



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

UNA CLASIFICACIÓN DE CONEXIONES AFINES LOCALMENTE
HOMOGÉNEAS SOBRE SUPERFICIES COMPACTAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANTONIA SÁNCHEZ GODINEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. ADOLFO GUILLOT SANTIAGO
UNIDAD CUERNAVACA DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS,
UNAM

CDMX, AGOSTO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	III
Introducción	VII
Capítulo 1. Preliminares	1
§1. Nociones de grupos.	1
§2. Variedades diferenciables, campos vectoriales y foliaciones	5
§3. Grupos de Lie y acciones suaves: grupos de transformaciones	8
§4. Conexiones y sus simetrías locales	11
§5. (G, X) -estructuras	15
§6. Aplicación desarrollante y continuación analítica	16
Capítulo 2. Conexiones afines localmente simétricas en superficies compactas orientables	21
§1. Conexiones afines localmente simétricas ∇ y sus simetrías locales	21
Capítulo 3. Modelo local	29
§1. Grupo de Lie G asociado a $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$	29
§2. La foliación invariante	45
§3. Isometrías de ∇_0	46
Capítulo 4. Modelo Global	53
§1. La (G, \mathcal{M}) -estructura sobre S	54
§2. La holonomía de S	56
§3. Demostración del Teorema principal	63
Apéndice A. Espacios cubrientes	67

§1. Homotopía y grupo fundamental	67
§2. Espacios cubrientes	68
§3. Transformaciones de cubierta	73
Apéndice B. Tablas	77
Bibliografía	79

AGRADECIMIENTOS

Terminar este proyecto me ha consumido más tiempo del que tenía pensado y planeado, durante este proceso he conocido a muchas personas que me han brindado su ayuda.

Quiero empezar agradeciéndole a Dios que me está permitiendo terminar esta etapa. A mi padre Fortunato por enseñarme con su ejemplo de rectitud a hacer las cosas lo mejor posible; porque él siempre significará en mi vida el deseo de concluir las cosas que en un momento empecé. A mi madre Estela por su ejemplo de perseverancia; gracias a ella supe desde niña que trabajando se puede tener un mejor nivel de vida, que aun cuando las actividades cotidianas sean muchas, debo buscar tiempo para hacer las cosas que me gustan.

A mi nueva familia que he formado junto a José Juan. Sin duda, José y nuestro pequeño Josécito, me han dado el impulso que me hacía falta para terminar. Gracias cariño por todo tu apoyo incondicional en cada ámbito que compartimos, incluyendo las Matemáticas; gracias por explicarme con mucho detalle los temas que se me dificultaban. A tí Josécito, aún cuando eres muy pequeño te agradezco tu paciencia pues aveces nos ha tocado sacrificar nuestras horas de juego.

A victor M. Saavedra, mi gran amigo, gracias por todo tu apoyo cuando más lo necesité. A mi amiga Liz, por su apoyo en la realización de trámites y la gestión de becas para los estudiantes en general, pero sobre todo por las largas charlas (no precisamente de matemáticas). A mis comadres Haremy y Alma, porque aunque no nos vemos a diario, siempre nos unirá un lazo muy bonito: Josécito. A mi cuñada Lupita por ayudarme a cuidar a Josécito mientras yo terminaba los detalles de esta tesis.

A Dalid y Leonel, ya que al ayudar a José durante la licenciatura, indirectamente también me ayudaron a mi. A la tía Elisa, porque en una ocasión hizo posible que yo visitara a mi padre cuando él estuvo muy enfermo, y porque siempre trata de ayudarnos en lo que puede.

En el ámbito académico quiero empezar agradeciéndole a la Dra. Catherine E. Searle Burns por ser mi asesora durante los primeros semestres de la maestría, gracias por brindarme su confianza académicamente y por todo su apoyo durante el tiempo que trabajamos juntas.

A la Dra. Martha Takane Imai y al Dr. Max Neumman coto por su gran ayuda académica en las asignaturas de álgebra y cálculo, respectivamente, cuando preparaba mi examen de ingreso a la maestría.

Al M. C. Daniel Rojas Sandoval por darme mi primera oportunidad para dar clases en la Universidad Politécnica del Estado de Morelos (UPEMOR). Esta etapa de mi vida jamás la olvidaré... el hecho de ver a mis alumnos con tantas ganas de sobresalir, fue un gran motivo para salir adelante en momentos de crisis.

Al Dr. Adolfo Guillot Santiago por aceptar (en mi tercer semestre de la maestría) ser mi asesor y director de tesis. Gracias por toda su paciencia, su tiempo y su dedicación para que finalizáramos de la mejor manera este proyecto. Muchas gracias por explicarme siempre que fue necesario, y por revisar una y otra vez la tesis para pulir lo más que se pudo la última versión.

A mis sinodales: Dr. Adolfo Guillot, Dr. Oscar Palmas, Dr. Piere Py, Dr. Max Neumann y el Dr. Gregor Weingart, por haber aceptado revisar mi tesis de maestría. Les agradezco el tiempo que me dedicaron para poder platicarles un panorama general sobre el tema de la tesis. Gracias a la aportación de cada uno de ustedes hoy tengo una mejor versión de este trabajo. Muy particularmente, quiero agradecerle al Dr. Oscar Palmas por agilizar el proceso de revisión de la tesis y emitir muy rápido su voto aprobatorio.

Finalmente, quiero agradecerle su apoyo a los programas de becas que me han beneficiado en algún momento:

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (EL CONACYT), por la beca de maestría.
- Al CONACYT a través del Proyecto de Investigación titulado *Semigrupos en dinámica holomorfa: representaciones, deformaciones y cirugía casi conforme*, con clave de registro: CB-2010/153850, por el apoyo otorgado. Responsable del proyecto: Dr. Peter Makienko.
- Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT), a través de la Dirección general de asuntos

del personal académico (Dgapa) y del proyecto titulado *Grupos Kleimanos complejos* con clave IN106814, por la beca otorgada. Responsable del Proyecto: Dr. Angel Cano Cordero.

- Al CONACYT a través del Fondo Institucional de Fomento Regional para el Desarrollo Científico, Tecnológico y de Innovación (FORDECyT) con el proyecto titulado *Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana* con clave de proyecto 265667, por el apoyo otorgado. Responsable del Proyecto: Jawad Snoussi.
- Al CONACYT a través del Sistema Nacional de Investigadores (SNI). Por el apoyo otorgado.
Nombre del Investigador Nacional Nivel III:
 - Dr. Natig Atakishiyev, Núm. Exp. 15928.
 - Dr. Santiago Alberto Verjovsky Solá, Núm. Exp. 858.
 - Dr. José Antonio Seade Kuri, Núm. Exp. 1170.
- A la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM (UCIM), a través de la Comisión de asuntos de Estudiantes de Cuernavaca, por el apoyo otorgado durante el proceso de mi titulación.

Quiero dedicarle con mucho cariño esta tesis a mis hermanas y hermanos: Juana, Elisa, José, Tello, Gilbe, Lili, Pedro y Rosy, y a mis sobrinos:

- que actualmente están estudiando una carrera o a punto de titularse: Elisabeth, José Armando, Mayte e Isaac;
- los que seguirán intentando ingresar a la universidad: Noel y Diana;
- los que decidieron dedicarse a otra cosa distinta del estudio: Yanahí, Eduardo, José Antonio y Enoch;
- los que hoy son madre o padre de familia: Uriel, Estephani, Erick y Gabriela;
- a quien nació con una discapacidad y siempre le fue más difícil salir adelante: José Iván;
- los pequeños: Luis Angel, Irving Azael, Diego, Liliana, Juan Alberto, Abril Betzania, Jesus, Abdiel, Sadoc, Gloria Cristal, Alison Paola, Marisol, Alma Larisa y el más pequeño: Jesús Mateo.

Introducción

Un tema que resulta interesante en el área de geometría, es saber qué tan “simétrico” es nuestro objeto de estudio. Algo más interesante es poder dar propiedades de estos objetos que nos permitan clasificarlos, cuando esto sea posible. En geometría diferencial se sabe, por ejemplo, que las métricas riemannianas más simétricas sobre superficies compactas orientables son aquellas en las que, para cualesquiera par de puntos en ella existen vecindades que son isométricas, es decir, el pseudogrupo de isometrías actúa transitivamente. En tal caso, la curvatura gaussiana es necesariamente constante, y así, la superficie es localmente modelada sobre una superficie simplemente conexa dotada con una métrica completa de curvatura constante (la esfera \mathbb{S}^2 , el plano euclidiano \mathbb{R}^2 o el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , salvo homotecias). El siguiente teorema, conocido como el *Teorema de Hopf-Killing*, nos da un mejor panorama de este hecho:

Teorema 0.1. (*W. Killing, H. Hopf*) *Sea S una superficie riemanniana conexa, completa y de curvatura constante $K \in \{-1, 0, 1\}$. Entonces S es isométrica a uno de los siguientes cocientes:*

$$\begin{array}{llll} \mathbb{S}^2/\Gamma & \text{con } \Gamma \subset \mathbf{O}(3), & \text{si } & K = 1 \\ \mathbb{R}^2/\Gamma & \text{con } \Gamma \subset \mathbf{E}(2), & \text{si } & K = 0 \\ \mathbb{H}^2/\Gamma & \text{con } \Gamma \subset \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}), & \text{si } & K = -1 \end{array}$$

donde Γ es un grupo de isometrías actuando de forma libre y propiamente discontinua, $\mathbf{E}(2)$ es el grupo de isometrías de plano euclidiano \mathbb{R}^2 , $\mathbf{O}(3)$ es el subgrupo de isometrías de la esfera \mathbb{S}^2 (grupo ortogonal), y $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ es el grupo de isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

Ver más detalles en [Wolf11, p. 69]. Una variedad riemanniana completa, conexa y de curvatura constante K es llamada: *esférica* (si $K > 0$),

euclidiana (si $K = 0$) o *hiperbólica* (si $K < 0$). Tenemos entonces una de las tres geometrías: euclidiana, esférica o hiperbólica. Esto resuelve el problema de clasificar las métricas Riemannianas más simétricas sobre superficies compactas.

Por otra parte, recordemos que a partir de una métrica podemos obtener un nuevo objeto de estudio, a saber, una conexión afín. El Teorema fundamental de geometría Riemanniana nos garantiza este hecho:

Teorema 0.2 (Levi-Civita). *Dada una variedad riemanniana M , existe una única conexión afín ∇ sobre M , la cual es simétrica y compatible con la métrica riemanniana.*

La conexión ∇ dada por el teorema anterior, es llamada la *conexión de Levi-Civita* (o *riemanniana*) sobre M .

Resulta interesante preguntarse que pasa si nuestro objeto principal de estudio, en el Teorema 0.1, es una conexión afín en lugar de una métrica; ya que no todas las conexiones vienen de una métrica. A este respecto, en colaboración con mi asesor de tesis Adolfo Guillot, contamos con el siguiente resultado el cual ha sido demostrado en el artículo *A classification of locally homogeneous affine connections on compact surfaces* que ya ha sido publicado, (ver [GS14]).

Teorema 0.3. *Sea S una superficie compacta, orientable dotada con una conexión afín ∇ , C^∞ tal que el pseudogrupo de isometrías locales de ∇ actúa transitivamente sobre S . Entonces, ∇ es una de las siguientes:*

- *simétrica y plana (de curvatura constante 0),*
- *la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana (de curvatura constante distinta de cero) sobre S , o*
- *S es el cociente de \mathbb{R}^2 bajo la acción de una latiz y ∇ en S es inducida por una conexión invariante por traslaciones sobre \mathbb{R}^2 .*

Opozda prueba que una superficie compacta orientable admitiendo una conexión localmente homogénea que no es la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana es un toro [Opo04]. Nuestro resultado puede verse como un refinamiento de esta afirmación: tal conexión es o simétrica y plana, y por lo tanto, está dentro de la clasificación global dada por Nagano y Yagi en [NY74] (Benzécri prueba que solo las superficies cerradas orientables que admiten estructuras afines, son homeomorfas al toro [Benz59]) o es el cociente global (por traslaciones) de una conexión invariante por traslaciones en el plano.

Nuestro trabajo se divide naturalmente en una parte local y una parte global. Para la parte local nos apoyaremos en la clasificación de Lie de grupos

de transformaciones transitivos de dimensión dos. En el siguiente enunciado, refinamos algunos aspectos de la clasificación local de conexiones afines localmente homogéneas y sus grupos de transformaciones:

Teorema 0.4. *Sea ∇ una conexión afín simétrica C^∞ en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 . Si hay dos campos vectoriales de Killing que son linealmente independientes en 0, entonces el álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing es alguna de las siguientes:*

- (1) *de dimensión dos;*
- (2) *isomorfa a $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$;*
- (3) *isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;*
- (4) *en coordenadas adecuadas es generada por los campos vectoriales $x\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y aquellos de la forma $h(y)\partial/\partial x$, para las soluciones $h(y)$ de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes; o*
- (5) *∇ es plana.*

En particular, tiene dimensión menor o igual que cuatro si no es plana.

El objetivo principal de esta tesis es hacer los detalles del artículo *A classification of locally homogeneous affine connections on compact surfaces*, y hacer la prueba del Teorema 0.3 en el caso más rico que es el caso (4) del Teorema 0.4. Esto nos lleva a estudiar las conexiones afines sobre superficies compactas que están localmente modeladas en una familia de conexiones en \mathbb{R}^2 dadas por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \beta x \frac{\partial}{\partial x} + (2\gamma - \alpha) \frac{\partial}{\partial y},$$

para α, β, γ constantes tales que $\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta \neq 0$, esta condición nos dice que ∇ no es la conexión estandar de \mathbb{R}^2 . Denotaremos por $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla_0)$ a nuestro *espacio modelo*.

En el Capítulo 1 presentamos los preliminares: para la parte local hablaremos sobre grupos de Lie, álgebras de Lie, campos vectoriales y conexiones afines, y para la parte global nos apoyaremos en la teoría de las (G, X) -estructuras asociadas a alguna estructura geométrica rígida localmente homogénea, en el sentido de Thurston (ver [Thu97]).

En el Capítulo 2 tomamos una conexión afín simétrica ∇ sobre \mathbb{R}^2 y calcularemos todos sus campos vectoriales de Killing, los cuales están en la lista de Lie, presentada por Olver en [Olv95]. Para cada elemento de esta lista, buscaremos todas las conexiones afines simétricas en \mathbb{R}^2 que son preservadas. Finalmente, para estas conexiones que son preservadas, calcularemos su álgebra de Killing maximal.

En el Capítulo 3, tomamos una familia de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$ de la lista de Lie, presentada por Olver en [Olv95], que preserva la conexión afín del Capítulo 2, obtenemos su grupo de Lie asociado G (grupo de transformaciones) el cual actúa transitivamente sobre el espacio modelo \mathcal{M} . Damos paso al modelo global, una (G, \mathcal{M}) -estructura sobre una superficie compacta y orientada S .

En el Capítulo 4 veremos que una superficie compacta y orientada S admitiendo una (G, \mathcal{M}) -estructura, admite también una foliación inducida por el modelo, por lo tanto, S debe ser un toro. Calcularemos la holonomía para cada uno de los casos del Capítulo 3, y finalmente, haremos la prueba del Teorema 0.3 en el caso (4) del Teorema 0.4

Preliminares

1. Nociones de grupos.

Empezaremos recordando que un *grupo* es un conjunto no vacío G dotado con una operación binaria $g \cdot h$ para $g, h \in G$, que satisface las siguientes propiedades: la multiplicación es asociativa $a(bc) = (ab)c$, existe un (único) *elemento identidad* $e \in G$ tal que $a \cdot e = a = e \cdot a$, y para cada elemento del grupo $g \in G$ existe su elemento *inverso* $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$. Por otra parte, un subconjunto $H \subseteq G$ de un grupo G es *subgrupo* de G , si la operación de grupo restringida a H es cerrada y H es un grupo con esta operación. En notación se escribe $H \leq G$.

Definición 1.1. Una *acción (izquierda)* de un grupo G sobre un conjunto (no vacío) X es una aplicación $\phi : G \times X \rightarrow X$ tal que:

- i) $\phi(e, x) = x$;
- ii) $\phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$, para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.

Si X es un conjunto en el cual se tiene una acción de G diremos que X es un G -*conjunto*. Una acción derecha se definirá de manera análoga, la única diferencia es el orden en que asociamos. En lo que sigue, siempre que hablemos de acción de grupo haremos referencia a una acción izquierda, excepto cuando se diga lo contrario.

El clásico ejemplo de acción de grupo viene dado por la acción de un grupo G actuando sobre si mismo por *multiplicación*. En este caso X coincide con G y la aplicación $\phi : G \times G \rightarrow G$ está dada por la *multiplicación izquierda* $\phi(g, h) = g \cdot h$. Alternativamente, podemos hacer actuar G sobre si mismo por *multiplicación derecha* vía $\tilde{\phi}(g, h) = h \cdot g^{-1}$.

Denotaremos por $\text{Sym}(X)$ al conjunto de *permutaciones* o funciones biyectivas de X en X , este conjunto de permutaciones es un grupo con la operación dada por la composición de funciones.

Proposición 1.2. *Sea X es un G -conjunto, la acción de G en X induce un homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(X)$.*

Demostración. Para cada $g \in G$ definiremos la función $\phi_g : X \rightarrow X$ por $\phi_g(x) = g \cdot x$. Se puede ver directamente de la definición de ϕ_g que para cada $x \in X$ la función ϕ_g es sobreyectiva. Para mostrar la inyectividad de ϕ_g tomaremos x_1 y x_2 en X tales que $\phi_g(x_1) = \phi_g(x_2)$, esto es, $g \cdot x_1 = g \cdot x_2$ para todo $g \in G$, luego, $g^{-1}g \cdot x_1 = x_2$, por lo que $x_1 = x_2$. Por lo anterior tenemos que ϕ_g es biyectiva, así, $\phi_g \in \text{Sym}(X)$ para cada $g \in G$. Falta mostrar que la aplicación $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(X)$ dada por $g \rightarrow \phi_g$, es un homomorfismo. Sean $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$ tenemos que

$$\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}(x) = \phi_{g_1}(g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x = \phi_{g_1 g_2}(x).$$

Por lo tanto, ϕ es un homomorfismo. \square

Recíprocamente, si $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(X)$ es un homomorfismo entonces induce una acción de G sobre X mediante $G \times X \rightarrow X$ dada por $g \cdot x = \phi(g)(x) = \phi_g(x)$. En estos términos, las condiciones *i*) y *ii*) de la Definición 1.1, se expresan como $\phi_e = \text{Id}_X$, $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$. En consecuencia, $\phi_g \phi_{g^{-1}} = \phi_e = \text{Id}_X = \phi_{g^{-1}} \phi_g$.

Lo anterior nos dice que dar una acción de G sobre X es lo mismo que dar un homomorfismo de G en el grupo de permutaciones de X .

1.1. Acción por conjugación. Sea G un grupo, dados dos elementos $h, k \in G$ diremos que h es *conjugado* de k si existe otro elemento $g \in G$ tal que $h = ghg^{-1}$. Esta es una relación de equivalencia y sus clases de equivalencia se conocen como las *clases de conjugación* de G .

Sea G un grupo, la aplicación $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ es una acción de G sobre sí mismo llamada *acción por conjugación*. Para cada elemento $g \in G$, el automorfismo $i_g : G \rightarrow G$ dado por $i_g(x) = gxg^{-1}$ es conocido como el *automorfismo interno* de G bajo la conjugación por g . Si $H \leq G$, su imagen bajo el automorfismo interno es el subgrupo $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} | x \in H\}$ es isomorfo a H y se llama *subgrupo conjugado* de H . La *clase de conjugación* de H en G es el conjunto de todos los subgrupos gHg^{-1} conjugados de H obtenidos cuando variamos $g \in G$. Un caso particular y el más importante de los subgrupos conjugados es cuando $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$, es decir, cuando la clase de conjugación de H posee un solo elemento, a saber, el propio H . Cuando esto sucede se dice que H es un *subgrupo normal* de G y se denota $H \trianglelefteq G$.

1.2. Órbitas y Estabilizadores.

Definición 1.3. Sea $\phi : G \times X \rightarrow X$ una acción de un grupo G sobre un conjunto X .

- a) La *órbita* de un punto $x \in X$ es el conjunto de todas las imágenes de x bajo la acción del grupo: $\mathcal{O}_x = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$.
- b) El *estabilizador* o *grupo de isotropía* de un punto $x \in X$ es el conjunto de todos los elementos del grupo G que dejan fijo al punto: $G_x = \text{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \subset G$.

