



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Los procesos de
decoherencia en la
generación de enredamiento
multipartido

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C A

P R E S E N T A:

GLORIA ALICIA LOZADA NARVÁEZ



DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ANDREA VALDÉS HERNÁNDEZ

2017

CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Lozada

Narváez

Gloria Alicia

(55) 56 49 21 22

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

307033055

2. Datos del tutor

Dra.

Andrea

Valdés

Hernández

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Enrique

López

Moreno

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Eduardo

Nahmad

Achar

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Alfred Barry

U'Ren

Cortés

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Daniel

Sahagún

Sánchez

7. Datos del trabajo escrito

Los procesos de decoherencia

en la generación de enredamiento multipartido

81p

2017

*Die Physik erklärt die Geheimnisse der Natur nicht,
sie führt sie auf tieferliegende Geheimnisse zurück.*

Carl Friedrich von Weizsäcker

Agradecimientos

La elaboración y culminación de este trabajo le debe su esfuerzo a un grupo de personas sin el que no habría sido posible.

Primeramente a la doctora Andrea por todo su apoyo y colaboración a lo largo de este tiempo y por ser quien, con o sin la intención, me abrió la ventana hacia un panorama de la física que me ha llenado de fascinación.

Al conjunto de sinodales por su tiempo y valiosos comentarios.

Agradezco también al proyecto DGAPA-PAPIIT IA101816 por el apoyo económico brindado.

Dedicatoria

Toda etapa de la vida lleva consigo personas que nos acompañan en el trayecto y que de una u otra forma dejan huella, a todos quienes han dejado una huella en mí durante este tiempo les dedico este trabajo.

A mi familia en primer lugar, principalmente a mis padres Alicia y Alejandro. Ustedes son esa parte fundamental a quienes debo gran parte de lo que soy en todos los sentidos por todo su apoyo, paciencia, comprensión y amor. A Mamá por escucharme y apapacharme siempre que lo he necesitado; a Papá por apoyarme incansablemente y brindarme tu comprensión en todo momento. A mi Banana, porque aún en la distancia encontramos la manera de estar juntas, de compartir algo. A ustedes tres todo mi amor y agradecimiento.

A mis cuatro abuelitos: Yoyis, Rubén, Ofe y Roberto, por los ratos de interesantes pláticas, por compartir sus experiencias y por siempre estar al pendiente de mí.

A mis amigas Gris, Mariana, Tania y Alma, porque la verdadera amistad trasciende al tiempo y a la distancia.

A mis físicos, Adrián y Gabriel, por su gran amistad, por siempre estar ahí.

Y a ti, Homero, por todo el apoyo que me has brindado, por los importantes comentarios, por las preguntas curiosas, por no dejar que me rinda y motivarme siempre a ver más allá, por haber recorrido conmigo de la mano esta etapa de mi vida, por el amor y por todo lo que implica ese enredamiento nuestro que va más allá de la física y las matemáticas.

Resumen

El enredamiento cuántico es un recurso dinámico que se ve afectado por la ineludible interacción con el ambiente. Debido a la imposibilidad de tener un sistema completamente aislado es de crucial importancia el estudio de sistemas y su interacción con el ambiente. En particular, un sistema cuántico que está en un estado enredado, al interactuar con un ambiente se verá sometido a un proceso de decoherencia que afecta a dicho enredamiento.

En esta tesis se analiza la evolución y distribución del enredamiento en un sistema de cuatro qubits cuando dos de ellos (S_i), inicialmente enredados, interactúan localmente mediante una transformación unitaria U_i con su respectivo ambiente (E_i) también modelado como un qubit adicional (Figura 1).

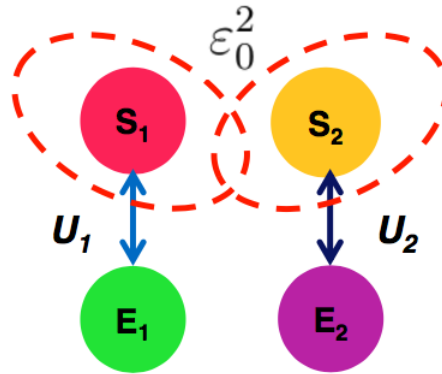


Figura 1: Dos sistemas S_i enredados que interactúan localmente mediante una transformación unitaria U_i con su respectivo ambiente E_i .

Las interacciones entre sistemas S_i y ambientes E_i están modeladas con los mapas cuánticos que representan a los canales *Amplitude Damping Chan-*

nel (ADC) y *Dephasing Channel* (DC), a partir de los cuales se desarrollan tres diferentes ejemplos: en el primero tanto la interacción del subsistema A (compuesto por S_1 y E_1) como la del subsistema B (compuesto por S_2 y E_2) están modeladas con el mapa cuántico correspondiente al ADC; en el segundo ejemplo se utilizó el mapa cuántico de DC para modelar las interacciones de los subsistemas A y B ; por último se desarrolla un ejemplo donde la interacción en el subsistema A esté dada por el mapa cuántico correspondiente al canal ADC, mientras que en el subsistema B la interacción corresponde al mapa cuántico del canal DC.

El análisis se realiza para un mismo estado inicial

$$|\psi(0)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = [\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle]_{S_1 S_2} |00\rangle_{E_1 E_2}. \quad (1)$$

En cada uno de los ejemplos se estudia la dinámica y distribución de enredamiento bipartido y multipartido entre los diferentes subsistemas.

Con el desarrollo presentado en [1] se llega a una relación de conservación de enredamiento que engloba enredamiento bipartido y multipartido. Bajo las condiciones en las que se estudia al sistema de cuatro qubits se verifica la relación de invariancia en cada uno de los tres ejemplos. Adicionalmente se estudia una medida del enredamiento multipartido para sistemas de N qubits: la concurrencia multipartida C_N [2].

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis llevan a concluir que la decoherencia no solamente degrada el enredamiento entre los sistemas, sino que puede ser utilizada para la distribución del mismo e incluso en la generación de enredamiento multipartido.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	1
1. Marco teórico	3
1.1. Operador de densidad	3
1.1.1. Estados puros	3
1.1.2. Estados mezcla	5
1.1.3. Poblaciones y coherencias	6
1.2. Sistemas compuestos	8
1.2.1. Estados reducidos	9
1.3. Operaciones cuánticas	9
1.3.1. Operadores de Kraus	10
Propiedades de los operadores de Kraus	12
1.3.2. Canales y mapeos cuánticos	13
Amplitude Damping Channel	14
Dephasing Channel	17
1.3.3. Decoherencia	18
1.4. Enredamiento	19
1.5. Cuantificando el enredamiento	20
1.5.1. Concurrencia	20
1.5.2. Desigualdad de la monogamia	21
1.5.3. Enredamiento residual	22
1.5.4. Concurrencia multipartida	23

2. Dinámica de enredamiento en un sistema de 4 qubits sujeto a procesos de decoherencia	25
2.1. Dinámica del enredamiento y sus invariantes	25
2.2. Ejemplos de la dinámica de enredamiento en un sistema de 4 qubits	33
2.2.1. Amplitude Damping Channel	34
2.2.2. Dephasing Channel	41
2.2.3. Amplitude Damping Channel - Dephasing Channel . .	47
2.3. Concurrencia multipartida	56
3. Conclusiones	59
3.0.1. Amplitude Damping Channel	63
3.0.2. Dephasing Channel	65
3.0.3. Amplitud Damping Channel - Dephasing Channel . . .	66

Introducción

El enredamiento cuántico ha ocupado un papel fundamental en la física cuántica desde la trascendental publicación de Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen en 1935 [3]. Este fenómeno ha representado un gran reto para numerosas generaciones de físicos y ha sido estudiado tanto desde el punto de vista fundamental como práctico. Si bien las primeras investigaciones sobre el enredamiento involucraban sistemas bipartitas (compuestos por dos partes), actualmente el enredamiento es estudiado en sistemas compuestos por más de dos partículas. Al tratarse de un fenómeno dinámico y debido a sus aplicaciones y a su rol fundamental en la mecánica cuántica, en los últimos años se ha logrado obtener resultados significativos relacionados con la generación de estados con enredamiento multipartido, la transferencia de enredamiento entre dos sistemas y con la dinámica de estados enredados bajo la influencia de un ambiente [4].

La interacción de un sistema con el ambiente, además de ser inevitable, tiene significativas consecuencias pues se induce un proceso de decoherencia que afecta tanto a la coherencia como al enredamiento de un sistema abierto, esto se ha visto muchas veces como un problema y entonces surge una pregunta ¿será la decoherencia la eterna enemiga del enredamiento o podrá ser utilizada a favor de éste?

Se sabe que el enredamiento entre dos sistemas decrece debido a un proceso de decoherencia, ¿pero qué ocurre cuando se tienen dos sistemas enredados que interactúan localmente con un ambiente? Para conseguir un mejor entendimiento de la dinámica y evolución del enredamiento en un sistema multipartita se han buscado leyes de conservación que lo gobiernen. Dentro de este trabajo se utiliza una invariante de la dinámica de enredamiento que

involucra enredamiento bipartido y multipartido.

En esta tesis se responderán a estas preguntas analizando un sistema de cuatro qubits bajo la acción de diferentes procesos de decoherencia. Dos de los qubits se encontrarán inicialmente enredados y cada uno de ellos interactuará localmente con su respectivo ambiente (también modelado como un sistema de dos niveles) mediante una transformación unitaria.

Un qubit es un sistema de dos niveles representados como $|0\rangle$ y $|1\rangle$ correspondientes al estado base y a un estado excitado respectivamente. Experimentalmente, la implementación de qubits representa diferentes retos muchas veces dependientes del sistema. Un ejemplo de qubit es el espín de un electrón, el cual es un sistema natural de dos niveles. Otro ejemplo común corresponde a los dos niveles electrónicos de un sólo átomo [5].

Para el análisis de la invariante dinámica del enredamiento utilizando el desarrollo presentado en [1] se recurrirá a la desigualdad de la monogamia [6], para la cual se derivó una relación para sistemas de $2N$ qubits y que es válida para particiones de la forma $2 : 2N - 2$ [7]. La desigualdad de la monogamia está dada en función de la concurrencia. La concurrencia es un cuantificador del enredamiento y está definida tanto para estados puros [8] como para estados mezcla [9]. Por otro lado, como una generalización de la concurrencia, existe también la concurrencia multipartida [2] definida para estados puros de sistemas de N qubits.

Con estas bases se estudiaron tres ejemplos correspondientes al canal *Amplitude Damping Channel*, al *Dephasing Channel* y un ejemplo más donde se utilizaron ambos canales.

La dinámica de enredamiento ofrece en la actualidad una gran variedad de líneas de investigación que van desde problemas de fundamentos de la mecánica cuántica, el límite entre ésta y la mecánica clásica, hasta las aplicaciones que se le pueden dar a este recurso.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Operador de densidad

El concepto de probabilidad es al cual se recurre cuando no se tiene la suficiente información sobre un sistema. Por ejemplo, acerca de la polarización de un fotón emitido por una fuente de luz natural se dice que éste tiene cualquier polarización con la misma probabilidad.

Se encontrará frecuentemente que un sistema físico no está caracterizado por una función de onda, sino por una mezcla estadística de estados $|\psi_k\rangle$, estos estados pueden ser independientes entre sí y a cada uno de ellos le corresponderá una probabilidad p_k . Además se cumplirá que $\sum_k p_k = 1$.

Así se introduce al operador de densidad que nos permite hacer una descripción de un sistema a través de dicha mezcla estadística de estados.

1.1.1. Estados puros

El primer caso a analizar es aquel en el que se conoce perfectamente el estado del sistema, es decir, todas las probabilidades p_k son iguales a cero, excepto una, es entonces cuando se dice que el sistema se encuentra en un estado puro.

Definición 1.1. *El operador de densidad para un estado puro $|\psi\rangle$ se define de la siguiente manera:*

$$\rho := |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.1)$$

Teorema 1.1. *Sea ρ el operador de densidad de un estado puro. Dicho operador cumple con las siguientes propiedades [10, 11] :*

1. $Tr\rho = 1$.
2. $\rho^\dagger = \rho$.
3. $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0, \forall|\phi\rangle \in H^d$, donde H^d es el espacio de Hilbert de dimensión d .
4. $\rho^2 = \rho$.

Demostración. Considérese un estado puro $|\psi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$, donde $\{|n\rangle\}$ forma una base ortonormal de H^d y, además, los coeficientes a_n (en general son complejos) satisfacen $\sum_n |a_n|^2 = 1$.

De esta manera:

$$1. \rho = \left(\sum_n a_n |n\rangle\right)\left(\sum_m a_m^* \langle m|\right) = \sum_{n,m} a_n a_m^* |n\rangle\langle m|, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} Tr[\rho] &= \sum_j \langle j| \left(\sum_{n,m} a_n a_m^* |n\rangle\langle m|\right) |j\rangle \\ &= \sum_j \sum_{n,m} (a_n a_m^*) \langle j|n\rangle\langle m|j\rangle \\ &= \sum_j |a_j|^2 \langle j|j\rangle\langle j|j\rangle = 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$2. \rho^\dagger = (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho.$$

3. Considerando un estado $|\phi\rangle$ arbitrario,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\rho|\phi\rangle &= \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle \\ &= |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

4. $\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$. Además, de la primer propiedad se sigue que $Tr[\rho^2] = 1$.

□

1.1.2. Estados mezcla

Retomando el caso general donde se tiene una mezcla estadística de estados, la cual está dada para un sistema para el cual las diferentes probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, son arbitrarias, y éstas satisfacen las siguientes condiciones:

1. $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1$.
2. $\sum_k p_k = 1$.

Para este caso, el estado más general se define como

$$\rho := \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \quad (1.4)$$

El operador ρ es hermitiano, ya que los coeficientes p_k son reales.

Al igual que en el caso puro, se cumple $Tr[\rho] = 1$:

$$\begin{aligned} Tr[\rho] &= Tr\left[\sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right] \\ &= \sum_k p_k Tr(|\psi_k\rangle\langle\psi_k|) = 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

El operador de densidad de un estado mezcla es también positivo definido:

$$\begin{aligned} \langle\phi|\rho|\phi\rangle &= \sum_k p_k \langle\phi|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\phi\rangle \\ &= \sum_k p_k |\langle\phi|\psi_k\rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

A diferencia del estado puro, el operador de densidad de un estado mezcla no es un proyector, es decir, $\rho^2 \neq \rho$:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \sum_k \sum_j p_k p_j [|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_j\rangle\langle\psi_j|] \\ &\neq \rho.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Para un estado mezcla se cumple que $Tr[\rho^2] < 1$.

Demostración.

$$\begin{aligned}Tr[\rho^2] &= \sum_{j,k} \rho_{jk} \rho_{kj} = \sum_{j,k} \rho_j^2 \delta_{jk} \\ &= \sum_j \rho_j^2 \leq (\sum_j \rho_j)^2 = (Tr[\rho])^2 = 1.\end{aligned}\tag{1.8}$$

□

Como ya se vio anteriormente, la igualdad de esta ecuación corresponde al caso de estados puros.

1.1.3. Poblaciones y coherencias

¿Cuál es el significado físico de los elementos de la matriz de densidad? Primeramente se considerarán los elementos de la diagonal de la matriz de densidad ρ en la base $\{|u_n\rangle\}$. Siendo la matriz de densidad

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|,\tag{1.9}$$

con $|\psi_k\rangle = \sum_n c_n^{(k)} |u_n\rangle$, entonces los términos de la diagonal son

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2.\tag{1.10}$$

Aquí a los términos $|c_n^{(k)}|^2$ se les conoce como *poblaciones*. Si el estado de un sistema está descrito con la ecuación (1.9), las poblaciones representan la probabilidad de encontrar a dicho sistema en el estado $|u_n\rangle$. De la ecuación (1.10) es notable que ρ_{nn} es un número real positivo igual a cero si y sólo si todos los términos $|c_n^{(k)}|^2$ son cero.

La expresión correspondiente para los elementos fuera de la diagonal es,

$$\rho_{nm} = \sum_k p_k c_n^{(k)} c_m^{(k)*}, \quad (1.11)$$

estos términos expresan los efectos de interferencia entre los estados $|u_n\rangle$ y $|u_m\rangle$, que aparecen cuando el estado $|\psi_k\rangle$ es una superposición lineal coherente de esos estados. A diferencia de las poblaciones, ρ_{nm} puede ser cero aún cuando ninguno de los productos $c_n^{(k)} c_m^{(k)*}$ sean iguales a cero, pues ρ_{nm} es una suma de números complejos. Si ρ_{nm} es cero, quiere decir que no hay algún efecto de interferencia entre los estados $|u_n\rangle$ y $|u_m\rangle$. Por otro lado, si ρ_{nm} es diferente de cero, significa que hay estados $|\psi_k\rangle$ que son una superposición coherente de $|u_n\rangle$ y $|u_m\rangle$, por lo que a estos elementos fuera de la diagonal se les llama *coherencias* [11].

