UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

SIMULADOR NUMERICO, EN COORDENADAS R-Z, PARA UN YACIMIENTO DE GAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A :

DAVID ABREGO ALVARADO

MEXICO, D. F. 1990

INDICE

"No sé qué pueda yo parecerle al mundo, pero en mi interior siento haber sido sólo como un niño que juega en la playa y se divierte al encontrar de vez en cuando un guijarro más liso o una concha más bonita que las demás, mientras el grán oceano de la verdad se extendía, totalmente ignoto, ante mí".

Isaac Newton.

Introducción

El desarrollo de la industria petrolera ha motivado el uso de técnicas más sofisticadas orientadas a optimizar la recuperación de hidrocarburos, entre los que se encuentra la Simulación Matemática de Yacimientos.

Es claro que los simuladores no pueden sustituir a la realidad; sin embargo, los programas de simulación, en este caso para un yacimiento de gas, están diseñados para evocar situaciones físicas reales cuya función primordial es orientar la investigación, ofreciendo la posibilidad de repetir experimentos que requirieron muchos años, en muy poco tiempo.

En la ingeniería de yacimientos, la simulación es utilizada principalmente para optimizar la recuperación de los hidrocarburos, siendo el brazo ejecutor el ingeniero petrolero, el cual siempre a buscado la manera de reproducir lo que ocurre en los yacimientos. Para ello se ha valido de técnicas y ecuaciones que con el tiempo y gracias a los adelantos de la ciencia han ido evolucionando, pero que en esencia, son las técnicas y ecuaciones que se siguen utilizando en nuestros días.

De tal manera que en el presente trabajo, se muestra el desarrollo del modelo matemático para simular el comportamiento del gas en las cercanías de un pozo, el cual consiste de un número determinado de ecuaciones que expresan el principio de conservación de masa/energía, acopladas con ecuaciones representativas de flujo de fluidos, temperatura y la concentración de estos fluidos a través de medios poroso. Dichas ecuaciones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales "no-lineales" y cuya solución sólo es posible a través de métodos numéricos.

El sistema de ecuaciones desarrollado se resuelve mediante el método de sobre-relajación sucesiva (LSOR)

El programa de cómputo es de tipo conversacional, por lo que las variables pueden ser ajustadas por el operador antes de iniciar propiamente la simulación, a traves del sistema de interfaz hombre-maquina.

Los principales resultados que el modelo permite conocer son la distribución de presión a diferentes tiempos, volumen remanente de gas, producción acumulada, asi como el error de balance de materia el cual es indicativo de la precisión de los datos obtenidos.

Por ultimo se presenta la validación de este modelo contra ejemplos tomados de la literatura.

El éxito, en la utilización del presente simulador, dependera no tan solo del aspecto económico, sino también de la información con que se cuenta.

"Toda la esencia de la filosofía parece consistir en esto: investigar, partiendo de los fenómenos del movimiento, las fuerzas de la naturaleza y luego, a partir de estas fuerzas, explicar los demás fenómenos".

Sir Isaac Newton

CAPÍTULO 1

definición del problema

1.1 VENTAJAS DEL GAS

Durante mucho tiempo, el gas natural ha sido menospreciado. Se ha quemado en los campos de petróleo, y es lo que sigue sucediendo actualmente a buena parte de esta riqueza natural. Sin embargo, recientemente se han efectuado grandes progresos para recuperar dicho gas, transportándolo por gasoducto o licuándolo para ser transportado en barcos metaneros.

El consumo de gas natural sobrepasa actualmente los mil millones de tep (tonelada equivalente de petróleo). Su contribución se hacerca a la mitad de la del petróleo: es, pues, importante.

México hasta 1982 producía 3672 millones de pies cúbicos y consumía 2293 millones de pies cúbicos diarios.

Los usuarios de gas natural como fuente de energía le encuentran ventajas seguras. La primera es de orden económico: la caloría que tiene como origen la combustión del gas resulta menos cara que la caloría-petróleo o la caloría-electricidad.

La segunda ventaja es de orden ecológico: la combustión del gas se efectúa sin humo, ni olores, ni residuos, ventaja muy apreciable en un medio ambiente urbano.

La última ventaja es de orden geográfico:las disponibilidades del gas están mejor repartidas en la superficie de la tierra que las del petróleo y dependen menos, por tanto, de las decisiones políticas locales.

El costo del gas está parcialmente relacionado con la facilidad de su transporte por gasoducto y con la comodidad de su distribución. En el futuro, después de que se acaben las reservas del gas natural se introducirán productos que lo sustituyan, como el gas de hulla o el hidrógeno. Esto constituye una ventaja importante que garantiza la continuidad, aún a largo plazo.

El gas que se distribuye actualmente es de origen natural y contiene, sobre todo, metano; su capacidad calorífica es de aproximadamente 9400 calorías por litro, pero por ser demasida elevada, se reduce a aproximadamente 6750 calorías por litro añadiendole nitrógeno. Un aditivo odorizante permite hacer notar su presencia.

Si ya no es tan tóxico como el de antes, el gas sigue siendo peligroso por los riesgos de explosión que representa.

Podemos concluir que el gas deberá, inevitablemente, obtener un lugar más importante en el balance energético mundial.

1.2 CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA

Este trabajo describirá un modelo matemático para predecir el comportamiento de un yacimiento de gas en las cercanías de un pozo.

Algunos pozos de gas exhiben presiones cuyo comportamiento es difícil,
si no imposible para interpretarlo usando métodos convencionales de análisis.

La dificultad de la interpretación con frecuencia es encontrada en yacimientos con permeabilidades bajas, yacimientos limitados o yacimientos con flujo transversal. Sin embargo, este trabajo describe un modelo matemático el cual considera factores los cuales en algunos métodos de análisis se descuidan. El modelo simula numéricamente en dos direcciones (r-z), por lo que el flujo de gas transita a través de un cilindro que representa el volumen

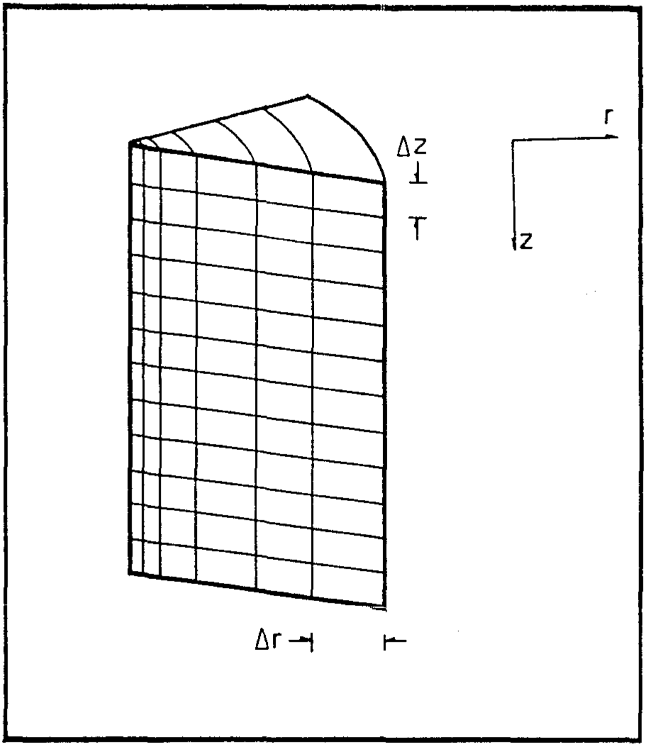


FIGURA 1.1 Fracción del cilindro que representa el volumen drenado por un pozo en coordenadas r-z.

drenado por un pozo (figura 1.1)

Para representar numéricamente el comportamiento de un yacimiento de gas es necesario combinar las ecuaciones que describen el movimiento del gas, la conservación de masa/energía y la ecuación de estado de una manera que nos permitan la simulación dentro del yacimiento.

Deberemos tomar en cuenta las características de cada una de las ecuaciones así como las condiciones en que se plantearon, tomando en cuenta que las permeabilidades horizontal y vertical, Kh y Kv, son funciones arbitrarias de "r" y "z", y utilizando el potencial de los gases, para posteriormente discretizar en dierencias finitas.

"La grán belleza de nuestra ciencia estriba en que un descubrimiento, por grande ó pequeño que sea, en lugar de agotar el tema de investigación, abre las puertas a otro conocimiento más profundo y más amplio en desbordante hermosura y utilidad".

Michael Faraday.

CAPÍTULO 2

características y desarrollo del modelo matemãtico

2.1 PRINCIPIOS Y ECUACIONES BÁSICAS[5,6]

Se ha dicho que la simulación ayuda a describir, con cierta precisión, el comportamiento de procesos físicos que ocurren en los vacimientos. Para ello se identificarán dichos procesos y se formularán las ecuaciones matemáticas que los gobiernan. Sin embargo esta tarea no es fácil debido a que el fenómeno del flujo de fluidos en medios porosos es muy complejo y por lo tanto, para representarlo consideraremos las ecuaciones siguientes:

a) La ley de la conservación de masa/energía

b) La ley de Darcy (ecuaciones de movimiento)

c) La ecuación de estado para fluidos compresibles.

