Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de maestría y doctorado en ciencias matemáticas y de la especialización en estadística aplicada

Clases características y álgebras con división

T E S I N A

Que para optar por el grado de:
Maestro en ciencias

Presenta:

Carlos Érick Culebro Martínez

Director:

Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega

Instituto de matemáticas UNAM

Junio de 2017, Ciudad de México, México

Introducción

En este trabajo se desarrolla la construcción de las clases de Stiefel-Whitney y de las clases de Chern, también se muestra la unicidad de éstas bajo ciertos axiomas.

A manera de aplicación se presenta una prueba topológica de un teorema clásico de álgebra que cuestiona para qué valores n, se tiene que $\mathbb{R}^n$ posee una estructura de álgebra con división.

La estructura de esta tesina se compone de tres capítulos los cuales se describen a continuación.

- Capítulo 1. Haces vectoriales. En este capítulo se describen las propiedades principales de los haces vectoriales que nos permitirán desarrollar los capítulos posteriores.
- Capítulo 2. Clases características. En esta parte se construyen herramientas de topología algebraica tales como el isomorfismo de Thom y la sucesión de Gysin para demostrar la existencia y unicidad de las clases de Stiefel-Whitney y de las clases de Chern.
- Capítulo 3. Álgebras con división. Se exhiben las álgebras con división de dimensión 1,2,4 y 8 que son los números reales, los complejos, los cuaternios y los octonios respectivamente. Usando teoremas de Bott, Wu y Milnor sobre clases características, se muestra que tales álgebras son las únicas álgebras con división que existen.

Índice general

Capítulo 1

Haces vectoriales

En este capítulo presentaremos resultados necesarios para desarrollar este trabajo. Mostraremos características importantes de los haces vectoriales así como resultados que serán de gran utilidad para el siguiente capítulo.

1.1. Haces vectoriales

En esta sección definiremos el concepto de haz vectorial, exhibiremos ejemplos de estos, así como propiedades geométricas que poseen. Omitimos algunas pruebas ya que son estándares y pueden encontrarse con detalle en los siguientes textos [1] y [4].

Definición 1.1.1. *Un **n-haz vectorial** es una función continua $p : E \longrightarrow B$, tal que para todo $x \in B$, $p^{-1}(x)$ tiene estructura de k-espacio vectorial ($k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensión n. Además, todo $x \in B$ tiene una vecindad U y un homeomorfismo (llamado **trivialización local**)*

$$\varphi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times k^n$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p|"'] & & U \times k^n \arrow[dl, "pr"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_U| : p^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times k^n$ es k-lineal.

Definición 1.1.2. *Un subespacio $E_1 \subseteq E$ de un haz vectorial $p : E \longrightarrow B$ es llamado **subhaz** si la restricción $p| : E_1 \longrightarrow B$ es un haz vectorial y para cada $x \in B$, $E_1 \cap p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(x)$ es un subespacio lineal.*

Mencionamos algunos ejemplos de haces vectoriales.

1.- Para un espacio topológico B definimos el **haz producto** $E := B \times k^n$ al cual lo denotaremos por ε^n.

2.- Sea E el espacio cociente de $I \times \mathbb{R}$ bajo las identificaciones $(0, t) \sim (1, -t)$. La proyección $pr : I \times \mathbb{R} \longrightarrow I$ induce una función $p : E \longrightarrow S^1$ el cual es un 1-haz vectorial real. Note que E es homeomorfo a la banda de Moebius sin frontera, a este haz le llamaremos **haz de Moebius**.

3.- El haz tangente TM de una variedad diferenciable es un haz vectorial cuya dimensión es la misma que la de la variedad. Para un variedad diferenciable $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos el **haz normal** νM donde el espacio total $E \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las parejas (x, v) tal que v es ortogonal a $T_x M$

5.- Considerando al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ como el espacio cociente $S^n/\{x,-x\}$. Sea $E(\gamma_n^1)$ el subespacio de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ que consiste de las parejas $([x],v)$ tales que el vector v es múltiplo escalar de x. Definimos

$$\begin{aligned} p : E(\gamma_n^1) &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ ([x],v) &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $p : E(\gamma_n^1) \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ es un haz vectorial sobre $\mathbb{R}P^n$ de dimensión 1, al cual denotaremos por γ_n^1 y es llamado **haz canónico** sobre $\mathbb{R}P^n$. Una construcción similar se puede hacer para $\mathbb{C}P^n$.
Cabe señalar que este haz vectorial no es trivial.

Definición 1.1.3. *Una **sección** de un haz vectorial $p : E \longrightarrow B$ es una función continua*

$$s : B \longrightarrow E$$

tal que $s(x) \in p^{-1}(x)$ para todo $x \in B$. Decimos que una sección es no nula si se tiene que $s(x) \neq 0 \in p^{-1}(x)$ para todo $x \in B$.

Todo haz vectorial tiene una sección canónica, la sección cero. A menudo identificamos la sección cero con su imagen, un subespacio de E que se proyecta de manera homeomorfa sobre B por p. No todos los haces vectoriales tienen secciones no nulas, un ejemplo conocido es el caso de TS^n, este haz vectorial tiene secciones no nulas si y solo si n es impar.
Las secciones de un n-haz vectorial nos pueden dar un criterio para saber cuándo el haz es trivial, como se muestra a continuación.

Definición 1.1.4. *Sean $s_1, \ldots, s_n$ secciones no nulas de un haz vectorial, decimos que estas son linealmente independientes si $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ es linealmente independiente para todo $x \in B$.*

Teorema 1.1.5. *Un n- haz vectorial es trivial si y solo si existen secciones $s_1, \ldots, s_n$ linealmente independientes.*

Ahora veremos la construcción de haces vectoriales a partir de otros.

1.- Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial y $f : B' \longrightarrow B$ una función continua, definimos el **haz inducido** o **pullpack** f^*E sobre B', donde el espacio total es el subespacio de $B \times E$ que consiste de las parejas (b,e) con $f(b) = p(e)$. Y la proyección $p' : f^*E \longrightarrow B'$ es $(b,e) \mapsto b$. Intuitivamente la fibra sobre $b' \in B'$ es la fibra de p sobre $f(b')$.

2.- Dados dos haces vectoriales $p_1 : E_1 \longrightarrow B_1$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow B_2$, el **producto de haces** está definido de manera natural como $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$.

3.- Sea $p : E \longrightarrow B$ un n-haz vectorial complejo. El **haz vectorial conjugado** de $p : E \longrightarrow B$ es el haz vectorial con la misma estructura aditiva de las fibras de p, pero con producto dado por $\lambda a = \overline{\lambda} a$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $a \in E$.

Definición 1.1.6. *Sean $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B$ haces vectoriales, consideremos el producto de haces $p \times p' : E \times E' \longrightarrow B \times B$ y la función continua $\Delta : B \longrightarrow B \times B$ definida por $b \mapsto (b,b)$. Definimos la **suma de Whitney** de los haces E y E' como el haz pullback $\Delta^*(E \times E')$.*

Otra construcción importante será el haz de esferas, que se definirá en el capítulo siguiente, para entonces serán necesarios los siguientes conceptos.

Definición 1.1.7. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial. Una **métrica Riemanniana** en el haz asocia a cada $b \in B$ un producto escalar $\langle -,- \rangle_b : p^{-1}(b) \times p^{-1}(b) \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que*

$$\rho : E \times_B E = \{(e,e') \in E \times E' | p(e) = p(e')\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $\rho(e,e') = \langle e,e' \rangle_{p(e)}$, es continua.
*En el caso complejo, si $\langle -,- \rangle_b : p^{-1}(b) \times p^{-1}(b) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un producto Hermitiano, se le llama **métrica Hermitiana**.*

En general, no todos los haces vectoriales admiten un métrica Riemanniana, pero cuando la base del haz es paracompacta se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. *Sea B paracompacto. Entonces todo haz vectorial $p : E \longrightarrow B$ admite una métrica Riemanniana.*

En álgebra lineal, cuando tenemos un subespacio V_1 de un espacio vectorial V con producto interior, podemos expresar a V_1 como sumando directo de V, una situación análoga se presenta en los haces vectoriales.

Proposición 1.1.9. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial sobre un espacio paracompacto B, y sea $E_1 \subseteq E$ un subhaz. Entonces existe un subhaz $E_2 \subseteq E$ tal que $E = E_1 \oplus E_2$. El subhaz E_2 es llamado el **complemento ortogonal** de E_1, además E_2 es denotado por $E_1^{\perp}$.*

Hasta ahora solo hemos tratado sobre haces vectoriales (objetos), a continuación se discutirán resultados que involucran funciones entre haces vectoriales (morfismos).

Definiciones 1.1.10. *Sean $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B'$ haces vectoriales. Decimos que la función continua $\tilde{f} : E \longrightarrow E'$ cubre a la función continua $f : B \longrightarrow B'$ si $f \circ p = p' \circ \tilde{f}$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

Si además, para cada $b \in B$, la restricción de $\tilde{f}$ a la fibra sobre b, denotada

$$\tilde{f}_b : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f(b))$$

*es lineal, se le llama a $(\tilde{f}, f)$ un **morfismo de haces**.*
*Si cada $\tilde{f}_b$ es un isomorfismo lineal, diremos que $(\tilde{f}, f)$ es un **mapeo de haces vectoriales**.*
*En particular cuando f es la identidad decimos que $(\tilde{f}, f)$ es un **morfismo de haces vectoriales sobre** B.*
*Un morfismo de haces vectoriales sobre B es llamado **isomorfismo de haces vectoriales** si existe un morfismo de haces vectoriales $\tilde{g} : E' \longrightarrow E$ tal que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = Id_E$ y $\tilde{f} \circ \tilde{g} = Id_{E'}$.*

Definición 1.1.11. *Llamaremos **haz trivial** a cualquier haz vectorial isomorfo al haz producto.*

Proposición 1.1.12. *Un morfismo de haces vectoriales es isomorfismo de haces vectoriales si y solo si para todo $b \in B$ se tiene que $\tilde{f}_b$ es un isomorfismo lineal.*

Aplicando este resultado, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.13. *Si $\tilde{f} : E \longrightarrow E'$ es mapeo de haces vectoriales entonces $E \cong f^*E'$.*

Damos a continuación un resultado que posteriormente nos permitirá realizar algunos cálculos.

Proposición 1.1.14. *Sean $p_1 : E_1 \longrightarrow B_1$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow B_2$ haces vectoriales. El producto de haces $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ satisface el siguiente isomorfismo*

$$E_1 \times E_2 \cong \pi_1^*(E_1) \oplus \pi_2^*(E_2),$$

donde $\pi_i : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_i$ es la proyección en el i-ésimo factor.

Sea $q \leq n$ y consideremos el producto de q copias de $\mathbb{R}^n$, es decir, $(\mathbb{R}^n)^q := \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.15. *Definimos la **variedad de Stiefel** como*

$$V_q(\mathbb{R}^n) := \{(v_1, \ldots, v_q) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \mid \{v_1, \ldots, v_q\} \textit{ son linealmente independientes}\}.$$

.

Con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^n)^q$, es inmediato probar que $V_q(\mathbb{R}^n)$ es un abierto de $(\mathbb{R}^n)^q$.
Sea $V_q^0(\mathbb{R}^n)$ el subespacio de todos los q-marcos ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Además si definimos la función continua

$$F : (\mathbb{R}^n)^q \longrightarrow M_q(\mathbb{R})$$
$$(v_1, \dots, v_q) \mapsto (v_i \cdot v_j)_{ij},$$

se tiene que $V_q^0 = F^{-1}(Id)$, por lo tanto V_q^0 es un subespacio cerrado de $(\mathbb{R}^n)^q$, más aún es acotado y por lo tanto es compacto.
Sea $G_q(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todos los subespacios lineales de dimensión q de $\mathbb{R}^n$. La función

$$f : V_q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_q(\mathbb{R}^n)$$

que asigna a cada q-marco el subespacio lineal de dimensión q generado por este. La función f es suprayectiva, y le damos a $G_q(\mathbb{R}^n)$ la topología cociente. De manera equivalente se puede ver a $G_q(\mathbb{R}^n)$ como el espacio cociente inducido por $f| : V_q^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_q(\mathbb{R}^n)$.
Es importante saber que $G_q(\mathbb{R}^n)$ es una variedad topológica y más aún una variedad diferenciable, que lleva el nombre de **variedad de Grassman**.

A continuación construiremos un haz vectorial *canónico* sobre $G_q(\mathbb{R}^n)$. Consideremos el subespacio E de $G_q(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ que consiste de los pares (Y, v) con $v \in Y$ y definimos $p : E \longrightarrow G_q(\mathbb{R}^n)$ por $(Y, v) \mapsto Y$.

Proposición 1.1.16. *La función $\gamma_{n-1}^q := p : E \longrightarrow G_q(\mathbb{R}^n)$ es un q-haz vectorial sobre $G_q(\mathbb{R}^n)$.*

Ahora para la construcción del *haz universal*, identificamos de forma canónica a $\mathbb{R}^n$ como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, se tiene entonces inclusiones de variedades de Grassman

$$G_q(\mathbb{R}^n) \subset G_q(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_q(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \dots$$

Definimos $G_q(\mathbb{R}^\infty)$ como la unión $\bigcup_n G_q(\mathbb{R}^n)$ con la topología débil. Como cada $G_q(\mathbb{R}^n)$ es compacto se sigue que $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ es paracompacto. Además observemos que para $q = 1$ se tiene que $G_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{R}P^\infty$.

Para construir el haz universal γ_q, definimos al subespacio $E(\mathbb{R}^\infty)$ de $G_q(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty$ que consiste de los pares (Y, v) tal que $v \in Y$. Además $p : E(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ es la proyección canónica. Se tiene el siguiente resultado importante.

Proposición 1.1.17. *$\gamma_{\mathbb{R}}^q := p : E(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_q(\mathbb{R}^\infty)$ es un haz vectorial sobre $G_q(\mathbb{R}^\infty)$.*

A $\gamma_{\mathbb{R}}^q$ se le llama haz universal y la razón de este nombre es que todo haz vectorial $p : E \longrightarrow B$ sobre un espacio paracompacto B puede ser inducido a través de una función a $G_q(\mathbb{R}^\infty)$.

Teorema 1.1.18. *Si $p : E \longrightarrow B$ es un q- haz vectorial sobre un espacio paracompacto B entonces existe un mapeo de haces vectoriales entre los haces E y $\gamma_{\mathbb{R}}^q$.*

El teorema anterior se usa para probar la suprayectividad de la biyección que aparece en el siguiente resultado conocido como **Teorema de clasificación** de haces vectoriales reales.

Teorema 1.1.19. *Sea B un espacio paracompacto. Entonces existe una biyección natural*

$$[B, G_q(\mathbb{R}^\infty)] \longleftrightarrow Vec_{\mathbb{R}}^q(B)$$

*donde $Vec_{\mathbb{R}}^q(B)$ es el conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales reales de dimensión q. Esta función asigna a la clase de homotopía $f : B \longrightarrow G_q(\mathbb{R}^\infty)$ la clase de isomorfismo de $f^*\gamma_{\mathbb{R}}^q$, a f se le llama **función clasificante** del haz $f^*\gamma_{\mathbb{R}}^q$.*

Existen resultados análogos para haces vectoriales complejos.

Proposición 1.1.20. *$\gamma_{\mathbb{C}}^q := p : E(\mathbb{C}^\infty) \longrightarrow G_q(\mathbb{C}^\infty)$ es un haz vectorial sobre $G_q(\mathbb{C}^\infty)$.*

Teorema 1.1.21. *Sea B un espacio paracompacto. Entonces existe una biyección natural*

$$[B, G_q(\mathbb{C}^\infty)] \longleftrightarrow Vec_{\mathbb{C}}^q(B)$$

donde $Vec_{\mathbb{C}}^q(B)$ es el conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales complejos de dimensión q. Esta función asigna a la clase de homotopía $f : B \longrightarrow G_q(\mathbb{C}^\infty)$ la clase de isomorfismo de $f^*\gamma_{\mathbb{C}}^q$.

Capítulo 2

Clases Características

En este capítulo desarrollaremos las técnicas necesarias para la construcción de las clases características, además se probará la unicidad de éstas.