Para aclarar el término de superposición lineal coherente consideremos una función de onda de la forma

$$\psi(x) = \sum_k a_k \phi_k(x), \quad (1.12)$$

donde a_k puede ser constante para el caso estacionario o, de manera más general, dependiente del tiempo. Ecuaciones de la forma (1.12) describen sistemas cuánticos coherentes, donde al obtener la densidad de partículas δ se encuentran términos de interferencia como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \sum_{k,k'} a_k^* a_{k'} \phi_k^*(x) \phi_{k'}(x) \\ &= \sum_k |a_k|^2 |\phi_k(x)|^2 + \sum_{k \neq k'} a_k^* a_{k'} \phi_k^*(x) \phi_{k'}(x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

la segunda suma representa los ya mencionados términos de interferencia. Sin embargo, hay situaciones en las cuales la superposición de interés físico es incoherente, en estos casos la densidad de partículas no contiene términos de interferencia [12].

1.2. Sistemas compuestos

Para la descripción de un sistema compuesto, es útil descomponer a dicho sistema en sus diferentes subsistemas. Asimismo, se puede imaginar la estructuración de un sistema compuesto a partir de la combinación de diferentes sistemas individuales.

Pero, ¿qué es un sistema compuesto? Hay sistemas cuánticos particulares que exhiben una estructura interna; en estos sistemas es posible distinguir dos o más subsistemas. Un sistema cuántico compuesto es un sistema al cual es posible descomponer en dos o más subsistemas. Cada uno de éstos es, a su vez, un sistema cuántico. Un ejemplo muy simple es una cadena de iones; en este caso, cada ión es un subsistema cuántico [13].

Formalmente, el espacio de Hilbert H asociado a un sistema compuesto o a un sistema multipartita es el resultante del producto tensorial de los espacios de Hilbert correspondientes a cada uno de los subsistemas. Así, si se tienen dos espacios de Hilbert H^A y H^B , con sus respectivas dimensiones $\dim H^A$ y $\dim H^B$, no necesariamente iguales, entonces el espacio de Hilbert H^{AB} del sistema total es resultado del producto tensorial

$$H^{AB} = H^A \otimes H^B. \quad (1.14)$$

El producto tensorial de vectores de diferentes espacios de Hilbert está contenido en el producto tensorial de dichos espacios. Esto quiere decir que, dado un vector $|\phi^A\rangle \in H^A$, y un vector $|\psi^B\rangle \in H^B$, entonces el producto de estos vectores se denotará como $|\phi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle = |\phi^A\rangle|\psi^B\rangle \in H^{AB}$.

De la definición (1.14) se toma una base $\{|n^A\rangle\}$ de H^A , y una base $\{|m^B\rangle\}$ del espacio de Hilbert H^B . Entonces $\{|n^A\rangle \otimes |m^B\rangle\}$ es una base del espacio H^{AB} , por lo que

$$\dim H^{AB} = (\dim H^A) \cdot (\dim H^B). \quad (1.15)$$

De lo anterior, se sigue que cualquier vector $|\psi^{AB}\rangle \in H^{AB}$ puede ser expresado de la siguiente manera:

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n,m} a_{nm} |n^A\rangle |m^B\rangle, \quad (1.16)$$

donde $\sum_{nm} |a_{nm}|^2 = 1$.

1.2.1. Estados reducidos

Cuando se tiene un sistema compuesto y se quiere describir el estado únicamente de uno de los subsistemas, la operación matemática que nos permite extraer dicha información es la traza parcial. Sea \hat{O}^{AB} un operador en H^{AB} ; la traza parcial de \hat{O} sobre el subespacio A se define como

$$Tr_A[\hat{O}^{AB}] := \sum_n \langle n^A | \hat{O}^{AB} | n^A \rangle, \quad (1.17)$$

con $\{|n^A\rangle\}$ una base de H^A . El operador resultante es un operador en el espacio H^B .

La traza total, definida como

$$Tr[\hat{O}^{AB}] := Tr_{AB}[\hat{O}^{AB}] = \sum_{nm} \langle m^B n^A | \hat{O}^{AB} | n^A m^B \rangle, \quad (1.18)$$

con $\{|n^A\rangle\}$ y $\{|m^B\rangle\}$ son bases de los espacios H^A y H^B , respectivamente, es una serie de trazas parciales, como se ilustra a continuación

$$Tr_{AB}[\hat{O}^{AB}] = Tr_A[Tr_B[\hat{O}^{AB}]] = Tr_B[Tr_A[\hat{O}^{AB}]]. \quad (1.19)$$

Si $\hat{O} = \rho$, entonces $\hat{O}^A = Tr_B \rho = \rho^A$, lo cual define a los estados reducidos, donde ρ^A representa al estado del subsistema A [14].

1.3. Operaciones cuánticas

Las operaciones más generales permitidas por las leyes de la mecánica cuántica son las transformaciones (evoluciones) unitarias, que esquemáticamente pueden ser representadas de la siguiente manera:

$$\rho \mapsto U\rho U^\dagger = \mathcal{L}(\rho), \quad (1.20)$$

donde $U = \exp(-\frac{i\widehat{H}t}{\hbar})$, además $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$ y \mathcal{L} representa aquí a una operación cuántica, \widehat{H} es el hamiltoniano del sistema.

Para describir la dinámica de un sistema abierto, es decir, de un sistema (S + E), donde S es un subsistema y E es otro subsistema al cual está acoplado S y se le llamará ambiente, se requiere de un hamiltoniano que contenga la interacción entre el sistema S y el ambiente E como se describe a continuación:

$$H = H^S \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H^E + \lambda V^{SE}, \quad (1.21)$$

donde H^S y H^E son los correspondientes hamiltonianos del sistema y del ambiente, respectivamente; mientras que V^{SE} es el término de acoplamiento del sistema y el ambiente, cuya constante de acoplamiento es λ [15].

Tratándose de un sistema abierto, la evolución de S no sólo será de acuerdo a su propia dinámica, sino también a la interacción con el ambiente. La solución a este problema se presentará en base a los operadores de Kraus.

1.3.1. Operadores de Kraus

Si se tiene un sistema S en un estado inicial ρ_S , acoplado con un ambiente E , que al inicio de la interacción se encuentra en su estado base, la evolución del sistema completo S+E se expresa de la siguiente manera:

$$\rho(t) = U_{SE}(\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0|)U_{SE}^\dagger, \quad (1.22)$$

donde U_{SE} es el operador de evolución del sistema completo.

En este caso se está tratando con un sistema compuesto y, como ya se vió en la sección (1.2.1), si se quisiera extraer información únicamente del sistema S, lo que se tendría que hacer es calcular la traza parcial sobre el ambiente E, utilizando la base ortonormal $\{|\mu\rangle\}$ para H^E , y aplicando la fórmula (1.17)

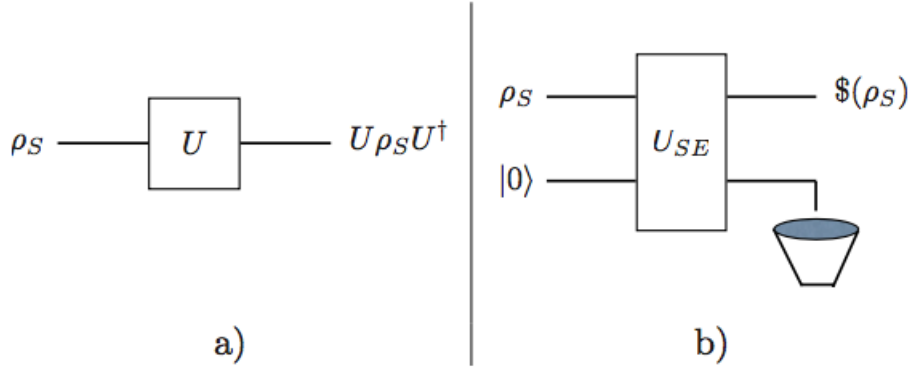


Figura 1.1: Dinámica unitaria. a) Sistema cerrado. b) Sistema abierto. ρ_S describe la evolución de S cuando se ha calculado la traza parcial con respecto de E , véase ecuación (1.23) (Figura tomada de [15]).

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) &= \text{Tr}_E\{\rho(t)\} \\
&= \sum_{\mu} \langle \mu | U_{SE} (\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0|) U_{SE}^\dagger | \mu \rangle \\
&= \sum_{\mu} \langle \mu | U_{SE} | 0 \rangle \rho_S(0) \langle 0 | U_{SE}^\dagger | \mu \rangle \\
&= \sum_{\mu} K_{\mu} \rho_S(0) K_{\mu}^\dagger.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

donde

$$K_{\mu} = \langle \mu | U_{SE} | 0 \rangle \tag{1.24}$$

es el denominado **operador de Kraus**, que actúa solamente sobre el espacio de Hilbert del sistema S .

Este resultado representa la evolución, no unitaria, del sistema S . Dicha evolución está descrita por un **canal cuántico**, término adoptado por su analogía con la comunicación clásica [15].

Propiedades de los operadores de Kraus

Es necesario que una evolución general de un estado cuántico preserve la traza y que pueda ser descrita con un mapeo completamente positivo, para que la normalización de los estados se conserve. Aquí se verá que los operadores de Kraus cumplen esas características.

Los operadores de Kraus tienen las siguientes propiedades:

- a) Transforman vectores de un espacio H^S en vectores de H^S .
- b) Son operadores lineales. Sea $\{|m\rangle\}$ una base de H^S , $K_\mu[\sum_m a_m |m\rangle] = \sum_m a_m K_\mu |m\rangle$, con $a_m \in \mathbb{C}$.
- c) Cumplen con $\sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{I}_S$, dado que

$$\begin{aligned} \sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu &= \sum_\mu \langle 0|U_{SE}^\dagger|\mu\rangle\langle\mu|U_{SE}|0\rangle \\ &= \langle 0|U_{SE}^\dagger(\sum_\mu |\mu\rangle\langle\mu|)U_{SE}|0\rangle = \mathbb{I}_S. \end{aligned}$$

Para poder utilizar los operadores de Kraus, a continuación se verificará que conservan las propiedades de la matriz de densidad.

1. $Tr[\rho_S(t)] = 1$,

$$\begin{aligned} Tr[\sum_\mu K_\mu \rho_S(0) K_\mu^\dagger] &= \sum_\mu Tr[K_\mu \rho_S(0) K_\mu^\dagger] \\ &= \sum_\mu Tr[K_\mu^\dagger K_\mu \rho_S(0)] \\ &= Tr[\sum_\mu (K_\mu^\dagger K_\mu) \rho_S(0)], \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde se utilizó la propiedad cíclica de la traza. Utilizando ahora la propiedad c),

$$Tr[\rho_S(t)] = Tr[\rho_S(0)\mathbb{I}] = Tr\rho_S(0) = 1. \quad (1.26)$$

2. La evolución del sistema S es hermitiana,

$$\begin{aligned}
\rho_S^\dagger(t) &= [\sum_{\mu} K_{\mu} \rho_S(0) K_{\mu}^\dagger]^\dagger \\
&= \sum_{\mu} K_{\mu} \rho_S^\dagger(0) K_{\mu}^\dagger \\
&= \rho_S(t),
\end{aligned} \tag{1.27}$$

aquí se usó la hermiticidad de ρ_S^\dagger .

3. Para comprobar que la dinámica reducida de S es positiva definida, considérese un vector de estado $|\phi\rangle \in H^S$,

$$\langle \phi | \rho_S(t) | \phi \rangle = \sum_{\mu} \langle \phi | K_{\mu} \rho_S(0) K_{\mu}^\dagger | \phi \rangle. \tag{1.28}$$

Ya se mencionó que los operadores de Kraus envían vectores de un espacio H^S en vectores del mismo espacio, por lo que podemos definir la acción de estos operadores en la ecuación (1.28) como $K_{\mu}^\dagger |\phi\rangle := |\phi_{\mu}\rangle \in H^S$, es así que

$$\langle \phi | \rho_S(t) | \phi \rangle = \sum_{\mu} \langle \phi_{\mu} | \rho_S(0) | \phi_{\mu} \rangle \geq 0, \tag{1.29}$$

pues el operador de densidad $\rho_S(0)$ es positivo definido.

1.3.2. Canales y mapeos cuánticos

Como ya se vió, los canales cuánticos son transformaciones completamente positivas que conservan la traza y permiten obtener información de la dinámica no unitaria del sistema.

Los canales cuánticos que serán analizados dentro de este trabajo son el *Amplitude Damping Channel* y el *Dephasing Channel*, **ADC** y **DC**, respectivamente.

Para entrar al tema de los dos diferentes canales cuánticos a estudiar, hay que hacer énfasis en que los sistemas con los cuales se trabajará a partir de esta sección en adelante son qubits. Un qubit es un sistema de dos niveles,

los cuales se denotarán como $|0\rangle$ (estado base) y $|1\rangle$ (estado excitado) [17]. Algunos de los ejemplos más representativos de estos sistemas son los átomos de dos niveles; partículas con espín $\frac{1}{2}$; y la polarización de los fotones [14].

Para obtener el mapeo cuántico que caracteriza a la evolución de $\rho_S(t)$ retomamos la ecuación (1.23), de donde al realizar la traza parcial en diferentes bases se obtienen diferentes conjuntos de operadores de Kraus equivalentes. Se sabe que hay a lo más d^2 operadores de Kraus independientes, donde d es la dimensión del espacio de Hilbert de S . Esto implica, considerando la definición de los operadores de Kraus (ecuación 1.24), que si $\{|\phi_i\rangle\}$ es una base en el espacio correspondiente a S , entonces la evolución dinámica de S correspondiente a los operadores de Kraus $K_\mu = 0, \dots, d^2 - 1$ puede ser derivada de una evolución unitaria de $S+E$ dada por el siguiente mapa:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle|0\rangle &\rightarrow K_0|\phi_1\rangle|0\rangle + \dots + K_{d^2-1}|\phi_1\rangle|d^2-1\rangle, \\ |\phi_2\rangle|0\rangle &\rightarrow K_0|\phi_2\rangle|0\rangle + \dots + K_{d^2-1}|\phi_2\rangle|d^2-1\rangle, \\ &\vdots \\ |\phi_d\rangle|0\rangle &\rightarrow K_0|\phi_d\rangle|0\rangle + \dots + K_{d^2-1}|\phi_d\rangle|d^2-1\rangle, \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde los operadores K_i actúan sobre S [15].

Los operadores de Kraus tienen una expresión matricial cuyos elementos están dados en términos de la base del sistema S de la siguiente manera:

$$\langle n_S|K_l|m_S\rangle := \langle n_S l_E|U|m_S 0_E\rangle, \quad (1.31)$$

los subíndices S y E corresponden al sistema y ambiente respectivamente [16].

Amplitude Damping Channel

Este canal tiene la característica de representar una interacción disipativa entre el qubit S y su ambiente E , pues existe una disipación de la energía del sistema S . El ejemplo más representativo de una interacción modelada

por este canal es la emisión espontánea de un fotón por un átomo de dos niveles, dentro de un ambiente de un campo de modos electromagnéticos a temperatura cero.

Esta interacción se modela de la manera siguiente

$$\begin{aligned} U_{ADC}(p)|0\rangle_S|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_S|0\rangle_E \\ U_{ADC}(p)|1\rangle_S|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p(t)}|1\rangle_S|0\rangle_E + \sqrt{p(t)}|0\rangle_S|1\rangle_E, \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde $p(t) \in [0, 1]$ y $U_{ADC}(p)$ es la transformación que corresponde a este canal. En lo que sigue se omitirá la dependencia del tiempo del parámetro p .

La primer línea del mapeo corresponde al caso en el que no haya alguna excitación inicial en el sistema, entonces éste y su ambiente permanecen en el mismo estado. La segunda línea muestra que, si se presenta alguna excitación en el sistema inicialmente, éste se quedará en ese estado excitado con una probabilidad $(1 - p)$, o la excitación se transmitirá al ambiente con una probabilidad p .

Los correspondientes operadores de Kraus se obtendrán considerando la base computacional $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación (1.31).

▪ K_0 :

$$\begin{aligned} {}_S\langle 0|K_0|0\rangle_S &= {}_{SE}\langle 00|U_{ADC}|00\rangle_{SE} \\ &= {}_{SE}\langle 00|00\rangle_{SE} = 1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} {}_S\langle 0|K_0|1\rangle_S &= {}_{SE}\langle 00|U_{ADC}|10\rangle_{SE} \\ &= {}_{SE}\langle 00|(\sqrt{1-p}|10\rangle_{SE} + \sqrt{p}|01\rangle_{SE}) = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}
{}_S\langle 1|K_0|0\rangle_S &= {}_{SE}\langle 10|U_{ADC}|00\rangle_{SE} \\
&= {}_{SE}\langle 10|00\rangle_{SE} = 0.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
{}_S\langle 1|K_0|1\rangle_S &= {}_{SE}\langle 10|U_{ADC}|10\rangle_{SE} \\
&= {}_{SE}\langle 10|(\sqrt{1-p}|10\rangle_{SE} + \sqrt{p}|01\rangle_{SE}) = \sqrt{1-p}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Para obtener el operador K_1 se obtienen tambien los elementos de matriz.