Además, para representar el sistema de flujo se consideran las dimensiones (r-θ-z), como se muestra en la figura 2.1.

2.2 ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD [5,6,8,9]

La descripción matemática del flujo de fluidos en medios porosos está basada en la ley de la conservación de masa, la cual establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo, es decir, $dm/dt=0$. La ecuación de continuidad, que es una consecuencia de la aplicación de dicha ley, determina, para un cierto elemento de medio poroso, que la rapidez de crecimiento de la masa dentro del elemento es exactamente igual al flujo neto de masa hacia el mismo elemento.

Considérese una pequea porción de un cilindro (figura 2.1), que representa un medio poroso; a través del cual existe flujo en todas las caras.

Haciendo un balance de materia durante un intervalo pequeño de tiempo Δt, se puede considerar que el flujo de masa por unidad

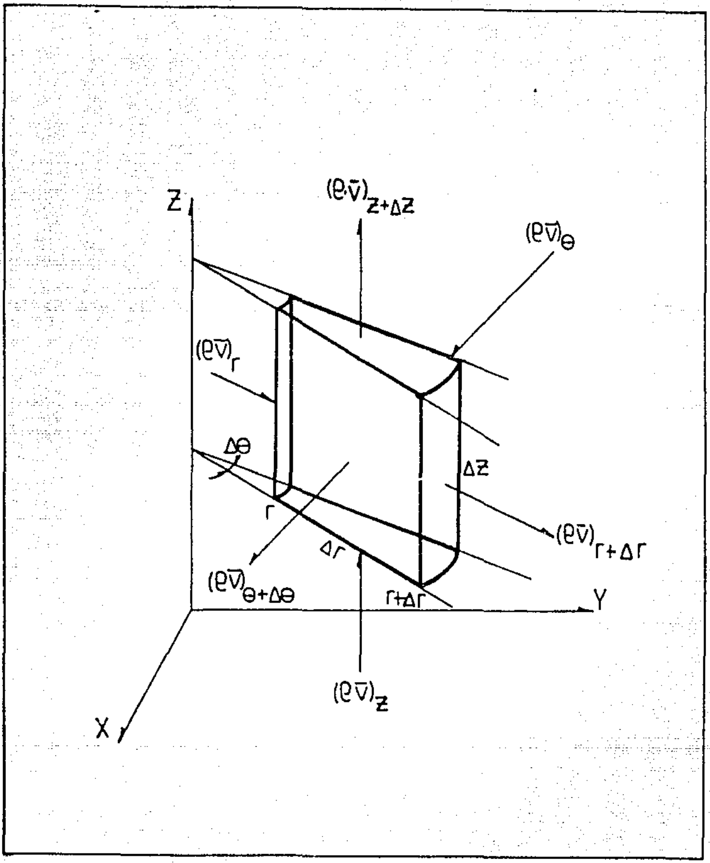


FIGURA 2.1 Elemento diferencial de un medio poroso.

de superficie es igual a la velocidad multiplicada por la densidad ($\bar{v}\rho$).

Dimensionalmente:

$$\frac{L}{T}\frac{M}{L^3} = \frac{M}{TL^2}$$

Ahora bien, si el flujo de masa se multiplica por el área transversal al flujo se obtiene como resultado el flujo másico.

$$\bar{v}\,\rho\,A = \rho\,q$$

Dimensionalmente:

$$\frac{L\;\;M\;\;L^2}{T\;L^3} = \frac{M\;\;L^3}{L^3\;T} = \frac{M}{T}$$

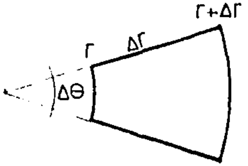
i) principio de conservación de masa:

$$\begin{bmatrix} \text{masa que entra} \\ \text{en el volumen} \\ \text{de control en} \\ \Delta t. \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{masa que sale} \\ \text{del volumen} \\ \text{de control en} \\ \Delta t. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{masa que se} \\ \text{acumula en} \\ \text{el volumen} \\ \text{de control} \\ \text{en } \Delta t. \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el flujo másico multiplicado por el área perpendicular a la dirección de ese flujo (figura 2.2), en cada una de las caras, dará la masa que entra en el volumen de control, la masa que sale, etc.

MASA QUE ENTRA EN EL VOLUMEN DE CONTROL EN Δt.

$$(\rho\bar{v})_\theta \Delta r\;\Delta z\;\Delta t + (\rho\bar{v})_r\;\Delta\theta r\Delta z\;\Delta t + (\rho\bar{v})_z \Delta\theta\Delta r\;\Delta t\,(r+\Delta r/2)$$



ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

$$A_i=\frac{\pi r^2 r^{\circ}}{360}=\frac{\pi r^2 \Delta\theta}{2\pi}=\frac{r^2\Delta\theta}{2}$$

Cuando $r=r$

$$A(r)=\frac{r^2\Delta\theta}{2}$$

Cuando $r=r+\Delta r$

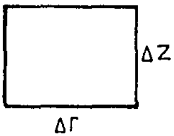
$$A(r+\Delta r)=\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\theta}{2}$$

$$A(r+\Delta r)-A(r)=\Delta\theta\,\Delta r\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)$$

$$A_z=A_{z+\Delta z}=\Delta\theta\,\Delta r\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)$$

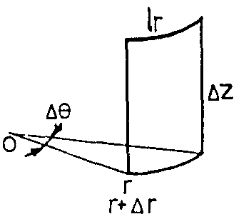
ÁREA DE UN CUADRILÁTERO

$$A=BH$$



$$A_\theta=A_{\theta+\Delta\theta}=\Delta r\,\Delta z$$

ÁREA DE UNA SECCIÓN CILÍNDRICA



$A=l_r\cdot h$

Cuando $r=r$

$l_r=\Delta\theta\, r$; $A_r=\Delta\theta\cdot r\cdot\Delta z$

Cuando $r=r+\Delta r$

$l_r=\Delta\theta(r+\Delta r)$; $A_{r+\Delta r}=\Delta\theta(r+\Delta r)\Delta z$

$\text{Volumen}=\Delta\theta\,\Delta r\,\Delta z\,(r+\Delta r/2)$

FIGURA 2.2 Áreas en las diferentes direcciones de flujo.[7]

MASA QUE SALE DEL VOLUMEN DE CONTROL EN Δt.

$$(\rho\bar{v})_{\theta+\Delta\theta}\Delta r\Delta z\Delta t+(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}\Delta\theta\Delta z\Delta t(r+\Delta r)+(\rho\bar{v})_{z+\Delta z}\Delta\theta\Delta r\Delta t(r+\Delta r/2)$$

MASA ACUMULADA EN EL VOLUMEN DE CONTROL EN Δt.

$$Mvc_{t+\Delta t} - Mvc_{t}$$

$$\Delta r\Delta z\Delta\theta(r+\Delta r/2)(\phi s\rho)_{t+\Delta t} - \Delta r\Delta z\Delta\theta(r+\Delta r/2)(\phi s\rho)_{t}$$

Sustituyendo las masas respectivas en la ecuación de conservación de masa, se obtiene:

$$\left[(\rho\bar{v})_{\theta}-(\rho\bar{v})_{\theta+\Delta\theta}\right]\Delta r\Delta z\Delta t+\left[(\rho\bar{v})_{r}-(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}\right]\Delta\theta\Delta z\Delta t\, r+$$

$$-(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}\Delta\theta\Delta z\Delta r\Delta t+\left[(\rho\bar{v})_{z}-(\rho\bar{v})_{z+\Delta z}\right]\Delta\theta\Delta r\Delta t(r+\Delta r/2)=$$

$$\left[(\rho s\phi)_{t+\Delta t}-(\rho s\phi)_{t}\right]\Delta r\Delta z\Delta\theta(r+\Delta r/2)$$

Reordenando los términos, se tiene:

$$-\left[(\rho\bar{v})_{\theta+\Delta\theta}-(\rho\bar{v})_{\theta}\right]\Delta r\Delta z\Delta t-\left[(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}-(\rho\bar{v})_{r}\right]\Delta\theta\Delta z\Delta t\, r$$

$$-(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}\Delta\theta\Delta z\Delta r\Delta t-\left[(\rho\bar{v})_{z+\Delta z}-(\rho\bar{v})_{z}\right]\Delta\theta\Delta r\Delta t(r+\Delta r/2)$$

$$\left[(\rho s\phi)_{t+\Delta t}-(\rho s\phi)_{t}\right]\Delta r\Delta z\Delta\theta(r+\Delta r/2)$$

dividiendo entre $\Delta r\Delta z\Delta\theta\Delta t(r+\Delta r/2)$

$$-\frac{\left[(\rho\bar{v})_{\theta+\Delta\theta}-(\rho\bar{v})_{\theta}\right]}{\Delta\theta\,(r+\Delta r/2)}-\frac{\left[(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}-(\rho\bar{v})_{r}\right]r}{\Delta r\,(r+\Delta r/2)}-\frac{(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}}{r+\Delta r/2}$$

$$-\frac{\left[(\rho\bar{v})_{z+\Delta z}-(\rho\bar{v})_{z}\right]}{\Delta z}=\frac{\left[(\rho s\phi)_{t+\Delta t}-(\rho s\phi)_{t}\right]}{\Delta t}$$