Obsérvese que si x y y pertenecen a la misma órbita (es decir, existe $g \in G$ tal que $gx = y$) entonces el grupo de isotropía de y es conjugado al grupo de isotropía de x , es decir, $G_y = gG_xg^{-1}$, en particular son isomorfos.

La acción $\phi : G \times X \rightarrow X$ es *transitiva* si para cada par de elementos $x, y \in X$ existe al menos un elemento $g \in G$ tal que $gx = y$. Es decir, la órbita de algún $x \in X$ (y por tanto de todos) es todo el conjunto X : $\mathcal{O}_x = X$ para todo $x \in X$. La acción ϕ se dice que es *libre* si los subgrupos de isotropía son todos triviales: $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$. La acción ϕ se dice que es *fiel* o *efectiva* si diferentes elementos del grupo tienen diferentes acciones: $g \cdot x = h \cdot x$ para todo $x \in X$, si y sólo si, $g = h$. Equivalentemente, si la identidad es el único elemento de G que deja fijo a todo elemento de X . La efectividad de una acción de un grupo es medida por su *subgrupo de isotropía global* $G_X = \bigcap_{x \in X} G_x = \{g \mid g \cdot x = x, \text{ para todo } x \in X\}$. Así, G actúa efectivamente, si y sólo si, $G_X = \{e\}$. Claramente, una acción libre es efectiva, el inverso no es cierto.

Proposición 1.4. Sea $\phi : G \times X \rightarrow X$ una acción de grupo. El mapeo natural $f : G/G_x \rightarrow \mathcal{O}(x)$ dado por $[g] \mapsto gx$ es una biyección.

Demostración. Sean $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1^{-1}g_2 \in G_x$, luego $g_1^{-1}g_2x = x$, se sigue que $g_1x = g_2x$, por lo tanto, f está bien definida. Para la sobreyectividad, sea $y \in \mathcal{O}(x)$, así y es de la forma $y = gx$, luego $[g] \in G/G_x$ nos da el elemento que buscamos. Finalmente para la inyectividad, tomemos $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1x = g_2x$, luego $g_1^{-1}g_2x = x$ por lo que $g_1^{-1}g_2 \in G_x$, por lo tanto $[g_1] = [g_2]$. \square

1.3. Producto semidirecto de grupos. Si G y H son grupos de Lie de dimensión r y s , respectivamente, su *producto cartesiano* $G \times H$ es un grupo de Lie de dimensión $r + s$ con la operación de grupo definida como $(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g}, h \cdot \tilde{h})$. Si además G actúa como un grupo de automorfismos sobre H satisfaciendo $g \cdot (h \cdot \tilde{h}) = (g \cdot h) \cdot (g \cdot \tilde{h})$ entonces $G \times H$ es un grupo de Lie de dimensión $r + s$ el cual, como variedad, se mira como producto cartesiano, pero cuya multiplicación está dada por $(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g}, h \cdot (g \cdot \tilde{h}))$.

Definición 1.5. Si H y K son grupos y $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ es un homomorfismo de grupos entonces el producto cartesiano $H \times K$ (como conjunto) y con operación binaria

$$(1) \quad (h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 h_2, k_1 [\phi_{h_1}(k_2)])$$

es llamado el *producto semidirecto* de H y K relativo a ϕ y se denota $H \rtimes_{\phi} K$.

Proposición 1.6. Si H y K son grupos y $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ es un homomorfismo de grupos, entonces:

- 1) $H \rtimes_{\phi} K$ es un grupo.
- 2) $H \times \{e_K\} \simeq H$.
- 3) $\{e_H\} \times K \simeq K$.
- 4) $\{e_H\} \times K \trianglelefteq H \rtimes_{\phi} K$.

Demostración. 1) Se puede verificar directamente la cerradura y la asociatividad. El elemento neutro está dado por $e_{H \rtimes_{\phi} K} = (e_H, e_K)$ y para cada elemento $(h, k) \in H \rtimes_{\phi} K$ su elemento inverso está dado por $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, \phi_{h^{-1}}(k^{-1}))$. Por lo tanto $H \rtimes_{\phi} K$ es un grupo.

- 2) El isomorfismo $\psi : H \times \{e_K\} \rightarrow H$ está dado por $(h, e_K) \mapsto h$.
- 3) El isomorfismo $\varphi : \{e_H\} \times K \rightarrow K$ está dado por $(e_H, k) \mapsto k$.
- 4) Sean $(h, k) \in H \rtimes_{\phi} K$ y $(e_H, k_1) \in H \times \{e_K\}$. Luego,

$$\begin{aligned} (h, k) \cdot (e_H, k_1) \cdot (h, k)^{-1} &= (h, k) \cdot (e_H, k_1) \cdot (h^{-1}, \phi_{h^{-1}}(k^{-1})) \\ &= (h, k) \cdot (e_H h^{-1}, k_1 [\phi_{e_H}(\phi_{h^{-1}}(k^{-1}))]) \\ &= (h, k) \cdot (h^{-1}, k_1 \phi_{h^{-1}}(k^{-1})) \\ &= (e_H, k \phi_h(k_1 \phi_{h^{-1}}(k^{-1}))). \end{aligned}$$

Como $k \phi_h(k_1 \phi_{h^{-1}}(k^{-1})) \in K$, se sigue que $\{e_H\} \times K \trianglelefteq H \rtimes_{\phi} K$. \square

Si en particular, H y K son subgrupos de un grupo G , se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.7. Sea G un grupo, H y K subgrupos de G . Si $H \subseteq N_G(K)$, $H \cap K = \{e\}$ y $G = KH$. Entonces $G \simeq K \rtimes_{\phi} H$ con el homomorfismo $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ inducido por la acción por conjugación.

Demostración. Consideremos la aplicación $\Phi : G \rightarrow K \rtimes_{\phi} H$ que manda $g \mapsto (k, h)$, donde $g = kh$. Se puede ver inmediatamente que Φ está bien definida. Obsérvese que, si $g_1, g_2 \in G$ entonces

$$g_1 g_2 = (k_1 h_1)(k_2 h_2) = k_1 (h_1 k_2 h_1^{-1}) h_1 h_2 = k_1 \phi_{h_1}(k_2) h_1 h_2.$$

Se sigue que $\Phi(g_1g_2) = (k_1\phi_{h_1}(k_2), h_1h_2) = (k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)$, lo que implica que Φ es un homomorfismo. Por otra parte, observemos que

$$\begin{aligned}\ker(\Phi) &= \{g \in G \mid \Phi(g) = (e_K, e_H)\} \\ &= \{kh \in G \mid (h, k) = (e_K, e_H) = \{e_G\}\},\end{aligned}$$

por lo que Φ es inyectiva. Por último, para cada $(k, h) \in K \times_\phi H$ se tiene que $(k, h) = \Phi(kh) = \Phi(g)$ para algún $g \in G$, por lo tanto Φ es sobreyectiva, lo cual termina la prueba. \square

2. Variedades diferenciables, campos vectoriales y foliaciones

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Un vector tangente a M en el punto x es una clase de equivalencia de curvas $[\alpha] : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = x$, y es geoméricamente definido por el tangente a una curva (suave) pasando a través de x . En coordenadas locales, el conjunto de todos los vectores tangentes a M es el espacio vectorial real de dimensión n , con base $\partial/\partial x_i|_x$. Este espacio es denotado por T_xM y se llama el *espacio tangente a M en x* . La unión de éstos forma el *haz tangente $TM = \cup_{x \in M} T_xM$* de la variedad M en cada punto de M y, en particular, es una variedad de dimensión $2n$, y forman un haz vectorial sobre M .

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable, TM su haz tangente y $\pi : TM \rightarrow M$ la proyección definida como $\pi(v) = p$, si $v \in T_pM$. Un *campo vectorial X* es una aplicación $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$, o equivalentemente, $X(p) \in T_pM$ para cada $p \in M$. El campo vectorial es *diferenciable* si la aplicación $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable.

En coordenadas locales (U, x) , la condición de diferenciability nos dice que un campo vectorial diferenciable X puede ser escrito en la forma:

$$(2) \quad X(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p,$$

donde los coeficientes $a_i(x)$ son funciones suaves en U .

Sea M una variedad diferenciable de clase \mathcal{C}^∞ denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ al conjunto de funciones diferenciables sobre M . El conjunto $\mathcal{C}^\infty(M)$ es un álgebra sobre los números reales, la suma y la multiplicación en $\mathcal{C}^\infty(M)$ vienen de la suma y la multiplicación de funciones. Los campos vectoriales sobre M pueden ser identificados con las derivaciones del álgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Así, podemos interpretar de varias maneras a los campos vectoriales; como aplicaciones (diferenciables) $X : M \rightarrow TM$ de la variedad M en su haz tangente TM o como derivaciones en el álgebra de las funciones diferenciables.

Definición 2.2. Sea X un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M . Una *curva integral* de X pasando por $p \in M$, es una curva suave $\varphi : (a, b) \rightarrow M$ tal que $\varphi(0) = p$ y los vectores tangentes a la curva $\varphi(t)$ coinciden con el campo vectorial X en cada punto, $\varphi'(t) = X_{\varphi(t)}$, para todo $t \in (a, b)$.

Las curvas integrales son, localmente, soluciones de la ecuación diferencial $dx/dt = X(x)$. En coordenadas locales esta condición se expresa como $\varphi'_i(t) = a_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$, es decir, $x = \varphi(t)$ es solución para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

La condición $a_i \in C^\infty$ garantiza que hay exactamente una curva integral maximal pasando a través de cada punto p de M , la cual es única en el sentido de que cualesquiera dos curvas integrales a través del mismo punto necesariamente coinciden en la intersección de sus dominios de definición. Usaremos $\varphi(t) = \exp(tX)p$ para denotar la curva integral maximal que pasa por p en el tiempo $t = 0$; la curva $\exp(tX)p$ puede estar o no definida para todo tiempo t , si está definida para todo t y toda p diremos que el campo vectorial es *completo*. Las curvas integrales definen un flujo local en cualquier punto $p \in M$ como sigue:

Teorema 2.3. Si X es un campo vectorial diferenciable en una variedad M y $p \in M$, entonces existe un abierto $U \subset M$, $p \in U$, un número $\varepsilon > 0$ y una aplicación suave $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ tal que la curva $q \mapsto \varphi(t, q)$, es la única trayectoria de X que en el instante $t = 0$ pasa por el punto q , para cada q en U , es decir,

$$(3) \quad \varphi(0, q) = q, \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\varphi(t, q) = X(\varphi(t)) \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Si t se mantiene constante, la aplicación suave $q \mapsto \varphi(t, q)$ define una función $\phi_t : U \rightarrow M$ sobre una vecindad U de p , esta función es llamada el *flujo local* en tiempo t del campo vectorial X y tiene las siguientes propiedades:

- i) ϕ_0 es la aplicación identidad de U ;
- ii) $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$, para toda $s, t \in U$;
- iii) cada flujo es un difeomorfismo con $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

Por lo anterior podemos ver que el flujo cumple con las reglas de la aplicación exponencial:

- $\exp(tX) \exp(sX)p = \exp[(t + s)X]p$,
- $\exp(tX)^{-1}p = \exp(-tX)p$,
- $\exp(0X)p = p$,
- $\frac{d}{dt} \exp(tX)p = X|_{\exp(tX)p}$.

Inversamente, dado un flujo podemos reconstruir su campo vectorial generador mediante diferenciación:

$$X|_p = \frac{d}{dt} \exp(tX)p|_{t=0}.$$

La familia de aplicaciones $\exp(tX)$ es conocida como el *flujo* generado por el campo vectorial X , por lo que el campo X es clásicamente referido como el *generador infinitesimal* del flujo.

Para más detalles de esta sección ver [Olv95, p. 17].

2.1. Foliaciones.

Definición 2.4. Sea M una variedad \mathcal{C}^∞ de dimensión m . Una \mathcal{C}^r -foliación de dimensión n de M , es un \mathcal{C}^r -atlas \mathcal{F} maximal respecto a las siguientes propiedades:

i) Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, donde U_1 y U_2 son discos abiertos en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.

ii) Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es de la forma

$$(4) \quad \psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

En particular, una foliación \mathcal{F} por curvas en una superficie diferenciable, es un atlas tal que los cambios de coordenadas son de la forma

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), \phi(y)).$$

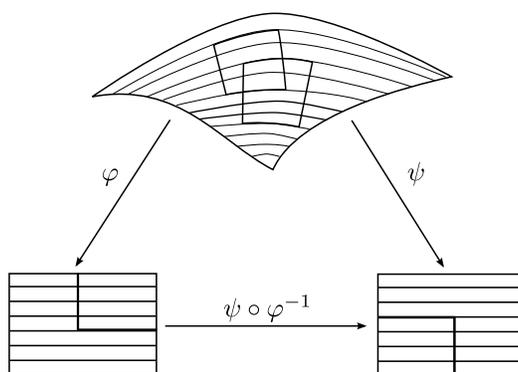


Figura 1. Cambio de coordenadas de una variedad de dimensión 2 foliada por una foliación de dimensión 1.

Decimos que M es foliada por \mathcal{F} , o que \mathcal{F} es una estructura foliada de dimensión n y de clase \mathcal{C}^r sobre M . Las cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ son llamadas *cartas trivializadas*. Al visualizar una foliación no se debe pensar en las cartas coordenadas locales, sino en las imágenes inversas de los factores $\mathbb{R}^{n-k} \times \{y\}$ bajo las cartas, que juntas nos darán las hojas de la foliación.

Ejemplo 2.5. El ejemplo más simple de una foliación n es la foliación de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ donde las hojas son n -planos de la forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ con $c \in \mathbb{R}^{m-k}$. Los difeomorfismos $h : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preservan las hojas de esta foliación localmente tienen la forma $[h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

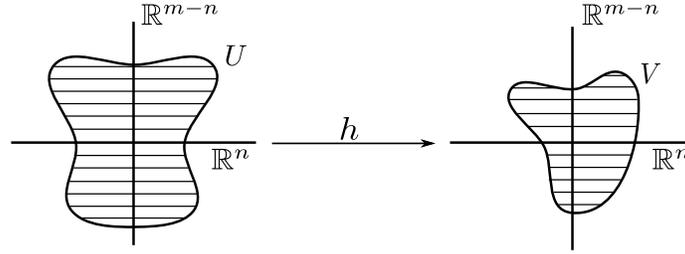


Figura 2. Cambio de coordenadas de la foliación.

Una foliación de dimensión uno existe sobre un gran número de variedades: cualquier campo vectorial que no se anula nunca, tiene asociada una foliación obtenida mediante las órbitas del flujo (curvas integrales).

2.1.1. Álgebra de Lie imprimitiva. Las acciones de grupos transitivas se dividen en acciones primitivas y acciones imprimitivas. En general una acción de grupo se llama *imprimitiva* si hay una foliación invariante de la variedad. Por invarianza nos referimos a que cada grupo de transformaciones manda cada hoja de la foliación en otra hoja de la foliación.

Ejemplo 2.6. El grupo generado por $\{x\partial/\partial_x, \partial/\partial_y, e^{ay}\partial/\partial_x, ye^{ay}\partial/\partial_x\}$ con $a \in \mathbb{R}$, admite una foliación invariante de \mathbb{R}^2 ; las hojas de la foliación son traslaciones de líneas paralelas al eje x .

Para más detalles sobre foliaciones, ver [CL85].

3. Grupos de Lie y acciones suaves: grupos de transformaciones

Definición 3.1. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G con estructura de grupo, tal que la multiplicación $\mu : G \times G \rightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto gh$ y la inversión $\iota : G \rightarrow G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ son diferenciables.

Ejemplo 3.2. La variedad $Gl(n, \mathbb{R})$ que consiste de todas las matrices de $n \times n$ con entradas reales y determinante distinto de cero, es un grupo de Lie bajo la multiplicación de matrices.

En la definición de acción de grupo tenemos casos particulares cuando le pedimos más propiedades tanto a G como a X , por ejemplo, si G es un

grupo de Lie y X una variedad diferenciable podemos pedir que la acción de G sobre X sea diferenciable, obtenemos así una G -variedad. En particular, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3. *Si $\phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción diferenciable de un grupo de Lie G sobre una variedad M , entonces para toda $g \in G$ la aplicación $\phi_g : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de M .*

Por lo anterior, podemos interpretar a un grupo de Lie G como un *grupo de transformaciones* (difeomorfismos de X en X) actuando (globalmente) sobre una variedad diferenciable X .

Ejemplo 3.4 (Acción adjunta). Sea G un grupo de Lie y $\phi : G \times G \rightarrow G$ la acción por conjugación de G sobre si mismo (definida en 1.1). Para cada $g \in G$ denotaremos por $\text{Ad}_g : G \rightarrow G$ el automorfismo interno inducido por g . Definimos la *acción adjunta* de G sobre si mismo como el homomorfismo de grupos $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ que manda $g \mapsto \text{Ad}_g$.

Ejemplo 3.5. Sea X un campo vectorial completo sobre una variedad M , es decir, las soluciones del campo están definidas para todo tiempo t . El flujo de X define una acción del grupo a un parámetro \mathbb{R} (parametrizado por el tiempo t) sobre la variedad M .

Consideremos el campo vectorial $X = \partial/\partial x$ sobre \mathbb{R}^2 . El flujo que genera este campo vectorial es la traslación de líneas paralelas al eje x (ver Fig. 3).

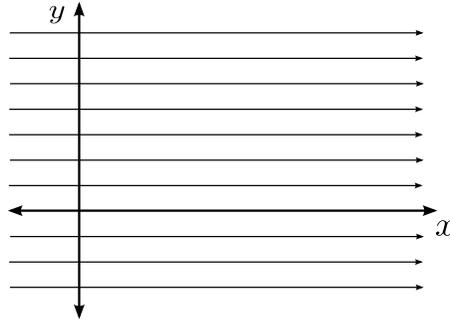


Figura 3. Flujo de líneas del campo vectorial $\partial/\partial x$.

La aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(t, q) = q + t$, satisface las propiedades de una acción de grupo. Además $\varphi_t(\varphi_{-t}(q)) = \varphi_0(q) = q$, lo que implica que cada φ_t es un difeomorfismo. Por lo tanto, la aplicación φ induce el homomorfismo de grupos $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ que manda $t \mapsto \varphi_t(q)$.

Proposición 3.6. *Si $H \subset G$ es un subgrupo de un grupo de Lie G , que es también un subconjunto cerrado (topológicamente), entonces H es un subgrupo de Lie de G .*

Proposición 3.7. Sea $\phi : G \times M \rightarrow M$ una acción transitiva de un grupo de Lie G sobre una variedad M , G_x el grupo de isotropía de un punto $x \in M$. Entonces:

- a) G_x es un subgrupo cerrado de G .
- b) Para cualesquiera $x, y \in M$ los subgrupos G_x y G_y son conjugados.
- c) El mapeo natural $f : G/G_x \rightarrow M$ dado por $f(gG_x) = g \cdot x$ es un difeomorfismo.
- c) La dimensión de G/G_x es $\dim G - \dim G_x$.

Se sigue de esta proposición y la Proposición 3.6 se tiene que G_x es un subgrupo de Lie, y puede verse como el grupo de simetrías para el punto x . Por otra parte, se sigue de la Proposición 1.4 que si la acción ϕ es transitiva, la cardinalidad de M es igual al índice $[G : G_x]$, es decir, a la cardinalidad de G/G_x .

Una clase particularmente importante de acciones de grupos transitivas es proporcionada por los espacios homogéneos, definidos como el cociente G/H de un grupo de Lie G por un subgrupo cerrado H .

Definición 3.8. Un *espacio homogéneo* es una variedad M de la forma G/G_x donde G es un grupo de Lie actuando transitivamente en M y G_x es el subgrupo de isotropía de cualquier punto $x \in M$.

3.1. Grupos de Lie y álgebras de Lie.

Definición 3.9. Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} es un espacio vectorial real con una operación corchete $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que es bilineal, antisimétrica $[u, v] = -[v, u]$ y satisface la identidad de Jacobi

$$(5) \quad [[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0.$$

Una *subálgebra* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Un *ideal* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una subálgebra $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{t}$. El *álgebra derivada* \mathfrak{g}' de un álgebra de Lie \mathfrak{g} está definida como el álgebra generada por todos los corchetes de Lie $[v, w]$ para todo $v, w \in \mathfrak{g}$.

A cada grupo de Lie G podemos asociarle un álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita que captura la estructura local del grupo. Las estructuras de \mathfrak{g} y G están relacionadas por la aplicación exponencial que manda subespacios de dimensión 1 de \mathfrak{g} , sobre grupos a un parámetro de G .

3.1.1. Álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a un grupo de Lie G . Hay objetos invariantes asociados con un grupo de Lie, los más importantes de éstos son los campos vectoriales ya que sirven como los generadores infinitesimales de la acción del grupo.

