme el tiempo avanza, el punto fase se mueve a lo largo del eje X de acuerdo con alguna función $x(t)$, que representa la solución de la ecuación diferencial sujeta a la condición inicial x_0. Una gráfica como en la figura 2.1 que muestra las cualidades de las distintas trayectorias en el sistema, es conocida como **diagrama de fase**, así que el punto x_0 tiene una trayectoria que converge al punto atractor de la izquierda (punto negro) al paso del tiempo, mientras que el punto y_0 diverge del punto repulsor (punto blanco).

Un complemento, más cuantitativo del criterio de análisis gráfico de los campos vectoriales es el **análisis de la estabilidad lineal**, el cual tiene que ver con la obtención de información sobre el comportamiento de las trayectorias cerca de los puntos fijos del sistema usando la linealización [9].

Para un sistema de tipo (2.3) la linealización en un punto fijo x^* está dada simplemente por $\dot{\eta} = f'(x^*)\eta$, donde $\eta = x - x^*$.

Esto muestra que la perturbación $\eta(t)$ crece exponencialmente si $f'(x^*) > 0$ y decrece exponencialmente si $f'(x^*) < 0$. Si $f'(x^*) = 0$, los términos de orden mayor a la potencia 2 en la expansión de Taylor no son despreciables y un análisis no lineal se necesita para determinar la estabilidad. En síntesis, la pendiente $f'(x^*)$ en los puntos fijos determina su estabilidad lineal. Si $f'(x^*) = 0$, entonces es necesario un análisis no lineal.

Este análisis nos trae la siguiente definición [9].

Definición 2.1 *Sea x^* un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $f'(x)$ la derivada de f con respecto de x; decimos que x^* es* atractor exponencialmente estable *si $f'(x^*) < 0$, por otra parte decimos que x^* es* repulsor exponencialmente inestable *si $f'(x^*) > 0$.*

Para el caso en que $f'(x^*) = 0$, necesitamos más información para decir algo acerca de ese punto fijo.

Veamos un ejemplo en el que aterrizamos las ideas anteriormente citadas.

Ejemplo **2.1** *Consideremos la siguiente ecuación diferencial no-lineal.*

$$\dot{x} = \operatorname{sen}(x) \tag{2.5}$$

Al separar las variables obtenemos $dt = \dfrac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$*, que al integrar implica que* $t = -\log|(\csc(x) + \cot(x)| + C$*.*

Para evaluar el valor de C*, supongamos que* $x = x_0$ *cuando* $t = 0$*, de manera que la solución bajo condiciones iniciales nos queda*

$$t = \log \frac{|\csc(x_0) + \cot(x_0)|}{|\csc(x(t)) + \cot(x(t))|}. \tag{2.6}$$

A partir de este resultado podemos formular la siguiente pregunta:

En el supuesto de que $x_0 = \pi/4$, ¿qué pasa con $x(t)$ cuando $t \to \infty$?

Esta pregunta se responde de forma más sencilla construyendo el diagrama de fase del sistema (2.5), que a su vez analiza la más elaborada relación implícita (2.6), ya que son equivalentes.

La figura 2.2 muestra el diagrama de fase del sistema (2.5).

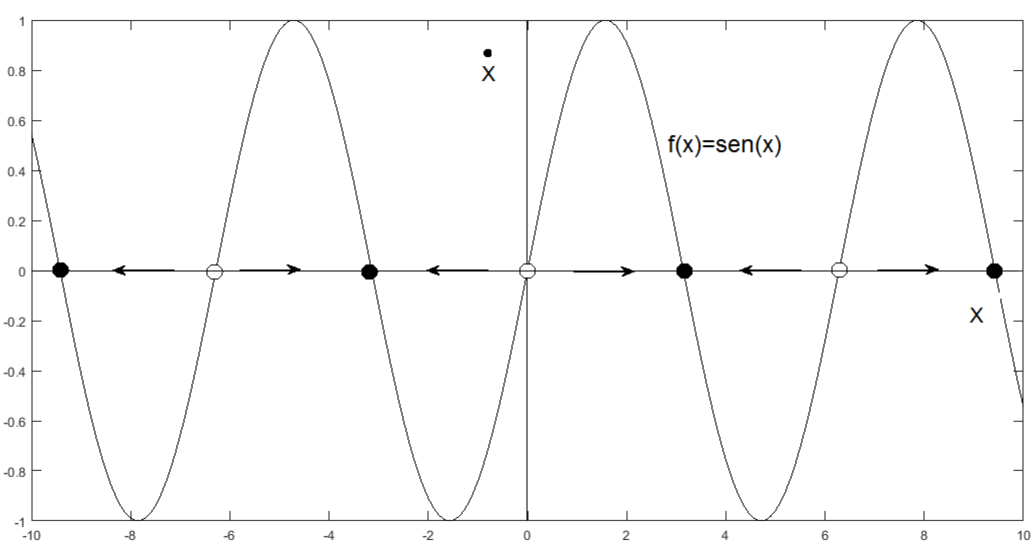


Figura 2.2: Diagrama de fase del sistema (2.5).

De este diagrama concluimos directamente que los puntos fijos de la forma $x^* = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, son **repulsores**, mientras que los puntos de la forma $x^* = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, son **atractores**. Además, si $x_0 \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, entonces $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x_0) = p$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ y para un punto atractor p del sistema (2.5), es decir, si x_0 no es un punto fijo repulsor en el espacio fase, entonces el flujo, cuya condición inicial es precisamente x_0, converge a algún punto fijo atractor.

En resumen, observamos que en un sistema de primer orden, resulta que los puntos fijos del mismo caracterizan completamente su comportamiento, ya que junto con algunos criterios sencillos podemos realizar un análisis global de su espacio fase.

Con el trabajo hecho en esta sección nos hemos preparado para introducir un nuevo objeto matemático, una extensión de las ecuaciones $\dot{x} = f(x)$ que hemos repasado. En la siguiente sección comenzaremos a estudiar a las EDO que dependen de un parámetro.

2.2. EDO de la forma $\dot{x} = g(x, \lambda), \ \ x, \lambda \in \mathbf{R}$

2.2.1. El Problema de Bifurcación

En la sección anterior nos dimos cuenta de que la dinámica de campos vectoriales en $\mathbf{R}$ puede ser obtenida de manera simple, ya que es suficiente con caracterizar sus puntos fijos.

Dada la aparente trivialidad de tal dinámica nos preguntamos, ¿qué más hay de interesante en los sistemas de dimensión uno?, y la respuesta la encontramos en la *dependencia sobre un parámetro.*

Estudiemos ecuaciones diferenciales unidimensionales de la forma

$$\dot{x} = g(x, \lambda) \tag{2.7}$$

donde $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, una función C^∞ y λ es una variable que podemos controlar, es decir es independiente, y se le suele conocer como **parámetro de bifurcación**, contrario a x que es una variable que depende necesariamente de λ, la cual se conoce como **estado**. Los puntos fijos de este sistema están dados por los pares ordenados en el plano que satisfacen la ecuación escalar

$$g(x, \lambda) = 0 \tag{2.8}$$

Las definiciones que a continuación mencionamos provienen de la teoría de bifurcaciones en [17].

Definición 2.2 *El número entero no negativo* $n(\lambda)$ *es el número de soluciones de la ecuación* (2.8)*.*

Definición 2.3 *Llamamos a* (x_0, λ_0) *un* punto de bifurcación*, si* $n(\lambda)$ *cambia al variar a* λ *en una vecindad de* λ_0*.*

Definición 2.4 *Llamaremos al conjunto de pares ordenados* (x, λ) *que satisfacen la ecuación* (2.8)*,* **el diagrama de bifurcación** o conjunto solución de g*.*

Las bifurcaciones son importantes para la ciencia, pues proveen modelos de transición entres distintos estados. Por ejemplo, consideremos el **pandeo de una viga**.

Dada una viga dispuesta verticalmente de tal manera que pongamos un peso pequeño en la parte de arriba, ésta podrá soportar el peso y permenecerá vertical, por otra parte si ponemos un peso grande, la viga se tornará inestable y quizá se pandee, como se observa en la figura 2.3.

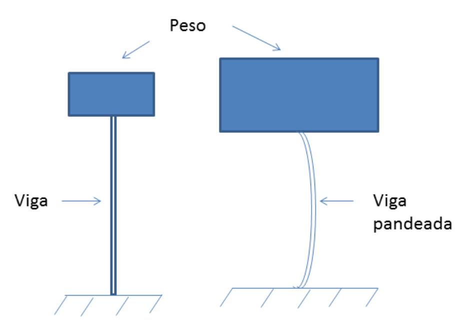


Figura 2.3: Ejemplo de un problema de bifurcación, donde el parámetro λ representa al peso, y el estado x representa el pandeo de la viga.

Aquí el peso juega el rol de parámetro de control, y el pandeo de la viga el rol de la variable dinámica x.

Nuestro estudio será local por lo que suponemos que la ecuación (2.8) sólo está definida en alguna vecindad de un punto (x_0, λ_0) y que $n(\lambda)$ sólo cuenta las soluciones en esta vecindad. El teorema de la función implícita da una condición necesaria para que (x_0, λ_0) sea un punto de bifurcación, a saber la ecuación:

$$g_x(x_0, \lambda_0) = 0 \tag{2.9}$$

donde hemos usado la convención $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Sin embargo, si

$$g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0 \tag{2.10}$$

entonces la ecuación (2.9) puede ser únicamente resuelta en una vecindad para x como función de λ, *i.e.*, para cada λ cerca de λ_0 existe exactamente una solución de $g(x, \lambda) = 0$ cerca de x_0.

Un posible método para analizar el caso en que tengamos $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$ es l **expansión de Taylor**; para ello consideramos a g como una función de (x_0, λ_0) y examinamos el comportamiento del sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ cerca de la bifurcación $x = x_0$ y $\lambda = \lambda_0$.

En la siguiente definición formalizamos a aquellos puntos del diagrama de birfurcación, que son de nuestro interés, ya que poder distinguirlos de los restantes puntos del diagrama nos permitirá establecer parte de una teoría tomando a este concepto como base.

Definición 2.5 *Llamaremos a un punto* (x_0, λ_0) *para el cual*

$$g(x_0, \lambda_0) = g_x(x_0, \lambda_0) = 0 \tag{2.11}$$

una singularidad*.*

Veremos singularidades para las cuales $n(\lambda)$ no cambia cerca de (x_0, y_0). Con un pequeño abuso de terminología hablaremos de las bifurcaciones o singularidades de manera intercambiable.

A continuación presentamos a través de distintas subsecciones algunos ejemplos de bifurcaciones utilizadas para definir sistemas de la forma $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

2.2.2. Bifurcación Punto Límite

También conocida como nodo-silla o pliegue, esta bifurcación caracteriza los puntos fijos del sistema de primer orden.

$$\dot{x} = \lambda + x^2 = 0 \tag{2.12}$$

donde λ es un parámetro que puede adquirir un valor negativo, cero o positivo.

Si $\lambda < 0$, el sistema posee dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable respectivamente. Como en el caso del lado izquierdo de la figura 2.4.

Cuando λ tiende a 0, ambos puntos fijos se acercan entre sí, y cuando $\lambda = 0$ ambos puntos se acercaron lo suficiente, para convertirse en un solo punto fijo que resulta ser *medio-estable*, es decir, es atractor de un lado y del otro repulsor, como observamos en el caso del centro en la figura 2.4.

Finalmente para cuando $\lambda > 0$ los puntos fijos desaparecen del sistema, como en el lado derecho de la figura 2.4.

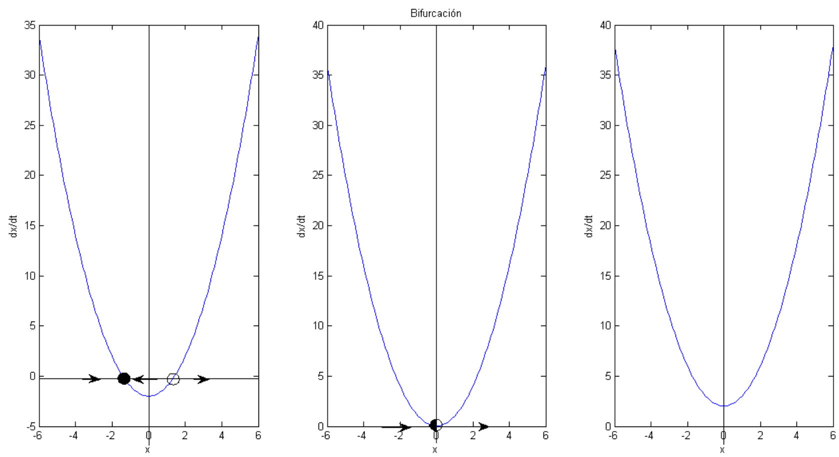


Figura 2.4: Diagramas de fase de la bifurcación punto límite para $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$, respectivamente.

El diagrama de bifurcación está representado en la figura 2.5. La sección de curva punteada representa a los valores de x que resultan ser *puntos fijos inestables*, y la línea sólida representa los valores de x que son *puntos fijos estables*.

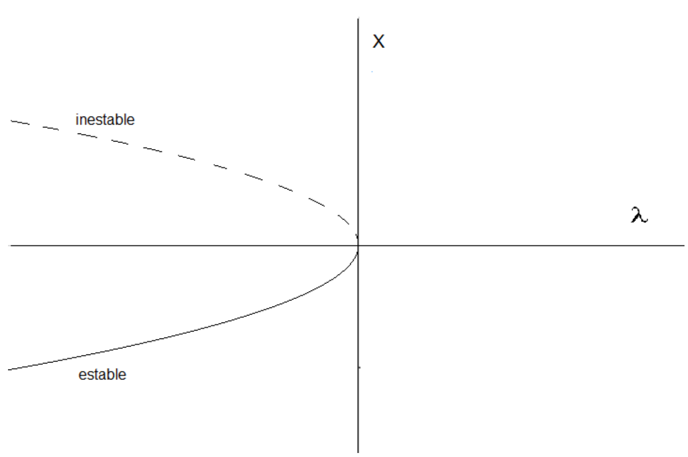


Figura 2.5: Diagrama de bifurcación punto límite.

La bifurcación nodo-silla también es conocida como *bifurcación pliegue*, *punto límite* o bien *bifurcación punto de retorno*, puesto que en el punto $(x, \lambda) = (0, 0)$, hay un cambio en el sentido de la curva.

Otra bifurcación parecida a la nodo-silla es la *bifurcación cielo azul* inventada por Abraham y Shaw (1988), y cuyo modelo es $\dot{x} = \lambda - x^2$, cuyo diagrama de bifurcación es el simétrico respecto al eje X de la figura 2.5.

Los modelos presentados como $\dot{x} = \lambda + x^2$ y $\dot{x} = \lambda - x^2$ son representativos, prototipos de la *bifurcación nodo-silla*.

2.2.3. Bifurcación Transcrítica

Hay situaciones en la ciencia en donde el punto fijo debe de existir para todo valor del parámetro y nunca pueda ser destruido, un ejemplo de esto lo vemos en la ecuación logística $\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, donde N representa la población en el tiempo t, r la tasa de crecimiento de tal población y K la capacidad de carga del ambiente en el que vive esa población. Este modelo está asociado al crecimiento de una sola especie, para el cual la población *cero representa un punto fijo para todos los casos del parámetro asociado*.

Sin embargo, el punto fijo cero sí puede cambiar su *estabilidad*, conforme se varíe el valor del parámetro.

La forma de la *bifurcación transcrítica* es:

$$\dot{x} = \lambda x - x^2 = 0. \tag{2.13}$$

Considere esta ecuación para valores positivos y negativos para x y λ, observe el campo vectorial que genera la ecuación (2.13) para los casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

Observe que $x^* = 0$ es un punto fijo para todo valor de λ.

Para $\lambda < 0$, hay un punto inestable en $x^* = \lambda$, y un punto estable en $x^* = 0$.

Conforme λ crece hasta llegar a cero, obtenemos un punto medio-estable (repulsor de lado izquierdo, y atractor de lado derecho) en $x^* = 0$.

Finalmente cuando $\lambda > 0$, $x^* = 0$ se convierte en punto inestable y $x^* = \lambda$ es ahora estable.

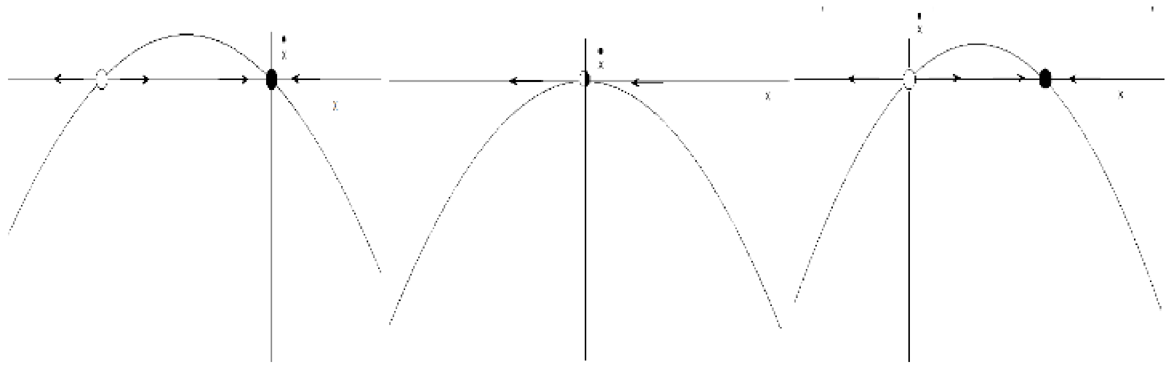


Figura 2.6: Diagramas de fase de la bifurcación transcrítica para $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$, respectivamente.

El cambio en la estabilidad sucede en $\lambda = 0$, ya que las estabilidades para $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$ son distintas por *el cambio de estabilidad entre los puntos fijos*, como observamos en la figura 2.6.

Con cambio de variables $x = \tilde{x} - \tilde{\lambda}$ y $\lambda = -2\tilde{\lambda}$, podemos reescribir la bifurcación transcrítica (2.13) en la forma

$$\dot{x} = \lambda^2 - x^2 \tag{2.14}$$

A continuación presentamos el diagrama para la *bifurcación transcrítica* en la figura 2.7.

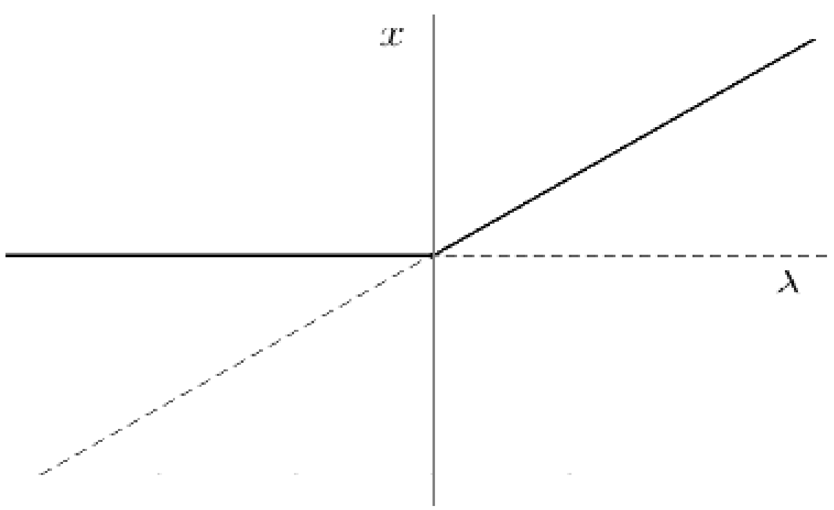


Figura 2.7: Diagrama de bifurcación transcrítica.