▪ K_1 :

$$\begin{aligned}
{}_S\langle 0|K_1|0\rangle_S &= {}_{SE}\langle 01|U_{ADC}|00\rangle_{SE} \\
&= {}_{SE}\langle 01|00\rangle_{SE} = 0.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}
{}_S\langle 0|K_1|1\rangle_S &= {}_{SE}\langle 01|U_{ADC}|10\rangle_{SE} \\
&= {}_{SE}\langle 01|(\sqrt{1-p}|10\rangle_{SE} + \sqrt{p}|01\rangle_{SE}) = \sqrt{p}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}
{}_S\langle 1|K_1|0\rangle_S &= {}_{SE}\langle 11|U_{ADC}|00\rangle_{SE} \\
&= {}_{SE}\langle 11|00\rangle_{SE} = 0.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
{}_S\langle 1|K_1|1\rangle_S &= {}_{SE}\langle 11|U_{ADC}|10\rangle_{SE} \\
&= {}_{SE}\langle 11|(\sqrt{1-p}|10\rangle_{SE} + \sqrt{p}|01\rangle_{SE}) = 0.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Por lo que los operadores de Kraus son los siguientes:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hay que destacar la generalidad de este tipo de mapeos, pues p representa en general una parametrización del tiempo, donde $p = 0$ en $t = 0$ y $p = 1$ cuando $t \rightarrow \infty$, y la parametrización depende del problema específico a tratar.

Dephasing Channel

El mapeo correspondiente al canal DC es el siguiente:

$$\begin{aligned} U_{DC}(p)|0\rangle_S|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_S|0\rangle_E \\ U_{DC}(p)|1\rangle_S|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p(t)}|1\rangle_S|0\rangle_E + \sqrt{p(t)}|1\rangle_S|1\rangle_E, \end{aligned} \quad (1.41)$$

aquí, al igual en el caso ADC p es una parametrización del tiempo tal que $p = 0$ en $t = 0$ y $p = 1$ cuando $t \rightarrow \infty$, en lo que sigue se omitirá la dependencia de t en la notación.

Contrariamente al ADC, el canal DC modela una interacción no disipativa, es decir el sistema S no pierde energía. Una manera de ver este tipo de interacciones es como una dispersión elástica, en la que el estado del sistema de dos niveles no cambia; mientras que el estado del ambiente experimenta una transición sin ningún intercambio de energía. Lo cual significa, siguiendo la línea de la dispersión elástica, que esa transición sin intercambio de energía se debe a un cambio de momento de las partículas constituyentes [14].

De manera análoga al ADC se pueden obtener los operadores de Kraus correspondientes al DC, los cuales son

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}.$$

[18].

1.3.3. Decoherencia

La decoherencia es un proceso por el cual las propiedades clásicas emergen de manera irreversible debido a la inevitable interacción de un sistema con los grados de libertad del ambiente [19].

Como ya se vio en la sección (1.1.3), los términos fuera de la diagonal de una matriz de densidad corresponden a la coherencia. Cuando los únicos términos distintos de cero de una matriz de densidad son los términos en la diagonal, el sistema ha perdido sus propiedades cuánticas debido a un proceso de decoherencia.

A continuación se mostrará que los canales ADC y DC son de decoherencia. Sea $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ un estado inicial general de un qubit, es decir, a $p = 0$. De acuerdo a la ecuación (1.23) la evolución de dicho estado es

$$\rho_{ADC}(t) = |\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p & \alpha\beta^* \sqrt{1-p} \\ \alpha^* \beta \sqrt{1-p} & |\beta|^2 (1-p) \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

De esta ecuación se puede ver que la coherencia decrece conforme p aumenta. Para el mismo estado, pero para el caso DC, la evolución está dada por la siguiente expresión:

$$\rho_{DC}(t) = |\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \sqrt{1-p} \\ \alpha^* \beta \sqrt{1-p} & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Al igual que en el caso anterior, se observa que la coherencia decrece conforme crece p [15]. Evaluando en ambos casos $p = 1$ se llega a que en ambas expresiones, (1.42) y (1.43), los términos fuera de la diagonal son iguales a cero, y como ya se explicó anteriormente, estos términos corresponden a las coherencias.

Los procesos de decoherencia son de gran importancia desde la perspectiva del estudio de los fundamentos de la mecánica cuántica y el límite entre ésta y la física clásica; por otro lado, la comprensión de la decoherencia nos lleva a la posibilidad de manejar de mejor manera la pérdida de coherencia y de enredamiento, debido a las posibles aplicaciones de estas propiedades en el ámbito de la información cuántica.

Debido a la inexistencia de sistemas completamente aislados, la interacción entre un sistema y el ambiente induce un proceso de decoherencia generando la pérdida de las propiedades cuánticas del sistema, específicamente, existe una pérdida de enredamiento.

1.4. Enredamiento

Los estados $|\psi\rangle$ de un sistema compuesto $A+B$ que se pueden escribir como un producto de estados puros en la forma $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle|\phi_B\rangle$, son llamados **estados separables**. Por otro lado, aquellos estados que no puedan ser escritos como un producto de estados puros, es decir, si no hay estados locales $|\psi_1\rangle \in H^1$ y $|\psi_2\rangle \in H^2$, tales que el estado del sistema compuesto $|\Psi\rangle$ pueda ser escrito como un producto, o sea,

$$\text{no existen } |\psi_1\rangle \in H^1, |\psi_2\rangle \in H^2 \text{ tales que } |\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle,$$

entonces, en este caso, a $|\Psi\rangle$ se le llama **estado puro enredado**.

Considerando que el valor esperado de un operador \hat{A} está dado por $\langle\hat{A}\rangle = Tr(\rho A)$, entonces el valor esperado del producto de dos observables \hat{A} y \hat{B} para un estado mezcla está dado por:

$$\langle\hat{A}\hat{B}\rangle = \sum_k p_k Tr_A(\rho_k^A \hat{A}) Tr_B(\rho_k^B \hat{B}), \quad (1.44)$$

lo cual es diferente del producto de los valores esperados.

$$\begin{aligned} \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle &= \sum_k p_k \langle\hat{A}\rangle_k \sum_l p_l \langle\hat{B}\rangle_l \\ &= \sum_{kl} p_k p_l Tr_A(\rho_k^A \hat{A}) Tr_B(\rho_l^B \hat{B}). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Como ya se mencionó en secciones anteriores, los estados más frecuentes no son los estados puros, sino los estados mezcla, siendo este el caso, un **estado mezcla separable** ρ está descrito por la suma convexa de estados producto, es decir

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (1.46)$$

con $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$.

De manera análoga al caso de los estados puros enredados, se tiene lo siguiente:

*Un **estado mezcla enredado** ρ es aquel para el cual no existen estados locales ρ_i^A , ρ_i^B y pesos no negativos p_i , con los cuales se pueda expresar a ρ como una suma convexa, como se muestra en la ecuación (1.46) [13].*

1.5. Cuantificando el enredamiento

En este punto es importante retomar la idea central de este trabajo: el estudio de la dinámica del enredamiento. Como ya se ha dicho, los sistemas abiertos están sujetos a procesos de decoherencia debido a su interacción con el ambiente. Siempre que se tenga un sistema compuesto por al menos dos subsistemas enredados, el enredamiento inicial entre ellos se degrada debido a la interacción con el ambiente. De aquí surge una interesante pregunta, ¿será que este enredamiento únicamente se degrade, o sucederá algo más?

Para encontrar la respuesta a estas interrogantes se requiere de cuantificadores de enredamiento que puedan medirlo a lo largo de un proceso.

1.5.1. Concurrencia

La concurrencia es un cuantificador de enredamiento comúnmente empleado en sistemas de un número finito de niveles, y en particular nos permite determinar el grado de enredamiento en sistemas compuestos de qubits.

Para cuantificar el enredamiento entre A y B de un sistema S bipartita, es decir, $S = A + B$, siempre que S se encuentre en un estado puro, se utiliza la medida propuesta en [8],

$$C_{AB} = \sqrt{2(1 - \text{Tr}\rho_A^2)} = \sqrt{2(1 - \text{Tr}\rho_B^2)}. \quad (1.47)$$

Esta expresión define a la concurrencia C_{AB} como una medida de enredamiento entre los subsistemas A y B .

Si, por otro lado, se tiene un estado mezcla de dos qubits, es decir, un estado mezcla donde A y B representen cada uno a un único qubit, entonces la concurrencia, propuesta en [9], se define como,

$$C(\rho_{AB}) \equiv \max\{0, \Lambda\} = C_{AB}, \quad \text{donde} \quad (1.48)$$

$$\Lambda \equiv \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4},$$

cada λ_i corresponde a un valor propio de la matriz

$\rho_{AB}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$; estos valores propios están ordenados decrecientemente. Aquí “*” indica la matriz conjugada de ρ_{AB} , mientras que σ_y es la matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

1.5.2. Desigualdad de la monogamia

En términos generales, la desigualdad de la monogamia establece que en un sistema multipartita de N qubits, el enredamiento de un qubit con el resto del sistema es mayor o igual a la suma de los enredamientos entre dicho qubit y cada uno de los qubits restantes, cuando dichos enredamientos están cuantificados mediante el cuadrado de la concurrencia. La expresión matemática de esta relación es

$$C_{i/j_1j_2\dots j_{N-1}}^2 \geq C_{ij_1}^2 + C_{ij_2}^2 + \dots + C_{ij_{N-1}}^2. \quad (1.49)$$

Hay que tener presente que la ecuación (1.49) funciona bien para particiones de tipo $1 : N - 1$, para otro tipo de particiones no hay certeza de su validez

en general [6]. Sin embargo se ha derivado una desigualdad de la monogamia para sistemas de $2N$ qubits con validez para particiones de la forma $2 : 2N - 2$ [7],

$$C_{ii'/j_1j'_1\dots j_{N-1}j'_{N-1}}^2 \geq \sum_{m=1}^{N-1} C_{ij_m}^2 + C_{ij'_m}^2 + C_{i'j_m}^2 + C_{i'j'_m}^2. \quad (1.50)$$

1.5.3. Enredamiento residual

La desigualdad (1.49) contiene explícitamente todo el enredamiento bipartido que involucra al i -ésimo qubit y abre el paso a un término extra llamado enredamiento residual, definido de la siguiente forma

$$R_i \equiv C_{i/j_1j_2\dots j_{N-1}}^2 - \sum_{m=1}^{N-1} C_{ij_m}^2. \quad (1.51)$$

Teniendo en cuenta que el enredamiento residual R_i es positivo, a partir de su definición es posible reescribir la ecuación (1.49) como:

$$C_{i/j_1j_2\dots j_{N-1}}^2 = C_{ij_1}^2 + C_{ij_2}^2 + \dots + C_{ij_{N-1}}^2 + R_i. \quad (1.52)$$

La importancia de esta relación recae en el término correspondiente al enredamiento residual, ya que al no poder ser un término de enredamiento bipartido, pues, como ya se explicó, todo el enredamiento bipartido posible del i -ésimo qubit está incluido en el resto de la ecuación, R_i contiene el enredamiento multipartido, es decir, enredamiento entre más de dos partes del sistema.

Para el caso específico de un estado puro de tres qubits (ijk),

$$|\phi\rangle = \sum_{ijk=0,1} a_{ijk} |ijk\rangle, \quad (1.53)$$

al enredamiento residual se le conoce como $\mathcal{3}$ -*tangle*, τ_{ijk} [20],

$$C_{i/jk}^2 = C_{ij}^2 + C_{ik}^2 + \tau_{ijk}. \quad (1.54)$$

A partir de la siguiente ecuación es posible obtener τ_{ijk}

$$\tau_{ijk} - C_{ij}^2 - C_{ik}^2 = 4|d_1 - 2d_2 + 4d_3|, \quad (1.55)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{100}^2 a_{011}^2; \\ d_2 &= a_{000} a_{111} a_{011} a_{100} + a_{000} a_{111} a_{101} a_{010} + a_{000} a_{111} a_{110} a_{001} + \\ &\quad a_{011} a_{100} a_{101} a_{010} + a_{011} a_{100} a_{110} a_{001} + a_{101} a_{010} a_{110} a_{001}; \\ d_3 &= a_{000} a_{110} a_{101} a_{011} + a_{111} a_{001} a_{010} a_{100}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

El *3-tangle* tiene la característica de ser invariante ante las diferentes permutaciones de los subíndices. Por tratarse de un término de enredamiento residual, el *3-tangle* representa una cuantificación de un enredamiento entre todos los qubits del sistema [20].

Un ejemplo clásico es el correspondiente al estado Greenberger-Horne-Zeilinger,

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad (1.57)$$

para este caso, el *3-tangle* es igual a 1, ya que para el estado GHZ se tiene que $C_{i/jk}^2 = 1$, con $C_{ij}^2 = C_{ik}^2 = 0$ y de la ecuación (1.54) se llega a que $\tau_{ijk} = 1$. En contraste con el estado W,

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \quad (1.58)$$

para el cual, $\tau_{ijk} = 0$.

1.5.4. Concurrencia multipartida

Existe una medida, propuesta como generalización de la concurrencia (ecuación 1.47) para estados puros bipartitas, con la cual es posible cuantificar el entrelazamiento multipartido de un sistema de N qubits. La medida está definida para estados puros $|\Psi\rangle$ normalizados [2],

$$C_N(\Psi) = 2^{1-\frac{N}{2}} \sqrt{(2^N - 2) - \sum_i Tr \rho_i^2}, \quad (1.59)$$

donde la suma corre sobre todas las matrices de densidad reducidas ρ_i del sistema global.

La concurrencia multipartida C_N se anula cuando el sistema de N qubits es N -separable, es decir, para el caso de un estado $|\Psi_N\rangle = \otimes_{i=1}^N |\phi_i\rangle$, donde $|\phi_i\rangle$ denota un estado puro del i -ésimo subsistema. Por otro lado, el máximo de esta medida corresponde al enredamiento de estados GHZ, que para N qubits es $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}$, estos son estados máximamente enredados [2].

Por último, otra característica de esta medida es que cuando se aplica a un estado W (ecuación 1.58), el enredamiento multipartido es distinto de cero; esto diferencia a C_N del enredamiento tripartido τ_{ijk} , el cual resulta ser cero para el caso del estado W .

Capítulo 2

Dinámica de enredamiento en un sistema de 4 qubits sujeto a procesos de decoherencia

2.1. Dinámica del enredamiento y sus invariantes

Consideremos dos subsistemas (S_1, S_2) inicialmente enredados. Cada uno de ellos interactuará únicamente con su respectivo ambiente (E_1, E_2) , los cuales se encontrarán en su estado base al inicio de la interacción. Todos estos subsistemas serán tratados como qubits, por lo que el estado puro inicial del sistema completo es

$$|\Psi(0)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = |\psi(0)\rangle_{S_1 S_2} |00\rangle_{E_1 E_2}, \quad (2.1)$$

donde $|\psi(0)\rangle_{S_1 S_2} = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle + \delta|01\rangle + \gamma|10\rangle$.

Las interacciones entre cada sistema S_i y su ambiente E_i serán representadas mediante transformaciones unitarias U .

Como se supondrá que no habrá interacción entre los sistemas ni entre los ambientes, se propondrá una transformación unitaria de la forma $U(t) = U_{S_1 E_1}(t) U_{S_2 E_2}(t)$ que actuará sobre $|\Psi(0)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2}$ y que representa la

interacción de cada sistema con su ambiente; entonces

$$|\Psi(t)\rangle = U_{S_2E_2}U_{S_1E_1}|\Psi(0)\rangle. \quad (2.2)$$

De aquí se puede obtener la matriz de densidad en función del tiempo,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = U_{S_2E_2}U_{S_1E_1}|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U_{S_1E_1}^\dagger U_{S_2E_2}^\dagger \\ &= U_{S_2E_2}U_{S_1E_1}\rho(0)U_{S_1E_1}^\dagger U_{S_2E_2}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para obtener información acerca del subsistema (S_1E_1) , o bien, del subsistema (S_2E_2) , basta con calcular la traza parcial. Por ejemplo, la matriz reducida $\rho_{S_1E_1}$ está dada por

$$\begin{aligned} \rho_{S_1E_1}(t) &= Tr_{(E_2S_2)}\rho(t) \\ &= U_{S_1E_1}[Tr_{(S_2E_2)}U_{S_2E_2}\rho(0)U_{S_2E_2}^\dagger]U_{S_1E_1}^\dagger \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$= U_{S_1E_1}\rho_{S_1E_1}(0)U_{S_1E_1}^\dagger. \quad (2.5)$$

Las matrices de densidad reducidas $\rho_{S_1E_1}(0)$ y $\rho_{S_2E_2}(0)$ se obtienen a partir de la ecuación (2.1), y de calcular las respectivas trazas parciales. De lo cual resulta:

$$\rho_{S_1E_1}(0) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\delta|^2 & 0 & \alpha\gamma^* + \delta\beta^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\alpha^* + \beta\delta^* & 0 & |\gamma|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

$$\rho_{S_2E_2}(0) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 & 0 & \alpha\delta^* + \gamma\beta^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta\alpha^* + \beta\gamma^* & 0 & |\beta|^2 + |\delta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Estas matrices son de rango 2. Al evolucionar por medio de una transformación unitaria, conservarán su rango a lo largo de toda la evolución, por

lo que la matriz de densidad $\rho_{S_i E_i}(t)$ será también una matriz de rango 2. Esta observación tiene una consecuencia significativa, pues a pesar de que dicha matriz reducida corresponde a un sistema de dos qubits, este subsistema puede ser tratado como un único qubit a lo largo de toda la evolución.