Definición 3.10. Sea G un grupo de Lie actuando sobre una variedad M . Un campo vectorial X se llama *G -invariante* si no cambia bajo la acción de cualquier elemento del grupo, es decir, $dg(X|_p) = X|_{g \cdot p}$ para todo $g \in G$ y para todo $p \in M$ tal que $g \cdot p$ está definido.

Un ejemplo importante viene de la acción de un grupo de Lie G que actúa sobre sí mismo por multiplicación a la izquierda o a la derecha. Aquí los campos vectoriales invariantes definen el álgebra de Lie o grupo de Lie infinitesimal. Sea $g \in G$, la *traslación derecha* por g sobre G es $R_g : G \rightarrow G$ tal que $R_g(x) = x \cdot g$. De manera análoga definimos la *traslación izquierda* $L_g : G \rightarrow G$ como $L_g(x) = g \cdot x$. Obsérvese que la inversa de R_g es $R_{g^{-1}}$, y la inversa de L_g es $L_{g^{-1}}$, se sigue entonces que R_g y L_g son ambos, difeomorfismos de G sobre sí mismo. Un campo vectorial diferenciable Z sobre G es *invariante por la derecha* si $dR_g Z = Z$ para todo $g \in G$, y es llamado *invariante por la izquierda* si $dL_g Z = Z$ para todo $g \in G$.

Definiremos el *álgebra de Lie de un grupo de Lie G* como el álgebra de Lie \mathfrak{g} de campos vectoriales invariantes por la izquierda de G , aunque también puede definirse como el álgebra de Lie de campos vectoriales invariantes por la derecha de G , ver [Lam00, p. 179]. Dado un vector tangente X en la identidad ($X \in G_e$) hay exactamente un campo vectorial invariante por la izquierda (derecha) \tilde{X} sobre G tal que $\tilde{X}_e = X$. Podemos identificar a \mathfrak{g} con el espacio tangente a la identidad, $T_e G$. Así \mathfrak{g} es un espacio vectorial de dimensión finita, y tiene la misma dimensión que G .

Definición 3.11 (Corchete de Lie de campos vectoriales). Sea M una variedad diferenciable, X y Y dos campos vectoriales sobre M . El *corchete de Lie* de los campos vectoriales X y Y es el campo vectorial $[X, Y]$ dado por $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ para cualquier función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, donde $X(f)$ es la derivada de f a lo largo de X .

Proposición 3.12. Si X, Y son campos vectoriales invariantes por la derecha (izquierda) sobre G , entonces $[X, Y]$ es también un campo vectorial invariante por la derecha (izquierda) sobre G .

Demostración. Ver prueba en [Lam00, p. 180]. □

Para más detalles de esta sección puede consultarse [Lam00, Cap. 6] o [Olv95, Cap. 2].

4. Conexiones y sus simetrías locales

4.1. Conexiones afines. En geometría diferencial, la conexión es un operador que nos permite establecer una relación entre la geometría local en torno a un punto y la geometría local en torno a otro punto. Un ejemplo

de conexiones es la *conexión afín*, esta conexión nos permite considerar la derivada de un campo vectorial diferenciable Y con respecto al campo vectorial diferenciable X y obtener un nuevo campo vectorial diferenciable que denotaremos por $\nabla_X Y$, donde X y Y son dos campos vectoriales definidos sobre una variedad M , o al menos en una vecindad del punto de nuestro interés.

Sea M una variedad de clase C^∞ , denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al espacio vectorial de campos vectoriales C^∞ sobre M , y por $\mathcal{D}(M)$ el anillo de funciones de valores reales de clase C^∞ definido sobre M .

Definición 4.1. Una *conexión afín* sobre M es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que asocia $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, tal que para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$ se cumple:

$$(6) \quad \nabla_{fX} gY = fg \nabla_X Y + f(X \cdot g)Y.$$

Se sigue directamente de (6) que si X ó Y se anulan en un conjunto abierto U entonces $\nabla_X Y$ también se anula sobre U . Más aún, si X se anula en un punto $p \in M$, entonces $\nabla_X Y$ también vale lo mismo.

En un sistema de coordenadas (U, x) , donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la expresión local de la conexión está dada por la siguiente ecuación

$$(7) \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Gamma_{ij}^n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

para algunas funciones suaves Γ_{ij}^k las cuales determinan a ∇ localmente, y son llamadas *símbolos de Christoffel* de la conexión asociados a la carta x .

Ejemplo 4.2. (\mathbb{R}^n, ∇) donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de la métrica plana, para la cual los símbolos de Christoffel se anulan idénticamente.

Hay dos tensores asociados a la conexión ∇ , su tensor *curvatura*

$$R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

y su tensor *torsión* $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Una conexión ∇ se dice *plana* si tiene curvatura cero, $\nabla_{[X, Y]} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$, y se dice *libre de torsión* o *simétrica* si el tensor torsión es idénticamente cero, es decir,

$$(8) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Todas las conexiones consideradas en esta tesis son simétricas. En coordenadas locales, (8) se expresa como

$$(9) \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right], \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, n.,$$

y en términos de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, para $i, j, k = 1, \dots, n$.

Por un resultado clásico debido a É. Cartan, si una conexión es simétrica y plana entonces es localmente isomorfa a la *conexión estándar* (cuyos símbolos de Christoffel son todos cero) sobre \mathbb{R}^n .

Proposición 4.3. *Si ∇ es una conexión simétrica y plana entonces en coordenadas locales, ∇ es la conexión afín estándar en \mathbb{R}^n , la única conexión tal que $\nabla_X Y = 0$ para cada par (X, Y) de campos vectoriales constantes.*

(Ver [Lam00, Cap. 4, Teor. 4] o [Wolf11, Sec. 1.7]).

4.2. Isometrías de una conexión: campos de Killing.

Definición 4.4. Sea M una variedad diferenciable, para $U \subset M$, una aplicación $f : U \rightarrow M$ es una *isometría local* si preserva ∇ . Un campo vectorial X en U se dice un *campo de Killing* de ∇ si su flujo (local) es composición de isometrías locales.

Las isometrías locales forman naturalmente un pseudogrupo de Lie cuya álgebra de Lie es la formada por campos vectoriales de Killing. En particular, si el pseudogrupo de isometrías de ∇ actúa transitivamente en una vecindad de $p \in M$, existen dos campos vectoriales de Killing de ∇ en una vecindad de p que son linealmente independientes.

Proposición 4.5. *Un campo vectorial (local) X es un campo de Killing de la conexión ∇ si para cada par de campos vectoriales (locales) Y y Z tenemos*

$$(10) \quad [X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] = \nabla_{[X, Y]} Z.$$

(Ver [KN63, Cap. VI, Prop. 2.2]).

Consideremos nuevamente un sistema de coordenadas locales (x, y) en un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$. En coordenadas, en la vecindad de un punto en \mathbb{R}^2 , la conexión más general tiene la forma:

$$(11) \quad \begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} &= A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}, & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} &= (C + \frac{1}{2}U) \frac{\partial}{\partial x} + (D + \frac{1}{2}V) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} &= E \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial y}, & \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} &= (C - \frac{1}{2}U) \frac{\partial}{\partial y} + (D - \frac{1}{2}V) \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde A, B, C, \dots , etc. son funciones que dependen de x y y . El caso simétrico, nuestro caso, corresponde a $U \equiv 0$ y $V \equiv 0$. Sea $X = a(x, y)\partial/\partial x + b(x, y)\partial/\partial y$ un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . Si elegimos

$$(12) \quad (Y, Z) \in \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\}$$

podemos escribir en coordenadas locales la condición (10), esto implica que X es un campo vectorial de Killing de la conexión ∇ , si y sólo si, sus coeficientes

satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$(13) \quad 0 = a_{xx} + Aa_x - Ba_y + 2Cb_x + A_xa + A_yb,$$

$$(14) \quad 0 = b_{xx} + 2Ba_x + (2D - A)b_x - Bb_y + B_xa + B_yb,$$

$$(15) \quad 0 = a_{xy} + (A - D)a_y + Eb_x + Cb_y + C_xa + C_yb,$$

$$(16) \quad 0 = b_{xy} + Da_x + Ba_y + (F - C)b_x + D_xa + D_yb,$$

$$(17) \quad 0 = a_{yy} - Ea_x + (2C - F)a_y + 2Eb_y + E_xa + E_yb,$$

$$(18) \quad 0 = b_{yy} + 2Da_y - Eb_x + Fb_y + F_xa + F_yb.$$

Estamos interesados en relacionar los campos de Killing con el grupo de isometrías de la variedad. Para el contexto de geometría riemanniana supondremos que la conexión ∇ es la conexión de Levi-Civita. Sea M una variedad riemanniana y X un campo de vectores sobre M , decimos que X es un *campo de Killing*, si y sólo si, X genera un subgrupo (local) a un parámetro de isometrías locales de M , es decir, si su flujo local φ_t es una isometría de M sobre M para toda t suficientemente pequeña.

Proposición 4.6. *Un campo vectorial X sobre una variedad riemanniana M es un campo de Killing, si y sólo si, la transformación lineal $Y \rightarrow \nabla_Y X$ es antisimétrica con respecto a la métrica, es decir,*

$$(19) \quad \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = 0$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

La ecuación (19) se llama *ecuación de Killing* y ∇ es la conexión de Levi-Civita. (Ver [Kob72, Cap. II, Prop. 2.2]). El siguiente lema es clásico en el campo (ver [Wolf11, Teor. 1.6.20]).

Lema 1. *(Linealización en coordenadas exponenciales) En coordenadas exponenciales alrededor de un punto dado m en M , cada campo vectorial de Killing de ∇ que se anula en m , es lineal.*

Ver [DG13, Lem. 7].

Los campos vectoriales de Killing de una conexión forman un álgebra de Lie bajo el corchete de Lie. Para una conexión ∇ denotaremos por $\mathfrak{K}(\nabla)$ el álgebra de Lie de sus campos vectoriales de Killing. Una conexión afín ∇ se dice *homogénea* si para cada par de puntos de la variedad M existe un difeomorfismo afín que envía un punto en otro. Nosotros vamos a considerar una versión local de homogeneidad, admitiendo que los difeomorfismos afines sean definidos solo localmente, es decir, de un entorno a otro.

Definición 4.7. La conexión ∇ se dice *localmente homogénea* (y $\mathfrak{K}(\nabla)$ se dice *transitiva*) sobre el subconjunto abierto $U \subset M$, si para cualquier $u \in U$ y para cualquier vector tangente $V \in T_u U$, existe un campo de Killing local X de ∇ tal que $X(u) = V$.

Proposición 4.8. *Sea ∇ una conexión afín real analítica simétrica definida en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 y supongamos que ∇ admite campos vectoriales de Killing X y Y los cuales conmutan y son linealmente independiente en un abierto que contiene el origen en su clausura. Entonces ∇ es localmente homogénea en una vecindad del origen.*

Ver [DG13, Prop. 11].

5. (G, X) -estructuras

Esta sección está escrita como un resumen del capítulo 3 de [Thu97], incluyendo las Figuras 5 y 6.

Sea \mathcal{G} un pseudogrupo sobre \mathbb{R}^n . Una \mathcal{G} -variedad de dimensión n es un espacio topológico M con un \mathcal{G} -atlas maximal (\mathcal{G} -estructura) sobre esta. Un \mathcal{G} -atlas es una colección de *cartas coordenadas \mathcal{G} -compatibles* cuyos dominios cubren a M . Una carta coordenada, o *sistema coordenado local*, es una pareja (U_i, ϕ_i) , donde U_i es un abierto en M y $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen. La compatibilidad nos dice que para cualesquiera dos cartas (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) cuya intersección es no vacía, la *función de transición o cambio de coordenadas*

$$\gamma_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

está en \mathcal{G} (Ver Fig. 4).

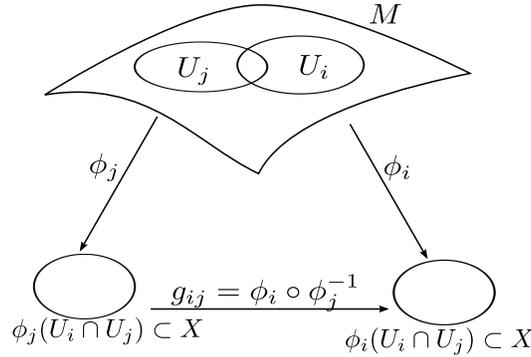


Figura 4. $(G, (\mathbb{R}^2, \nabla_0))$ -estructura.

Ejemplo 5.1. [Variedades reales analíticas]. Sea \mathcal{C}^ω el pseudogrupo de difeomorfismos reales analíticos entre subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Una \mathcal{C}^ω -variedad es llamada una *variedad real analítica*. Los difeomorfismos reales analíticos quedan determinados únicamente por su restricción a cualquier subconjunto abierto; esto es esencial en el estudio de la aplicación desarrollante, la cual veremos un poco más adelante.

Ejemplo 5.2. [Foliaciones]. Consideremos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ y sea \mathcal{G} el pseudogrupo generado por difeomorfismos ϕ (entre subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n) que tienen la forma $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(y))$, para $x \in \mathbb{R}^{n-k}$ y $y \in \mathbb{R}^k$. Una \mathcal{G} -estructura es llamada una *foliación* de dimensión k .

Muchos pseudogrupos importantes vienen de acciones de grupos sobre variedades. Sea X una variedad real analítica conexa, y G un grupo de difeomorfismos reales analíticos actuando transitivamente sobre X , el grupo G determina un pseudogrupo \mathcal{G} generado por las restricciones de elementos de G a subconjuntos abiertos de X , así cada $g \in \mathcal{G}$ coincide localmente con algún elemento de G . El dominio de g puede ser cubierto con subconjuntos abiertos U_α tal que $g|U_\alpha = g_\alpha|U_\alpha$ para $g_\alpha \in G$. Una estructura geométrica sobre una variedad es un atlas de cartas con valores en algún tipo de espacio modelo y funciones tomadas de algún pseudogrupo de transformaciones sobre el espacio modelo. Si X es el espacio modelo y G es el pseudogrupo hablamos de una (G, X) -estructura sobre una variedad M .

Sea G un grupo de Lie actuando transitivamente sobre una variedad real analítica X y sea M una variedad de la misma dimensión que X . Una (G, X) -estructura sobre una variedad M es un atlas para su estructura suave tomando valores sobre X y cuyos cambios de coordenadas son restricciones de elementos de G . En general, para una (G, X) -estructura, se pide que X sea simplemente conexo.

6. Aplicación desarrollante y continuación analítica

Sea X una variedad real analítica y G un grupo de difeomorfismos reales analíticos actuando transitivamente sobre X . Un elemento de G queda completamente determinado por su restricción a cualquier subconjunto abierto de X . Sean $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ una familia de cartas coordenadas con funciones de transición $\gamma_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$. Por definición de una (G, X) -variedad, cada γ_{ij} coincide localmente con un elemento de G .

Si componemos γ_{ij} con ϕ_j obtenemos una aplicación localmente constante $U_i \cap U_j \rightarrow G$, la cual también llamaremos γ_{ij} . Supongamos ahora que (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son dos cartas cuyos dominios contienen el mismo punto x . Podemos modificar la carta ϕ_j componiéndola con $\gamma_{ij}(x) \in G$, así ésta coincide con ϕ_i alrededor del punto x . En efecto, si $U_i \cap U_j$ es conexo, la carta modificada ϕ_j coincide con ϕ_i en toda la intersección, de esta manera obtenemos una aplicación $U_i \cap U_j \rightarrow X$ que extiende ϕ_i . En general, podemos encontrar inconsistencias a la hora de querer extender una carta, en este caso podemos pasar al cubriente universal.

6.1. Continuación analítica. Empezaremos fijando un punto base $x_0 \in M$ y una carta $\phi_0 : U_0 \rightarrow X$, para una (G, X) -variedad M , cuyo dominio

contiene el punto base. Sea $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la aplicación cubriente universal de M ; consideraremos a \tilde{M} como el espacio de clases de homotopía de caminos en M que comienzan en el punto base, tomamos un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ representando un punto $[\alpha] \in \tilde{M}$ de modo que $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$. Existe una partición $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ que divide α en puntos $x_0 = \alpha(t_0)$, $x_1 = \alpha(t_1)$, \dots , $x_n = \alpha(t_n)$, y un conjunto $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i=1}^n$ de cartas para M tal que $\phi_0 = \phi_1$ y cada subcamino esté contenido en el dominio de una única carta coordenada (U_i, ϕ_i) . Es decir, $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. A lo largo de α vamos ajustando, sucesivamente, cada carta ϕ_i , por lo que esta coincide con ϕ_{i-1} (previamente ajustada) en una vecindad de $x_i \in U_{i-1} \cap U_i$. Este ajuste de cartas forman la *continuación analítica* de ϕ_0 a lo largo del camino α . La última carta ajustada es

$$\psi = \gamma_{01}(x_1)\gamma_{12}(x_2) \cdots \gamma_{n-1,n}(x_{n-1})\phi_n.$$

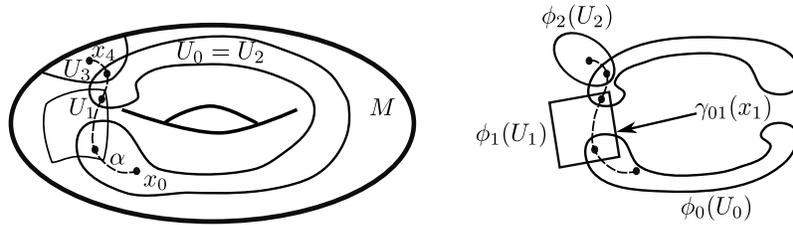


Figura 5. Continuación analítica. Aquí M es un toro afín. El camino α (punteado) es dividido en los puntos x_0, x_1, \dots, x_4 (marcados con puntos) de tal manera que cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ quede contenido completamente en una vecindad coordenada U_i . La continuación analítica de ϕ_0 a lo largo de α , es la misma carta ϕ_0 sobre una vecindad del primer segmento, $\gamma_{01}(x_1)\phi_0$ sobre una vecindad del segundo segmento, y así sucesivamente.

Definición 6.1 (Aplicación desarrollante). Para un punto base fijo y una carta inicial ϕ_0 , la *aplicación desarrollante* de una (G, X) -variedad M es la aplicación $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow X$ que coincide con la continuación analítica de ϕ_0 a lo largo de cada camino, en una vecindad del punto final del camino. En notación $\mathcal{D} = \phi_0^\sigma \circ \pi$, en una vecindad de $\sigma \in \tilde{M}$. Donde, π es la aplicación cubriente $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Si cambiamos el punto base y la carta inicial, la aplicación desarrollante también cambia por composición con un elemento de G . Así, la aplicación desarrollante es única salvo composición con un elemento de G .

Proposición 6.2. Sea $\pi : N \rightarrow M$ un homomorfismo local de un espacio topológico N en una (G, X) -variedad M . Entonces existe una (G, X) -estructura en N tal que π preserva dicha estructura.

Demostración. Sea $x \in N$, existen U y V vecindades de x y $\pi(x)$, respectivamente, tal que $\pi : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo local. Por la maximalidad de la (G, X) -estructura podemos suponer que V es el dominio de una carta ϕ . Definimos $\phi \circ \pi$ como una carta alrededor de x . Afirmamos que el conjunto de todas las cartas construidas de la misma forma, para cada punto en M , forman una (G, X) -atlas ya que si $\phi \circ \pi$ y $\phi' \circ \pi$ son dos cartas cuyos dominios se intersectan, entonces $(\phi \circ \pi)(\phi' \circ \pi)^{-1} = \phi \circ \phi'^{-1}$. Además, π preserva la estructura: dada $(U, \phi \circ \pi)$ una carta para N , y (V, ψ) una carta para M tal que $\pi^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, se tiene $\psi \circ \pi \circ (\phi \circ \pi)^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}$. \square

En particular cada espacio cubriente \tilde{M} de una (G, X) -variedad M tiene una (G, X) -estructura canónica inducida por la aplicación cubriente π . Así, $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow X$ se vuelve un (G, X) -difeomorfismo entre \tilde{M} y X .

Definición 6.3. Sean M y N , G -variedades. Decimos que un homeomorfismo $f : M \rightarrow N$ preserva la estructura, si para cualesquiera dos cartas (U, φ) y (V, ψ) tales que $f : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo, $\psi \circ f \circ \varphi \in G$.

Proposición 6.4. Si S tiene una (G, M) -estructura y M tiene una \mathcal{F} -estructura tal que los elementos de G preservan \mathcal{F} entonces S tiene una \mathcal{F} -estructura.