2.2.4. Bifurcación Tridente

Ahora veamos la ampliamente mencionada **bifurcación tridente**. Ésta es común en problemas en física que tienen simetría, por ejemplo, aquellos que tienen simetría espacial entre la derecha y la izquierda, tal como en el ejemplo mostrado en la figura 2.3. En tales casos, los puntos fijos tienden a aparecer y desaparecer por parejas simétricas. En la figura 2.3, la viga es estable en la posición vertical si la carga es pequeña. En este caso hay un punto fijo estable correspondiente a la deflexión cero, pero si la carga excede el umbral de pandeo, la viga puede pandearse hacia la derecha o hacia la izquierda. La posición vertical se ha convertido en inestable.

La forma de la bifurcación tridente es

$$\dot{x} = \lambda x - x^3 = 0. \tag{2.15}$$

Note que esta ecuación es invariante bajo el cambio de variable $x \to -x$. Esto es que si reemplazamos x por $-x$ y simplificamos, se obtiene exactamente la misma ecuación. Lo anterior equivale a decir que la ecuación (2.15) es impar.

Esta invarianza es la expresión matemática de la simetría izquierdo-derecha mencionada arriba.

Veamos el campo vectorial para los distintos valores de λ.

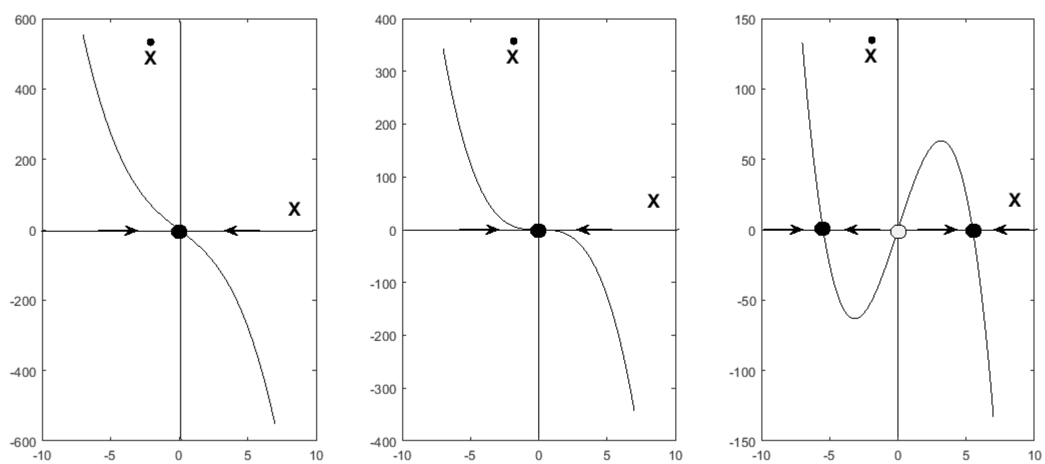


Figura 2.8: Diagramas de fase la bifurcación tridente para $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$, respectivamente.

Cuando $\lambda < 0$, el origen es el único punto fijo y éste es estable, como observamos en el lado izquierdo de la figura 2.8.

Para el caso de que $\lambda = 0$, el origen continúa siendo un punto fijo estable, pero mucho más débilmente, puesto que la linealización es cero.

Finalmente, cuando $\lambda > 0$, el origen se ha convertido en inestable y dos nuevos puntos estables aparecen en ambos lados del origen simétricamente localizados en $x^* = \pm\sqrt{\lambda}$, como podemos observar al lado derecho de la figura 2.8 .

La figura 2.9 muestra el diagrama de la bifurcación tridente.

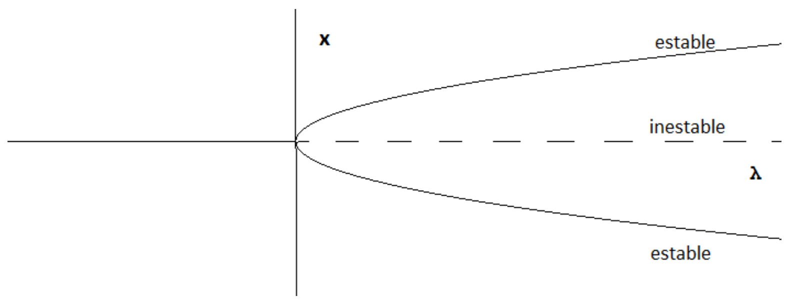


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación tridente.

2.2.5. Bifurcación Histéresis

La forma de la bifurcación histéresis es:

$$\dot{x} = x^3 - \lambda = 0 \tag{2.16}$$

En esta bifurcación no hay cambio en el número de puntos fijos. Sin embargo el punto fijo en $(x, \lambda) = (0, 0)$ no es linealmente estable, la menor perturbación ya sea a la derecha o a la izquierda nos conduce a un estado positivo o negativo respecticamente.

El diagrama de bifurcación histéresis se muestra en la figura 2.10.

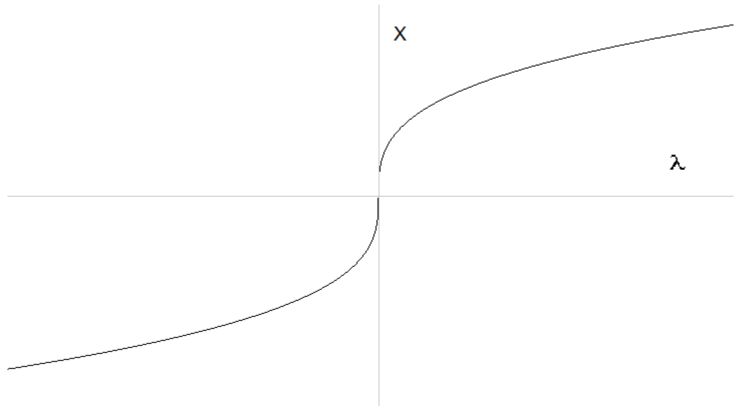


Figura 2.10: Diagrama de bifurcación histéresis.

El análisis de espacio vectorial para el sistema (2.16) será mayormente estudiado en el capítulo 5.

2.2.6. Bifurcación cúspide alada

Encontramos la bifurcación cúspide alada en una ecuación diferencial unidimensional de la forma:

$$\dot{x} = h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2 = 0 \tag{2.17}$$

Presentamos en la figura 2.11 el diagrama de bifurcación para este modelo.

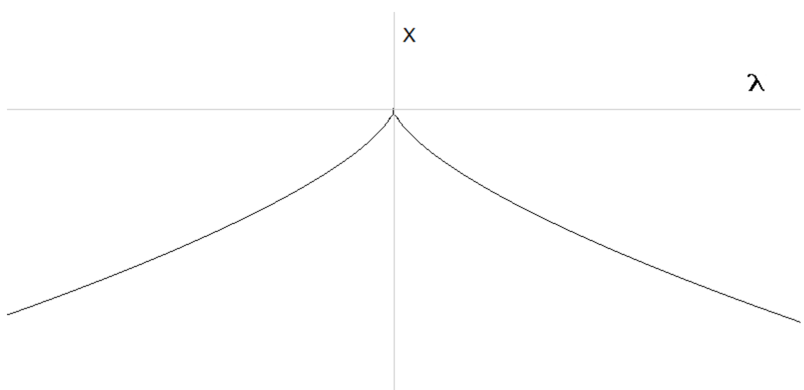


Figura 2.11: Diagrama de bifurcación cúspide alada.

Como en la histéresis, no hay cambio en el número de puntos fijos. Sin embargo la cúspide alada representa también una situación "frágil", en un sentido que aclararemos más adelante. El análisis de espacio vectorial para el sistema (2.17) será mayormente estudiado en el capítulo 5.

Concluimos esta sección planteando las siguientes preguntas:

2.3. Preguntas Abiertas

(i) ¿Cómo demostrar que una ecuación genérica $g(x, \lambda) = 0$ posee una bifurcación dada?

(ii) ¿Cómo predecir cuál es el diagrama de bifurcación en presencia de perturbaciones de la forma $g(x, \lambda) + \varepsilon p(x, \lambda) = 0$?

Responderemos a estas preguntas en el siguiente capítulo y cerramos el presente dando un ejemplo para el cual una perturbación infinitesimal cambia el diagrama de bifurcación en forma cualitativa.

Perturbación de una bifurcación

Ejemplo **2.2** *Consideremos a la bifurcación tridente* $h(x, \lambda) = -x^3 + \lambda x = 0$, *sean* $p(x, \lambda) = 1$, *y* $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ *de manera que la perturbación asociada a esos valores es* $g(x, \lambda) = h(x, \lambda) + \varepsilon p(x, \lambda) = -x^3 + \lambda x + \frac{1}{1000} = 0$.

Veamos los diagramas de bifurcación de h *y* g *respectivamente*

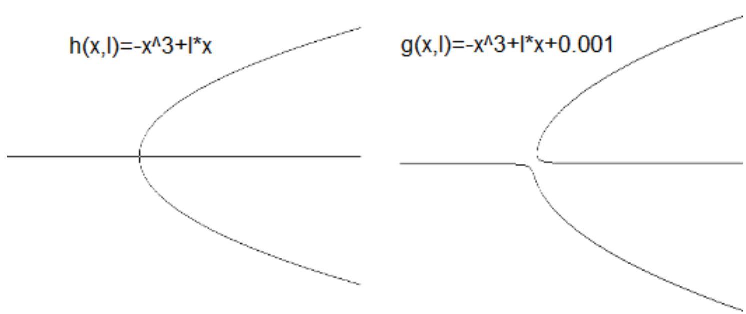


Figura 2.12: La bifurcación tridente al lado izquierdo, perturbación de la bifurcación tridente al lado derecho.

Cerca del origen h *y* g *resultan distintas cualitativamente; hemos preparado el terreno para comenzar en el siguiente capítulo con el concepto de* perturbación *de singularidades, que está estrechamente ligado al trabajo realizado.*

Capítulo 3

Singularidades en Problemas de Bifurcación

En este capítulo hablaremos de las EDO sujetas a un parámetro, que tienen cualidades semejantes (cerca de los puntos singulares del sistema) a un grupo de bifurcaciones que enlistaremos. Entre éstas se encuentran las bifurcaciones mencionadas en el capítulo anterior. Esta semejanza se formalizará a lo largo del capítulo.

Formalizaremos las perturbaciones de una bifurcación dada. Abordaremos los efectos de las perturbaciones en los diagramas de bifurcación; se verá cómo identificar aquellas funciones con la cualidad de construir a las posibles perturbaciones a través de mecanismos que estableceremos. Esto nos permitirá clasificar a todas las perturbaciones en clases y así obtener los distintos diagramas de bifurcación persistentes provenientes de una bifurcación dada.

3.1. El Problema de Reconocimiento

En esta sección responderemos a la primera pregunta realizada al final del capítulo anterior.

¿Cómo demostrar que una ecuación genérica $g(x, \lambda) = 0$ ***posee una bifurcación dada en la lista del capítulo anterior?***

La respuesta que presentaremos estará justificada a lo largo de tres subsecciones. En la primera de ellas formalizaremos *la equivalencia fuerte* entre dos problemas de bifurcación dados, en la siguiente formulamos el problema de reconocimiento y en la última la resolvemos.

3.1.1. Equivalencia Fuerte

Aquí presentamos la definición de *fuertemente equivalente* entre dos problemas de bifurcación [17].

Definición 3.1 *Diremos que dos problemas de bifurcación* $g, h : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definidos cerca del origen son* ***fuertemente equivalentes****, si existen funciones suaves* $X(x, \lambda)$ *y* $S(x, \lambda)$ *tales que la relación*

$$g(x, \lambda) = S(x, \lambda) h(X(x, \lambda), \lambda) \tag{3.1}$$

se sostiene cerca del origen. En esta definición requerimos que

$$X(0, 0) = 0,\ X_x(x, \lambda) > 0 \ y\ S(x, \lambda) > 0.$$

De aquí en adelante trabajamos con la vecindad del origen de $\mathbf{R}^2$; esto es meramente por conveniencia, ya que también se podría trabajar cerca de cualquier punto dado a través de un cambio de coordenadas.

La consecuencia más importante de la *equivalencia* es que el número de soluciones del problema de bifurcación g es igual al número de soluciones del problema de bifurcación h, para cada λ, es decir:

$$n_g(\lambda) = n_h(\lambda) \tag{3.2}$$

Por otra parte λ no debe depender de x, porque λ es un parámetro de control. Motivamos esta restricción por la observación de que típicamente en las aplicaciones, λ está asociado con un conjunto de parámetros externos que el experimentador puede controlar, mientras que x está asociado con un estado del sistema, resultado de la elección de λ. En otras palabras λ influye a x, pero x no influye a λ. Veamos una somera explicación de la manera en que debemos de concebir esta definición.

Concepción intuitiva de la definición

En esencia, la definición 3.1 pide que el problema de bifurcación g resulte cualitativamente semejante a h en una vencindad cerca del origen.

No tenemos intención de probar formalmente esta afirmación, ya que el objetivo de esta parte es obtener una interpretación intuitiva de la misma. Para ello presentamos un ejemplo en el que veremos un par de problemas de bifurcación que son fuertemente equivalentes y observaremos que sus respectivos diagramas de bifurcación resultan ser cualitativamente semejantes en una vecindad con centro en el origen. Este ejemplo nos da una idea de los rasgos que deberían de tener dos problemas de bifurcación que cumplen con la definición.

Ejemplo de dos problemas de bifurcación fuertemente equivalentes

Ejemplo **3.1** *Sean h y g dos problemas de bifurcación definidos como $h(x,\lambda) = -x^3 + \lambda$ y $g(x,\lambda) = (x^2 + 2x\lambda + 1)^2(-(x+\lambda)^3 + \lambda)$.*

Por otra parte sean las funciones $X(x,\lambda) = x + \lambda$ y $S(x,\lambda) = (x^2 + 2x\lambda + 1)^2$. Observe que estas funciones cumplen con las condiciones requeridas por la definición 3.1; éstas son: $X(0,0) = 0$, $X_x(x,\lambda) > 0$ y finalmente $S(x,\lambda) > 0$. Además g y h están relacionadas por la ecuación (3.1). *Por tanto resultan ser fuertemente equivalentes.*

La figura 3.1 muestra los respectivos diagramas de bifurcación para h y g. Observamos semejanzas cualitativas cerca del origen.

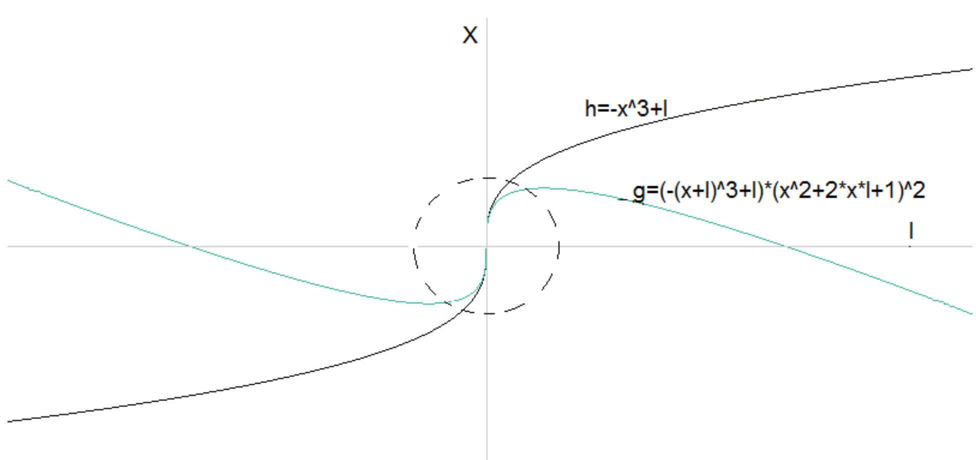


Figura 3.1: Equivalencia fuerte entre dos problemas de bifurcación.

3.1.2. Formulación del Problema de Reconocimiento

Dado un problema de bifurcación genérico $g(x, \lambda) = 0$, deseamos reconocer a qué problema de bifurcación enlistado en el capítulo 2 resulta ser fuertemente equivalente; esto en esencia es la formulación del problema de reconocimiento. Demostrar la equivalencia entre g y alguna de las bifurcaciones enlistadas puede tornarse elaborado, pues la definición 3.1 requiere exhibir algunas funciones y probar la igualdad (3.1). En la siguiente subsección presentamos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dichas funciones.

3.1.3. Solución al Problema de Reconocimiento para Varios Problemas de Bifurcación

En esta subsección ilustramos el uso de algunas proposiciones para la solución del problema de reconocimiento para las siguientes formas normales:

(a) $\varepsilon x^k + \delta\lambda, \ \ k \geq 2$

(b) $\varepsilon x^k + \delta\lambda x, \ k \geq 3$

(c) $\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$

(d) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda^2$

Aquí ε y δ toman los valores ± 1; es decir, consideramos todos los signos para las formas normales arriba mencionadas. Note que las formas normales (a) y (b) son de hecho sucesiones infinitas de formas normales indexadas por k. En particular, si $k = 3$ en (b), construimos la bifurcación tridente.

A continuación presentamos cuatro proposiciones, cada una de ellas relacionada respectivamente con cada una de las formas normales arriba, tienen la cualidad de resolver el problema de reconocimiento entre una función dada y las formas normales mencionadas.

Proposición 3.1 *Una función g definida en alguna vecindad del origen y además C^∞ es fuertemente equivalente a $\varepsilon x^k + \delta\lambda$, si y sólo si en $x = \lambda = 0$*

$$g = \frac{\partial}{\partial x} g = \cdots = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} g = 0, \tag{3.3a}$$

y

$$\varepsilon = sgn \ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k} g, \ \ \delta = sgn \ \frac{\partial}{\partial \lambda} g. \tag{3.3b}$$

donde sgn significa el signo.

Proposición 3.2 *Una función g definida en alguna vecindad del origen y además C^∞ es fuertemente equivalente a $\varepsilon x^k + \delta\lambda x$, si y sólo si en $x = \lambda = 0$*

$$g = \frac{\partial}{\partial x} g = \cdots = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} g = \frac{\partial}{\partial \lambda} g = 0, \tag{3.4a}$$

y

$$\varepsilon = sgn \ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k} g, \ \delta = sgn \ \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial}{\partial x} g. \tag{3.4b}$$

Proposición 3.3 *Una función g definida en alguna vecindad del origen y además C^∞ es fuertemente equivalente a $\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$, si y sólo si en $x = \lambda = 0$*

$$g_x = g_\lambda = 0, \tag{3.5a}$$

y

$$\varepsilon = sgn \ g_{xx}, \ \delta = sgn \ \ det \ d^2 g. \tag{3.5b}$$

Proposición 3.4 *Una función g definida en alguna vecindad del origen y además C^∞ es fuertemente equivalente a la cúspide alada $\varepsilon x^3 + \delta\lambda^2$, si y sólo si en $x = \lambda = 0$*

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{\lambda x} = 0, \tag{3.6a}$$

y

$$\varepsilon = sgn \ g_{xxx}, \ \delta = sgn \ g_{\lambda\lambda}. \tag{3.6b}$$

Veamos un ejemplo del uso de estas poderosas herramientas, para uno de los infinitos casos de la proposición 3.1.