2.1. Definiciones

En esta sección definiremos las clases características para haces vectoriales reales y complejos, para cada caso recibirán el nombre de las clases de Stiefel-Whitney y clases de Chern, respectivamente, sin atender su existencia. Además se mostrarán algunas consecuencias de estas definiciones.

Definición 2.1.1. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial real. Llamamos* ***clases de Stiefel-Whitney*** *(para el haz $p : E \longrightarrow B$) a las clases de cohomología*

$$w_i(E) \in H^i(B, \mathbb{Z}/2), \qquad i = 0, 1, 2, \dots,$$

si satisfacen los siguientes axiomas:

(i) Son invariantes bajo clases de isomorfismo de haces vectoriales reales.

(ii) La clase $w_0(E)$ es el elemento unidad

$$1 \in H^0(B, \mathbb{Z}/2)$$

y $w_i(E) = 0$ para $i > n$, donde E es un $n-$haz vectorial real.

(iii) ***Naturalidad.*** *Si $f : B' \longrightarrow B$ es continua y $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real, se tiene entonces que para todo i*

$$w_i(f^*(E)) = f^* w_i(E) \in H^i(B'; \mathbb{Z}/2),$$

donde $f^*E \longrightarrow B'$ es el haz pullback de $p : E \longrightarrow B$ mediante f.

(iv) ***Fórmula de Whitney****. Si $E \longrightarrow B$ y $E' \longrightarrow B$ son haces vectoriales reales sobre el mismo espacio base, entonces*

$$w_k(E \oplus E') = \sum_{i=0}^{k} w_i(E) \smile w_{k-i}(E')$$

En particular, tenemos

$$\begin{aligned} w_1(E \oplus E') &= w_1(E) + w_1(E') \\ w_2(E \oplus E') &= w_2(E) + w_1(E) \smile w_1(E') + w_2(E') \end{aligned}$$

Aquí el símbolo $\smile$ denota el producto cup en cohomología.

(v) Para el haz canónico $\gamma_1^1 : L \longrightarrow \mathbb{R}P^1$, la primera clase de Stiefel-Whitney $w_1(L)$ no es cero.

Una vez que hemos definido las clases de Stiefel-Whitney, a continuación mostramos algunas consecuencias.

Proposición 2.1.2. *Supongamos que $E \longrightarrow B$ y $E' \longrightarrow B'$ son haces vectoriales reales y que $\tilde{f} : E' \longrightarrow E$ es un mapeo de haces cubriendo a una función continua $f : B' \longrightarrow B$. Entonces tenemos que $w_i(E') = f^*(w_i(E))$ para todo i.*

Demostración. Por la proposición 1.1.13 tenemos que $f^*E \cong E'$, de la invarianza bajo las clases de isomorfismo de haces vectoriales se sigue que $w_i(f^*E) = w_i(E')$.
De la naturalidad se concluye que $f^*w_i(E) = w_i(E')$ para toda i.

■

Proposición 2.1.3. *Para cada $n \geq 0$ sea ε^n el haz producto de dimensión n sobre el espacio B. Entonces tenemos que $w_i(\varepsilon^n) = 0$ para todo $i > 0$.*

Demostración. Como el haz producto ε^n es isomorfo al haz pullback $f^*\mathbb{R}^n$ del haz $\mathbb{R}^n \longrightarrow *$ sobre la única función continua $f : B \longrightarrow *$, usando la invarianza bajo las clases de isomorfismo tenemos:

$$w_i(\varepsilon^n) = w_i(f^*\mathbb{R}^n) = f^*w_i(\mathbb{R}^n).$$

La última igualdad se debe a la naturalidad.
Dado que $w_i(\mathbb{R}^n) \in H^i(*; \mathbb{Z}/2)$ se tiene que $w_i(\varepsilon^n) = 0$ para todo $i > 0$.

■

A continuación veremos una importante propiedad de clases características, que es llamada **estabilidad**.

Proposición 2.1.4. *Supongamos que ε^n es un haz vectorial real trivial de dimensión n sobre el espacio B para algún $n \geq 0$ y que $E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real. Entonces tenemos que $w_i(\varepsilon^n \oplus E) = w_i(E)$ para todo $i > 0$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición 2.1.3 y de la fórmula de Whitney.

■

Hacemos un paréntesis para definir algunos conceptos.

Definición 2.1.5. *Denotamos por $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2)$ al producto directo de los grupos abelianos $H^i(B, \mathbb{Z}/2)$ para $i \geq 0$, es decir, este es el grupo de series formales infinitas*

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

satisfaciendo que $a_i \in H^i(B, \mathbb{Z}/2)$ para todo i.
Naturalmente definimos un producto para $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2)$ usando la estructura multiplicativa en cohomología dada por el producto cup.
De manera específica para un par de elementos $a = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots)$ y $b = (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots)$ definimos su producto por

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 \smile b_0) + (a_1 \smile b_0 + a_0 \smile b_1) + (a_2 \smile b_0 + a_1 \smile b_1 + a_0 \smile b_2) + \cdots \\ &= \sum_{i,j \geq 0} a_i \smile b_j \end{aligned}$$

Con la suma y producto ya definidos, se tiene $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2)$ en un anillo conmutativo y asociativo con unidad.

Definición 2.1.6. *Definimos la **clase de Stiefel-Whitney total** de un n-haz vectorial real $E \longrightarrow B$ como*

$$w(E) = 1 + w_1(E) + w_2(E) + \cdots + w_n(E) + 0 \cdots \in H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2).$$

Usando la definición anterior, la fórmula de Whitney se reduce a la expresión

$$w(E \oplus E') = w(E)w(E').$$

El conjunto A de las series infinitas $a = 1 + a_1 + a_2 + \ldots \in H^{\Pi}(B; \mathbb{Z})$ con término inicial 1 es un anillo conmutativo bajo el producto.
Para un elemento a, denotamos por $\overline{a}$ al inverso. Como consecuencia de esto y aplicando la fómula de Whitney se tiene el resultado.

Proposición 2.1.7. ***Dualidad de Whitney.*** *Si TM es el haz tangente de una variedad diferenciable en un espacio euclideano y νM es el haz normal, entonces*

$$w(\nu M) = \overline{w}(TM).$$

De manera análoga a la definición de las clases características para el caso real, se definirán a continuación las clases características para el caso complejo.

Definición 2.1.8. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial complejo. Llamamos **clases de Chern** (para el haz $p : E \longrightarrow B$) a las clases de cohomología*

$$c_i(E) \in H^{2i}(B, \mathbb{Z}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

si satisfacen los siguientes axiomas:

(i) Son invariantes bajos clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos.

(ii) La clase $c_0(E)$ es el elemento unidad

$$1 \in H^0(B, \mathbb{Z})$$

y $c_i(E) = 0$ para $i > n$, donde E es un $n-$haz vectorial complejo.

*(iii) **Naturalidad.** Si $f : B' \longrightarrow B$ es continua y $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial complejo, se tiene entonces que para todo i*

$$c_i(f^*(E)) = f^* c_i(E) \in H^{2i}(B'; \mathbb{Z}),$$

donde $f^*E \longrightarrow B'$ es el haz pullback de $p : E \longrightarrow B$ mediante f.

*(iv) **Fórmula de Whitney**. Si $E \longrightarrow B$ y $E' \longrightarrow B$ son haces vectoriales complejos sobre el mismo espacio base, entonces*

$$c_k(E \oplus E') = \sum_{i=0}^{k} c_i(E) \smile c_{k-i}(E')$$

En particular, tenemos

$$\begin{aligned} c_1(E \oplus E') &= c_1(E) + c_1(E') \\ c_2(E \oplus E') &= c_2(E) + c_1(E) \smile c_1(E') + c_2(E'). \end{aligned}$$

(v) Para el haz canónico $\gamma_1^1 : L \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ sobre $\mathbb{C}P^1$, la primera clase de Chern $c_1(L)$ no es cero.

2.2. Isomorfismo de Thom

Para la construcción de las clases de Stiefel Whitney y de las clases de Chern, necesitaremos dos herramientas importantes: El isomorfismo de Thom y la Sucesión de Gysin. En esta sección desarrollaremos la primera y en la siguiente sección la segunda.
Para esta sección usaremos como anillo de coeficientes $R = \mathbb{Z}$ o $R = \mathbb{Z}/2$ a menos que se diga lo contrario.

2.2.1. Clase de Thom

Para un haz vectorial real $p : E \longrightarrow B$, consideremos E_0 al complemento de la sección cero, usaremos el comportamiento local de $H^*(E, E_0)$ para construir una clase $t_E \in H^n(E, E_0)$, como se verá a continuación.

Consideremos una parte de sucesión exacta en cohomología con coeficientes en un anillo R de la pareja $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$.

$$\tilde{H}^{i-1}(\mathbb{R}^n; R) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}; R) \xrightarrow{\delta} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) \xrightarrow{j^*} \tilde{H}^i(\mathbb{R}^n; R)$$

donde i^*, j^* son homomorfismos inducidos por inclusiones y δ es el morfismo de conexión en cohomología.
Como $\mathbb{R}^n$ es contraible se tiene que $\tilde{H}^i(\mathbb{R}^n; R) = 0$ para todo i, de la exactitud de la sucesión se sigue que δ es un isomorfismo.
Además S^{n-1} es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ así que tenemos un isomorfismo

$$\tilde{H}^{i-1}(S^{n-1}; R) \cong \tilde{H}^{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}; R).$$

Se concluye que

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \begin{cases} R & \text{Si } i = n, \\ 0 & \text{Si } i \neq n. \end{cases}$$

Observación 2.2.1. *Generalizando, si V es un espacio vectorial real, eligiendo una base de V obtenemos un $\mathbb{R}$-isomorfismo lineal $\mathbb{R}^n \cong V$ de manera que*

$$H^i(V, V - \{0\}) \cong \begin{cases} R & \mathit{Si} \ i = n, \\ 0 & \mathit{Si} \ i \neq n. \end{cases}$$

Definición 2.2.1. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial real de dimensión n. Sea $E_0 \subseteq E$ el complemento de la sección cero.*
Decimos que un haz tiene una ***clase de Thom con respecto a R*** *si existe un elemento $t_E \in H^n(E, E_0; R)$ tal que para todo $x \in B$, el homomorfismo*

$$j_x^* : H^n(E, E_0; R) \longrightarrow H^n(p^{-1}(x), p^{-1}(x) - 0; R)$$

mapea el generador t_E al generador, donde $j_x : (p^{-1}(x), p^{-1}(x) - 0) \longrightarrow (E, E_0)$ es la inclusión.
El elemento t_E es llamado la ***clase de Thom*** *del haz para el anillo R.*

En particular, si $n = 0$, entonces $p : E \longrightarrow B$ no es más que $Id : B \longrightarrow B$ y así $E_0 = \emptyset$ lo que implica que el haz tiene una clase de Thom con respecto a R.
Específicamente, tomamos $t_E = 1 \in H^0(E, E_0; R) = H^0(B; R)$ cuya restricción a $\{b\} \subseteq B$ es el generador $1 \in H^0(b)$ para todo $b \in B$.

Definición 2.2.2. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Una* ***orientación*** *de V es una clase de equivalencia de bases ordenadas, donde decimos que dos bases ordenadas $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ son equivalentes si la matriz de cambio de base (a_i^j) la cual está definida por la relación $w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^j v_j$, tiene determinante positivo.*
En particular, $\mathbb{R}^n$ tiene una orientación canónica correspondiente a su base canónica

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

.
Dada una base ordenada $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ de un espacio vectorial real V nos determina un isomorfismo

$f_{(v_1,v_2,\ldots,v_n)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ donde $e_i \mapsto v_i$ y por lo tanto un generador $g_V \in H^n(V, V-0; R)$.
Usando el hecho que $Gl_n^+(\mathbb{R})$ es conectable por trayectorias y la ley exponencial podemos afirmar lo siguiente:
Dos bases ordenadas $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ están en la misma clase de equivalencia si y sólo si sus correspodientes isomorfismos $f_{(v_1,v_2,\ldots,v_n)}$ y $f_{(w_1,w_2,\ldots,w_n)}$ determinan homeomorfismos de parejas $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \longrightarrow (V, V - \{0\})$ que son homotópicos.
Para $R = \mathbb{Z}$, este es el caso si y solo si $g_V = g'_V$ donde g_V y g'_V son los respectivos generadores para cada isomorfismo.
Consecuentemente, g_V determina una orientación de V, y sin ambigüedad llamamos a esta, una orientación de V con respecto a R.
Para $\mathbb{R} = \mathbb{Z}/2$ esta orientación es única, mientras que para $R = \mathbb{Z}$ existen dos orientaciones.

A continuación generalizaremos la definición de orientación al caso de haces vectoriales.

Definición 2.2.3. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial de dimensión n. Una orientación de p es una función μ que asigna cada punto $x \in B$ una orientación del espacio vectorial real $p^{-1}(x)$ y que satisface la siguiente condición de compatibilidad: cada punto $x_0 \in B$ en el espacio base tiene una vecindad U_0 junto con una familia de secciones linealmente independientes*

$$s_1, s_2, \ldots s_n : U_0 \longrightarrow p^{-1}(U_0)$$

tales que para $x \in U_0$ la base ordenada $s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)$ de la fibra $p^{-1}(x)$ define la orientación $\mu(x)$.
*Un haz vectorial real $p : E \longrightarrow B$ equipado con una orientación μ es llamando **haz orientado**.*

Teorema 2.2.4. *Para un haz vectorial $p : E \longrightarrow B$ de dimensión n tenemos las siguientes afirmaciones:*

(i) El haz tiene una única clase de Thom $t_E \in H^n(E, E_0; R)$.

(ii) $H^k(E, E_0; R) = 0$ para $k < n$.

En general se toma $R = \mathbb{Z}/2$, si el haz es orientable se toma $R = \mathbb{Z}$.

Demostración. Procedemos a probarlo en cinco pasos.

(a) Primero supongamos que es el haz producto $E = B \times \mathbb{R}^n$. Consideremos la composición de las siguientes funciones continuas por parejas.

$$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \xrightarrow{i_b} B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \xrightarrow{\text{proy}} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}).$$

donde para cada $b \in B$, definimos una inclusión $i_b(y) = (b, y)$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$.
Note que esta composición de funciones continuas es la identidad para cada $b \in B$.
Consideremos el generador canónico $g_n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, el cual es el único elemento no cero si $R = \mathbb{Z}/2$ y es el generador dado por la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$ si $R = \mathbb{Z}$.
Se sigue por funtorialidad que $\text{proy}^*(g_n) = 1 \times g_n \in H^n(B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}); R)$ es un elemento que satisface $i_b^*(1 \times g_n) = g_n$ para todo $b \in B$. Como g_n es el generador, tenemos identificada la clase de Thom $t_E = 1 \times g_n$.
Como $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R)$ es libre, podemos usar la fórmula de Künneth para obtener el siguiente isomorfismo:

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(B; R) \otimes_R H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) \cong H^k(B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}); R),$$

Como $H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) = 0$ para $j \neq n$ se sigue que

$$H^{k-n}(B; R) \otimes_R H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) \cong H^k(B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}); R),$$

Para $k < n$ este témino es cero, lo cual implica que $H^k(E, E_0; R) = 0$ en este caso.