Demostración. Sea (U, φ) una G -carta de S y supongamos que $(\varphi(U), \varphi_\alpha)$ es una \mathcal{F} -carta de M . Definiremos una \mathcal{F} -carta en S como la composición $\varphi_\alpha \circ \varphi$. Afirmamos que estas cartas forman un \mathcal{F} -atlas para S , ya que si tomamos cualesquiera dos \mathcal{F} -cartas $(\varphi(U), \varphi_\alpha)$ y $(\psi(U), \varphi_\beta)$ se tiene que $(\varphi_\alpha \circ \varphi)(\varphi_\beta \circ \psi)^{-1} = \varphi_\alpha(\varphi\psi^{-1}) \circ \varphi_\beta \in \mathcal{F}$. \square

El caso particular cuando S es una superficie con una (G, \mathcal{M}) -estructura y \mathcal{M} tiene una \mathcal{F} -estructura (una foliación). La proposición anterior nos garantiza que podemos inducir una foliación en S .

6.2. La holonomía. Sea $\sigma \in \pi_1(M, x_0)$. Obsérvese que en este caso el punto inicial x_0 coincide con el punto final de la curva, por lo que el punto base está contenido en el dominio de la carta inicial y el dominio de la carta final. Así, la continuación analítica a lo largo de un lazo representado por σ nos da un germen ϕ_0^σ que es comparable a la carta ϕ_0 . Sea g_σ el elemento de G tal que $\phi_0^\sigma \circ \phi_0^{-1} = g_\sigma$, luego $\phi_0^\sigma = g_\sigma \phi_0$; llamamos a g_σ la *holonomía* de σ . Definimos el *homomorfismo holonomía* $\rho : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$ por $\sigma \mapsto g_\sigma$ y lo llamaremos la holonomía de M , su imagen es el *grupo de holonomía* de M .

Sea $T_\sigma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ la transformación de cubierta asociada con σ que manda $\tau \mapsto \sigma\tau$. De la definición de continuación analítica tenemos $\phi_0^{\sigma\tau} = (\phi_0^\sigma)^\tau$ y $(g\phi_0)^\tau = g\phi_0^\tau$. Luego, de la definición de aplicación desarrollante se sigue

$$(20) \quad \mathcal{D} \circ T_\sigma = g_\sigma \circ \mathcal{D}.$$

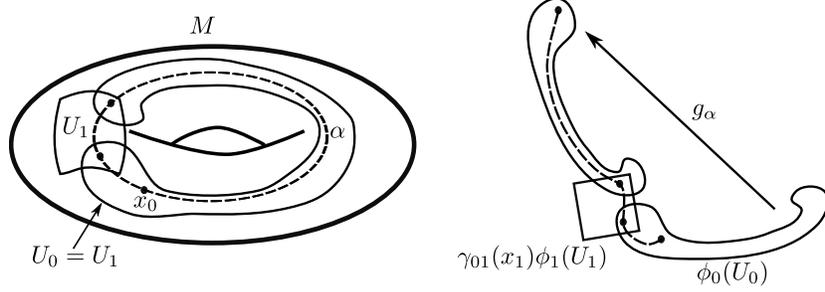


Figura 6. La holonomía alrededor de un camino. Para el toro de la Figura 5, la continuación analítica alrededor del lazo α requiere dos cartas coordenadas: de ϕ_0 a $\gamma_{01}(x_1)\phi_1$ y luego a $\gamma_{01}(x_1)\gamma_{12}(x_2)\phi_2$. Por lo tanto, la holonomía alrededor de α es $g_\alpha = \gamma_{01}(x_1)\gamma_{12}(x_2) = \gamma_{10}(x_1)\gamma_{01}^{-1}(x_2)$.

Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \pi_1(M, x_0)$, $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ el producto de estos dos lazos (visto como producto de curvas, es decir, recorremos primero σ_1 y luego σ_2). Aplicando (20) a este producto, podemos ver que

$$\begin{aligned} g_{\sigma_1\sigma_2} \circ \mathcal{D} &= \mathcal{D} \circ T_{\sigma_1\sigma_2} \\ &= \mathcal{D} \circ T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2} \\ &= g_{\sigma_1} \circ (\mathcal{D} \circ T_{\sigma_2}) \\ &= g_{\sigma_1}g_{\sigma_2} \circ \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Como \mathcal{D} es un homeomorfismo local, se sigue $g_{\sigma_1\sigma_2} = g_{\sigma_1}g_{\sigma_2}$ localmente, pero como ambos son difeomorfismos reales analíticos se tiene la igualdad en todo X . Por lo tanto, $\rho : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos.

De lo anterior tenemos que, a una (G, X) -estructura sobre M le corresponde una aplicación desarrollante $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow X$ y un homomorfismo de holonomía $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ que satisface, para cada $\nu \in \pi_1(M)$ y para cada $p \in \tilde{M}$, la relación

$$(21) \quad \mathcal{D}(\nu \cdot p) = \rho(\nu) \cdot \mathcal{D}(p).$$

Definición 6.5. Decimos que M es una (G, X) -variedad completa si la aplicación desarrollante $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow X$ es una aplicación cubriente.

Finalizamos esta sección con algunos resultados generales, en particular, que una conexión afín localmente homogénea sobre una variedad, da origen a una (G, X) -estructura en el sentido de Thurston [Thu97]. Los resultados se expresarán para conexiones afines localmente homogéneas, pero se cumplen más generalmente, para estructuras geométricas rígidas localmente homogéneas en el sentido de Gromov [DG91, Gro88].

Sea ∇ una conexión afín en una vecindad del origen en \mathbb{R}^n y supongamos que $\mathfrak{R}(\nabla)$ es transitiva. Sea G el grupo de Lie simplemente conexo con

álgebra de Lie $\mathfrak{K}(\nabla)$ y $G_0 \subset G$ el subgrupo correspondiente al álgebra de campos vectoriales de Killing que se anulan en el 0. Si G_0 es cerrado, hay una identificación natural de una vecindad de G_0/G_0 en G/G_0 con una vecindad del origen en \mathbb{R}^n . La siguiente proposición establece el vínculo entre las (G, X) -estructuras y las conexiones localmente homogéneas:

Proposición 6.6. *Sea M una variedad orientada y ∇ una conexión afín sobre M . Supongamos que ∇ es localmente homogénea en todas partes. Sean $p \in M$, \mathfrak{g} el álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing de ∇ en una vecindad de p y sea $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ la subálgebra de estos campos vectoriales de Killing que se anulan en p . Sea G el grupo de Lie conexo y simplemente conexo correspondiente a \mathfrak{g} y $G_0 \subset G$ el subgrupo correspondiente a \mathfrak{g}_0 . Si G_0 es cerrado, entonces existe un cubriente de Galois finito $\bar{\pi} : \bar{M} \rightarrow M$ con grupo de Galois $\text{Isom}^+(\nabla_0)/G$, una conexión ∇_0 sobre G/G_0 y una $(G, G/G_0)$ -estructura sobre \bar{M} que es, además, una isometría entre $\bar{\pi}^*\nabla$ y ∇_0 .*

Ver demostración en [DG13]. El cubriente \bar{M} no necesariamente es conexo: puede tener una componente conexa en la restricción en la cual $\bar{\pi}$ es uno a uno.

Conexiones afines localmente simétricas en superficies compactas orientables

El objetivo de este capítulo es demostrar el cuarto inciso del Teorema 0.4, esto con la finalidad de construir un modelo local, en el siguiente capítulo, sobre la superficie S del Teorema 0.3. Empezaremos tomando una conexión afín simétrica ∇ sobre \mathbb{R}^2 y calcularemos todos sus campos vectoriales de Killing, los cuales están en la lista de Lie, presentada por Olver en [Olv95]. Para cada elemento de esta lista, buscaremos todas las conexiones afines simétricas en \mathbb{R}^2 que son preservadas. Finalmente, para estas conexiones que son preservadas, calcularemos su álgebra de Killing maximal.

1. Conexiones afines localmente simétricas ∇ y sus simetrías locales

En el Capítulo 1 hemos visto que en un sistema de coordenadas (x, y) una conexión afín simétrica ∇ en \mathbb{R}^2 , queda determinada por sus símbolos de Christoffel, a saber, por seis funciones A, B, C, D, E y F que dependen de x y y . Como ∇ es localmente homogénea usaremos la Proposición 4.5 del Capítulo 1, la cual nos da un criterio que describe los campos vectoriales de Killing de tal conexión. Nuestro punto de partida es el siguiente resultado, en el que resumiremos la clasificación de Lie de grupos de transformaciones de dimensión dos en la presencia de una conexión invariante.

Proposición 1.1. *Sea ∇ una conexión afín simétrica C^∞ en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 . Si hay dos campos vectoriales de Killing que son linealmente independientes en 0, entonces el álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing satisface al menos uno de los siguientes:*

- (1) *es de dimensión dos;*
- (2) *es isomorfa a $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$;*
- (3) *es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;*
- (4) *en coordenadas adecuadas, contiene el campo vectorial $\partial/\partial y$ y los campos vectoriales de la forma $h(y)\partial/\partial x$ para las soluciones $h(y)$ de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes;*
- (5) *en coordenadas adecuadas, contiene los campos vectoriales $\partial/\partial y$ y $x\partial/\partial x$;*
- (6) *en coordenadas adecuadas, contiene los campos vectoriales $\partial/\partial y$, $\partial/\partial x$ y $(sx + y)\partial/\partial x + (sy - x)\partial/\partial y$ para algún $s \in \mathbb{R}$; o*
- (7) *∇ es plana.*

Esta afirmación viene de investigar de manera directa las conexiones afines que son preservadas para cada uno de los grupos de Lie de transformaciones transitivos en \mathbb{R}^2 (según la clasificación de Lie en el *Gruppenregister* y presentada por Olver en [Olv95, p. 472-476]). Para facilitar la lectura de esta tesis hemos incluido un Apéndice B, donde hacemos una réplica de las Tablas 1 y 6 presentadas en [Olv95, p. 742, 475]. Estas tablas presentan los grupos de Lie de transformaciones transitivos. A partir del 1.1 y hasta el 1.11 (para los casos imprimitivos; que es nuestro caso) y del 6.1 hasta el 6.8 (para los casos primitivos). Los grupos 1.5-1.11 contienen un parámetro $k \in \mathbb{Z}(k > 1)$; los grupos 6.1 y 6.7 contienen un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Muchos de estos grupos de transformaciones no preservan una conexión. Por ejemplo, si ∇ es una conexión en la vecindad del origen de \mathbb{R}^n y si X es un campo vectorial de Killing de ∇ que se anula en el origen, X es lineal en coordenadas exponenciales, (ver Lema 1, Cap. 1 o [Wolf11, Teor. 1.6.20]). Así, hay un campo vectorial de Killing no nulo con parte lineal cero. Esto excluye a priori los casos 1.4, 1.5-1.9 (para $k \geq 3$), 1.10 y 1.11 (para todos los valores de k), 6.5 y 6.6, que preservan una conexión.

Muchos grupos caen dentro del apartado (4). Este es el caso para los grupos 1.5 y 1.6 (ambos en el caso $k = 2$). Un caso particular del inciso (4) corresponde a $h'' = 0$. Esto cubre los grupos 1.7-1.9 (para todos los valores de k), 6.5 y 6.6. El grupo 1.5 ($k = 1$) pertenece al inciso (1). El grupo 1.6 ($k = 1$) corresponde al (5). Los grupos 1.1, 1.2 y 6.2 están dentro del caso (3). El grupo 1.3 pertenece al caso (2). El grupo 1.3 está definido

en $\{(x, u) | u > 0\}$ y contiene los campos vectoriales $x\partial/\partial x$ y $u\partial/\partial u$: en las coordenadas $(x, y) = (x, \log u)$ este pertenece al caso (5). Los grupos 6.1 y 6.4 pertenecen al caso (6).

Todos estos hechos prueban la proposición anterior.

Una imagen más completa debe hacer explícitos los casos donde el grupo de transformaciones de Lie que preservan una conexión, es maximal. Con respecto a esto, refinamos la Proposición 1.1, en la siguiente (comparar con [KOV04] y [AMK08]).

Teorema 0.4 *Sea ∇ una conexión afín simétrica C^∞ en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 . Si hay dos campos vectoriales de Killing que son linealmente independientes en 0, entonces el álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing es alguna de las siguientes:*

- (1) *de dimensión dos;*
- (2) *isomorfa a $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$;*
- (3) *isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;*
- (4) *en coordenadas adecuadas es generada por los campos vectoriales $x\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y aquellos de la forma $h(y)\partial/\partial x$, para las soluciones $h(y)$ de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes; o*
- (5) *∇ es plana.*

En particular, tiene dimensión menor o igual que cuatro si no es plana.

Demostración. Vamos a demostrar que en los casos (4) y (5) de la Proposición 1.1, estamos en realidad el caso (4) del Teorema 0.4 y que en el caso (6) tenemos una conexión simétrica y plana.

Comenzaremos con el caso (4) de la Proposición 1.1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y ∇ una conexión en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 . Supongamos que el álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing de ∇ contiene un álgebra de Lie de dimensión tres de campos vectoriales $\mathfrak{K}_{\alpha, \beta}$ generada por $\partial/\partial y$ y por los campos vectoriales de la forma $h(y)\partial/\partial x$ tal que

$$(22) \quad h'' + \alpha h' + \beta h = 0.$$

Consideremos el campo vectorial $X = a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$ sobre \mathbb{R}^2 , donde a y b son funciones en términos de x y y . Así, para los campos vectoriales que generan $\mathfrak{K}_{\alpha, \beta}$ tenemos:

- $a = 0$, $b = 1$, para el campo vectorial $X = \frac{\partial}{\partial y}$,
- $a = h_i(y)$, $b = 0$, para $X = h_i(y)\frac{\partial}{\partial x}$ con $i = 1, 2$.

Dado que $\partial/\partial y$ es un campo vectorial de Killing de la conexión ∇ , la cual es de la forma (11), del sistema de ecuaciones diferenciales (13)-(18) obtenemos:

$$A_y = 0, \quad B_y = 0, \quad C_y = 0, \quad D_y = 0, \quad E_y = 0, \quad F_y = 0.$$

Por lo tanto, todos los símbolos de Christoffel de la conexión ∇ son funciones que dependen únicamente de x . Análogamente, como hemos asumido que el campo vectorial $x\partial/\partial x$ es un campo vectorial de Killing de ∇ , entonces del sistema de ecuaciones (13)-(18) tenemos:

$$(23) \quad A + A_x x = 0$$

$$(24) \quad 2B + B_x x = 0$$

$$(25) \quad C_x x = 0$$

$$(26) \quad D + D_x x = 0$$

$$(27) \quad -E + E_x x = 0$$

$$(28) \quad F_x x = 0.$$

De las ecuaciones (25) y (28) podemos deducir que las funciones C y F son funciones constantes. Denotaremos $C = \gamma$ y $F = \phi$, para γ y ϕ constantes. Observemos ahora que las ecuaciones (23), (24), (26) y (27) tienen la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden:

$$(29) \quad n f + x f' = 0, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Dividiremos entre x la ecuación (29) para llevarla a su forma estándar:

$$(30) \quad \frac{df}{dx} + \frac{n}{x} f = 0 \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Obsérvese además que para esta ecuación diferencial no se puede aplicar el Teorema de existencia y unicidad en $x = 0$. Analicemos entonces el caso cuando $x \neq 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x > 0$, el factor integrante viene dado por

$$e^{\int \frac{n}{x} dx} = e^{n \int \frac{dx}{x}} = e^{n \ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n.$$

Multiplicando (30) por el factor integrante obtenemos

$$(31) \quad \begin{aligned} x^n \frac{df}{dx} + n x^{n-1} f &= 0 \\ \frac{d}{dx} [x^n f] &= 0. \end{aligned}$$

De (31) tenemos que $f(x) = cx^{-n}$, con c una constante, es solución de la ecuación diferencial (29) y nunca es cero pues $x \neq 0$. Ahora bien, cuando $n > 0$, la única solución diferente de f cerca del 0 es la función cero. Por lo tanto, para este caso la función f es idénticamente cero. Luego, las funciones A , B y D son funciones idénticamente cero. Supongamos ahora que $n < 0$ entonces $f(x) = cx^n$ por lo que $E = \varepsilon x$, para alguna $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Nos queda pendiente el campo vectorial $h_i(y)\partial/\partial x$. Haciendo $h(y) = h_i(y)$ para $i = 1, 2$, y sustituyendo las soluciones de este campo en el sistema de ecuaciones (13)-(18) se tiene:

$$(32) \quad -Bh'(y) + A_x h(y) = 0$$

$$(33) \quad B_x h(y) = 0$$

$$(34) \quad (A - D)h'(y) + C_x h(y) = 0$$

$$(35) \quad Bh'(y) + D_x h(y) = 0$$

$$(36) \quad h''(y) + (2C - F)h'(y) + E_x h(y) = 0$$

$$(37) \quad 2Dh'(y) + F_x h(y) = 0.$$

Sustituyendo los valores correspondientes de A , B , C , D , E y F en el sistema de ecuaciones diferenciales (32)-(37), éste se reduce únicamente a la ecuación (36), la cual se transforma en la siguiente ecuación:

$$(38) \quad h''(y) + (2\gamma - \phi)h'(y) + \varepsilon h(y) = 0.$$

Por hipótesis, cada solución de (22) debe ser una solución de todas las ecuaciones (32)-(37), luego, la ecuación (36) debe ser la ecuación (22), se tiene finalmente que $\alpha = 2\gamma - \phi$ y $\beta = \varepsilon$. Concluimos que:

$$A = 0, B = 0, D = 0, C = \gamma, F = 2\gamma - \alpha, E = \beta x + \delta,$$

para algún δ , $\gamma \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la conexión afín simétrica ∇ sobre \mathbb{R}^2 se reduce a

$$(39) \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = (\beta x + \delta) \frac{\partial}{\partial x} + (2\gamma - \alpha) \frac{\partial}{\partial y}$$

para α, β y γ constantes. El parámetro δ no es esencial. Si q es una función tal que $q'' + \alpha q' + \beta q = 0$, el cambio de coordenadas $(x, y) \mapsto (x + q(y), y)$ preserva el álgebra de Lie $\mathfrak{K}_{\alpha, \beta}$ y manda la conexión (39) a una con los mismos valores α, β, γ con $\delta = 0$. Estas conexiones forman una familia de dimensión 2, ya que el cambio de escala $y \mapsto \mu y$ preserva la familia y actúa sobre los coeficientes como

$$(40) \quad (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\mu\alpha, \mu^2\beta, \mu\gamma).$$

Denotaremos de ahora en adelante por $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla_0)$ a \mathbb{R}^2 con la conexión ∇_0 dada por (39). Tal conexión es localmente homogénea en el origen, pues si $h_0(y)$ es una solución de la ecuación (38) que no se anula en el origen entonces los campos vectoriales de Killing $\partial/\partial y$ y $h_0(y)\partial/\partial x$ son linealmente independientes en el origen.

Calcularemos ahora la curvatura de ∇_0 :

$$\begin{aligned}
 R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + \nabla\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \frac{\partial}{\partial x} \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (0) + 0 = 0; \\
 R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} + \nabla\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \frac{\partial}{\partial y} \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x}\right) + 0 \\
 &= \left(\varepsilon x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}\right) - \gamma \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \phi \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x}\right) - \gamma \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
 &= (\varepsilon + \phi\gamma - \gamma^2) \frac{\partial}{\partial x} \\
 &= [\beta + (2\gamma - \alpha)\gamma - \gamma^2] \frac{\partial}{\partial x} \\
 &= [\beta + \gamma(\gamma - \alpha)] \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, para la curvatura de ∇_0 tenemos

$$\begin{aligned}
 &\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\right) \frac{\partial}{\partial x} = 0; \\
 (41) \quad &\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\right) \frac{\partial}{\partial y} = [\beta + \gamma(\gamma - \alpha)] \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

Como ∇_0 no es la conexión estándar, entonces la curvatura y la torsión no se anulan simultáneamente. Luego,

$$\beta + \gamma(\gamma - \alpha) \neq 0.$$

Calcularemos ahora el álgebra de Lie maximal de campos vectoriales de Killing de una conexión ∇_0 de la familia de conexiones (39). Sean $X = a(x, y)\partial/\partial x + b(x, y)\partial/\partial y$, $Y = \partial/\partial y$, $Z = \partial/\partial x$. Sustituyendo estos campos vectoriales en (10), el sistema de ecuaciones (13)-(18) se reduce a

$$(42) \quad 0 = a_{xx} + 2\gamma b_x,$$

$$(43) \quad 0 = b_{xx},$$

$$(44) \quad 0 = a_{xy} + \beta x b_x + \gamma b_y,$$

$$(45) \quad 0 = b_{xy} + (\gamma - \alpha) b_x,$$

$$(46) \quad 0 = a_{yy} - \beta x a_x + \alpha a_y + 2\beta x b_y + \beta a,$$

$$(47) \quad 0 = b_{yy} - \beta x b_x + (2\gamma - \alpha) b_y.$$

Así, X es un campo vectorial de Killing de la familia de conexiones (39), si y sólo si, satisface el sistema de ecuaciones (42)-(47).