Ejemplo de la solución en el problema de reconocimiento

Ejemplo **3.2** *Sea $g(x, \lambda) = x^5 - \lambda + 2x^8$. Comprobaremos que g resulta fuertemente equivalente a $\varepsilon x^k + \delta\lambda$, según la Proposición 3.1, para el caso $k = 5, \varepsilon = +1$ y $\delta = -1$.*

En $x = \lambda = 0$, $g(0,0) = g_x(0,0) = g_{xx}(0,0) = g_{xxx}(0,0) = g_{xxxx}(0,0) = 0$,
y además $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^5 g(0,0) = g_{xxxxx}(0,0) = 120 > 0$ y $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) g(0,0) = -1$,

y por tanto sgn $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^5 g = \ +1 \ = \varepsilon$, *y también sgn* $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) g = \ -1 \ = \delta$.

Así que por la proposición 3.1, podemos concluir que g que es fuertemente equivalente a $x^5 - \lambda$.

3.2. Teoría del Despliegue

La teoría del despliegue estudia cómo cambia un diagrama de bifurcación bajo el efecto de perturbaciones.

Retomemos la segunda pregunta realizada al final del capítulo 2.

¿Cómo predecir cuál es el diagrama de bifurcación en presencia de perturbaciones $g(x,\lambda) + \varepsilon p(x,\lambda) = 0$***?***

En esta sección se responde estableciendo las formalidades necesarias. Para ello, en la primera subsección formalizamos el concepto de despliegue, seguido del concepto despliegue universal, el problema de reconocimiento para un despliegue universal, los diagramas de bifurcación no persistentes y cerramos con el teorema de clasificación.

3.2.1. Definición de Despliegue

Nuestro objeto de estudio ha sido principalmente los problemas de bifurcación; ahora presentamos un objeto de estudio estrechamente relacionado con el mismo.

Definición 3.2 *Un **k-despliegue** de* $g(x,\lambda)$ *es una función* $G(x,\lambda,\alpha)$ *donde* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^k$*, tal que si* $\alpha = \vec{0}$*, entonces*

$$G(x,\lambda,\vec{0}) = g(x,\lambda). \tag{3.7}$$

Aquí G es una función de todas las variables: $x, \lambda, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$*. Así que G está definida sobre una vecindad de cero en* $\mathbf{R}^{k+2}$ *y está en* C^∞*.*

Ejemplo de un k-despliegue de la bifurcación tridente

Ejemplo **3.3** *Sea* $g(x, \lambda) = -x^3 + x\lambda$, *la función* $G(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -x^3 + x\lambda + \alpha_1^2 - x\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3$, *resulta ser un 3-despliegue de g según la definición 3.2, ya que para* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, *tenemos que la ecuación* (3.7) *se sostiene.*

Estamos interesados en los k-despliegues G del problema de bifurcación g con la propiedad de que cualquier perturbación de g resulte ser fuertemente equivalente a $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ para alguna $\alpha \in \mathbf{R}^k$ cerca del origen. En otras palabras, dado cualquier término $\varepsilon p(x, \lambda, \varepsilon)$ que perturba a g, existen valores de los parámetros $\alpha_1(\varepsilon), \cdots, \alpha_k(\varepsilon)$, tal que para un valor pequeño de ε

$$g + \varepsilon p \sim G(\cdot, \cdot, \alpha(\varepsilon)), \text{ donde } \sim \text{ significa fuertemente equivalente.}$$

Los k-despliegues con esta destacada cualidad nos interesan, ya que permitirán hacer una clasificación de todas las perturbaciones, agrupándolas en clases. Estos despliegues reciben el nombre de **versales**.

3.2.2. Despliegue Universal

Hemos visto que pequeñas perturbaciones pueden producir cambios dramáticos en los diagramas de bifurcación, tal como en el ejemplo 2.1, al final del capítulo 2.

Intuitivamente un despliegue universal de g es un despliegue versal $G(x, \lambda, \alpha)$ que depende del mínimo número de parámetros α. Pasemos ahora a dar una definición formal de despliegue versal y universal, los cuales requieren de algunas definiciones preliminares.

Factorización de k-despliegues

Definición 3.3 *Sean* $G(x, \lambda, \alpha)$ *y* $H(x, \lambda, \beta)$, *donde* $\alpha \in \mathbf{R}^k$ *y* $\beta \in \mathbf{R}^l$, *dos despliegues de una función* g. *Decimos que* H *se factoriza a través de* G, *si existen funciones suaves* S, X, Λ *y* A *tal que*

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta)G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta))) \tag{3.8}$$

donde para $\beta = 0$ *lo siguiente ocurre:*

$S(x, \lambda, 0) = 1$, $X(x, \lambda, 0) = x$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ *y* $A(0) = 0$.

En otras palabras, H se factoriza a través de G, si para toda $\alpha \in \mathbf{R}^k$, existe $\beta \in \mathbf{R}^l$ tal que $H(\cdot,\cdot,\alpha) \sim G(\cdot,\cdot,\beta)$.

Ejemplo de factorización entre k-despliegues de g

Ejemplo **3.4** *Consideremos las siguientes funciones escalares*

$$H(x,\lambda,\beta) = x^3 - x\lambda + \beta x^2 - \frac{\beta\lambda}{3} \tag{3.9a}$$

y

$$G(x,\lambda,\alpha) = x^3 - x\lambda - 3x\alpha^2 - 2\alpha^3. \tag{3.9b}$$

Estas dos funciones de hecho son 1-despliegue de $g(x,\lambda) = x^3 - x\lambda = 0$ *(la bifurcación tridente), puesto que para* $\alpha = \beta = 0$ *tenemos que*

$$H(x,\lambda,0) = G(x,\lambda,0) = x^3 - x\lambda = g(x,\lambda). \tag{3.10}$$

Una vez que está claro tanto que H como G son despliegues de g, ahora comprobaremos que G se factoriza a través de H, según la definición 3.3.

Sean $X(x,\lambda,\beta) = x + \beta$, $S(x,\lambda,\beta) = 1$, $\Lambda(\lambda,\beta) = \lambda$ *y finalmente* $A(\beta) = -3\beta$.

Observe que son válidas las siguientes condiciones de la definición 3.3.
$X(x,\lambda,0) = x$, $S(x,\lambda,0) = 1$, $\Lambda(\lambda,0) = \lambda$ *y finalmente* $A(0) = 0$.

Ahora comprobaremos que H y G se relacionan a través de la ecuación (3.8). *Tenemos que* $\forall\beta$, $\exists\alpha = -3\beta$, *tal que la ecuación* (3.8) *se cumple.*

Como $H(x,\lambda,\beta) = x^3 - x\lambda + \beta x^2 - \frac{\beta\lambda}{3}$, *tenemos*

$S(x,\lambda,\beta)H(X(x,\lambda,\beta),\Lambda(\lambda,\beta),A(\beta))$

$= (1)H(x+\beta,\lambda,-3\beta)$
$=(x+\beta)^3 - (x+\beta)\lambda + (-3\beta)(x+\beta)^2 - \frac{(-3\beta)\lambda}{3}$
$=x^3 + \cancel{3x^2\beta} + 3x\beta^2 + \beta^3 - x\lambda - \cancel{\beta\lambda} - \cancel{3x^2\beta} - 6x\beta^2 - 3\beta^3 + \cancel{\beta\lambda}$
$=x^3 - x\lambda + 3x\beta^2 - 6x\beta^2 + \beta^3 - 3\beta^3$
$=x^3 - x\lambda - 3x\beta^2 - 2\beta^3$

$= G(x, \lambda, \beta)$.

Y con estas ecuaciones comprobamos que G se factoriza a través de H.

Formalización del Despliegue Universal

Definición 3.4 *Un **despliegue** H de g es **versal**, si cualquier otro despliegue G de g se factoriza a través de H. Un despliegue versal que depende del menor número de parámetros auxiliares posibles es llamado **universal**. Este número menor es llamado **codimensión de** g, y aumentamos la definición con la siguiente convención: si g no posee un despliegue versal, diremos que g tiene codimensión infinita.*

Podemos preguntarnos si el despliegue universal es único. *La respuesta es no*, el despliegue universal no es único. Sin profundizar en la argumentación, citamos un ejemplo de una bifurcación que posee dos despliegues universales distintos.

Consideremos la forma normal de la bifurcación tridente $h(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$ y dos 2-despliegues de la misma. Estos son, de hecho, despliegues universales.

$$G(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x^2, \ \textit{con } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \tag{3.11a}$$

y

$$H(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta \lambda, \ \textit{con } \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{3.11b}$$

No hemos establecido las herramientas que nos permitirán justificar esta afirmación, será en la siguiente subsección en la que estableceremos los métodos matemáticos para comprobar tal hecho.

Codimensión de una singularidad

El menor número de parámetros de un despliegue versal construye el **despliegue universal** de g, y define la **codimensión** de g. Este número se relaciona con el número de condiciones que definen alguna bifurcación g en el sentido del problema de bifurcación, que podemos ver en la segunda columna del cuadro 3.2 al final del capítulo. La relación es:

$$codim\ g = (el\ número\ de\ condiciones\ que\ definen\ a\ g) - 2. \tag{3.12}$$

Todas las singularidades del cuadro 3.2 tienen dos condiciones inherentes que la definen, a saber $g = g_x = 0$. Con respecto a la minimalidad restamos 2 al número total de condiciones que definen a g.

La relación (3.12) se sostiene para cada una de las formas normales de bifurcaciones que están presentes en el cuadro 3.2.

El caso de la bifurcación cúspide alada no es la excepción, ya que del cuadro 3.2, las condiciones que definen a esta bifurcación son:

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{x\lambda} = 0. \tag{3.13}$$

es decir, el número de condiciones que definen a g son 5, y en efecto $5-2 = 3 = \mathit{codim}\ g$, ya que el despliegue universal G de la cúspide alada es $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = x^3 - \lambda^2 + \gamma\lambda x + \beta x + \alpha$, con parámetros de despliegue α, β y γ (esto lo probaremos en la siguiente subsección). El menor número de parámetros de despliegue es 3, cantidad igual a la codimensión de g.

3.2.3. El Problema de Reconocimiento del Despliegue Universal

Queremos responder a la siguiente pregunta fundamental.

¿Cómo reconocer un Despliegue Universal?

Las proposiciones que a continuación presentamos forman parte de un tema importante en la Teoría de Despliegue, conocido como **El problema de reconocimiento del despliegue universal**, las cuales tienen por objetivo establecer un criterio formal, pero pragmático, para determinar cuándo un despliegue G de algún problema de bifurcación g dado, resulta ser un despliegue universal.

Presentamos la solución para el problema de reconocimiento del despliegue universal para las bifurcaciones: histéresis (codimensión 1), tridente (codimensión 2) y cúspide alada (codimensión 3).

Proposición 3.5 *Sea $g(x, \lambda)$ fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda$ y sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un 1-despliegue de g. Entonces G es un despliegue universal de g, si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{pmatrix} \neq 0$$

en $x = \lambda = \alpha = 0$.

Proposición 3.6 *Sea $g(x, \lambda)$ fuertemente equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda x$ y sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta)$ un 2-despliegue de g. Entonces G es un despliegue universal de g, si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{pmatrix} \neq 0$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = 0$.

Proposición 3.7 *Sea* $g(x, \lambda)$ *fuertemente equivalente a* $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda^2$ *y sea* $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ *un 3-despliegue de* g. *Entonces* G *es un despliegue universal de* g, *si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} \end{pmatrix} \neq 0$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Veamos un ejemplo del uso de estas herramientas.

Ejemplo **3.5** *Sea* $H(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = x^3 + \lambda^2 + \gamma\lambda x + \beta x + \alpha$ *un 3-despliegue de la bifurcación cúspide alada* $h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$.

Ahora calculemos el determinante de matriz propuesta en la proposición 3.7.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda x & \lambda & x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-6) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ \lambda x & \lambda & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)(2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \lambda x & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (-6)(2)(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (-6)(2)(1)(1) = -12 \neq 0.$$

De la proposición 3.7 se sigue que H *es un despliegue universal de la bifurcación cúspide alada* h.

3.2.4. Diagramas de Bifurcación no Persistentes

Un despliegue universal G de g nos permite formular y responder a la siguiente pregunta.

¿Cómo predecir cuál es el diagrama de bifurcación en presencia de perturbaciones** $g(x, \lambda) + \varepsilon p(x, \lambda) = 0$**?

Vinculamos la forma de perturbación formulada en esta pregunta con lo visto en las subsecciones anteriores, a través del hecho de que el 1-despliegue $H(x, \lambda, \varepsilon) = g(x, \lambda) + \varepsilon p(x, \lambda)$ se factoriza a través de G, es decir, existe $\alpha \in \mathbf{R}^k$ tal que $g + \varepsilon p \sim G(\cdot, \cdot, \alpha)$.

Podemos entonces explorar el espacio (de dimensión finita) de despliegue, para clasificar todos los posibles diagramas de bifurcación perturbados. Para llevar a cabo tal enumeración enfoquemos nuestra atención en los diagramas de bifurcación de un despliegue universal, que permanecen sin cambios (en el sentido cualitativo de equivalencia) bajo pequeñas perturbaciones; y los llamamos, **diagramas de bifurcación persistentes**. Para obtener los distintos tipos de bifurcaciones persistentes de una bifurcación dada, consideremos en primer instancia a las bifurcaciones no persistentes las cuales nos permitirán separar en clases de equivalencias a todas las restantes perturbaciones.

Presentamos a las bifurcaciones de codimensión 1 [17], (véase la figura 3.2).

(i) Bifurcación centro aislado/transcrítica.

(ii) Bifurcación histéresis.

(iii) Doble nodo-silla.

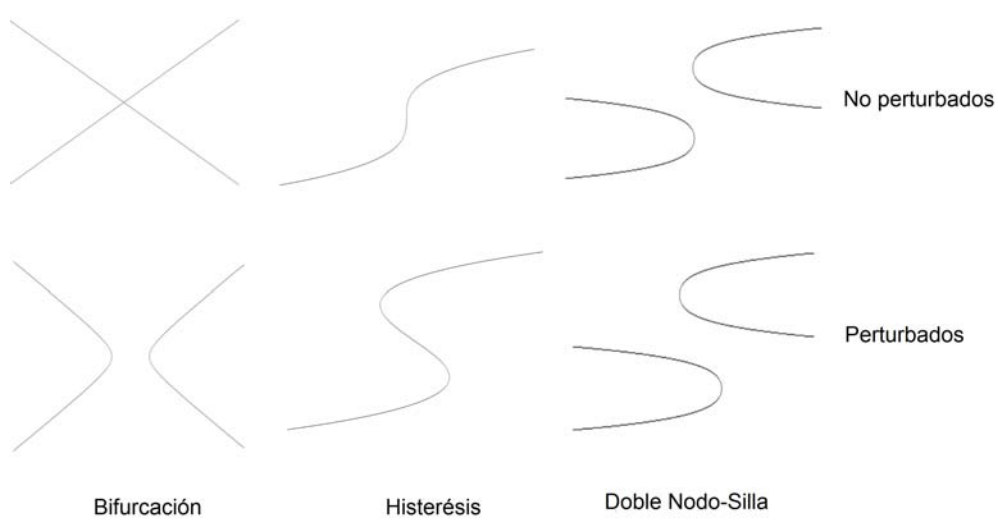


Figura 3.2: Bifurcaciones de codimesión 1 y alguna de sus perturbaciones.

Formalicemos la persistencia; para ello presentamos la *variedad de transición* que es un subconjunto del espacio de despliegue, la cual nos permitirá obtener los diagramas persistentes.

Definición 3.5 *Sea* $G : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ *el despliegue universal de algún problema de bifurcación* $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*. Considere los siguientes conjuntos que construirán a la variedad de transición.*

(a) $\boldsymbol{B} = \left\{\alpha \in \mathbf{R}^k : \exists (x, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ \textit{tal que}\ G = G_x = G_\lambda = 0\ \textit{en}\ (x, \lambda, \alpha)\right\}.$
(b) $\boldsymbol{H} = \left\{\alpha \in \mathbf{R}^k : \exists (x, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ \textit{tal que}\ G = G_x = G_{xx} = 0\ \textit{en}(x, \lambda, \alpha)\right\}.$
(c) $\boldsymbol{D} = \left\{\alpha \in \mathbf{R}^k : \exists (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ x_1 \neq x_2\ \textit{tal que}\ G = G_x = 0\ \textit{en}\ (x_i, \lambda, \alpha),\ i = 1, 2\right\}.$
(d) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{D}$=El conjunto o **variedad de transición**.

El conjunto de transición es un subconjunto del espacio de despliegue $\mathbf{R}^k$.

En los siguientes ejemplos se mostrarán cómo se obtienen las variedades de transición para problemas con bifurcaciones transcrítica y tridente. Posterior a ello se exhinen los diagramas de bifurcación persistentes de la bifurcación cúspide alada.

Antes de comenzar introducimos un concepto afín a nuestra intención de clasificar a las distintas perturbaciones persistentes.

Llamaremos **centro organizador** a la singularidad g, ya que a través de su despliegue universal y usando a la variedad de transición como separador, organiza el espacio de despliegue clasificando a todas sus perturbaciones persistentes en clases. El centro del espacio de despliegue, es decir, cuando $\alpha = \vec{0}$ es el parámetro de despliegue que al ser sustituido en el despliegue universal G genera precisamente a g, por tanto $G(x, \lambda, \vec{0}) = g(x, \lambda)$.

Exhibiremos la importancia de las singularidades como centro organizador en los siguientes ejemplos.

Ejemplo de un conjunto de transición (bifurcación simple)

Consideraremos la forma normal del problema de bifurcación simple, $g(x, \lambda) = x^2 - \lambda^2$ y su respectivo despliegue universal $G(x, \lambda, \alpha) = x^2 - \lambda^2 + \alpha$.

Nos reduciremos literalmente a calcular cada uno de los conjuntos mencionados en la definición 3.5.

Primero obtendremos al conjunto $\mathbf{B}$, calculando directamente las condiciones $G = G_x = G_\lambda = 0$ *en* (x, λ, α), de las cuales obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$G_x(x,\lambda,\alpha) = 2x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \tag{3.14a}$$

$$G_\lambda(x,\lambda,\alpha) = -2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 0 \tag{3.14b}$$

$$G_{xx}(x,\lambda,\alpha) = 2 \neq 0, \ \forall(x,\lambda,\alpha) \in \mathbf{R}^3 \tag{3.14c}$$

por tanto, al considerar las condiciones de (3.14a) y (3.14b), concluimos que

$$\mathbf{B} = \{\alpha = 0\}\,. \tag{3.14d}$$

Ahora calculemos el conjunto **H**, la ecuación (3.14c) nos dice que para todas las ternas ordenadas, G_{xx} será distinto de cero, una manera equivalente de entenderlo es afirmando que no existe terna ordenada que produzca $G_{xx} = 0$. Por tanto no existe α que pertenezca a H, y así $\mathbf{H} = \emptyset$.

