UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LOS HIPERESPACIOS $\omega(f)$ E $\mathrm{ITC}(f)$: UN ENCUENTRO A TRAVÉS DE LAS SOMBRAS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
CLAUDIA SOLIS SAID

DIRECTOR
DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. DE JUNIO DE 2017

Índice general

Introducción **iii**

1. Las reglas del juego **1**
1.1. Hiperespacios 1
1.2. Transitividad por cadenas y propiedad de la sombra 2

2. $\omega(f)$ vs $ITC(f)$: round 1 **5**

3. $\omega(f)$ vs $ITC(f)$: round 2 **13**
3.1. Otros tipos de sombreado 13
3.2. La función Shift 23

Introducción

Para un espacio X métrico y compacto, denotamos por 2^X a la familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Si $f : X \to X$ es una función continua, consideramos dos hiperespacios de X: $\omega(f)$, que consta de todos los omega conjuntos límite bajo f, e

$$ITC(f) = \{A \in 2^X : f \text{ es internamente transitiva por cadenas en } A\}.$$

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la relación que existe entre $ITC(f)$ y $\omega(f)$ ¿Por qué? Bueno, resulta que hay ciertas familias de funciones para las cuales estos dos hiperespacios coinciden. Algunos autores se dieron a la misión de encontrar propiedades dinámicas que compartieran dichas funciones, y la *propiedad de la sombra* (Definición 1.6) fue una constante que saltó a la vista. En el 2012, este hecho llevó a Andrew Barwell, Gareth Davies y Chris Good a conjeturar que si una función f tiene la propiedad del sombreado, entonces $\omega(f) = ITC(f)$ [3]. Un año más tarde, Jonathan Meddaugh y Brian Raines, en [12], dieron una respuesta afirmativa a la conjetura para funciones del intervalo $[0, 1]$.

Los conceptos de *sombreado límite* y *sombreado s-límite* (Definiciones 3.2 y 3.5) permitieron a Andrew Barwell, Chris Good, Piotr Oprocha y Brian Raines, en [2], demostrar que si una función continua f, tiene la propiedad del sombreado límite, entonces $\omega(f) = ITC(f)$.

Esta tesina está basada principalmente en los artículos [2] y [12], y consta de tres capítulos.

En el Capítulo 1, además de introducir la herramienta básica que vamos a utilizar a lo largo de este trabajo, enunciamos un resultado muy importante de Alexander Blokh, Andrew Bruckner, Paul Humke y Jaroslav Smítal [4]: *si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua, entonces $\omega(f)$ es cerrado en $2^{[0,1]}$*. En la parte final de este capítulo definimos la función Tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$, la cual tiene propiedades dinámicas muy interesantes, entre ellas la propiedad de la sombra (Ejemplo 1.9).

En el Capítulo 2, hacemos un primer análisis de la relación entre los hiperespacios $ITC(f)$ y $\omega(f)$. En las Proposiciones 2.1 y 2.2 se demuestra que para cualquier función continua f, $\omega(f) \subseteq ITC(f)$ y que $ITC(f)$ es cerrado en 2^X. Uno de los resultados más importantes de este capítulo es la Proposición 2.5, que aparece en el artículo [12] de Meddaugh y Raines, y dice que *si f tiene la propiedad de la sombra, entonces $\omega(f)$ es denso en $ITC(f)$*. Esta proposición fue la clave para que los autores respondieran la conjetura de Barwell, Davies y Good en el intervalo

(Corolario 2.7). Finalmente, en el Ejemplo 2.8 se muestra una función f en el intervalo sin la propiedad del sombreado, en la que $ITC(f)$ y $\omega(f)$ coinciden. En el Ejemplo 2.9 exhibimos una función en la cual los dos hiperespacios de nuestros interés son distintos.

El Capítulo 3 está dividido en dos secciones. En la primera introducimos dos tipos de sombreado, el *sombreado límite* (Definición 3.2) y el *sombreado s-límite* (Definición 3.5), además de estudiar la relación que existe entre ellos y la propiedad de la sombra. También definimos el *omega conjunto límite de una seudo órbita asintótica* (Definición 3.7) y en la Proposición 3.11 se prueba que estos conjuntos son elementos del hiperespacio $ITC(f)$. Con esta herramienta en mano, obtenemos el resultado más importante de la sección (Proposición 3.13), el cual nos garantiza que la propiedad del sombreado límite es una condición suficiente para que $ITC(f)$ y $\omega(f)$ coincidan. La segunda sección la dedicamos a estudiar la función σ_k, que recibe el nombre de *función corrimiento* o *función shift* (Definición 3.18) en el espacio de k símbolos. El resultado principal de esta sección (Corolario 3.23) nos dice que $ITC(\sigma_k) = \omega(\sigma_k)$.

Capítulo 1

Las reglas del juego

A lo largo de este trabajo, $\mathbb{N}$ representa a los enteros no negativos, (X, d) es un espacio métrico y compacto, y $f : X \to X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribiremos f^n para referirnos a la composición de f con ella misma n veces, $f^0 = Id$; a la función f^n se le llama *la iteración n de f*. Ahora bien, si $x \in X$, definimos la *órbita de x bajo f* como el conjunto:

$$o(x, f) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Decimos que $y \in X$ *es un punto límite* de $o(x, f)$ si existe una sucesión creciente (n_i) de números naturales tal que $f^{n_i}(x) \to y$. Al conjunto de todos los puntos límite de $o(x, f)$ se le conoce como el *omega conjunto límite de x bajo f* y lo denotamos como $\omega(x, f)$. Dado que X es métrico y compacto, la sucesión $(f^n(x))$ tiene una subsucesión convergente, por lo cual $\omega(x, f) \neq \emptyset$ para cualquier $x \in X$; además, $\omega(x, f)$ siempre es un conjunto cerrado en X [9, Proposición 2.6, pág. 168].

1.1. Hiperespacios

En esta sección presentaremos los hiperespacios que vamos a estudiar en los siguientes capítulos, así como propiedades generales de ellos.

Un *hiperespacio de X* es una familia de subconjuntos de X con alguna propiedad especial. El primero de ellos que queremos introducir es el hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, denotado por 2^X.
Como (X, d) es un espacio métrico y compacto, en la definición de 2^X podemos cambiar "cerrado" por "compacto". Un resultado muy importante en la teoría de hiperespacios, es que 2^X es métrico y compacto, si X también lo es. Para poder definir la métrica con la que trabajaremos en 2^X, necesitamos el concepto de nube: si A es un elemento de 2^X y $\varepsilon > 0$, la *nube de radio ε alrededor de A* es el conjunto

$$N(\varepsilon, A) := \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a),$$

donde $B(\varepsilon, a) = \{y \in X : d(y, a) < \varepsilon\}$. Notemos que $N(\varepsilon, A)$ es un subconjunto abierto de X, pues es la unión de bolas abiertas.

Definición 1.1. Para (X, d) métrico y compacto, definimos la función $H : 2^X \times 2^X \to 2^X$ de la siguiente manera

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

En [8, Proposición 2.1, pág. 22] se prueba que H es una métrica para 2^X.
Para $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, definimos la *bola de radio ε centrada en A*, como el conjunto

$$\mathcal{B}(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X : H(A, B) < \varepsilon\}.$$

A H se le llama *métrica de Hausdorff* y el hiperespacio 2^X con esta métrica, resulta ser compacto [8, Teorema 4.2, pág. 66].

Para saber cuándo dos elementos en el hiperespacio 2^X están "cerca", nos es muy útil el siguiente lema, la prueba no es difícil y se puede consultar en [8].

Lema 1.2. *Sean (X, d) métrico y compacto y $\varepsilon > 0$. Entonces, para $A, B \in 2^X$, tenemos que $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$.*

Dada $f : X \to X$ una función continua, consideremos el hiperespacio de todos los omega conjuntos límite de X:

$$\omega(f) := \{\omega(x, f) : x \in X\}.$$

Como $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado y no vacío de X, se tiene que $\omega(f)$ está contenido en 2^X.

1.2. Transitividad por cadenas y propiedad de la sombra

Definición 1.3. Dados $f : (X, d) \to (X, d)$ y $\delta > 0$, decimos que una colección de puntos, $\gamma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$, de X es una *δ-cadena* de x_0 a x_n si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para toda $0 \leq i \leq n - 1$.

Definición 1.4. Sean $f : X \to X$ una función continua y $A \subseteq X$ cerrado y no vacío. La función f es *internamente transitiva por cadenas en A* si para cada $a, b \in A$ y para toda $\delta > 0$ existe una δ-cadena de a a b contenida en A.
Así, definimos un nuevo hiperespacio:

$$ITC(f) := \{A \in 2^X : f \text{ es internamente transitiva por cadenas en } A.\}$$

Observemos que tanto $\omega(f)$ como $ITC(f)$ son hiperespacios contenidos en 2^X, así que les daremos la métrica de Hausdorff restringida. En el Capítulo 2 estudiaremos propiedades de estos hiperespacios, además de establecer una relación entre ellos.

Definición 1.5. Sean $f : (X, d) \to (X, d)$ una función continua y $\delta > 0$. Una sucesión de puntos $\gamma = (x_n)$ de X es una *δ-seudo órbita* si $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para $\varepsilon > 0$, diremos que un punto $z \in X$ es una *ε-sombra* de γ, si $d(f^n(z), x_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq 0$.

Definición 1.6. Una función $f : X \to X$ tiene la *propiedad de la sombra* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que toda δ-seudo órbita en X tiene una ε-sombra.
Esto quiere decir que uno se las puede ingeniar para que ciertas seudo órbitas en X sí tengan una órbita siguiéndoles el paso de cerca. En este sentido, el nombre de "seudo órbita" parece ser muy oportuno.

Es claro que si γ es una δ-seudo órbita en X, entonces cada "cacho" finito de γ es una δ-cadena. Por otra parte, da la impresión de que si "unimos" cadenas, podemos obtener una seudo órbita. Si nuestra intuición es correcta, dan ganas de poner la propiedad del sombreado en términos de cadenas, lo cual nos lleva al siguiente resultado.