Aplicando los conceptos de la derivada, y tomando límites cuando $\Delta\theta, \Delta z, \Delta r$ y $\Delta t \longrightarrow 0$

$$\frac{\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\left[(\rho\bar{v})_{\theta+\Delta\theta}-(\rho\bar{v})_{\theta}\right]}{\Delta\theta}}{\lim\limits_{\Delta r\to 0}(r+\Delta r/2)}+\frac{\lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{\left[(\rho\bar{v})_{r+\Delta r}-(\rho\bar{v})_{r}\right]r}{\Delta r}}{\lim\limits_{\Delta r\to 0}(r+\Delta r/2)}+\lim_{\Delta r\to 0}\frac{(\rho v)_{r+\Delta r}}{(r+\Delta r/2)}-$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\rho\bar{v})_{z+\Delta z}-(\rho\bar{v})_{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\rho s\phi)_{t+\Delta t}-(\rho s\phi)_{t}}{\Delta t}$$

Se obtiene la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{1}{r}\left((\rho\bar{v})+\frac{r\,\partial(\rho\bar{v})}{\partial r}\right)+\frac{1\,\partial(\rho\bar{v})}{r\,\partial\theta}+\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial z}\pm\frac{q^{*}\rho}{vol}=-\frac{\partial(\rho s\phi)}{\partial t}$$

Haciendo un cambio de variable:

$$\frac{d(ux)}{dx}=u\frac{dx}{dx}-x\frac{du}{dx}\quad ;\quad u=\rho\bar{v}\quad ;\quad x=r$$

Sustituyendo:

$$\frac{d(ux)}{dx}=\rho\,\bar{v}+r\frac{d(\rho\bar{v})}{dr}$$

Entonces la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r)(\rho\bar{v})}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial z}\pm\frac{q^{*}\rho}{vol}=-\frac{\partial(\rho s\phi)}{\partial t}$$

De la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas eliminamos el término que se encuentra en función de θ.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r)(\rho\bar{v})}{\partial r}+\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial z}\pm\frac{q^{*}\rho}{vol}=-\frac{\partial(\rho s\phi)}{\partial t} \qquad (1)$$

ii) ecuación de movimiento

Es la que nos relaciona la velocidad del fluido en el medio poroso con el gradiente de presiones. Dicha ecuación se conoce como la ley de Darcy.

a) Para flujo en la dirección "r":

$$\bar{V}_r=-\frac{K_r}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad (2)$$

b) Para flujo en la dirección "z":

$$\bar{V}_z=-\frac{K_z}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r)\left(\rho\left(-\frac{K_r\partial P}{\mu\partial r}\right)\right)}{\partial r}\right]+\frac{\partial\left(\rho\left(-\frac{K_z\partial P}{\mu\partial z}\right)\right)}{\partial z}\pm\frac{q^{*}\rho}{vol}=-\frac{\partial(\rho s\phi)}{\partial t} \qquad (4)$$

iii) ecuación de estado

Es la que nos relaciona a la densidad como una función de presión y temperatura.

$$\rho=\rho(P,t)$$

la ecuación considerada es para fluidos compresibles (gases reales).

$$\rho=\frac{PM}{ZRT} \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left((r)\left(\frac{PM\,K_r\partial P}{ZRT\mu\partial r}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{PM\,K_z\partial P}{ZRT\mu\partial}\right)\pm\frac{q^*}{vol}\frac{PM}{ZRT}=S_g\phi\frac{\partial\left(\frac{PM}{ZRT}\right)}{\partial t}$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por RT/M:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r)}{\partial r}\frac{K_rP}{\mu Z}\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K_zP}{\mu Z}\frac{\partial P}{\partial z}\right)\pm\frac{q^*P}{vol\,Z}=\phi S\frac{\partial\left(\frac{P}{Z}\right)}{\partial t} \qquad (6)$$

de la definición de la derivada:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{Z}\right)}{\partial t}=\frac{\partial\left(\frac{P}{Z}\right)}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{Z}\right)}{\partial P}=\frac{Z\frac{\partial P}{\partial P}-P\frac{\partial Z}{\partial P}}{Z^2}=\frac{1}{Z}-\frac{P\,\partial Z}{Z^2\partial P} \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (6) y factorizando el segundo término:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rK_r\,\frac{P}{\mu Z}\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{K_z}{\mu}\frac{P}{Z}\frac{\partial P}{\partial Z}\right)\pm\frac{q^{*}P}{\mathrm{vol}\,Z}=\phi S\frac{P}{Z}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) \quad (8)$$

Tomando en cuenta la definición de compresibilidad de los gases reales[5]:

$$C_g=\frac{1}{P}-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial P} \quad (9)$$

La no-linealidad de la ecuación (8) nos permite utilizar la ecuación del pseudopotencial[18] de los gases para cuasilinelizarla:

$$m(p)=2\int\frac{P\,\partial P}{\mu(p)z(p)}$$

Derivando y despejando:

$$\partial m(p)=\frac{2\,P\partial P}{\mu(p)z(p)} \quad (10)$$

Sustituyendo (9) y (10) en (8) y simplificando:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,K_r\,\frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\,\frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial z}\right)\pm\frac{q^{*}P}{\mathrm{vol}\,Z}=\frac{1}{2}\,\phi\,S\mu\frac{\partial m}{\partial t} \quad (11)$$

Haciendo :

$$P_{cy}q_{cy}=Z_{cy}nRT_{cy} \qquad y \qquad P_{cs}q_{cs}=Z_{cs}nRT_{cs}$$

Despejando "n":

$$n = \frac{P_{cy} q_{cy}}{Z_{cy} R T_{cy}}$$

$$n = \frac{P_{cs} q_{cs}}{Z_{cs} R T_{cs}}$$

Igualando:

$$\frac{P_{cy} q_{cy}}{Z_{cy}} = \frac{P_{cs} q_{cs} T_{cy}}{T_{cs}} \qquad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11) y multiplicando por 2 ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r K_r \frac{\partial m}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial m}{\partial z}\right) \pm \frac{2 P_{cs} q_{cs} T_{cy}}{vol \quad T_{cs}} = C_g S_g \mu_g \phi \frac{\partial m}{\partial t} \qquad (13)$$

ecuación de difusividad que representa el flujo de gas en un medio poroso expresado en términos del potencial de los gases reales.

2.3 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Para definir completamente el problema falta establecer las condiciones iniciales y de frontera, las cuales son:

i)Condiciones iniciales:

$m(r,\theta,z) = m_i$

ii)Condiciones de frontera:

En el intervalo disparado del pozo se especifica el gasto de gas:

$$q_{g(t)} = 2\pi \int_{Zo}^{Zb} \left(\gamma_g \; r \; \frac{\partial m_o}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_w} dz$$

Fuera del intervalo disparado:

$$\left.\frac{\partial m}{\partial r}\right|_{r=r_w} = 0$$

En la frontera, r=re se tiene que :

$$\left.\frac{\partial m}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0$$

En la cima y base de la formación:

$$\left.\frac{\partial m}{\partial r}\right|_{z=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial m}{\partial r}\right|_{z=h} = 0$$

2.4 CONSIDERACIONES DEL MODELO

Una vez que se ha establecido la ecuación de difusividad se hace necesario establecer las suposiciones inherentes que se tienen al desarrollar el modelo matemático, estas son:

-Yacimiento cilíndrico con radio igual a re

-Pozo en el centro del cilindro con radio igual a rw

-Flujo laminar isotérmico

-Flujo monofásico en estado transitorio

-Medio poroso incompresible

-Se desprecian efectos gravitacionales y capilares

-No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso

-Utiliza una malla con nodos centrados y espaciamiento logarítmico en la dirección "r".

-En la dirección "z", la malla tiene una distancia uniforme con nodos centrados

-Se considera término fuente o sumidero

-La viscosidad y la compresibilidad, solo son función de la presión y se evaluan al inicio de cada paso de tiempo

-Se emplea el potencial de los gases reales

-Las condiciones de frontera en la dirección radial y vertical se simulan haciendo las transmisividades iguales a cero

"...cuando puede medir aquello de lo que está hablando, y expresarlo con números, sabe algo acerca de ello; pero cuando no puede medirlo, cuando no puede expresarlo con números, su conocimiento es pobre y poco satisfactorio, puede ser el principio del conocimiento; pero apenas habrá avanzado en su pensamiento hacia el nivel científico."

Lord Kelvin.