Para el caso de **D**, toda terna $(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbf{R}^3$, con la restricción $x_1 \neq x_2$ no podrá satisfacer las ecuaciones $G = G_x = 0$, ya que la única terna que lo hace es $(x,\lambda,\alpha) = (0,0,0)$, por tanto $\mathbf{D} = \emptyset$.

En suma, la variedad de transición $\mathbf{S} = \mathbf{B} \cup \mathbf{H} \cup \mathbf{D} = \{0\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{0\}$. Así el eje α, es decir, el espacio de despliegue es dividido en dos semirrectas, una para el caso $\alpha < 0$ y la otra para $\alpha > 0$ correspondientes a dos diagramas de bifurcación persistentes distintos. La figura 3.3 ilustra este resultado.

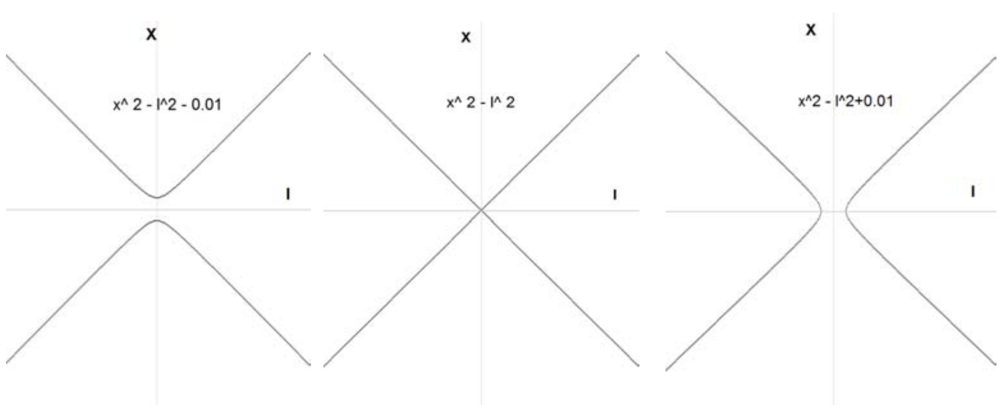


Figura 3.3: Diagramas persistentes de la bifurcación transcrítica; lado izquierdo $\alpha < 0$, y al lado derecho $\alpha > 0$; al centro la forma normal de la bifurcación transcrítica o bien el centro organizador.

Ejemplo de Variedad de Transición (bifurcación tridente)

Consideraremos la forma normal del problema de bifurcación tridente, $g(x, \lambda) = x^3 - x\lambda$ con su respectivo despliegue universal $G(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = x^3 - x\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 x^2$.

Obtendremos primero al conjunto **B**, calculando directamente $G = G_x = G_\lambda$ *en* (x, λ, α), de las cuales obtenemos las siguientes ecuaciones

$$G_x(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = 3x^2 + 2\alpha_2 x - \lambda \tag{3.15a}$$

$$G_\lambda(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = -x \tag{3.15b}$$

$$G_{xx}(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = 6x + 2\alpha_2; \tag{3.15c}$$

tenemos que si $G_x = G_\lambda = 0$ entonces $x = \lambda = 0$ y

$$si\ G(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = 0,\ entonces\ \alpha_1 = 0 \tag{3.15d}$$

por tanto

$$\mathbf{B} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2 : \alpha_1 = 0\right\}. \tag{3.16}$$

Ahora calculemos el conjunto **H**. Al considerar las ecuaciones $G = G_x = G_{xx} = 0$, se generan las ecuaciones

$$x = -\alpha_2/3 \tag{3.17a}$$

$$\lambda = -\alpha_2^2/3 \tag{3.17b}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2^3/27, \tag{3.17c}$$

y así obtenemos

$$\mathbf{H} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2 : \alpha_1 = \alpha_2^3/27\right\}. \tag{3.18}$$

Por un argumento análogo al ejemplo anterior, se sigue que $\mathbf{D} = \emptyset$.

Finalmente la variedad de transición para este caso está dada por

$$\mathbf{S} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2 : \alpha_1 = 0\ o\ \alpha_1 = \alpha_2^3/27\right\}. \tag{3.19}$$

La figura 3.4 ilustra la variedad de transición S, los diagramas persistentes asociados y la bifurcación tridente como centro organizador de este despliegue.

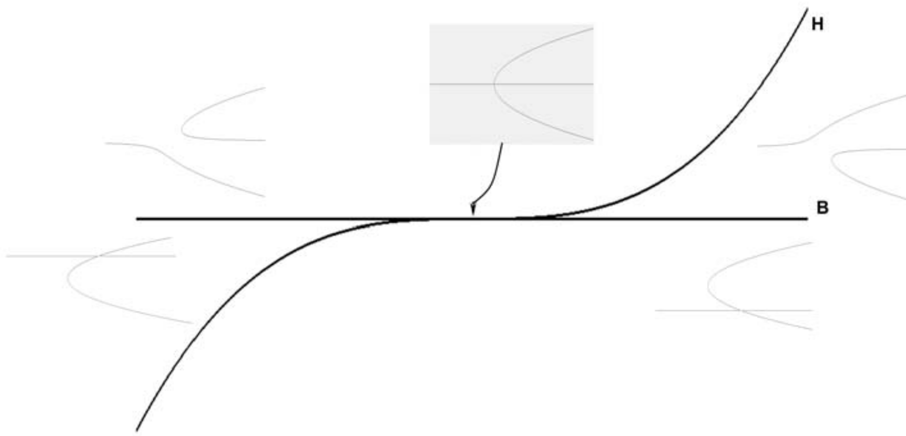


Figura 3.4: Diagramas de bifurcación persistentes para la singularidad tridente, asociadas respectivamente a las regiones descritas por la variedad de transición. El centro organizador en la forma normal de la bifurcación tridente sombreada en gris.

Diagramas de bifurcación persistentes de la Singularidad cúspide alada

Consideraremos la forma normal del problema de bifurcación cúspide alada, $g(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$ con su respectivo despliegue universal.

$$G(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x^3 + \lambda^2 + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x \lambda. \tag{3.20}$$

En este caso la variedad de transición vive en el espacio de despliegue $\mathbf{R}^3$. No graficaremos a la misma y nos limitaremos a listar en la figura 3.5 todas sus perturbaciones persistentes. Cada terna ordenada contigua al diagrama representa el valor de los parámetros auxiliares $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con el que fue obtenido en la simulación, esto para fines didácticos.

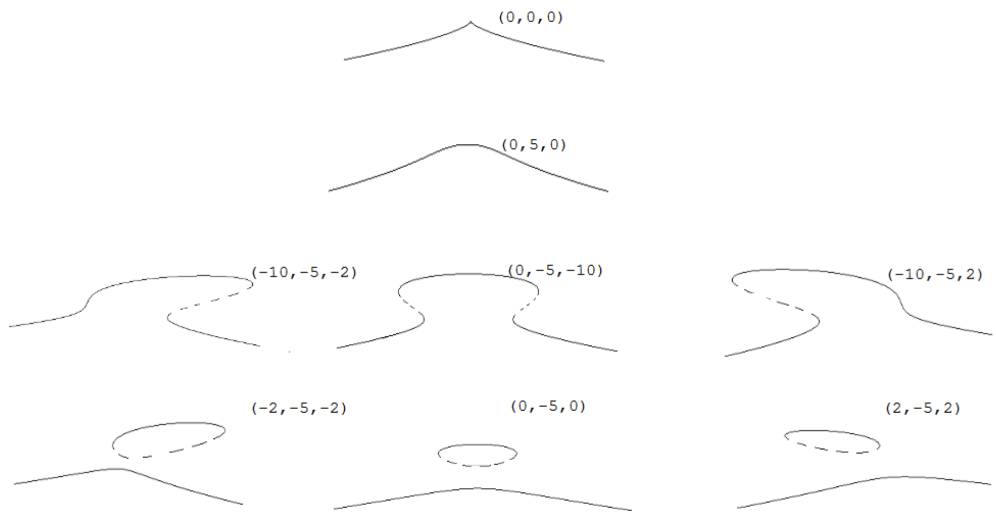


Figura 3.5: La parte superior representa al diagrama de bifurcación de la cúspide alada, y las restantes son representantes de las distintas perturbaciones persistentes de la misma.

3.3. Teorema de Clasificación

El siguiente teorema asegura que las singularidades de codimensión ≤ 3 son de hecho 11.

Teorema 3.1 *Sea $g(x,\lambda)$ una función definida en una vecindad del origen y además C^∞ que satisfaga las ecuaciones $g = g_x = 0$. Si la codimensión de g es menor o igual que 3, entonces g es equivalente a alguno de los problemas de bifurcación enlistados en el cuadro 3.1.*

Presentamos en el cuadro 3.1 la lista de problemas de bifurcación mencionadas en el teorema 3.1.

El cuadro 3.2 presenta una recopilación de la solución al problema de reconocimiento de las 11 singularidades mencionadas en el cuadro 3.1.

El cuadro 3.3 compila los despliegues universales de las 11 singularidades citadas en el cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Formas Normales para Singularidades de codim ≤ 3.

Forma Normal	Codimensión	Nomenclatura
(1) $\varepsilon x^2 + \delta\lambda$	0	Punto Límite
(2) $\varepsilon(x^2 - \lambda^2)$	1	Bifurcación Simple
(3) $\varepsilon(x^2 + \lambda^2)$	1	Centro Aislado
(4) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda$	1	Histéresis
(5) $\varepsilon x^2 + \delta\lambda^3$	2	Cusp Asimétrica
(6) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda x$	2	tridente
(7) $\varepsilon x^4 + \delta\lambda$	2	Pliegue a la cuarta
(8) $\varepsilon x^2 + \delta\lambda^4$	3	
(9) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda^2$	3	cúspide alada
(10) $\varepsilon x^4 + \delta\lambda x$	3	
(11) $\varepsilon x^5 + \delta\lambda$	3	

Nota: ε y δ, son $+1$ o -1.

Finalmente el cuadro 3.4 da las respectivas soluciones al problema de reconocimiento para despliegues universales de las 11 singularidades.

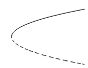
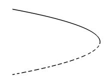
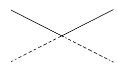
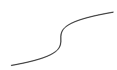
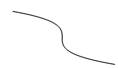
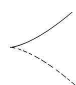
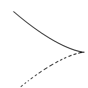
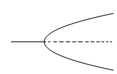
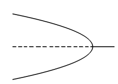
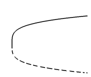
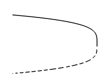
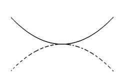
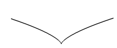
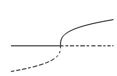
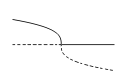
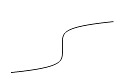
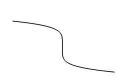
Cuadro 3.2: Solución al problema de reconocimiento para singularidades de codimensión ≤ 3.

Forma Normal	Condiciones que lo definen*	Condiciones no singulares †
$\varepsilon x^k + \delta\lambda (k \geq 2)$	$g_{xx} = ... = \dfrac{\partial^{k-1} g}{\partial x^{k-1}} = 0$	$\varepsilon = sgn(\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k})$, $\delta = sgn(g_\lambda)$
$\varepsilon x^k + \delta\lambda x (k \geq 3)$	$g_{xx} = ... = \dfrac{\partial^{k-1} g}{\partial x^{k-1}} = g_\lambda = 0$	$\varepsilon = sgn(\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k})$, $\delta = sgn(g_{x\lambda})$
$\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$	$g_\lambda = 0$	$\varepsilon = sgn(g_{xx}), \delta = sgn(\det d^2 g)$
$\varepsilon x^2 + \delta\lambda^3$	‡$g_\lambda = det(d^2 g) = 0$ se elige $v \neq 0$ tal que $g_{vv} = 0$	$\varepsilon = sgn(g_{xx}), \delta = sgn(g_{vvv})$
$\varepsilon x^2 + \delta\lambda^4$	‡$g_\lambda = det(d^2 g) = g_{vvv} = 0$ elija $v \neq 0$ tal que $g_{vv} = 0$	$\varepsilon = sgn(g_{xx}), \delta = sgn(q)$ donde $q = q_{vvvv} \cdot g_{xx} - 3g_{vvx}^2$
$\varepsilon x^3 + \delta\lambda^2$	$g_\lambda = g_{xx} = g_{x\lambda} = 0$	$\varepsilon = sgn(g_{xxx}), \delta = sgn(g_{\lambda\lambda})$

$*$ Las condiciones que lo definen siempre incluyen $g = g_x = 0$.
† Tomamos la convención de que en la expresión $\delta = sgn(g_\lambda)$ con $g_\lambda \neq 0$, δ es igual al signo de g_λ.
‡ El subíndice v indica una derivada direccional en la dirección v.

.

Cuadro 3.3: Despliegues Universales para Bifurcaciones Elementales.

Despliegue Universal	Diagramas de Bifurcación No Perturbados ($\varepsilon = 1$) $\delta = -1$	$\delta = +1$
(1) $\varepsilon x^2 + \delta\lambda$		
(2,3) $\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2 + \alpha)$		
(4) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda + \alpha x$		
(5) $\varepsilon x^2 + \delta\lambda^3 + \alpha + \beta\lambda$		
(6) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda x + \alpha + \beta x^2$		
(7) $\varepsilon x^4 + \delta\lambda + \alpha x + \beta x^2$		
(8) $\varepsilon x^2 + \delta\lambda^4 + \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2$		
(9) $\varepsilon x^3 + \delta\lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma\lambda x$		
(10) $\varepsilon x^4 + \delta\lambda x + \alpha + \beta\lambda + \gamma x^2$		
(11) $\varepsilon x^5 + \delta\lambda + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$		

Cuadro 3.4: El Problema de Reconocimiento para Despliegues Universales de Singularides con Codimensión menor o igual que 3.

Forma Normal	Matriz
(1) $\varepsilon x^2+\delta\lambda$	-
(2,3) $\varepsilon(x^2+\delta\lambda^2)$	G
(4) $\varepsilon x^3+\delta\lambda$	$\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x}\end{pmatrix}$
(5) $\varepsilon x^2+\delta\lambda^3$	$\begin{pmatrix} 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda}\end{pmatrix}$
(6) $\varepsilon x^3+\delta\lambda x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx}\end{pmatrix}$
(7) $\varepsilon x^4+\delta\lambda$	$\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx}\end{pmatrix}$
(8) $\varepsilon x^2+\delta\lambda^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} & g_{\lambda\lambda} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} & g_{xxx} & g_{xx\lambda} & g_{x\lambda\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xx} & 2g_{x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} & G_{\alpha\lambda\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} & G_{\beta\lambda\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} & G_{\gamma\lambda\lambda}\end{pmatrix}$
(9) $\varepsilon x^3+\delta\lambda^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx}\end{pmatrix}$
(10) $\varepsilon x^4+\delta\lambda x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx}\end{pmatrix}$
(11) $\varepsilon x^5+\delta\lambda$	$\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx}\end{pmatrix}$

Capítulo 4

Teoría Geométrica de las Perturbaciones Singulares

Introducimos en este capítulo la teoría geométrica de las perturbaciones singulares. Presentamos uno de los objetos de estudio de esta teoría, nos referimos a los sistemas de ecuaciones diferenciales (SEDO) en los cuales hay *una separación grande de escalas temporales entre las distintas variables dinámicas.* En otras palabras, sistemas en los cuales algunas variables evolucionan más rápidamente que otras. Estos sistemas reciben el nombre de **sistemas rápido-lento**.

En relación a la perturbación de sistemas, consideramos dos tipos:

- Se llaman **perturbaciones singulares** porque cuando $\varepsilon = 0$, obtenemos un sistema muy distinto al original. En particular, el espacio fase del sistema con $\varepsilon = 0$ es de dimensión más baja que para $\varepsilon > 0$.

- Las **perturbaciones regulares** son aquellas que poseen términos con factor ε que perturban el campo vectorial, pero cuando $\varepsilon = 0$ la estructura del sistema queda igual.

Durante este capítulo presentaremos algunas generalidades de los sistemas rápido-lento, un par de ejemplos que mostrarán su característica primordial, las dos escalas temporales y sus consecuencias. Veremos algunos teoremas de Fenichel que nos hablarán de la variedades lenta, estable e inestable, asociadas con el flujo del sistema.

4.1. Sistemas Rápido-Lento

Comencemos con la formalización de un sistema rápido-lento [13].

(H1) Sean $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ y $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^l$ dos funciones C^∞ sobre un conjunto $U \times I$, donde $U \subset \mathbf{R}^N$, $N = n+l$, e $I \in \mathbf{R}$ un intervalo abierto que contiene a 0.

Un **sistema rápido-lento** o bien (n,l)-sistema rápido-lento es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que toma la forma

$$x' = f(x, y, \varepsilon) \tag{4.1}$$
$$y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \tag{4.2}$$

donde la derivada es $\frac{d}{dt}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^l$ y ε es un parámetro real, tal que $0 < \varepsilon \ll 1$.

Sea $\tau = \varepsilon t$. El parámetro ε puede ser considerando como *separación de escalas de tiempo*. Llamaremos a t la escala de tiempo rápida, y τ la escala de tiempo lenta. El sistema formado por las ecuaciones (4.1)-(4.2) evoluciona en la escala temporal rápida t. El cambio de escala temporal $\tau = \varepsilon t$ transforma (4.1)-(4.2) en el sistema

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \tag{4.3}$$
$$\dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \tag{4.4}$$

donde la derivada es $\frac{d}{d\tau}$, que evoluciona en la escala de tiempo lenta.

Es importante tener presente que los sistemas (4.1), (4.2) y (4.3), (4.4) son equivalentes. Sin embargo para el caso $\varepsilon = 0$, estos sistemas no son equivalentes y este límite da origen a dos dinámicas distintas.

El sistema (4.1)-(4.2) para $\varepsilon = 0$ define la *dinámica rápida*.

$$x' = f(x, y, 0) \tag{4.5}$$
$$y' = 0 \tag{4.6}$$

El sistema (4.5)-(4.6) también es conocido como las **ecuaciones de estrato**. Puesto que $y' = 0$ implica $y = k$, un estrato, así que, la variable y puede ser considerada como un parámetro en $x' = f(x, y, 0) = f(x, k, 0)$.