(b) Usando la parte (a), encontramos que (i) y (ii) son verdaderas para conjuntos abiertos U para los cuales $E \mid U$ (el haz restringido a U) es trivial.
Así que supongamos que (i) y (ii) se tienen para $E \mid U$, $E \mid V$, y $E \mid U \cap V$, donde $U, V \subseteq B$ son abiertos. Probaremos que esta suposición implica que (i) y (ii) además son ciertas para $E \mid U \cup V$.
Consideremos la sucesión Mayer-Vietoris para las pareja escisivas $(E|U, E_0|U)$ y $(E|V, E_0|V)$.

$$H^{k-1}(E \mid U \cap V, E_0 \mid U \cap V; R) \longrightarrow H^k(E \mid U \cup V, E_0 \mid U \cup V; R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^k(E \mid U, E_0 \mid U; R) \oplus H^k(E \mid V, E_0 \mid V; R) \longrightarrow H^k(E \mid U \cap V, E_0 \mid U \cap V; R).$$

Para $k < n$, por hipótesis se tiene que

$$0 \longrightarrow H^k(E \mid U \cup V, E_0 \mid U \cup V; R) \longrightarrow 0$$

así se obtiene (ii) para $E \mid U \cup V$.
Para $k = n$ se obtiene la sucesión:

$$H^n(E \mid U \cup V, E_0 \mid U \cup V; R) \rightarrowtail H^n(E|U, E_0|U; R) \oplus H^n(E|V, E_0|V; R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^n(E|U \cap V, E_0|U \cap V; R).$$

Por hipótesis tenemos clases de Thom $t_{E|U}$ y $t_{E|V}$, y por la unicidad de estas tenemos

$$\iota_U^*(t_{E|U}) = \iota_U^*(t_{E|V}) \in H^n(E \mid U \cap V, E_0 \mid U \cap V; R)$$

donde $\iota_U : E \mid U \cap V \hookrightarrow E \mid U$ y $\iota_V : E \mid U \cap V \hookrightarrow E \mid V$ son inclusiones.
Por lo tanto, $\alpha(t_{E|U}, t_{E|U}) = \iota_U^*(t_{E|U}) - \iota_V^*(t_{E|V}) = 0$, y por la exactitud de la sucesión, existe un único elemento $t_{E|U \cup V} \in H^n(E \mid U \cup V, E_0 \mid U \cup V; R)$ que restringe a $t_{E|U}$ como a $t_{E|V}$.

(c) Si el haz E es de tipo finito, este es la unión de un número finito N de haces triviales, y así el resultado se obtiene aplicando la parte (b) por inducción sobre N.

(d) En esta caso supondremos que B es un complejo CW y usaremos el argumento hecho en c).
Sabemos que cada k-esqueleto B^k puede ser cubierto por un número finito de conjuntos abiertos que son contraibles en B^k.
Por lo tanto, el haz $E^k = E \mid B^k$ es tipo finito, así por la parte (c) el teorema es válido para cada esqueleto de B.
Sea $t^k \in H^n(E^k, E_0^k)$ la clase de Thom. Por naturalidad

$$(t^0, t^1, t^2, \ldots) \in \prod_k H^n(E^k, E_0^k; R)$$

determina un elemento en $\lim\limits_k H^n(E^k, E_0^k; R)$.
Como Milnor muestra en su artículo *On axiomatic homology theory*, existe una sucesión natural exacta corta

$$0 \longrightarrow \lim_k H^{n-1}(E^k, E_0^k; R) \longrightarrow H^n(E, E_0; R) \longrightarrow \lim_k H^n(E^k, E_0^k; R) \longrightarrow 0.$$

Como $H^n(E, E_0; R) = 0$ tenemos el isomorfismo

$$H^n(E, E_0; R) \longrightarrow \lim_k H^n(E^k, E_0^k; R),$$

así que a la sucesión $(t^0, t^1, t^2, \ldots)$ en la derecha le corresponde un elemento t_E en la izquierda, que es la clase de Thom.

(e) El caso general se sigue del inciso (d), tomamos una aproximación CW de B, la denotemos $f : \tilde{B} \longrightarrow B$, y consideramos el haz pullback $\tilde{E} = f^*E$ sobre $\tilde{B}$.
Se tiene entonces una función continua $\tilde{f} : \tilde{E} \longrightarrow E$ que cubre a f. Ahora consideremos las sucesiones exactas largas de grupos de homotopía de los haces $p : E_0 \longrightarrow B$ y $\tilde{p} : \tilde{E}_0 \longrightarrow B$, de las cuales se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_q(\mathbb{R}^n - 0) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \pi_q(\tilde{E}_0) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_*"] & \pi_q(\tilde{B}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "f_*"] & \pi_{q-1}(\mathbb{R}^n - 0) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_q(\mathbb{R}^n - 0) \arrow[r] & \pi_q(E_0) \arrow[r] & \pi_q(B) \arrow[r] & \pi_{q-1}(\mathbb{R}^n - 0) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Por el lema del cinco, se tiene que $\tilde{f}_* : \pi_q(\tilde{E}_0) \longrightarrow \pi_q(E_0)$ es un isomorfismo para toda q, así que la restricción $\tilde{f} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}_0$ es una equivalencia homotópica débil, lo que a su vez induce un isomorfismo $\tilde{f}^*$ en cohomología. Ahora consideremos las sucesiones exactas largas de las parejas (E, E_0) y $(\tilde{E}, \tilde{E}_0)$ y el isomorfismo $\tilde{f}^*$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(E;R) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}^*"', "\cong"] & H^{q-1}(E_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}^*"', "\cong"] & H^q(E, E_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}^*"'] & H^q(E;R) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}^*"', "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(\tilde{E};R) \arrow[r] & H^{q-1}(\tilde{E}_0;R) \arrow[r] & H^q(\tilde{E}, \tilde{E}_0;R) \arrow[r] & H^q(\tilde{E};R) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Aplicando el lema del cinco, se sigue que $\tilde{f}^* : H^q(E, E_0) \longrightarrow H^q(\tilde{E}, \tilde{E}_0)$ es un isomorfismo. Por lo tanto se concluye que la clase de Thom de E está dada por $t_E = f^{*-1}(t_{\tilde{E}})$ donde $t_{\tilde{E}}$ es la clase de Thom de $\tilde{E}$.

■

Para el caso de un haz vectorial complejo $p : E \longrightarrow B$, se tiene un versión de manera natural del teorema anterior.

Proposición 2.2.5. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial complejo de dimensión m. Entonces su haz vectorial real inducido $p_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow B$ tiene una única clase de Thom $t_E = t_{E_{\mathbb{R}}} \in H^{2m}(E, E_0; \mathbb{Z})$.*

Demostración. Basta observar que para W un espacio vectorial complejo de dimensión m, si

$$(w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

es una base de W, entonces los vectores

$$w_1, iw_1, w_2, iw_2, \ldots, w_m, iw_m$$

forman una base de W como un espacio vectorial real. Estos vectores en este orden determinan una orientación de W. Como el grupo $GL(m, \mathbb{C})$ es conectable por trayectorias, se sigue que W tiene una orientación canónica, que no depende del orden de la base compleja original.
Si $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial complejo, cada fibra tiene una orientación canónica, así que el haz vectorial real inducido $p_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow B$ es un haz orientado. Usando el teorema 2.2.4, tenemos de inmediato el resultado.

■

Notemos que el teorema 2.2.4 hace que podamos redefinir la clase de Thom de un n-haz vectorial real $p : E \longrightarrow B$ como la única clase $t_E \in H^n(E, E_0; R)$ tal que

$$j_x^*(t_E) \in H^n(p^{-1}(x), p^{-1}(x) - 0; R)$$

es el generador, para todo $x \in B$.

En lo que resta de esta sección mostraremos dos propiedades de la clase de Thom que nos servirán para mostrar importantes resultados de la clase de Euler que definiremos en la sección siguiente.

Proposición 2.2.6. *Supongamos que $p' : E' \longrightarrow B'$ es un haz vectorial real de dimensión n que es orientable con respecto a un anillo R y que $f : B \longrightarrow B'$ es continua. Si $p : E \longrightarrow B$ es el haz inducido de p' por f que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B', \end{tikzcd}$$

entonces $p : E \longrightarrow B$ es además orientable con respecto a R. Más aún, si t_E y $t_{E'}$ son las respectivas clases de Thom, tenemos que $\tilde{f}^*(t_{E'}) = t_E \in H^n(E, E_0; R)$.

Demostración. Para cada $x \in B$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (E, E_0) \arrow[r, "\tilde{f}"] & (E', E'_0) \\ (p^{-1}(x), p^{-1}(x) - 0) \arrow[u, "j_x"] \arrow[r, "\tilde{f}_x"'] & (p'^{-1}(f(x)), p'^{-1}(f(x)) - 0) \arrow[u, "j_{f(x)}"'] \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{f}_x$ es la restricción de $\tilde{f}$ a la fibra sobre x. Por la definición de haz inducido tenemos que $\tilde{f}_x$ es un homeomorfismo. Aplicando la funtorialidad de la cohomología se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H^n(E', E'_0; R) \arrow[r, "\tilde{f}^*"] \arrow[d, "j^*_{f(x)}"'] & H^n(E, E_0; R) \arrow[d, "j^*_x"] \\ H^n(p'^{-1}(f(x)), p'^{-1}(f(x)) - 0; R) \arrow[r, "\tilde{f}^*_x"'] & H^n(p^{-1}(x), p^{-1}(x) - 0; R) \end{tikzcd}$$

Como $j^*_{f(x)}(t_{E'})$ es generador y $\tilde{f}^*_x$ es un isomorfismo, se sigue que

$$\tilde{f}^*_x j^*_{f(x)}(t_{E'}) = j^*_x \tilde{f}^*(t_{E'})$$

es un generador para todo $x \in B$, es decir, $\tilde{f}^*(t_{E'})$ es una clase de Thom de $p : E \longrightarrow B$. Usando la unicidad de la clase de Thom, tenemos que $\tilde{f}^*(t_{E'}) = t_E$.

■

Hay una propiedad de la clase de Thom relacionada con la suma de Whitney de haces vectoriales sobre el mismo espacio.
Sean $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B$ de dimensión n y n' respectivamente. Si $\Delta : B \longrightarrow B \times B$ es la función diagonal, la suma de Whitney se definió como

$$E \oplus E' = \Delta^*(E \times E').$$

Así tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \oplus E' \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] \arrow[d] & E \times E' \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\Delta"'] & B \times B. \end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.7. *Supongamos que $E \longrightarrow B$ y $E' \longrightarrow B$ son haces vectoriales de dimensión n y n' respectivamente, con clases de Thom t_E y $t_{E'}$. Entonces la clase de Thom de la suma de Whitney $E \oplus E'$ es la imagen de $t_E \times t_{E'}$ bajo la composición γ,*

$$H^n(E, E_0; R) \otimes H^{n'}(E', E'_0; R) \xrightarrow{\times} H^{n+n'}(E \times E', E \times E'_0 \cup E_0 \times E'; R) =$$

$$= H^{n+n'}(E \times E', (E \times E')_0; R) \xrightarrow{\tilde{\Delta}^*} H^{n+n'}(E \oplus E', (E \oplus E')_0; R),$$

donde la primera función es un isomorfismo.
Es decir, tenemos la fórmula:

$$t_{E\oplus E'} = \tilde{\Delta}^*(t_E \times t_{E'}).$$

Demostración. Primero notemos que para cada $b \in B$ se satisface $p^{-1}(b) \cong \mathbb{R}^n$ y $p'^{-1}(b) \cong \mathbb{R}^{n'}$. Además la inclusión $\{b\} \hookrightarrow B$ induce inclusiones $p^{-1}(b) \hookrightarrow E$ y $p'^{-1}(b) \hookrightarrow E'$. En consecuencia, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^n(E,E_0;R)\otimes H^{n'}(E',E'_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0;R)\otimes H^{n'}(\mathbb{R}^{n'},\mathbb{R}^{n'}-0;R) \arrow[d, "\cong"', "\times"] \\
H^{n+n'}(E\oplus E',(E\oplus E')_0;R) \arrow[r] & H^{n+n'}(\mathbb{R}^{n+n'},\mathbb{R}^{n+n'}-0;R)
\end{tikzcd}$$

este diagrama muestra que $\tilde{\Delta}^*(t_E \times t_{E'})$ restringe al generador de

$$H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0;R)\otimes H^{n'}(\mathbb{R}^{n'},\mathbb{R}^{n'}-0;R)$$

que es el producto $g_n \times g_{n'}$ de los dos generadores de $H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0;R)$ y $H^{n'}(\mathbb{R}^{n'},\mathbb{R}^{n'}-0;R)$, respectivamente. Así obtenemos que $t_{E\oplus E'} = \tilde{\Delta}^*(t_E \times t_{E'})$.

■

2.2.2. Clase de Euler

Ahora definiremos la clase de Euler de un haz vectorial, que como se verá más adelante, será la base para construir las clases características. A lo largo de esta subsección mostraremos algunas propiedades algebraicas de la clase de Euler, por último daremos una condición necesaria para la existencia de secciones no nulas de un haz vectorial.

Definición 2.2.8. *Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real de dimensión n y que $z : B \longrightarrow E \hookrightarrow (E,E_0)$ es la función inducida por su sección cero.*
La clase

$$e(E) = z^*(t_E) \in H^n(B;\mathbb{Z}_2)$$

es llamada la ***clase de Euler*** *del haz vectorial real $p : E \longrightarrow B$.*
Análogamente, si $q : E' \longrightarrow B'$ es un haz vectorial complejo de dimensión m y $z : B' \longrightarrow E' \hookrightarrow (E',E'_0)$ es la función inducida por la sección cero del haz, entonces llamamos la clase

$$e(E') = z^*(t_{E'}) \in H^{2m}(B';\mathbb{Z})$$

la ***clase de Euler*** *del haz vectorial complejo q, donde $t_{E'}$ es la clase de Thom del haz vectorial real orientado de dimensión $2m$ inducido por q.*

Para $n = 0$ obtenemos, en particular, el haz $Id : B \longrightarrow B$ con sección cero $z = Id : B \longrightarrow B$. Como $t_E = 1$, se concluye que $e(E) = 1$.

A continuación probaremos algunas propiedades de la clase de Euler.

Proposición 2.2.9. ***Naturalidad de la clase de Euler.*** *Si $p : E \longrightarrow B$ es haz vectorial y $f : B' \longrightarrow B$ es continua, entonces se tiene que $e(f^*E) = f^*e(E)$.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
B' \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Sean $z_E : B \longrightarrow (E, E_0)$ y $z_{f^*E} : B' \longrightarrow (f^*E, f^*E_0)$ las funciones inducidas por las secciones cero, entonces claramente podemos concluir que $\tilde{f} \circ z_{f^*E} = z_E \circ f$.
Usando la proposición 2.2.6 obtenemos $\tilde{f}^*(t_E) = t_{f^*E}$, lo que implica que

$$e(f^*E) = z^* z_E^*(t_E) = f^*(e(E)).$$

■

Proposición 2.2.10. *Para la clase de Euler de la suma de Whitney $E \oplus E'$ de dos haces vectoriales $E \longrightarrow B$ y $E' \longrightarrow B$ tenemos la igualdad*

$$e(E \oplus E') = e(E) \smile e(E').$$

Demostración. Sean $z : B \longrightarrow E \hookrightarrow (E, E_0)$ y $z' : B \longrightarrow E' \hookrightarrow (E', E'_0)$ las secciones cero de los haces dados, entonces $z \times z' : B \times B \longrightarrow (E, E_0) \times (E', E'_0)$ es la sección cero de su producto. Sea $\mathfrak{z} : B \longrightarrow E \oplus E' \hookrightarrow (E \oplus E', (E \oplus E')_0)$ la sección cero de la suma de Whitney, claramente se tiene que $\tilde{\Delta} \circ \mathfrak{z} = z \times z' \circ \Delta \quad (\dagger)$.
Se sigue que:

$$\begin{aligned}
e(E \oplus E') &= \mathfrak{z}^*(t_{E \oplus E'}) \\
&= \mathfrak{z}^* \tilde{\Delta}^*(t_E \times t_{E'}) && \text{por } 2.2.7 \\
&= \Delta^*(z \times z')^*(t_E \times t_{E'}) && \text{por } (\dagger) \\
&= \Delta^*(z^*(t_E) \times z'^*(t_{E'})) \\
&= \Delta^*(e(E) \times e(E')) \\
&= e(E) \smile e(E').
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.2.11. *Para todo $n > 0$ sea ε^n el haz producto de dimensión n. Entonces la clase de Euler satisface $e(\varepsilon^n) = 0$.*

Demostración. Es la misma prueba de la proposición 2.1.3.