CAPÍTULO 3
discretización en diferencias finitas

3.1 PROCESO DE DISCRETIZACIÓN

Las ecuaciones que se emplean, se resuelven en forma --- numérica implicando con ello, que se determinen los parámetros dependientes (presiones y saturaciones) en puntos discretos en espacio y tiempo.

La discretización del espacio se hace al dividir el yacimiento en un número determinado de celdas, las cuales son generalmente rectangulares como puede apreciarse en la figura (3.1).

La discretización del tiempo se realize al tomar intervalos del mismo para cada uno de los cuales el problema es resuelto (figura 3.2).

La transformación de una ecuación diferencial continua a una forma discreta se hace generalmente utilizando el método de diferencias finitas, que consiste en sustituir las derivadas de la ecuación diferencial por formulas de derivación. Así pues, - las ecuaciónes diferenciales en derivadas parciales son reemplazadas por su equivalente en diferencias finitas.

a) diferencia finita progresiva

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O\ \Delta x$$

b) diferencia finita regresiva

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O\ \Delta x$$

c) diferencia finita central

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O\ \Delta x^2$$

d) segunda derivada

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

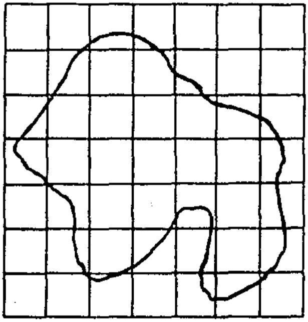


FIGURA 3.1 DISCRETIZACIÓN EN ESPACIO.

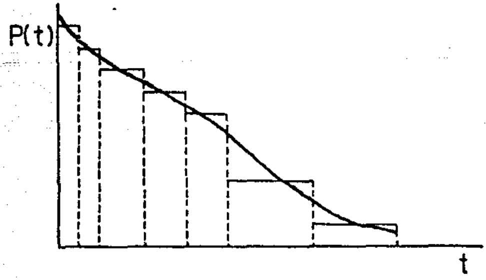


FIGURA 3.2 DISCRETIZACIÓN EN TIEMPO.

La ecuación (13) no tiene solución analítica por lo que será resuelta numéricamente, utilizando la técnica de diferencias finitas.

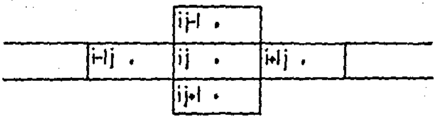
Tomando el segundo término del lado izquierdo en forma particular para discretizarlo :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial m}{\partial z}\right)$$

haciendo:

$$K_z\,\frac{\partial m}{\partial z} = U$$

recordando y suponiendo una malla como a continuación esquematizamos :



tomando diferencias finitas centrales:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_j = \frac{U_{ij+1/2} - U_{ij-1/2}}{\Delta Z_j} \tag{14}$$

$$\Delta Z_j = (j+1) - (j-1) \tag{15}$$

donde:

$$U_{ij+1/2} = K_{j+1/2}\left.\frac{\partial m}{\partial z}\right|_{j+1/2} \tag{16}$$

$$U_{ij-1/2} = K_{j-1/2}\left.\frac{\partial m}{\partial z}\right|_{j-1/2} \tag{17}$$

de:

$$\left.\frac{\partial m}{\partial z}\right|_{j+1/2} = \frac{m_{ij+1} - m_{ij}}{\Delta Z_{j+1/2}} \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial m}{\partial z}\right|_{j-1/2} = \frac{m_{ij} - m_{ij-1}}{\Delta Z_{j-1/2}} \tag{19}$$

Sustituyando (15) , (16) y (17) en (14)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_j = \frac{K_{j+1/2}\left.\frac{\partial m}{\partial z}\right|_{j+1/2} - K_{j-1/2}\left.\frac{\partial m}{\partial z}\right|_{j-1/2}}{\Delta Z_j} \qquad (20)$$

Sustituyenco (18) y (19) en (20) y acomodando términos:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_j = \frac{1}{\Delta z_j}\left[\frac{K_{j+1/2}}{\Delta z_{j+1/2}}(m_{ij+1}\ \ m_{ij}) - \frac{K_{j-1/2}}{\Delta z_{j-1/2}}(m_{ij}\ \ m_{ij-1})\right] \qquad (21)$$

Ahora, para el primer término del lado izquierdo, haremos un cambio de variacles:

$$X = r^2 \qquad y \qquad \frac{dx}{dr} = 2r$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dx}2r = 2r\frac{d}{dx} \qquad \text{como } X = r^2$$

entonces

$$\frac{d}{dr} = 2r\frac{\partial}{\partial r^2} \qquad (22)$$

recordando que el primer término del lado izquierdo es:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(K_r r \frac{\partial m}{\partial r}\right) \qquad (23)$$

sustituyendo (22) en (23) y simplificando :

$$\frac{2\partial}{\partial r^2}\left(K_r\ r\ \frac{\partial m}{\partial r}\right)$$

si

$$U = K_r\ r\frac{\partial m}{\partial r}$$

de la definición de diferencias finitas centrales:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r^2}\right|_i = \frac{U_{i+1/2} - U_{i-1/2}}{(r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2})} \qquad (24)$$

$$U_{i+1/2} = K\ r|_{i+1/2}\left.\frac{\partial m}{\partial r}\right|_{i+1/2} \qquad (25)$$

$$U_{i-1/2} = K\, r\Big|_{i-1/2} \frac{\partial m}{\partial r}\Big|_{i-1/2} \tag{26}$$

$$\frac{\partial m}{\partial r}\Big|_{i+1/2} = \frac{m_{i+1j} - m_{ij}}{r_{i+1} - r_i} \tag{27}$$

$$\frac{\partial m}{\partial r}\Big|_{i-1/2} = \frac{m_{ij} - m_{i-1j}}{r_i - r_{i-1}} \tag{28}$$

sustituyendo (25) , (26) , (27) y (28) en (24):

$$\frac{\partial U}{\partial r^2}\Big| = \frac{K r\Big|_{i+1/2}\left[\frac{m_{i+1j} - m_{ij}}{r_{i+1} - r_i}\right] - K\, r\Big|_{i-1/2}\left[\frac{m_{ij} - m_{i-1j}}{r_i - r_{i-1}}\right]}{r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}}$$

entonces

$$\frac{2\partial U}{\partial r}\Big|_i = \frac{2}{(r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2})}\left[K r\Big|_{i+1/2}\left(\frac{m_{i+1j} - m_{ij}}{r_{i+1} - r_i}\right) - K r\Big|_{i-1/2}\left(\frac{m_{ij}\ m_{i-1j}}{r_i\ r_{i-1}}\right)\right] \tag{29}$$

Por otro lado, aplicando los principios sobre fórmulas de derivación[10]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{f_i(t + \Delta t) - f_i(t)}{\Delta t}$$

El término del lado derecho de la ecuación (13) en diferencias finitas queda como sigue:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{m_{ij}^{n+1} - m_{ij}^{n}}{\Delta t} \tag{30}$$

El volumen de la celda es :

$$Vc = \pi (r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}) \Delta Z_j$$

donde :

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad r_{i-1/2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}$$

Sustituyendo (21) , (29) y (30) en (13) y multiplicando --- la expresión por el volumen de la celda, se tiene la ecuación - que representa el flujo de fluidos en un medio poroso para un - yacimiento de gas, discretizada por diferencias finitas centrales, tomando en cuenta las condiciones previamente establecidas:

$$2\pi \Delta Z_j \left[K r \Big|_{i+1/2} \left(\frac{m_{i+1j} - m_{ij}}{r_{i+1} - r_i} \right) - K r \Big|_{i-1/2} \left(\frac{m_{ij} - m_{i-1j}}{r_i - r_{i-1}} \right) \right] +$$

$$\pi (r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}) \left[\frac{K}{\Delta Z} \Big|_{j+1/2} (m_{ij+1} - m_{ij}) - \frac{K}{\Delta Z} \Big|_{j-1/2} (m_{ij} \quad m_{ij-1}) \right] \pm$$

$$\frac{2 P_{cs} q_{cs} T_{cy}}{T_{cs}} = \frac{\phi_{ij} (\mu_{ij} C_{ij})^{n+1/2}}{\Delta t} (m^{n+1}_{ij} - m^{n}_{ij}) (\pi (r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}) \Delta Z_j \qquad (31)$$

3.2 ESQUEMAS DE SOLUCIÓN

Una vez que la ecuación diferencial parcial ha sido discretizada, es necesario determinar el tiempo al cual los términos de flujo(derivadas espaciales) se evalúan, y a eso se llama esquema de solución.

a) Esquema Explícito.- En este esquema las presiones y las transmisividades se evalúan al nivel de tiempo conocido " n ".

$$Tx_{i+1/2}^{n}(P_{i+1}^{n}-P_{i}^{n})-Tx_{i-1/2}^{n}(P_{i}^{n}-P_{i-1}^{n})=\frac{\psi}{\Delta t}(P_{i}^{n+1}-P_{i}^{n})$$

b) Esquema Mixto.- En este esquema, las presiones se evalúan al nivel de tiempo "n + 1" y las transmisividades al nivel de tiempo conocido " n ".