La ecuación diferencial-algebraica obtenida al establecer $\varepsilon = 0$, en el sistema formulado en la escala de tiempo lenta, formado por las ecuaciones (4.3)-(4.4), define la *dinámica lenta*

$$0 = f(x, y, 0) \tag{4.7}$$
$$\dot{y} = g(x, y, 0) \tag{4.8}$$

que evoluciona sobre la **variedad crítica**

$$Co = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l : f(x, y, 0) = 0 \right\}. \tag{4.9}$$

Introducimos un nuevo concepto, el **diagrama de fase singular**. Es un diagrama de fase donde están presentes las ceroclinas del sistema y donde dibujamos las trayectorias del sistema rápido y del sistema lento de un sistema rápido-lento. Es llamada así, ya que dibujamos *el límite singular de cada uno de los sistemas*. Un sistema vive fuera de la variedad crítica y el otro sistema sobre la misma.

A continuación presentamos un par de ejemplos de sistema rápido-lento.

Estos dos ejemplos tienen el objetivo de resaltar una cualidad global en cada caso; para el primero un punto atractor global, el segundo un cíclo límite atractor en su cuenca de atracción (región del plano fase que cada condición inicial de la solución del sistema rápido-lento es llevada hacia Co).

Un ejemplo sencillo de sistema rápido-lento

Consideramos el siguiente sistema rápido-lento

$$x' = f(x, y, \varepsilon) = -x + \frac{1}{10}y \tag{4.10}$$
$$y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) = \varepsilon \left(-y + \frac{1}{10}x \right) \tag{4.11}$$

La dinámica rápida está dada por

$$x' = -x + \frac{1}{10}y \tag{4.12}$$
$$y' = 0 \tag{4.13}$$

Por otra parte la dinámica lenta está dada por las ecuaciones

$$0 = -x + \frac{1}{10}y \tag{4.14}$$

$$\dot{y} = -y + \frac{1}{10}x \tag{4.15}$$

Ésta evoluciona sobre la variedad crítica Co, es decir, la región del espacio fase que satisfacen la ecuación (4.14). Podemos dibujar el flujo rápido y el flujo lento en un mismo plano fase que define el **diagrama de fase singular**.

La figura 4.1, lado izquierdo, reproduce *el diagrama de fase singular* asociado al sistema (4.10)-(4.11), donde las flechas azules representan la dinámica rápida y el flujo sobre Co la dinámica lenta.

La construcción de este plano fase singular es sencilla. Es suficiente observar que la dinámica rápida está exponencialmente atraída hacia Co, mientras que el flujo sobre Co satisface $\dot{y} < 0$ para $y > \frac{1}{10}x$ y $\dot{y} > 0$ para $y < \frac{1}{10}x$. De un análisis del plano de fase singular se sigue que dada cualquier condición inicial, la trayectoria converge rápidamente a Co según la dinámica rápida. Una vez en Co la trayectoria converge lentamente al origen según la dinámica lenta.

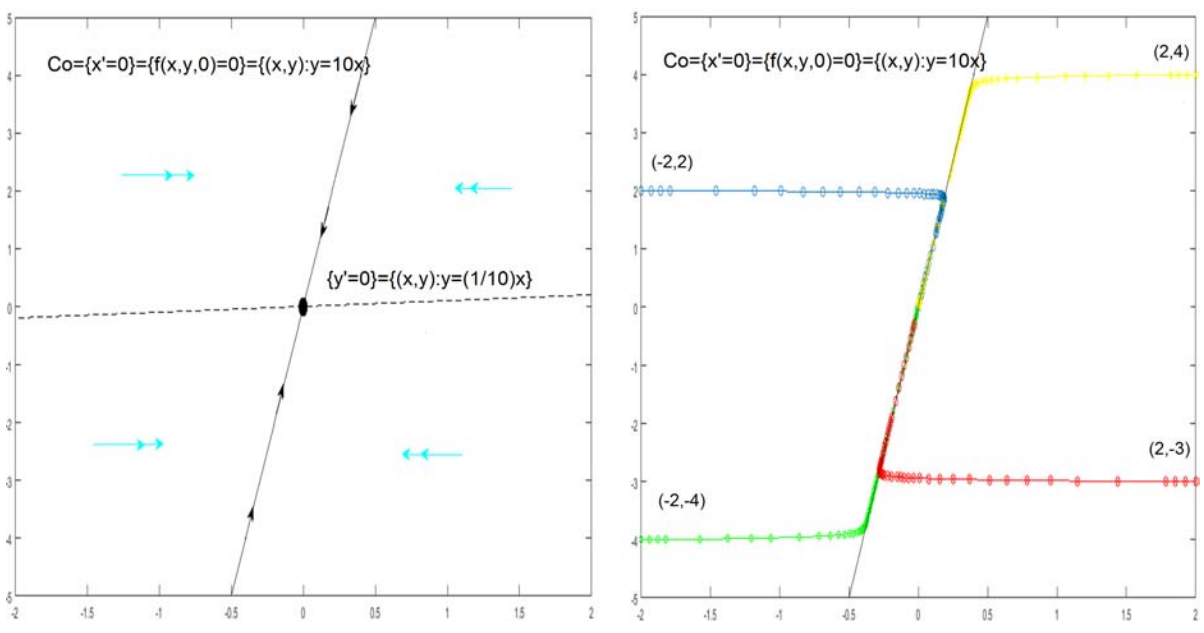


Figura 4.1: Lado izquierdo el diagrama de fase singular del sistema (4.10)-(4.11), lado derecho una simulación para algunas condiciones iniciales.

Del lado derecho de la figura 4.1 tenemos una simulación para la cual consideramos las condiciones iniciales de la solución $(x_0, y_0) = (2, 4)$ en amarillo, $(-2, 2)$ en azul,

$(-2,-4)$ en verde y $(2,-3)$ en rojo, y $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$. Observamos que todas las condiciones iniciales son atraídas al punto fijo del sistema $(x_f, y_f) = (0,0)$, verificando las predicciones del plano de fase singular.

El plano de fase singular nos da una aproximación muy fiel de la dinámica del sistema original (4.10)-(4.11). La formalización de esta observación es una de las principales contribuciones de este capítulo sustentada por los teoremas de Fenichel.

Un ejemplo elaborado de Sistema Rápido-Lento

Consideremos el siguiente sistema rápido-lento

$$x' = f(x,y,\varepsilon) = y - x^4 - x^3 + 25x^2 - x - 50 \tag{4.16}$$
$$y' = \varepsilon g(x,y,\varepsilon) = \varepsilon(-x + \frac{1}{2}) \tag{4.17}$$

La dinámica rápida está dada por

$$x' = y - x^4 - x^3 + 25x^2 - x - 50 \tag{4.18}$$
$$y' = 0 \tag{4.19}$$

Por otra parte, la dinámica lenta está dada por

$$0 = y - x^4 - x^3 + 25x^2 - x - 50 \tag{4.20}$$
$$\dot{y} = -x + \frac{1}{2} \tag{4.21}$$

La variedad crítica es

$$Co = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^4 + x^3 - 25x^2 + x + 50\right\} \tag{4.22}$$

Construimos *el plano de fase singular* al lado izquierdo de la figura 4.2; las flechas dobles representan la dinámica rápida y las flechas sobre Co la dinámica lenta. Observamos la presencia de un *ciclo límite singular*, dibujado en azul. Del lado derecho tenemos la simulación de las condiciones iniciales $(x_0, y_0) = (-5,-80)$, $(-5,300)$, $(-4,25)$, $(0,0)$, $(1,28)$, $(2,0)$ y $(5,-150)$. Veamos una breve explicación sobre las mismas.

Comenzamos hablando sobre las condiciones iniciales $(-5,-80)$ y $(1,28)$, que viven sobre Co y que desenvuelven una dinámica lenta. Los puntos $(-5,300)$ y $(5,-150)$ se mueven en una dinámica rápida y se dirigen exponencialmente a una rama atractora de Co, moviéndose lentamente sobre Co.

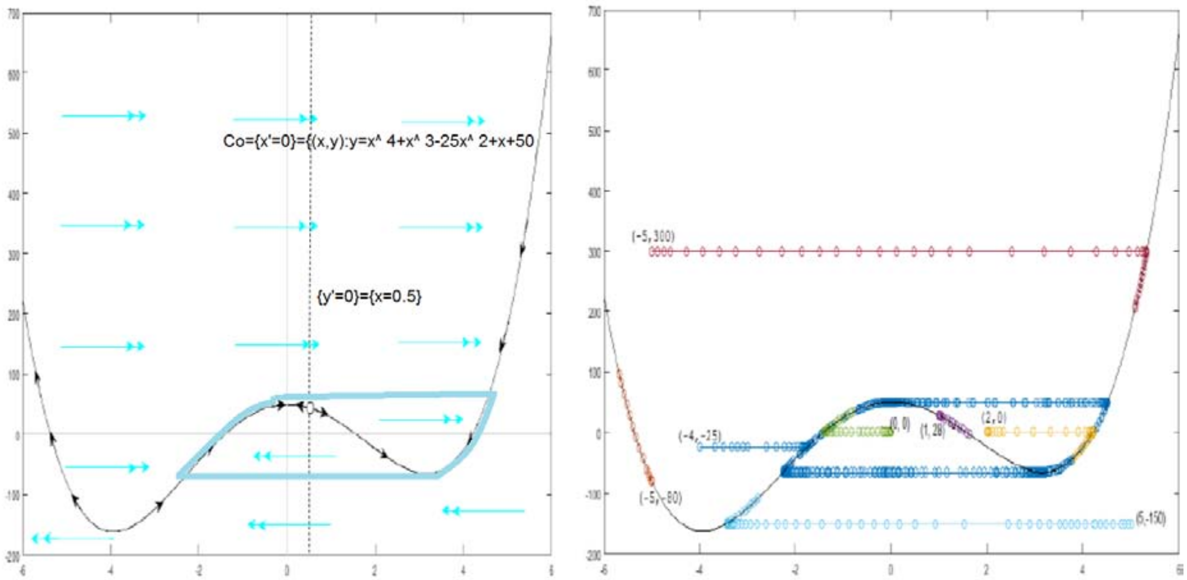


Figura 4.2: Lado izquierdo diagrama de fase singular. Lado derecho simulación para algunas condiciones iniciales.

Los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$ se mueven en primera instancia sobre la dinámica rápida saliendo expulsadas de una rama repulsora y dirigiéndose hacia ramas atractoras. La condición inicial (-4,25) es atraída hacia una rama atractora de Co y sigue su evolución en una órbita periódica cerca del ciclo límite singular que aparece en el plano fase singular. Véase el lado izquierdo de la figura 4.2.

Observamos otra vez que el plano de fase singular prevee de forma precisa el comportamiento del sistema original (4.16)-(4.17).

4.2. Teoremas de Fenichel

En esta sección presentamos los Teoremas de Fenichel [13], que formalizan algunos conceptos citados en los últimos dos ejemplos.

Considere las funciones f que satisfacen (H1) en la sección 4.1. Supondremos que tenemos dada una variedad Co, posiblemente acotada, la cual está contenida en el conjunto $\{f(x, y, 0) = 0\}$. La hipótesis fundamental de Co, es que como conjunto de puntos críticos de la dinámica rápida, las direcciones normales a la variedad corresponderán a la que poseen todos sus valores propios no neutrales. Esto lo formalizamos con la siguiente definición.

Definición 4.1 *Un subconjunto $S \subset Co$ se dice que es* normalmente hiperbólico *si para todo $p \in S$, la matriz $n \times n$ $(D_x f)(p)$, no tiene valores propios con parte real cero.*

La expresión $(D_x f)(p)$ denota el jacobiano de f con respecto a x evaluado en p.

Definición 4.2 *Un conjunto C es* ***localmente invariante*** *bajo el flujo del sistema formado por las ecuaciones* (4.5) *y* (4.6)*, si tiene una vecindad V, tal que ninguna trayectoria puede dejar C sin dejar V. En otras palabras, es localmente invariante si $\forall x \in C$ y $t > 0$, el flujo $\phi(x, t) \subset V \Rightarrow \phi(x, t) \subset C$, (similarmente esto es válido si reeplazamos a $[0, t]$, $t > 0$ por $[t, 0]$, $t < 0$).*

Ejemplo **4.1** *Aterricemos la definición 4.1 a nuestro primer ejemplo donde*

$$
\begin{aligned}
&Co = \{(x, y) : y = 10x\} \\
= &\left\{(x, y) : x = \frac{1}{10}y\right\} = \{(x, y) : x = h^0(y)\}.
\end{aligned}
$$

Al calcular el jacobiano

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{10} & -1 \end{pmatrix}$$

obtenemos que $f_x = -1$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, en particular en cualquier subconjunto $S \subset Co$. Así que por la definición 4.1, Co es normal hiperbólico.

El primer teorema de Fenichel asegura la existencia de una variedad invariante que es una perturbación de Co.

Antes de enunciar tal teorema, citemos la segunda hipótesis importante que supone Fenichel.

(H2) El conjunto Co es una variedad compacta, posiblemente acotada y normalmente hiperbólica relativa al sistema (4.5) y (4.6).

Estamos en posición de establecer el primer teorema de Fenichel, bajo las hipótesis (H1) y (H2).

Teorema 4.1 (Teorema 1 de Fenichel, sobre la Variedad Invariante) *Si $\varepsilon > 0$, pero suficientemente pequeño, existe una variedad C_ε que se encuentra en $O(\varepsilon)$ de Co y es difeomorfo a Co. Además es localmente invariante bajo el flujo del sistema* (4.5) *y* (4.6) *y es C^r, para ε y para cualquier $r < \infty$.*

La variedad C_ε será llamada **variedad lenta**.

La figura 4.3 ilustra la variedad lenta en el primer ejemplo de sistema rápido-lento citado arriba, cuando $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

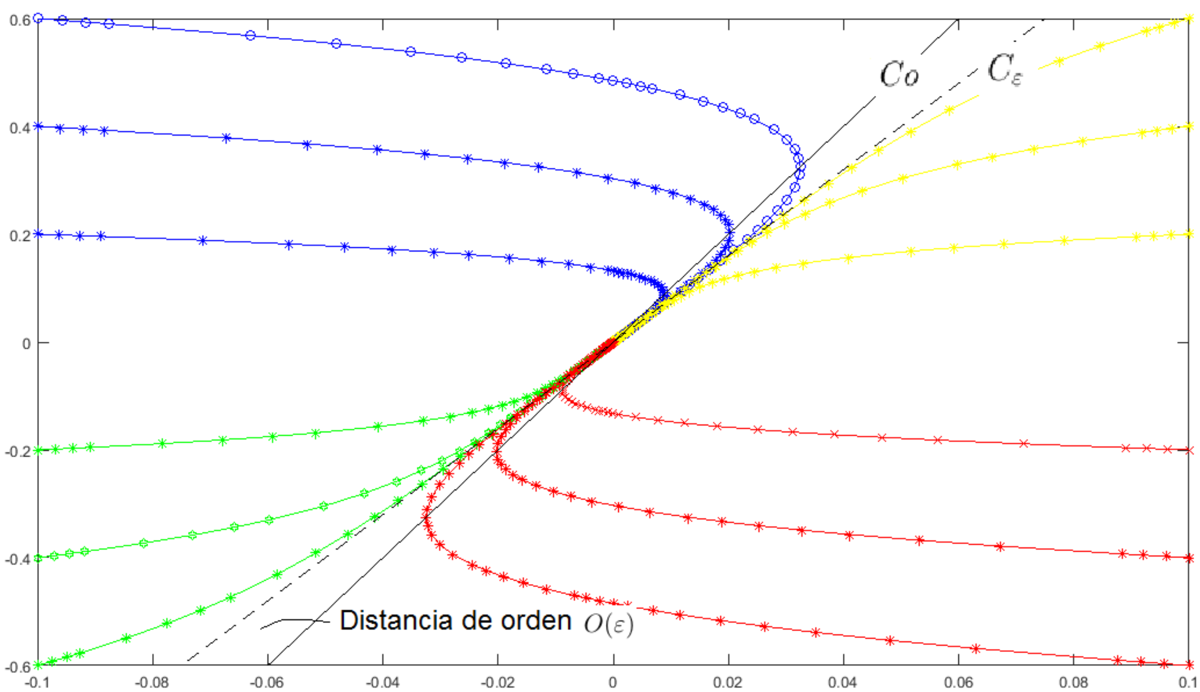


Figura 4.3: Flujos que se mueven inicialmente con una dinámica rápida, pero que al acercarse a C_0, se mueven sobre la variedad lenta C_ε.

Consideremos las condiciones iniciales que están en el semiplano superior, nos referimos a las que producen los flujos azules y amarillos simulados en la figura 4.3, los flujos azules atraviesan la variedad crítica Co, para posteriormente alinear su avance a la variedad lenta C_ε hasta dirigirse al punto atractor $(0,0)$ del sistema (4.10)-(4.11). Los flujos amarillos nunca cruzan Co, sólo se acerca exponencialmente al mismo a través de la variedad lenta también para llegar a $(0,0)$.

Cada punto sobre C_ε contenido en una vecindad V exhibe la propiedad localmente invariante, como observamos en los puntos de C_ε cercanos al origen en la figura 4.3.

Retomando la teoría limitaremos nuestra atención al caso donde Co esté dado como la gráfica de una función de x en términos de y. Es decir que hay una función $h^0(y)$, definida para $y \in K$, con K siendo un dominio compacto en $\mathbf{R}^l$, así que

$$Co = \left\{(x,y) : x = h^0(y)\right\}. \tag{4.23}$$

Esta suposición se puede sostener al menos localmente para Co, ya que al suponer que es normal hiperbólico, la matriz $D_x f(x,y,0)$ es invertible para cualquier $(x,y) \in Co$, y, por tanto, x puede ser escrito en términos de y según el Teorema de la Función Implícita.

Así, consideremos $x = h^0(y)$ donde $y \in K$ para realizar la siguiente suposición.

(H3) El conjunto Co está dado como la gráfica de la función $h^0(y)$ que es C^∞ para $y \in K$. El conjunto K es un dominio compacto y simplemente conexo, cuya frontera está en un subvariedad (l-1)-dimensional.

Bajo las hipótesis (H1), (H2) y (H3), podemos restablecer el primer Teorema de Fenichel en términos de la gráfica de una función.

Teorema 4.2 *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, hay una función $x = h^\varepsilon(y)$, definida sobre K, tal que*

$$C_\varepsilon = \{(x,y) : x = h^\varepsilon(y)\} \tag{4.24}$$

es localmente invariante bajo la dinámica rápida (4.5), (4.6). *Además h^ε es C^r, para cualquier $r < \infty$ conjuntamente en y y ε.*

Al sustituir la función $x = h^{\varepsilon}(y)$ de la variedad 4.24 en la ecuación $y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon)$ del sistema (4.2) asociada a la variable lenta en el sistema rápido-lento, obtenemos la ecuación (4.25) que representa la variación de la variable lenta y constreñida a la variedad C_{ε} en la escala de tiempo rápida. Y puesto que y parametriza a C_{ε}, esta ecuación será suficiente para describir la dinámica sobre C_{ε}:

$$y' = \varepsilon g(h^{\varepsilon}(y), y, \varepsilon). \tag{4.25}$$

en la escala lenta de tiempo tenemos

$$\dot{y} = g(h^{\varepsilon}(y), y, \varepsilon). \tag{4.26}$$

esta escala tiene la ventaja de que el límite existe cuando $\varepsilon \to 0$, y está dado por

$$\dot{y} = g(h^{0}(y), y, 0) \tag{4.27}$$

que describe la dinámica lenta sobre Co. La dinámica lenta sobre C_{ε} es una perturbación regular de la dinámica lenta sobre Co.