Proposición 1.7. *[13, Proposición 2.8] Sean (X, d) un espacio métrico y compacto, y $f : X \to X$ una función continua. Entonces f tiene la propiedad de la sombra si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-cadena en X tiene una ε sombra.*

Lema 1.8. *[5, Lema 2.2] Si $f : X \to X$ es una función continua de modo que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\overline{B(\varepsilon + \delta, f(x))} \subseteq f[\overline{B(\varepsilon, x)}],$$

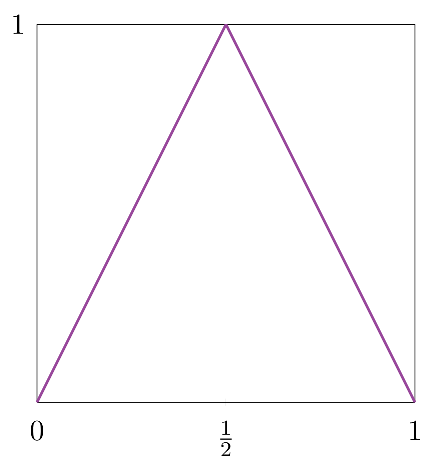
para todo $x \in X$, entonces f tiene la propiedad de la sombra.

A continuación definimos la función T en el intervalo $[0, 1]$ que recibe el nombre de *Tienda.*

Ejemplo 1.9. La función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

tiene la propiedad de la sombra.



La función Tienda.

Demostración. Para probar que T tiene la propiedad de la sombra, es suficiente con mostrar que satisface las condiciones del Lema 1.8.
Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Tomemos $x \in [0,1]$ y

$$y \in [0,1] \cap [T(x) - 2\varepsilon, T(x) + 2\varepsilon]. \tag{1.1}$$

Vamos a demostrar que $y \in T([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1])$. Para ello, consideramos dos casos:

Caso 1: $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
Definimos $a := \frac{y}{2}$. Como $y \in [0,1]$, se tiene que $a \in [0, \frac{1}{2}]$; así, $T(a) = 2a = y$.
Por otra parte, (1.1) implica que $2x - 2\varepsilon \leq y \leq 2x + 2\varepsilon$.
Luego, $a \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

Caso 2: $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Tomemos $a := 1 - \frac{y}{2}$. Dado que $y \in [0,1]$, obtenemos que $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ por lo que $T(a) = 2 - 2(a) = y$. Además, (1.1) nos dice que

$$2(1 - x - \varepsilon) \leq y \leq 2(1 - x + \varepsilon). \tag{1.2}$$

Definamos la función $g : [0,1] \to [0,1]$ como $g(t) = 1 - \frac{t}{2}$.
Notemos que $g(y) = a$ y que g es decreciente, por lo cual, si aplicamos g a cada término en (1.2) se sigue que:

$$x - \varepsilon = g(2(1 - x + \varepsilon)) \leq g(y) \leq g(2(1 - x - \varepsilon)) = x + \varepsilon.$$

Por lo tanto $a \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

En ambos casos $T(a) = y$ y $a \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. ■

Ejemplo 1.10. Consideremos la función identidad $Id : [0,1] \to [0,1]$. Es inmediato que $\omega(Id) = \{\{x\} : x \in [0,1]\}$ y no es difícil demostrar que

$$ITC(Id) = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Por lo tanto, los hiperespacios $ITC(Id)$ y $\omega(Id)$ son distintos.

En 1996, Alexander Blokh, Andrew Bruckner y Paul Humke demostraron en [4], el siguiente teorema.

Teorema 1.11. *Si* $f : [0,1] \to [0,1]$ *es una función continua, entonces* $\omega(f)$ *es un subconjunto cerrado de* $2^{[0,1]}$.

Este resultado se generaliza en [11], para funciones definidas en gráficas. Dos años después, los autores de [10], dan una dendrita D y una función continua $f : D \to D$, de modo que $\omega(f)$ no es cerrado en $2^{[0,1]}$.

Capítulo 2

$\omega(f)$ vs $ITC(f)$: round 1

El objetivo de este capítulo es establecer una relación entre los hiperespacios $ITC(f)$ y $\omega(f)$. El primer resultado que incluimos es que todo omega conjunto límite es internamente transitivo por cadenas, lo cual nos dice que $\omega(f) \subseteq ITC(f)$ ¿Qué sucede con la otra contención? Como veremos en el Ejemplo 2.9, en general son hiperespacios diferentes, sin embargo, si f tiene la propiedad de la sombra, el hiperespacio $\omega(f)$ resulta ser denso en $ITC(f)$.

Recordemos que (X, d) denota un espacio métrico y compacto.

Proposición 2.1. *Si $f : X \to X$ es continua, entonces $\omega(f) \subseteq ITC(f)$.*

Esta proposición es un caso particular de la Proposición 3.11 del Capítulo 3, la cual hace referencia a un tipo de omega conjunto límite más general.

Proposición 2.2. *Si $f : X \to X$ es una función continua, el hiperespacio $ITC(f)$ es cerrado en 2^X.*

Demostración. Tomemos $A \in \overline{ITC(f)}$ y veamos que $A \in ITC(f)$.
Sean $\varepsilon > 0$ y $a, b \in A$, con $a \neq b$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3})$ tal que si

$$d(x, y) < \delta, \quad \text{entonces} \quad d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.1}$$

Dado que $A \in \overline{ITC(f)}$, existe $A_\delta \in ITC(f) \cap \mathcal{B}(\delta, A)$, es decir:

$$(a)\ A \subseteq N(\delta, A_\delta), \quad (b)\ A_\delta \subseteq N(\delta, A) \quad \text{y} \quad (c)\ A_\delta \in ITC(f).$$

De (a) se sigue que existen $a', b' \in A_\delta$ tales que

$$d(a, a') < \delta \quad \text{y} \quad d(b, b') < \delta. \tag{2.2}$$

Como consecuencia de (c) hay una $\frac{\varepsilon}{3}$-cadena de a' a b', digamos $\Gamma' = \{a' = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b'\}$, contenida en A_δ.
Por (b), para cada $1 \leq i \leq n-1$ existe $y_i \in A \cap B(\delta, x_i)$. Definimos $y_0 = a$, $y_n = b$ y

$\Gamma = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$.
De (2.2), (2.1) y el hecho de que Γ' es una $\frac{\varepsilon}{3}$-cadena, obtenemos

$$\begin{aligned} d(f(y_i), y_{i+1}) &\leq d(f(y_i), f(x_i)) + d(f(x_i), x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \varepsilon, \end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, Γ es una ε-cadena en A de a a b. ∎

Definición 2.3. Sean $\gamma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\gamma' = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ dos cadenas de manera que $x_n = y_0$. Definimos la cadena *gamma concatenada con gamma prima* como:

$$\gamma \circ \gamma' = \{x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}.$$

Además, si γ es δ-cadena y γ' es δ'-cadena con δ y δ' positivas, resulta que $\gamma \circ \gamma'$ es una ε-cadena, donde $\varepsilon = \max\{\delta, \delta'\}$.
De manera más general, si tenemos una familia de cadenas $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que γ_i termina en donde γ_{i+1} comienza, podemos construir una seudo órbita concatenando todas las cadenas de la familia; es decir, $\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \ldots \circ \gamma_i \circ \ldots$
A dicha seudo órbita la denotamos como $\bigodot_{i\in\mathbb{N}} \gamma_i$.

Lema 2.4. *Si $f : X \to X$ es continua y $A \in ITC(f)$, existe una sucesión $(a_i)_{i\geq 0}$ en A que satisface las siguientes condiciones:*

(a) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ de modo que $(a_i)_{i\geq M}$ es una ε-seudo órbita.

(b) Para cada $a \in A$, $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$, existe $n > M$ tal que $d(a_n, a) < \varepsilon$.

Demostración. Sean $A \in ITC(f)$ y $b_0 \in A$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\delta_k = \frac{1}{2^k}$. Como A es compacto, existe $\{b_1, b_2, \ldots, b_{m_k}\} \subseteq A$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_k} B(\delta_k, b_i). \tag{2.3}$$

Dado que $A \in ITC(f)$, existen δ_k-cadenas $\gamma'_0, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{m_k}$ contenidas en A tales que γ'_i va de b_i a b_{i+1} si $0 \leq i \leq m_k - 1$, y γ'_{m_k} va de b_{m_k} a b_0. Así, por la Definición 2.3, $\gamma_k := \gamma'_0 \circ \ldots \circ \gamma'_{m_k}$, es una δ_k-cadena de b_0 a b_0 contenida en A.

Veamos que $\Gamma := \bigodot_{i\in\mathbb{N}} \gamma_i$ satisface las condiciones (a) y (b).
Primero notemos que $\Gamma \subseteq A$ pues cada γ_i está formada por elementos de A.
Supongamos que $\Gamma = (a_i)_{i\geq 0}$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_j < \varepsilon$. Si $a_{r(j)}$ es el primer elemento de γ_j, tomando $M = r(j)$ e $i \geq M$ obtenemos que $d(f(a_i), a_{i+1}) < \delta_k \leq \delta_j$ para alguna $k \geq j$. Por lo tanto $d(f(a_i), a_{i+1}) < \varepsilon$ para toda $i \geq M$, lo cual prueba que Γ cumple (a).