Como el sistema completo está en un estado puro, es posible utilizar la relación (1.47) para obtener el enredamiento bipartido entre $(S_1 E_1)$ y $(S_2 E_2)$:

$$\begin{aligned} C_{S_1 E_1 / S_2 E_2}^2 &= 2[1 - \text{Tr} \rho_{S_1 E_1}^2(t)] = 2[1 - \text{Tr} \rho_{S_1 E_1}^2(0)] \\ &= 2[1 - \text{Tr} \rho_{S_2 E_2}^2(t)] = 2[1 - \text{Tr} \rho_{S_2 E_2}^2(0)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las últimas igualdades en cada línea de la ecuación (2.8) nos llevan a concluir que el enredamiento bipartido entre $(S_1 E_1)$ y $(S_2 E_2)$ es una cantidad que se conserva, pues es igual a lo largo de toda la evolución del sistema. A partir de esto se escribe el enredamiento total inicial ε_0^2 como sigue:

$$\varepsilon_0^2 \equiv C_{S_1 E_1 / S_2 E_2}^2 = C_{S_1 S_2}^2(0) = 4|\alpha\beta - \gamma\delta|^2. \quad (2.9)$$

Para analizar la distribución del enredamiento en nuestro sistema, es de gran utilidad recurrir a la desigualdad de la monogamia. A continuación se hará eso siguiendo el desarrollo presentado en [1].

Con la desigualdad de la monogamia (1.50) para una partición $2 : 2N - 2$ y la ecuación (2.9) se llega a lo siguiente

$$\varepsilon_0^2 = C_{S_1 E_1 / S_2 E_2}^2 = C_{S_1 S_2}^2 + C_{S_1 E_2}^2 + C_{E_1 S_2}^2 + C_{E_1 E_2}^2 + \mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2}, \quad (2.10)$$

donde $\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2} = C_{S_1 E_1 / S_2 E_2}^2 - (C_{S_1 E_2}^2 + C_{E_1 S_2}^2 + C_{E_1 E_2}^2)$ es el enredamiento residual correspondiente. La ecuación (2.10) expresa un invariante dinámico que contiene términos tanto de enredamiento bipartido, como multipartido. Para obtener un mejor significado de este invariante es necesario descomponer $\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2}$ en términos de enredamiento multipartido ya conocido, como se hará en lo que sigue.

A partir de la desigualdad de la monogamia (1.49) aplicada un sistema

de cuatro qubits (i, j, k, l), se obtiene

$$C_{i/jkl}^2 = C_{ij}^2 + C_{ik}^2 + C_{il}^2 + R_i. \quad (2.11)$$

Para el caso $i = S_1, E_1$ se obtiene respectivamente,

$$C_{S_1/S_2E_1E_2}^2 = C_{S_1S_2}^2 + C_{S_1E_1}^2 + C_{S_1E_2}^2 + R_{S_1}, \quad (2.12)$$

y

$$C_{E_1/S_1S_2E_2}^2 = C_{E_1S_1}^2 + C_{E_1S_2}^2 + C_{E_1E_2}^2 + R_{E_1}. \quad (2.13)$$

Con estas dos ecuaciones y con ayuda de la ecuación (2.10); además, definiendo $\mathcal{R}_{ij} \equiv \mathcal{R}_{S_1E_1/S_2E_2} - (R_i + R_j)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{S_1E_1} &= \varepsilon_0^2 + 2C_{S_1E_1}^2 - (C_{S_1/S_2E_1E_2}^2 + C_{E_1/S_1S_2E_2}^2); \\ \mathcal{R}_{S_2E_2} &= \varepsilon_0^2 + 2C_{S_2E_2}^2 - (C_{S_2/S_1E_1E_2}^2 + C_{E_2/S_1S_2E_1}^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.14) son simétricas bajo el intercambio de los subíndices $S_1 \leftrightarrow S_2$, y $E_1 \leftrightarrow E_2$, así es que bastará con analizar el subsistema (S_1E_1) , pues el mismo análisis es aplicable al subsistema (S_2E_2) .

Por otro lado, ya se vio anteriormente que la matriz $\rho_{S_2E_2}$ preserva su rango a lo largo de la evolución, además dicho rango es 2, por lo que a esta matriz se le puede considerar un sistema de dos niveles. Bajo este argumento, es posible decir que lo que era un problema de cuatro qubits se ha reducido al hipotético sistema de tres qubits (Figura 2.1), pues a los qubits S_2 y E_2 los consideraremos como uno solo, analizaremos entonces el sistema $S_1E_1(S_2E_2)$, donde los paréntesis denotan el tratamiento del subsistema (E_2S_2) como un solo sistema de dos niveles. De esta manera se tiene un estado puro de un sistema de tres qubits, donde únicamente habrá interacción entre los subsistemas S_1 y E_1 . Por simetría, un análisis similar se puede hacer para $S_2E_2(S_1E_1)$.

De la ecuación (2.2) se puede ver que el estado $|\Psi(t)\rangle$ se obtiene de aplicar $U_{S_2E_2}$ al estado $U_{S_1E_1}|\Psi(0)\rangle$. Se puede considerar, en general, que del estado $U_{S_1E_1}|\psi(0)\rangle$ se obtendrá un enredamiento residual entre el trío de qubits

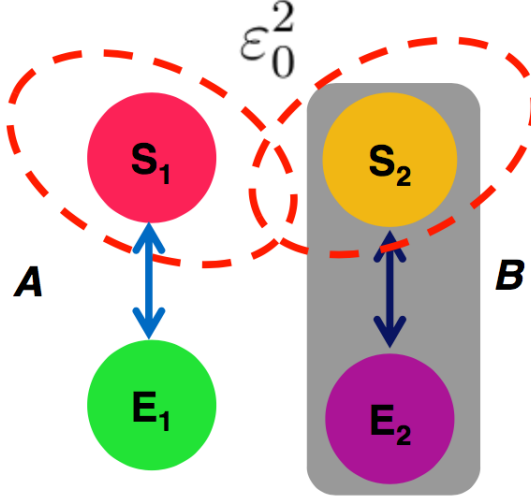


Figura 2.1: Es posible considerar al sistema de cuatro qubits como un sistema de tres qubits, donde el subsistema $S_1E_1 = A$, o el subsistema $(S_2E_2) = B$, puede ser considerado como un sistema de dos niveles.

S_1 , E_1 , (S_2E_2) , que es el 3 -tangle de la relación (1.54), que se denotará como $\tau_{E_1S_1(E_2S_2)}$. Una observación de este enredamiento residual es que no representa enredamiento entre los cuatro qubits.

El enredamiento tripartido $\tau_{E_1S_1(E_2S_2)}$ permanecerá invariante después de aplicar la transformación unitaria $U_{S_2E_2}$ al estado $U_{S_1E_1}|\psi(0)\rangle$, debido a la invariancia del enredamiento bajo transformaciones unitarias locales. Entonces, al aplicar $U_{S_2E_2}$ al estado $U_{S_1E_1}|\psi(0)\rangle$ el estado resultante $|\Psi(t)\rangle$, tiene un enredamiento multipartido $\tau_{E_1S_1(E_2S_2)}$ cuyo valor es independiente de la transformación $U_{S_2E_2}$. Por otro lado, observando de la primer ecuación (2.14) que el enredamiento residual $\mathcal{R}_{S_1E_1}$ depende únicamente de las matrices de densidad reducidas ρ_{S_1} , ρ_{E_1} y $\rho_{S_1E_1}$, se puede concluir que también $\mathcal{R}_{S_1E_1}$ permanece invariante ante la transformación unitaria $U_{S_2E_2}$.

De esta forma, con la finalidad de calcular $\tau_{E_1S_1(E_2S_2)}$ y $\mathcal{R}_{S_1E_1}$, se puede considerar que la transformación $U_{S_2E_2}$ es la identidad, pues ello no influirá en el cálculo de $\tau_{E_1S_1(E_2S_2)}$, ni de $\mathcal{R}_{S_1E_1}$, dado que ambos permanecen invariantes ante dicha transformación. Bajo estas consideraciones el qubit correspondiente a E_2 permanecerá en un estado separable, mientras que el subsistema $(S_1S_2E_1)$ permanecerá en un estado puro; de esta manera el enredamien-

to residual tripartido se denotará como $\tau_{S_1 S_2 E_1}$ y se calcula con la relación (1.55). Es importante notar que aunque con estas condiciones $\tau_{E_1 S_1 (E_2 S_2)}$ es numéricamente igual al *3-tangle* $\tau_{S_1 S_2 E_1}$, dichas cantidades no tienen el mismo significado físico, sobre todo si se considerara una transformación unitaria $U_{S_2 E_2} \neq \mathbb{I}$.

Dado que $U_{S_2 E_2} = \mathbb{I}$ E_2 permanece en un estado separable y el resto de qubits conforman un estado puro durante toda la evolución, entonces es posible reescribir los términos $C_{S_1/S_2 E_1 E_2}^2$ y $C_{E_1/S_1 S_2 E_2}^2$ como $C_{S_1/S_2 E_1}^2$ y $C_{E_1/S_1 S_2}^2$, respectivamente. A estos nuevos términos se les aplica la ecuación (1.54),

$$C_{S_1/S_2 E_1}^2 = C_{S_1 S_2}^2 + C_{S_1 E_1}^2 + \tau_{S_1 S_2 E_1}; \quad (2.15)$$

$$C_{E_1/S_1 S_2}^2 = C_{E_1 S_1}^2 + C_{E_1 S_2}^2 + \tau_{S_1 S_2 E_1}. \quad (2.16)$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} C_{S_1/S_2 E_1 E_2}^2 + C_{E_1/S_1 S_2 E_2}^2 &= C_{S_1/S_2 E_1}^2 + C_{E_1/S_1 S_2}^2 \\ &= C_{S_1 S_2}^2 + C_{S_2 E_1}^2 + 2C_{S_1 E_1}^2 + 2\tau_{S_1 S_2 E_1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Con estas mismas hipótesis se ve que la ecuación (2.9) queda reducida,

$$\varepsilon_0^2 = C_{S_1 E_1/S_2 E_2}^2 = C_{S_1 S_2}^2 + C_{E_1 S_2}^2 + \tau_{S_1 S_2 E_1}. \quad (2.18)$$

De la sustitución de estas dos últimas ecuaciones en la ecuación del enredamiento residual $\mathcal{R}_{S_1 E_1}$ (ecuación 2.14), se llega a que

$$\mathcal{R}_{S_1 E_1} = -\tau_{S_1 E_1 (S_2 E_2)}. \quad (2.19)$$

Como se explicó antes, si bien este análisis se realizó bajo el supuesto de una transformación $U_{S_2 E_2} = \mathbb{I}$, el resultado de la ecuación (2.19) será válido para toda transformación $U_{S_2 E_2}$, dado que los términos en esta expresión de enredamiento residual son independientes de la misma.

Recordando la siguiente definición $\mathcal{R}_{ij} \equiv \mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2} - (R_i + R_j)$, usando la ecuación (2.19) entonces

$$\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2} = R_{S_1} + R_{E_1} - \tau_{S_1 E_1 (S_2 E_2)}. \quad (2.20)$$

Además, de la simetría del problema entre el subsistema $(S_1 E_1)$ y el subsistema $(S_2 E_2)$, también se tiene la siguiente relación:

$$\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2} = R_{S_2} + R_{E_2} - \tau_{S_2 E_2 (S_1 E_1)}. \quad (2.21)$$

Sumando las ecuaciones (2.20) y (2.21), y despejando el valor del enredamiento residual $\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2}$ se encuentra

$$\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2} = \frac{1}{2}[R_{S_1} + R_{S_2} + R_{E_1} + R_{E_2} - (\tau_{S_1 E_1 (S_2 E_2)} + \tau_{S_2 E_2 (S_1 E_1)})]. \quad (2.22)$$

Hasta este punto ya se ha conseguido descomponer al enredamiento residual $\mathcal{R}_{S_1 E_1 / S_2 E_2}$ en términos de diferentes enredamientos multipartidos bien definidos. Sin embargo, aún es posible descomponer a los enredamientos residuales R_i en términos más específicos.

Si partimos del hecho de que una matriz ρ_{kl} de rango 2 se puede estudiar como un sistema de dos niveles y, además, el sistema completo de cuatro qubits está en un estado puro, entonces es posible utilizar la ecuación (1.54) para realizar la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} C_{i/jkl}^2 &= C_{i/j(kl)}^2 = C_{ij}^2 + C_{i(kl)}^2 + \tau_{ij(kl)} \\ &= C_{ij}^2 + C_{ik}^2 + C_{il}^2 + \tau_{ij(kl)} + \tau_{ikl}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde el último término corresponde al enredamiento residual resultante de aplicar la descomposición de la ecuación (1.52) a $C_{i(kl)}^2$. Este nuevo término, τ_{ikl} , a pesar de ser muy parecido al enredamiento tripartido, no es el mismo, pues éste no es invariante ante la permutación de subíndices, como se quiere enfatizar al subrayar el subíndice i , ello se debe a que la matriz ρ_{ikl} no

representa un estado puro; los enredamientos tripartidos $\tau_{\underline{ikl}}$ y τ_{ikl} son iguales únicamente para el caso en que el subsistema ikl se encuentre en un estado puro.

Haciendo una comparación de la ecuación (2.23) con la ecuación de la descomposición para un sistema de cuatro qubits (ecuación 2.11) se obtiene

$$R_i = \tau_{\underline{ikl}} + \tau_{ij(kl)}. \quad (2.24)$$

Esto permite calcular $\tau_{\underline{ikl}}$, el cual no se podía calcular por ser un estado mezcla, como sigue

$$\tau_{\underline{ikl}} = C_{i/jkl}^2 - (C_{ij}^2 + C_{ik}^2 + C_{il}^2) - \tau_{ij(kl)}. \quad (2.25)$$

Volviendo al hecho de que los subsistemas (S_1E_1) y (S_2E_2) pueden ser tratados cada uno como un qubit es posible obtener los siguientes enredamientos residuales

$$\begin{aligned} R_{S_1} &= \tau_{\underline{S_1S_2E_2}} + \tau_{S_1E_1(S_2E_2)}; \\ R_{S_2} &= \tau_{\underline{S_2S_1E_1}} + \tau_{S_2E_2(S_1E_1)}; \\ R_{E_1} &= \tau_{\underline{E_1S_2E_2}} + \tau_{S_1E_1(S_2E_2)}; \\ R_{E_2} &= \tau_{\underline{E_2S_1E_1}} + \tau_{S_2E_2(S_1E_1)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Utilizando estas últimas cuatro relaciones en las ecuaciones (2.10) y (2.22) se llega a una importante expresión

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= C_{S_1S_2}^2 + C_{S_1E_2}^2 + C_{E_1S_2}^2 + C_{E_1E_2}^2 + \frac{1}{2}[\tau_{\underline{S_1S_2E_2}} + \tau_{\underline{S_2S_1E_1}} + \\ &\quad \tau_{\underline{E_1S_2E_2}} + \tau_{\underline{E_2S_1E_1}} + \tau_{S_1E_1(S_2E_2)} + \tau_{S_2E_2(S_1E_1)}]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se debe destacar que este resultado es válido para cualquier transformación unitaria $U = U_{S_1E_1}U_{S_2E_2}$, aplicada a cualquier estado de la forma (2.1).

La gracia de la ecuación (2.27) es que representa una conservación del enredamiento; del lado izquierdo de la ecuación se tiene una constante, el enredamiento total inicial del sistema, el cual restringe la dinámica de los términos del lado derecho, que contiene explícitamente términos de enreda-

miento bipartido y multipartido.

El enredamiento bipartido total es

$$\varepsilon_{BI} = C_{S_1 S_2}^2 + C_{S_1 E_2}^2 + C_{E_1 S_2}^2 + C_{E_1 E_2}^2; \quad (2.28)$$

mientras que el enredamiento multipartido total es

$$\varepsilon_{MULTI} = \frac{1}{2} [\tau_{\underline{S}_1 \underline{S}_2 E_2} + \tau_{\underline{S}_2 \underline{S}_1 E_1} + \tau_{\underline{E}_1 \underline{S}_2 E_2} + \tau_{\underline{E}_2 \underline{S}_1 E_1} + \tau_{S_1 E_1 (S_2 E_2)} + \tau_{S_2 E_2 (S_1 E_1)}]. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.27) será la herramienta principal durante el análisis de la dinámica del enredamiento en un sistema de cuatro qubits que será sometido a tres diferentes procesos de decoherencia.

2.2. Ejemplos de la dinámica de enredamiento en un sistema de 4 qubits

Se aplicará la ecuación de la invariancia del enredamiento (2.27) para analizar la dinámica de éste en el sistema de cuatro qubits descrito en la sección (2.1). Esta dinámica se analizará para tres casos que corresponden a tres evoluciones $U = U_{S_1 E_1} U_{S_2 E_2}$, y considerando que las evoluciones locales $U_{S_i E_i}$ están descritas por los mapas cuánticos presentados en la sección (1.3.2).