$$Tx_{i+1/2}^{n}(P_{i+1}^{n+1}-P_{i}^{n+1})-Tx_{i-1/2}^{n}(P_{i}^{n+1}-P_{i-1}^{n+1})=\frac{\psi}{\Delta t}(P_{i}^{n+1}-P_{i}^{n})$$

c) Esquema Implícito.- En esto esquema, las presiones y transmisividades se evalúan al nivel de tiempo " n + 1".

$$Tx_{i+1/2}^{n+1}(P_{i+1}^{n+1}-P_{i}^{n+1})-Tx_{i-1/2}^{n+1}(P_{i}^{n+1}-P_{i-1}^{n+1})=\frac{\psi}{\Delta t}(P_{i}^{n+1}-P_{i}^{n})$$

3.3 CÁLCULO DE TRANSMISIVIDADES

Transmisividad en la dirección Z.

$$Tz_{ij+1/2}=\pi(r_{i+1/2}^{2}-r_{i-1/2}^{2})\left.\frac{K}{\Delta Z}\right|_{j+1/2} \qquad (32)$$

$$Tz_{ij-1/2}=\pi(r_{i+1/2}^{2}-r_{i-1/2}^{2})\left.\frac{K}{\Delta Z}\right|_{j-1/2} \qquad (33)$$

El término $\left.\frac{K}{\Delta Z}\right|_{j\pm1/2}$ se evalúa mediante un promedio armónico -- debido a que considera flujo lineal en la dirección vertical.

$$\left.\frac{K}{\Delta Z}\right|_{j+1/2}=\frac{(2K_{ij})(K_{ij+1})}{(\Delta Z_{j})(K_{ij+1})+(\Delta Z_{j+1})(K_{ij})} \qquad (34)$$

$$\left.\frac{K}{\Delta Z}\right|_{j-1/2}=\frac{(2K_{ij})(K_{ij-1})}{(\Delta Z_{j-1})(K_{ij})+(\Delta Z_{j})(K_{ij-1})} \qquad (35)$$

Transmisividad en la dirección " r ".

$$Tr_{i+1/2} = \frac{2\pi\Delta Z}{\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}} Kr_{i+1/2}$$

$Tr_{i+1/2}$ puede ser expresado como dos transmisividades en serie:

$$\frac{1}{Tr_{i+1/2}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \tag{36}$$

Donde:

$$T_1 = \frac{2\pi\Delta Z}{\ln\frac{r_{i+1}}{r_{i+1/2}}} K_{i+1} \quad y \quad T_2 = \frac{2\pi\Delta Z}{\ln\frac{r_{i+1/2}}{r_i}} K_i$$

de la ecuación (36):

$$Tr_{i+1/2} = \frac{T_1 \quad T_2}{T_1 + T_2} \tag{37}$$

sustituyendo T1 y T2 en (36) se tiene:

$$Tr_{i+1/2} = \frac{2\pi\Delta Z K_{i+1} K_i}{K_{i+1}\ln\frac{r_{i+1/2}}{r_i} + K_i \ln\frac{r_i}{r_{i+1/2}}} \tag{38}$$

Del mismo modo:

$$Tr_{i-1/2} = \frac{2\pi\Delta Z K_i K_{i-1}}{K_i \ln\frac{r_{i-1/2}}{r_{i-1}} + K_{i-1}\ln\frac{r_i}{r_{i-1/2}}} \tag{39}$$

Sustituyendo (32), (33), (38) y (39) en (31) y haciendo:

$$\Gamma_{ij} = \pi \phi_{ij} (r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}) \Delta Z_j (\mu_{ij} C_{ij})^{n+1/2}$$

Aplicando un Esquema Mixto se tiene la ecuación siguiente:

$$Tr^{n}_{i+1/2}(m^{n+1}_{i+1j}-m^{n+1}_{ij})-Tr^{n}_{i-1/2}(m^{n+1}_{ij}\ m^{n+1}_{i-1j})+Tz^{n}_{ij+1/2}(m^{n+1}_{ij+1}-m^{n+1}_{ij})-$$

$$Tz^{n}_{ij-1/2}(m^{n+1}_{ij}-m^{n+1}_{ij-1})\pm\frac{2\,Pcs\,q_{cs}\,Tcy}{Tcs}=\frac{\Gamma ij}{\Delta t}(m^{n+1}_{ij}-m^{n}_{ij}) \qquad (40)$$

3.4 TRANSFORMACIÓN DE UNIDADES

Como hasta ahora se ha dejado de lado la consistencia de las unidades, es preciso basarse en la ecuación (13) para revisar las constantes involucradas, así como utilizar unidades de campo más usuales.

Recordando que la ecuación de Darcy, es:

$$q = \frac{K\ A}{\mu}\ \frac{dP}{dr} \qquad y \qquad q = \frac{K\ A}{\mu}\ \frac{dP}{dz}$$

que se realizó bajo ciertas condiciones, para lo cual se utilizaron las siguientes unidades para cada parámetro:

$q(cm^3/\ seg)$
$K(Darcy)$
$\mu(cp)$
$A(cm^2)$
$dP(atmósferas)$
z ó r (cm)
$t(seg)$

las cuales no se manejan en la práctica; sin embargo, es posible encontrar una constante que nos permita utilizar las siguientes unidades, que son más comunes:

$q(m^3/día)$
$K(mD)$
$\mu(cp)$
$A(m^2)$
$dP(Kg/cm^2)$
z ó r (m)
$t(días)$

Se procede como sigue:

$1 m^3 = 1\ 000\ 000\ cm^3$

$1\ día = 86400\ seg$

$q(cm^3/seg) = q'(m^3/día)\left(\frac{1\ 000\ 000\ cm^3}{1 m^3}\right)\left(\frac{1\ día}{86400\ seg}\right) = 11.5741\ q'$

$k(Darcy) = K'(mD)(Darcy/1\ 000\ mD) = 0.0010\ K'$

$U(cp) = U'(cp) = 1\ U'$

$A(cm^2) = A'(m^2)\left(\frac{(100\ cm)^2}{1 m^2}\right) = 10\ 000\ A'$

$P(at) = P'(Kg/cm^2)\left(\frac{14.22\ lb/pg^2}{Kg/cm^2}\right)\left(\frac{atm}{14.7\ lb/pg^2}\right) = 0.9673\ P'$

$s(cm) = s'(m)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right) = 100\ s'$

$t(seg) = t'(día)\left(\frac{86\ 400\ seg}{día}\right) = 86\ 400\ t'$

$vol(cm^3) = vol'(m^3)\left(\frac{(100\ cm)^3}{1 m^3}\right) = 1\ 000\ 000\ vol'$

$c(atm^{-1}) = c'(1/Kg/cm^2)\left(\frac{Kg/cm^2}{14.22\ lb/pg^2}\right)\left(\frac{14.7\ lb/pg^2}{atm}\right) = 1.0338\ c'$

Sustituyendo en la ecuación (13), y simplificando:

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r' K_r' \frac{\partial m}{\partial r'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(K_z' \frac{\partial m}{\partial r'}\right) \pm \frac{239.2952\, P'_{cs} q'_{cs} T_{cy}}{vol'\quad T_{cs}}$$

$$= 119.6461\, \phi\, S_g \mu_g C_g \frac{\partial m}{\partial t}$$

De lo anteriormente expuesto, se conocen las constantes siguientes:

C1= 239.2952

C2= 119.6461

Estas constantes se trasladan a la ecuación (40), donde se utilizó un esquema de solución mixto.

$$T_{r_{i+1/2}}^{n}(m_{i+1j}^{n+1}-m_{ij}^{n+1})-T_{r_{i-1/2}}^{n}(m_{ij}^{n+1}-m_{i-1j}^{n+1})+T_{z_{ij+1/2}}^{n}(m_{ij+1}^{n+1}-m_{ij}^{n+1})-$$

$$T_{z_{ij-1/2}}^{n}(m_{ij}^{n+1}-m_{ij-1}^{n+1})\pm\frac{C1Pcs\,q_{cs}Tcy}{Tcs}=\frac{C2\Gamma ij}{\Delta t}(m_{ij}^{n+1}-m_{ij}^{n})$$

Haciendo:

$$C3=\frac{C1Pcs\,q_{cs}Tcy}{Tcs} \quad y \quad C4=\frac{C2\Gamma ij}{\Delta t}$$

desarrollando, agrupando los términos comunes, y simplificando, se obtiene la ecuación siguiente:

$$T_{r_{i+1/2}}^{n}m_{i+1j}^{n+1}-(T_{r_{i+1/2}}^{n}+T_{r_{i-1/2}}^{n}+T_{z_{ij+1/2}}^{n}+T_{z_{ij-1/2}}^{n}+C4)\,m_{ij}^{n+1}+$$

$$T_{r_{i-1/2}}^{n}m_{i-1j}^{n+1}+T_{z_{ij+1/2}}^{n}m_{ij+1}^{n+1}+T_{z_{ij-1/2}}^{n}m_{ij-1}^{n+1}=-C4\,m_{ij}^{n}\pm C3$$

Se hace un cambio de variables, de la siguiente manera:

$$A=T_{r_{i+1/2j}} \qquad B=T_{r_{i-1/2j}} \qquad C=T_{z_{ij+1/2}}$$

$$D=T_{z_{ij-1/2}} \qquad E=-\Sigma(A+B+C+D+\dot{C}4)$$

$$F_{ij}=-C4\,m_{ij}\pm C3$$

La ecuación matricial resultante, queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned}&A(m_{i+1j})+B(m_{i-1j})+C(m_{ij+1})+D(m_{ij-1})+\\&E(m_{ij})=F_{ij} \qquad\qquad (41)\end{aligned}}$$

Aplicando la ecuación (41) a cada una de las celdas de la - malla se genera un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución es posible gracias a los diferentes métodos.