Para demostrar que Γ satisface (b), sean $a \in A$, $M \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $a_M \in \Gamma$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_M \in \gamma_i$. Elegimos $k > i$ de modo que $\delta_k < \varepsilon$.
De (2.3) se sigue que $a \in B(\delta_k, b_j)$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, m_k\}$. Por construcción $b_j \in \gamma_k$, por lo cual $b_j = a_{n(j)}$ con $n(j) > M$, pues γ_k aparece después de γ_i en Γ. Por lo tanto,

$$d(a, a_{n(j)}) = d(a, b_j) < \delta_k < \varepsilon.$$

■

Proposición 2.5. *Sea $f : X \to X$ una función continua con la propiedad de la sombra. Entonces $\omega(f)$ es denso en $ITC(f)$.*

Demostración. Sean $A \in ITC(f)$ y $\varepsilon > 0$.
Tomemos $(a_i)_{i\geq 0}$ una sucesión contenida en A como en el Lema 2.4. Como f tiene la propiedad de la sombra, existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que toda δ-seudo órbita tiene una ε sombra. Por el inciso (a) del Lema 2.4, existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que $(a_i)_{i\geq M_\varepsilon}$ es una δ-seudo órbita; por lo cual para algún $z \in X$ se cumple que

$$d(f^i(z), a_{M_\varepsilon+i}) < \varepsilon, \tag{2.4}$$

para todo $i \geq 0$. Veamos que $\omega(z, f) \in \mathcal{B}(2\varepsilon, A)$. Tomemos $y \in \omega(z, f)$ y una sucesión creciente $(n_i)_{i\geq 0}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(z) = y$. Así, para algún $k \in \mathbb{N}$,

$$d(y, f^{n_i}(z)) < \varepsilon \tag{2.5}$$

para todo $i \geq k$. Luego, por (2.5) y (2.4) obtenemos

$$d(y, a_{M_\varepsilon+n_k}) \leq d(y, f^{n_k}(z)) + d(f^{n_k}(z), a_{M_\varepsilon+n_k}) < 2\varepsilon.$$

Por lo tanto, $y \in N(2\varepsilon, A)$ y, dado que y es un punto arbitrario de $\omega(z, f)$,

$$\omega(z, f) \subseteq N(2\varepsilon, A). \tag{2.6}$$

Ahora vamos a probar que $A \subseteq N(2\varepsilon, \omega(z, f))$. Sea $y \in A$. Por el inciso (b) del Lema 2.4, para $\frac{\varepsilon}{2}$ y M_ε existe $(n_i)_{i\geq 0}$ de manera que $n_{i+1} > n_i > M_\varepsilon$ y

$$d(a_{n_i}, y) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.7}$$

para toda $i \geq 0$. Si $j_i := n_i - M_\varepsilon$, notemos que $(j_i)_{i\geq 0}$ es una sucesión creciente de naturales positivos, así que de (2.4) y (2.7) llegamos a

$$d(y, f^{j_i}(z)) \leq d(y, a_{n_i}) + d(a_{n_i}, f^{j_i}(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \frac{3\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión $(f^{j_i}(z))_{i\geq 0}$ está contenida en $B(\frac{3\varepsilon}{2}, y)$.
Por la compacidad de X, podemos tomar una subsucesión de $(f^{j_i}(z))_{i\geq 0}$ que converja a algún $b \in \overline{B(\frac{3\varepsilon}{2}, y)}$. Se sigue que $b \in \omega(z, f)$ y $d(b, y) < 2\varepsilon$; así, $y \in N(2\varepsilon, \omega(z, f))$.
Lo anterior y (2.6) implican que $H(A, \omega(z, f)) < 2\varepsilon$, por lo que $ITC(f) \subseteq \overline{\omega(f)}$.
Finalmente, de la Proposición 2.1 y la Proposición 2.2 concluimos $\overline{\omega(f)} = ITC(f)$. ■

Un corolario inmediato de la Proposición 2.5 es el siguiente:

Corolario 2.6. *Si $f : X \to X$ tiene la propiedad de la sombra y $\omega(f)$ es cerrado en 2^X, entonces $\omega(f) = ITC(f)$.*

Como consecuencia de este resultado y el Teorema **??**, obtenemos otro corolario.

Corolario 2.7. *Si $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene la propiedad de la sombra, entonces $\omega(f) = ITC(f)$.*

Ejemplo 2.8. Definimos $f : [-1,1] \to [-1,1]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si} \quad x \in [-1,0], \\ \\ T(x), & \text{si} \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

Donde T es la función Tienda definida en el Ejemplo 1.9. Entonces $ITC(f) = \omega(f)$, pero f no tiene la propiedad de la sombra.

Demostración. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $\delta > 0$.
Para ver que f no tiene la propiedad de la sombra, vamos a construir una δ-cadena del punto $-\frac{3}{4}$ al 1, sin ε-sombra. Sea $x_0 = -\frac{3}{4}$. Como $f[-1,0] = [-1,0]$, tenemos que $f^n(x) = x^{3^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y dado que la sucesión $(f^n(x))$ converge a cero, $f^N(x) \in (-\frac{\delta}{2}, 0)$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{2}$ y definimos $\Gamma = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1+k}\}$ de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} f^i(x_0), & \text{si} \qquad 0 \le i \le N, \\ \\ \frac{1}{2^k}, & \text{si} \qquad i = N+1, \\ \\ f^{i-(N+1)}(x_{N+1}), & \text{si} \qquad N+2 \le i \le N+1+k. \end{cases}$$

Para ver que Γ es una δ-cadena, distinguimos dos casos:

- Para $i \neq N$, se tiene que $|f(x_i) - x_{i+1}| = |x_{i+1} - x_{i+1}| = 0 < \delta$.
- Para $i = N$, de la elección de k y N obtenemos lo siguiente:

$$|f(x_N) - x_{N+1}| = |f^{N+1}(x_0) - \tfrac{1}{2^k}| \le |f^{N+1}(x_0)| + |\tfrac{1}{2^k}| < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

En ambos casos se cumple que $|f(x_i) - x_{i+1}| < \delta$ para toda $i \in \{0, 1, \ldots, N+k\}$.
Notemos que Γ es un cadena de x_0 a 1, ya que $x_{N+1+k} = f^k(\frac{1}{2^k}) = 1$. Por lo tanto, si Γ tuviera una ε-sombra $z \in [-1,1]$, en particular debe satisfacer

$$(a) \quad |z - x_0| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad (b) \quad |f^{N+1+k}(z) - 1| < \varepsilon.$$

La condición (a) implica que $z \in [-1, -\frac{1}{2})$, así que $o(z,f) \subseteq [-1,0]$ por lo tanto

$$|f^{N+1+k}(z) - 1| > \tfrac{1}{2} = \varepsilon,$$

lo que contradice (b).

Nuestra siguiente misión consiste en demostrar $ITC(f) = \omega(f)$, para ello, lo primero que notamos es que

$$f([-1,0]) = [-1,0] \qquad \text{y} \qquad f([0,1]) = [0,1]). \tag{2.8}$$

De algún modo, esto sugiere que si analizamos el comportamiento de f restringida a estos intervalos podremos recuperar la información de f en $[-1,1]$. Sea $g = f|_{[-1,0]}$ y observemos que $f|_{[0,1]} = T$ (ver Figura 2).

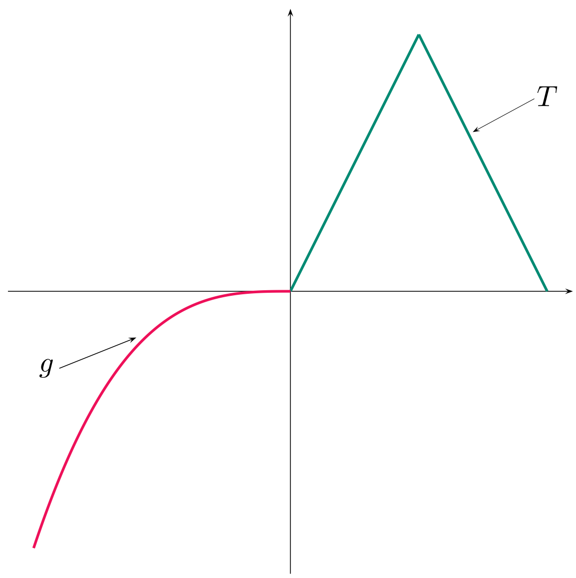


Figura 2

Si $A = \omega(x,f)$ para algún $x \in [-1,1]$, de (2.8) inferimos que $o(x,f) \subseteq [-1,0]$ o bien $o(x,f) \subseteq [0,1]$ y como los intervalos son cerrados, $A \in \omega(g)$ o $A \in \omega(T)$. Así, como g y T son restricciones de f,

$$\omega(f) = \omega(g) \cup \omega(T). \tag{2.9}$$

Un resultado similar ocurre con el hiperespacio $ITC(f)$. Veamos que se satisface la siguiente igualdad

$$ITC(f) = ITC(g) \cup ITC(T). \tag{2.10}$$

Para esto necesitamos un resultado auxiliar.

Afirmación: Sean $a \in (-1,0)$ y $\varepsilon = f(a) - a$. Supongamos que $x, w \in [-1,1]$ son tales que $a < x$ y $|f(x) - w| < \varepsilon$, entonces $a < w$.

Como $a < x$ se cumple que $f(a) < f(x)$. Por lo tanto

$$f(x) - w < \varepsilon = f(a) - a < f(x) - a,$$

lo cual implica que $f(x) - w < f(x) - a$, así, $a < w$.

Para verificar que $ITC(f) \subseteq ITC(g) \cup ITC(T)$, tomemos $a \in [-1, 0)$, $b \in (0, 1]$. Vamos a demostrar que no existen ε-cadenas que empiecen en b y terminen en a, para una ε adecuada.

Caso 1: $a \neq -1$.

Sean $\varepsilon = f(a) - a$ y $\gamma = \{b = x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una ε-cadena de f. Es decir, para toda $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ se satisface la siguiente condición

$$|f(x_i) - x_{i+1}| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Dado que $a < 0 < b = x_0$, utilizando la Afirmación, obtenemos que $a < x_i$ para toda $0 \leq i \leq n$.

Caso 2: $a = -1$.