■

Proposición 2.2.12. *Si $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial que tiene una sección que no se anula, entonces su clase de Euler satisface $e(E) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $i : E_0 \hookrightarrow E$ y $j : E \longrightarrow (E, E_0)$ son las inclusiones y que $s : B \longrightarrow E_0 \subseteq E$ es la sección que no se anula en ninguna parte de E. Entonces la composición

$$B \xrightarrow{s} E_0 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

es la identidad y por funtorialidad, la composición en cohomología

$$H^n(B; R) \xrightarrow{p^*} H^n(E; R) \xrightarrow{i^*} H^n(E_0; R) \xrightarrow{s^*} H^n(B; R)$$

es la identidad también.
Sea $s_0 : B \longrightarrow E$ la sección cero, recordemos que $z = j \circ s_0$, y por definición tenemos que $e(E) = z^*(t_E) = s_0^* j^*(t_E)$.
Notemos que $p \circ s_0 = Id_B$, esto implica que $s_0^* \circ p^* = 1$.
De la exactitud de la sucesión larga de la pareja (E, E_0) obtenemos que $i^* \circ j^* = 0$. Como $s_0 \circ p \simeq Id_E$ se sigue que

$$e(E) = s^* i^* p^*(e(E)) = s^* i^* p^*(s_0^* j^*(t_E)) = s^* i^* j^*(t_E) = 0.$$

■

2.2.3. Isomorfismo de Thom

En esta sección daremos una prueba del isomorfismo de Thom para haces vectoriales en general (orientados o no orientados)

Teorema 2.2.13. ***Isomorfismo de Thom*** *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial real de dimensión n. Entonces para cada q*

$$\begin{aligned} \varphi : H^q(B;R) &\longrightarrow H^{q+n}(E, E_0; R) \\ b &\mapsto p^*(b) \smile t_E \end{aligned}$$

es un isomorfismo.
Para el caso de un haz vectorial arbitrario, se toma $R = \mathbb{Z}/2$. Para un haz orientado se toma $R = \mathbb{Z}$.
A φ se le llama el ***isomorfismo de Thom****.*

Demostración. Haremos esta prueba en cinco pasos.

a) Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es el haz producto, es decir, $p = \pi_1 : E = B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow B$, donde π_1 es la proyección en el primer factor.
Por la parte (a) de la prueba de 2.2.4 tenemos que $t_E = \pi_2^*(g_n) = 1 \times g_n$, donde π_2 es la proyección en el segundo factor y $g_n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; R)$ es el generador canónico.
Como $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; R)$ es libre, podemos usar la fórmula de Künneth para obtener un isomorfismo

$$\begin{aligned} H^{q-n}(B;R) \otimes_R H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; R) &\longrightarrow H^q(B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0); R) \\ b \otimes y &\mapsto b \times y \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos el isomorfismo

$$\begin{aligned} H^{q-n}(B;R) &\longrightarrow H^{q-n}(B;R) \otimes_R H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; R) \\ a &\mapsto a \times g_n \end{aligned}$$

Al combinar ambos isomorfismo se obtiene

$$\begin{aligned} H^{q-n}(B;R) &\longrightarrow H^q(B \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0); R) \\ b &\mapsto b \times g_n \end{aligned}$$

El cual es precisamente el isomorfismo de Thom, ya que

$$b \times g_n = \pi_1^*(b) \smile \pi_2^*(g_n) = p^*(b) \smile t_E.$$

b) Supongamos que el teorema es cierto para la restricción del haz $E \longrightarrow B$ a los abiertos U, V y $U \cap V$ en B. Probaremos entonces que el teorema es válido para $U \cup V$. Para todo subespacio $A \subseteq B$ definimos

$$\begin{aligned} \varphi_A : H^{q-n}(A;R) &\longrightarrow H^q(E \mid A, E_0 \mid A; R) \\ b &\mapsto p_A^*(b) \smile t_{E|A} \end{aligned}$$

como $t_{E|A} = i_A^*(t_E)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^{q-n}(C;R) \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[d, "i^*"'] & H^q(E|C, E_0|C; R) \arrow[d, "\tilde{i}^*"] \\ H^{q-n}(A;R) \arrow[r, "\varphi_A"] & H^q(E|A, E_0|A; R) \end{tikzcd}$$

siempre que A y C son subconjuntos de B que satisfacen $A \subseteq C$. De la sucesión Mayer-Vietoris de la pareja escisiva $(U, \emptyset)$ y $(V, \emptyset)$ así como las parejas escisivas $(E|U, E_0|U)$ y $(E|V, E_0|V)$, tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q-n-1}(U\cap V;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{U\cap V}"', "\cong"] & H^{q-n-1}(U\cup V;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{U\cup V}"'] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(E|(U\cap V),E_0|(U\cap V);R) \arrow[r] & H^{q-1}(E|(U\cup V),E_0|(U\cup V);R) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^{q-n}(U;R)\oplus H^{q-n}(V;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_U\oplus\varphi_V"', "\cong"] & H^{q-n}(U\cap V;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{U\cap V}"', "\cong"] & \cdots \\
{} \arrow[r] & H^q(E|U,E_0|U;R)\oplus H^q(E|V,E_0|V;R) \arrow[r] & H^q(E|(U\cap V),E_0|(U\cup V);R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Aplicando el lema del cinco, se sigue que $\varphi_{U\cup V}$ es un isomorfismo.

c) Si $p : E \longrightarrow B$ es de tipo finito, entonces B es cubierto por un número finito N de abiertos tal que en cada uno de ellos E es trivial. Por inducción sobre N y la parte b), obtenemos el isomorfismo en este caso.

d) Si B es un complejo CW entonces, justo como en la parte d) de la prueba del teorema 2.2.4, la restricción E^k de E a cada esqueleto B^k de B es de tipo finito y por la parte c) tenenemos un isomorfismo

$$\varphi_k : H^{q-n}(B^k;R) \longrightarrow H^q(E^k,E_0^k;R)$$
$$b \mapsto p_k^*(b) \smile t_k$$

donde $t_k = t_{E^k}$ y p_k es la restricción de p a E^k. Consideremos la sucesión de Milnor

$$0 \longrightarrow \lim_k {}^1 H^{q-n-1}(B^k;R) \longrightarrow H^{q-n}(B;R) \longrightarrow \lim_k H^{q-n}(B^k;R) \longrightarrow 0.$$

y entonces, por la naturalidad de estas partes de sucesiones exactas, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \lim_k H^{q-n-1}(B^k;R) \arrow[r] \arrow[d] & H^{q-n}(B;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_E"] & \lim_k H^{q-n}(B^k;R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \lim_k H^{q-1}(E^k,E_0^k;R) \arrow[r] & H^q(E,E_0;R) \arrow[r] & \lim_k H^q(E^k,E_0^k;R) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales laterales son isomorfismos inducidos por φ_k. Por el lema del cinco se concluye que φ_E es un isomorfismo.

e) En el caso general, tomamos una aproximación CW $f : \tilde{B} \longrightarrow B$. Sea $\tilde{E} \longrightarrow \tilde{B}$ el haz inducido por f, se sigue de la prueba del teorema 2.2.4 inciso e) que $\tilde{f} : \tilde{E} \longrightarrow E$ y $\tilde{f} : \tilde{E}_0 \longrightarrow E_0$ son además equivalencias homotópicas débiles, las cuales inducen isomorfismos en cohomología. Comparando la sucesión exacta de las parejas $(\tilde{E},\tilde{E}_0)$ y (E,E_0), encontramos que $\tilde{f}$ además induce isomorfismo en cohomología entre estas parejas. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
H^{q-n}(B;R) \arrow[r, "f^*", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi_E"'] & H^{q-n}(\tilde{B};R) \arrow[d, "\cong"', "\varphi_{\tilde{E}}"] \\
H^q(E,E_0;R) \arrow[r, "\cong", "\tilde{f}^*"'] & H^q(\tilde{E},\tilde{E}_0;R),
\end{tikzcd}$$

de donde se concluye que φ_E es un isomorfismo.

■

Proposición 2.2.14. *Como todo haz vectorial complejo $p : E \longrightarrow B$ es orientable, se sigue del teorema anterior que se tiene un isomorfismo de Thom en cohomología*

$$\varphi : H^k(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k+2m}(E, E_0;\mathbb{Z})$$
$$b \mapsto p^*(b) \smile t_E$$

donde m es la dimensión del haz complejo.

2.2.4. La sucesión de Gysin

Sea $p : E \longrightarrow B$ un n-haz vectorial y sea E_0 el complemento de la sección cero. Ahora que tenemos el isomorfismo de Thom a nuestra disposición daremos una herramienta que relaciona los grupos de cohomología de B con los de E_0 y posteriormente haremos unas aplicaciones.

Teorema 2.2.15. *Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real de dimensión n. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H^{q+n-1}(E_0;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\psi} H^q(B;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\smile e(E)} H^{q+n}(B;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_0^*} H^{q+n}(E_0;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \cdots$$

donde ψ está dado por la composición

$$H^{q+n-1}(E_0;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta} H^{q+n}(E, E_0;\mathbb{Z}/2) \xleftarrow[\varphi]{\cong} H^q(B;\mathbb{Z}/2).$$

Donde φ es el isomorfismo de Thom y $p_0 = p|E_0$.
Esta sucesión exacta es conocida como ***sucesión de Gysin*** *del haz vectorial real.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q+n-1}(E_0;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1"'] & H^q(B;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\smile e(E)"] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] & H^{q+n}(B;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^{q+n}(E_0;\mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{q+n-1}(E_0;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\delta"'] & H^{q+n}(E, E_0;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "j^*"'] & H^{q+n}(E;\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "i^*"'] & H^{q+n}(E_0;\mathbb{Z}/2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde φ es el isomorfismo de Thom (teorema 2.2.13) y la parte inferior es la sucesión exacta larga de la pareja (E, E_0). El primer cuadrado conmuta por definición de ψ y el tercero por definición de p_0. Para ver que el segundo cuadrado conmuta, sea $s_0 : B \longrightarrow E$ la sección cero, por la definición de la clase de euler se tiene que $e(E) = s_0^* j^*(t_E)$ y dado que $s \circ p$ es homotópica a la identidad se sigue que $p^* \circ s_0^* = 1$. Entonces para todo $a \in H^q(B)$ se sigue que

$$p^*(a \smile e(E)) = p^*(a) \smile p^*(s_0^* j^*(t_E)) = p^*(a) \smile j^*(t_E) = j^*(p^*(a) \smile t_E) = j^*\varphi(a).$$

■

El siguiente teorema es la versión compleja del teorema anterior.

Teorema 2.2.16. *Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial complejo de dimensión m. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H^{q+2m-1}(E_0;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} H^q(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile e(E)} H^{q+2m}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_0^*} H^{q+2m}(E_0;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

donde ψ está dado por la composicíon

$$H^{q+2m-1}(E_0;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{q+2m}(E, E_0;\mathbb{Z}) \xleftarrow[\varphi]{\cong} H^q(B;\mathbb{Z}).$$

Donde φ es el isomorfismo de Thom y $p_0 = p|E_0$.
Esta sucesión exacta es conocida como ***sucesión de Gysin*** *del haz vectorial complejo.*

Demostración. Como $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial complejo, el haz vectorial real inducido es orientado y de dimensión $2m$. De manera similar a la prueba del teorema anterior, obtenemos la sucesión deseada, excepto que ahora usamos coeficientes enteros en la sucesión exacta larga de cohomología para la pareja (E, E_0) y el isomorfismo de Thom para el caso complejo (proposición 2.2.14).

■

Una importante aplicación de la sucesión de Gysin es la siguiente.

Teorema 2.2.17. *El anillo de cohomología $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$ es generado como anillo por la clase de Euler $e(L) \in H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$, que puede ser identificado como un anillo de polinomios en una variable.*

Demostración. Primero observemos que si $p : L \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ es el haz canónico, entonces L_0 es contraible. En efecto, notemos que $L = S^\infty \times \mathbb{R}/\sim$ donde $(x, t) \sim (-x, -t)$. Se sigue que

$$L_0 = (S^\infty \times (\mathbb{R} - 0)/\sim) = ((S^\infty \times \mathbb{R}^+ \cup S^\infty \times \mathbb{R}^-)/\sim) \approx S^\infty \times \mathbb{R}^+ \approx S^\infty$$

pero S^∞ es contraible.
Ahora consideremos la sucesión de Gysin (teorema 2.2.15) del haz canónico $p : L \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_0^*} H^0(L_0;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\psi} H^0(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\smile e(L)} H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_0^*}$$

$$\longrightarrow H^1(L_0;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^q(L_0;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\psi} H^q(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\smile e(L)}$$

$$\longrightarrow H^{q+1}(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_0^*} H^{q+1}(L_0;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \cdots .$$

Como L_0 es contraible, tenemos que $H^q(L_0;\mathbb{Z}/2) \cong 0$ para $q > 0$, así que el producto cup con la clase de Euler determina un isomorfismo $H^q(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \cong H^{q+1}(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$ para $q > 0$.
Por otro lado, como $H^0(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$ y $H^0(L_0;\mathbb{Z}/2)$ son isomorfos a $\mathbb{Z}/2$, tenemos que p_0^* es un isomorfismo. Se sigue que $\psi : H^0(L_0;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$ es el homomorfismo cero, entonces $\smile e(L) : H^0(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$ es un isomorfismo.

■

Como consecuencia de este teorema podemos calcular el anillo de cohomología de los espacios proyectivos.

Corolario 2.2.18. *Como una álgebra sobre $\mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}_2$ tenemos que*

$$H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[e(L_n)]/e(L_n)^{n+1},$$

donde $L_n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ es el haz de líneas canónico.

Demostración. Dado que $\mathbb{R}P^\infty - \mathbb{R}P^n$ tiene celdas de dimensión mayor que n, usando cohomología celular tenemos que

$$H^i(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong 0$$

para $i \leq n$.
Además usando la sucesión exacta de la pareja, tenemos que la inclusión $j : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ induce un isomorfismo

$$j^* : H^i(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$$

para $i \leq n - 1$. Para $i = n$ tenemos una parte de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^n(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j^*} H^n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2).$$

Pero por el teorema anterior tenemos que $H^n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Lo cual implica que j^* es un isomorfismo para $i = n$. Usando la naturalidad de la clase de Euler (proposición 2.2.9) se sigue que $e(L_n) = e(j^*L) = j^*(e(L))$. Además j^* es multiplicativo, por el teorema anterior, se infiere que los generadores de $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ como un grupo abeliano son las potencias $e(L_n)^i$ para $0 \leq 1 \leq n$.

■

Una importante consecuencia del corolario anterior es la siguiente.

Corolario 2.2.19. *Sea $q : TS^n \longrightarrow S^n$ el haz tangente de la n-esfera. Entonces la clase de Euler $e(TS^n) \in H^n(S^n; \mathbb{Z}/2)$ es cero.*

Demostración. Sea $p : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ la función cociente. Dado que p es un difeomorfismo local, se tiene que la diferencial de p denotada por $dp : TS^n \longrightarrow T\mathbb{R}P^n$ es un isomorfismo en cada fibra, es decir, se tiene un mapeo de haces

$$\begin{tikzcd}
TS^n \arrow[r, "dp"] \arrow[d, "q"'] & T\mathbb{R}P^n \arrow[d, "q'"] \\
S^n \arrow[r, "p"'] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

Consideremos el homomorfismo inducido en cohomología $p^* : H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z}/2)$ para $n > 1$. Por el corolario 2.2.18, $e(L_n)^n$ es el generador de $H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$.
Se tiene que $p^*(e(L_n)^n) = (p^*e(L_n))^n$ y $p^*(e(L_n)) \in H^1(S^n; \mathbb{Z}/2) = 0$, se sigue entonces que p^* es el homomorfismo cero, de la naturalidad de la clase de Euler (ver proposición 2.2.9) se concluye que $e(TS^n) = (p^*e(T\mathbb{R}P^n)) = 0$ para $n > 1$.
Para el caso $n = 1$ notemos que $q : TS^1 \longrightarrow S^1$ es un haz trivial, así que posee una sección que no se anula, aplicando la proposición 2.2.12 se tiene que $e(TS^1) = 0$.

■

Se tiene la versión compleja para el teorema 2.2.17 y el corolario 2.2.18.

Teorema 2.2.20. *El anillo de cohomología $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ está generado como anillo por la clase de Euler $e(L) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ y puede ser identificado como un anillo de polinomios en una variable.*

Corolario 2.2.21. *Como una álgebra sobre $\mathbb{Z}$ tenemos*

$$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e(L_n)/e(L_n)^{n+1}]$$

donde $L_n \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ es el haz de líneas complejo canónico.