"Nadie será capaz de leer el buen libro del Universo si no comprende su lenguaje, que es el de la matemática."

Galileo Galilei

CAPÍTULO 4
método de solución

4.1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Muchos problemas relacionados con el campo de la ingeniería se pueden expresar en términos de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Tales sistemas se representan en forma matricial como Ax=b, donde A indica una matriz cuadrada de orden n por n, b es el vector columna de n términos independientes y x un vector columna de n términos desconocidos. De tal manera que un sistema de ecuaciones algebraicas lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}X_1-a_{12}X_2-a_{13}X_3- \;\dots\; -a_{1n}X_n = b_1 \\
a_{21}x_1-a_{22}X_2-a_{23}X_3- \;\dots\; -a_{2n}X_n = b_2 \\
a_{31}X_1-a_{32}X_2-a_{33}X_3- \;\dots\; -a_{3n}X_n = b_3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n1}X_1-a_{n2}X_2-a_{n3}X_3- \;\dots\; -a_{nn}X_n = b_n
\end{array}
\qquad (42)
$$

La solución del sistema de ecuaciones es un conjunto de n valores $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones.

En cursos de Algebra Lineal, se han visto diferentes técnicas para la solución de tales sistemas. El presente trabajo utiliza el método iterativo LSOR.

4.2 METODO DE SOBRE-RELAJACIÓN LINEAL (LSOR)

La sobre-relajación lineal Sucesiva (LSOR) es un método iterativo que tuvo su origen en una de las técnicas más antiguas de solución de sistemas de ecuaciones lineales - el método de Gauss-Seidell -el cual fué estudiado teóricamente, formalizado y publicado en 1954 por Daniel Young.

El método SOR ha gozado de una popularidad limitada en la solución de problemas de la industria petrolera. Ha tenido aplicación en el campo de la física nuclear, donde Varga[16] y Wachspress han tenido su campo de trabajo. Una posible razón para la carencia de popularidad en la industria petrolera es el factor de sobre-relajación crítico en los problemas de yacimientos y la dificultad del cómputo económico de este factor. Estimandose sin embargo, para el área de yacimientos como $1<w<2$.

Por motivos de brevedad, las ecuaciones SOR son ilustradas esquemáticamente sólo para el sistema de dos dimensiones. La formulación detallada de las ecuaciones SOR actualmente usadas en este trabajo pueden ser representadas así:

$$A\Delta^2\underline{u}-\underline{Q}=C\Delta t\,\underline{u} \qquad (43)$$

La forma de estas ecuaciones en dos dimensiones es :

$$A\underline{u}_{i+1j}+A\underline{u}_{i-1j}+A\underline{u}_{ij+1}+A\underline{u}_{ij-1}-(4A+C)\underline{u}_{ij}+\underline{b}_{ij}=0 \qquad (44)$$

donde:

$$\underline{b}_{ij} = Q_{ij} - C\underline{u}_{ij}$$

La línea SOR usada aquí para la solución de la ecuación (43) es:

$$\underline{U}_{ij}^{(\ell+1)} = (4A+C)^{-1}\left(A\underline{u}_{i+1j}^{(\ell+1)} + A\underline{u}_{i-1j}^{(\ell+1)} + A\underline{u}_{ij+1}^{(\ell+1)} + A\underline{u}_{ij-1}^{(\ell+1)} + \underline{b}_{ij} \right)$$

y

$$\underline{U}_{ij}^{(\ell+1)} = w\,\underline{u}_{ij}^{(\ell+1)} + (1-w)\,\underline{u}_{ij}^{(\ell)}$$

La serie de ecuaciones que representan una malla o hilera es simplemente un juego de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Su matriz toma la forma tridiagonal enlistada en la ecuación (45), haciendo más veloz la resolución de una hilera.

Utilizar el método iterativo (o de barrido) LSOR consiste entonces en que de la misma manera en que se solucionó para una hilera el tratamiento sistemático de las demás hileras es igual.

$$\begin{bmatrix} b_1 c_1 & & \\ a_2 b_2 c_2 & & \\ & a_3 b_3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (45)$$

4.3 ALGORITMO DE THOMAS[14]

El algoritmo de Thomas resuelve matrices tridiagonales de la forma de la ecuación (45), cuya matriz de coeficientes puede ser factorizada como el producto de dos matrices, A=LU.

Si esto es cierto cada elemento de la matriz LU será igual al elemento respectivo de la matriz A, obteniendose:

$$\alpha_1=b_1$$

$$\beta_i=c_i/\alpha_i \qquad i=1,2,3,\ldots,(n-1)$$

$$\alpha_i=b_i-a_i\beta_{i-1} \qquad i=2,3,4,\ldots,n$$

obtenemos expresiones para las α's y β's elementos de las matrices LU.

Un sistema de ecuaciones Ax=f puede expresarse como LUx=f, haciendo Ux=y se obtendrá el sistema LY=f, el cual se resuelve en forma directa por sustitución hacia adelante:

$$y_1=f_1/\alpha_1$$

$$y_i=(f_i-a_iy_{i-1})/\alpha_i, \qquad i=2,3,\ldots,n$$

Una vez calculado el vector Y se puede evaluar directamente x en el sistema Ux=y, por sustitución hacia atrás:

$$X_n=Y_n$$

$$X_i=Y_i-\beta_iX_{i+1} \qquad i=n-1,n-2,\ldots,1$$

"Para establecer una comparación, podríamos decir que crear una nueva teoría no es como destruir una vieja choza y levantar en su lugar un rascacielos. Es más bien como trepar a una montaña, divisar nuevos y más amplios horizontes, descubrir relaciones inesperadas entre nuestro punto de partida y el lugar de donde partimos, aunque éste paresca pequeño y forme una parte diminuta de nuestro grán campo visual, ganado al dominar los obstaculos en nuestro arriesgado ascenso".

Einstein e Infeld.

CAPÍTULO 5

programa de cõmputo

5.1 CORRELACIONES

El primer problema que surge en relación con la determinación de las propiedades de los fluidos, es la carencia de análisis PVT apropiados de laboratorio. El análisis con que generalmente se cuenta está realizado a la temperatura del yacimiento, bajo condiciones de separación diferencial: sin embargo, al escurrir el gas a través de las tuberías de producción y de la línea de descarga, su temperatura disminuye y el gas libre puede sufrir cambios significativos.

Para conocer, a diferentes presiones y temperaturas, las propiedades del gas, usamos generalmente las correlaciones. Al usar correlaciones se sobreentiende que se obtendrán valores aproximados a las propiedades mencionadas, lo que en sí acarrea un margen de error.

Las correlaciones utilizadas son las siguientes:

a) Correlación del Factor de Volumen de Gas.

La correlación del factor de volumen del gas proviene de la ecuación de los gases reales y que se expresa de la siguiente manera:

$$Bg = \frac{0.02825\ Z\ (T + 460)}{P}$$

donde:

$T-(F), P(lb/pg^2), Z(adim), Bg(pie^3/pie^3)$

b) Correlación de la densidad del gas[17].

La correlación de la densidad del gas está dada por la ecuación:

$$\rho_g = \frac{0.0764\ \gamma rg}{Bg} = \frac{2.7044 P\ \gamma rg}{Z(T + 460)}$$

donde:

γrg (adim), Bg (pie^3/pie^3), $\rho g(lbm/pie^3)$

c) Correlación para la Viscosidad del gas[17].

La correlación de la viscosidad se expresa en las siguientes ecuaciones:

$$X=3.5+\frac{986}{T+460}+0.2897\ \gamma rg$$

$$Y=2.4-0.2\ X$$

$$K=\frac{(9.4+0.5794\,\gamma rg)\,(T+460)^{1.5}}{209+550.4\ \gamma rg+(T+460)}$$

$$\mu g=K\ (10^{-4})\ \exp(\ (x)\ (\ \rho g/\ 62.428)^{y})$$

donde:

T (F), γrg(adim), μg(cp)

d) Correlación para calcular el Factor de compresibilidad del gas.