Tomemos $\varepsilon = f(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})$.
Sea $\gamma = \{b = x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una ε-cadena de f. Entonces se satisface la desigualdad (2.11).
Como $b = x_0 > -\frac{1}{2}$, aplicando nuevamente la Afirmación, para toda $0 \leq i \leq n$, tenemos que $-\frac{1}{2} < x_i$. Por lo tanto $a < x_i$, para toda $0 \leq i \leq n$.

La otra contención es inmediata pues g y T son restricciones de la función f, lo cual prueba (2.10).

Por otra parte, como la función Tienda tiene la propiedad de la sombra (Ejemplo 1.9), usando el Teorema [**?**] y el Corolario 2.6, se sigue que

$$\omega(T) = ITC(T). \tag{2.12}$$

También ocurre que

$$ITC(g) = \omega(g). \tag{2.13}$$

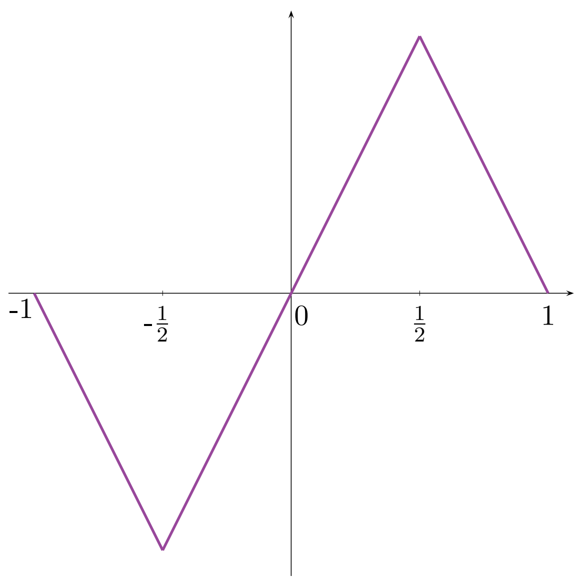
Para probarlo, primero veremos que los únicos elementos de $ITC(g)$ son $\{0\}$ y $\{-1\}$.
Dado que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, se tiene que $\{\{0\}, \{-1\}\} \subseteq ITC(g)$. Para probar la otra contención, observemos que si $A \in ITC(g)$, en particular, para cada $b \in A$ y $\varepsilon > 0$ debe existir una ε-cadena contenida en A, que empiece y termine en b. Sea $b \in (-1, 0)$ y $\varepsilon = g(b) - b$. Por la Afirmación, si $b < x \leq 0$ y $w \in [-1, 0]$ es tal que $|g(x) - w| < \varepsilon$, entonces $b < w \leq 0$. Como $b < f(b)$, se tiene que toda ε-cadena que inicie en b, digamos $\Gamma = \{b = b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, debe cumplir que $b < b_i$ para toda $0 \leq i \leq n$. Por lo tanto, no hay ε-cadenas de b a b en $(-1, 0)$.
Esto implica que si $A \in ITC(g)$, entonces $A \cap (-1, 0) = \emptyset$.
Por otro lado, como $\omega(0, g) = \{0\}$, $\omega(-1, g) = \{-1\}$ y $\omega(g) \subseteq ITC(g)$ (Proposición 2.1) , se satisface (2.13).
Finalmente, como consecuencia de (2.9), (2.10), (2.12) y (2.13), los hiperespacios $ITC(f)$ y $\omega(f)$ coinciden. ∎

Ejemplo 2.9. Consideremos la función $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2(-1 - x), & \text{si} \quad x \in [-1, -\frac{1}{2}], \\ \\ 2x, & \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \\ \\ 2(1 - x), & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces $\overline{\omega(f)} \subsetneq ITC(f)$. En particular, $\omega(f) \neq ITC(f)$.

Demostración. Sea $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{2^i} : i \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $A \in ITC(f)$. Es suficiente con demostrar que para cada $b \in A$ y $\varepsilon > 0$, existen ε-cadenas $\gamma(0, b)$, $\gamma(b, 0) \subseteq A$ de 0 a b y de b a 0, respectivamente, ya que concatenando $\gamma(x, 0)$ y $\gamma(0, y)$, obtendríamos una ε-cadena de x a y contenida en A, para cualesquiera $x, y \in A$.



Gráfica de la función f

Tomemos $b = \pm\frac{1}{2^j}$ para alguna $j \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos $i \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^i} < \varepsilon$ y $j \leq i$. Construimos $\gamma(0, b) = \{0, x_1, \ldots, x_{i-j+1} = b\}$ de la siguiente manera:

$$x_1 = \pm\frac{1}{2^i} \quad \text{y} \quad x_k = f^{k-1}(x_1)$$

para cada $2 \leq k \leq i - j + 1$. Notamos que

$$|f(x_k) - x_{k+1}| = |f^k(x_1) - x_{k+1}| = 0 < \varepsilon$$

si $1 \leq k \leq i - j$, y

$$|f(0) - x_1| = |0 - (\pm\tfrac{1}{2^i})| = \tfrac{1}{2^i} < \varepsilon,$$

por lo que $\gamma(0,b)$ es ε-cadena. Por otra parte, notemos que $f^j(b) = \pm 1$ y $f(\pm 1) = 0$, así $\gamma(b,0) := \{b, f(b), \ldots, f^j(b), 0\}$ es una ε-cadena de b a 0 y $\gamma(b,0) \subseteq A$.

Ahora veamos que $A \notin \overline{\omega(f)}$. Como $f[-1,0] = [-1,0]$ y $f[0,1] = [0,1]$, si $C = \omega(z,f)$ para algún $z \in [-1,1]$, entonces $o(z,f) \subseteq [-1,0]$ o bien $o(z,f) \subseteq [0,1]$; esto implica que

$$C \subseteq [-1,0] \quad \text{o bien} \quad C \subseteq [0,1]. \tag{2.14}$$

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y supongamos que $C \in 2^{[-1,1]}$ es tal que $H(A,C) < \varepsilon$. En particular, como $\{-1,1\} \subseteq A$ y $A \subseteq N(\varepsilon, C)$, existen $c_1 \in C \cap [-1, \frac{-1}{2})$ y $c_2 \in C \cap (\frac{1}{2}, 1]$. Entonces, $C \nsubseteq [-1,0]$ y $C \nsubseteq [0,1]$; así, por (2.14), $C \notin \omega(f)$. Esto prueba que $A \notin \overline{\omega(f)}$. Obsérvese que $\omega(f)$ es cerrado, de hecho

$$\omega(f) = \omega(f\mid_{[-1,0]}) \cup \omega(f\mid_{[0,1]}),$$

ya que ambos conjuntos, $[-1,0]$ y $[0,1]$ son fuertemente invariantes bajo f. ■

Las proposiciones 2.2 y 2.5 vienen en [12].
El Corolario 2.7 y el Ejemplo 1.9, nos permiten deducir que en la función Tienda, los hiperespacios $ITC(T)$ y $\omega(T)$ coinciden. Por otra parte, el Corolario 2.7 responde en positivo la conjetura 1.3 en [3], para el caso en que X es el intervalo $[0,1]$.

Capítulo 3

$\omega(f)$ vs $ITC(f)$: round 2

En este capítulo presentaremos una clase de funciones en las cuales los hiperespacios $ITC(f)$ y $\omega(f)$ coinciden. Para definir estas funciones, en la primera sección vamos a introducir nuevos tipos de sombreado y algunos ejemplos.
En la segunda sección presentamos uno de los resultados principales de este trabajo:
La función corrimiento, o función shift, en el espacio de k símbolos, $\sigma_k : \Sigma_k \to \Sigma_k$, tiene la propiedad de que $\omega(\sigma_k) = ITC(\sigma_k)$.

3.1. Otros tipos de sombreado

En el Capítulo 1 presentamos la noción de seudo órbita en X, en la que se nos permite dar "brincos" de a lo más una número constante (al que usualmente llamamos δ); dichos saltos pueden o no hacerse más pequeños, lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea $f : (X, d) \to (X, d)$ una función continua y $\Gamma = (x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en X. Decimos que:

(a) Γ es una *seudo órbita asintótica* de f si $d(f(x_n), x_{n+1}) \to 0$.

(b) Γ tiene una *sombra asintótica*, si existe $z \in X$ tal que $d(f^n(z), x_n) \to 0$.

Definición 3.2. Decimos que una función continua $f : X \to X$ tiene *la propiedad del sombreado límite* ($f \in LmPS$) si cada seudo órbita asintótica de f tiene una sombra asintótica.

A continuación damos ejemplos que muestran la relación que hay entre las propiedades de la sombra y del sombreado límite.

Ejemplo 3.3. La función identidad, $Id : [0, 1] \to [0, 1]$, no tiene la propiedad de la sombra ni la propiedad del sombreado límite.

Demostración. Primero veamos que Id no tiene la propiedad de la sombra. Tomemos $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, $\delta > 0$ y $N \geq 1$ de modo que $\frac{1}{N} < \delta$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$, definimos $x_i = \frac{i}{N}$. Así,

$\gamma = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_N = 1\}$ es una δ-cadena, pues

$$|Id(x_i) - x_{i+1}| = |x_i - x_{i+1}| = \frac{1}{N} < \delta.$$

Supongamos que existe una ε-sombra $z \in [0,1]$ para γ, es decir, $|z - x_i| < \varepsilon$ si $0 \leq i \leq N$. Entonces, se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$1 = |0 - 1| = |x_0 - x_N| \leq |x_0 - z| + |z - x_N| < 2\varepsilon < 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, γ no tiene ε-sombra.