El segundo Teorema de Fenichel habla de las variedades estables e inestables de una variedad lenta. Éstas son perturbaciones de las variedades estables e inestables de Co.

Sea $d(,)$ la distancia euclidiana.

Teorema 4.3 (Teorema 2 de Fenichel, sobre una Variedad Invariante)
Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, existen las variedades $W^s(C_{\varepsilon})$ y $W^u(C_{\varepsilon})$ a una distancia de orden $O(\varepsilon)$, que son difeomorfos a $W^s(C_0)$ y $W^u(C_0)$ respectivamente. Además son localmente invariantes bajo el sistema (4.1)-(4.2), y son C^r, para ε y cualquier $r < \infty$.

Teorema 4.4 *Existen $k_s > 0$ y $\alpha_s < 0$ tales que si $v \in W^s(C_{\varepsilon})$ y $\phi(v, t) \subset D$, con $t > 0$ y D una vecindad, entonces*

$$d(\phi(v, t), C_{\varepsilon}) \leq k_s exp\left\{\alpha_s t\right\}. \tag{4.28}$$

Además existen $k_u > 0$ y $\alpha_u > 0$ tales que si $v \in W^u(C_{\varepsilon})$ y $\phi(v, t) \subset D$, con $t < 0$, entonces

$$d(\phi(v, t), C_{\varepsilon}) \leq k_u exp\left\{\alpha_u t\right\}. \tag{4.29}$$

Veamos un ejemplo donde podemos apreciar la variedad estable e inestable de alguna variedad crítica Co.

Ejemplo de variedad estable e inestable

Consideremos la figura 4.4 para mostrar la existencia de las variedades estables e inestables de algunos subconjuntos normales hiperbólicos de una variedad crítica Co. Nos basaremos en las definiciones (A.6a) y (A.6b) (véase el Apéndice A), y en el segundo ejemplo de sistema rápido-lento presentado en la sección 4.1.

Sean (x_a, y_a), (x_b, y_b) y (x_c, y_c) los tres puntos singulares asociados a la variedad crítica Co del sistema rápido-lento 4.16-4.17. (Véase la figura 4.4).

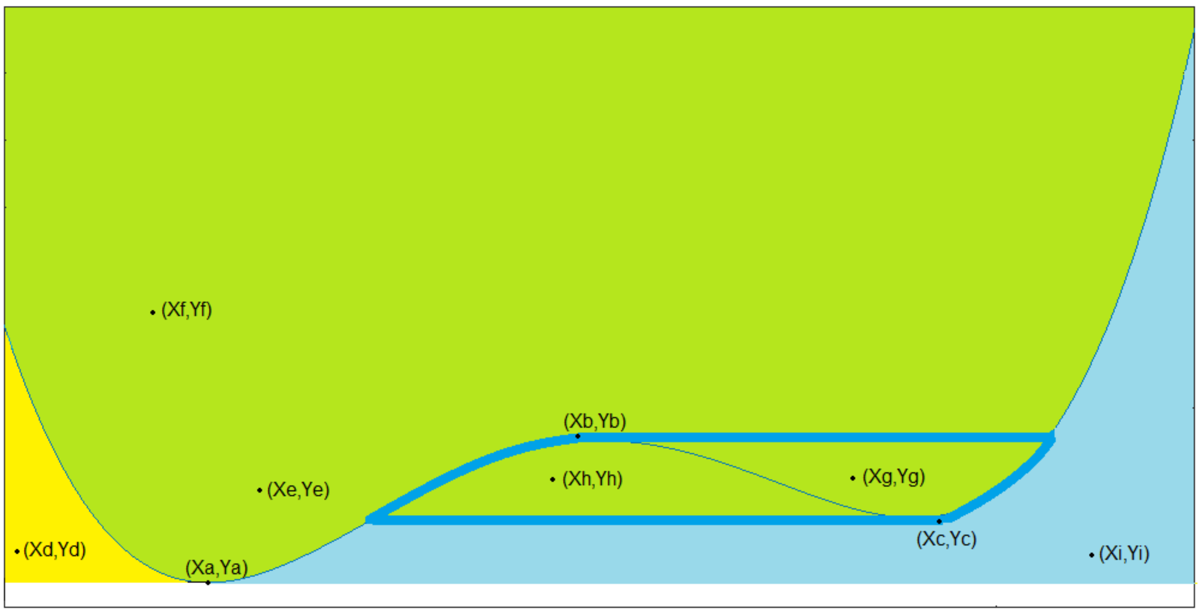


Figura 4.4: Variedades estables e inestables de algunas ramas de la variedad crítica Co del sistema rápido-lento 4.16-4.17.

Es evidente que $x_a < x_b < x_c$. Este hecho induce una partición del eje X con la que podemos construir los siguientes subconjuntos disjuntos de la variedad crítica $Co = \{(x, y) : f(x, y, 0) = y - x^4 - x^3 + 25x^2 - x - 50 = 0\} = \{x' = 0\}$.

$$C_1 = \{(x, y) \in Co : x < x_a\} \tag{4.30}$$
$$C_2 = \{(x, y) \in Co : x_a < x < x_b\} \tag{4.31}$$
$$C_3 = \{(x, y) \in Co : x_b < x < x_c\} \tag{4.32}$$
$$C_4 = \{(x, y) \in Co : x_c < x\} \tag{4.33}$$

Ningún punto singular está en $C_i,\ i = 1, ..., 4$. Por tanto $f_x \neq 0$ para cada uno de estos conjuntos y así cada uno de ellos es normal hiperbólico.

Consideramos el lado izquierdo de la figura 4.2, el diagrama de fase singular del sistema rápido-lento 4.16-4.17, para tener ubicados los flujos rápidos y lentos, ya que exploraremos la trayectoria con algunas condiciones iniciales con el objetivo de ubicar a las variedades estables e inestables de los subconjuntos $C_i,\ i = 1, ..., 4$ de Co.

Aplicando la definición (A.6a) al conjunto C_1 tenemos

$W^u(C_1)$=$\{(x, y) \in N : d(\phi_t(x), C_1) \to 0,\ cuando\ t \to -\infty\ y\ \phi_t(x) \in N$ para $t \leq 0\}$.

es decir, el conjunto de condiciones iniciales que convergen a C_1 cuando recorremos el tiempo en sentido inverso. Los puntos $(x_d, y_d), (x_e, y_e), (x_f, y_f) \in W^u(C_1)$; observe la figura 4.4 y aplique la dinámica rápida a estas condiciones iniciales apoyándose en la figura 4.2.

En efecto, estos puntos convergen hacia C_1 en tiempo inverso o bien son expulsados de C_1 en tiempo directo. Note que de hecho cada punto de C_1 cumple con la condición que define a $W^u(C_1)$.

Por otra parte $W^s(C_1)$, la variedad estable de C_1, es la misma C_1, ya que:

si $P_0 = (x_0, y_0) \in C_1$ entonces $d(\phi_t(P_0), C_1) = 0$, para cualquier t, y por tanto $\lim_{t\to\infty} d(\phi_y(P_0), C_1) = 0$.

Las intersecciones de las variedades estables e inestables no son vacías, de hecho es la variedad que los genera. Como observamos en el caso de la rama normal hiperbólica C_1 de C_0.

$$W^u(C_1) \cup W^s(C_1) = C_1. \tag{4.34}$$

Ahora exploremos una rama atractora de Co. De manera análoga $W^s(C_2)$ es el conjunto de condiciones iniciales que convergen a C_2 cuando recorremos el tiempo en sentido directo y $W^u(C_2) = C_2$. De la figura 4.4, los puntos $(x_e, y_e), (x_h, y_h) \in W^s(C_2)$.

En breve, las ramas C_3 y C_4 son expulsora y atractora respectivamente.

A continuación explicamos el significado de los colores en la figura 4.4:

(i) El color amarillo para la variedad inestable de las ramas C_1 o C_3.

(ii) El color azul para la variedad estable de las ramas C_2 o C_4.

(iii) El color verde para la intersección de las regiones amarilla y azul.

(iv) El color blanco para el subconjunto del plano fase para el cual las condiciones iniciales divergen.

La región verde posee dos significados: $W^u(C_1) \cup W^u(C_3)$ y $W^s(C_2) \cup W^s(C_4)$.

En los puntos (x_a, y_a), (x_b, y_b) y (x_c, y_c) no se puede aplicar la teoría de Fenichel ya que $f_x = 0$ en los mismos. Sin embargo, la teoría de Fenichel sí se puede aplicar en las subvariedades C_i, $i = 1, ..., 4$.

Con este ejemplo terminamos el capítulo 4. En el siguiente capítulo presentaremos una clase de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sujetas a dos escalas temporales, que nos servirá para poder dilucidar algunos modelos citados en [6], en los que veremos distintas dinámicas involucradas en dichos sistemas.

Capítulo 5

Sistemas Rápido-Lento Organizados por una Singularidad

En este capítulo exploraremos la posibilidad de extender el concepto de centro organizador a sistemas con múltiples escalas temporales. Estudiaremos en particular una clase de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con dos escalas temporales de la forma

$$\begin{aligned} x' &= G_{sing}(x, y+\lambda, \alpha) & (5.1) \\ y' &= \varepsilon(x-y) & (5.2) \end{aligned}$$

donde G_{sing} es el despliegue universal de una singularidad g.

Juntamos la teoría de singularidades y la teoría geométrica de perturbaciones singulares para estudiar el comportamiento global de esta clase de sistemas tanto en el espacio de estado como en el espacio de los parámetros.

En la primera sección se discute una posible extensión del concepto de centro organizador introducido en el capítulo 3 a sistemas de la forma (5.1)-(5.2). Las ideas presentadas en esta sección son tomadas de [6]. En las siguientes dos secciones se ilustran estas ideas sobre dos ejemplos organizados por dos singularidades distintas.

5.1. Centros organizadores: generalización a sistemas con múltiples escalas temporales

En la sección 3.2.4 se introdujo el concepto de centro organizador para problemas de bifurcación escalares. Un centro organizador determina a través de su despliegue universal los posibles diagramas de bifurcación de una ecuación diferencial escalar que depende de parámetros. De esta forma, un centro organizador da todos los posibles comportamientos dinámicos de este tipo de ecuaciones.

En la teoría geométrica de perturbaciones singulares, la variable lenta juega el papel de un parámetro de bifurcación que varía lentamente en el tiempo. La variedad crítica es exactamente el diagrama de bifurcación de la dinámica rápida con respecto a este parámetro. Cuando la dinámica rápida es escalar, como en (5.1), podemos entonces predecir todas las posibles formas de la variedad crítica a partir del despliegue universal de la singularidad organizadora. Por otro lado, en presencia de una dinámica lenta lineal y no parametrizada como (5.2), la forma cualitativa de la variedad crítica y sus intersecciones con la ceroclina lenta determinan completamente el comportamiento global del sistema.

En este capítulo se juntarán estas dos observaciones para construir un mapeo sencillo entre el espacio de despliegue de la singularidad organizadora y los comportamientos dinámicos del sistema lento rápido (5.1)-(5.2). Se ilustrará esta construcción de manera no rigurosa basándose en dos ejemplos tomados de [6]. El primer ejemplo está organizado por la singularidad histéresis. El segundo ejemplo por la singularidad cúspide alada.

5.2. Singularidad Histéresis en Sistemas Rápido-Lento

Del cuadro 3.1 del capítulo 2, sabemos que la forma normal de la singularidad histéresis está dada por:

$$g^s_{hy}(x,\lambda) = -x^3 - \lambda. \tag{5.3}$$

Del cuadro 3.3 del capítulo 2, sabemos que esta singularidad posee codimensión 1, y que su despliegue universal está dado por:

$$G^s_{hy}(x,\lambda;\alpha) = -x^3 - \lambda + \alpha x \tag{5.4}$$

Utilicemos el despliegue universal (5.4) de la singularidad histéresis para construir el siguiente sistema rápido-lento:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G^s_{hy}(x,\lambda+y;\alpha) = -x^3 - (\lambda+y) + \alpha x & (5.5)\\ \dot{y} &= \varepsilon(x-y) & (5.6) \end{aligned}$$

donde y es la variable lenta y x es la variable rápida.

La dinámica rápida está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G^s_{hy}(x, \lambda + y; \alpha) = -x^3 - (\lambda + y) + \alpha x && (5.7) \\ \dot{y} &= 0. && (5.8) \end{aligned}$$

La dinámica lenta está dada por:

$$\begin{aligned} 0 &= G^s_{hy}(x, \lambda + y; \alpha) = -x^3 - (\lambda + y) + \alpha x && (5.9) \\ y' &= (x - y) && (5.10) \end{aligned}$$

donde la derivada es $\dfrac{d}{d\tau}$.

La variedad crítica es el conjunto de pares ordenados (x, y) del plano fase que satisfacen la ecuación (5.9).

Deseamos determinar el comportamiento global del sistema (5.5)-(5.6) a través de la construcción de distintos diagramas de fase singulares, para distintos parámetros de despliegue α y de bifurcación λ.

La figura 5.2 muestra varios diagramas de fase singulares definidos por (5.7) y (5.10), donde el parámetro de bifurcación λ varía a lo largo de cada renglón, mientras que el parámetro de despliegue α lo hace a lo largo de cada columna. En la primera columna $\alpha < 0$, en la segunda columna $0 < \alpha < 1$. En el primer renglón $\lambda > 0$, en el segundo renglón $\lambda = 0$ y en el tercero $\lambda < 0$. Observamos que las cualidades de los diagramas de fase singular están determinadas completamente por la forma de la ceroclina rápida y por la intersecciones de ésta con la ceroclina lenta. Para el caso $\alpha > 1$ exhibe 3 intersecciones, y pueden ser estudiado de manera análoga.

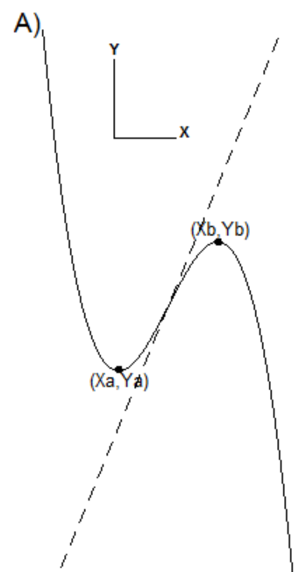


Figura 5.1: Variedad crítica del sistema (5.5)-(5.6), para el caso $0 < \alpha < 1$, $\lambda = 0$.

Expliquemos cómo se construyen los distintos retratos fase singulares de la figura 5.1. Nos apoyamos también en la figura 5.2, en esta última nos basamos en la justificación de por qué la variedad crítica Co (columna derecha) posee tres ramas normales hiperbólicas, las dos ramas exteriores son atractoras, mientras que la rama central es repulsora.

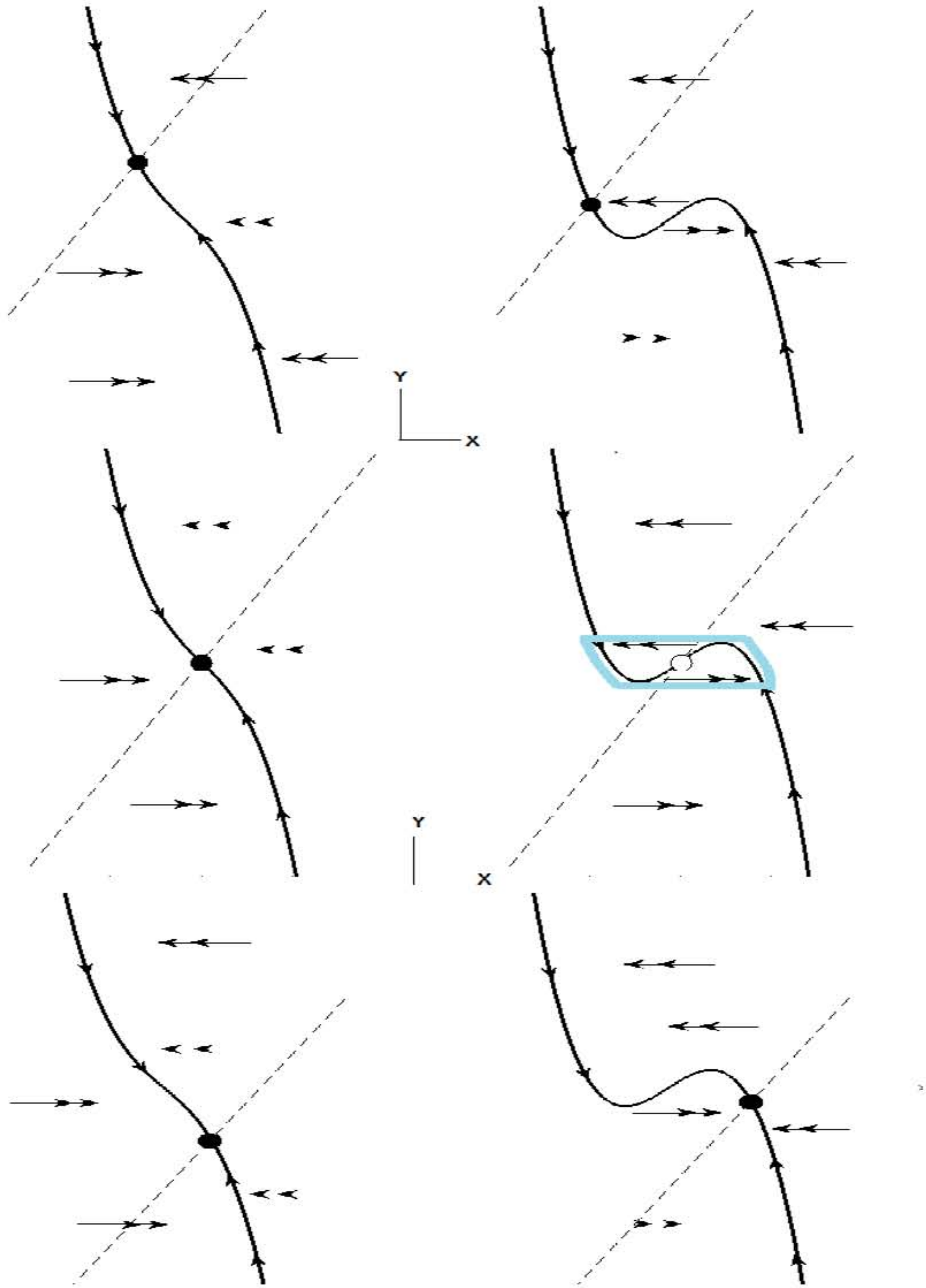


Figura 5.2: Diagrama de fase singular del sistema formado por las ecuaciones (5.5)-(5.6). Dinámica rápida flechas dobles y dinámica lenta flechas sobre la variedad crítica Co.