A partir del estado general descrito en la ecuación (2.1), es posible elegir $\delta = 0$ y $\gamma = 0$. Con esto se obtiene el estado inicial con el cual se trabajará en cada uno de los ejemplos:

$$|\psi(0)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = [\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle]_{S_1 S_2} |00\rangle_{E_1 E_2}, \quad (2.30)$$

donde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Es importante hacer énfasis en el hecho de que este estado describe efectivamente un estado enredado de los sistemas S_1 y S_2 . Esto se puede comprobar a

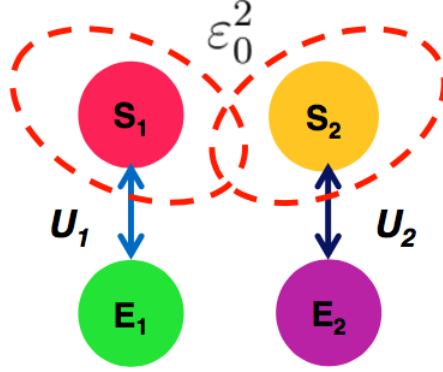


Figura 2.2: Esquema general que muestra a los dos sistemas enredados interactuando, cada uno, con su respectivo ambiente a través de una transformación unitaria U_i .

partir de la ecuación (2.9), obteniendo el siguiente valor para el enredamiento inicial: $\varepsilon_0^2 = 4|\alpha\beta|^2$.

2.2.1. Amplitude Damping Channel

En este primer caso consideraremos que la interacción entre sistemas y ambientes será modelada con el mapa cuántico *amplitude damping channel*, o ADC.

Para transformar el estado inicial (ecuación 2.30) se utilizará el mapa de la ecuación (1.32), con lo que se obtiene un estado evolucionado en función de $p(t)$:

$$\begin{aligned}
 |\psi(p)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = & \alpha|0000\rangle + \beta p|0011\rangle + \beta(1-p)|1100\rangle + \\
 & + \beta\sqrt{p(1-p)}|0110\rangle + \beta\sqrt{p(1-p)}|1001\rangle. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

A partir de este estado se obtiene la matriz de densidad que describe al sistema completo y con ésta es posible calcular todas las matrices de densidad reducidas, particularmente $\rho_{S_1 S_2}$, $\rho_{S_1 E_1}$, $\rho_{S_1 E_2}$, $\rho_{S_2 E_1}$, $\rho_{S_2 E_2}$, $\rho_{E_1 E_2}$, ρ_{S_1} , ρ_{S_2} , ρ_{E_1} y ρ_{E_2} (ver Apéndice, 3.0.1).

El estado (2.31) evaluado en $p = 1$ nos da un estado final

$$\begin{aligned} |\psi(p = 1)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} &= \alpha|0000\rangle + \beta|0011\rangle \\ &= (\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle)_{E_1 E_2} |00\rangle_{S_1 S_2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

el cual muestra que al final del proceso los sistemas S_1 y S_2 se encontrarán en un estado separable de los ambientes E_1 y E_2 . Esto se analizará más a detalle a continuación.

De las matrices reducidas ρ_i y con la ecuación (1.47) se calculan las concurrencias de la forma $C_{i/jkl}^2$, obteniéndose lo siguiente

$$\begin{aligned} C_{S_1/S_2 E_1 E_2}^2 &= C_{S_2/S_1 E_1 E_2}^2 = 4|\alpha\beta|^2(1-p) + 4|\beta|^4 p(1-p), \\ C_{E_1/S_1 S_2 E_2}^2 &= C_{E_2/S_1 S_2 E_1}^2 = 4|\alpha\beta|^2 p + 4|\beta|^4 p(1-p). \end{aligned} \quad (2.33)$$

En la Figura (2.3) se puede ver que el entrelazamiento de cada sistema S_i con el resto de los subsistemas (línea verde) inicia siendo máximo y decae cuadráticamente hasta anularse por completo en $p = 1$. En cambio, cada uno de los ambientes (línea roja), que en $p = 0$ no estaban enredados con ninguno de los subsistemas, al llegar a $p = 1$ presentan un enredamiento máximo. A partir de esta gráfica se concluye que el enredamiento que los sistemas están perdiendo es transferido a los ambientes, en un proceso conocido como *swapping*, por el cual los sistemas (E_1 y E_2) se enredan sin tener ninguna interacción directa [21].

Por otro lado, los enredamientos entre pares de qubits que aparecen en la ecuación de la invariancia (2.27), se obtienen de calcular la concurrencia C_{ij}^2 , a partir de la ecuación (1.48) y de las matrices reducidas ρ_{ij} (Apéndice 3.0.1)

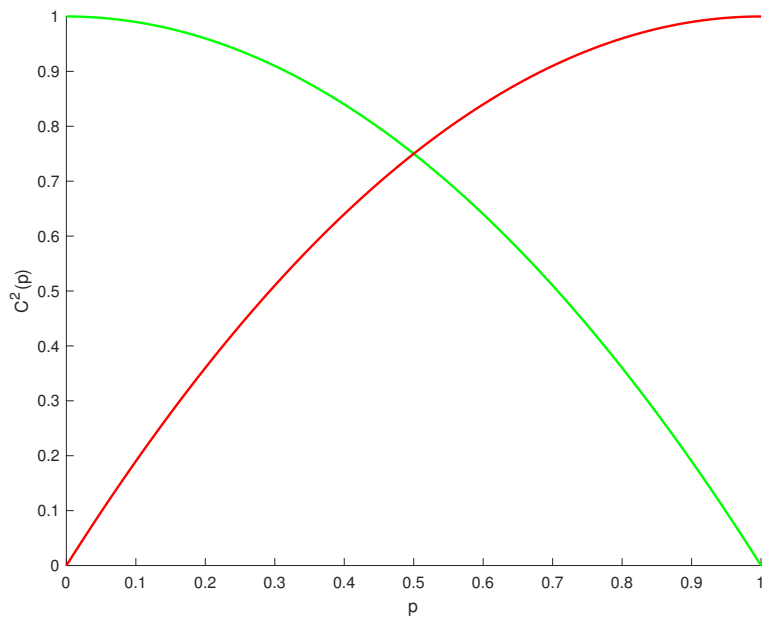


Figura 2.3: Concurrencias $C_{i/jkl}^2$, para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. La línea verde representa a las concurrencias $C_{S_1/S_2E_1E_2}^2$ y $C_{S_2/S_1E_1E_2}^2$; mientras que las concurrencias $C_{E_1/S_1S_2E_2}^2$ y $C_{E_2/S_1S_2E_1}^2$ están representadas por la línea roja.

$$\begin{aligned}
C_{S_1 S_2}^2 &= [\max\{0, 2|\beta|(1-p)(|\alpha| - |\beta|p)\}]^2, \\
C_{S_1 E_1}^2 &= C_{S_2 E_2}^2 = 4|\beta|^4 p(1-p), \\
C_{S_1 E_2}^2 &= C_{S_2 E_1}^2 = [\max\{0, 2|\beta|\sqrt{p(1-p)}(|\alpha| - |\beta|\sqrt{p(1-p)})\}]^2, \\
C_{E_1 E_2}^2 &= [\max\{0, 2|\beta|p[|\alpha| - |\beta|(1-p)]\}]^2.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Para $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, las expresiones (2.34) obtenidas son las siguientes

$$\begin{aligned}
C_{S_1 S_2}^2 &= (1-p)^4, \\
C_{S_1 E_1}^2 &= C_{S_2 E_2}^2 = p(1-p), \\
C_{S_1 E_2}^2 &= C_{S_2 E_1}^2 = p(1-p)(1 - \sqrt{p(1-p)})^2, \\
C_{E_1 E_2}^2 &= p^4.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

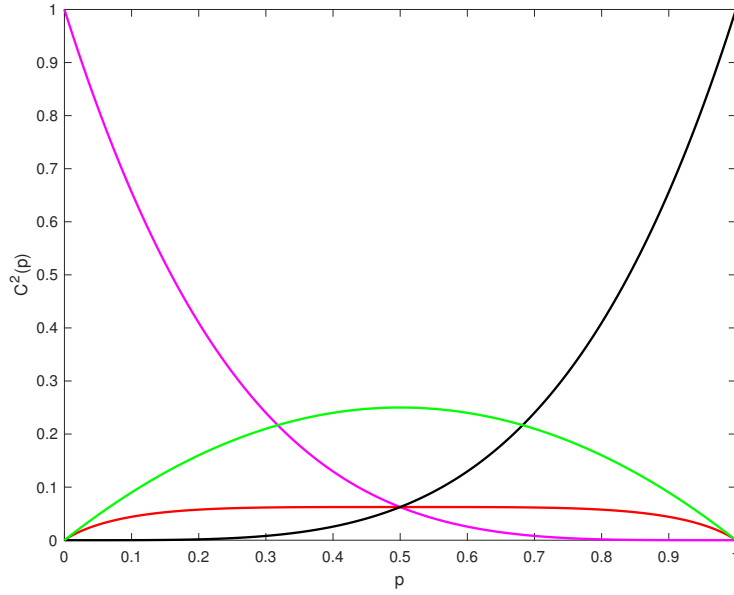


Figura 2.4: Concurrencias C_{ij}^2 para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. La línea rosa representa el enredamiento entre S_1 y S_2 ; la línea creciente negra muestra el proceso de enredamiento entre E_1 y E_2 . A lo largo del proceso se genera un enredamiento entre S_1 y E_1 igual al que hay entre S_2 y E_2 (línea verde), esto debido a la interacción sistema-ambiente; de igual forma se produce un enredamiento cuantitativamente igual (línea roja) entre S_1 y E_2 , y entre S_2 y E_1 .

Con las ecuaciones (2.35) se verifica que, efectivamente, el enredamiento entre los sistemas se transfiere a los ambientes, los cuales, en $p = 1$ tienen un enredamiento máximo. Además, en este punto $p = 1$ son los ambientes los únicos qubits que se encuentran enredados, pues el enredamiento entre las demás parejas de subsistemas es cero en, lo cual sugiere que al final del proceso sólo habrá enredamiento bipartido.

Por otro lado, analizando el enredamiento bipartido (línea punteada azul en la Figura 2.5), constituido por la suma $C_{S_1S_2}^2 + C_{S_1E_2}^2 + C_{E_1S_2}^2 + C_{E_1E_2}^2$, (ecuación 2.28) se puede notar que éste decrece hasta llegar a un mínimo en $p = \frac{1}{2}$, desde donde se incrementa hasta ser máximo en $p = 1$. Esto apunta a que cuando existe un ADC en ambas partes del sistema, al final del proceso el enredamiento total será bipartido, es decir, en $p = 1$.

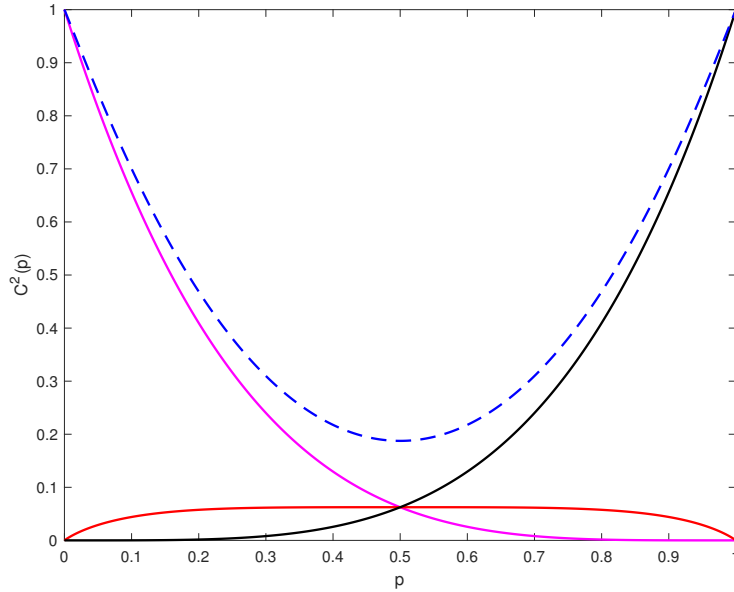


Figura 2.5: Suma de enredamiento bipartido (línea punteada azul) y sus contribuciones: $C_{S_1S_2}^2$ en rosa, $C_{E_1E_2}^2$ en negro, y en rojo $C_{S_1E_2}^2 = C_{E_1S_2}^2$ considerando $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$

Se observa que a lo largo del proceso la suma del enredamiento bipartido no se conserva, entonces procedemos a investigar lo que ocurre con la suma del enredamiento multipartido.

Primeramente se calcularán los enredamientos residuales $\tau_{S_1E_1(S_2E_2)}$ y $\tau_{S_2E_2(S_1E_1)}$. Para esto se reordenará la ecuación (2.31) de la siguiente manera

$$|\Psi(p)\rangle = \alpha|00\rangle_{S_1E_1}|0\rangle_{(S_2E_2)} + \beta[\sqrt{1-p}|10\rangle_{S_1E_1} + \sqrt{p}|01\rangle_{S_1E_1}]|1\rangle_{(S_2E_2)}, \quad (2.36)$$

donde definimos los estados ortogonales y normalizados $|0\rangle_{(S_2E_2)}$ y $|1\rangle_{(S_2E_2)}$ como:

$$|0\rangle_{(S_2E_2)} = |00\rangle_{S_2E_2}, \quad y \quad |1\rangle_{(S_2E_2)} = \sqrt{1-p}|10\rangle_{S_2E_2} + \sqrt{p}|01\rangle_{S_2E_2}, \quad (2.37)$$

de donde se obtiene (ecuación 1.53),

$$a_{000} = \alpha, \quad a_{011} = \beta\sqrt{p}, \quad a_{101} = \beta\sqrt{1-p}, \quad (2.38)$$

el resto de los coeficientes a_{ijk} son iguales a cero.

Aplicando la ecuación (1.55) se obtiene

$$\tau_{S_1E_1(S_2E_2)} = \tau_{S_2E_2(S_1E_1)} = 0, \quad (2.39)$$

lo cual quiere decir que el canal ADC no produce enredamiento *3-tangle*.

Para obtener el resto de los enredamientos residuales se requieren las ecuaciones (1.51) y (2.26), con lo cual se llega a

$$\begin{aligned} R_{S_1} &= R_{S_2} = \tau_{\underline{S_1}S_2E_2} = \tau_{\underline{S_2}S_1E_1}, \\ R_{E_1} &= R_{E_2} = \tau_{\underline{E_1}S_2E_2} = \tau_{\underline{E_2}S_1E_1}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

que para el caso específico de $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se transforman en:

$$\begin{aligned} \tau_{\underline{S_1}S_2E_2} = \tau_{\underline{S_2}S_1E_1} &= 2(p - 3p^2 + 3p^3 - p^4 + \sqrt{[p(1-p)]^3}), \\ \tau_{\underline{E_1}S_2E_2} = \tau_{\underline{E_2}S_1E_1} &= 2(p^3 - p^4 + \sqrt{[p(1-p)]^3}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

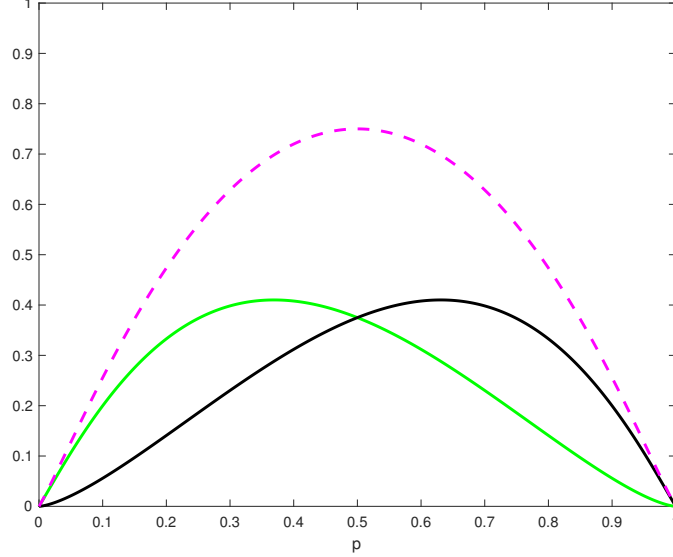


Figura 2.6: Contribuciones del entredamiento multipartido total (ecuaciones 2.41), $\tau_{S_1 S_2 E_2} = \tau_{S_2 S_1 E_1}$ en verde, y en negro $\tau_{E_1 S_2 E_2} = \tau_{E_2 S_1 E_1}$. La suma de estas contribuciones (línea rosa punteada) se anula al final de este proceso. $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

En la figura (2.6) el entredamiento multipartido total (ecuación 2.29), representado con una línea rosa punteada, muestra un contraste con el entredamiento bipartido total. Si se observan las gráficas de entredamiento bipartido total y entredamiento multipartido total (Figura 2.7) es posible apreciar que, la degradación del entredamiento bipartido (línea azul) viene acompañado de un aumento del entredamiento multipartido total (línea rosa); además, el máximo del entredamiento multipartido total coincide con el mínimo del entredamiento bipartido total, en $p = \frac{1}{2}$.

Esta última gráfica verifica la ecuación de conservación (ecuación 2.27), pues el entredamiento total entre el subsistema $(S_1 E_1)$ y $(S_2 E_2)$ (Figura 2.1) (línea roja punteada) se conserva a lo largo de todo el proceso.

Finalmente, se puede decir que para el caso ADC-ADC se genera entredamiento multipartido, pero en $p = 1$ éste se desvanece, por lo que la única contribución al entredamiento total final corresponde al entredamiento bipartido.