Para ver que $Id \notin LmPS$, primero vamos a construir una seudo órbita asintótica a partir de una familia de cadenas $(\gamma_n)_{n\geq 2}$ en $[0,1]$, definidas de la siguiente manera:

$$\gamma_n = \begin{cases} \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}, & \text{si} \quad n = 2k, \ \text{con} \ k \geq 1 \\ \\ \{1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0\}, & \text{si} \quad n = 2k+1, \ \text{con} \ k \geq 1 \end{cases}$$

Sea $n \geq 2$. Notemos que γ_n es una $\frac{1}{n-1}$-cadena, puesto que $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$ y estamos partiendo el intervalo $[0,1]$ en n intervalitos de longitud $\frac{1}{n}$. Además, cada γ_n va del cero al uno o bien, del uno al cero, por lo cual podemos concatenar las cadenas, obteniendo así $\Gamma = \bigodot_{n\geq 2} \gamma_n = \gamma_2 \circ \gamma_3 \circ \gamma_4 \circ \ldots$. Dado que la sucesión $(\frac{1}{n-1})_{n\geq 2}$ converge a cero, Γ es una seudo órbita asintótica. Afirmamos que Γ no tiene sombra asintótica: si $z \in [0,1]$, necesariamente ocurre alguna de las siguientes dos condiciones

$$|z - 0| \geq \tfrac{1}{2} \qquad \text{o bien} \qquad |z - 1| \geq \tfrac{1}{2}.$$

Pero el conjunto $\{0,1\}$ aparece una infinidad de veces en Γ, por lo tanto z no puede ser sombra asintótica de Γ. ■

En el Ejemplo 3.4 se siguen algunas ideas contenidas en el libro [14], la meta es mostrar que la propiedad del sombreado límite no implica la propiedad del sombreado.

Ejemplo 3.4. Consideremos una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ con las siguientes propiedades:

(a) $f(x) = x$, si $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,

(b) $x < f(x)$, para todo $x \in [0,1] \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y

(c) $f(x) < f(y)$ si $x < y$.

La función f no tiene la propiedad de la sombra pero sí tiene la propiedad del sombreado límite.

Demostración. Primero veamos que f no tiene la propiedad de la sombra. Para ello, sean $\varepsilon = \frac{1}{6}$ y $\delta > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \text{mín}\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\}$. Usando las propiedades (a) y (c), para cada $i \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$f^i(\tfrac{1}{N}) < \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad f^i(\tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{2}) < 1.$$

De (b) inferimos que las sucesiones $(f^i(\frac{1}{N}))$ y $(f^i(\frac{1}{N}+\frac{1}{2}))$ son crecientes, por lo que, existen $m, k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$f^m(\tfrac{1}{N}) \in (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{N}, \tfrac{1}{2}) \quad \text{y} \quad f^k(\tfrac{1}{N}+\tfrac{1}{2}) \in (1-\tfrac{1}{N}, 1). \tag{3.1}$$

Definimos $\gamma = \{x_0 = \frac{1}{N}, x_1, \ldots, x_{m+k} = 1\}$ a continuación:

$$x_i = \begin{cases} f^i(\frac{1}{N}), & \text{si} \quad 0 \le i \le m-1, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{N}, & \text{si} \quad i = m, \\ f^{i-m}(x_m), & \text{si} \quad m+1 \le i \le m+k-1. \end{cases}$$

Afirmamos que γ es una δ-cadena.
Por como definimos γ, se cumple que $|f(x_i)-x_{i+1}| = 0$ si $i \notin \{m-1, m+k-1\}$. Entonces, sólo falta verificar que $|f(x_i)-x_{i+1}| < \delta$ para $i \in \{m-1, m+k-1\}$. Como consecuencia de (3.1) y la elección de N, deducimos las desigualdades siguientes:

$$|f(x_{m-1}) - x_m| = |f^m(\tfrac{1}{N}) - (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{N})| = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{N} - f^m(\tfrac{1}{N}) < \tfrac{2}{N} < \delta,$$

$$|f(x_{m+k-1}) - x_{m+k}| = |f^k(x_m) - 1| = 1 - f^k(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{N}) < \tfrac{1}{N} < \tfrac{\delta}{2}.$$

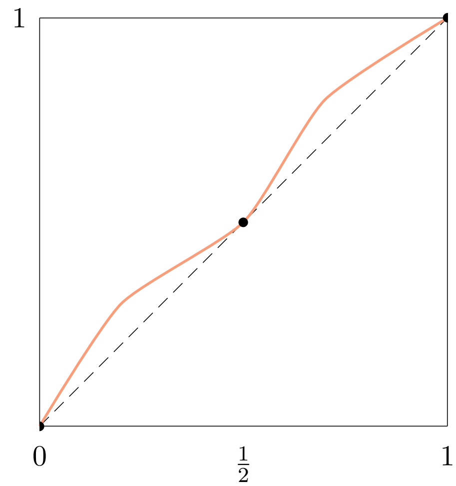
Ahora veamos que γ no tiene ε-sombra, $\varepsilon = \frac{1}{6}$.
Supongamos que $|z - x_0| < \varepsilon$ para algún $z \in [0,1]$; esto implica que

$$z < x_0 + \varepsilon = \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{6} \le \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $f^n(z) < \frac{1}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (propiedades (a) y (c)); en particular, se cumple para $n = m+k$, por lo que

$$|f^{m+k}(z) - x_{m+k}| = |f^{m+k}(z) - 1| > \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Así, z no puede ser ε-sombra de γ.



Gráfica de f.

El camino para probar que f tiene la propiedad de la sombra límite es un poco más largo, por esta razón dividiremos la prueba en cuatro afirmaciones que harán más ameno el trayecto.
Para cada $k \geq 5$ definimos $I_k = [\frac{1}{k}, \frac{1}{2} - \frac{1}{k}]$ y $D_k = [\frac{1}{2} + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$.
La función $f(x) - x > 0$ alcanza su valor mínimo δ_k (el cual es positivo por (b)) en $I_k \cup D_k$, es decir,

$$\delta_k \leq f(x) - x \quad \text{para todo } \; x \in I_k \cup D_k. \tag{3.2}$$

Sea $\Gamma = (x_n)_{n\geq 0}$ una seudo órbita asintótica en $[0, 1]$. Entonces

$$|f(x_n) - x_{n+1}| \to 0. \tag{3.3}$$

Nuestro objetivo es probar que Γ tiene una sombra asintótica.
Sea $k \geq 5$. Por (3.3), existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que la condición

$$|f(x_n) - x_{n+1}| < \tfrac{\delta_k}{2} \tag{3.4}$$

se satisface para todo $n \geq N_1$.

Afirmación 1: Si $n \geq N_1$ y $x_n \in I_k \cup D_k$, entonces $x_n + \frac{\delta_k}{2} < x_{n+1}$.

Utilizando (3.2) y (3.4) obtenemos las desigualdades

$$\tfrac{\delta_k}{2} > f(x_n) - x_{n+1} = f(x_n) - x_n + x_n - x_{n+1} \geq \delta_k + x_n - x_{n+1},$$

de las cuales, se sigue que $x_{n+1} > x_n + \frac{\delta_k}{2}$. Como consecuencia de la Afirmación 1, si $n \geq N_1$ y $\{x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+j}\} \subseteq I_k$ (o en D_k), entonces $x_n + (j+1)(\frac{\delta_k}{2}) < x_{n+j+1}$. Por esta razón, si $x_n \in I_k$ (o $x_n \in D_k$),

$$x_m \notin I_k \text{ (o } x_m \notin D_k) \quad \text{para alguna } \; m > n \geq N_1. \tag{3.5}$$

Ahora nos gustaría asegurarnos que si en algún momento un elemento de Γ se sale de I_k (o de D_k), la seudo órbita asintótica ya no pueda regresar. Para ello, definimos

$$a_k = f(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k}) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k}) \quad \text{y} \quad b_k = f(1 - \tfrac{1}{k}) - (1 - \tfrac{1}{k}).$$

Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\frac{\delta_k}{2}, \frac{a_k}{2}, \frac{b_k}{2}\}$. La condición (b) nos garantiza que $a_k, b_k > 0$, por lo que $\varepsilon > 0$. Así, (3.3) nos permite elegir $N_2 \in \mathbb{N}$ mayor que N_1 para la cual

$$|f(x_n) - x_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{para toda } n \geq N_2. \tag{3.6}$$

Afirmación 2: Si $n \geq N_2$ y $x_n \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, 1]$, entonces $x_{n+i} \notin I_k$ para toda $i \geq 1$.

Tomemos $n \geq N_2$ y $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$. Por las definiciones de a_k y ε, y como f es creciente, obtenemos:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k} = f(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k}) - a_k < f(x_n) - a_k < f(x_n) - \tfrac{a_k}{2} \leq f(x_n) - \varepsilon.$$

Por lo tanto, de (3.6) tenemos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} < f(x_n) - \varepsilon < x_{n+1}$.
Así, $x_{n+1} \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, 1]$, y en particular, $x_{n+1} \notin I_k$. Repitiendo este argumento concluimos que $x_{n+i} \notin I_k$ para cada $i \geq 1$.

Afirmación 3: Si $n \geq N_2$ y $x_n \in (1 - \frac{1}{k}, 1]$, entonces $x_{n+i} \notin D_k$ para toda $i \geq 1$.

Utilizando argumentos similares a los de la prueba de la Afirmación 2, se puede ver que para $n \geq N_2$, si $x_n \in (1 - \frac{1}{k}, 1]$, entonces

$$1 - \tfrac{1}{k} < f(x_n) - \tfrac{b_k}{2} \leq f(x_n) - \varepsilon < x_{n+1}.$$

Es decir, $x_{n+1} \in (1 - \frac{1}{k}, 1]$. Con esto, se tiene que $x_{n+i} \in (1 - \frac{1}{k}, 1]$ para toda $i \geq 1$.