De la ecuación (43) obtenemos que $b(x, y) = f(y)x + g(y)$. Simplificaremos un poco la notación haciendo $b(x, y) = b$ y $f(y) = f$, sin olvidar que tanto b como f son funciones. Tenemos así las siguientes derivadas parciales:

$$b_x = f, \quad b_{xy} = f', \quad b_y = xf' + g', \quad b_{yy} = xf'' + g''.$$

Sustituyendo lo anterior en (45) se tiene $f' = (\alpha - \gamma)f$ y $f'' = (\alpha - \gamma)f'$. Luego, sustituyendo f' y f'' en (47) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= xf'' + g'' - \beta xf + (2\gamma - \alpha)(xf' + g) \\ (48) \quad &= [f'' + (2\gamma - \alpha)f' - \beta f]x + [g'' + (2\gamma - \alpha)g']. \end{aligned}$$

La ecuación (48) se puede separar en dos ecuaciones, ya que los términos dentro de los corchetes son funciones de y . Luego, sustituyendo f' y f'' en (48) tenemos por una parte que

$$\begin{aligned} 0 &= f'' + (2\gamma - \alpha)f' - \beta f \\ &= (\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma)f + (2\gamma - \alpha)(\alpha - \gamma)f - \beta f \\ &= -(\gamma^2 - \gamma\alpha + \beta)f, \end{aligned}$$

dado que hemos asumido que la conexión no es plana, $\gamma^2 - \gamma\alpha + \beta \neq 0$, luego $f = 0$. De la otra parte de (48) se tiene que $g'' = -(2\gamma - \alpha)g'$. Sustituyendo f en la ecuación (42) se tiene que $a_{xx} = 0$ por lo que, $a(x, y)$ es de la forma $a(x, y) = k(y)x + h(y)$, luego;

$$a_x = k, \quad a_{xy} = k', \quad a_y = xk' + h', \quad a_{yx} = k', \quad a_{yy} = xk'' + h''.$$

De (44) tenemos $k' = -\gamma g'$, luego $k'' = -\gamma g'' = \gamma(2\gamma - \alpha)g' = (2\gamma^2 - \gamma\alpha)g'$. Finalmente, de la ecuación (46) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= xk'' + h'' - \beta xk + \alpha(xk' + h') + 2\beta x(xf' + g') + \beta(xk + h) \\ &= x(2\gamma^2 - \gamma\alpha)g' + h'' - \beta xk + \alpha(x(-\gamma g') + h') + 2\beta xg' + \beta xk + \beta h \\ &= 2x(\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta)g' + [h'' + \alpha h' + \beta h]. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (42)-(47) se reduce a $h'' + \alpha h' + \beta h = 0$, $g' = 0$ y $k' = 0$: estamos en el caso (4) del Teorema 0.4.

En el caso (5) de la Proposición 1.1, como $\partial/\partial y$ es un campo vectorial de Killing de ∇ , los coeficientes de la conexión son funciones de x . Además, como $x\partial/\partial x$ es, por hipótesis, un campo vectorial de Killing, los coeficientes

de la conexión deben satisfacer el sistema

$$(49) \quad xA_x + A = 0$$

$$(50) \quad xB_x + 2B = 0$$

$$(51) \quad xC_x = 0$$

$$(52) \quad xD_x + D = 0$$

$$(53) \quad xE_x - E = 0$$

$$(54) \quad xF_x = 0.$$

Concluimos que A, B y D son cero, que C y F son funciones constantes y que $E = \mu x$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$. La conexión de arriba pertenece a la familia (39) para $\beta = \mu$ y $\delta = 0$. Por el estudio previo a los campos de Killing de la conexión (39), estamos en el caso (4) del Teorema 0.4.

En el caso (6) de la Proposición 1.1, si una conexión ∇ tiene tal álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing entonces, como los campos vectoriales coordenados son de Killing también, los símbolos de Christoffel son constantes. Imponiendo la condición que $(sx + y)\partial/\partial x + (sy - x)\partial/\partial y$ es un campo vectorial de Killing, el sistema (42)-(47) se reduce a un sistema lineal de seis ecuaciones en las seis constantes A, B, C , etc. cuyos coeficientes son polinomios en s . El determinante del sistema es $(s^2 + 9)(s^2 + 1)^3$. La única conexión que es preservada es aquella con símbolos de Christoffel nulos.

Esto finaliza la demostración del Teorema 0.4. □

Recordemos que solo nos interesa el caso (4) del Teorema 0.4, que es el caso que se trata en la tesis. Denotaremos a partir de ahora $\mathfrak{K}_{\alpha, \beta} = \mathfrak{K}(\nabla_0)$ al *álgebra de Killing de la conexión* ∇_0 .

Modelo local

En este capítulo empezamos tomando una familia de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$ tomada de la lista de Lie, presentada por Olver en [Olv95], y calcularemos mediante la integración de sus campos vectoriales su grupo de Lie asociado G . Este grupo de Lie actúa transitivamente en el espacio modelo $\mathcal{M} = (\nabla_0, \mathbb{R}^2)$ que hemos visto en el Capítulo 2. Tenemos entonces una (G, \mathcal{M}) -estructura sobre la superficie compacta y orientada S del Teorema 0.3.

1. Grupo de Lie G asociado a $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$

Empezaremos fijando un álgebra de Lie \mathfrak{g} de campos vectoriales tomada de las tablas 1 y 6 del Apéndice B. Consideremos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$(55) \quad h''(y) + \alpha h'(y) + \beta h(y) = 0$$

con coeficientes constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que la ecuación característica asociada a la ecuación (55) está dada por el polinomio de segundo grado $P(\xi) = \xi^2 + \alpha\xi + \beta = 0$. Denotaremos por $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ el discriminante del polinomio P . Tenemos tres casos para la solución de la ecuación (55), donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ serán coeficientes constantes.

- **Dos raíces reales y diferentes, ($\Delta > 0$):** el polinomio P tiene dos soluciones reales y diferentes a_1 y a_2 . La solución general para la ecuación diferencial (55) está dada por $h(y) = c_1 e^{a_1 y} + c_2 e^{a_2 y}$.
- **Dos raíces reales e iguales, ($\Delta = 0$):** P tiene una solución real a con multiplicidad dos. La solución general para (55) está dada por $h(y) = c_1 e^{ay} + c_2 y e^{ay}$.

- **Dos raíces complejas, ($\Delta < 0$):** P tiene dos soluciones complejas conjugadas $a \pm ib$, luego la solución general para (55) está dada por $h(y) = c_1 e^{ay} \cos(by) + c_2 e^{ay} \sin(by)$.

Observación 1. Si h es solución de (55), h' también lo es.

Consideremos el conjunto $\{x\partial/\partial x, \partial/\partial y, h_1(y)\partial/\partial x, h_2(y)\partial/\partial x\}$ de campos vectoriales sobre \mathbb{R}^2 , donde las funciones $h_1(y)$ y $h_2(y)$ forman una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial (55) y son descritas en cada caso como se menciona arriba.

Sean A, B, C y D funciones de x y y , $X = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y$, $Y = C\partial/\partial x + D\partial/\partial y$ campos vectoriales sobre \mathbb{R}^2 . La fórmula general para el corchete de X y Y está dada por:

$$[X, Y] = (AC_x + BC_y - CA_x - DA_y) \frac{\partial}{\partial x} + (AD_x + BD_y - CB_x - DB_y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Por la Observación 1 se sigue que $h'_i(y)$ para $i = 1, 2$, es solución de (55). Así, los campos vectoriales $x\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $h_1(y)\partial/\partial x$ y $h_2(y)\partial/\partial x$ generan un álgebra de Lie, la cual denotaremos por

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \beta} = \text{span} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, h_1(y) \frac{\partial}{\partial x}, h_2(y) \frac{\partial}{\partial x} \right\}.$$

Obsérvese además que $\mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$ coincide con el álgebra de campos vectoriales de Killing de la conexión ∇_0 . Es decir,

$$(56) \quad \mathfrak{g}_{\alpha, \beta} = \mathfrak{K}(\nabla_0).$$

Sea f una función de clase \mathcal{C}^∞ definida sobre \mathbb{R}^2 . Denotaremos a partir de ahora, $X = x\partial/\partial x$ y $Y = \partial/\partial y$. Luego,

$$[X, Y](f) = x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} (f) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial}{\partial x} (f) \right) = x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Veremos más adelante que estos dos campos vectoriales son completos, por lo que, inducen una acción efectiva de \mathbb{R}^2 sobre nuestro espacio modelo \mathcal{M} . El subespacio generado por estos dos campos vectoriales es una subálgebra de \mathfrak{g} que denotaremos por

$$\mathfrak{h} = \text{span} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

De manera análoga, calcularemos el corchete de Lie de los campos vectoriales de la forma $Z_i = h_i(y)\partial/\partial x$, para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_2](f) &= [h_1(y) \frac{\partial}{\partial x}, h_2(y) \frac{\partial}{\partial x}](f) \\ &= h_1(y) \frac{\partial}{\partial x} (h_2(y) \frac{\partial}{\partial x} (f)) - h_2(y) \frac{\partial}{\partial x} (h_1(y) \frac{\partial}{\partial x} (f)) \\ &= h_1(y) h_2(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - h_2(y) h_1(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que \mathfrak{g} contiene otra subálgebra conmutativa de dimensión dos, la cual denotaremos por

$$\mathfrak{k} = \text{span} \left\{ h(y) \frac{\partial}{\partial x} \right\}, \text{ donde } h(y) \text{ es solución de (55).}$$

Verificaremos a continuación que \mathfrak{k} es un ideal de \mathfrak{g} .

$$\begin{aligned} [X, Z_i](f) &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(h(y) \frac{\partial}{\partial x} (f) \right) - h(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} (f) \right) \\ &= x h(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - h(y) \frac{\partial f}{\partial x} - h(y) x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &= -h(y) \frac{\partial f}{\partial x}; \\ [X, Z_i](f) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(h(y) \frac{\partial}{\partial x} (f) \right) - h(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} (f) \right) \\ &= h'(y) \frac{\partial f}{\partial x} + h(y) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - h(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &= h'(y) \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

Para una mejor lectura haremos un resumen de los cálculos anteriores; ya que serán utilizados más adelante.

Sea $P(\xi) = \xi^2 + \alpha\xi + \beta$ el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial (55), $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ el discriminante de este polinomio. Dada una base ordenada (Z_1, Z_2) de \mathfrak{k} , tenemos:

(57) $[X, Y] = 0$, $[X, Z_i] = -Z_i$, $[Z_1, Z_2] = 0$, en todos los casos. Además,

- Si $\Delta > 0$ tenemos $[Y, Z_i] = a_i Z_1$ para $i = 1, 2$.
- Si $\Delta = 0$ tenemos $[Y, Z_1] = aZ_1$, $[Y, Z_2] = Z_1 + aZ_2$.
- Si $\Delta < 0$ tenemos $[Y, Z_1] = aZ_1 - Z_2$, $[Y, Z_2] = Z_1 + aZ_2$.

Como espacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. Además, de los cálculos anteriores podemos observar que \mathfrak{k} es el álgebra de Lie derivada de \mathfrak{g} , esto es, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{k}$.

Describiremos ahora la estructura del grupo de Lie G , conexo y simplemente conexo, asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$. Veremos en lo que sigue que dada la completitud de cada uno de los campos que generan $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$, el grupo de Lie G actúa sobre \mathcal{M} . Mostraremos además, que esta acción es transitiva y, en consecuencia, \mathcal{M} es un espacio homogéneo de G .

Por otra parte, hemos visto que el álgebra de Lie \mathfrak{g} es la suma directa de las subálgebras \mathfrak{h} y \mathfrak{k} . A estas subálgebras le corresponden, respectivamente, dos subgrupos de G de dimensión dos, H y K . Veremos que el grupo G es el producto semidirecto $H \ltimes_{\Psi} K$ correspondiente a alguna representación $\Psi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$, que define, en el conjunto $H \times K$ el producto

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 + h_2, \Psi_{h_1}(k_2) + k_1).$$

Como un grupo de transformaciones, el elemento (h, k) de G indica, con la convención de arriba para el producto semidirecto, que actúa primero $h \in H$ y luego $k \in K$. A continuación daremos la manera en que actúan h y k .

1.1. Flujo de los campos vectoriales del álgebra $\mathfrak{g}_{\alpha,\beta}$. Empezaremos calculando el flujo de los campos vectoriales $X = x\partial/\partial x$ y $Y = \partial/\partial y$, respectivamente, integrando explícitamente cada campo.

Sea $X = x\partial/\partial x$. El sistema de ecuaciones asociado a este campo vectorial está dado por

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= 0.\end{aligned}$$

Resolveremos ambas ecuaciones diferenciales: escribimos $x' = x$ en la forma $dx/ds = x$, reescribiendo tenemos $dx/x = ds$, integrando ambos lados de la igualdad $\int dx/x = \int ds$, se tiene $\ln(x) + C_1 = s + C_2$ con C_1 y C_2 constantes, luego $e^{\ln(x)} = e^{s+C}$ para $C = C_2 - C_1$ constante. Finalmente $x = x_0e^s$.

Análogamente para el campo vectorial $Y = \partial/\partial y$ tenemos la ecuación diferencial $dy/dt = 0$. Integrando esta ecuación tenemos que $y = y_0 + t$.

Resumiendo lo anterior:

- X genera el flujo $\varphi_s(x_0, y_0) = (x_0e^s, y_0)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.
- Y genera el flujo $\varphi_t(x_0, y_0) = (x_0, y_0 + t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Observemos que los campos vectoriales X y Y están definidos para todo tiempo t y s , respectivamente, por lo que cada uno de estos flujos generan una acción de \mathbb{R} sobre \mathcal{M} . A partir de estas dos acciones vamos a definir φ_1 haciendo actuar $(\mathbb{R}^2, +)$ como sigue:

$$\begin{aligned}\varphi_1: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\((s, t), (x_0, y_0)) &\mapsto (x_0e^s, y_0 + t).\end{aligned}$$

Proposición 1.1. φ_1 es una acción de grupos.

Demostración. Sean $(s, t), (s', t') \in \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\varphi_1((0, 0), (x_0, y_0)) &= (x_0e^0, y_0 + 0) \\&= (x_0, y_0); \\ \varphi_1((s, t) + (s', t'), (x_0, y_0)) &= \varphi_1((s + s', t + t'), (x_0, y_0)) \\&:= (x_0e^{s+s'}, y_0 + t + t') \\&= (x_0e^{s'} \cdot e^s, (y_0 + t') + t) \\&=: \varphi_1((s, t), (x_0e^s, y_0 + t')) \\&=: \varphi_1((s, t), \varphi_1((s', t'), (x_0, y_0))).\end{aligned}$$

Por lo tanto φ_1 es una acción de grupos. □

Obsérvese además que la acción φ_1 no es libre, ya que el estabilizador del $(0, 0) \in \mathcal{M}$ es $G_{(0,0)} = \{(s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ y no es trivial.

Por otra parte, se sigue de la Proposición 3.3 del Capítulo 1, que para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{1(s,t)}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definida por $\varphi_{1(s,t)}(x, y) = (xe^s, y + t)$ es un difeomorfismo de \mathcal{M} en \mathcal{M} .

Proposición 1.2. *El homomorfismo inducido por φ_1 definido por*

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 : (\mathbb{R}^2, +) &\longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{M}) \\ (s, t) &\mapsto \varphi_{1(s,t)} \end{aligned}$$

es inyectivo.

Demostración. Sean $(s, t), (s', t') \in \mathbb{R}^2$ tales que $\widetilde{\varphi}_1(s, t) = \widetilde{\varphi}_1(s', t')$. Luego, para toda $(x, y) \in \mathcal{M}$ se tiene que $\varphi_{1(s,t)}(x, y) = \varphi_{1(s',t')}(x, y)$, si y sólo si, $(xe^s, y + t) = (xe^{s'}, y + t')$, se tiene entonces

$$(58) \quad xe^s = xe^{s'} \quad \text{para toda } x, \quad y$$

$$(59) \quad y + t = y + t' \quad \text{para toda } y.$$

De (58) se sigue que $x(e^s - e^{s'}) = 0$ para toda x , luego, $e^s - e^{s'} = 0$ que a su vez implica $e^{s'} = e^s$ y como la función exponencial es inyectiva se sigue $s' = s$. Por otra parte, de (59) $t = t'$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}_1$ es inyectiva. \square

La proposición anterior implica dos cosas: que φ_1 es una acción efectiva y que $\text{Diff}(\mathcal{M})$ contiene una copia de \mathbb{R}^2 . Definimos $H = \widetilde{\varphi}_1(\mathbb{R}^2, +)$ un grupo de transformaciones que actúa sobre \mathcal{M} . Así, un elemento $h \in H$ actúa sobre \mathcal{M} , de la siguiente manera:

$$(60) \quad (s, t) \cdot (x, y) = (xe^s, y + t).$$

A continuación analizaremos en cada caso, los flujos de los campos vectoriales Z_i . Recordemos que los campos vectoriales Z_i para $i = 1, 2$, están relacionados con las soluciones de la ecuación diferencial $h''(y) + \alpha h'(y) + \beta h = 0$, las cuales fueron vistas al inicio de la Sección 1.

1.2. Dos valores propios reales y distintos. Consideremos nuevamente la ecuación diferencial (55) y sus soluciones $h_i(y)$, con $i = 1, 2$. Entonces para este caso los campos vectoriales sobre \mathcal{M} son:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_1 = e^{a_1 y} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = e^{a_2 y} \frac{\partial}{\partial x}.$$

En la sección 1.1 analizamos los flujos de los campos vectoriales X y Y . Haremos algo similar para los campos Z_i , el flujo para estos campos vectoriales está dado por $\varphi_{w_i}(x_0, y_0) = (x_0 + e^{a_i y_0} w_i, y_0)$, para $w_i \in \mathbb{R}$, y está definido para todo tiempo w_1 y w_2 respectivamente, por lo que cada uno genera una acción de \mathbb{R} sobre \mathcal{M} . A partir de estas dos acciones definiremos

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (w_1, w_2)(x_0, y_0) &\mapsto (x_0 + e^{a_1 y_0} w_1 + e^{a_2 y_0} w_2, y_0). \end{aligned}$$

Proposición 1.3. φ_2 es una acción de grupos.

Demostración. Tomemos (w_1, w_2) y (w'_1, w'_2) en \mathbb{R}^2 , luego, para todo $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi_2((0, 0), (x_0, y_0)) &= (x_0 + e^{a_1 y_0} \cdot 0 + e^{a_2 y_0} \cdot 0, y_0) \\
&= (x_0, y_0); \\
\varphi_2((w_1, w_2) + (w'_1, w'_2), (x_0, y_0)) &= \varphi_2((w_1 + w'_1, w_2 + w'_2), (x_0, y_0)) \\
&= (x_0 + e^{a_1 y_0}(w_1 + w'_1) \\
&\quad + e^{a_2 y_0}(w_2 + w'_2), y_0) \\
&= \varphi_2((w_1, w_2), (x_0 + e^{a_1 y_0} w'_1 \\
&\quad + e^{a_2 y_0} w'_2, y_0)) \\
&= \varphi_2((w_1, w_2), \varphi_2((w'_1, w'_2), (x_0, y_0))).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ_2 es una acción de grupos. \square

Observemos que la acción φ_2 no es libre, ya que el estabilizador del punto $(0, 0) \in \mathcal{M}$ es $G_{(0,0)} = \{(w_1, -w_1) \in \mathbb{R}^2 \mid w_1 \in \mathbb{R}\}$ y no es trivial.

Proposición 1.4. *El homomorfismo $\widetilde{\varphi}_2$ inducido por φ_2 y definido como*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_2 : (\mathbb{R}^2, +) &\longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{M}) \\
(w_1, w_2) &\longmapsto \varphi_{2(w_1, w_2)}
\end{aligned}$$

es inyectivo.