Para la construcción de las clases de Stiefel Whitney de un haz vectorial real de dimensión n usaremos generalizaciones del isomorfismo de Thom y la sucesión de Gysin.

Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real sobre un complejo CW. Existe una métrica Riemanniana en p que induce a cada fibra $p^{-1}(x)$ un producto escalar $\langle -, - \rangle_x$ que depende continuamente de $x \in B$.
El **haz de esferas** asociado al haz $p : E \longrightarrow B$ que denotamos por $S(E) \longrightarrow B$ es un haz fibrado cuyo espacio total está definido por

$$S(E) = \{y \in E \mid \langle y, y \rangle_x = 1,\ x = p(y)\}.$$

Supongamos que B es un complejo CW y que $C \subseteq B$ es un subcomplejo. Para todo haz vectorial real $p : E \longrightarrow B$ de dimensión n, denotemos por $p_C : E|C \longrightarrow C$ la restricción del haz a C y sea $E_0|C$ el complemento de la sección cero de $E|C$. Como B es un complejo CW, E también lo es y tanto $E|C$ como E_0 son subcomplejos de E.
Más aún, la inclusión $S(E) \hookrightarrow E_0$ es una equivalencia homotópica. Como $E|C$ y $S(E)$ son subcomplejos de E, la triada $(E|C \cup S(E); E|C, S(E))$ es escisiva , consecuentemente la triada $(E|C \cup E_0; E|C, E_0)$ también. Por lo tanto las inclusiones inducen los siguientes isomorfismos en cohomología

$$H^q(E|C \cup E_0, E_0) \cong H^q(E|C, E_0|C),$$

$$H^q(E|C \cup E_0, E|C) \cong H^q(E_0, E_0|C).$$

Teorema 2.2.22. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial real de dimensión n sobre un complejo CW B con $C \subseteq B$ un subcomplejo. Entonces para cada q tenemos un isomorfismo*

$$\varphi : H^q(B, C; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{q+n}(E, E|C \cup E_0; \mathbb{Z}/2).$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q+n-1}(E|C,E_0|C) \arrow[r] & H^{q+n}(E,E_0^C) \arrow[r] & H^{q+n}(E,E_0) \arrow[r] & H^{q+n}(E|C,E_0|C) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(C) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha", "\cong"'] & H^q(B,C) \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & H^q(B) \arrow[r] \arrow[u, "\gamma", "\cong"'] & H^q(C) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $E_0^C := E|C \cup E_0$.
En el primer renglón está la sucesión exacta de la terna (E, E_0^C, E_0) donde hemos sustituido $H^*(E|C, E_0|C)$ en lugar de $H^*(E_0^C, E_0)$ usando los isomorfismo que acabamos de exhibir. El segundo renglón es la sucesión exacta de la pareja (B, C).
Finalmente las fechas verticales están dadas por $\alpha(x) = p^*(x) \smile t_{E|C}$, $\gamma(y) = p^*(y) \smile t_E$ con clases de Thom $t_{E|C}$ y t_E. El homomorfismo β está dado por $\beta(z) = p^*(z) \smile t_E$ donde se consideran $p : (E, E|C) \longrightarrow (B, C)$ y el producto cup de parejas $\smile$: $H^q(E, E|C) \times H^n(E, E_0) \longrightarrow H^{q+n}(E_0^C)$.
De acuerdo con el isomorfismo de Thom (teorema 2.2.13), α y γ son isomorfismos, y aplicando el lema del cinco se tiene que β es un isomorfismo, como se quería probar.

$\blacksquare$

Se tiene una versión análoga del resultado anterior para haces vectoriales complejos.

Proposición 2.2.23. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial complejo de dimensión m sobre un complejo CW B y que $C \subseteq B$ es un subcomplejo. Existe un isomorfismo*

$$\varphi : H^q(B, B; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+2m}(E, E|C \cup E_0; \mathbb{Z}).$$

Existe una versión relativa de la sucesión de Gysin como se muestra a continuación.

Teorema 2.2.24. *Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real de dimensión n sobre un complejo CW B y que $C \subseteq B$ es un subcomplejo. Entonces existe una sucesión exacta en cohomología,*

$$\longrightarrow H^{q+n-1}(E_0, E_0|C; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\psi} H^q(B, C; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\smile e(E)} H^{q+n}(B, C; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_0^*} H^{q+n}(E_0, E_0|C; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow$$

Esta sucesión es conocida como ***sucesión relativa de Gysin*** *del haz vectorial real.*

Demostración. De forma análoga al caso absoluto consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q+n-1}(E_0,E_0|C) \arrow[r, "\psi"] & H^q(B,C) \arrow[r, "\smile e(E)"] \arrow[d, "\varphi", "\cong"'] & H^{q+n}(B,C) \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^{q+n}(E_0,E_0|C) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{q+n-1}(E_0^C,E|C) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[u, "\iota^*"', "\cong"] & H^{q+n}(E,E_0^C) \arrow[r] & H^{q+n}(E,E|C) \arrow[r] & H^{q+n}(E_0^C,E|C) \arrow[r] \arrow[u, "\iota^*"', "\cong"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $E_0^C = E|C \cup E_0$, φ es el isomorfismo de Thom relativo (teorema 2.2.22) y la sucesión inferior es la sucesión exacta larga de la terna $(E, E_0^C, E|C)$.
El hecho que $p : (E, E|C) \longrightarrow (B, C)$ es una equivalencia homotópica implica que p^* es un isomorfismo.
Entonces usando el teorema de escisión, tenemos que ι^* es un isomorfismo. Ahora definimos $\psi = \varphi^{-1} \circ \delta \circ (\iota^*)^{-1}$. De manera similar a como se probó en el caso absoluto se prueba que el segundo cuadrado conmuta, de la misma manera se prueba que el tercer cuadrado conmuta, por lo tanto la exactitud de la sucesión de abajo implica la exactitud de la sucesión de arriba.

$\blacksquare$

También tenemos un sucesión de Gysin relativa para el caso complejo.

Proposición 2.2.25. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial complejo de dimensión m. Existe una sucesión exacta en cohomología.*

$$\longrightarrow H^{q+2m-1}(E_0, E_0|C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} H^q(B, C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile e(E)} H^{q+2m}(B, C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_0^*} H^{q+2m}(E_0, E_0|C; \mathbb{Z}) \longrightarrow$$

esta sucesión es conocida como la sucesión de Gysin relativa para el haz vectorial complejo.

2.3. Construcción de clases características

En esta sección usaremos la sucesión de Gysin para construir las clases de Stiefel-Whitney de un haz vectorial real y de manera similar construiremos las clases de Chern para un haz vectorial complejo.

2.3.1. Existencia de las clases de Stiefel-Whitney y de Chern

Definición 2.3.1. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial real de dimensión n. Sea E_0 el complemento de la sección cero en E, definimos un nuevo haz de dimensión $n-1$ sobre E_0 denotado por $q : \widetilde{E} \longrightarrow E_0$ de la siguiente manera:*
Consideremos $\widetilde{E}' = \{(v,e) \in E_0 \times E \mid p(v) = p(e)\} \longrightarrow E_0$; que es el haz pullback de p mediante la función continua $p|E_0$. Ahora, tomamos el subhaz de líneas de $\widetilde{E}'$ dado por

$$L = \{(v,e) \in \tilde{E}' \mid e = \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos $q : \widetilde{E} \longrightarrow E_0$ como el haz cociente $\widetilde{E} = \widetilde{E}'/L \longrightarrow E_0$. Para todo $v \in E_0$ la fibra $q^{-1}(v)$ es el espacio vectorial cociente $p^{-1}(b)/\langle v\rangle$, donde $p(v) = b$ define $b \in B$ y $\langle v\rangle$ denota el subespacio de $p^{-1}(b)$ generado por el vector $v \in p^{-1}(b)$. Se sigue que la dimensión del haz $\widetilde{E} \longrightarrow E_0$ es $n-1$.

Esta construcción también es válida para el caso complejo.

Observación 2.3.1. *Si definimos $p_0 = p|E_0 : E_0 \longrightarrow B$, y denotamos*

$$i_b : p_0^{-1}(b) \hookrightarrow E_0$$

a la inclusión de la fibra sobre $b \in B$, entonces la restricción $\widetilde{E}|p_0^{-1}(b) = i_b^*(\widetilde{E})$ tiene como espacio total

$$\bigcup_{v \in p_0^{-1}(b)} (p^{-1}(b)/\langle v\rangle)$$

Como la dimensión de $p : E \longrightarrow B$ es n, se sigue que $p_0^{-1}(b) \approx \mathbb{R}^n - 0$, lo cual implica que $i_b^*(\widetilde{E})$ es esencialmente el haz sobre $\mathbb{R}^n - 0$ cuya fibra sobre el punto v es $\mathbb{R}^n/\langle v\rangle = v^\perp$.
En otras palabras, esta fibra es el hiperplano en $\mathbb{R}^n$ ortogonal a v, así que restringiendo $i_b^*(\widetilde{E})$ a $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n - 0$ obtenemos el haz tangente de la $(n-1)$-esfera.

Claramente se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *Sea $p : E \longrightarrow B$ y $p' : E' \longrightarrow B$ haces vectoriales y $s_0' : B \longrightarrow E'$ la sección cero. Definimos la siguiente función continua*

$$\begin{aligned} \alpha : E_0 &\longrightarrow (E \oplus E')_0 \\ v &\mapsto (v, s_0'p(v)) \end{aligned}$$

entonces tenemos un mapeo de haces

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E} \oplus p_0^*E' \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] & \widetilde{E \oplus E'} \arrow[d] \\ E_0 \arrow[r, "\alpha"'] & (E \oplus E')_0 \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{\alpha}$ está definida por $\tilde{\alpha}([v,w],(v,u')) = [(v, s_0'p(v)),(w,u')]$ con $v,w \in E$ ($v \neq 0$) y $u' \in E'$.
Así por la proposición 1.1.13 se tiene el siguiente isomorfismo de haces vectoriales:

$$\alpha^* \widetilde{E \oplus E'} \cong \widetilde{E} \oplus p_0^* E'.$$

Proposición 2.3.3. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz vectorial de dimensión n sobre un complejo CW. Entonces la clase de Euler $e(\tilde{E})$ está en la imagen de*

$$p_0^* : H^{n-1}(B;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{n-1}(E_0;\mathbb{Z}/2).$$

Demostración. Primero probaremos para el caso en el que B es conectable por trayectorias. Consideremos esta parte de la sucesión de Gysin para la pareja $(B,\{b\})$ (teorema 2.2.24):

$$H^{-1}(B,\{b\}) \xrightarrow{\smile e(E)} H^{n-1}(B,\{b\}) \xrightarrow{p_0^*} H^{n-1}(E_0,p^{-1}(b)-1) \longrightarrow H^0(B,\{b\}).$$

Se tiene que $H^{-1}(B,\{b\})=0$ y como B es conectable por trayectorias, tenemos además $H^0(B,\{b\})=0$, esto implica que

$$p_0^*: H^{n-1}(B,\{b\}) \longrightarrow H^{n-1}(E_0,p^{-1}(b)-0)$$

es un isomorfismo.

Ahora consideremos la siguiente parte de la sucesión exacta de la pareja $(E_0,p^{-1}(b)-0)=(E_0,\mathbb{R}^n-0)$:

$$H^{n-2}(\mathbb{R}^n-0) \longrightarrow H^{n-1}(E_0,\mathbb{R}^n-0) \xrightarrow{j^*} H^{n-1}(E_0) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(\mathbb{R}^n-0).$$

Si $e(\tilde{E}) \in H^{n-1}(E_0)$ es la clase de Euler, entonces usando que $e(TS^n)=0$ (ver corolario 2.2.19) y la observación 2.3.1 tenemos que $i^*(e(\tilde{E}))=e(i^*(\tilde{E}))=e(TS^n)=0$.
Por la exactitud de la sucesión existe un único elemento $x \in H^{n-1}(E_0,\mathbb{R}^n-0)$ que satisface $j^*(x)=e(\tilde{E})$.
Como el caso $n=1$ es trivial, podemos asumir que $n>1$. Así que tenemos

$$p_0^*: H^{n-1}(B;\mathbb{Z}/2) \cong H^{n-1}(B,\{b\};\mathbb{Z}/2) \cong H^{n-1}(E_0,\mathbb{R}^n-0;\mathbb{Z}/2),$$

y por lo tanto $e(\tilde{E}) \in im(p_0^*)$ se sigue de $j^*(x)=e(\tilde{E})$. Lo cual prueba para el caso en el que B es conectable por trayectorias.
Para el caso donde B no es conectable por trayectorias, consideramos $B=\cup_\alpha B_\alpha$ donde cada B_α es una componente conectable por trayectorias. Tenemos que

$$(i_\alpha^*): H^*(B) \cong \prod_\alpha H^*(B_\alpha)$$

donde cada $i_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B$ es una inclusión. Aplicando el caso anterior a cada restricción $i_\alpha^*(E)=E|B_\alpha$, se tiene el resultado.

■

Definición 2.3.4. *Sea $p: E \longrightarrow B$ un haz vectorial real de dimensión n sobre un complejo CW B. Definimos las* ***clases de Stiefel-Whitney*** *$w_i(E) \in H^i(B;\mathbb{Z}/2)$ del haz, inductivamente sobre n como sigue:*
Consideremos esta parte de la sucesión de Gysin de E:

$$H^{i-1}(B;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\smile e(E)} H^i(B;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_0^*} H^i(E_0;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\psi} H^{i-n+1}(B;\mathbb{Z}/2).$$

Para $i \leq n-2$ tenemos que $H^{i-n}(B;\mathbb{Z}/2)$ y $H^{i-n+1}(B;\mathbb{Z}/2)$ son cero y por lo tanto p_0^* es un isomorfismo. Para $i=n-1$ tenemos que p_0^* es un monomorfismo. Además de la proposición anterior se sigue $e(\tilde{E}) \in im(p_0^*)$. Por inducción sobre la dimensión n, definimos

$$w_n(E)=e(E)$$

y usando el hecho que la dimensión de $\tilde{E}$ es $n-1$, para $i<n$ definimos

$$w_i(E)=(p_0^*)^{-1}(w_i(\tilde{E})).$$

En particular, si $\dim E=0$, tenemos que $w_0(\tilde{E})=1$, y por lo tanto, para todo E con $\dim E \geq 0$, además tenemos que $w_0(E)=1$. Finalmente, para $i>n$ definimos $w_i(E)=0$.

Teorema 2.3.5. *Las clases $w_i(E) \in H^i(B;\mathbb{Z}/2)$ definida anteriormente satisfacen los axiomas i)-v) de la definición 2.1.1.*

Demostración. El axioma ii) se satisface por definición.
Para probar i) y iii) es suficiente notar que la clase de Euler es natural por la proposición 2.2.9. Sean $E \longrightarrow B$ y $E' \longrightarrow B$ dos haces de dimensión n y n' respectivamente. El axioma iv) se sigue para $k = n + n'$ de la proposición 2.2.10 ya que $w_{n+n'}(E \oplus E') = e(E \oplus E')$, $w_n(E) = e(E)$ y $w_{n'} = e(E')$. Para $k < n + n'$ aplicando inducción sobre la dimensión de $E \oplus E'$. El caso de dimensión uno es inmediato. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha^* w_k(\widetilde{E \oplus E'}) &= w_k(\alpha^*(\widetilde{E \oplus E'})) && \text{Por naturalidad.} \\
&= w_k(\widetilde{E} \oplus p_0^*(E')) && \text{Por la proposición 2.3.2.} \\
&= \sum_{i+j=k} w_i(\widetilde{E}) \smile w_j(p_0^*(E')) && \text{Por hipótesis de inducción.} \\
&= \sum_{i+j=k} w_i(\widetilde{E}) \smile p_0^* w_j(E') && \text{Por naturalidad.} \\
&= \sum_{i+j=k} p_0^* w_i(E) \smile p_0^* w_j(E') && \text{Dado que } w_i(E) = p_0^{*-1}(w_i(\widetilde{E})). \\
&= p_0^* \left(\sum_{i+j=k} w_i(E) \smile w_j(E') \right),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha^* w_k(\widetilde{E \oplus E'}) = p_0^* \left(\sum_{i+j=k} w_i(E) \smile w_j(E') \right).$$

Se sigue que

$$p_0^{*-1} \alpha^* w_k(\widetilde{E \oplus E'}) = \sum_{i+j=k} w_i(E) \smile w_j(E').$$

Además $\pi_0 \circ \alpha = p_0$ y así en cohomología se tiene la igualdad $\alpha^* \circ \pi_0^* = p_0^*$ por lo que $p_0^{*-1} \alpha^* = \pi_0^{*-1}$. Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\pi_0^{*-1} w_k(\widetilde{E \oplus E'}) = \sum_{i+j=k} w_i(E) \smile w_j(E')$$

es decir,

$$w_k(E \oplus E') = \sum_{i+j=k} w_i(E) \smile w_j(E').$$

Finalmente para el axioma v), tenemos que $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$, usando la proposición 2.1.3, tenemos que $w_1(E) = 0$ es cero si y solo si E es trivial, lo cual no es el caso aquí.