Ahora bien, para $n \geq N_2$, si $x_n \in I_k$ (o $x_n \in D_k$), podemos tomar el menor $m > n$ de modo que $x_m \notin I_k$ (o $x_m \notin D_k$) (ver (3.5)); luego, por la Afirmación 1, esto implica que $x_m > x_n$; así $x_m \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, 1]$ (o $x_m \in (1 - \frac{1}{k}, 1]$). Por lo tanto, de las Afirmaciones 2 y 3, se sigue que $x_{m+i} \notin I_k$ (o $x_{m+i} \notin D_k$) para toda $i \geq 1$. En consecuencia, en $I_k \cup D_k$ hay un número finito de elementos de Γ. Entonces, "casi toda" la seudo órbita está contenida en

$$[0, \tfrac{1}{k}) \cup (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{k}) \cup (1 - \tfrac{1}{k}, 1].$$

Veamos que a partir de algún momento Γ se queda contenida en uno y sólo uno de estos tres intervalos.
Antes de empezar, definimos:

$$U_1^k = [0, \tfrac{1}{k}), \quad U_2^k = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{k}) \quad \text{y} \quad U_3^k = (1 - \tfrac{1}{k}, 1].$$

Afirmación 4: Existen $M \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $(x_i)_{i \geq M} \subseteq U_j^k$.

Como $f(\frac{1}{i}) \to 0$, podemos escoger $k \geq 5$ de modo que $f(\frac{1}{k}) < \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$. Sea $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - f(\frac{1}{k})$. Como en $I_k \cup D_k$ hay una cantidad finita de elementos de Γ, existe $N_3 \in \mathbb{N}$ para la cual

$x_n \notin I_k \cup D_k$ siempre que $n \geq N_3$. Nuevamente, por (3.3), tomamos $N \geq \max\{N_2, N_3\}$ tal que

$$|f(x_n) - x_{n+1}| < \min\{\varepsilon, d\} \quad \text{para toda } n \geq N. \tag{3.7}$$

Consideremos $\Gamma_N := (x_n)_{n \geq N}$. Si $\Gamma_N \subseteq U_i^k$ para alguna $i \in \{1,2,3\}$, ya acabamos. En caso de que $\Gamma_N \cap U_i^k \neq \emptyset$ y $\Gamma_N \cap U_j^k \neq \emptyset$ para $i \neq j$, necesariamente $\{i,j\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset$, lo que nos lleva a analizar los siguientes dos casos:

Caso 1: $\Gamma_N \cap U_1^k \neq \emptyset$.
Sea $M \geq N$ tal que $x_M \in U_1^k$. Por la condición (c), $f(x_M) < f(\frac{1}{k})$. Puesto que $M \geq N \geq N_3$, ocurre que $x_{M+1} \in U_1^k$ o bien que $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} < x_{M+1}$. Si sucediera que $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} < x_{M+1}$, entonces

$$x_{M+1} - f(x_M) > \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{k} - f(\tfrac{1}{k}) = d$$

lo cual contradice (3.7); luego, $x_{M+1} \in U_1^k$. Repitiendo este proceso, obtenemos que $(x_n)_{n \geq M} \subseteq U_1^k$.

Caso 2: Si $\Gamma_N \cap U_3^k \neq \emptyset$.
Consideremos $M \geq N$ de modo que $x_M \in U_3^k$. Como $N \geq N_2$, por la Afirmación 3, $(x_n)_{n \geq M} \subseteq U_3^k$.

En ambos casos, concluimos que $(x_n)_{n \geq M} \subseteq U_i^k$ para alguna $i \in \{1,3\}$ y $M \geq N$.

Finalmente, notemos que en cada U_i^k hay exactamente uno de los tres puntos fijos de f y, si $i \in \{1,2,3\}$, el diámetro de U_i^k converge a cero cuando $k \to \infty$, por lo cual, si $(x_n)_{n \geq M} \subseteq U_i^k$, el punto fijo de f en U_i^k es sombra asintótica de Γ. ■

En vista de los ejemplos 3.3 y 3.4, es natural preguntarse si la propiedad del sombreado implica la propiedad del sombreado límite. Recientemente, Chris Good, Piotr Oprocha y Mate Puljiz, en **??**, exhibieron un ejemplo en el que esta implicación no se da. Más aún, dicho ejemplo tiene la propiedad de la sombra, pero $\omega(f) \subsetneq ITC(f)$. Lo cual muestra que la conjetura de Barwell, Davies y Good **??**, es falsa.

Definición 3.5. Decimos que una función continua $f : X \to X$ tiene *la propiedad del sombreado s-límite* si cumple las dos condiciones siguientes:

(a) f tiene la propiedad de la sombra.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada δ-seudo órbita asintótica en X tiene una ε-sombra asintótica.

La función del Ejemplo 3.4 nos muestra que hay funciones con la propiedad del sombreado límite sin la del sombreado s-límite. El siguiente lema, nos da condiciones sobre f para que el sombreado s-límite implique sombreado límite.

Lema 3.6. *Sea $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Si f tiene la propiedad del sombreado s-límite, entonces $f \in LmPS$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 0}$ una seudo órbita asintótica, es decir

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \to 0. \tag{3.8}$$

Tomemos $\varepsilon = 1$, y elegimos $\delta > 0$ que satisfaga la condición (b) de la Definición 3.5. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ para cada $n \geq N$. Notemos que $(x_n)_{n\geq N}$ es una δ-seudo órbita asintótica. Ahora bien, como f es suprayectiva, podemos tomar N puntos $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ de X de modo que $f(y_{N-1}) = x_N$ y $f(y_i) = y_{i+1}$ si $0 \leq i \leq N-2$. Consideremos $\Gamma = (y_i)_{i\geq 0}$, donde $y_i = x_i$ para $i \geq N$. De la elección de $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}\}$ y dado que $(x_n)_{n\geq N}$ es una δ-seudo órbita asintótica, tenemos que Γ también lo es. Por lo tanto, existe $z \in X$ para el cual

$$d(f^n(z), y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{y} \quad d(f^n(z), y_n) < \varepsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
Entonces, z es una sombra asintótica para $(x_n)_{n\geq 0}$, pues $x_i = y_i$ si $i \geq N$. ■

Definición 3.7. Si $f : X \to X$ es una función continua y $\Gamma = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una seudo órbita asintótica de f, definimos el *omega conjunto límite* de Γ bajo f, como el conjunto de puntos límite de las subsucesiones de Γ; es decir

$$\omega(\Gamma, f) := \left\{ y \in X : \text{existe una sucesión creciente } (n_k)_{k\geq 0} \text{ en } \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y \right\}.$$

Observemos que $\omega(\Gamma, f)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X, es decir, $\omega(\Gamma, f) \in 2^X$.
Por otra parte, notemos que la órbita de cualquier elemento $x \in X$, $o(x, f)$, es un caso particular de seudo órbita asintótica. Por lo cual, si $\Gamma = o(x, f)$, tenemos que $\omega(\Gamma, f)$ y $\omega(x, f)$ coinciden. Así, las propiedades del omega conjunto límite de una seudo órbita asintótica, también son válidas para todo $\omega(x, f)$.

Lema 3.8. *Sean $f : X \to X$ continua y $\Gamma = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una seudo órbita asintótica de f. Entonces $d(x_n, \omega(\Gamma, f)) \to 0$.*

Demostración. Haremos la prueba por contradicción.
Supongamos que $d(x_n, \omega(\Gamma, f)) \nrightarrow 0$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \leq d(x_m, \omega(\Gamma, f))$ para alguna $m > n$. Tomemos una sucesión de naturales $1 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ que cumpla que:

$$\varepsilon \leq d(x_{m_i}, \omega(\Gamma, f)), \quad \text{para toda } i \geq 1. \tag{3.9}$$

Como X es métrico y compacto, la sucesión (x_{m_i}) tiene una subsucesión $(x_{m_{i_k}})$ que converge a un punto $a \in X$; luego, $d(x_{m_{i_k}}, a) < \varepsilon$ para alguna $k \geq 1$.
Finalmente, notemos que $a \in \omega(\Gamma, f)$, lo cual implica que

$$d(x_{m_{i_k}}, \omega(\Gamma, f)) \leq d(x_{m_{i_k}}, a) < \varepsilon,$$

lo que contradice (3.9). ■

Corolario 3.9. *Sean $f : X \to X$ una función continua, $\varepsilon > 0$ y $\Gamma = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una seudo órbita asintótica de f. Entonces, existe $N > 0$ tal que $x_n \in N(\varepsilon, \omega(\Gamma, f))$ para toda $n \geq N$.*

Demostración. Por el Lema 3.8, existe $N > 0$ de modo que $d(x_n, \omega(\Gamma, f)) < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$. Así, dada $n \geq N$, $d(y_n, x_n) < \varepsilon$ para algún $y_n \in \omega(\Gamma, f)$; es decir, $x_n \in N(\varepsilon, \omega(\Gamma, f))$. ■

Lema 3.10. *Si $f : X \to X$ es continua y $\Gamma = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una seudo órbita asintótica, entonces $f(\omega(\Gamma, f)) = \omega(\Gamma, f)$.*

Demostración. Sea $y \in \omega(\Gamma, f)$. Entonces, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ conjunto infinito de modo que $x_j \underset{j\in J}{\longrightarrow} y$.
El conjunto J induce una subsucesión $(x_j)_{j\in J}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
El símbolo $x_j \underset{j\in J}{\longrightarrow} y$ quiere decir que la subsucesión $(x_j)_{j\in J}$ converge a y cuando $j \to \infty$.
Así, $f(x_j) \underset{j\in J}{\longrightarrow} f(y)$, y como Γ es asintótica, el lado derecho de la desigualdad

$$d(x_{j+1}, f(y)) \leq d(x_{j+1}, f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)),$$

tiende a cero cuando $j \to \infty$, por lo que $f(y) \in \omega(\Gamma, f)$.