Sea Co la variedad crítica del sistema (5.5)-(5.6) para el caso $0 < \alpha < 1$, es decir, como en la figura 5.1. Definamos los siguientes conjuntos:

$$C_1 = \{(x, y) \in Co : x < x_a\} \tag{5.11}$$
$$C_2 = \{(x, y) \in Co : x_a < x < x_b\} \tag{5.12}$$
$$C_3 = \{(x, y) \in Co : x > x_b\}\,. \tag{5.13}$$

Los puntos singulares de Co son (x_a, y_a) y (x_b, y_b). Así que C_i donde $i = 1, 2, 3$, son ramas normalmente hiperbólicas, ya que ninguna posee puntos singulares. Las ramas C_1 y C_3 son atractoras, mientras que C_2 es repulsora.

La figura 5.2 muestra una familia de dinámicas singulares que caracterizamos a continuación:

(i) En la primera columna, es decir, para $\alpha < 0$, la variedad crítica es globalmente normal hiperbólica y atractiva. Por otro lado, la dinámica lenta satisface $\dot{y} < 0$ arriba de la diagonal y $\dot{y} > 0$ abajo de la diagonal. Concluimos que para toda λ, el plano fase singular posee un **punto fijo globalmente atractor**.

(ii) En la segunda columna, donde $0 < \alpha < 1$, aparecen dos puntos singulares (x_a, y_a) y (x_b, y_b) que dividen a Co en tres ramas disjuntas: C_1 y C_3 atractoras y C_2 repulsora. Hay una sola intersección entre Co y la ceroclina lenta.

- Si $\lambda < x_a$ ($\lambda > x_b$) , entonces la ceroclina lenta corta a Co en la rama C_1 (C_3) y el diagrama de fase singular posee un **punto fijo globalmente atractor**.
- Si $x_a < \lambda < x_b$, la ceroclina lenta corta a la rama C_2, aparecen un **punto fijo repulsor** y un **ciclo límite** alrededor del mismo. El diagrama de fase singular posee un ciclo límite (casi) globalmente atractor, ya que no atrae al punto fijo.

Invocando la teoría geométrica de perturbaciones singulares, podemos predecir que el sistema (5.5)-(5.6) puede mostrar, en función de los parámetros de despliegue y bifurcación del despliegue universal de la singularidad organizadora, los siguientes comportamientos:

(i) Punto fijo atractor global.

(ii) Ciclo límite atractor (casi) global

La figura 5.3 verifica estas predicciones.

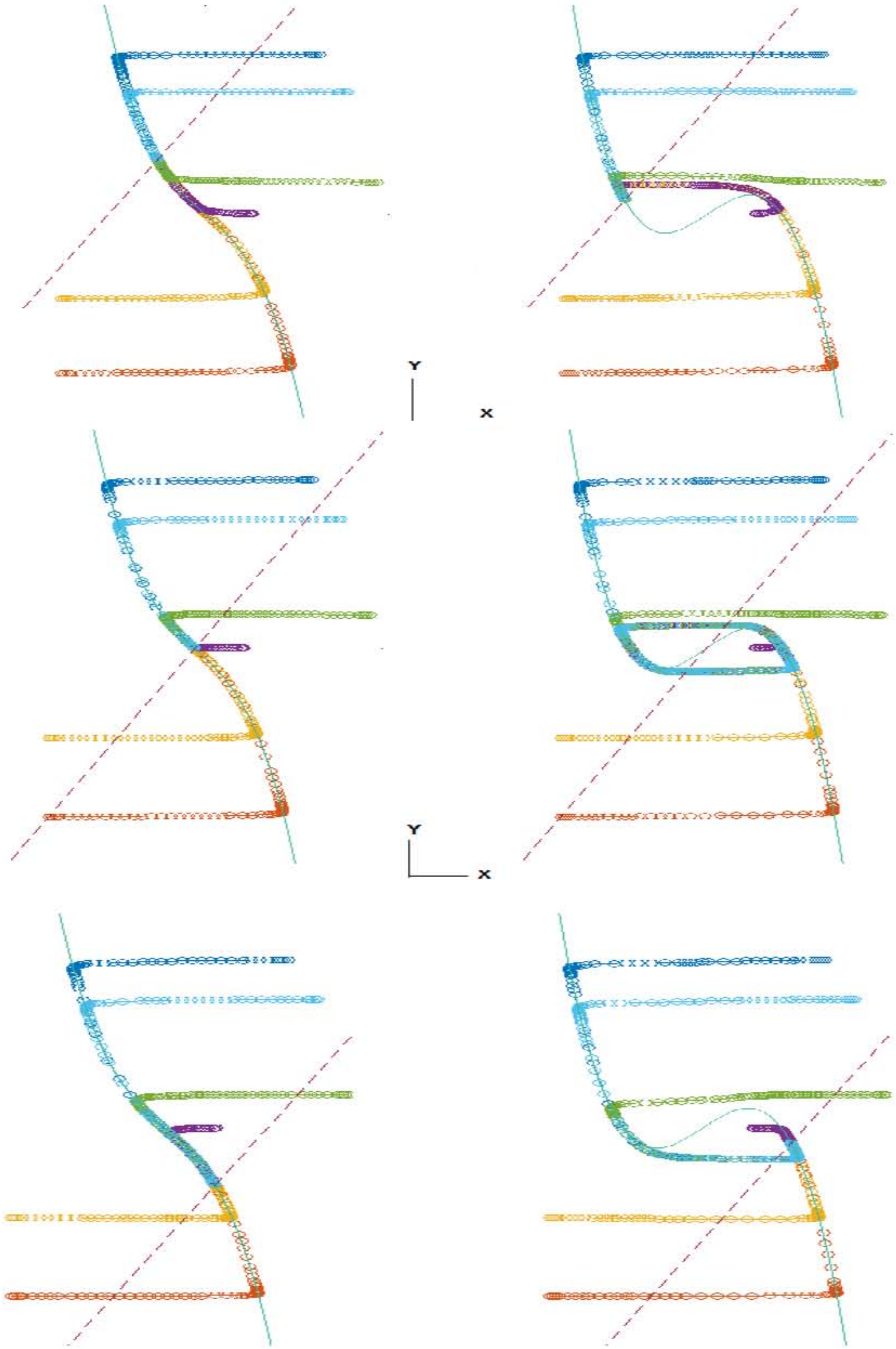


Figura 5.3: Simulación de algunas condiciones iniciales del sistema (5.5)-(5.6), para $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

5.3. Singularidad Cúspide Alada en Sistemas Rápido-Lento

En esta sección se analiza la dinámica global de un sistema rápido-lento organizado por la singularidad cúspide alada. Limitamos nuestro análisis a los casos en los cuales la variedad crítica está dada por uno de los diagramas de bifurcación persistentes de las figuras 5.4 y 5.5.

Los valores de los parámetros de despliegue y bifurcación que dan las formas observadas en estas figuras pueden ser determinados a través de la variedad de transición. Véase por ejemplo [6, 17].

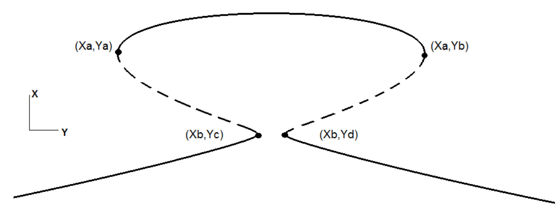


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación histéresis reflejada, perturbación de la singularidad cúspide alada.

Llamaremos **diagrama de bifurcación histéresis reflejada** al diagrama en la figura 5.4, [6]. Observe que posee cuatro puntos singulares que dividen a la gráfica en ramas disjuntas. Tener presente esto nos ayudará con las justificaciones posteriores. El segundo diagrama persistente que usaremos para construir el diagrama de fase singular, también posee simetría y difiere del primero en cómo se conectan las distintas ramas (véase la figura 5.5).

Del cuadro 3.1 del capítulo 3, sabemos que la singularidad cúspide alada está dada por

$$g^s_{wcusp}(x, \lambda) = -x^3 - \lambda^2 \tag{5.14}$$

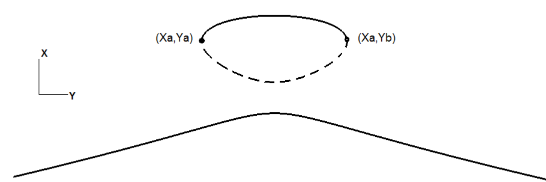


Figura 5.5: Perturbación simétrica de la singularidad cúspide alada.

y del cuadro 3.3 del capítulo 3, sabemos que esta singularidad posee codimensión 3, y que su despliegue universal está dado por

$$G^s_{wcusp}(x, \lambda; \alpha, \beta, \gamma) = -x^3 - \lambda^2 + \beta x - \gamma\lambda x - \alpha. \tag{5.15}$$

Utilicemos el despliegue universal (5.15) para construir el sistema rápido-lento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G^s_{wcusp}(x, \lambda + y; \alpha, \beta, \gamma) = -x^3 - (\lambda + y)^2 + \beta x - \gamma(\lambda + y)x - \alpha \qquad (5.16)\\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y) \qquad (5.17) \end{aligned}$$

La dinámica rápida está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G^s_{wcusp}(x, \lambda + y; \alpha, \beta, \gamma) = -x^3 - (\lambda + y)^2 + \beta x - \gamma(\lambda + y)x - \alpha \qquad (5.18)\\ \dot{y} &= 0 \qquad (5.19) \end{aligned}$$

La dinámica lenta está dada por

$$\begin{aligned} 0 &= G^s_{wcusp}(x, \lambda + y; \alpha, \beta, \gamma) = -x^3 - (\lambda + y)^2 + \beta x - \gamma(\lambda + y)x - \alpha \qquad (5.20)\\ y' &= x - y \qquad (5.21) \end{aligned}$$

donde la derivada es $\dfrac{d}{d\tau}$.

En la figura 5.6 construimos varios diagramas de fase singulares definidos por (5.18)-(5.21), donde los parámetros de despliegue α, β y γ varían en cada columna, mientras que el parámetro de bifurcación λ lo hace a lo largo de cada renglón. Las variedades críticas son obtenidas numéricamente por valores de los parámetros de bifurcación λ y de despliegue α, β y γ especificados en [6]. Los mismos valores son usados en las simulaciones presentadas en la figura 5.7.

Expliquemos cómo se construyen los distintos retratos fase singular en la figura 5.6.

(i) En la primera columna, la variedad crítica Co posee 4 puntos singulares (x_a, y_a), (x_a, y_b), (x_b, y_c) y (x_b, y_d) que dividen a la misma en 5 ramas disjuntas (véase figura 5.4). Definimos estas ramas:

$$C_1 = \{(x, y) \in Co : x < x_b,\ y > y_c\} \qquad (5.22)$$
$$C_2 = \{(x, y) \in Co : x_b < x < x_a,\ y_c < y < y_a\} \qquad (5.23)$$
$$C_3 = \{(x, y) \in Co : x > x_a,\ y_b < y < y_a\} \qquad (5.24)$$
$$C_4 = \{(x, y) \in Co : x_b < x < x_a,\ y_b < y < y_d\} \qquad (5.25)$$
$$C_5 = \{(x, y) \in Co : x < x_b,\ y < y_d\}\,. \qquad (5.26)$$

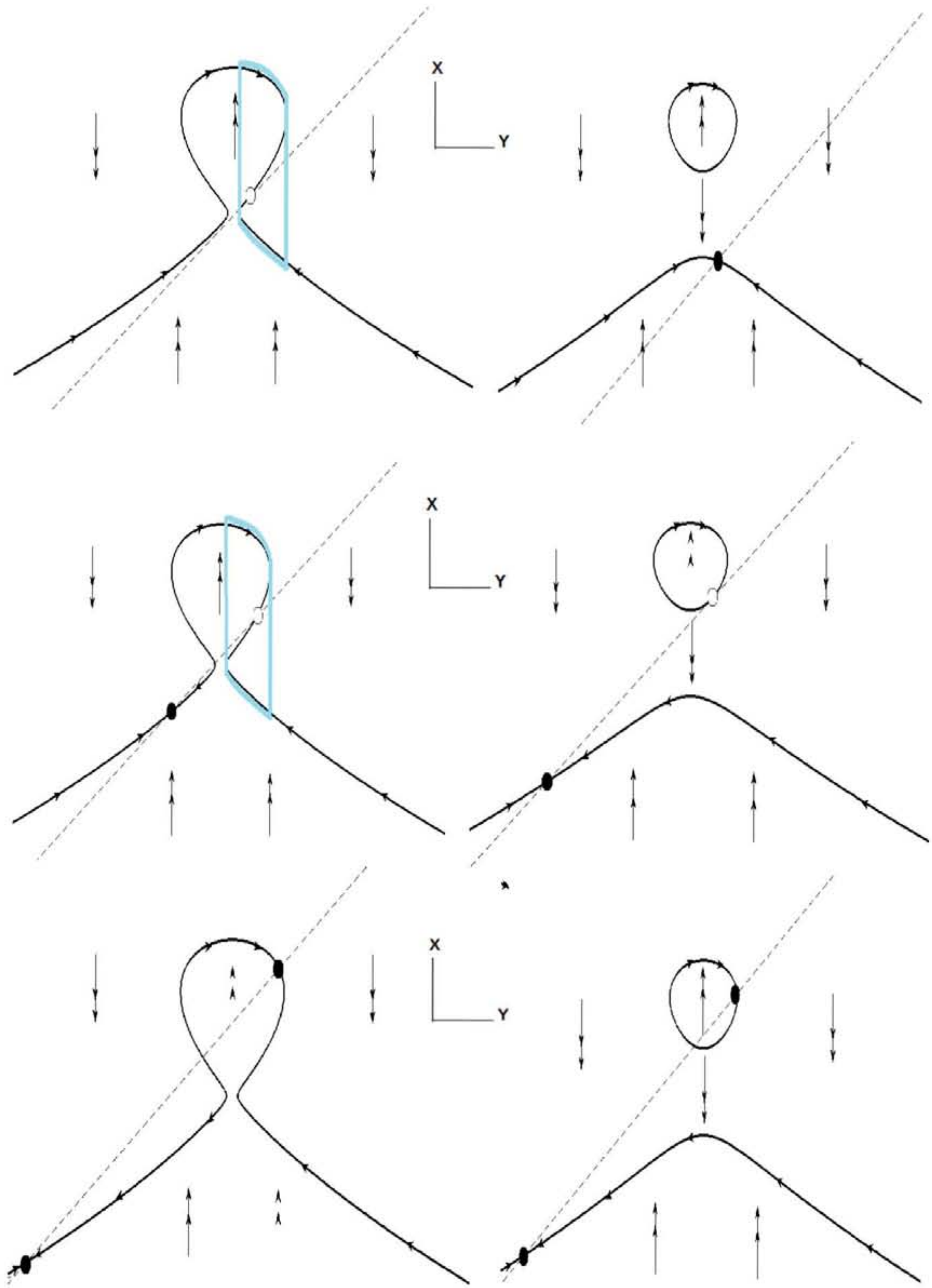


Figura 5.6: Diagrama de fase del sistema formado por las ecuaciones (5.16)-(5.17). Las flechas dobles verticales representan la dinámica rápida, la dinámica lenta sobre la variedad crítica Co.

Cada una de estas ramas es normalmente hiperbólica ya que ningún punto singular de Co pertenece a C_i, con $i = 1, ..., 5$, y por tanto, $f_x \neq 0$ para todos los puntos en C_i, con $i = 1, ..., 5$. Para los casos donde i es impar, la rama es atractora ($f_x < 0$), mientras que si i es par la rama es repulsora ($f_x > 0$).

Para terminar la construcción del retrato de fase singular es suficiente estudiar las intersecciones entre la variedad crítica y la ceroclina lenta (la diagonal del plano) en el sistema (5.16)-(5.17).

1) En la primera columna y primer renglón, la diagonal corta a la variedad crítica en la rama C_4. El **punto fijo** (x_r, y_r) correspondiente a esta intersección es **repulsor** y está rodeado por un **ciclo límite singular atractor**. La dinámica lenta satisface $\dot{y} < 0$ en las ramas C_1, C_2, C_3, y en la porción de la rama C_4 tal que $y < y_r$. Por otra parte $\dot{y} > 0$ en la rama C_5 y en la porción de la rama C_4 tal que $y > y_r$.

2) En la primera columna y segundo renglón, la diagonal corta a la variedad crítica Co en tres puntos: un punto **fijo atractor** (x_a, y_a) en la rama C_1, un **punto silla** (x_s, y_s) en la rama C_2 y un punto **fijo repulsor** (x_r, y_r) en la rama C_4. Existe también un **ciclo límite atractor** alrededor de la rama C_4. Por lo tanto, observamos **biestabilidad** entre un punto fijo atractor y un ciclo límite atractor. La dinámica lenta satisface $\dot{y} < 0$ en la porción de la rama C_1 donde $y > y_a$, la porción de la rama C_2 donde $y > y_s$, en la rama C_3 y en la porción de la rama C_4 donde $y < y_r$. La dinámica lenta satisface $\dot{y} > 0$ en la porción de la rama C_1 donde $y < y_a$, la porción de la rama C_4 donde $y > y_r$, y la rama C_5.

3) En la primera columna y tercer renglón, la diagonal corta a la variedad crítica en tres puntos: un punto **fijo atractor** (x_{a1}, y_{a1}) en la rama C_1, un **punto silla** (x_s, y_s) en la rama C_2 y un punto **fijo atractor** (x_{a2}, y_{a2}) en la rama C_3. Observamos por lo tanto **biestabilidad** entre dos puntos fijos atractores. La dinámica lenta satisface $\dot{y} < 0$ en la porción de la rama C_1 donde $y > y_{a1}$, la porción de la rama C_2 donde $y > y_s$ y la porción de la rama C_3 donde $y > y_{a2}$. La dinámica lenta satisface $\dot{y} > 0$ en la porción de la rama C_1 donde $y < y_{a1}$, la porción de la rama C_2 donde $y < y_s$, la porción de la rama C_3 donde $y < y_{a2}$, las ramas C_4 y C_5.

(ii) A través de un análisis semejante a la primera columna se puede concluir que la dinámica singular del sistema (5.16)-(5.17) con parámetros de bifurcación y despliegue como en la segunda columna puede exhibir: *un punto fijo atractor global*, como en el renglón uno; *un punto fijo atractor (casi) global*, cómo en el segundo renglón; *biestabilidad entre dos puntos fijos atractores* como en el tercer renglón.

Por la teoría geométrica de perturbaciones singulares, podemos finalmente predecir que el sistema (5.16)-(5.17) puede mostrar las siguientes dinámicas, en función de los parámetros de despliegue y bifurcación:

(i) Punto fijo atractor global.

(ii) Punto fijo atractor (casi) global.

(iii) Ciclo límite atractor (casi) global.

(iv) Biestabilidad (por coexistencia de dos puntos fijos atractores).

(v) Biestabilidad (por coexistencia de un punto fijo atractor y un ciclo límite atractor).

La figura 5.7 verifica las predicciones de la figura 5.6 .