■

Definición 2.3.6. *Sea $q : E \longrightarrow B$ un haz vectorial complejo de dimensión m sobre un complejo CW B. Definimos las **clases de Chern** $c_i(E) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ del haz inductivamente sobre m como sigue. Consideremos esta parte de la sucesión de Gysin de E:*

$$H^{2i-2m}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile e(E)} H^{2i}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{q_0^*} H^{2i}(E_0;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^{2i-2m+1}(B;\mathbb{Z})$$

Para $2i \leq 2m - 2$ tenemos que $H^{2i-2m}(B; \mathbb{Z})$ y $H^{2i-2m+1}(B; \mathbb{Z})$ son cero, y así q_0^* es un isomorfismo. Así, por inducción sobre la dimensión compleja m, definimos

$$c_m(E) = e(E)$$

y usando el hecho que la dimensión de $\tilde{E}$ es $m-1$, para $i < m$ definimos

$$c_i(E) = (q_0^*)^{-1}(c_i(\tilde{E})).$$

En particular, si $\dim E = 0$ *tenemos que* $c_0(\tilde{E}) = 1$, *y por lo tanto para todo* E *con* $\dim E \geq 0$, *tenemos además que* $c_0(E) = 1$. *Finalmente, para* $i > m$ *definimos* $c_i(E) = 0$.

De manera similar al caso real se prueba que las clases de Chern que acabamos de definir satisfacen los axiomas que se dieron en 2.1.8.
Con esto hemos probado la existencia de las clases de Stiefel-Whitney y de Chern. En la siguiente sección se discutirá la unicidad de estas.

2.3.2. Unicidad de las clases de Stiefel-Whitney y de Chern

Comenzaremos por definir axiomas de clases característica en general. Posteriormente calcularemos la cohomología de las variedades de Grassmann $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$ y $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Esto permitirá obtener la unicidad de las clases de Stiefel Whitney y las clases de Chern.

Definición 2.3.7. *Una **clase característica** de dimensión i para un n-haz vectorial es una función c que asigna a cada n-haz vectorial real $E \longrightarrow B$ sobre un espacio paracompacto un elemento $c(E) \in H^i(B;\mathbb{Z}/2)$, que es un invariante bajo isomorfismo de haces vectoriales y que es natural; es decir, si $f : B' \longrightarrow B$ es continua, tenemos $c(f^*(E)) = f^*(c(E))$.*
Denotaremos por $\mathcal{C}_n^i$ al conjunto de estas clases características. Este conjunto tiene la estructura de grupo abeliano, donde la suma está dado por

$$(c + c')(E) = c(E) + c'(E).$$

Más aún, la colección de estos grupos para un n fijo y la variable i tiene la estructura de un anillo graduado con la multiplicación

$$\mathcal{C}_n^i \times \mathcal{C}_n^j \longrightarrow \mathcal{C}_n^{i+j}$$

dada por la fórmula

$$(c \cdot c')(E) = c(E) \smile c'(E).$$

Teorema 2.3.8. *Existe un isomorfismo de anillos graduados*

$$\varphi : \mathcal{C}_n^* \cong H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty);\mathbb{Z}/2),$$

definido por $\varphi(c) = c(E_n(\mathbb{R}^\infty))$ para $c \in \mathcal{C}_n^*$.

Demostración. Definimos

$$\psi : H^i(G_n(\mathbb{R}^\infty);\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathcal{C}_n^i$$

para $i = 0, 1, \ldots$ por

$$\psi(x)(E) = f_E^*(x),$$

donde $x \in H^i(G_n(\mathbb{R}^\infty);\mathbb{Z}/2)$ y $p : E \longrightarrow B$ es un n-haz vectorial real, con una función clasificante $f_E : B \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ única salvo homotopía. Afirmamos que ψ es la inversa de φ: En efecto,

$$\psi\varphi(c)(E) = f_E^*(\varphi(c)) = f_E^*(c(E_n(\mathbb{R}^\infty))) = c(f_E^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))) = c(E),$$

esto nos muestra que $\psi\varphi = Id$. Ahora, para todo $x \in H^i(G_n(\mathbb{R}^\infty);\mathbb{Z}/2)$, tenemos que

$$\varphi\psi(x) = \psi(x)(E_n(\mathbb{R}^\infty)) = id^*_{G_n(\mathbb{R}^\infty)} = x$$

lo cual implica que $\varphi \circ \psi = id$. Es claro que φ es un homomorfismo de anillos graduados.

■

El teorema anterior implica que el comportamiento de todas las clases características para n-haces vectoriales está determinado por el anillo $H^*(G_n(F^\infty);R)$. Por lo tanto es importante tener una forma explícita de este anillo, lo cual se hará a continuación.

Proposición 2.3.9. *Consideremos $E_n(\mathbb{R}^\infty)_0$ el complemento de la sección cero del haz universal real de dimensión n. Existe una equivalencia homotópica*

$$\alpha : G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow E_n(\mathbb{R}^\infty)_0$$

tal que la composición

$$G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{\alpha} E_n(\mathbb{R}^\infty)_0 \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$$

es la función clasificante del haz $\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$.

Demostración. Sea $\mathbb{R}_1^\infty$ el subespacio de $\mathbb{R}^\infty$ que consiste de todos los vectores de la forma $(0, a_1, a_2, \ldots)$. La función $\tau : \mathbb{R}_1^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ definida por $\tau(0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots)$ es un homeomorfismo, cuya inversa σ está definida por $\sigma(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$.
Entonces τ determina un homeomorfismo

$$\tilde{\tau} : G_{n-1}(\mathbb{R}_1^\infty) \longrightarrow G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty),$$

dado por $\tilde{\tau}(V) = \tau V$, cuyo inverso está definido de manera similar.
Definimos

$$\begin{aligned} \alpha : G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) &\longrightarrow E_n(\mathbb{R}^\infty)_0 \\ V &\mapsto (\langle e_0 \rangle \oplus \tilde{\sigma}(V), e_0) \end{aligned}$$

donde $e_0 = (1, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty - 0$. Más aún, definimos

$$\begin{aligned} \beta : E_n(\mathbb{R}^\infty)_0 &\longrightarrow G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \\ (W, w) &\mapsto W/\langle w \rangle \end{aligned}$$

donde $0 \neq w \in W$ y W es un subespacio n-dimensional de $\mathbb{R}^\infty$. Es decir, $\beta(W, w)$ es el complemento ortogonal en W del subespacio generado por w. Ahora probaremos que α y β son inversas homotópicas.
Primero , para todo $V \in G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$, notemos que

$$\beta\alpha(V) = \beta(\langle e_0 \rangle \oplus \tilde{\sigma}(V), e_0) = (\langle e_0 \rangle \oplus \tilde{\sigma}(V)/\langle e_0 \rangle = \tilde{\sigma}(V)).$$

La homotopía $h_t : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ definida por

$$h_t(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (ta_1, (1-t)a_1 + ta_2, (1-t)a_2 + ta_3, \ldots)$$

es un monomorfismo para todo t, y además induce una homotopía

$$\tilde{h_t} : G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$$

que empieza en $\beta \circ \alpha$ y termina con la identidad.
Por otro lado , para W, w y e_0 tenemos

$$\alpha\beta(W, w) = \alpha(W/\langle v \rangle) = (\langle e_0 \rangle \oplus \tilde{\sigma}(W/\langle w \rangle), e_0).$$

En este caso, definimos la homotopía

$$\begin{aligned} \tilde{k_t} : E_n(\mathbb{R}^\infty)_0 &\longrightarrow E_n(\mathbb{R}^\infty)_0 \\ (W, w) &\mapsto (\langle w(t) \rangle \oplus \tilde{h_t}(W/\langle w \rangle), w(t)) \end{aligned}$$

donde $w(t)$ es una trayectoria en $\mathbb{R}^\infty - 0$ que va de e_0 a w.
Entonces la homotopía $\tilde{k_t}$ empieza en $\alpha \circ \beta$ y termina con la identidad. Finalmente tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "q"'] & E_n(\mathbb{R}^\infty) \arrow[d, "p"] \\ G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \arrow[r, "p_0 \circ \alpha"'] & G_n(\mathbb{R}^\infty), \end{tikzcd}$$

Donde $p(W,w) = W$, $q(s,(V,v)) = V$ y $\gamma(s,(V,v)) = (\langle e_0\rangle \oplus \tilde{\sigma}(V), se_0 + \sigma(v))$. Más aún, γ es un isomorfismo en cada fibra, ya que para cada $V \in G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$ la fibra sobre V es $\mathbb{R}\times V$ y γ lo mapea isomorfamente por la fórmula $(s,v) \mapsto se_0 + \sigma(v)$ a la fibra sobre $p_0\alpha(V) = \langle e_0\rangle \oplus \tilde{\sigma}(V)$, donde $p_0 : E_n^0 \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ es la restricción de p. Por lo tanto usando la proposición 1.1.13 concluimos que $p_0 \circ \alpha$ clasifica $\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$.

■

Proposición 2.3.10. *Sean*

$$E_n(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty) \qquad y \qquad E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$$

para $n > 1$ los haces universales.
Sea $f : G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ una función clasificante del haz

$$\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty).$$

Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \xrightarrow{\gamma} H^q(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{\smile e(E_n(\mathbb{R}^\infty))} H^{q+n}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{f^*} H^{q+n}(G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{\gamma} H^{q+1}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Por la prueba de la proposición anterior sabemos que la composición

$$p_0 \circ \alpha : G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$$

clasifica al haz $\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$ y que α es una equivalencia homotópica.
Consideremos la sucesión de Gysin de $E_n(\mathbb{R}^\infty)$ (teorema 2.2.15),

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\smile e"] & H^{q+n}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[dr, "f^*"'] & H^{q+n}(E_n^0(\mathbb{R}^\infty)) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha^*"', "\cong"] & H^{q+1}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \arrow[r] & {} \\
& & H^{q+n}(G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)) \arrow[ur, dotted, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $e = e(E_n(\mathbb{R}^\infty))$. Si tomamos f como $p_0\circ\alpha$ y definimos γ como $\psi\circ(\alpha^*)^{-1}$, entonces obtenemos la sucesión deseada.

■

Teorema 2.3.11. *Como una álgebra sobre $\mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}_2$*

$$H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

donde $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son las clases de Stiefel-Whitney

$$w_i = w_i(E_n(\mathbb{R}^\infty)) \in H^i(G_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. La prueba será por inducción sobre n. Para $n = 1$, se sigue del corolario 2.2.18.
Ahora supongamos que el teorema es válido para $n-1$ para algún $n > 1$.
Sea $f : G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ la función clasificante para el haz $\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$.
Por la naturalidad (axioma iii de la definición 2.1.1) y estabilidad (proposición 2.1.4) de las clases de Stiefel-Whitney, tenemos que:

$$\begin{aligned} f^*(w_i(E_n(\mathbb{R}^\infty))) &= w_i(f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\ &= w_i(\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)) \\ &= w_i(E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Más aún, como $\dim E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty) = n-1$, tenemos que $w_n(E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)) = 0$.

Por hipótesis de inducción, tenemos que como álgebras

$$H^*(G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)) = \mathbb{Z}_2[w_1(E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)), w_2(E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)), \ldots, w_{n-1}(E_{n-1}(\mathbb{R}^\infty))],$$

Esto implica que el homomorfismo de anillos f^* es suprayectivo en cohomología. Por definición $e(E_n(\mathbb{R}^\infty)) = w_n(E_n(\mathbb{R}^\infty))$, así que la sucesión de la proposición anterior nos da una sucesión exacta:

$$H^q(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{w_n} H^{q+n}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{f^*} H^{q+n}(G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty)).$$

De esta sucesión exacta corta encontramos que todo elemento $a \in H^{q+n}(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ puede ser escrito como $a = b + c$, donde b viene de $H^q(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ y por lo tanto b es un polinomio en el que todo término contiene a w_n. Además, c viene de $H^{q+n}(G_{n-1}(\mathbb{R}^\infty))$ y así, por la hipótesis de inducción c es un polinomio en $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Ahora aplicando inducción sobre la dimensión de a se tiene el resultado.

■

De este teorema se sigue inmediatamente el siguiente corolario el cual dice que las clases características para haces vectoriales reales de dimensión n, pueden ser expresadas en términos de las clases de Stiefel-Whitney.

Corolario 2.3.12. *Sea c una clase característica de dimensión k para haces vectoriales de dimensión reales. Entonces tenemos que*

$$c = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} \lambda_J w_1^{i_1} w_2^{i_2} \cdots w_n^{i_n},$$

donde $\mathcal{I}_k = \{J = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{\nu=1}^n \nu i_\nu = k\}$ y $\lambda_J \in \mathbb{Z}_2$. Es decir, para cada haz vectorial real de dimensión n E, tenemos que

$$c(E) = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} \lambda_J w_1^{i_1}(E) \smile w_2^{i_2}(E) \smile \cdots \smile w_n^{i_n}(E).$$

Damos a continuación un último resultado técnico que nos premitirá probar la unicidad de las clases de Stiefel-Whitney.

Proposición 2.3.13. *Supongamos que $L \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ es el haz canónico sobre $\mathbb{RP}^\infty$ y que*

$$f : \mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty \longrightarrow G_n(\mathbb{RP}^\infty)$$

es una función que clasifica el haz $L \times \cdots \times L$ (con n factores). Entonces el homomorfismo

$$f^* : H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(\mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$$

es un monomorfismo.

Demostración. Por teorema 2.2.17 tenemos que

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1(L)].$$

Usando la fórmula de Künneth tenemos un isomorfismo

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) \otimes \cdots \otimes H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2),$$

así que

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_n]$$

donde definimos $t_i = \pi_i^*(w_1(L))$, y $\pi_i : \mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ es la proyección en la i-ésima coordenada.

Por hipótesis tenemos $f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty)) = L \times \cdots \times L$.
Usando 1.1.14 tenemos que $L \times \cdots \times L = \pi_1^*(L) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(L)$.
Por la naturalidad y la fórmula de Whitney tenemos que:

$$\begin{aligned} f^*(w(E_n(\mathbb{R}^\infty))) &= w(f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\ &= w(L \times \cdots \times L) \\ &= w(\pi_1^*(L) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(L)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} w(\pi_i^*(L)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 + t_i). \end{aligned}$$

Consecuentemente, para cada dimensión de 1 a n tenemos que

$$\begin{aligned} f^*(w_1(E_n(\mathbb{R}^\infty))) &= t_1 + \cdots + t_n \\ f^*(w_2(E_n(\mathbb{R}^\infty))) &= t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_1t_n + \cdots + t_{n-1}t_n \\ &\vdots \\ f^*(w_n(E_n(\mathbb{R}^\infty))) &= t_1 \cdots t_n. \end{aligned}$$

En otras palabras

$$f^*(w_k(E_n(\mathbb{R}^\infty))) = \sigma_k(t_1, \dots, t_n), \qquad k = 1, \dots, n,$$

donde σ_k, para $k = 1, \dots, n$, denota la k-ésima función elemental simétrica en n variables, que está definida en general por

$$\sigma_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}.$$

Un resultado fundamental de Newton dice que el subanillo de $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]$ que consiste de los polinomios simétricos es a su vez un anillo de polinomios generado por las funciones simétricas elementales $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Para una prueba se puede consultar [2].
Como $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{Z}_2[w_1(E_n(\mathbb{R}^\infty)), \dots, w_n(E_n(\mathbb{R}^\infty))]$ por el teorema 2.3.11, se sigue que f^* es inyectiva. En efecto, la imagen de f^* es precisamente el subanillo de las funciones simétricas.