El factor de compresibilidad del gas se calcula mediante las ecuaciones de Redlich-Kwong.

$$PTC=147.78831+42.16896\,\gamma rg+75.05057\,\gamma rg^2$$

$$PPC=51.99046-10.75358\,\gamma rg+4.845496\,\gamma rg^2$$

$$A=(\ 0.4278/PPC\ )^{0.5}\ (\ PTC/T)^{1.25}$$

$$B=(\ 0.08667\ PTC\ )\ /\ (PPC\ T\ )$$

$$F=1\ /\ (\ 1-B*P/Zs\ )-A^2*P\ /\ (\ Zs*(\ 1-B*P/Zs\ )\ )-Zs$$

$$Z=A^2*P\ /\ (\ Zs^2*\ (\ 1+B*P/Zs\ )^{2}\ )$$

$$Z=Z-B+P\ /\ (\ Zs^2*\ (\ 1-B*P\ /\ Zs\ )^{2}\ )-1$$

$$Z=Zs-F\ /\ Z$$

donde:

T (F), γrg (adim), Z (adim)

e) Error por el Método de Balance de Materia

Un criterio para determinar la compatibilidad de los valores de presión y de saturación que se obtienen de una simulación es el error por el método de Balance de Materia. Una forma de balance de materia es conociendo los volúmenes de gas en el yacimiento al principio y al final del intervalo de tiempo.

La diferencia entre los valores deberá ser igual a la producción total durante el intervalo.

$$MBEI=\frac{\sum_{1}^{m}\left(V\,\phi\left(\frac{Sg}{Bg}\right)\right)^{n}-\sum_{1}^{n}\left(V\,\phi\left(\frac{Sg}{Bg}\right)\right)^{n+1}}{q_{g}\Delta t}$$

5.2 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA[5]

Cada corrida se hace en dos etapas. En la primera denominada de inicialización, se leen los datos que sirven para fijar en el modelo las condiciones iniciales del yacimiento. Una vez que se ha inicializado el programa, éste procede a llevar a cabo la etapa de recurrencia que consiste en resolver las ecuaciones de flujo de fluidos.

El procedimiento de cálculo utilizado puede resumirse de la siguiente manera:

1) ETAPA DE INICIALIZACIÓN

a) Lee la geometría de la malla

b) Lee la distribución de porosidades y permeabilidades.

c) Lee la distribución de saturaciones

d) Calcula el volumen de gas

e) Calcula las transmisividades

2) ETAPA DE RECURRENCIA

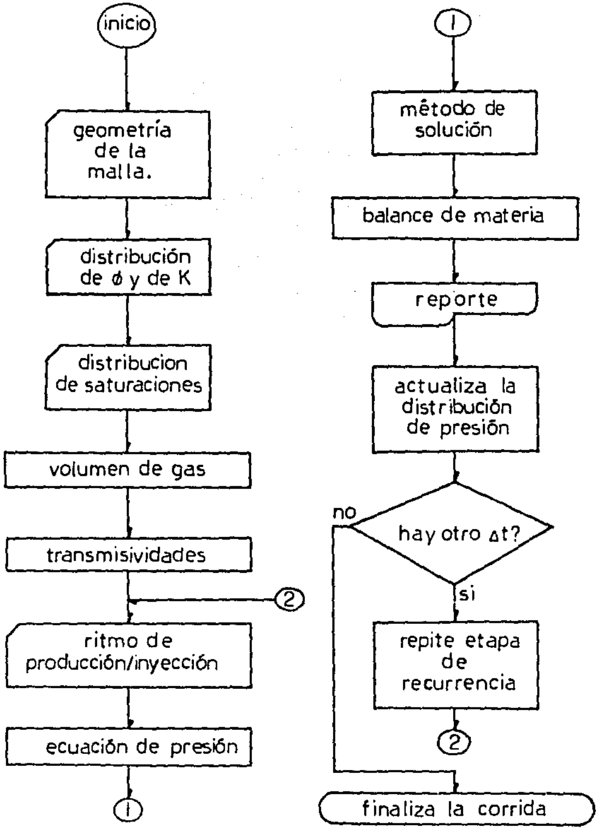


FIGURA 5.1 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO DE UN SIMULADOR PARA UN YACIMIENTO DE GAS.

a) Lee los datos con la información de los pozos

b) Calcula los coeficientes de la ecuación de presión

c) Resuelve la ecuación de presión

d) Hace el cálculo del balance de materia

e) Imprime el reporte

f) Actualiza la presión y las saturaciones

g) Repite la etapa de recurrencia

De esta manera el simulador calculará la distribución de presiones a lo largo del yacimiento en función del tiempo. En la figura (5.1) se puede observar un diagrama de flujo que da idea de cómo trabaja el modelo.

"Un solo número no es suficiente para describir algunos conceptos físicos. El darse cuenta de este hecho señaló un avance indudable en la investigación científica."

Einstein e Infeld.

CAPÍTULO 6
ejemplo de aplicación

6.1 DATOS DE LA PRUEBA DE VALIDACIÓN

El objetivo de la aplicación del modelo a datos reales de una prueba de decremento de presión, es mostrar basicamente el funcionamiento del modelo. La información suministrada corresponde al pozo FENIX 2[15].

Se presenta además una comparación de los resultados obtenidos con el modelo, con los obtenidos en la prueba real del FENIX 2[15].

Se hizo una corrida para simular el comportamiento de un yacimiento de gas en una prueba de decremento de presión en un yacimiento homogéneo e isótropo. Los datos utilizados en el ejemplo fueron:

-Compresibilidad del gas	6.0339×10^{-4}	(kg/cm^2)
-Densidad relativa del gas	0.77	
-Espesor	104.97	m
-Gasto de gas	230017.745	$(m^3/día)$
-Número de bloques en la dir. -r	10	
-Número de bloques en la dir. -z	1	
-Permeabilidad en la dirección -r	5.6	md
-Permeabilidad en la dirección -z	5.6	md
-Porosidad en la dirección -r	0.061	
-Porosidad en la dirección -z	0.061	
-Presión a c. s.	1.033	(kg/cm^2)
-Presión inicial	612.0197	(kg/cm^2)
-Radio de drene	799.80	m
-Radio del pozo	0.082296	m
-Saturación inicial de gas	0.5	
-Temperatura a c. s.	288.71	^oK
-Temperatura de yacimiento	429.3	^oK
-Viscosidad del gas	0.03596	cp
-Incremento de presión	0.00521	días
-Tiempo de simulación	0.16667	días

"Ah, pero solo el hombre es capaz
de superar lo que alcanza, sino, ¿para qué
esta el firmamento?"

Robert Browning

CAPÍTULO 7
resultados y conclusiones

Los resultados obtenidos al aplicar el modelo a una prueba de decremento de presión de un caso real, se muestran en la figura 7.1. Así mismo para su validación se comparan los datos en la tabla 7.1., donde se puede apreciar la mínima diferencia de presiones entre los resultados obtenidos con el modelo y los de la referencia (15). Se efectuaron diferentes corridas variando los radios de drene bajo diferentes políticas de explotación como se muestra en las figuras 7.2 y 7.3. Concluyendo de esta manera, que se trata de una herramienta matemática confiable para estudiar el comportamiento del yacimiento en las cercanías de un pozo de gas, que permite simular diferentes pruebas de presión, así como estudios relacionados con el radio de influencia del pozo, y la determinación de ritmos de explotación adecuados; constituyendose así como una herramienta de diagnóstico de alta confiabilidad.

TABLA 7.1

RESULTADOS DEL SIMULADOR		DATOS DEL TRABAJO	
t(días)	pwf(kg/cm^2)	t(días)	pwf(kg/cm^2)
0.00000	611.48	0.00000	611.48
0.00521	594.76	0.00071	607.89
0.01042	592.76	0.00138	604.39
0.01563	591.76	0.00208	600.99
0.02083	591.09	0.00279	598.99
0.02604	590.58	0.00358	597.19
0.03125	590.17	0.00417	595.09
0.03646	589.83	0.00488	593.29
0.04167	589.54	0.00554	591.89
0.04688	589.29	0.00625	591.19
0.05208	589.07	0.00696	590.79
0.05729	588.88	0.00763	590.39
0.06250	588.75	0.01042	588.99
0.06771	588.60	0.01388	588.29
0.07292	588.45	0.02083	587.99
0.07813	588.32	0.04167	587.59
0.08333	588.18	0.06250	587.59
0.08854	588.06	0.08333	587.59
0.09375	587.95	0.12500	587.59
0.09896	587.84	0.15625	587.59
0.10417	587.73	-	-
0.10938	587.63	-	-
0.11458	587.54	-	-
0.11979	587.44	-	-
0.12500	587.35	-	-
0.13021	587.27	-	-
0.13542	587.19	-	-
0.14063	587.11	-	-
0.14583	587.03	-	-
0.15104	586.96	-	-
0.15625	586.89	-	-
0.16146	586.82	-	-
0.16667	586.76	-	-