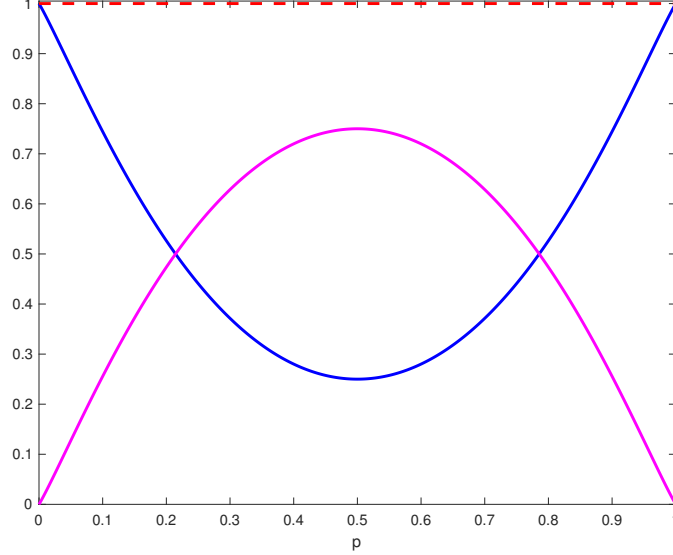


Figura 2.7: Para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$ se muestran los enredamientos multipartido (línea rosa) y bipartido (línea azul) totales. La línea roja punteada representa el enredamiento total en $C_{S_1 E_1 / S_2 E_2}^2$ a lo largo del proceso.

2.2.2. Dephasing Channel

En este segundo ejemplo se analizará la dinámica del enredamiento para el caso en el que ambas interacciones, es decir, entre cada sistema y su ambiente, esté representada por un mapa que representa al *dephasing channel*, o DC. Para este caso se empleará la ecuación (1.41) para transformar el estado inicial (ecuación 2.30), lo cual resulta en el siguiente estado en función de $p(t)$,

$$\begin{aligned}
 |\psi(p)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = & \alpha|0000\rangle + \beta(1-p)|1100\rangle + \beta p|1111\rangle + \\
 & + \beta\sqrt{p(1-p)}|1101\rangle + \beta\sqrt{p(1-p)}|1110\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Al evaluar este estado en $p = 1$ se obtiene:

$$|\psi(p = 1)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = \alpha|0000\rangle + \beta|1111\rangle, \tag{2.43}$$

el cual es un estado del tipo GHZ de 4 qubits.

De la misma manera que en la sección anterior, a partir de este estado se calculan todas las matrices de densidad reducidas (Apéndice 3.0.2), para así obtener las concurrencias y diferentes enredamientos residuales.

Comenzando por calcular las concurrencias $C_{i/jkl}^2$, para las cuales se hace uso de la ecuación (1.47) y de las matrices reducidas, se obtiene

$$\begin{aligned} C_{S_1/S_2E_1E_2}^2 &= C_{S_2/S_1E_1E_2}^2 = 4|\alpha\beta|^2, \\ C_{E_1/S_1S_2E_2}^2 &= C_{E_2/S_1S_2E_1}^2 = 4|\alpha\beta|^2p. \end{aligned} \quad (2.44)$$

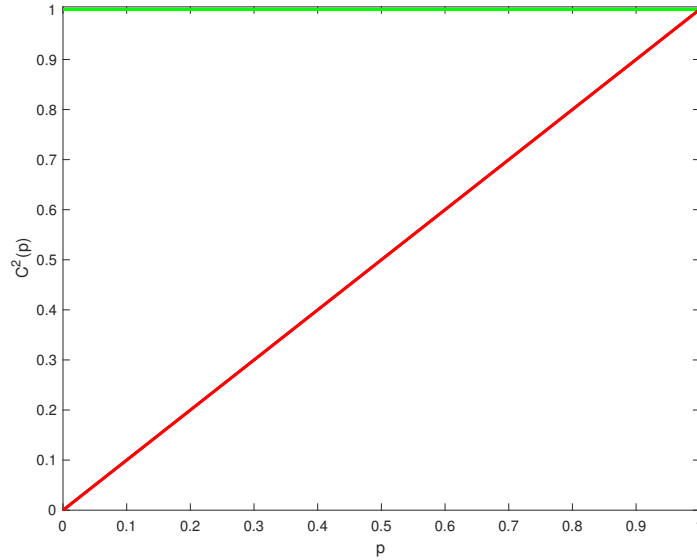


Figura 2.8: Concurrencias $C_{i/jkl}^2$, para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. La línea verde representa a las concurrencias $C_{S_1/S_2E_1E_2}^2$ y $C_{S_2/S_1E_1E_2}^2$; mientras que $C_{E_1/S_1S_2E_2}^2$ y $C_{E_2/S_1S_2E_1}^2$ están representadas por la línea roja.

El grupo de ecuaciones (2.44) y la Figura (2.8) se pueden comparar con sus equivalentes en el caso anterior (ecuaciones 2.33, y Figura 2.3). A diferencia del caso ADC-ADC, para el proceso DC-DC ninguna de las concurrencias decae y en $p = 1$ son máximas..

El siguiente paso es analizar las concurrencias entre pares de qubits, para lo cual se recurrirá a la ecuación (1.48) y se hará uso de las matrices reducidas $\rho_{ij}(p)$, llegando así al siguiente grupo de ecuaciones (Figura 2.9):

$$\begin{aligned}
C_{S_1 S_2}^2 &= 4|\alpha\beta|^2(1-p)^2, \\
C_{S_1 E_1}^2 &= C_{S_1 E_2}^2 = C_{S_2 E_1}^2 = C_{S_2 E_2}^2 = C_{E_1 E_2}^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.45}$$

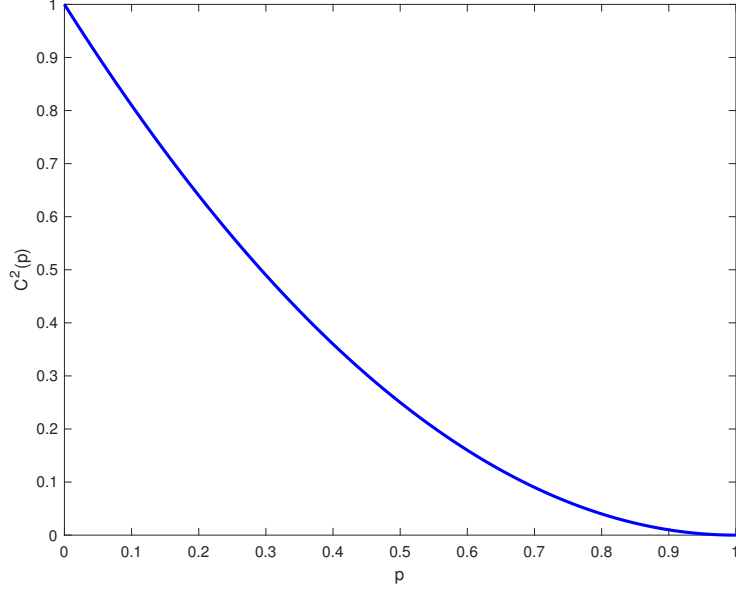


Figura 2.9: Concurrencia $C_{S_1 S_2}^2$, para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. Esta curva muestra que, debido a un proceso de decoherencia, el enredamiento inicial que existía entre los sistemas S_i decae. $C_{S_1 E_1}^2 = C_{S_2 E_2}^2 = C_{S_1 E_2}^2 = C_{S_2 E_1}^2 = C_{E_1 E_2}^2 = 0$

La única contribución, para este caso, al enredamiento bipartido total (ecuación 2.28) será la debida al enredamiento entre S_1 y S_2 . De estas ecuaciones se puede observar que el canal *Dephasing Channel* no genera enredamiento de los sistemas y los ambientes; el único enredamiento entre pares es el inicial. Además, dado que en $p = 1$ el enredamiento bipartido (2.28) es igual a cero, por la ecuación de conservación (ecuación 2.27), se puede asumir que al final del proceso el enredamiento multipartido será máximo. Para comprobar esto se requiere del cálculo de los enredamientos residuales. Los primeros enredamientos residuales a calcular serán $\tau_{S_1 E_1(S_2 E_2)}$ y $\tau_{S_2 E_2(S_1 E_1)}$, para lo cual se reordenará el estado de la ecuación (2.42) de la siguiente manera:

$$|\Psi(p)\rangle = \alpha|00\rangle_{S_1E_1}|0\rangle_{(S_2E_2)} + \beta[\sqrt{1-p}|10\rangle_{S_1E_1} + \sqrt{p}|11\rangle_{S_1E_1}]|1\rangle_{(S_2E_2)}, \quad (2.46)$$

donde los estados ortonormales $|0\rangle_{(S_2E_2)}$ y $|1\rangle_{(S_2E_2)}$ se definen como:

$$|0\rangle_{(S_2E_2)} = |00\rangle_{S_2E_2}, \quad y \quad |1\rangle_{(S_2E_2)} = \sqrt{1-p}|10\rangle_{S_2E_2} + \sqrt{p}|11\rangle_{S_2E_2}, \quad (2.47)$$

obteniendo así los siguientes coeficientes (ecuación 1.53),

$$a_{000} = \alpha, \quad a_{101} = \beta\sqrt{1-p}, \quad a_{111} = \beta\sqrt{p}, \quad (2.48)$$

los demás coeficientes a_{ijk} son iguales a cero.

Ahora es posible aplicar la ecuación (1.55), con lo que se obtiene

$$\tau_{S_1E_1(S_2E_2)} = \tau_{S_2E_2(S_1E_1)} = 4|\alpha\beta|^2p. \quad (2.49)$$

Recurriendo a las ecuaciones (1.51) y (2.26) se llega a

$$\begin{aligned} \tau_{\underline{S_1}S_2E_2} = \tau_{\underline{S_2}S_1E_1} &= 4|\alpha\beta|^2[1-p-(1-p)^2], \\ \tau_{\underline{E_1}S_2E_2} = \tau_{\underline{E_2}S_1E_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De las expresiones anteriores y utilizando la ecuación (2.29) se obtiene la Figura (2.10), donde se ve que el enredamiento multipartido crece debido a las contribuciones de las ecuaciones (2.49) y (2.50). Los enredamientos multipartidos $\tau_{S_1E_1(S_2E_2)} = \tau_{S_2E_2(S_1E_1)}$ muestran un crecimiento lineal, siendo éstos la única contribución a la suma del enredamiento multipartido en $p = 1$. Este enredamiento multipartido se da entre un S_i , su ambiente E_i y el resto del sistema visto como un único qubit.

Finalmente, en la Figura (2.11) se puede verificar la ecuación de conservación para el caso en el que el canal DC sea la interacción entre ambas partes del sistema.

De esta interacción resulta la generación de enredamiento entre más de

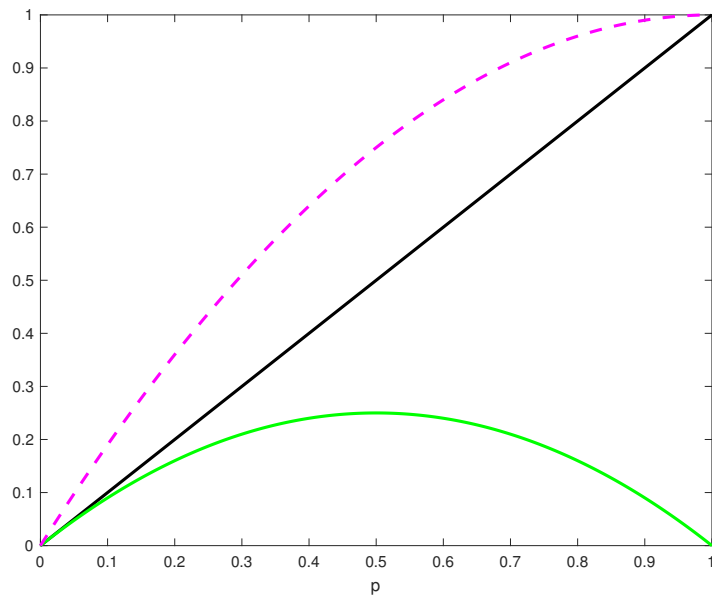


Figura 2.10: Entrelazamiento multipartido total (línea rosa punteada) y sus diferentes contribuciones. $\tau_{S_1 E_1(S_2 E_2)} = \tau_{S_2 E_2(S_1 E_1)}$ (línea negra) muestra el crecimiento lineal de estas contribuciones; mientras que los entrelazamientos $\tau_{S_1 S_2 E_2}$ y $\tau_{S_2 S_1 E_1}$ (línea verde) se generan a lo largo del proceso, pero en $p = 1$ se anulan. Gráfica para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

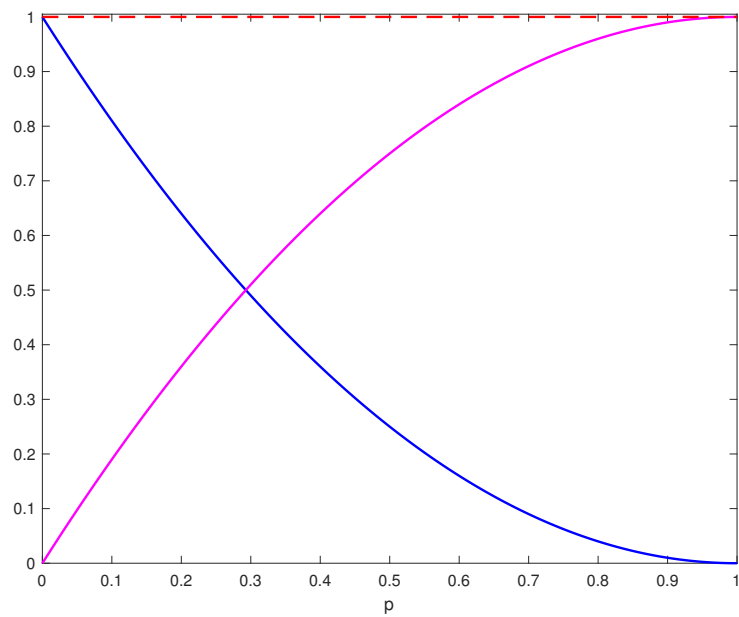


Figura 2.11: Enredamiento bipartido total (línea azul) y multipartido total (línea rosa) para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. La línea roja punteada representa a la suma de ambos, lo cual verifica que el enredamiento total inicial es una cantidad conservada.

dos partes del sistema. El enredamiento bipartido (línea azul en Figura 2.11) decae y se anula por completo en $p = 1$, dando paso a la creación de enredamiento multipartido (línea rosa).

2.2.3. Amplitude Damping Channel - Dephasing Channel

En este último ejemplo se analizará la dinámica del enredamiento para el caso en que la interacción entre S_1 y E_1 esta modelada por un ADC; mientras que el canal DC representará la interacción entre S_2 y E_2 . Para esto se requiere de los mapas dados en las ecuaciones (1.32) y (1.41), que aplicados al estado inicial (ecuación 2.30) resulta en

$$|\psi(p)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} = \alpha|0000\rangle + \beta(1-p)|1100\rangle + \beta p|0111\rangle + \beta\sqrt{p(1-p)}|1101\rangle + \beta\sqrt{p(1-p)}|0110\rangle. \quad (2.51)$$

Nuevamente, a partir de este estado se calculan todas las matrices de densidad reducidas (Apéndice 3.0.3) y con ellas se pueden obtener las concurrencias y enredamientos residuales.

Para este caso las concurrencias de la forma $C_{i/jkl}^2$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} C_{S_1/S_2 E_1 E_2}^2 &= 4|\alpha\beta|^2(1-p) + |\beta|^4 p(1-p), \\ C_{S_2/S_1 E_1 E_2}^2 &= 4|\alpha\beta|^2, \\ C_{E_1/S_1 S_2 E_2}^2 &= 4|\alpha\beta|^2 p + 4|\beta|^4 p(1-p), \\ C_{E_2/S_1 S_2 E_1}^2 &= 4|\alpha\beta|^2 p. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La gráfica (Figura 2.12) que representa al grupo de ecuaciones (2.52) permite observar que en $p = 1$ los qubits S_2 , E_1 y E_2 se encuentran enredados con el resto de las partes del sistema completo; por otro lado, también en $p = 1$ S_1 se separa del resto del sistema. Esto se mostrará con más detalle posteriormente.