■

Teorema 2.3.14. ***Unicidad de las clases de Stiefel-Whitney*** *Existe una única sucesión de clases de cohomología asociadas a un haz vectorial real sobre un espacio paracompacto que satisface los axiomas de la definición 2.1.1 i)-v).*

Demostración. Supongamos que para todo haz vectorial real sobre un espacio paracompacto tenemos una sucesión de clases de cohomología $\tilde{w_i}(E)$ que satisfacen los axiomas de la definición 2.1.1.
Consideremos el haz canónico de líneas $L_1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$. Por el axioma iv) tenemos que $\tilde{w_1}(L_1) = w_1(L_1)$, ya que ambas clases no son cero en $H^1(\mathbb{RP}^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Como L_1 es inducido del haz canónico de líneas $L \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ por la inclusión $\iota : \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty$, y $\iota^* : H^1(\mathbb{RP}^\infty) \longrightarrow H^1(\mathbb{RP}^1)$ es un isomorfismo, el axioma ii) implica que $\iota^*(\tilde{w_1}(L)) = \tilde{w_1}(L_1) = w_1(L_1)$ y por lo tanto $\tilde{w_1}(L) = w_1(L)$.
Consecuentemente, la clase total correspondiente a las clases $\tilde{w_k}$ definida de nuevo como las suma de todas, satisface $\tilde{w}(L) = 1 + w_1(L)$.
Sea $f : \mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ la función clasificante del haz

$$L \times \cdots \times L \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{P}^\infty.$$

Entonces de la naturalidad y de la fórmula de Whitney, de la misma manera que en la proposición anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}
f^*(\tilde{w}(E_n(\mathbb{R}^\infty))) &= \tilde{w}(f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\
&= \tilde{w}(L \times \cdots \times L) \\
&= \tilde{w}(\pi_1^*(L) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(L)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \tilde{w}(\pi_i^*(L)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 + \tilde{w}_1(\pi_i^*(L))) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 + w_1(\pi_i^*(L))) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 + t_i) \\
&= f^*(w(E_n(\mathbb{R}^\infty))).
\end{aligned}$$

Aquí $t_i = \pi_i^*(w_1(L)) = w_1(\pi_i^*(L))$ justo como en la prueba de la proposición anterior.
De la proposición anterior f induce un monomorfismo f^* en cohomología, y por lo tanto

$$\tilde{w}(E_n(\mathbb{R}^\infty)) = w(E_n(\mathbb{R}^\infty)).$$

Ahora, si $E \longrightarrow B$ es un haz vectorial real de dimensión n sobre un espacio paracompacto con una función clasificante $f_E : B \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$, entonces usando el axioma de naturalidad y el resultado que se acaba de obtener, se sigue que

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(E) &= \tilde{w}(f_E^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\
&= f_E^*(\tilde{w}(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\
&= f_E^*(w(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\
&= w(f_E^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))) \\
&= w(E).
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que las dos sucesiones de clases características son iguales término a término.

■

Existen afirmaciones análogas para el caso complejo.

Teorema 2.3.15. *Las clases $c_i(E) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ definidas en 2.3.6 satisfacen los axiomas de la definición 2.1.8.*

Sea $\mathcal{C}_n^i$ el conjunto de las clases características para m-haces complejos con valores en $H^i(B;\mathbb{Z})$.

Teorema 2.3.16. *Existe un isomorfismo de anillos graduados*

$$\varphi : \mathcal{C}_n^* \cong H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z}),$$

definido por $\varphi(c) = c(E_n(\mathbb{C}^\infty))$ para $c \in \mathcal{C}_n^*$.

Teorema 2.3.17. *Como una álgebra sobre $\mathbb{Z}$,*

$$H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n],$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son las clases de Chern

$$c_i = c_i(E_n(\mathbb{C}^\infty)) \in H^{2i}(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Corolario 2.3.18. *Sea c una clase característica de dimensión k para haces vectoriales complejos de dimensión n. Entonces tenemos que*

$$c = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} \lambda_J c_1^{i_1} c_2^{i_2} \cdots c_n i_n,$$

donde $\mathcal{I}_k = \{J = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{\nu=1}^{n} 2\nu i_\nu = k\}$ *y* $\lambda_J \in \mathbb{Z}$. *Es decir, para cada haz vectorial complejo de dimensión n E, tenemos que*

$$c(E) = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} \lambda_J c_1^{i_1}(E) \smile c_2^{i_2}(E) \smile \cdots \smile c_n^{i_n}(E).$$

Proposición 2.3.19. *Supongamos que* $L \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$ *es el haz canónico sobre* $\mathbb{CP}^\infty$ *y que*

$$f : \mathbb{CP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{CP}^\infty \longrightarrow G_n(\mathbb{CP}^\infty)$$

es una función que clasifica el haz $L \times \cdots \times L$ *(con n factores). Entonces el homomorfismo*

$$f^* : H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{CP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z})$$

es un monomorfismo.

Teorema 2.3.20. ***Unicidad de las clases de Chern.*** *Existe una única sucesión de clases de cohomología asociadas a un haz vectorial complejo sobre un espacio paracompacto que satisface los axiomas de la definición 2.1.8 i)-v).*

Capítulo 3

Álgebras con división

En este capítulo se probará un importante teorema de álgebra que dice que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de álgebra con división solamente para $n = 1, 2, 4$ y 8. Esto se hará usando resultados que involucran las clases características que se estudiaron en el capítulo anterior.

3.1. Definiciones y ejemplos

En esta sección se exhiben estructuras de álgebras con división sobre $\mathbb{R}^n$ para $n = 1, 2, 4, 8$, además se discute la manera de abordar este problema de existencia que es algebraico, en uno topológico.

Definición 3.1.1. *Sea A un espacio vectorial real de dimensión finita. Una **norma** en A es una función*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, &\qquad x, y \in A, \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, &\qquad \lambda \in \mathbb{R},\ x \in A, \\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0. & \end{aligned}$$

Definición 3.1.2. *Una **álgebra** es un espacio vectorial de dimensión finita equipado con una multiplicación bilineal*

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A, \\ (x, y) &\mapsto xy, \end{aligned}$$

con unidad $1 \in A$ tal que $1x = x1 = x$ para todo $x \in A$. Si además A está equipado con una norma tal que

$$\|xy\| = \|x\| \|y\|$$

*se le llama **álgebra normada**.*

Ejemplo 3.1.3. *Mencionamos los siguientes ejemplos de álgebras normadas:*

a) $A = \mathbb{R}$, $\|x\| = x$, $x \in R$, *con la multiplicación usual sobre* $\mathbb{R}$.

b) $A = \mathbb{R}^2$, $\|z\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $z = x_1 + x_2 i$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$, *con la multiplicación usual de números complejos sobre* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. *Si* $\bar{z} = x_1 - x_2 i$, *entonces* $\|z\|^2 = z\bar{z}$.

c) $A = \mathbb{R}^4$, $\|q\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$, *con la multiplicación de los **cuaternios** sobre* $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. *La multiplicación es determinada por* $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. *Si* $\bar{q} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$, *entonces* $\|q\|^2 = q\bar{q}$. *Esta álgebra es asociativa pero no es conmutativa.*

d) $A = \mathbb{R}^8$, $\|c\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_8^2}$, $c = (x_1, \ldots, x_8)$, *con la multiplicación de los* ***octonios*** *sobre* $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$. *Esta multiplicación es obtenida considerando* $c = (q_1, q_2)$ *con*

$$q_1 = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \qquad q_2 = x_5 + x_6 i + x_7 j + x_8 k \in \mathbb{H},$$

y entonces definimos $cc' = (q_1, q_2)(q_1', q_2') = (q_1 q_1' - \bar{q}_2' q_2, q_2' q_1 + q_2 \bar{q}_1')$. *Esta álgebra no es conmutativa ni asociativa.*

Del ejemplo anterior se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4. *Si* $n = 1, 2, 4, 8$, *entonces* $\mathbb{R}^n$ *tiene estructura de álgebra normada.*

Definición 3.1.5. *Una* ***álgebra con divisón*** *es una álgebra* A *sobre* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \quad o \quad y = 0.$$

Es claro que si $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de álgebra normada, entonces $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de álgebra con división.

Observación 3.1.1. *En 1898 Hurwitz probó algebraicamente que* $\mathbb{R}^n$ *tiene estructura de álgebra normada solamente para* $n = 1, 2, 4$ *y* 8.
Adams en 1958 haciendo uso de teoría de cohomología probó que existe una estructura de álgebra con división sobre $\mathbb{R}^n$ *solamente para* $n = 1, 2, 4$ *y* 8.
Posteriormente en 1960 Adams y M.F. Atiyah usando teoría K, *simplificaron la prueba original de Adams (ver [1]).*
El resto del trabajo se basará en los resultados de Bott y Milnor de 1958, que dan una prueba de este teorema usando clases características.
Cabe mencionar que sólo existen pruebas topológicas sobre el problema de las álgebras con división sobre los reales.

Con el producto de los reales y complejos se pueden definir sus respectivos espacios proyectivos. De manera similar se tienen espacios proyectivos para los cuaternios y los octonios.

Definición 3.1.6. *Considerando topológicamente a los cuaterniones* $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, *definimos* ***el espacio proyectivo cuaterniónico*** $\mathbb{H}P^n$ *como el espacio cociente de* $\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}$ *bajo la relación*

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = \lambda y \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{H} - \{0\}.$$

A pesar de la no conmutatividad de $\mathbb{H}$, *esta relación es de equivalencia.*

Definición 3.1.7. *Debido a la no asociatividad de* $\mathbb{O}$ *solo podemos definir los proyectivos para* $n = 1, 2$.
El ***espacio proyectivo octoniónico*** $\mathbb{O}P^1$ *está definido considerando topológicamente* $\mathbb{O} \cong R^8$ *y definiendo el espacio cociente de* $\mathbb{O}^2 - \{0\}$ *bajo la relación de equivalencia.*

$$(x, y) \sim (y^{-1}x, 1) \text{ cuando } y \neq 0.$$

$$(x, y) \sim (1, x^{-1}y) \text{ cuando } x \neq 0.$$

Ahora se obtiene un haz canónico de líneas para los proyectivos sobre las distintas álgebras.
Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. El haz canónico de líneas $\gamma_{\mathbb{K}}$ sobre $\mathbb{K}P^1$ está definido por

$$E(\gamma_{\mathbb{K}}) = \{(a, v) \in \mathbb{K}P^1 \times \mathbb{K}^2 \mid v \in a\}.$$

La proyección está definida por

$$\begin{aligned} p : E(\gamma_{\mathbb{K}}) &\longrightarrow \mathbb{K}P^1 \\ ([x], v) &\mapsto [x] \end{aligned}$$

es un d-haz vectorial sobre $\mathbb{K}P^1$ donde $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.

Posteriormente los haces que acabamos de definir serán de utilidad.

Empecemos con un teorema de Stiefel, que se probará con la ayuda de la siguiente proposición.

Proposición 3.1.8. *El haz tangente $T\mathbb{R}P^n$ es isormorfo a Hom$(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$ donde $\gamma^\perp$ es el complemento ortogonal de γ_n^1 en ε^{n+1}.*

Demostración. Sea L la línea que atraviesa el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$, que interseca a S^n en puntos $\pm x$. Sea $L^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el complemento ortogonal de L.
Consideremos la identificación canónica $p : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. Note que los dos vectores tangentes (x, v) y $(-x, -v) \in TS^n$, ambos tienen la misma imagen bajo la diferencial $dp : TS^n \longrightarrow T\mathbb{R}P^n$.
Además el haz tangente $T\mathbb{R}P^n$ puede ser identificado con el conjunto de todos los pares $\{(x, v), (-x, -v)\}$ que satisfacen

$$x \cdot x = 1 \qquad x \cdot v = 0$$

Cada pareja es determinada por una función lineal

$$l : L \longrightarrow L^\perp$$

donde $l(x) = v$.
Además el espacio tangente de $\mathbb{R}P^n$ en $\{\pm x\}$ es canónicamente isomorfo al espacio vectorial $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$. Se sigue que el haz tangente es canónicamente isomorfo al haz $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$.

■

Teorema 3.1.9. ***(Stiefel)*** *Si $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de álgebra con división entonces $\mathbb{R}P^{n-1}$ es paralelisable.*

Demostración. Supongamos que existe un operación bilineal

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sin divisores de cero.
Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica para $\mathbb{R}^n$. La correspondencia $y \mapsto p(y, e_1)$ define un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ es sí mismo. Por lo tanto la fórmula

$$v_i(p(y, e_1)) = p(y, e_i)$$

define una transformación lineal

$$v_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Notemos que $v_1(x), \ldots v_n(x)$ son linealmente independientes para $x \neq 0$ y que $v_1(x) = x$. Las funciones $v_2, \ldots, v_n$ nos dan $n - 1$ secciones linealmente independientes del haz vectorial

$$T\mathbb{R}P^{n-1} \cong \mathrm{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp).$$

En efecto, para cada línea L que atraviese el origen, se define una transformación lineal

$$\overline{v_i} : L \longrightarrow L^\perp$$

como sigue, para cada $x \in L$, sea $\overline{v_i}(x)$ la imagen de $v_i(x)$ bajo la proyección ortogonal $\mathbb{R}^n \longrightarrow L^\perp$.
Es claro que $\overline{v_1} = 0$ pero $\overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$ son linealmente independientes. Por lo tanto el haz tangente $T\mathbb{R}P^{n-1}$ es trivial, es decir $\mathbb{R}P^{n-1}$ es paralelisable.

■

Este resultado se puede relacionar con la paralelisabilidad de las esferas.

Proposición 3.1.10. *Si $\mathbb{R}P^n$ es paralelisable entonces S^n es paralelisable.*

Demostración. Consideremos la proyección canónica $p : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$, ya que es un difeomorfismo local, tenemos un mapeo de haces vectoriales

$$\begin{tikzcd} TS^n \arrow[r, "dp"] \arrow[d] & T\mathbb{R}P^n \arrow[d] \\ S^n \arrow[r, "p"'] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

usando la proposición 1.1.13 se tiene que

$$TS^n \cong p^*(T\mathbb{R}P^n)$$

si $T\mathbb{R}P^n$ es trivial, se sigue que TS^n es trivial.

■

Por lo tanto, debemos saber para qué valores de n se tiene que S^n es paralelisable, en el resto del trabajo mostraremos que únicamente se tiene esto para $n = 1, 3, 7$, que combinado con los dos teoremas anteiores se tendrá que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de álgebra de división solamente para $n = 1, 2, 4$ y 8.

3.2. Relación entre haces vectoriales y haces $GL(n; \mathbb{R})$-principales

Es conveniente mostrar la relación entre haces vectoriales reales y haces $GL(n, \mathbb{R})$-principales ya que los teoremas importantes que utilizaremos en la sección final tratan con esta relación.

Definición 3.2.1. *Sea G un grupo topológico. Una* **G-*acción*** *derecha sobre un espacio X es una función continua*

$$\begin{aligned} r : X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\mapsto xg := r(x, g) \end{aligned}$$

tal que para todo $x \in X$ se satisface que $xe = x$ donde e es la identidad en G y $(xg)g' = x(gg')$ para todo $g, g' \in G$.
Llamamos a X un **G-*espacio*** *derecho. Un G-espacio izquierdo se define análogamente.*

Definición 3.2.2. *Una G-acción es* ***libre*** *si $xg = x$ implica que $g = e$.*

Definición 3.2.3. *Sea G un grupo topológico. Un* ***haz*** **G-*principal*** *consiste de una función continua $p : P \longrightarrow X$, una G-acción derecha sobre P, de manera que existe una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \times G \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ que satisfacen*

1) el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times G \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "pr"'] & & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "p|"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

2) Para todo $x \in X$ y $g \in G$, $\varphi_\alpha(x, g) = \varphi_\alpha(x, e) \cdot g$.