Demostración. Sean $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\widetilde{\varphi}_2(w_1, w_2) = \widetilde{\varphi}_2(w'_1, w'_2).$$

Luego, para toda $(x, y) \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{2(w_1, w_2)}(x, y) &= \varphi_{2(w'_1, w'_2)}(x, y), \text{ si y sólo si} \\
(x + e^{a_1 y} w_1 + e^{a_2 y} w_2, y) &= (x + e^{a_1 y} w'_1 + e^{a_2 y} w'_2, y), \text{ si y sólo si} \\
(61) \quad e^{a_1 y} w_1 + e^{a_2 y} w_2 &= e^{a_1 y} w'_1 + e^{a_2 y} w'_2, \text{ para toda } y.
\end{aligned}$$

De (61) tenemos

$$(62) \quad e^{a_1 y}(w_1 - w'_1) + e^{a_2 y}(w_2 - w'_2) = 0.$$

Como $e^{a_1 y}$ y $e^{a_2 y}$ son soluciones de la ecuación diferencial (55), se sigue que (62) también es solución de (55) y debe ser la solución cero, esto implica que $w_1 - w'_1 = 0$ y $w_2 - w'_2 = 0$, por lo que $w_1 = w'_1$ y $w_2 = w'_2$. Por lo tanto $\widetilde{\varphi}_2$ es inyectivo. \square

De la proposición anterior se sigue que φ_2 es una acción efectiva y que $\text{Diff}(\mathcal{M})$ contiene una copia de \mathbb{R}^2 (diferente de la anterior). Definiremos

$K = \tilde{\varphi}_2(\mathbb{R}^2, +)$ un grupo de transformaciones actuando sobre \mathcal{M} . Así, un elemento $k \in K$ actúa sobre \mathcal{M} como sigue:

$$(63) \quad (w_1, w_2) \cdot (x, y) = (x + e^{a_1 y} w_1 + e^{a_2 y} w_2, y).$$

De las Proposiciones 1.2 y 1.4, respectivamente, se sigue que H y K son subgrupos de $\text{Diff}(\mathcal{M})$.

En lo que sigue, para la definición de producto semidirecto puede remi- tirse a la Sección 1.3 del Capítulo 1.

Proposición 1.5. *El grupo generado por H y K es un producto semidirecto.*

Demostración. Sea $g \in H \cap K$, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ se tiene

$$(64) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(g)(x, y) &= \tilde{\varphi}_2(g)(x, y) \\ \varphi_{1_g}(x, y) &= \varphi_{2_g}(x, y) \\ \varphi_{1_{(s,t)}}(x, y) &= \varphi_{2_{(w_1, w_2)}}(x, y) \\ (xe^s, y + t) &= (x + e^{a_1 y} w_1 + e^{a_2 y} w_2, y). \end{aligned}$$

De (64) se sigue que $t = 0$,

$$(65) \quad x = xe^s \quad \text{para todo } x, \quad y$$

$$(66) \quad e^{a_1 y} w_1 + e^{a_2 y} w_2 = 0 \quad \text{para todo } y.$$

De (65) tenemos $e^s = 1$, por lo que, $s = 0$. Recordemos además que $e^{a_1 y}$ y $e^{a_2 y}$ son soluciones de la ecuación diferencial (55), por lo que la ecuación (66) debe ser la solución cero para (55), luego $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$. Por lo tanto, $g = (0, 0)$, es decir, $H \cap K = \{(0, 0)\}$.

Mostraremos ahora que $H \subseteq N_{\text{Diff}(\mathcal{M})}(K)$. Sean $(s, t) \in H$, $(w_1, w_2) \in K$ y $(x, y) \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} \varphi((s, t)(w_1, w_2)(-s, -t))(x, y) &= (\tilde{\varphi}_1(s, t) \circ \tilde{\varphi}_2(w_1, w_2) \circ \tilde{\varphi}_1(-s, -t))(x, y) \\ &= (\varphi_{1_{(s,t)}} \circ \varphi_{2_{(w_1, w_2)}} \circ \varphi_{1_{(-s, -t)}})(x, y) \\ &= (\varphi_{1_{(s,t)}} \circ \varphi_{2_{(w_1, w_2)}})(xe^{-s}, y - t) \\ &= \varphi_{1_{(s,t)}}(xe^{-s} + e^{a_1(y-t)} w_1 \\ &\quad + e^{a_2(y-t)} w_2, y - t) \\ &= (xe^{-s+s} + e^{a_1 y} e^{-a_1 t + s} w_1 \\ &\quad + e^{a_2 y} e^{-a_2 t + s} w_2, y) \\ &= (x + e^{a_1 y} e^{s-a_1 t} w_1 + e^{a_2 y} e^{s-a_2 t} w_2, y). \end{aligned}$$

Haciendo $\tilde{w}_1 = e^{s-a_1 t} w_1$ y $\tilde{w}_2 = e^{s-a_2 t} w_2$, se tiene para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$

$$(67) \quad (x + e^{a_1 y} e^{s-a_1 t} w_1 + e^{a_2 y} e^{s-a_2 t} w_2, y) = (x + e^{a_1 y} \tilde{w}_1 + e^{a_2 y} \tilde{w}_2, y).$$

Por lo tanto, $\varphi_{1(s,t)} \circ \varphi_{2(w_1,w_2)} \circ \varphi_{1(-s,-t)} = \varphi_{2(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)}$, con $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2) \in K$. Esto último implica

$$(68) \quad (s,t)(w_1,w_2)(-s,-t) = (\tilde{w}_1,\tilde{w}_2), \quad \text{para algún } (\tilde{w}_1,\tilde{w}_2) \in K.$$

De (68) se sigue que $H \subseteq N_{\text{Diff}(\mathcal{M})}(K)$. Lo anterior induce

$$\begin{aligned} \Psi : H &\longrightarrow \text{Aut}(K) \\ h &\longmapsto \Psi_h(k) = hkh^{-1}, \end{aligned}$$

esto es, el automorfismo inducido por (s,t) dado por

$$\Psi(s,t) = \begin{pmatrix} e^{s-a_1t} & 0 \\ 0 & e^{s-a_2t} \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 1.6. *El grupo G es un grupo de Lie y $\phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $(s,t,w_1,w_2)(x,y) \mapsto (xe^s + e^{a_1(y+t)}w_1 + e^{a_2(y+t)}w_2, y+t)$ es una acción efectiva y transitiva de G sobre la variedad \mathcal{M} .*

Demostración. Para mostrar que ϕ es efectiva calcularemos el grupo de isotropía global (ver definición en la Sección 1.2 del Cap. 1). Sea $(s,t,w_1,w_2) \in G$ tal que $(s,t,w_1,w_2) \cdot (x,y) = (x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathcal{M}$. Se sigue que $(xe^s + e^{a_1(y+t)}w_1 + e^{a_2(y+t)}w_2, y+t) = (x,y)$ si y sólo si, $t = 0$ y $xe^s + e^{a_1y}w_1 + e^{a_2y}w_2 = x$. De la última igualdad tenemos que

$$(69) \quad x(e^s - 1) = 0, \quad \text{para toda } x, y$$

$$(70) \quad e^{a_1y}w_1 + e^{a_2y}w_2 = 0, \quad \text{para toda } y.$$

De la ecuación (69), $s = 0$. Por otro lado, como e^{a_1y} y e^{a_2y} son soluciones de la ecuación diferencial (55), se sigue que la ecuación (70) debe ser la solución cero de la ecuación diferencial (55), para toda y . Esto implica $w_1 = 0$, $w_2 = 0$. Se sigue que, el grupo de isotropía global $G_{\mathcal{M}}$ es trivial. Por lo tanto, ϕ es efectiva. Por otra parte, la órbita del $(0,0) \in \mathcal{M}$ esta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(0,0)} &= \{(x,y) \in M \mid (s,t,w_1,w_2)(0,0) = (x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathcal{M} \mid (0 \cdot e^s + e^{a_1(0+t)}w_1 + e^{a_2(0+t)}w_2, 0+t) = (x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathcal{M} \mid (e^{a_1t}w_1 + e^{a_2t}w_2, t) = (x,y)\}. \end{aligned}$$

Podemos resolver lo anterior en términos de w_1 , w_2 y t . Para todo $(x,y) \in \mathcal{M}$ hacemos $t = y$, $w_1 = xe^{-a_1y}$ y $w_2 = 0$. Así, para todo $(x,y) \in \mathcal{M}$ existe $g = (s,y,xe^{-a_1y},0) \in G$ tal que $(s,y,xe^{-a_1y},0)(0,0) = (x,y)$, es decir, la órbita del $(0,0)$ es todo \mathcal{M} y por lo tanto ϕ es transitiva. □

1.3. Álgebra de Lie de Campos vectoriales de Killing que se anulan en el origen: \mathfrak{g}_0 . Los campos vectoriales de Killing que se anulan en un punto $p \in \mathcal{M}$, forman una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Calcularemos la subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ de los campos vectoriales de Killing que se anulan en el origen de \mathbb{R}^2 , el grupo de Lie correspondiente se denota por G_0 y corresponde al grupo de isotropía del $(0, 0) \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} G_{(0,0)} &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid (s, t, w_1, w_2)(0, 0) = (0, 0)\} \\ &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid (e^{a_1 t} w_1 + e^{a_2 t} w_2, t) = (0, 0)\} \\ &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid t = 0, w_1 = -w_2\} = \{(s, 0, -w_2, w_2)\}. \end{aligned}$$

Sabemos por la Proposición 3.7 que $G_{(0,0)}$ es un subgrupo cerrado de G , por lo tanto, es un grupo de Lie. Además, como la acción ϕ es transitiva se tiene que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{(0,0)} \simeq G/G_{(0,0)}$, es decir, el grupo de Lie G actúa transitivamente en \mathcal{M} preservando una conexión específica ∇_0 , y

$$\dim \mathcal{O}_{(0,0)} = \dim(G/G_{(0,0)}) = \dim G - \dim G_{(0,0)} = 4 - 2 = 2.$$

Finalmente, la subálgebra de Lie \mathfrak{g}_0 para este caso, está formada por los campos vectoriales X y $Z_1 - Z_2$. Por lo tanto, el grupo de Lie G_0 que buscamos tiene dimensión 2, y será usado en el Capítulo 3.

1.3.1. Campos vectoriales C^∞ sobre \mathcal{M} asociados. Inversamente, a partir de ϕ podemos obtener campos vectoriales C^∞ sobre \mathcal{M} , para esto debemos considerar la restricción de ϕ a cada uno de los parámetros s, t, w_1 y w_2 respectivamente.

Parámetro s : Restringiendo ϕ al parámetro s se tiene

$$\begin{aligned} \phi|_s : \{s\} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s, (x, y)) &\mapsto (xe^s, y) \end{aligned}$$

Sea $p = (x, y)$ un punto en \mathcal{M} .

$$\frac{d\phi(s)(p)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d(xe^s, y)}{ds} \Big|_{s=0} = (xe^s, 0) \Big|_{s=0} = (x, 0) = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Parámetro t : Restringiendo ϕ al parámetro t se tiene

$$\begin{aligned} \phi|_t : \{t\} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (t, (x, y)) &\mapsto (x, y + t) \end{aligned}$$

$$\text{Luego; } \frac{d\phi(t)(p)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(x, y + t)}{dt} \Big|_{t=0} = (0, 1) = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Parámetro w_i para $i = 1, 2$: Consideremos ϕ restringida al parámetro w_i para $i = 1, 2$. Esto es,

$$\begin{aligned} \phi|_{w_i} : \{w_i\} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (w_i, (x, y)) &\mapsto (x + e^{a_i y} w_i, y) \end{aligned}$$

Así para un punto $p = (x, y)$ en \mathcal{M} tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(w_i)(p)}{dw_i} \Big|_{w_i=0} &= \frac{d(x + e^{a_i y} w_1, y)}{dw_i} \Big|_{w_i=0} \\ &= (e^{a_i y}, 0) \Big|_{w_i=0} = (e^{a_i y}, 0) = e^{a_i y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Se tienen finalmente los cuatro campos vectoriales:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_1 = e^{a_1 y} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = e^{a_2 y} \frac{\partial}{\partial x}.$$

1.4. Dos valores propios reales e iguales. Los campos vectoriales sobre \mathcal{M} son:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_1 = e^{ay} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = ye^{ay} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Para los campos X y Y haremos referencia a la sección 1.1. Los correspondientes flujos para Z_1 y Z_2 están dados de la siguiente manera:

- Z_1 genera el flujo $\varphi_{w_1}(x_0, y_0) = (x_0 + e^{ay_0} w_1, y_0)$, con $w_1 \in \mathbb{R}$.
- Z_2 genera el flujo $\varphi_{w_2}(x_0, y_0) = (x_0 + ye^{ay_0} w_2, y_0)$, con $w_2 \in \mathbb{R}$.

Los campos vectoriales Z_1 y Z_2 también son completos, por lo que cada uno genera una acción de \mathbb{R} sobre \mathcal{M} . A partir de estas dos acciones definiremos $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ (análoga al φ_2 anterior), dada por $((w_1, w_2), (x_0, y_0)) \mapsto (x_0 + e^{ay_0} w_1 + ye^{ay_0} w_2, y_0)$.

Proposición 1.7. φ_2 es una acción de grupos.

Demostración. Sean $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \mathcal{M}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_2((0, 0), (x_0, y_0)) &= (x_0 + e^{ay_0} \cdot 0 + ye^{ay_0} \cdot 0, y_0) \\ &= (x_0, y_0); \\ \varphi_2((w_1, w_2) + (w'_1, w'_2), (x_0, y_0)) &= \varphi_2((w_1 + w'_1, w_2 + w'_2), (x_0, y_0)) \\ &:= (x_0 + e^{ay_0}(w_1 + w'_1) \\ &\quad + ye^{ay_0}(w_2 + w'_2), y_0) \\ &= \varphi_2((w_1, w_2), (x_0 \\ &\quad + e^{ay_0} w'_1 + ye^{ay_0} w'_2, y_0)) \\ &= \varphi_2((w_1, w_2), \varphi_3((w'_1, w'_2), (x_0, y_0))). \end{aligned}$$

Por lo tanto φ_2 es una acción de grupos. \square

Luego; del corolario 3.3 se sigue que $\varphi_{2_{(w_1, w_2)}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definida por $(x, y) \mapsto (x + e^{ay} w_1 + ye^{ay} w_2, y)$ es un difeomorfismo. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición 1.8. *El homomorfismo $\tilde{\varphi}_2$ inducido por φ_2 y definido como*

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2 : (\mathbb{R}^2, +) &\longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{M}) \\ (w_1, w_2) &\mapsto \varphi_{2(w_1, w_2)}\end{aligned}$$

es inyectivo.

Demostración. Sean $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\tilde{\varphi}_2(w_1, w_2) = \tilde{\varphi}_2(w'_1, w'_2)$. Entonces, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(w_1, w_2)(x, y) &= \tilde{\varphi}_2(w'_1, w'_2)(x, y), \text{ si y sólo si,} \\ \varphi_{2(w_1, w_2)}(x, y) &= \varphi_{2(w'_1, w'_2)}(x, y), \text{ si y sólo si,} \\ (71) \quad (x + e^{ay}w_1 + ye^{ay}w_2, y) &= (x + e^{ay}w'_1 + ye^{ay}w'_2, y).\end{aligned}$$

de (71) se sigue

$$(72) \quad e^{ay}(w_1 - w'_1) + ye^{ay}(w_2 - w'_2) = 0.$$

Recordemos además que e^{ay} y ye^{ay} son soluciones de la ecuación diferencial (55), por lo que (72) también es solución de (55), luego, debe ser la solución cero de esta ecuación, lo que implica $w_1 - w'_1 = 0$ y $w_2 - w'_2 = 0$. Por lo tanto $w_1 = w'_1$ y $w_2 = w'_2$. Finalmente, $\tilde{\varphi}_2$ es inyectiva. \square

De la proposición anterior se sigue que φ_2 es una acción efectiva y que $\text{Diff}(\mathcal{M})$ contiene una copia de \mathbb{R}^2 que definiremos como $K = \tilde{\varphi}_2(\mathbb{R}^2, +)$, un grupo de transformaciones actuando sobre \mathcal{M} . Un elemento $k \in K$ actúa sobre \mathcal{M} como sigue:

$$(73) \quad (w_1, w_2) \cdot (x, y) = (x + e^{ay}w_1 + ye^{ay}w_2, y).$$

Obsérvese además, que φ_2 no es una acción libre, ya que el estabilizador del $(0, 0) \in \mathcal{M}$ es $G_{(0,0)} = \{(0, w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_2 \in \mathbb{R}\}$ y no es trivial.

Proposición 1.9. *El grupo generado por H y K es un producto semidirecto.*

Demostración. Sea $g \in H \cap K$, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(g)(x, y) &= \tilde{\varphi}_2(g)(x, y) \\ \varphi_{1g}(x, y) &= \varphi_{2g}(x, y) \\ \varphi_{1(s,t)}(x, y) &= \varphi_{2(w_1, w_2)}(x, y) \\ (74) \quad (xe^s, y + t) &= (x + e^{ay}w_1 + ye^{ay}w_2, y)\end{aligned}$$

de (74) se sigue que $t = 0$,

$$(75) \quad xe^s = x \text{ para todo } x, \text{ y}$$

$$(76) \quad e^{ay}w_1 + ye^{ay}w_2 = 0 \text{ para todo } y.$$

Luego, (75) implica $e^s = 1$, por lo que $s = 0$. Recordemos además que e^{ay} y ye^{ay} son soluciones de la ecuación diferencial (55), por lo que la ecuación (76) debe ser la solución cero para (55). Además, dado que $e^{ay} \neq 0$ para

toda y , y $ye^{ay} \neq 0$ para toda $y \neq 0$, se tienen que $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$. Por lo tanto, $g = (0, 0)$, es decir, $H \cap K = \{(0, 0)\}$. Mostraremos ahora que $H \subseteq N_{\text{Diff}(\mathcal{M})}(K)$. Sean $(s, t) \in H$, $(w_1, w_2) \in K$ y $(x, y) \in \mathcal{M}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi((s, t)(w_1, w_2)(-s, -t))(x, y) &= (\tilde{\varphi}_1(s, t) \circ \tilde{\varphi}_2(w_1, w_2) \circ \tilde{\varphi}_1(-s, -t))(x, y) \\ &= (\varphi_{1(s, t)} \circ \varphi_{2(w_1, w_2)} \circ \varphi_{1(-s, -t)})(x, y) \\ &= \left(\varphi_{1(s, t)} \circ \varphi_{2(w_1, w_2)} \right) (xe^{-s}, y - t) \\ &= (x + e^{ay}e^{s-at}w_1 + (y - t)e^{ay}e^{s-at}w_2, y). \end{aligned}$$

Haciendo $\tilde{w}_1 = e^{s-at}w_1$ y $\tilde{w}_2 = (1 - \frac{t}{y})e^{s-at}w_2$ obtenemos

$$(77) \quad (x + e^{ay}e^{s-at}w_1 + (y - t)e^{ay}e^{s-at}w_2, y) = (x + e^{ay}\tilde{w}_1 + ye^{ay}\tilde{w}_2, y)$$

para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$. Por lo tanto,

$$\varphi_{1(s, t)} \circ \varphi_{2(w_1, w_2)} \circ \varphi_{1(-s, -t)} = \varphi_{2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)}, \quad \text{con } (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in K.$$

Esto último implica

$$(78) \quad (s, t)(w_1, w_2)(-s, -t) = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2), \quad \text{para algún } (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in K.$$

De (78) se sigue que $H \subseteq N_{\text{Diff}(\mathcal{M})}(K)$. Se tiene con esto que el grupo generado por H y K es el producto semidirecto $G = H \rtimes_{\Psi} K$, donde Ψ es el automorfismo inducido

$$\begin{aligned} \Psi : H &\longrightarrow \text{Aut}(K) \\ h &\longmapsto \Psi_h(k) = hkh^{-1}, \end{aligned}$$

esto es, el automorfismo inducido por (s, t) :

$$\Psi(s, t) = \begin{pmatrix} e^{s-at} & -te^{s-at} \\ 0 & e^{s-at} \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 1.10. *El grupo $G = H \rtimes_{\Psi} K$ es un grupo de Lie y $\phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $(s, t, w_1, w_2)(x, y) \mapsto (xe^s + e^{a(y+t)}w_1 + (y+t)e^{a(y+t)}w_2, y+t)$ es una acción efectiva y transitiva del grupo de Lie G sobre \mathcal{M} .*

Demostración. Análogamente como en el caso anterior, para mostrar que ϕ es efectiva calcularemos el estabilizador global de \mathcal{M} .

Sea $(s, t, w_1, w_2) \in G$ tal que $(s, t, w_1, w_2) \cdot (x, y) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$. Es decir, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$

$$(79) \quad (xe^s + e^{a(y+t)}w_1 + (y+t)e^{a(y+t)}w_2, y+t) = (x, y).$$

De la ecuación (79) se sigue que $t = 0$, y

$$(80) \quad xe^s + e^{ay}w_1 + ye^{ay}w_2 = x.$$

Por la forma que tiene la ecuación (80), ésta se puede separar como sigue:

$$(81) \quad x(e^s - 1) = 0, \quad \text{para todo } x,$$

$$(82) \quad e^{ay}w_1 + ye^{ay}w_2 = 0, \quad \text{para todo } y.$$

Se sigue de (81) que $s = 0$. Por otra parte, sabemos que e^{ay} y ye^{ay} son soluciones de la ecuación diferencial (55), por lo que (82) debe ser la solución cero de la ecuación diferencial (55). Por lo tanto, $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$. Así, el estabilizador global $G_{\mathcal{M}}$ es trivial, luego ϕ es efectiva.