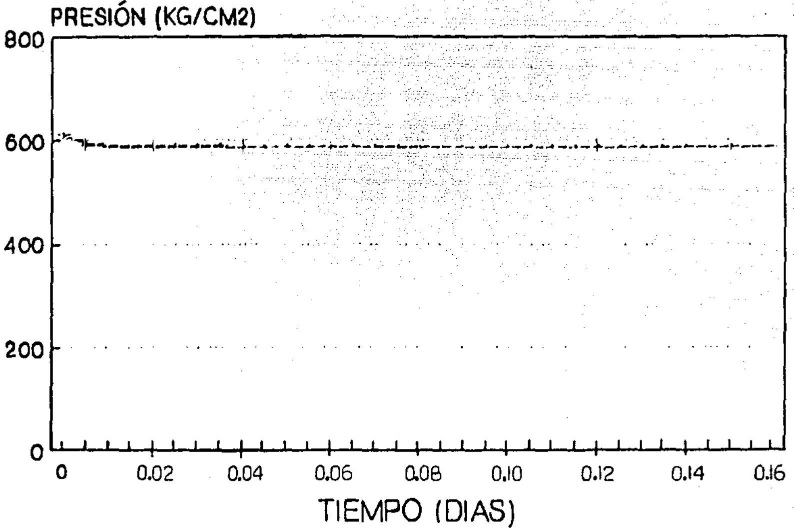


FIGURA 7.1 Comportamiento de P vs t, donde se muestran las curvas real y simulada del pozo Fénix 2.

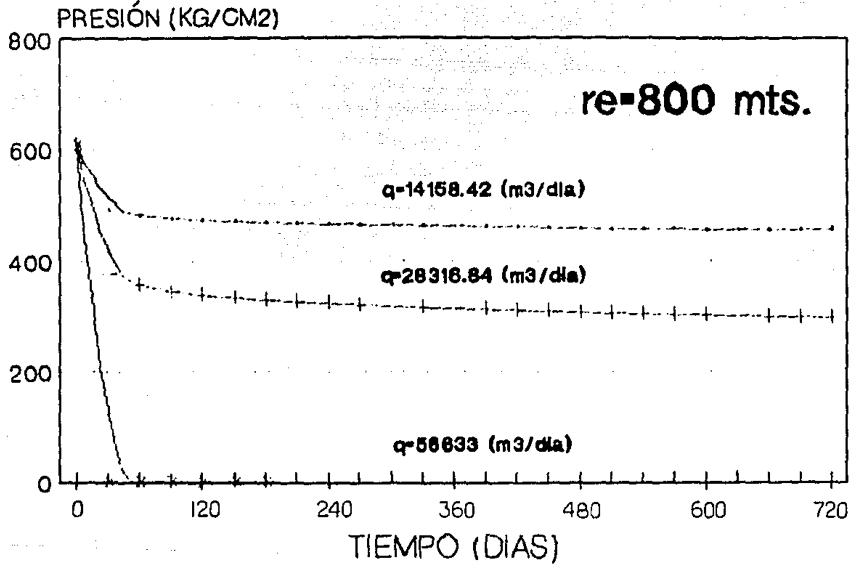


FIGURA 7.2 Comportamiento de P vs t, para re=800 mts. bajo distintas políticas de explotación.

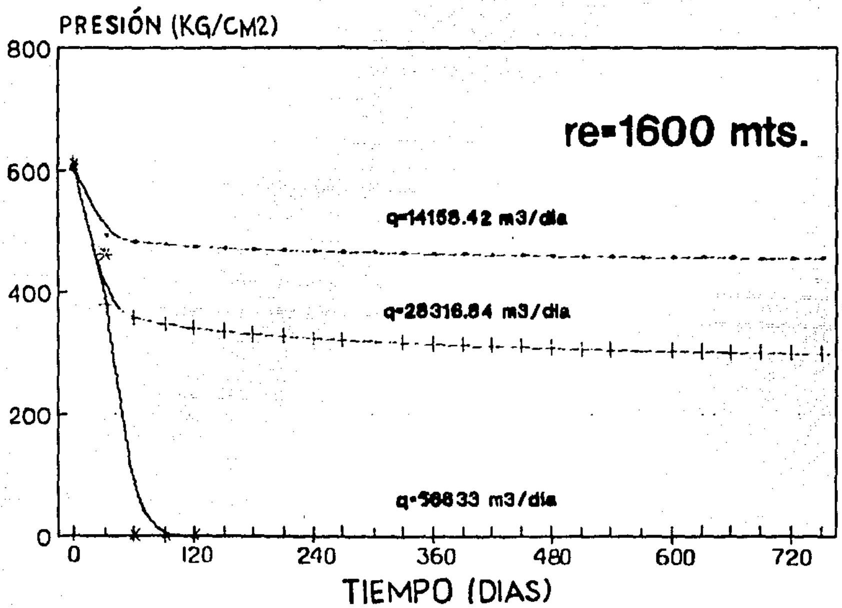


FIGURA 7.3 Comportamiento de P vs t, para re=1600 mts, bajo distintas políticas de explotación.

N O M E N C L A T U R A .

A	área
B	factor de volumen
C	compresibilidad
K	permeabilidad
L	longitud
m	masa
M	peso molecular
m(p)	pseudopotencial de los gases
m	pseudopotencial de los gases
n	número de moles
p	presión
q	gasto
r	dimensión
r	radio
r_e	radio de drene
r_w	radio del pozo
R	constante universal de los gases
S	saturación
t	tiempo
T	Temperatura
T	transmisividad

$\bar{v}$	velocidad
vol	volumen
Vc	volumen de la celda
z	dimensión
Z	profundidad
Z(p)	factor de desviación del gas
Z	factor de desviación del gas
ϕ	porosidad
$\mu(p)$	viscosidad
μ	viscosidad
ρ	densidad
γ_r	densidad relativa
Δ	incremento
∂	parcial
ω	parámetro de relajación
	SUBÍNDICES
r	dirección r
θ	dirección θ
z	dirección z
c. y.	condiciones de yacimiento
c. s.	condiciones estandar
	SUPERÍNDICES
n	nivel de tiempo

"La naturaleza aborrece el vacío."

Aristóteles (350 a. de C.)

"La naturaleza aborrece el vacío mucho menos de lo que Aristóteles había supuesto."

Galileo (1590)

"La naturaleza desaparecería por completo antes que permitir la más pequeña parte de espacio vacío."

Comentario irónico de Pascal (1650)

bibliografía

1.- ICYT Información Científica y Tecnológica,:"Aventuras del conocimiento (Simuladores en la educación). "; volumen 11, No 153. Junio 1989.

2.- ODEH, S.A. :"Reservoir Simulation . . .What is it?". J.P.T., November 1969.

3.- COATS,K.H.:"Use and Misuse of Reservoir Simulation Models". J.P.T. November 1969.,pp 183.

4.- ENCICLOPEDIA CIENTIFICA PROTEO,:"La Energía",; volumen 11 y 12. SEP PROMEXA.

5.- DOMINGUEZ,G.D :"Apuntes Simulación Matemática de Yacimientos". Facultad de Ingeniería UNAM.

6.- Nieto R.R.,:"Apuntes del Curso Principios de Mecánica de Yacimientos",Facultad de Ingeniería UNAM.

7.- ARQUIMIDES,C.C.,:"Tablas matemáticas". ED. Esfinge. México.

8.- CRICHLOW,H.B.:"The Use of an r-z Model To Study the effect of Completion Technique on Gas Well Deliverability".J.P.T.

9.- COATS,H.K.:"Analysis and Prediccition of Gas Well Performance" 1971, SPEJ.

10.-ANDRADE D.;GARCIA C.;CASTAÑEDA DE I.P.:"Cálculo Diferencial e Integral". Limusa 1988. México.

11.-LIPSCHUTZ,S."Algebra Lineal". SERIES SCHAUM.

12.-IRIARTE,R.;BORRAS,H.;DURÁN,R.;"Apuntes de Métodos numéricos" Facultad de Ingeniería UNAM

13.-BJORDAMMEN,J.B."Comparison of Alternating-Direction and Successive Overrelaxation Techniques in Simulation of Reservoir Fluid Flow", Marzo 1969, SPEJ.

14.-BERLANGA,J.M."Apuntes de Computación Aplicada a la Ingeniería Petrolera". Facultad de Ingeniería UNAM.

15.-OSORNO,J.A.;MOCTEZUMA,A.E."Modelo Tridimensional R-θ-Z para predecir el comportamiento del yacimiento en las cercanías de un pozo de gas cuya formación se encuentra con o sin fractura" Octubre 1986, IMP.

16.-VARGA,R.S.:"Matrix Iterative Analysis", Prentice hall, Inc.,Englewood Cliffs,N.J. (1962).

17.-GARAICOCHEA,F.P.,"Transporte de hidrocarburos", Facultad de Ingeniería UNAM.

18.-AL-HUSSAINY,R.,RAMEY,H.J.Jr and Crawford,P.B.;"The flow of Real Gases Through Porous Media", JPT, Mayo 1966.