Existe una relación entre haces $GL(n, \mathbb{R})$-principales y haces vectoriales, como se verá a continuación:

Sea $p : P \longrightarrow X$ un haz $GL(n; \mathbb{R})$-principal.
Hay una $GL(n; \mathbb{R})-$acción izquierda sobre $\mathbb{R}^n$ definido por el producto de matrices

$$\begin{aligned} l : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}n \\ (A, v) &\mapsto Av. \end{aligned}$$

Esta acción izquierda nos permite definir el espacio cociente de $P \times \mathbb{R}^n$ bajo la relación de equivalencia $(xA, y) \sim (x, Ay)$ al cual denotamos por $P \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$.
Definimos $\bar{p} : P \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ como $\bar{p}[a, v] = p(a)$, la cual es continua y suprayectiva, además para cada $x \in X$, la fibra $\bar{p}^{-1}(x)$ resulta ser un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$.
Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de X y $\varphi_\alpha : U_\alpha \times G \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ una trivialización local de p.
La función

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{p}^{-1}(U_\alpha)$$

dada por $\psi(x,v) = [\varphi_\alpha(x,Id), v]$ es un homeomorfismo y es lineal en fibras. Por lo tanto

$$\bar{p} : P \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \longrightarrow X$$

es un haz vectorial de dimensión n, el cual es llamado **haz vectorial asociado** al haz $GL(n;\mathbb{R})$-principal $p : P \longrightarrow X$.

Recíprocamente, cada n-haz vectorial $q : E \longrightarrow X$, induce un haz $Gl(n,\mathbb{R})$-principal de la siguiente manera:

Sea $q : E \longrightarrow X$ un haz vectorial de dimensión n. Sea

$$P(E) = \{(v_1, \ldots, v_n) \in E^n \mid q(v_1) = \cdots = q(v_n) \text{ y } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ son base } \}.$$

Definimos la función continua $p : P(E) \longrightarrow X$ por $p(v_1, \ldots, v_n) = q(v_1)$. Entonces p es un haz $GL(n,\mathbb{R})$-principal que es llamado **haz de marcos**. En efecto, sea $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow q^{-1}(U_\alpha)$ una trivialización local de q, definimos la función continua $\varphi_\alpha : U_\alpha \times GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ como $\varphi_\alpha(x,A) = (\psi_\alpha(x, A(e_1)), \ldots, \psi_\alpha(x, A(e_n)))$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definimos la acción $P(E) \times GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow P(E)$ como $(v_1, \ldots, v_n) \cdot A = (w_1, \ldots w_n)$ donde $w_i = \beta(A(e_i))$ con $\beta : \mathbb{R}^n \longrightarrow q^{-1}(x)$, el isomorfismo lineal dado por $\beta(e_i) = v_i$, donde $x = q(v_1)$. Es inmediato ver que φ_α es equivariante, i.e. $\varphi_\alpha(x,A) = \varphi_\alpha(x,Id) \cdot A$.

La inversa φ^{-1} es la función continua

$$\varphi_\alpha^{-1} : q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times GL(n,\mathbb{R})$$

dada por $\varphi^{-1}(v_1, \ldots, v_n) = (q(v_1), \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \beta)$.

Se obtiene entonces que el espacio $P(E)$ tiene estructura de haz $GL(n,\mathbb{R}^n)$-principal.

Si el n-haz vectorial $q : E \longrightarrow X$ está equipado con una métrica Riemanniana, siguiendo el proceso que acabamos de describir obtenemos un haz $O(n)$-principal llamado **haz de marcos ortonormales**.

La relación entre una construcción y otra es que si tenemos un n haz vectorial $q : E \longrightarrow X$ con métrica Riemanniana entonces este es canónicamente isomorfo a $P(E) \times_{O(n)} \mathbb{R}^n$.

3.3. Resultados preliminares

Posteriormente será de utilidad un teorema que relaciona los grupos de homotopía del espacio base, el grupo y el espacio total de un haz G-principal.

Todo haz G-principal en particular es un haz fibrado, por lo tanto se puede aplicar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Todo haz fibrado es un fibración de Serre.*

Una prueba de este resultado se puede consultar en el capítulo 4 sección 5 de [1].
Además se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.3.2. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración de Serre, si tomamos puntos base $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0) := F$, entonces hay una sucesión exacta larga*

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F,e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E,e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,b_0) \xrightarrow{\Delta_n} \pi_{n-1}(F,e_0) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \pi_0(F,e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E,e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B,b_0).$$

Una prueba de este resultado se encuentra en el capítulo 3, sección 5 de [1].
Como consecuencia de los dos teoremas que acabamos de mencionar, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.3. *Para un haz G-principal $p : P \longrightarrow X$ se tiene la siguiente sucesión exacta larga*

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F,a) \xrightarrow{i_*} \pi_n(P,a) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X,p(a)) \xrightarrow{\Delta_n} \pi_{n-1}(F,a) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \pi_0(F,a) \xrightarrow{i_*} \pi_0(P,a) \xrightarrow{p_*} \pi_0(X,p(a)).$$

Notemos que para este caso el espacio basado $(F,a) \cong (G,e)$ ya que para cada $a \in F$ tenemos un homeomorfismo $\gamma : (G,e) \longrightarrow (F,a)$ dado por $g \mapsto a \cdot g$.

En [7] Steenrod describe haces G-principales sobre S^n utilizando los elementos de $\pi_{n-1}(G)$, cuando G es conectable por trayectorias:
Sea $q : E \longrightarrow X$ un n-haz vectorial, consideremos a $p : P(E) \longrightarrow X$, el haz $GL(n,\mathbb{R})$-principal asociado. Si $q : E \longrightarrow X$ admite una métrica Riemanniana podemos reducir el grupo $GL(n,\mathbb{R})$ al grupo $O(n)$. Si además el haz vectorial está orientado podemos reducir al grupo $SO(n)$.
Sea ξ un haz G-principal sobre S^n, existe una cubierta $\{U,V\}$ sobre S^n que consiste de dos hemisferios abiertos cuya intersección es una *banda* abierta que contiene al ecuador S^{n-1}.
Además tenemos las trivializaciones locales de ξ:

$$\varphi_U : U \times G \longrightarrow p^{-1}(U)$$
$$\varphi_V : V \times G \longrightarrow p^{-1}(V)$$

las cuales nos definen una función continua

$$g_{UV} : U \cap V \longrightarrow G$$

donde $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(x,e) = (x, g_{UV}(x))$.
Existe un retracto por deformación $\iota : S^{n-1} \longrightarrow U \cap V$, así que definimos

$$T := g_{UV} \circ \iota : S^{n-1} \longrightarrow G.$$

En [7] se prueba que existe una biyección $[\xi] \longleftrightarrow [T]$ entre las clases de equivalencia de haces G-principales y elementos de $\pi_{n-1}(G)$, como se enuncia en el siguiente teorema, usando la notación de 3.3.3.

Teorema 3.3.4. *Sea G un grupo topológico conectable por trayectorias, la clases de equivalencia de haces G-principales sobre S^n están en correspondencia $1-1$ con los elementos de $\pi_{n-1}(G)$. Tal correspondencia está dada por $[\xi] \longleftrightarrow [T]$.*
Además si definimos $\chi := \gamma_*^{-1}\Delta_n$, tenemos que $\chi(\alpha) = [T]$ donde α es el generador canónico de $\pi_n(S^n)$.

Corolario 3.3.5. *Un n-haz vectorial orientado $p : E \longrightarrow S^n$ es trivial si y solo si la función $T : S^{n-1} \longrightarrow SO(n)$ es homotópica a la constante, aquí T es la función definida para el haz $SO(n)$-principal asociado a p.*

Demostración. Para el haz producto $S^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n$, el haz $SO(n)$-principal asociado a éste es $pr : S^n \times SO(n) \longrightarrow S^n$ donde pr es la proyección en el primer factor, por lo tanto $T : S^{n-1} \longrightarrow SO(n)$ es la función constante $x \mapsto I$ donde I es la matriz identidad. De la biyección $[\xi] \longleftrightarrow [T]$ que se menciona en el teorema anterior, se tiene que todo haz $SO(n)$-principal sobre S^n es equivalente a $pr : S^n \times SO(n) \longrightarrow S^n$ si y solo si T es homotópica a la constante.
Note además que el haz $SO(n)$-principal asociado a p es equivalente a $pr : S^n \times SO(n) \longrightarrow S^n$ si y solo si p es un haz trivial, de donde se obtiene el resultado.

■

Además en [7] se prueba el siguiente resultado.

Proposición 3.3.6. *EL haz $SO(n)$-principal asociado del haz tangente de S^n es el haz*

$$f : SO(n+1) \longrightarrow SO(n+1)/SO(n) \cong S^n$$

donde f es la proyección canónica.

3.4. Sobre la parelelisabilidad de las esferas

Esta sección está basada en [5], usando un teorema de Bott y uno de Wu, Milnor prueba el teorema sobre la paralelisabilidad de las esferas.
Cabe mencionar, que usando la relación de la sección 3.2, para un haz $O(n)$-principal ξ, denotamos como $w_i(\xi)$ a la i-ésima clase de Stiefel Whitney del haz vectorial asociado a ξ.

Definición 3.4.1. *Sea $p : P \longrightarrow X$ una haz $O(n)$-principal. La* ***i-ésima clase de Pontrjagin*** *de P*

$$p_i(P) \in H^{4i}(X;\mathbb{Z})$$

está definida por las clases de Chern del haz complejificado $E \otimes \mathbb{C}$ (donde E es el haz vectorial asociado a P) de la siguiente manera

$$p_i(P) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes \mathbb{C}).$$

Teorema 3.4.2. *[3] Para todo haz $O(m)$-principal P sobre la esfera S^{4k}, la clase de Pontrjagin $p_k(P) \in H^{4k}(S^{4k}) \cong \mathbb{Z}$ es divisible por $(2k-1)!$.*

El epimorfismo canónico $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, induce un homomorfismo $H^*(K;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(K;\mathbb{Z}_4)$ que será denotado por $c \mapsto [c]_4$. Sea $i : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ la inclusión.

Teorema 3.4.3. *[9] Para todo haz $O(m)$-principal P sobre K un complejo CW, la clase $(p_k(P))_4 \in H^{4k}(K;\mathbb{Z}_4)$ está deteminada por las clases de Stiefel Whitney $w_l(P) \in H^l(K;\mathbb{Z}_2)$. En particular si las clases de Stiefel Whitney $w_1(P), \ldots, w_{4k-1}(P)$ son cero, entonces $[p_k(P)]_4 = i_* w_{4k}(P)$.*

La prueba de este resultado está en chino, así que Milnor incluyó una prueba en [5].

Teorema 3.4.4. *Existe un haz $O(m)$-principal ξ sobre la esfera S^n con $w_n(\xi) \neq 0$ solo para $n = 1, 2, 4$ u 8.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Para $n = 1, 2, 4, 8$. Consideremos los haces canónicos $\gamma_{\mathbb{K}}$ sobre $\mathbb{K}P^1$ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. Usando los corolarios 2,2,17 y 2,2,18 se tiene que

$$H^*(\mathbb{K}P^1;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[a]/a^2$$

donde $a = w_d(\gamma_{\mathbb{K}}) \in H^d(\mathbb{K}P^1;\mathbb{Z}_2)$ es la d-ésima clase de Stiefel Whitney del haz $\gamma_{\mathbb{K}}$ y $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.
De la estructura celular de los espacios proyectivos se obtienen homeomorfismos

$$\mathbb{R}P^1 \cong S^1$$
$$\mathbb{C}P^1 \cong S^2$$
$$\mathbb{H}P^1 \cong S^4$$
$$\mathbb{O}P^1 \cong S^8$$

Por lo tanto tenemos que $\gamma_{\mathbb{K}}$ es un n-haz vectorial real para $n = 1, 2, 4, 8$ sobre S^n con clase de Euler no nula, tomando los haces de marcos ortonormales de estos haces vectoriales se obtiene el resultado.

$\Leftarrow$) Por [8] un haz con estas características existe solo si n es una potencia de 2. Así que solo consideramos el caso $n = 4k$ para $k > 2$. Las clases $w_j(\xi) \in H^j(S^{4k};\mathbb{Z}_4)$ son cero para $1 \leq j \leq 4k-1$, así que usando el teorema 3.4.3, se tiene la siguiente igualdad

$$(p_k(\xi))_4 = i_* w_{4k}(\xi) \in H^{4k}(S^{4k};\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$$

Por lo tanto $w_{4k}(\xi) = 0$ si y solo si $p_k(\xi)$ es divisible por 4. Por el teorema 3.4.2 se sabe que $p_k(\xi)$ es divisible por $(2k-1)!$, por lo tanto $w_{4k}(\xi) = 0$.

■

Finalmente se prueban los resultados principales de esta sección.

Teorema 3.4.5. *La esfera S^n es paralelisable solo para $r = 1, 3, 7$*

Demostración. Sea TS^n el haz tangente de S^n, por la proposición 3.3.6 su haz $SO(n)$-principal asociado está dado por

$$SO(n) \longrightarrow SO(n+1) \xrightarrow{f} S^n \ ,$$

del corolario 3.3.3 y el teorema 3.3.4 se tiene la siguiente sucesión de grupos de homotopía:

$$\longrightarrow \pi_n(SO(n+1)) \xrightarrow{f_*} \pi_n(S^n) \xrightarrow{\chi} \pi_{n-1}(SO(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(SO(n+1)) \longrightarrow \dots$$

Por el teorema 3.3.4 se tiene que $\chi(\alpha)$ es el elemento que le corresponde al haz tangente de S^n. Para cada $\lambda \in \pi_n(SO(n+1))$ denotemos por ξ_λ al correspondiente haz $SO(n+1)$-principal sobre S^{n+1}.
Sean μ el generador estándar de $H_{n+1}(S^{n+1}, \mathbb{Z})$, por [7] se tiene que

$$-\langle e(\xi_\lambda), \mu \rangle = f_*(\lambda),$$

donde $e(\xi_\lambda)$ denota la clase de Euler de haz vectorial orientado asociado a ξ_λ. Si suponemos que S^n es paralelisable, por el corolario 3.3.5 se tiene que $\chi(\alpha) = 0$.
De la exactitud de la sucesión del haz $SO(n)$-principal, el homomorfismo f_* es suprayectivo, por lo tanto, existe $\lambda \in \pi_n(SO(n+1))$ con $f_*(\lambda) = \alpha$. Se infiere que la clase de Euler del correpondiente haz ξ, satisface

$$\langle e(\xi_\lambda), \mu \rangle = -f_*(\lambda) = -\alpha.$$

Así $e(\xi_\lambda)$ es generador de $H^{n+1}(S^{n+1}; \mathbb{Z})$, por lo tanto $w_{n+1}(\xi) = (e(\xi))_2$ no es cero.
El teorema 3.4.4 nos dice exactamente para qué valores de n la clase $w_{n+1}(\xi) \neq 0$, por lo tanto $n = 1, 3$ o 7.

■

Corolario 3.4.6. *Existe una estructura de álgebra con división sobre $\mathbb{R}^n$ solo para $n = 1, 2, 4, 8$*

Demostración.

$\Rightarrow$) Se sigue del teorema 3.1.4 ya que en particular una álgebra normada es una álgebra con división.

$\Leftarrow$) Para $n = 1$ se sigue de inmediato. Supongamos entonces que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de álgebra con división con $n > 1$. Por el teorema 3.1.9 se sigue que $\mathbb{R}P^{n-1}$ es paralelisable, de la proposición 3.1.10 se tiene que S^{n-1} es paralelisable, por el teorema 3.4.5 se tiene entonces que $n - 1 = 1, 3$ o 7, y por lo tanto $n = 1, 2, 4,$ u 8.

■

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] M. Artin, *Algebra*, Pretice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.

[3] R. Bott, *The space of loops on a Lie group*, Mich. J. Math.

[4] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] J. Milnor, *Some consequences of a theorem of Bott*, Annals of mathematics, Vol 68, No. 2, 1958.

[6] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[7] N.E. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton, 1951.

[8] Wu Wen-Tsün, *Les i-carrés dans une variété grassmannienne*, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), 918-920.

[9] Wu Wen-Tsün, *On Pontrjagin classes III*, Acta Math. Sinica 4 (1954), 323-346.