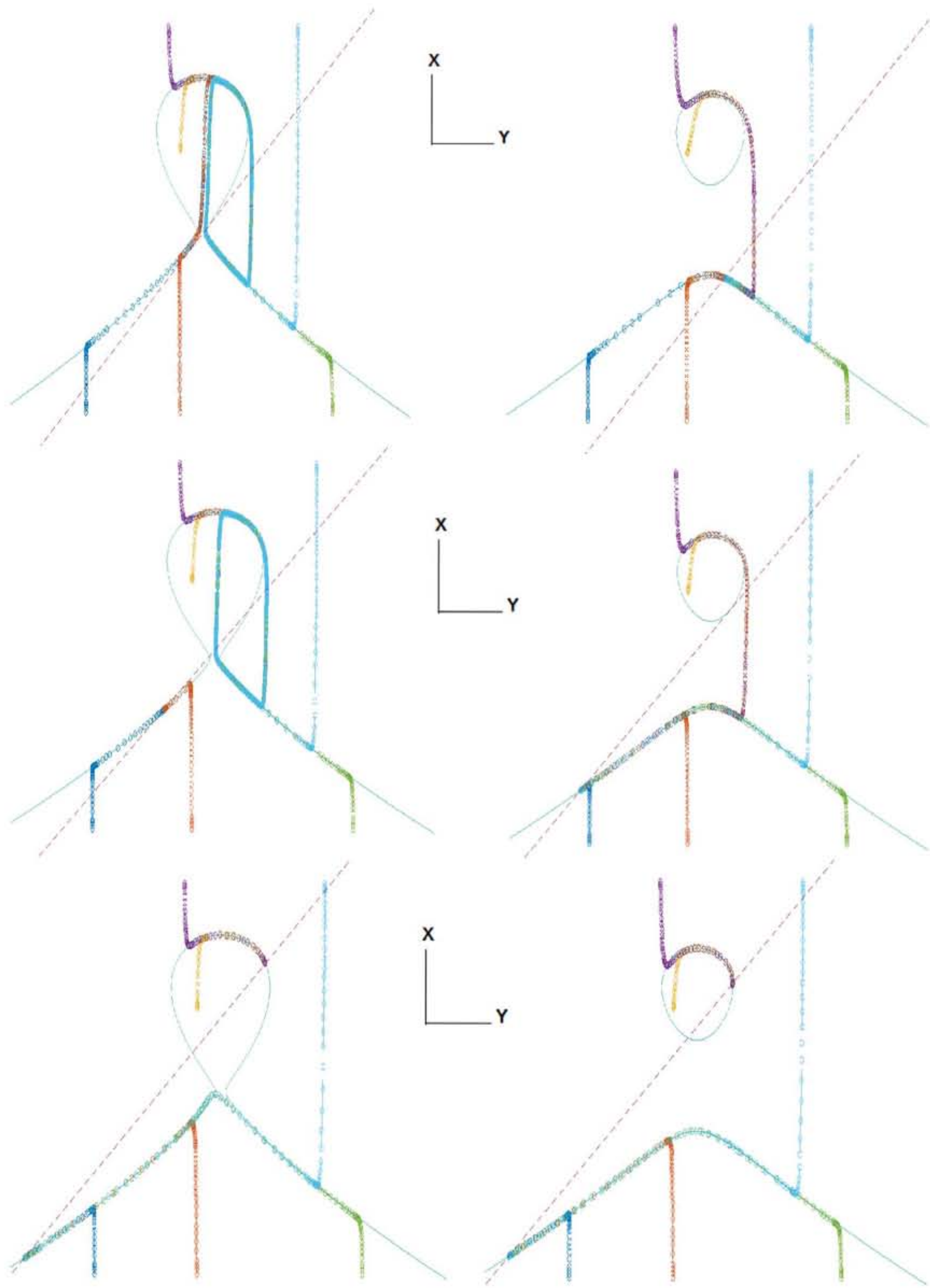


Figura 5.7: Simulación con algunas condiciones iniciales de la solución del sistema (5.16)-(5.17) cuando $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Capítulo 6

Conclusiones

Motivados por el modelado de sistemas biológicos y artificiales, este trabajo introdujo dos herramientas matemáticas para el análisis global del comportamiento dinámico de ecuaciones diferenciales con múltiples escalas temporales: la teoría de singularidades aplicada a los problemas de bifurcación y la teoría geométrica de perturbaciones singulares.

En el primer capítulo presentamos algunos ejemplos tomados de la biología, la neurociencia y la electrónica los cuales pueden ser modelados con variables a distintas escalas temporales. En el segundo capítulo introducimos un análisis gráfico para determinar el flujo global de un sistema de la forma $\dot{x} = f(x)$. De mayor riqueza dinámica son los sistemas parametrizados de la forma $\dot{x} = g(x, \lambda)$, ya que muestran distintos flujos globales al variar el valor del parámetro λ. Presentamos algunas generalidades sobre la teoría de bifurcaciones y de las ecuaciones de la forma $\dot{x} = g(x, \lambda)$, donde g está dada por la forma normal de una bifurcación. En el tercer capítulo enunciamos el teorema de clasificación de bifurcaciones elementales, que permite reconocer bifurcaciones elementales y enlistamos todas sus posibles perturbaciones de algunas de ellas.

Los sistemas rápido-lento aparecen por primera vez en el capítulo cuatro. Citamos algunos conceptos inherentes a estos sistemas, tales como variedad crítica, dinámica rápida y lenta, variedad estable e inestable, y el diagrama de fase singular. Finalmente, en el capítulo cinco, exploramos un subconjunto de la familia de sistemas rápido-lento cuya dinámica rápida está organizada por una bifurcación elemental y cuya dinámica lenta es lineal. En estos sistemas, a través de los diagramas de fase singular, estudiamos el comportamiento dinámico global, tanto en el espacio de estado, como en el espacio de parámetros.

Apéndice A

Generalidades sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En este apéndice introducimos algunos conceptos y definiciones generales sobre Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO). Nuestra exposición se basa en [13, 9, 17].

Los **sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias** tienen la forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.1}$$

donde $f : E \to \mathbf{R}^n$ es un función C^1, E es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, y $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

El sistema (A.1) se dice **autónomo**, ya que no depende explícitamente del tiempo.

En contraste el sistema

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{A.2}$$

donde el lado derecho depende explícitamente de la variable $t \in \mathbf{R}$, se dice **no autónomo**.

Podemos transformar un sistema no autónomo en un sistema autónomo a través de las ecuaciones $x_{n+1} = t$ y $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Se dice que $x(t)$ es **solución del sistema de ecuaciones diferenciales** (A.1) sobre un intervalo I, si $x(t)$ es diferenciable en I para cualquier $t \in I \subset \mathbf{R}$, $x(t) \in E$ y $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Para cualquier x_0 en E, $x(t)$ es solución del **problema con condición inicial**,

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.3}$$
$$x(0) = x_0 \tag{A.4}$$

sobre el intervalo I, si $0 \in I$, $x(0) = x_0$ y $x(t)$ es una solución de (A.3) en I.

Los sistemas tanto autónomos como no autónomos poseen solución única siempre y cuando f sea C^1, sin embargo la solución podría ser no acotada para algún $t = \beta$, es decir, la solución sólo existe en algún intervalo apropiado $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$.

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias para que un problema con condición inicial (A.3)-(A.4) tenga solución única en algún intervalo en el que está definido su parámetro.

Teorema A.1 (El teorema Fundamental de Existencia y Unicidad) *Sea E un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y $x_0 \in E$ y suponemos que $f \in C^1(E)$. Entonces existe una $a > 0$ tal que el problema con condición inicial* (A.3)-(A.4) *tiene única solución $x(t)$ sobre el intervalo $(-a, a)$.*

Un caso sencillo son los **sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias**

$$\dot{x} = Ax \tag{A.5}$$

donde $x \in \mathbf{R}^n$ y $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Cualquier sistema lineal (A.5) tiene una única solución para todas las condiciones iniciales x_0 en $\mathbf{R}^n$. Esta solución está dada por $x(t) = e^{At}x_0$, donde e^{At} es la exponencial de la matriz At, para toda $t \in \mathbf{R}$.

Introducimos ahora los conceptos de flujo y trayectoria.

Definición A.1 (El Flujo de una Ecuación Diferencial) *Sea E un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, sea $x(t)$ la solución del sistema con condición inicial* (A.3)-(A.4)*, definido sobre su intervalo maximal de existencia $(-a, a)$, para algún $a \in \mathbf{R}$. Entonces para $t \in (-a, a)$, el conjunto de mapeos definidos por $\phi_t(x_0) = x(t)$ es llamado* ***el flujo de la ecuación diferencial*** (A.3)*, o bien el flujo definido por la ecuación diferencial* (A.3)*; ϕ_t es también referido como el* ***flujo del campo vectorial de f(x)****.*

La **trayectoria** del sistema con condición inicial (A.3)-(A.4), es el conjunto definido por $\{\phi_t(x_0) : \ t \in I \subset (-a, a)\} \subset \mathbf{R}^n$.

A continuación, enunciamos algunas propiedades del flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

(i) $\phi_0(x) = x$.

(ii) $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$, para cualquier s, t para los cuales exista la solución.

(iii) $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_t(\phi_{-t}(x)) = x$, para cualquier t, $-t$ para los cuales exista la solución.

Ahora consideremos aquellos soluciones $x(t)$ para las cuales se satisface la ecuación $\dot{x}(t) = f(x(t)) \equiv 0$ para todo $t \in \mathbf{R}$. Tales soluciones son constantes y definen los puntos fijos del sistema.

Definición A.2 (Punto Fijo) *Un punto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ es llamado* punto de equilibrio o crítico o bien fijo *de la ecuación* (A.3)*, si $f(x_0) = 0$. Un punto fijo x_0 es llamado un* ***punto fijo hiperbólico*** *de la ecuación* (A.3)*, si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ (el jacobiano de la función) tiene parte real cero. El sistema lineal* (A.5) *con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamada* ***la linealización*** *de* (A.3) *en x_0.*

Los puntos fijos pueden tener naturalezas muy distintas.

Definición A.3 (Clasificación de los Puntos Fijos) *Un punto fijo x_0 de la ecuación* (A.3) *es llamado* ***sumidero o atractor****, si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real negativa; es llamado* ***fuente o repulsor****, si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real positiva; es llamado* ***silla*** *si es un punto fijo hiperbólico y $Df(x_0)$ tiene al menos un valor propio con parte real negativa y tiene al menos un valor propio con parte real positiva.*

Un concepto importante para el estudio cualitativo de las SEDO, es el concepto de ceroclina.

Definición A.4 (ceroclina) *Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

La j-ésima ***ceroclina*** *es el lugar geométrico para el cual $x_j' = 0$. Los puntos fijos del sistema están localizados donde todas las ceroclinas se intersectan.*

El siguiente teorema es un resultado fundamental de la teoría de las EDO. Nos dice que cerca de un punto fijo hiperbólico x_0, el sistema (A.1) tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal (A.5), con $A = Df(x_0)$. Suponemos sin pérdida de generalidad que el punto fijo del sistema (A.1) ha sido trasladado al origen.

Teorema A.2 (Teorema de Hartman-Grobman) *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ que contiene al origen, sea $f \in C^1(E)$, y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal* (A.1). *Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene al origen, y un conjunto abierto V que también contiene al origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbf{R}$ que contiene a cero tal que para toda $x_0 \in U$ y $t \in I_0$*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

es decir, H mapea trayectorias de (A.1) *cerca del origen, en trayectorias de* (A.5) *y preserva la parametrización dada por el tiempo.*

Otra noción fundamental de la teoría es el concepto de ciclo límite.

Definición A.5 (Ciclo u Órbita Periódica) *Un* ciclo u órbita periódica *de la ecuación* (A.3) *es una curva cerrada que es solución del sistema* (A.3)-(A.4)*, y que no es punto fijo de la ecuación* (A.3). *Una órbita periódica Γ es llamada* estable*, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de Γ, tal que, para cualquier $x \in U$ y $t \geq 0$, tenemos que $d(\phi(t, x), \Gamma) < \varepsilon$. Una órbita Γ es llamada* inestable *si no es estable.*

Una órbita periódica aislada también se llama ciclo límite.

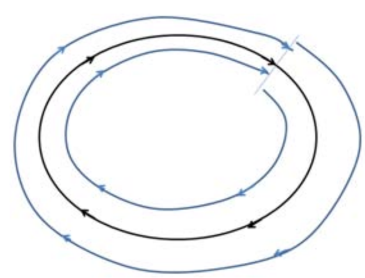


Figura A.1: Ciclo límite, la curva cerrada.

Dado un punto fijo o una órbita periódica, podemos preguntarnos para cuáles condiciones iniciales la trayectoria del sistema converge a dicho punto fijo u órbita. Por el contrario, podemos preguntarnos para cuáles condiciones iniciales la trayectoria diverge de dicho punto fijo u órbita periódica.

Esto nos lleva a los conceptos de variedad estable e inestable.

Sea Γ una órbita periódica y sea N una vecindad de Γ. La **variedad estable local** y **la variedad inestable local** de Γ están dadas respectivamente por

$$S(\Gamma) = \{x \in N : d(\phi_t(x), \Gamma) \to 0,\ cuando\ t \to \infty\ y\ \phi_t(x) \in N \text{ para } t \geq 0\} \quad \text{(A.6a)}$$

y

$$U(\Gamma) = \{x \in N : d(\phi_t(x), \Gamma) \to 0,\ cuando\ t \to -\infty\ y\ \phi_t(x) \in N \text{ para } t \leq 0\} \quad \text{(A.6b)}$$

Las **variedades estables e inestables globales** de Γ están definidas respectivamente por

$$W_s(\Gamma) = \cup_{t\geq 0}\phi_t(S(\Gamma)) \tag{A.7a}$$

y

$$W_u(\Gamma) = \cup_{t\leq 0}\phi_t(U(\Gamma)) \tag{A.7b}$$

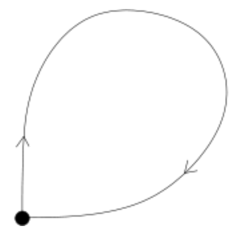


Figura A.2: Órbita homoclina.

Finalizamos esta sección con un par de últimos conceptos ligados a los puntos fijos de un sistema (A.1) y sus trayectorias:

- Las órbitas homoclinas

- Las órbitas heteroclinas

Una **órbita homoclina** es una trayectoria Γ tal que, para toda $x_0 \in \Gamma$, resulta que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \phi_t(x_0) = p \tag{A.8}$$

donde p es un punto fijo del problema con condición inicial (A.3)-(A.4) (véase la figura A.2).

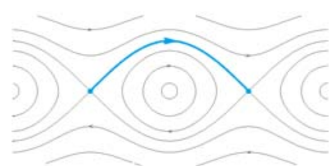


Figura A.3: Órbita heteroclina.

Una **órbita heteroclina** es una trayectoria Γ tal que, para toda $x_0 \in \Gamma$, resulta

$$\lim_{t\to-\infty} \phi_t(x_0) = p_1 \neq p_2 = \lim_{t\to\infty} \phi_t(x_0) \tag{A.9}$$

donde p_1 y p_2 son dos puntos fijos del problema con condición inicial (véase la figura A.3).

Índice de figuras

Índice de cuadros

Bibliografía

[1] Fuentes Pardo Beatriz Barriga Montoya Carolina, Lara Aparicio Miguel and Padilla Longoria Pablo. Modeling some properties of circadian rhythms. *MATHEMATICAL BIOSCIENCES AND ENGINEERING*, 2014.

[2] U. Fory B.Zduniak, M.Bodnar. A modified Van der Pol equation with delay in a description of the heart action. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 24(4): 853-863*, 2014.

[3] P. Colet and R. Roy. Digital communication with synchronized chaotic lasers. *Opt. Lett. 19, no. 24, pp. 2056-2058*, 1994.

[4] Barry W. Connors and Michael J. Gutnick. Intrinsic firing patterns of diverse neocortical neurons. *Trends in Neuroscience (TINS), VoL 13, No. 3*, 1990.

[5] H. Kook D. Postnov, S.K. Han. Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation. *Physical Review E 60(3)*, 1999.

[6] Alessio Franci, Guillaume Drion, and Rodolphe Sepulchre. Modeling the modulation of neuronal bursting: A singularity theory approach. *SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS Vol. 13, No. 2, pp. 798–829*, 2014.

[7] C. M. Gray and D. A. McCormick. Chattering cells: superficial pyramidal neurons contributing to the generation of synchronous oscillations in the visual cortex. *Science, vol. 274, no. 5284, pp. 109-113*, 1996.

[8] K. Grudzinski. Modelowanie czynnosci elektrycznej ukladu przewodzenia serca, rozprawa doktorska. *Wydzial Fizyki Politechniki Warszawskiej*, 2007.

[9] Strogatz Steven H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* Perseus Books Publishing, 1994.

[10] Eugene M. Izhikevich. Simple model of spiking neurons. *IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS, VOL. 14*, NOVEMBER 2003.

[11] M. Belerlein J. R. Gibson and B. W. Connors. Two networks of electrically coupled inhibitory neurons in neocortex. *Nature, vol. 402, pp. 75-79*, 1999.

[12] Beata Jackowska-Zduniak. Synchronization problem of the coupled modified Van der Pol equations in a model of the heart action. *Centrum Zastosowan Matematyki*, 2015.

[13] Jones Christopher K.R.T. *Geometric Singular Perturbation Theory*. Division of Applied Mathematics Brown University Providence.

[14] F.J.L. Van Capelle L. Henk Van der Tweel, F.L. Meijler. Synchronization of the heart. *Journal of Applied Physiology 34(2)*, 1973.

[15] Pecora L. M and T. L. Caroll. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A 44, no. 4, pp. 2374-2383*, 1991.

[16] Erin C. McKiernan y Sandra D. Berger Marco A. Herrera Valdez. Relating ion channel expression, bifurcation structure, and diverse firing patterns in a model of an identified motor neuron. *Journal of Computational Neuroscience*, 2013.

[17] Golubitsky Martin. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory Volumen II*. Springer Science+Business Media New York, 1985.

[18] T. Kapitaniak P. Perlikowski, A. Stefanski. Discontinuous synchrony in an array of Van der Pol oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics 45: 895-901*, 2010.

[19] Andreea-Rodica STERIAN Paul STERIAN, Valerica NINULESCU and Bogdan LAZAR. Optical communication methods based on chaotic laser signals. *U.P.B. Sci. Bull, Series A, Vol. 72, Iss. 1*, 2010.

[20] P. E. Sterian. Transmisia optica a informatiei. *vol. I, II, Editura Tehnica, Bucuresti*, 1983.

[21] Giuseppe Aromataris Valerio Annovazzi Lodi, Senior Member. Secure chaotic transmission on a free-space optics data link. *IEEE JOURNAL OF QUANTUM ELECTRONICS*, 2008.

[22] Dr. Alberto Estevez De Vidts. *Manual en trazados de ECG*. Facultad de Medicina, Chile. Banco de imagenes de electrocardiogramas.

[23] Hurewicz Witold. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Instituto Tecnologico de Massachuset, 1958.

[24] Lega Joceline y Herrera Valdez Marco Arieli. Reduced models for the pacemaker dynamics of cardiac cells. *Journal of Theoretical Biology*, 2010.

[25] Y. Nishio Y. Uwate. Synchronization phenomena in Van der Pol oscillators coupled by a time-varying resistor. *International Journal of Bifurcation and Chaos 17(10): 3565-3569*, 2007.