Por otro lado, tenemos que la órbita del $(0, 0) \in \mathcal{M}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(0,0)} &= \{(x, y) \in M \mid (s, t, w_1, w_2)(0, 0) = (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in M \mid (e^{at}w_1 + te^{at}w_2, t) = (x, y)\} \end{aligned}$$

podemos resolver la igualdad $(e^{at}w_1 + te^{at}w_2, t) = (x, y)$ en términos de t, w_1 y w_2 . Para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ hacemos $t = y$, $w_1 = xe^{-ay}$ y $w_2 = 0$. Así, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ existe $g = (s, y, xe^{-ay}, 0) \in G$ tal que

$$(s, y, xe^{-ay}, 0)(0, 0) = (x, y).$$

Por lo tanto, la acción ϕ es transitiva. \square

1.5. Álgebra de Lie de Campos vectoriales de Killing que se anulan en el origen: \mathfrak{g}_0 .

Observemos ahora el estabilizador del $(0, 0)$

$$\begin{aligned} G_{(0,0)} &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid (s, t, w_1, w_2)(0, 0) = (0, 0)\} \\ &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid (e^{at}w_1 + te^{at}w_2, t) = (0, 0)\} \\ &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid t = 0, w_1 = 0\} = \{(s, 0, 0, w_2)\} \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.7 tenemos que $\mathcal{O}_{(0,0)} \simeq G/G_{(0,0)} \simeq \mathcal{M}$, es decir, \mathcal{M} es un espacio afín homogéneo y

$$\dim \mathcal{O}_{(0,0)} = \dim (G/G_{(0,0)}) = \dim G - \dim G_{(0,0)} = 4 - 2 = 2.$$

Es decir, el grupo de Lie G actúa transitivamente en \mathcal{M} preservando una conexión ∇_0 específica.

Para este caso, la subálgebra de Lie \mathfrak{g}_0 de los campos vectoriales que se anulan en el origen, es generada por los campos vectoriales X y Z_2 .

1.5.1. Campos vectoriales C^∞ sobre \mathcal{M} asociados. A partir de la acción ϕ del grupo de Lie G sobre \mathcal{M} , podemos obtener campos vectoriales C^∞ sobre \mathcal{M} . Basta restringir ϕ a cada uno de los parámetros. Para los parámetros s y t haremos referencia a la Sección 1.3.1.

Parámetro w_i para $i = 1, 2$: Consideremos ϕ restringida al parámetro w_1 , es decir,

$$\begin{aligned} \phi|_{w_1} : \{w_1\} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (w_1, (x, y)) &\mapsto (x + e^{ay}w_1, y). \end{aligned}$$

Así para un punto $p = (x, y)$ en \mathcal{M} tenemos

$$\frac{d\phi(w_1)(p)}{dw_1} \Big|_{w_1=0} = \frac{d(x + e^{ay}w_1, y)}{dw_1} \Big|_{w_1=0} = (e^{ay}, 0) = e^{ay} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y},$$

el campo vectorial obtenido es $Z_1 = e^{ay} \frac{\partial}{\partial x}$. Análogamente para el parámetro w_2 y $(x, y) \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\frac{d\phi(w_2)(p)}{dw_2} \Big|_{w_2=0} = \frac{d(x + ye^{ay}w_2, y)}{dw_2} \Big|_{w_2=0} = (ye^{ay}, 0) = ye^{ay} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Por lo tanto el campo vectorial obtenido es $Z_2 = ye^{ay} \frac{\partial}{\partial x}$.

Finalmente los cuatro campos vectoriales obtenidos son:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_1 = e^{ay} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = ye^{ay} \frac{\partial}{\partial x}.$$

1.6. Dos valores propios complejos. Salvo un cambio de escala (40), podemos suponer que $b = 1$, y establecer los siguientes campos de vectores sobre \mathcal{M} .

$$X = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_1 = e^{ay} \cos(y) \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = e^{ay} \operatorname{sen}(y) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Análogamente como en el caso anterior, para los campos X y Y haremos referencia a la sección 1.1. Los flujos para Z_1 y Z_2 son:

- Z_1 genera el flujo $\varphi_{w_1}(x_0, y_0) = (x_0 + e^{ay_0} \cos(y_0)w_1, y_0)$.
- Z_2 genera el flujo $\varphi_{w_2}(x_0, y_0) = (x_0 + e^{ay_0} \operatorname{sen}(y_0)w_2, y_0)$.

donde a y b son números reales, como al inicio de este capítulo.

Igual que en los dos casos anteriores, los campos vectoriales Z_1 y Z_2 generan cada uno, una acción de \mathbb{R} sobre \mathcal{M} . A partir de estas dos acciones, definiremos $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ (análoga a los dos casos anteriores), como:

$$(w_1, w_2)(x_0, y_0) \mapsto (x_0 + e^{ay_0} \cos(y_0)w_1 + e^{ay_0} \operatorname{sen}(y_0)w_2, y_0).$$

Proposición 1.11. φ_2 es una acción de grupos.

Demostración. Sean $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(x, y) \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} \varphi_2((0, 0), (x, y)) &= (x + e^{ay} \cos(y) \cdot 0 + e^{ay} \operatorname{sen}(y) \cdot 0, y) \\ &= (x, y); \\ \varphi_2[(w_1, w_2) + (w'_1, w'_2), (x, y)] &= \varphi_2((w_1 + w'_1, w_2 + w'_2), (x, y)) \\ &= (x + e^{ay} \cos(y)(w_1 + w'_1) \\ &\quad + e^{ay} \operatorname{sen}(y)(w_2 + w'_2), y) \\ &= \varphi_2[(w_1, w_2), (x + e^{ay} \cos(y)w'_1 \\ &\quad + e^{ay} \operatorname{sen}(y)w'_2, y)] \\ &= \varphi_2[(w_1, w_2), \varphi_2((w'_1, w'_2), (x, y))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto φ_2 es una acción de grupos. \square

En este caso φ_2 tampoco es una acción libre; ya que el grupo de isotropía del $(0,0) \in \mathcal{M}$ dado por $G_{(0,0)} = \{(w_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid w_1 \in \mathbb{R}\}$, no es trivial.

Por otra parte, recordemos que la acción φ_2 induce el homomorfismo de grupos $\tilde{\varphi}_2 : (\mathbb{R}^2, +) \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{M})$ dado por $(w_1, w_2) \mapsto \varphi_{2(w_1, w_2)}$. Definiremos $K = \tilde{\varphi}_2(\mathbb{R}^2, +)$ un grupo de transformaciones actuando sobre \mathcal{M} .

Proposición 1.12. *El grupo generado por los grupos H y K es un producto semidirecto.*

Demostración. Sea $g \in H \cap K$, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(g)(x, y) &= \tilde{\varphi}_2(g)(x, y) \\ \varphi_{1_g}(x, y) &= \varphi_{2_g}(x, y) \\ \varphi_{1_{(s,t)}}(x, y) &= \varphi_{2_{(w_1, w_2)}}(x, y) \\ (83) \quad (xe^s, y+t) &= (x + e^{ay} \cos(y)w_1 + e^{ay} \text{sen}(y)w_2, y) \end{aligned}$$

de (109) se sigue que $t = 0$,

$$(84) \quad xe^s = x \quad \text{para todo } x, y$$

$$(85) \quad e^{ay} \cos(y)w_1 + e^{ay} \text{sen}(y)w_2 = 0 \quad \text{para todo } y.$$

Luego, (84) implica $e^s = 1$, por lo que $s = 0$. De (85) se sigue que

$$(86) \quad \cos(y)w_1 + \text{sen}(y)w_2 = 0, \quad \text{para todo } y.$$

Luego; $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$, lo cual implica $H \cap K = \{(0,0)\}$. Mostraremos ahora que $H \subseteq N_{\text{Diff}(\mathcal{M})}(K)$. Sean $(s, t) \in H$, $(w_1, w_2) \in K$ y $(x, y) \in \mathcal{M}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi((s, t)(w_1, w_2)(-s, -t))(x, y) &= (\tilde{\varphi}_1(s, t) \circ \tilde{\varphi}_2(w_1, w_2) \circ \tilde{\varphi}_1(-s, -t))(x, y) \\ &= (\varphi_{1_{(s,t)}} \circ \varphi_{2_{(w_1, w_2)}} \circ \varphi_{1_{(-s, -t)}})(x, y) \\ &= \left(\varphi_{1_{(s,t)}} \circ \varphi_{2_{(w_1, w_2)}} \right) (xe^{-s}, y-t) \\ &= \varphi_{1_{(s,t)}}(xe^{-s} + e^{a(y-t)} \cos(y-t)w_1 \\ &\quad + e^{a(y-t)} \text{sen}(y-t)w_2, y-t) \\ &= (xe^{-s}e^s + e^{a(y-t)}e^s \cos(y-t)w_1 \\ &\quad + e^{a(y-t)}e^s \text{sen}(y-t)w_2, y) \\ &= (x + e^{ay}e^{-at+s} \cos(y-t)w_1 \\ &\quad + e^{ay}e^{-at+s} \text{sen}(y-t)w_2, y) \\ &= (x + e^{ay} \cos(y)\tilde{w}_1 + e^{ay} \text{sen}(y)\tilde{w}_2, y) \end{aligned}$$

donde

$$(87) \quad \tilde{w}_1 = e^{-at+s}[\cos(t)w_1 - \text{sen}(t)w_2]$$

$$(88) \quad \tilde{w}_2 = e^{-at+s}[\text{sen}(t)w_1 + \cos(t)w_2].$$

Por lo tanto, $\varphi_{1(s,t)} \circ \varphi_{2(w_1,w_2)} \circ \varphi_{1(-s,-t)} = \varphi_{2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)}$, con $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in K$. Esto último implica

$$(89) \quad (s, t)(w_1, w_2)(-s, -t) = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2), \text{ para algùn } (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in K.$$

De (89) se sigue que $H \subseteq N_{\text{Diff}(\mathcal{M})}(K)$. Se tiene con esto que el grupo generado por H y K es el producto semidirecto $G = H \rtimes_{\Psi} K$, donde Ψ es el automorfismo inducido

$$\begin{aligned} \Psi : H &\longrightarrow \text{Aut}(K) \\ h &\longmapsto \Psi_h(k) = hkh^{-1}. \end{aligned}$$

Esto es, el automorfismo inducido por (s, t) :

$$\Psi(s, t) = \begin{pmatrix} e^{s-at} \cos(t) & -e^{s-at} \text{sen}(t) \\ e^{s-at} \text{sen}(t) & e^{s-at} \cos(t) \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 1.13. *G es un grupo de Lie y $\phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definida por $(s, t, w_1, w_2)(x, y) \mapsto (xe^s + e^{a(y+t)} \cos(y+t)w_1 + e^{a(y+t)} \text{sen}(y+t)w_2, y+t)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$, es una acción efectiva y transitiva del grupo de Lie G sobre \mathcal{M} .*

Demostración. Análogamente como en los dos casos anteriores, calcularemos el grupo de isotropía global para mostrar que ϕ sea efectiva. Sea $(s, t, w_1, w_2) \in G$ tal que $(s, t, w_1, w_2) \cdot (x, y) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$. Es decir, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$

$$(90) \quad (xe^s + e^{a(y+t)} \cos(y+t)w_1 + e^{a(y+t)} \text{sen}(y+t)w_2, y+t) = (x, y).$$

De la ecuación (90) se sigue que $t = 0$, y

$$(91) \quad xe^s + e^{ay} \cos(y)w_1 + e^{ay} \text{sen}(y)w_2 = 0.$$

La ecuación (91) puede separarse en las siguientes dos ecuaciones:

$$(92) \quad x(e^s - 1) = 0, \quad \text{para todo } x;$$

$$(93) \quad e^{ay} \cos(y)w_1 + e^{ay} \text{sen}(y)w_2 = 0, \quad \text{para todo } y.$$

De la ecuación (92) se sigue que $s = 0$. Por otra parte, como $e^{ay} \cos(y)$ y $e^{ay} \text{sen}(y)$ son ambas, soluciones de la ecuación diferencial (55), se sigue que la ecuación (93) también es solución de (55) y debe ser la solución cero. Así, $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$. Por lo tanto, el grupo de isotropía global $G_{\mathcal{M}}$ es trivial. Luego, ϕ es efectiva.

Para mostrar que ϕ es transitiva, veremos que el $(0, 0) \in \mathcal{M}$ está en la órbita de cualquier punto $(x, y) \in \mathcal{M}$. Sea $(s, t, w_1, w_2) \in G$ tal que $(s, t, w_1, w_2)(x, y) = (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$. Es decir, para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$,

$$(94) \quad (xe^s + e^{a(y+t)} \cos(y+t)w_1 + e^{a(y+t)} \text{sen}(y+t)w_2, y+t) = (0, 0).$$

De (94) tenemos $t = -y$ y $w_1 = -xe^s$. Se tiene entonces que para todo $(x, y) \in \mathcal{M}$ existe $g \in G$ de la forma $g = (s, -y, -xe^s, w_2)$ tal que $g \cdot (x, y) = (0, 0)$. Por lo tanto, la acción ϕ es transitiva. \square

1.7. Álgebra de Lie de Campos vectoriales de Killing que se anulan en el origen: \mathfrak{g}_0 . Observemos ahora el estabilizador del $(0, 0)$

$$\begin{aligned} G_{(0,0)} &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid (s, t, w_1, w_2)(0, 0) = (0, 0)\} \\ &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid (e^{at} \cos(t)w_1 + e^{at} \operatorname{sen}(t)w_2, t) = (0, 0)\} \\ &= \{(s, t, w_1, w_2) \in G \mid t = 0, w_1 = 0\} = \{(s, 0, 0, w_2)\}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.7 tenemos que $\mathcal{O}_{(0,0)} \simeq G/G_{(0,0)}$, luego

$$\dim \mathcal{O}_{(0,0)} = \dim (G/G_{(0,0)}) = \dim G - \dim G_{(0,0)} = 4 - 2 = 2.$$

Por lo tanto el grupo de Lie G actúa transitivamente en \mathcal{M} preservando una conexión específica, y \mathcal{M} es un espacio afín homogéneo.

La subálgebra de Lie \mathfrak{g}_0 de campos vectoriales que se anulan en el cero, está generada por los campos vectoriales X y Z_2 .

1.7.1. Campos vectoriales \mathcal{C}^∞ sobre \mathcal{M} asociados. Consideremos ϕ restringida a un solo parámetro. Para los parámetros s y t haremos referencia a la Sección 1.3.1. Trabajaremos los parámetros restantes: w_1 y w_2 .

Parámetro w_i para $i = 1, 2$: Consideremos ϕ restringida al parámetro w_1 , es decir,

$$\begin{aligned} \phi|_{w_1}: \mathbb{R} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (w_1, (x, y)) &\mapsto (x + e^{ay} \cos(y)w_1, y) \end{aligned}$$

Así para un punto $p \in \mathcal{M}$ tenemos

$$\left. \frac{d\phi(w_1)(p)}{dw_1} \right|_{w_1=0} = \left. \frac{d(x + e^{ay} \cos(y)w_1, y)}{dw_1} \right|_{w_1=0} = e^{ay} \cos(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para el parámetro w_2 tenemos que para un punto $p \in \mathcal{M}$

$$\left. \frac{d\phi(w_2)(p)}{dw_2} \right|_{w_2=0} = \left. \frac{d(x + e^{ay} \operatorname{sen}(y)w_2, y)}{dw_2} \right|_{w_2=0} = e^{ay} \operatorname{sen}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Finalmente los cuatro campos vectoriales obtenidos son

$$X = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_1 = e^{ay} \cos(y) \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = e^{ay} \operatorname{sen}(y) \frac{\partial}{\partial x}.$$

2. La foliación invariante

En cada uno de los casos anteriores, la acción transitiva del grupo de Lie G sobre \mathcal{M} es una acción imprimitiva; ya que G admite una foliación \mathcal{F}_0 invariante sobre \mathcal{M} , generada por $\partial/\partial x$. El flujo de este campo (ver Fig. 3, Cap. 1) está dado por $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 + t, y_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta foliación

se puede caracterizar como la tangente a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Por lo que es naturalmente invariante por G , más generalmente, por el grupo de isometrías de ∇_0 (esto pone de manifiesto la naturaleza imprimitiva de la acción de G sobre \mathcal{M}).

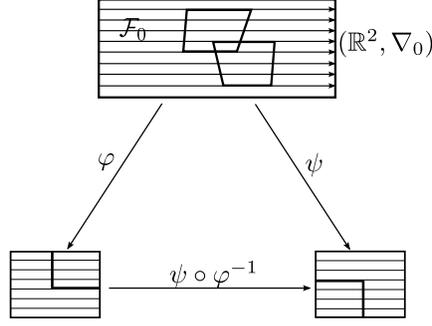


Figura 1. Foliación \mathcal{F}_0 de dimensión uno, generada por el campo vectorial $\partial/\partial x$ sobre el espacio modelo $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla_0)$.

Por (41), la foliación \mathcal{F}_0 es totalmente geodésica (no singular) y el parámetro x es su parámetro natural. Las hojas de esta foliación son también las únicas líneas de curvatura de la conexión; ya que en todo punto el campo vectorial $\partial/\partial x$ es el único vector propio del operador de curvatura.

3. Isometrías de ∇_0

El grupo $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ actúa transitivamente por isometrías sobre \mathcal{M} e induce el álgebra de Lie maximal de campos vectoriales de Killing de ∇_0 . En muchos de los casos, este es el grupo de isometrías que preservan la orientación. Comenzaremos con el estudio de las conexiones (39) estudiando sus isometrías. Recordemos que estas conexiones ∇_0 tienen la forma

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = (\beta x + \delta) \frac{\partial}{\partial x} + (2\gamma - \alpha) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Note que $k : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $k(x, y) = (-x, y)$ es una isometría definida globalmente, que invierte la orientación. Sea $\mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$ el álgebra de Lie de campos vectoriales sobre \mathcal{M} correspondiente al álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing de ∇_0 . Sea G el grupo de Lie conexo y simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$. Denotaremos por $\text{Isom}^+(\nabla_0)$ el grupo de isometrías de ∇_0 que preservan la orientación. Naturalmente tenemos que $G \triangleleft \text{Isom}^+(\nabla_0)$.

Proposición 3.1. *Sea G el subgrupo de $\text{Isom}^+(\nabla_0)$ que preserva la orientación de \mathcal{F}_0 , donde \mathcal{F}_0 es la foliación sobre \mathcal{M} generada por el campo vectorial $\partial/\partial x$,*

- si $\alpha \neq 2\gamma$, $\text{Isom}^+(\nabla_0) = G$;

- si $\alpha = 2\gamma$, $\text{Isom}^+(\nabla_0)/G \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y es generado por la clase de la isometría $\sigma(x, y) = (-e^{\alpha y}x, -y)$, que preserva la orientación.

Demostración. Sea $\phi \in \text{Isom}^+(\nabla_0)$. En particular, ϕ tiene la forma

$$(95) \quad \phi(x, y) = (F(x, y), G(x, y)), \text{ donde } F(x, y) \text{ y } G(x, y) \text{ son funciones.}$$

Las isometrías de la conexión dan un automorfismo del álgebra de campos vectoriales de Killing $\mathfrak{K}(\nabla_0) = \mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$, en particular, mandan el álgebra de Lie derivada $[\mathfrak{g}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{g}_{\alpha, \beta}] = \mathfrak{t}$ sobre sí misma. Además preservan la foliación que genera, así que los cambios (95) tienen la forma $(F(x, y), G(y))$. Las geodésicas parametrizadas son $t \mapsto (at + b, y_0)$. Entonces las isometrías deben actuar preservando estas parametrizaciones, y (95) debe ser de la forma $(p(y)x + q(y), G(y))$. Las isometrías de ∇_0 actúan sobre el álgebra de Killing $\mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$. La imagen del campo $\partial/\partial y$ de esta álgebra, está dentro del álgebra y no es tangente a la foliación \mathcal{F}_0 . La imagen viene dada por $u(\bar{x}, \bar{y})\partial/\partial x + G' \circ G^{-1}(\bar{y})\partial/\partial y$, para alguna función u . Si este elemento está en el álgebra, el cociente de $\partial/\partial u$ debe ser constante y, así, los cambios de coordenadas deben ser de la forma

$$(96) \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \phi(x, y) = (p(y)x + q(y), c^{-1}y),$$

para algún $c \in \mathbb{R}^*$ y algunas funciones p y q .