Volviendo a las gráficas para las concurrencias $C_{i/jkl}^2$ de los ejemplos pasados (Figuras 2.3 y 2.8), se observa que la gráfica para el caso ADC-DC

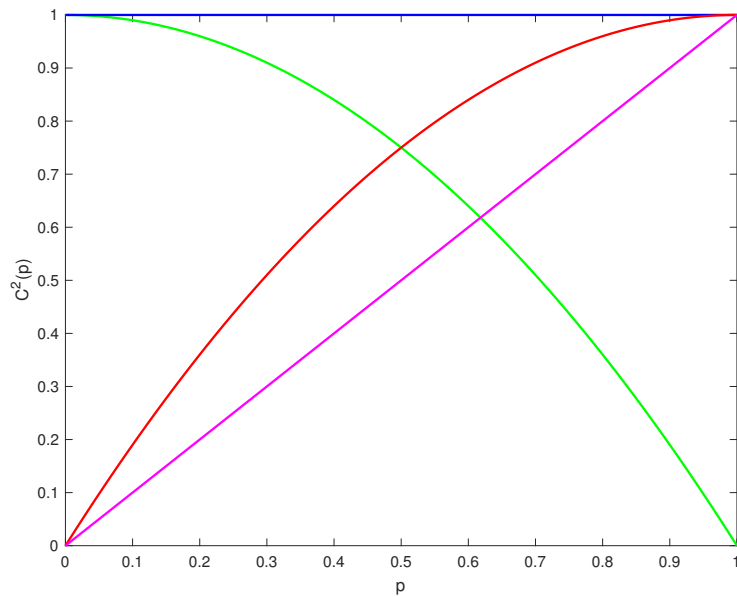
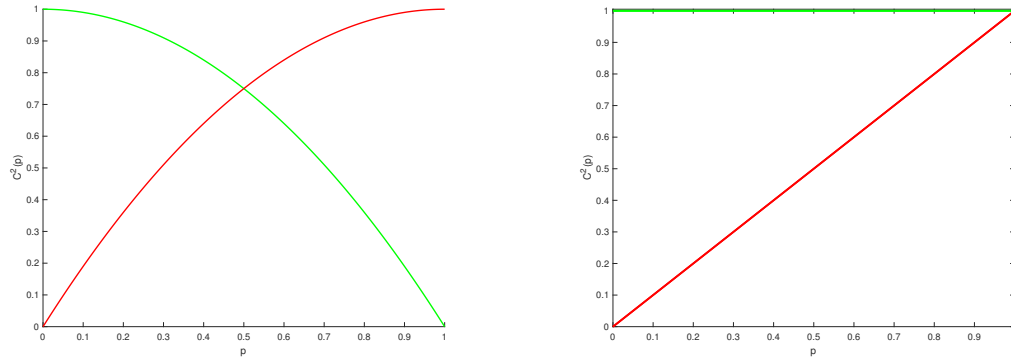


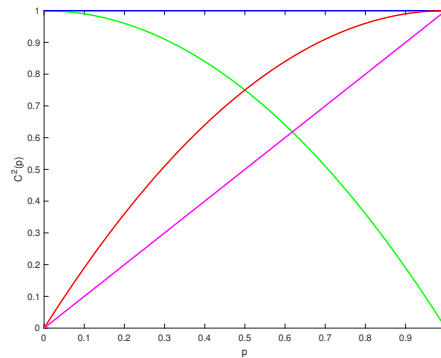
Figura 2.12: Concurrencias $C_{i/jkl}^2$ considerando $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. $C_{S_1/S_2E_1E_2}^2$ línea verde; $C_{S_2/S_1E_1E_2}^2$ línea azul; $C_{E_1/S_1S_2E_2}^2$ línea roja; y $C_{E_2/S_1S_2E_1}^2$ línea rosa.

está compuesta justamente por estas dos (Figura 2.13). Lo cual nos dice que estas concurrencias sólo dependen de la interacción de cada sistema S_i con su respectivo ambiente.



(a) ADC-ADC.

(b) DC-DC.



(c) ADC-DC.

Figura 2.13: Comparación de las concurrencias $C_{i/jkl}^2$ para cada uno de los casos, donde se puede apreciar que las gráficas de los casos ADC-ADC (a) y DC-DC (b) están contenidas en el caso ADC-DC (c).

Al igual que en los casos anteriores, se analizará el comportamiento de los enredamientos bipartido (ecuación 2.28) y multipartido (ecuación 2.29) totales. Entonces, recurriendo nuevamente a la ecuación (1.48) se encuentran las concurrencias C_{ij}^2 ,

$$\begin{aligned}
C_{S_1 S_2}^2 &= 4|\alpha\beta|^2(1-p)^2, \\
C_{S_1 E_1}^2 &= 4|\beta|^4 p(1-p), \\
C_{S_2 E_1}^2 &= 4|\alpha\beta|^2 p(1-p) \\
C_{S_2 E_2}^2 &= C_{S_1 E_2}^2 = C_{E_1 E_2}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene directamente el enredamiento bipartido total, que en este caso está constituido únicamente por las concurrencias $C_{S_1 S_2}^2$ y $C_{S_2 E_1}^2$, pues las demás son cero (Figura 2.14). Es interesante hacer notar que en este caso se presenta algo totalmente diferente a los ejemplos anteriores: el enredamiento bipartido decae y se anula en $p = 1$. ¿Qué ocurrirá con el enredamiento multipartido en este punto? Esto se puede responder sencillamente evaluando el estado (2.51) en $p = 1$, obteniendo

$$\begin{aligned}
|\psi(p=1)\rangle_{S_1 S_2 E_1 E_2} &= \alpha|0000\rangle + \beta|0111\rangle \\
&= [\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle]_{S_2 E_1 E_2} |0\rangle_{S_1}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

La ecuación (2.54) representa un estado GHZ de tres qubits (en este caso S_2 , E_1 y E_2), es decir, un estado que presenta enredamiento multipartido con $\tau_{S_2 E_1 E_2} = 1$.

Una comparación entre los enredamiento bipartidos (ecuación 2.28) para cada uno de los procesos se muestra en la Figura (2.15), donde se ve que para el caso ADC-ADC es el enredamiento bipartido el que predomina en $p = 1$; mientras que para los casos que incluyen al menos un DC el enredamiento bipartido total entre los subsistemas $(S_1 E_1)$ y $(S_2 E_2)$ en $p = 1$ se anula.

Como ya se ha hecho anteriormente, se emplearán las ecuaciones (1.55), (1.51) y (2.26), después de reordenar la ecuación (2.51) de la siguiente manera,

$$|\Psi(p)\rangle = \alpha|00\rangle_{S_1 E_1} |0\rangle_{(S_2 E_2)} + \beta[\sqrt{1-p}|10\rangle_{S_1 E_1} + \sqrt{p}|01\rangle_{S_1 E_1}] |1\rangle_{(S_2 E_2)}, \tag{2.55}$$

en donde se definen los estados ortonormalizados $|0\rangle_{(S_2 E_2)}$ y $|1\rangle_{(S_2 E_2)}$,

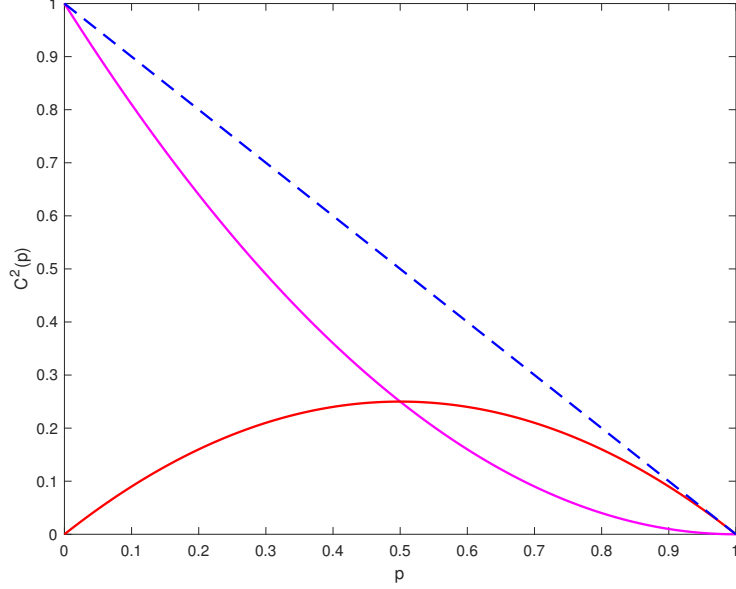


Figura 2.14: Enredamiento bipartido total (línea punteada azul) y sus respectivas contribuciones, $C_{S_1 S_2}^2$ (línea rosa) y $C_{S_2 E_1}^2$ (línea roja); para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

$$|0\rangle_{(S_2 E_2)} = |00\rangle_{S_2 E_2}, \quad y \quad |1\rangle_{(S_2 E_2)} = \sqrt{1-p}|10\rangle_{S_2 E_2} + \sqrt{p}|11\rangle_{S_2 E_2}, \quad (2.56)$$

con lo que se llega a los siguientes coeficientes (ecuación 1.53),

$$a_{000} = \alpha, \quad a_{101} = \beta\sqrt{1-p}, \quad a_{011} = \beta\sqrt{p}, \quad (2.57)$$

los demás coeficientes a_{ijk} son cero.

Con esto y con la ecuación (1.55) se llega a los enredamientos residuales:

$$\begin{aligned} \tau_{S_1 E_1(S_2 S_2)} &= 0, \\ \tau_{S_2 E_2(S_1 S_1)} &= 4|\alpha\beta|^2 p. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Los demás enredamientos residuales, obtenidos a partir de las ecuaciones (1.51) y (2.26), son

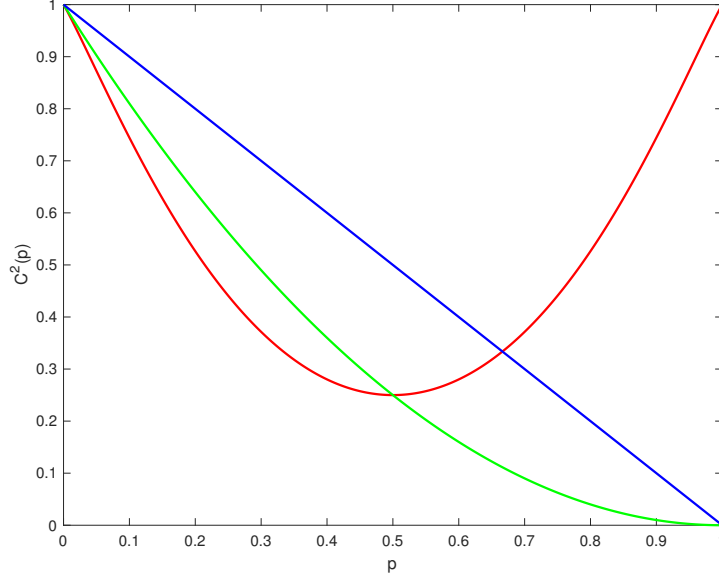


Figura 2.15: Comparación de los enredamientos bipartidos (ecuación 2.28) para cada uno de los tres procesos. ADC-ADC en color rojo; DC-DC verde; y en color azul ADC-DC.

$$\begin{aligned}
\tau_{S_1 S_2 E_2} &= 4|\alpha\beta|^2 p(1-p) + 4|\beta|^4 p(1-p), \\
\tau_{S_2 S_1 E_1} &= 0, \\
\tau_{E_1 S_2 E_2} &= 4|\alpha\beta|^2 p^2 + 4|\beta|^4 p(1-p), \\
\tau_{E_2 S_1 E_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Estas son las contribuciones al enredamiento multipartido total que, como se puede ver en la Figura (2.16), crece linealmente obteniendo al final un estado enredado del tipo GHZ de los qubits S_2 , E_1 y E_2 .

Comparando el enredamiento multipartido total, dado por la ecuación (2.29), en los tres procesos (Figura 2.17) podemos notar que cuando alguna de las interacciones entre un S_i y su respectivo E_i está dado por un DC existe una generación de enredamiento multipartido, a diferencia del caso ADC-ADC, donde se generó enredamiento multipartido, pero se desvance y al final del proceso la única contribución a la ecuación de la invariancia es el enredamiento bipartido.

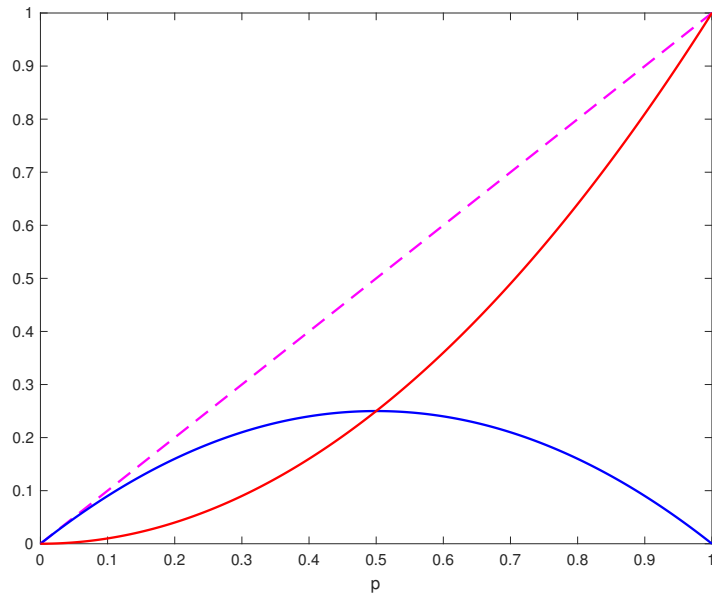


Figura 2.16: Enredamiento multipartido total (línea punteada rosa), el enredamiento residual $\tau_{S_2 E_2 (S_1 E_1)}$ es igual al enredamiento multipartido de la ecuación (2.29); las demás contribuciones corresponden a $\tau_{S_1 S_2 E_2}$ (línea azul); y $\tau_{E_1 S_2 E_2}$ (línea roja). Considerando $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

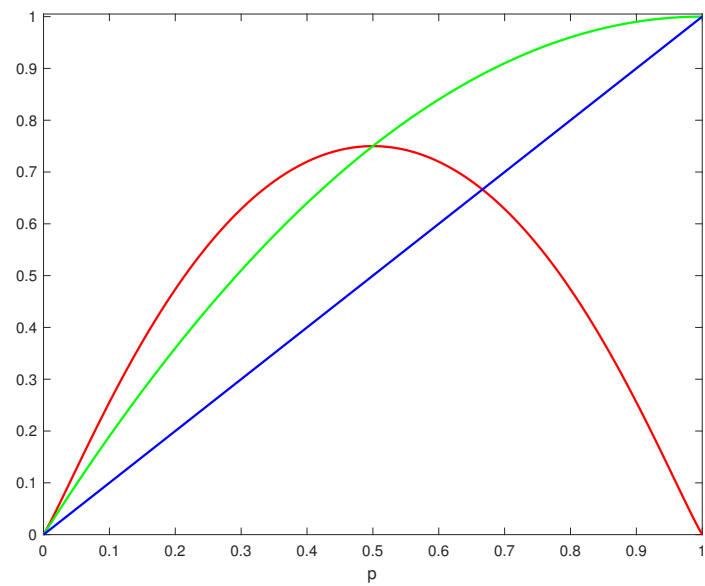


Figura 2.17: Comparación del enredamiento multipartido (ecuación 2.29) para cada uno de los tres procesos. El enredamiento multipartido para ADC-ADC está representado en color rojo, para el proceso DC-DC en color verde y la línea azul representa el enredamiento multipartido para el caso ADC-DC.

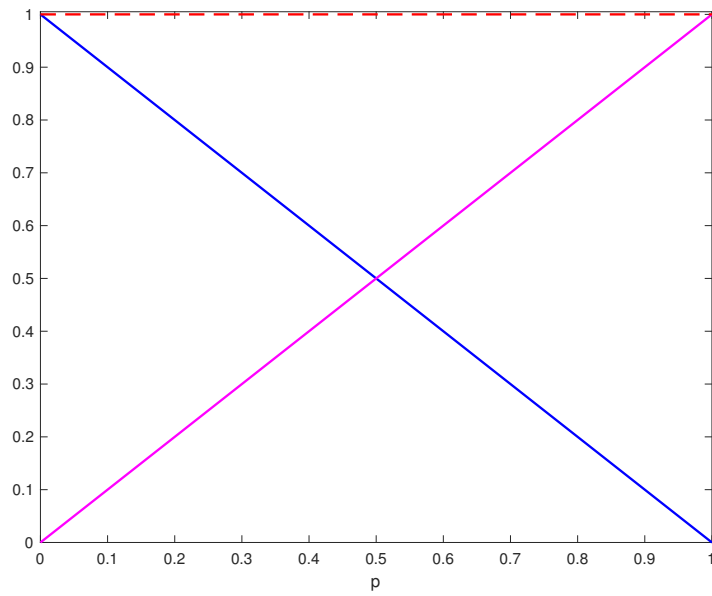


Figura 2.18: Enredamiento bipartido total (azul) y enredamiento multipartido total (rosa). La suma de ambos, mostrando la conservación del enredamiento, está representada con la línea roja punteada. Para $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$

Finalmente, en la Figura (2.18), se comparan los enredamientos multipartido y bipartido totales, donde una vez más se verifica la conservación del enredamiento (línea roja punteada).

2.3. Concurrencia multipartida

En esta sección se utilizará una medida del enredamiento distinta a las utilizadas en la sección anterior: la concurrencia multipartida. La ecuación (1.59) se aplicará a cada uno de los tres casos estudiados anteriormente con la finalidad de averiguar si esta medida ofrece nueva información. Las expresiones obtenidas para cada caso son

ADC-ADC:

$$C_N(p) = \sqrt{1 + 2p - 3p^2 + 2p^3 - p^4}; \quad (2.60)$$

DC-DC:

$$C_N(p) = \frac{1}{2}\sqrt{4 + p(4 - p)}; \quad (2.61)$$

ADC-DC:

$$C_N(p) = \frac{1}{8}\sqrt{2(32 + 48p - 31p^2 - 2p^3 + p^4)}. \quad (2.62)$$

Para el caso ADC-ADC (línea roja de la Figura 2.19) podemos notar que la concurrencia multipartida es simétrica, ésta presenta un máximo de $C_N(p) = 1.2$, en $p = 0.5$, a partir de donde decae. Para este caso la concurrencia multipartida es igual a 1 tanto al inicio como al final del proceso. La concurrencia multipartida no nos da información acerca de las partes del sistema completo que contribuyen al enredamiento en cada punto del proceso, sin embargo, gracias al análisis previo se encontró que el enredamiento al final de este proceso es también bipartido, y de hecho se da entre los ambientes E_1 y E_2 .