Para demostrar la otra contención, sean $y \in \omega(\Gamma, f)$ y $(x_j)_{j\in J}$ una subsucesión de Γ que converge a y. Por la compacidad de X, podemos tomar $K \subseteq J$ infinito de manera que para algún $a \in X$, $x_{k-1} \underset{k\in K}{\longrightarrow} a$. Notemos que $a \in \omega(\Gamma, f)$ y que $f(x_{k-1}) \longrightarrow f(a)$.
Veamos que $f(a) = y$. Para ello, basta con demostrar que la sucesión $(f(x_{k-1}))_{k\in K}$ también converge a y, lo cual se obtiene tomando el límite cuando $k \in K$ tiende a infinito en la desigualdad

$$d(f(x_{k-1}), y) \leq d(f(x_{k-1}), x_k) + d(x_k, y),$$

puesto que Γ es asintótica y $(x_k)_{k\in K}$ es subsucesión de $(x_j)_{j\in J}$. ■

Proposición 3.11. *Sean $f : X \to X$ una función continua y $\Gamma = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una seudo órbita asintótica de f. Entonces $\omega(\Gamma, f) \in ITC(f)$.*

Demostración. Sean $a, b \in \omega(\Gamma, f)$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f, existe $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3})$ de modo que para todo $u, v \in X$

$$\text{si} \quad d(u, v) < \delta, \quad \text{entonces} \quad d(f(u), f(v)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{3.10}$$

Denotemos por U a la nube $N(\delta, \omega(\Gamma, f))$. Por el Corolario 3.9 y el hecho que Γ es asintótica, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad x_n \in U, \tag{3.11}$$

para cada $n \geq N$.
Como $a \in \omega(\Gamma, f)$, por el Lema 3.10, $f(a) \in \omega(\Gamma, f)$. Así, existe $m \geq N$ tal que

$$d(x_m, f(a)) < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Por otra parte, $b \in \omega(\Gamma, f)$ nos garantiza que existe $r \geq 1$ con la siguiente propiedad

$$d(x_{m+r}, b) < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{3.13}$$

De la elección de N, se sigue que $\{x_{m+i} : 0 \leq i \leq r-1\} \subseteq U$, por lo cual, para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ existe $z_{i+1} \in \omega(\Gamma, f)$ de manera que

$$d(x_{m+i}, z_{i+1}) < \delta < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{3.14}$$

Tomemos $z_0 = a$, $z_{r+1} = b$ y definimos $\gamma = \{z_0, z_1, \ldots, z_r, z_{r+1}\}$. Por construcción γ está completamente contenida $\omega(\Gamma, f)$. Veamos que γ es una ε-cadena de a a b: como consecuencia de la desigualdad del triángulo, y de (3.14), (3.10), (3.11) y (3.13), se obtienen las desigualdades

$$\begin{aligned} d(f(z_i), z_{i+1}) &\leq d(f(z_i), f(x_{m+i-1})) + d(f(x_{m+i-1}), x_{m+i}) + d(x_{m+i}, z_{i+1}) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq r$. Finalmente, usando (3.12) y (3.14), obtenemos

$$d(f(z_0), z_1) = d(f(a), z_1) \leq d(f(a), x_m) + d(x_m, z_1) < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

■

Proposición 3.12. *Si $f : X \to X$ es una función continua y $A \in ITC(f)$, entonces existe Γ seudo órbita asintótica de f tal que $A = \omega(\Gamma, f)$.*

Demostración. Tomemos $A \in ITC(f)$ y $\Gamma = (a_i)_{i \geq 0}$ la seudo órbita del Lema 2.4. Sea $\varepsilon > 0$. Por el inciso (a) del lema, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(a_i), a_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i \geq M$, así que Γ es asintótica. Vamos a probar que $A = \omega(\Gamma, f)$. Primero, observemos que $\omega(\Gamma, f) \subseteq \overline{A} = A$, pues $\Gamma \subseteq A$ y $A \in 2^X$. Tomemos $a \in A$. Por el Lema 2.4 (b), existe $n_1 > 1$ de modo que $d(a_{n_1}, a) < 1$; así, para cada $k \geq 2$ podemos elegir $n_k > n_{k-1}$ que satisfaga la desigualdad $d(a_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$. Por construcción, la subsucesión $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ converge a a. Por lo tanto $a \in \omega(\Gamma, f)$. ■

Proposición 3.13. *Si $f : X \to X$ es una función continua que tiene la propiedad del sombreado límite, entonces $ITC(f) \subseteq \omega(f)$.*

Demostración. Sea $A \in ITC(f)$. Como consecuencia de la Proposición 3.12, existe $\Gamma = (a_i)_{i \geq 0}$ seudo órbita asintótica de modo que $A = \omega(\Gamma, f)$. Dado que $f \in LmPS$, existe $z \in X$ tal que

$$d(f^n(z), a_n) \to 0. \tag{3.15}$$

Afirmamos que $A = \omega(z, f)$. Para $a \in A$, elegimos $(n_k)_{k \geq 1}$ creciente, de manera que

$$a_{n_k} \to a. \tag{3.16}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por (3.15) y (3.16), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces

$$d(a, a_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(a_{n_k}, f^{n_k}(z)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

Así, por (3.17), obtenemos la desigualdad

$$d(a, f^{n_k}(z)) \leq d(a, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, f^{n_k}(z)) < \varepsilon,$$

para toda $k \geq N$. Lo que significa que $a \in \omega(z, f)$.
Finalmente, si $y \in \omega(z, f)$, existen $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ de modo que $f^{n_i}(z) \to y$. Este hecho y (3.15), nos permiten elegir $M \in \mathbb{N}$ para la cual, si $i \geq M$, entonces

$$d(y, f^{n_i}(z)) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(a_{n_i}, f^{n_i}(z)) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

De lo anterior concluimos que $d(y, a_{n_i}) < \varepsilon$ siempre que $i \geq M$, por lo que $y \in \omega(\Gamma, f) = A$.

■

Definición 3.14. Sea $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es *expansiva* si existe una constante $b > 0$, tal que si $d(f^i(x), f^i(y)) \leq b$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$. A la constante b se le llama *constante de expansividad.*

Por el momento nos concentraremos en demostrar que las funciones expansivas con propiedad de la sombra, son las que prometimos al inicio de este capítulo: en ellas, los hiperespacios $ITC(f)$ y $\omega(f)$ coinciden. En la siguiente sección, presentaremos un ejemplo de funciones con estas dos propiedades.

Observación 3.15. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones en X, podemos tomar un conjunto infinito de números naturales K para el cual $(a_n)_{n\in K}$ converge a algún punto de X. Por otra parte, existe $J \subseteq K$, infinito, tal que la sucesión $(b_n)_{n\in J}$ es convergente. Así, $(a_n)_{n\in J}$ y $(b_n)_{n\in J}$ son subsucesiones convergentes utilizando el mismo subconjunto $J \subseteq \mathbb{N}$.

Proposición 3.16. *Si f es expansiva y tiene la propiedad de la sombra, entonces f tiene la propiedad del sombreado s-límite.*

Demostración. Como f tiene la propiedad de la sombra, sólo debemos probar que f cumple la propiedad (b) de la Definición 3.5. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Sea $\varepsilon^* = \text{mín}\{\varepsilon, \frac{b}{2}\}$, donde b es la constante de expansividad de f, así, $\varepsilon^* > 0$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ de modo que toda δ-seudo órbita tiene una ε^*-sombra.
Tomemos $\Gamma = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una δ-seudo órbita asintótica y $z \in X$ tal que

$$d(f^n(z), x_n) < \varepsilon^* \quad \text{para todo } n \geq 0. \tag{3.18}$$

Afirmamos que z es sombra asintótica de Γ. Supongamos que esto no ocurre, es decir $d(f^n(z), x_n) \nrightarrow 0$. Como la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito de modo que la subsucesión $(d(f^j(z), x_j))_{j\in J}$ converge a algún $y > 0$.
Como consecuencia de la Observación 3.15, podemos elegir $N \subseteq J$ infinito y $p, q \in X$ de manera que:

$$f^n(z) \xrightarrow[n\in N]{} p \qquad \text{y} \qquad x_n \xrightarrow[n\in N]{} q. \tag{3.19}$$

Utilizando este hecho y la continuidad de la función distancia, obtenemos

$$d(f^n(z), x_n) \xrightarrow[n\in N]{} d(p, q) \qquad \text{y} \qquad d(p, q) = y > 0. \tag{3.20}$$

Para cada $k \geq 0$, de la continuidad de f y de (3.19) se sigue que

$$f^{n+k}(z) \xrightarrow[n \in N]{} f^k(p). \tag{3.21}$$

Ahora bien, veamos por inducción sobre $k \geq 0$ que:

$$x_{n+k} \xrightarrow[n \in N]{} f^k(q). \tag{3.22}$$

El caso $k = 0$ lo tenemos en (3.19). Supongamos válido (3.22) para algún $k \geq 0$ y probemos que se vale para $k+1$.
Para cada $n \in N$ se satisface la siguiente desigualdad

$$d(x_{n+k+1}, f^{k+1}(q)) \leq d(x_{n+k+1}, f(x_{n+k})) + d(f(x_{n+k}), f^{k+1}(q).$$

Así, como f es continua, Γ es asintótica y de (3.22), si tomamos el límite cuando n tiende a infinito en ambos lados de la desigualdad, obtenemos (3.22) para $k+1$.

Entonces, como consecuencia de (3.21), (3.22) y de (3.18) para toda $k \geq 0$ se tiene que

$$d(f^{n+k}(z), x_{n+k}) \xrightarrow[n \in N]{} d(f^k(p), f^k(q)) \leq \varepsilon^* \leq \tfrac{b}{2}.$$

Por lo tanto,

$$d(f^k(p), f^k(q)) < b.$$

Dado que f es expansiva, obtenemos que $p = q$, lo cual contradice (3.20).
Así, z sí es sombra asintótica de Γ. ∎

Corolario 3.17. *Si f es expansiva y tiene la propiedad de la sombra, entonces $ITC(f) = \omega(f)$.*

Demostración. Notemos que la Proposición 3.13 nos garantiza que $ITC(f) \subseteq \omega(f)$, ya que $f \in LmPS$ por la Proposición 3.16 y el Lema 3.6. Por otra parte, el hiperespacio $\omega(f)$ siempre está contenido en $ITC(f)$ (ver Proposición 2.1). ∎

3.2. La función Shift

Para cada número natural $k \geq 2$, definimos $I_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Dotemos a I_k con la métrica discreta d. Ahora bien, consideremos *la familia de sucesiones con k símbolos*, Σ_k, definida a continuación:

$$\Sigma_k := \{(x_0, x_1, x_2, \ldots) |\ x_i \in I_k, \text{ para toda } i \geq 0\} = \prod_{n \in \mathbb{N}} I_k.$$

Por comodidad, a un elemento $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de Σ_k lo denotaremos como $\widehat{x}$. Definimos la función $\widehat{d} : \Sigma_k \times \Sigma_k \to [0, \infty)$ como

$$\widehat{d}\,(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{i \geq 0} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Resulta que $\widehat{d}$ es una métrica para Σ_k y que $(\Sigma_k, \widehat{d})$ es un espacio compacto. Esta última afirmación es consecuencia de que la topología generada por $\widehat{d}$ es la misma que la topología producto en Σ_k; como I_k es compacto, entonces Σ_k también.
¡Estamos listos para presentar a la estrella de esta sección!

Definición 3.18. Sea $k \geq 2$. Definimos $\sigma_k : \Sigma_k \to \Sigma_k$ como

$$\sigma_k(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3 \ldots),$$

para todo $\widehat{x} \in \Sigma_k$. A la función σ_k se le conoce como *función corrimiento* o *shift*, pues va recorriendo a la izquierda la información de $\widehat{x}$.

El shift es una función continua (Proposición 3.20), con propiedades dinámicas muy interesantes. Nuestro objetivo es probar que σ_k es expansiva y que tiene la propiedad del sombreado, para concluir que los hiperespacios $ITC(\sigma_k)$ y $\omega(\sigma_k)$ coinciden, usando el Corolario 3.17. A continuación, demostraremos dos propiedades sencillas, pero muy útiles de la métrica $\widehat{d}$.

Lema 3.19. *Para $\widehat{x}, \widehat{y} \in \Sigma_k$ y $N \geq 0$ se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(a) Si $x_i = y_i$ para toda $0 \leq i \leq N$, entonces $\widehat{d}\,(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq \frac{1}{2^N}$.

(b) Si $\widehat{d}\,(\widehat{x}, \widehat{y}) < \frac{1}{2^N}$, entonces $x_i = y_i$ para toda $0 \leq i \leq N$.

Demostración. Si $d(x_i, y_i) = 0$ para toda $i \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, entonces

$$\widehat{d}\,(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{N+1 \leq i} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{N+1 \leq i} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N} \sum_{1 \leq i} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N},$$

lo que prueba (a).
Vamos a probar (b) por contrapuesta. Supongamos que $j \leq N$ es tal que $x_j \neq y_j$. De esto inferimos que $d(x_j, y_j) = 1$, por lo que $\widehat{d}\,(\widehat{x}, \widehat{y}) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^N}$. ■

Proposición 3.20. *La función $\sigma_k : \Sigma_k \to \Sigma_k$ es continua para toda $k \geq 2$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$.
Tomemos $\widehat{x} \in \Sigma_k$ y $\delta = \frac{1}{2^{N+1}}$. Si $\widehat{y}$ es un elemento de Σ_k de modo que $\widehat{d}\,(\widehat{x}, \widehat{y}) < \delta$, como consecuencia del Lema 3.19 (b), las primeras $N + 2$ coordenadas de $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$ coinciden, así que

$$\sigma_k(\widehat{x})_i = x_{i+1} = y_{i+1} = \sigma_k(\widehat{y})_i$$

para toda $0 \leq i \leq N$.
Por lo tanto, del Lema 3.19 (a), se tiene que $\widehat{d}\,(\sigma_k(\widehat{x}), \sigma_k(\widehat{y})) \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$. ■

Proposición 3.21. *Para cada $k \geq 2$, la función σ_k tiene la propiedad de la sombra.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$.
Tomemos $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$ y $\Gamma = (\widehat{x}_n)_{n\geq 0}$ una δ-seudo órbita en Σ_k. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $\widehat{x}_n := (x_i^n)_{i\geq 0}$. Como Γ es una δ-seudo órbita, $d(\sigma_k(\widehat{x}_n), \widehat{x}_{n+1}) < \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\sigma_k(\widehat{x}_n)$ y $\widehat{x}_{n+1}$ coinciden en las primeras $M+2$ coordenadas, es decir,

$$x_{i+1}^n = x_i^{n+1} \quad \text{para cada } 0 \leq i \leq M+1. \tag{3.23}$$

Definimos $z := (z_j)_{j\geq 0}$ como sigue:

$$z_j = \begin{cases} x_j^0, & \text{si} \quad 0 \leq j \leq M+1, \\ x_{M+2}^{j-(M+2)}, & \text{si} \quad j \geq M+2. \end{cases}$$

Afirmamos que z es una ε-sombra para Γ. Para ello, es suficiente con demostrar que $\sigma_k^n(z)$ y $\widehat{x}_n$ coinciden en las primeras $M+2$ coordenadas, pues del Lema 3.19 (a) obtendremos que $d(\sigma_k^n(z), \widehat{x}_n) \leq \frac{1}{2^{M+1}} < \varepsilon$.
De la definición de σ_k tenemos que $\sigma_k^n(z) = (z_i)_{i\geq n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción sobre n que $z_{n+i} = x_i^n$ para toda $0 \leq i \leq M+1$. Si $0 \leq i \leq M+1$ y $n = 0$, de la definición de z obtenemos que $z_{0+i} = z_i = x_i^0$. Ahora bien, supongamos que para $r \geq 0$, se cumple la identidad

$$z_{r+i} = x_i^r. \tag{3.24}$$

Sea $0 \leq i \leq M$. Como consecuencia de las ecuaciones (3.24) y (3.23), para $r+1$ obtenemos

$$z_{(r+1)+i} = z_{r+(i+1)} = x_{i+1}^r = x_i^{r+1}.$$

Por otra parte, para $i = M+1$, de la definición de z y (3.23) se sigue que:

$$z_{(r+1)+i} = z_{r+(M+2)} = x_{M+2}^r = x_{M+1}^{r+1}.$$

Por lo tanto, si $0 \leq i \leq M+1$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple $z_{n+i} = x_i^n$. ■

Proposición 3.22. *Sea $k \geq 2$. Entonces la función σ_k es expansiva.*

Demostración. Elegimos $b \in (0,1)$. Sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in \Sigma_k$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{d}\,(\sigma_k^n(\widehat{x}), \sigma_k^n(\widehat{y})) < b. \tag{3.25}$$

Veamos que $\widehat{x} = \widehat{y}$. Para ello, tomemos $n \geq 0$. Como

$$\sigma_k^n(\widehat{x}) = (x_{n+i})_{i\geq 0} \qquad \text{y} \qquad \sigma_k^n(\widehat{y}) = (y_{n+i})_{i\geq 0},$$

por (3.25) y la parte (b) del Lema 3.19, concluimos que

$$x_n = x_{n+0} = y_{n+0} = y_n,$$

ya que $b < 1 = \frac{1}{2^0}$. Como este razonamiento es válido para cualquier $n \geq 0$, se sigue que $\widehat{x} = \widehat{y}$.
Por lo tanto, σ_k es expansiva, con constante de expansividad b. ■

Las proposiciones 3.21 y 3.22, nos dicen que σ_k tiene la propiedad de la sombra y que es expansiva, para cada $k \geq 2$, lo que combinado con el Corolario 3.17 prueba el último resultado de este trabajo.

Corolario 3.23. *Para cada $k \geq 2$, los hiperespacios $ITC(\sigma_k)$ y $\omega(\sigma_k)$ coinciden. En particular, $\omega(\sigma_k)$ es un subespacio cerrado de 2^{Σ_k} (ver Proposición 2.2).*

Bibliografía

[1] N. Aoki, K. Hiraide, *Topological Theory of Dynamical Systems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.

[2] A. D. Barwell, C. Good, P. Oprocha, B. E. Raines, *Characterizations of ω-limit sets in topologically hyperbolic systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems 33 (2013), 1819-1833.

[3] A. D. Barwell, G. Davies, C. Good, *On the ω-limit sets of tent maps*, Fundamenta Mathematicae 217 (2012), 35-54.

[4] A. Blokh, A. M. Bruckner, P. D. Humke, J. Smital, *The space of ω-limits sets of a continuous map of the interval*, Transactions of the American Mathematical Society 348 (1996), 1357-1372.

[5] E. M. Coven, I. Kan, J. A. Yorke, *Pseudo orbit shadowing in the family of tent maps*, Transactions of the American Mathematical Society 308, (1988), 227-241.

[6] C. Good, P. Oprocha, M. Puljiz, *On three notions of shadowing*, arxiv.org/pdf/1701.05383.pdf, (2017).

[7] M. W. Hirsch, H. L. Smith, X. Q. Zhao, *Chain transitivity, attractivity, and strong repellors for semidynamical systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations 13 (2001), 107-131.

[8] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Series de Textos, No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[9] J. King, H. Méndez, *Sistemas Dinámicos Discretos*, Las Prensas de Ciencias, UNAM, México D.F, 2014.

[10] Z. Kocan, V. Kornecka-Kurkova, M. Malek, *On the centre and the set of ω-limit points of continuous maps on dendrites*, Topology and its Applications, 156 (2009), 2923-2931.

[11] J. H. May, S. Shao, *Spaces of ω-limit sets of graph maps*, Fundamenta Mathematicae, 196 (2007), 91-100.

[12] J. Meddaugh, B. E. Raines, *Shadowing and internal chain transitivity*, Fundamenta Mathematicae 222 (2013), 279-287.

[13] H. Méndez, *Notas: Dinámica Discreta e Hiperespacios*, tifon.fciencias.unam.mx/hml/chain-recurrence-2.pdf, (2017).

[14] S. Y. Pilyugin, *Shadowing in Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.