Para el caso DC-DC (línea verde) se obtiene una curva creciente que en $p = 1$ presenta un máximo $C_N = 1.323$. Por otro lado, para el caso ADC-DC

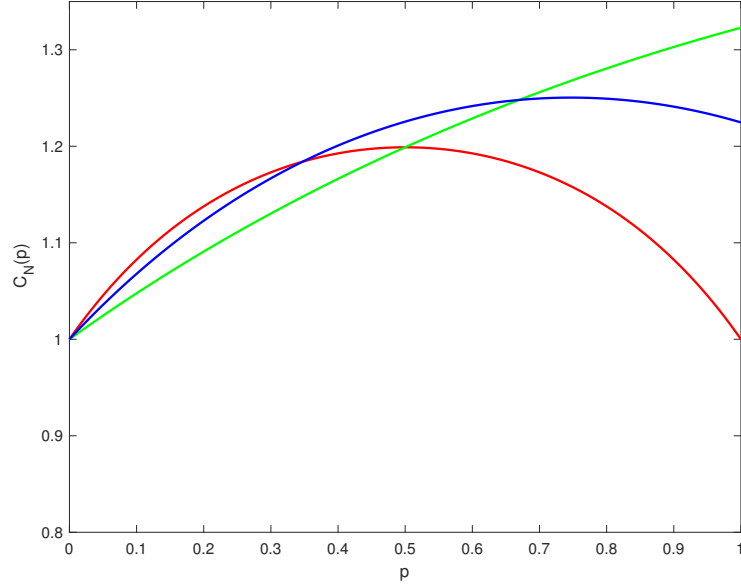


Figura 2.19: Concurrencia multipartida para tres diferentes casos: ADC-ADC (rojo), DC-DC (verde), y ADC-DC (azul). $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

(línea azul) la concurrencia multipartida crece hasta $p = 0.75$, donde alcanza un máximo de $C_N = 1.25$, y a partir de donde comienza a decrecer para llegar a $C_N = 1.225$ en $p = 1$.

De la comparación de estas tres curvas se puede decir que la concurrencia multipartida para el caso ADC-ADC es la que inicialmente crece más rápido en comparación con los otros casos, sin embargo comienza a decaer desde $p = 0,5$ y en $p = 1$ es la menor con un valor $C_N(p) = 1$. Contrario a esto, la curva para el caso DC-DC crece más lento, pero al final del proceso en $p = 1$ es la que alcanza un mayor valor.

La concurrencia multipartida en el caso ADC-DC crece más rápido que la curva correspondiente al caso DC-DC, pero en $p = 1$ alcanza un valor menor al de este mismo caso.

Una observación de importancia es que para los casos donde existe al menos un canal *dephasing channel* la concurrencia multipartida al final del proceso es mayor que al inicio. Esto último se puede relacionar con el hecho de que en estos procesos existe enredamiento multipartido en $p = 1$ como ya

se encontró en el análisis previo.

La concurrencia multipartida en el estudio de nuestros tres ejemplos es útil para estudiar la evolución del enredamiento multipartido a lo largo de todo el proceso, no obstante no aporta información acerca de las partes del sistema completo que contribuyen a dicho enredamiento.

Capítulo 3

Conclusiones

El enredamiento es un recurso dinámico que se ve afectado por procesos de decoherencia, debido a esto es interesante estudiar su dinámica, lo cual se hizo en esta tesis mediante un sistema de cuatro qubits sometidos a diferentes procesos de decoherencia. El sistema global consiste de dos sistemas S_i y dos ambientes E_i , al inicio de la interacción los sistemas se encontraban enredados mientras que los ambientes estaban en su estado base. Las interacciones se establecieron únicamente entre cada sistema con su respectivo ambiente y utilizando los canales cuánticos de decoherencia *Amplitude Damping Channel* y *Dephasing Channel* se desarrollaron tres diferentes ejemplos. En el primero (ADC-ADC) la interacción entre los dos subsistemas $S_i E_i$ se modeló con el mapa correspondiente al canal ADC; en el segundo ejemplo (DC-DC) la interacción entre ambos subsistemas $S_i E_i$ fue modelada con el mapa correspondiente al canal DC; para el último ejemplo (ADC-DC) la interacción entre S_1 y E_1 correspondió al ADC, mientras que el mapa del canal DC modeló la interacción entre S_2 y E_2 .

La dinámica del enredamiento se estudió a lo largo de estos procesos y, mediante diferentes cuantificadores, se analizó la distribución del enredamiento entre las diferentes partes del sistema, donde se observó la formación de enredamiento multipartido.

Un factor común entre los tres ejemplos es que, debido a la decoherencia, el enredamiento inicial medido en general con la concurrencia $C_{S_1 S_2}^2$ decae, a

pesar de esto dicho enredamiento inicial se distribuye entre las demás partes del sistema global. Esta distribución es diferente en cada uno de los tres ejemplos, incluso en dos de ellos se encontró la generación de enredamiento multipartido al final del proceso.

En el primer caso, ADC-ADC, se encontró enredamiento entre más de dos partes del sistema para alguna p a lo largo del proceso, pero el enredamiento bipartido predominó siendo éste el total del enredamiento en $p = 1$. Se observó que el enredamiento inicial entre los sistemas S_i se transfirió completamente a los ambientes E_i , que corresponden a los qubits enredados al final del proceso.

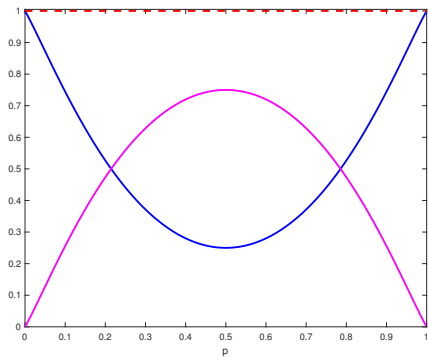
El enredamiento inicial que existía entre los sistemas S_i decae a lo largo del proceso y para el caso DC-DC la distribución de ese enredamiento inicial resulta en la generación de enredamiento multipartido, el cual es máximo al final del proceso. De hecho, al evaluar el estado inicial (2.42) en $p = 1$ se encuentra que en este punto se obtiene un estado de tipo GHZ.

En el último ejemplo también se encontró la formación de enredamiento multipartido, el cual crece linealmente, consiguiendo así un estado GHZ de tres qubits en $p = 1$, en este caso el sistema S_1 queda en un estado separable del resto.

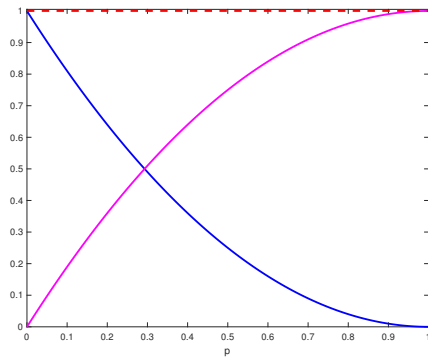
En los tres ejemplos se presentó enredamiento multipartido, pero en el caso del proceso ADC-ADC, éste se desvaneció y en $p = 1$ únicamente se consigue una transferencia del enredamiento inicial. Por otro lado, en los otros dos ejemplos se consigue enredamiento multipartido, y es posible que la presencia del canal DC sea el responsable de esta consecuencia, de hecho cuando las interacciones entre ambos sistemas y sus respectivos ambientes se modeló con el mapa correspondiente al canal DC la curva del enredamiento multipartido crece más rápido en comparación del caso ADC-DC (Figura 3.1).

Además, con todo el análisis se puede concluir que la ecuación de conservación (2.27) se cumplió para todos los casos, por lo que el enredamiento es un recurso dinámico que, además, se conserva a lo largo de un proceso en estas condiciones.

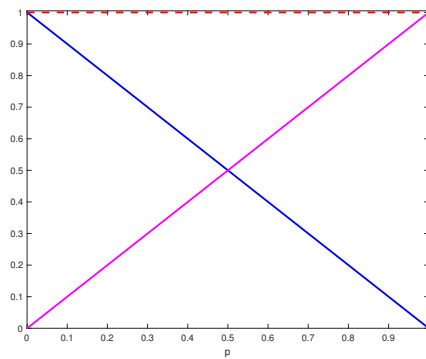
Por otro lado, se utilizó la concurrencia multipartida en cada uno de los



(a) ADC-ADC.



(b) DC-DC.



(c) ADC-DC.

Figura 3.1: Se muestra una comparación de las gráficas de enredamiento multipartido (línea rosa) vs enredamiento bipartido (línea azul) para los tres ejemplos. En cada uno se observa el enredamiento total ϵ_0^2 (línea roja punteada), que es una cantidad conservada.

casos, la cual es una curva creciente para los casos DC-DC y ADC-DC, en los que con el resto del análisis se había encontrado la generación de enredamiento multipartido. Para el caso ADC-ADC la concurrencia multipartida es la misma tanto en $p = 0$ como en $p = 1$; del análisis hecho con las concurrencias y el enredamiento residual se deduce que esto se puede deber a que en estos dos puntos existe únicamente enredamiento bipartido. La concurrencia multipartida no arrojó nueva información del análisis previo, el cual es más completo ya que es posible discernir entre enredamiento bipartido y multipartido.

Por último, con este trabajo se puede concluir que los procesos de decoherencia no únicamente degradan el enredamiento, sino que pueden ser utilizados como una herramienta de redistribución del mismo para conseguir la generación de enredamiento multipartido.

Apéndice

Este apéndice muestra todas las matrices de densidad reducidas obtenidas para cada uno de los tres casos: ADC-ADC, DC-DC y ADC-DC. A partir de las expresiones aquí mostradas se calcularon las concurrencias y enredamientos residuales para el desarrollo de la sección (2.2) del capítulo 2.

3.0.1. Amplitude Damping Channel

A partir del estado de la ecuación (2.31) se obtuvo la matriz de densidad del sistema completo con la cual se obtienen las matrices de densidad reducidas que se presentan a continuación.

A. Matrices de densidad reducidas

$$\rho_{S_1 S_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^*(1-p) \\ 0 & |\beta|^2 p(1-p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 p(1-p) & 0 \\ \alpha^*\beta(1-p) & 0 & 0 & |\beta|^2(1-p)^2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\rho_{S_1 E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 p & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2(1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\rho_{S_1 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p(1-p) & 0 & 0 & \alpha\beta^* \sqrt{p(1-p)} \\ 0 & |\beta|^2 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 (1-p)^2 & 0 \\ \alpha^* \beta \sqrt{p(1-p)} & 0 & 0 & |\beta|^2 p(1-p) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\rho_{S_2 E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p(1-p) & 0 & 0 & \alpha\beta^* \sqrt{p(1-p)} \\ 0 & |\beta|^2 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 (1-p)^2 & 0 \\ \alpha^* \beta \sqrt{p(1-p)} & 0 & 0 & |\beta|^2 p(1-p) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\rho_{S_2 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 p & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 (1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\rho_{E_1 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 (1-p)^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^* p \\ 0 & |\beta|^2 p(1-p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 p(1-p) & 0 \\ \alpha^* \beta p & 0 & 0 & |\beta|^2 p^2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\rho_{S_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p & 0 \\ 0 & |\beta|^2 (1-p) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\rho_{S_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p & 0 \\ 0 & |\beta|^2 (1-p) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\rho_{E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 (1-p) & 0 \\ 0 & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\rho_{E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p) & 0 \\ 0 & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

3.0.2. Dephasing Channel

A partir del estado de la ecuación (2.42) se obtuvo la matriz de densidad del sistema completo con la cual se obtienen las matrices de densidad reducidas que se presentan a continuación.

A. Matrices de densidad reducidas

$$\rho_{S_1 S_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^*(1-p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^*\beta(1-p) & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\rho_{S_1 E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\rho_{S_1 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\rho_{S_2 E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\rho_{S_2E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2p \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\rho_{E_1E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)^2 & a & a & b \\ a & |\beta|^2p(1-p) & b & c \\ a & b & |\beta|^2p(1-p) & c \\ b & c & c & |\beta|^2p^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= |\beta|^2(1-p)\sqrt{p(1-p)}; \\ b &= |\beta|^2p(1-p); \\ c &= |\beta|^2p\sqrt{p(1-p)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\rho_{S_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \rho_2(p) \quad (3.18)$$

$$\rho_{E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} \\ |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2p \end{pmatrix} = \rho_4(p) \quad (3.19)$$

3.0.3. Amplitud Damping Channel - Dephasing Channel

A partir del estado de la ecuación (2.51) se obtuvo la matriz de densidad del sistema completo con la cual se obtienen las matrices de densidad reducidas que se presentan a continuación.

A. Matrices de densidad reducidas

$$\rho_{S_1 S_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta(1-p) \\ 0 & |\beta|^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta(1-p) & 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$\rho_{S_1 E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 p & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2(1-p) & 0 \\ 60 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\rho_{S_1 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p(1-p) & |\beta|^2 p \sqrt{p(1-p)} & 0 & 0 \\ |\beta|^2 p \sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p)^2 & |\beta|^2(1-p)\sqrt{p(1-p)} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$\rho_{S_2 E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) & 0 \\ \alpha\beta\sqrt{p(1-p)} & 0 & |\beta|^2 p & \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\rho_{S_2 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & |\beta|^2 \sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\rho_{E_1 E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)^2 & |\beta|^2(1-p)\sqrt{p(1-p)} & 0 & 0 \\ |\beta|^2(1-p)\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p(1-p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 p(1-p) & |\beta|^2 p\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & |\beta|^2 p\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p^2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\rho_{S_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p & 0 \\ 0 & |\beta|^2(1-p) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\rho_{S_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\rho_{E_1}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p) & 0 \\ 0 & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\rho_{E_2}(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p) & |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} \\ |\beta|^2\sqrt{p(1-p)} & |\beta|^2 p \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Bibliografía

- [1] G. H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, L. Davidovich, S. P. Walborn y P. H. Souto Ribeiro, *Experimental entanglement redistribution under decoherence channels*, Phys. Rev. Lett. 113 (24), 240501 (2014).
- [2] André R. R. Carvalho, Florian Mintert y Andreas Buchleitner, *Decoherence and multipartite entanglement*, Phys. Rev. Lett. 93, 230501 (2004).
- [3] A. Einstein, B. Rosen, N. Podolsky, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 47 777 (1935).
- [4] L. Aolita, F. de Melo y L. Davidovich, *Open-system dynamics of entanglement: a key issues review*, Rep. Prog. Phys. 78 042001 (2015).
- [5] Daniel T. Sank, *Fast, Accurate State Measurement in Superconducting Qubits*, Doctor of Philosophy Dissertation, University of California, Santa Barbara, 2014.
- [6] Tobias J. Osborne, Frank Verstraete, *General Monogamy Inequality for Bipartite Qubit Entanglement*, Phys. Rev. Lett. 96, 220503 (2006).
- [7] Yan-Kui Bai, Ming-Yong Ye y Z. D. Wang, *Entanglement monogamy and entanglement evolution in multipartite systems*, Phys. Rev. A 80, 044301 (2009).
- [8] Pranaw Rungta, V. Bužek, Carlton M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, *Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions*, Phys. Rev. A 64, 042315 (2001).

- [9] William K. Wootters, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).
- [10] L. Ballentine, *Quantum Mechanics A Modern Development*, (World Scientific, 2010).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (WILEY-VCH, 2005).
- [12] L. de la Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*, (FCE, UNAM, 2006).
- [13] F. Mintert, C. Viviescas y A. Buchleitner, *Entanglement and Decoherence*, (Springer, 2009). Cap. 2, Basic Concepts of Entanglement.
- [14] J. Audretsch, *Entangled Systems*, (WILEY-VCH, 2007).
- [15] A. Salles, et., al., *Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity and continuous monitoring of the environment*, Physical Review A 78, 022322 (2008).
- [16] J. Maziero, *A representação de Kraus para a dinâmica de sistemas quânticos abertos*, Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 38 No. 2 São Paulo, 2016.
- [17] D. Bouwmeester, A. Ekert y A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, (Springer, 2000).
- [18] Open Quantum Systems, MIT Open Courses Ware, Massachusetts Institute of Technology, 2012. https://ocw.mit.edu/courses/nuclear-engineering/22-51-quantum-theory-of-radiation-interactions-fall-2012/lecture-notes/MIT22_51F12_Ch8.pdf
- [19] C. Kiefer, E. Joos, *Decoherence: Concepts and examples*. Lecture Notes in Physics, vol 517. (Springer, Berlin, Heidelberg, 1999).
- [20] Valerie Coffman, Joydip Kundu y William K. Wootters, *Distributed Entanglement*, Phys. Rev. A 61, 052306 (2000).

- [21] Xiaolong Su, Caixing Tian, Xiaowei Deng, Qiang Li, Changde Xie, y Kunchi Peng, *Quantum Entanglement Swapping between Two Multipar-
tite Entangled States*, Phys. Rev. Lett. 117, 240503 (2016).