De la ecuación (96) sigue que

$$(97) \quad \bar{x} = p(y)x + q(y)$$

$$(98) \quad \bar{y} = \frac{y}{c}.$$

Luego; x y y están dados por

$$(99) \quad x = \frac{\bar{x} - q(y)}{p(y)}$$

$$(100) \quad y = c\bar{y}.$$

Consideremos nuevamente el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$ y analicemos sus campos vectoriales bajo las isometrías de ∇_0 . Empezaremos con el campo vectorial $h(y)\partial/\partial x$. El sistema de ecuaciones viene dado por:

$$\begin{aligned} x' &= h(y); \\ y' &= 0. \end{aligned}$$

Derivando (97) y (98) respecto a x , y sustituyendo lo anterior según corresponda tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= (p'(y) \cdot x + p(y) \cdot x') + q'(y) \\ &= p(y)h(y) \\ &= p(c\bar{y})h(c\bar{y}); \end{aligned}$$

$$(101) \quad \bar{y}' = \frac{1}{c}y' = \frac{1}{c} \cdot 0 = 0.$$

Bajo esta transformación tenemos, para cada h tal que $h'' + \alpha h' + \beta h = 0$,

$$h(y) \frac{\partial}{\partial x} \longmapsto p(c\bar{y})h(c\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}}.$$

A continuación veremos que el coeficiente $g(\bar{y}) = p(c\bar{y})h(c\bar{y})$ satisface la ecuación diferencial (55) con respecto a y .

$$\begin{aligned} g'(\bar{y}) &= p(c\bar{y})h'(c\bar{y}) \cdot c + c \cdot p'(c\bar{y})h(c\bar{y}) \\ &= c[p(c\bar{y})h'(c\bar{y}) + p'(c\bar{y})h(c\bar{y})]; \\ g''(\bar{y}) &= c[p(c\bar{y})h'(c\bar{y}) + p'(c\bar{y})h(c\bar{y})]' \\ &= c[p'(c\bar{y})h'(c\bar{y})c + p(c\bar{y})h''(c\bar{y})c + p''(c\bar{y})h(c\bar{y})c + p'(c\bar{y})h'(c\bar{y})c] \\ &= c^2[p'(c\bar{y})h'(c\bar{y}) + p(c\bar{y})h''(c\bar{y}) + p''(c\bar{y})h(c\bar{y}) + p'(c\bar{y})h'(c\bar{y})]. \end{aligned}$$

Para facilitar los cálculos usaremos la notación $p = p(c\bar{y})$ y $h = h(c\bar{y})$. Así, para $u(\xi) = p'(\xi)/p(\xi)$ se sigue

$$\begin{aligned} g'(\bar{y}) &= c(p'h + ph') \\ &= c(ugh + h'); \\ (102) \quad g''(\bar{y}) &= c^2(p''h + 2p'h' + ph'') \\ &= c^2[(up)'h + 2(up)h' + ph''] \\ &= c^2[(u'p + up')h + 2(up)h' + ph''] \\ &= c^2[u'ph + up'h + 2(up)h' + ph''] \\ &= c^2[u'ph + u(up)h + 2(up)h' + ph''] \\ &= c^2[u'ph + u^2ph + 2uph' + ph''] \\ (103) \quad &= c^2p[u'h + u^2h + 2uh' + h'']. \end{aligned}$$

Sustituyendo (102) y (103) en la ecuación (55) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}(g'' + \alpha g' + \beta g) &= c^2[u'h + u^2h + 2uh' + h''] + \alpha c(ugh + h') + \beta h \\ &= c^2[u'h + u^2h + 2uh' - \alpha h' - \beta h] + \alpha c(ugh + h') + \beta h \\ (104) \quad &= c[2uc + \alpha(1 - c)]h' + [u^2c^2 + u'c^2 + \beta(1 - c^2) + \alpha uc]h \end{aligned}$$

el cual debe anularse término a término. Para que el primer término se haga cero necesitamos

$$(105) \quad u = \frac{p'}{p} = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

Sustituyendo esto en el segundo término, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{c}\right)\right]^2 c^2 - \beta c^2 + \alpha c \left[\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{c}\right)\right] + \beta \\
&= \frac{\alpha^2}{4} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 c^2 - \beta(c^2 - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) c \\
&= \frac{\alpha^2}{4} (c-1)^2 - \beta(c-1)(c+1) + \frac{\alpha^2}{2} (c-1) \\
&= (c-1) \left[\frac{\alpha^2}{4} (c-1) - \beta(c+1) + \frac{\alpha^2}{2}\right] \\
&= (c-1) \left[\frac{\alpha^2}{4} (c+1) - \beta(c+1)\right] \\
&= (c^2 - 1) \left[\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right] \\
&= \frac{1}{4} (c^2 - 1) (\alpha^2 - 4\beta).
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$(106) \quad (c-1)(c+1)(\alpha^2 - 4\beta) = 0.$$

Por último, tenemos el campo vectorial $x\partial/\partial x$. El sistema de ecuaciones para este campo vectorial viene dado por:

$$\begin{aligned}
x' &= x; \\
y' &= 0.
\end{aligned}$$

Derivando (97) y (98) respecto a x y sustituyendo como corresponde

$$\begin{aligned}
\bar{x}' &= p(y) \cdot x' = p(c\bar{y})x \\
&= p(c\bar{y}) \left(\frac{\bar{x} - q(c\bar{y})}{p(c\bar{y})}\right) \\
&= \bar{x} - q(c\bar{y}); \\
\bar{y}' &= cy' = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo las isometrías de ∇_0

$$(107) \quad x \frac{\partial}{\partial x} \mapsto [\bar{x} - q(c\bar{y})] \frac{\partial}{\partial \bar{x}}.$$

En el caso particular cuando $c = 1$, sustituyendo c en (105) se tiene $u = 0$, lo que implica que p es constante (positiva por la hipótesis de que preserva la orientación), y de la fórmula (107), $q(y)\partial/\partial x$ debe ser un campo vectorial de Killing. Por lo tanto, $q'' + \alpha q' + \beta q = 0$. Esto implica que ϕ pertenece a G y prueba la proposición si $c \neq 1$. Supongamos a partir de ahora que $c \neq 1$. Para el campo vectorial $\partial/\partial x$ tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
x' &= 1; \\
y' &= 0.
\end{aligned}$$

Derivando (97) y (98) respecto a x y sustituyendo lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{x}' &= p(y); \\
\bar{y}' &= 0.
\end{aligned}$$

Así; bajo las isometrías de ∇_0 se tiene que

$$(108) \quad \frac{\partial}{\partial x} \longmapsto A = p(c\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}}.$$

Análogamente, para el campo vectorial $\partial/\partial y$ tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= 0; \\ y' &= 1. \end{aligned}$$

Derivando (97) y (98) respecto a y , y haciendo la sustitución correspondiente

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= (p'(y) \cdot x + p(y) \cdot 0) + q'(y) \\ &= p'(y)x + q'(y) \\ &= p'(y) \left(\frac{\bar{x} - q(y)}{p(y)} \right) + q'(y) \\ &= \frac{p'(y)}{p(y)} [\bar{x} - q(y)] + q'(y) \\ \bar{y}' &= \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Por lo tanto; bajo las isometrías de ∇_0 ;

$$(109) \quad \frac{\partial}{\partial y} \longmapsto B = \left(\frac{p'(c\bar{y})}{p(c\bar{y})} [\bar{x} - q(c\bar{y})] + q'(c\bar{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + c^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

Usando A y B de las fórmulas (108) y (109), y sustituyendo (105) tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_A B &= p(c\bar{y}) \nabla \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{p'(c\bar{y})}{p(c\bar{y})} [\bar{x} - q(c\bar{y})] + q'(c\bar{y}) \right] \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \\ &= p(c\bar{y}) \nabla \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{c} \right) [\bar{x} - q(c\bar{y})] + q'(c\bar{y}) \right] \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \\ &= p(c\bar{y}) \left[\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{\gamma}{c} \right] \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &= p(c\bar{y}) \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{c} \left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) \right] \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &= \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) - \frac{1}{c} \left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) + \gamma \right] p(c\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &= \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \gamma \right] A; \\ \nabla_B A &= \left(\frac{p'(c\bar{y})}{p(c\bar{y})} [\bar{x} - q(c\bar{y})] + q'(c\bar{y}) \right) \nabla \frac{\partial}{\partial \bar{x}} p(c\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial}{\partial \bar{y}} p(c\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &= \frac{1}{c} (p'(c\bar{y}) \cdot c + \gamma p(c\bar{y})) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &= \left(\frac{p'(c\bar{y})}{p(c\bar{y})} + \frac{\gamma}{c} \right) p(c\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &= \left[\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{\gamma}{c} \right] A \\ &= \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \gamma \right] A. \end{aligned}$$

En particular;

$$\begin{aligned} \nabla_A B - \gamma A &= \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) \right] A; \\ \nabla_B A - \gamma A &= \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) \right] A. \end{aligned}$$

Como ϕ es una isometría, se sigue que

$$(110) \quad \left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 0.$$

Así, el caso $c \neq 1$ implica que $\gamma = \alpha/2$. Bajo estas condiciones la curvatura (41) desaparece si $\alpha^2 = 4\beta$. Como hemos asumido que esta no se anula, de (106) debemos tener que $c = -1$. Si $\gamma = \alpha/2$, σ es una isometría que preserva la orientación y debe pertenecer al caso $c = -1$. Salvo composiciones de ϕ con σ , estamos de vuelta en el caso $c = 1$, probando la proposición. \square

Hasta aquí hemos terminado la parte local de nuestro trabajo. Presentaremos en el siguiente capítulo la parte global, utilizando las (G, X) -estructuras en el sentido de Thurston asociadas a una estructura geométrica, en este caso una conexión (ver [Thu97, Sec. 3.4]).

Modelo Global

En este capítulo haremos la demostración del teorema principal de esta tesis, el Teorema 0.3 (que recordaremos más adelante). Veremos que la superficie compacta y orientada S (del Teorema 0.3) admite una (G, \mathcal{M}) -estructura, donde $G = H \ltimes_{\Psi} K$ es un grupo de Lie actuando transitivamente sobre la variedad simplemente conexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla_0)$, y ∇_0 tiene la forma:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = (\beta x + \delta) \frac{\partial}{\partial x} + (2\gamma - \alpha) \frac{\partial}{\partial y},$$

para α, β y γ constantes, tales que $\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta \neq 0$. Este modelo fue presentado con más detalle en el Capítulo 3.

Por otra parte, del Capítulo 2, tenemos el Teorema 0.4 que clasifica los gérmenes de las conexiones localmente homogéneas:

Teorema 0.4 *Sea ∇ una conexión afín simétrica C^∞ en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 . Si hay dos campos vectoriales de Killing que son linealmente independientes en 0, entonces el álgebra de Lie de campos vectoriales de Killing es alguna de las siguientes:*

- (1) *de dimensión dos;*
- (2) *isomorfa a $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$;*
- (3) *isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;*
- (4) *en coordenadas adecuadas es generada por los campos vectoriales $x\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y aquellos de la forma $h(y)\partial/\partial x$, para las soluciones $h(y)$ de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes; o*
- (5) *∇ es plana.*

En particular, tiene dimensión menor o igual que cuatro si no es plana.

Con el fin de clasificar los modelos compactos de cada una éstas geometrías, estudiaremos todos los modelos globales compactos del Teorema 0.4.

Enunciaremos nuevamente el teorema principal de esta tesis:

Teorema 0.3. *Sea S una superficie compacta, orientable dotada con una conexión afín ∇ , C^∞ tal que el pseudogrupo de isometrías locales de ∇ actúa transitivamente sobre S . Entonces, ∇ es una de las siguientes:*

- *simétrica y plana (de curvatura constante 0),*
- *la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana (de curvatura constante distinta de cero) sobre S , o*
- *S es el cociente de \mathbb{R}^2 bajo la acción de una latiz y ∇ en S es inducida por una conexión invariante por traslaciones sobre \mathbb{R}^2 .*

1. La (G, \mathcal{M}) -estructura sobre S

Para globalizar el Teorema 0.4 en el Teorema 0.3, recurriremos a la teoría de las (G, X) -estructuras. Así, una (G, \mathcal{M}) -estructura sobre la superficie compacta y orientada S es un atlas para su estructura suave, tomando valores en S y cuyos cambios de coordenadas son restricciones de elementos de G .

Sea $G_0 \subset G$ el subgrupo correspondiente al álgebra \mathfrak{g}_0 de campos vectoriales que se anulan en el cero. Empezaremos probando el siguiente lema, remitirse a la Proposición 6.6 del Capítulo 1.

Lema 2. *La superficie S tiene un cubriente de Galois $\bar{\pi} : \bar{S} \rightarrow S$ de grado menor o igual a dos, con grupo de Galois $\text{Isom}^+(\nabla)/G$, una conexión ∇ sobre G/G_0 y una $(G, G/G_0)$ -estructura sobre \bar{S} .*

Demostración. De las hipótesis del Teorema 0.3, sabemos que S es una superficie dotada con una conexión ∇ que es el localmente homogénea en todas partes. En el Capítulo 3 de esta tesis obtuvimos \mathfrak{g}_0 y su correspondiente grupo de Lie G_0 , para cada uno de los casos que estamos analizando. Como G_0 es un subgrupo cerrado, tenemos, por la Proposición 6.6 del Capítulo 1, que existe un cubriente de Galois $\bar{\pi} : \bar{S} \rightarrow S$ cuyo grupo de Galois está dado por $G(\bar{S}) = \text{Isom}^+(\nabla)/G$.

Por otra parte, usando la Proposición 3.5 del Apéndice A, tenemos que $G(\bar{S}) = \pi_1(S, s_0)/\pi_1(\bar{S}, \tilde{s}_0)$, por lo que

$$(111) \quad \text{Isom}^+(\nabla)/G = \pi_1(S, s_0)/\pi_1(\bar{S}, \tilde{s}_0).$$

Recordemos además, que el grado del cubriente $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ es igual al índice del subgrupo $H(\tilde{s}_0) \subset \pi_1(S, s_0)$, donde $H(\tilde{s}_0)$ es la imagen del homomorfismo inducido $\pi_{\#} : \pi_1(\tilde{S}, \tilde{s}_0) \rightarrow \pi_1(S, s_0)$, tal que $s_0 = \pi(\tilde{s}_0)$.

Luego, de la Proposición 3.1 del Capítulo 3, y de la ecuación (111) tenemos los siguientes dos casos:

- si $\alpha \neq 2\gamma$ entonces $|\text{Isom}^+(\nabla)/G| = 1$. En este caso el grado del cubriente es 1;
- si $\alpha = 2\gamma$ entonces $|\text{Isom}^+(\nabla)/G| = 2$. Por lo tanto, para este caso el grado del cubriente es 2.

□

Por el lema anterior, el cubriente \bar{S} tiene una (G, \mathcal{M}) -estructura. Más aún, como \mathcal{M} tiene una foliación \mathcal{F}_0 que es preservada por el grupo de isometrías G , se sigue de la Proposición 6.4 del Capítulo 1, que \bar{S} admite también una foliación orientada (no singular) que es inducida por \mathcal{F}_0 . Luego, por el Teorema de índice de Poincaré-Hopf, \bar{S} es un toro, por lo tanto tiene característica de Euler $\chi(\bar{S}) = 0$. Denotaremos por d el grado del cubriente, entonces $\chi(\bar{S}) = d \cdot \chi(S)$. Del Lema 2 tenemos que $d \neq 0$, por lo que $\chi(S) = 0$. Por lo tanto, S es un toro. Se tiene entonces que salvo doble cubriente, S tiene una (G, \mathcal{M}) -estructura y una foliación \mathcal{F} inducida por \mathcal{F}_0 (ver Fig. 1).

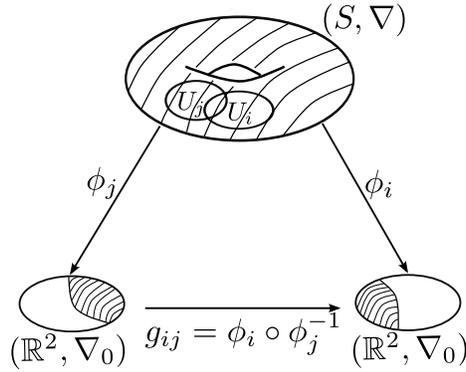


Figura 1. $(G, (\mathbb{R}^2, \nabla_0))$ -estructura sobre la superficie compacta y orientada S . Donde $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla_0)$ es el modelo, y g_{ij} pertenece al grupo de isometrías de la conexión. En este caso $G = \text{Isom}^+(\nabla_0)$.

Así, el grupo fundamental de S es un grupo abeliano en dos generadores. Tenemos una aplicación desarrollante $\mathcal{D} : \tilde{S} \rightarrow \mathcal{M}$ y un homomorfismo de holonomía $h : \pi_1(S) \rightarrow G$ que satisfacen, para cada $\nu \in \pi_1(S)$ y para cada $p \in \tilde{S}$, la relación (21).

2. La holonomía de S

Comenzaremos por investigar los homomorfismos de holonomía (los que dan todas las holonomías admisibles) y la correspondiente aplicación desarrollante complatible. Sea $g \in G$ tal que $\overline{\mathcal{D}} = g \cdot \mathcal{D}$ y $\overline{h} = ghg^{-1}$. Así,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}(\nu \cdot p) &= g\mathcal{D}(\nu \cdot p) \\ &= gh(\nu)\mathcal{D}(p) \\ &= gh(\nu)g^{-1}g\mathcal{D}(p) \\ &= \overline{h}(\nu)\overline{\mathcal{D}}(p). \end{aligned}$$

Es decir, $(\mathcal{D}, h) \sim (g\mathcal{D}, g\mathcal{D}g^{-1})$. Por lo tanto, entender los homomorfismos de holonomía $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow H \rtimes_{\Psi} K$, en nuestro caso particular, es buscar en el grupo las parejas que conmutan (salvo conjugación). Para esto utilizaremos el producto semidirecto de grupos (ver Cap. 1, Sec. 1.3).

Proposición 2.1. *Salvo doble cubriente, S es un toro y existen dos campos vectoriales de Killing conmutativos globalmente definidos de ∇ en S que son linealmente independientes casi en todas partes.*

Demostración. Para probar la proposición, vamos a mostrar en cada caso que hay un subgrupo de Lie abeliano de dimensión dos de G que contiene la imagen de la holonomía. Los generadores del álgebra de Lie de este grupo, propocionarán los campos vectoriales buscados.

Si ρ toma valores en H , los campos vectoriales X y Y son preservados bajo la acción de ρ y así, están bien definidos en S . En este caso, estos son lo que pueban la Proposición 2.1.

Si ρ toma valores en el grupo $I_{\mathcal{F}_0}$ generado por \mathfrak{k} y X (el álgebra de Lie de campos vectoriales preservando la foliación \mathcal{F}_0), la holonomía preserva la función coordenada $y : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x, y) \mapsto y$ (ver Fig. 2).

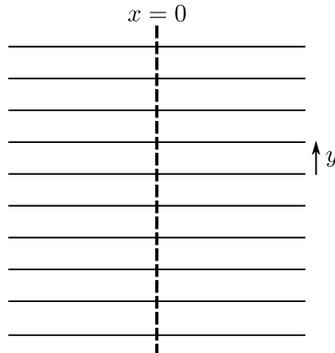


Figura 2. Curvas de nivel de y .

Hay así, una función $\bar{y} : S \rightarrow \mathbb{R}$ (inducida por y) la cual debe tener un máximo. Pero esto es imposible, pues \bar{y} es localmente modelada sobre la submersión y . Concluimos que tales homomorfismos no son aplicaciones de holonomía, porque no hay una aplicación desarrollante compatible.

Analizaremos ahora cuales son las parejas de elementos en G que conmutan salvo conjugación, usaremos la definición de producto semidirecto.

Sean $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in G$. Así,

$$\begin{aligned}(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) &= (h_1 + h_2, \Psi_{h_1}(k_2) + k_1); \\ (h_2, k_2) \cdot (h_1, k_1) &= (h_2 + h_1, \Psi_{h_2}(k_1) + k_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, (h_1, k_1) conmuta con (h_2, k_2) , si y sólo si,

$$(112) \quad \Psi_{h_1}(k_2) + k_1 = \Psi_{h_2}(k_1) + k_2.$$

Reordenando los términos de la ecuación (112), la condición para que los elementos de la forma $(h, k) \in G$ conmuten, en todos los casos, se expresa como

$$(113) \quad (\mathbf{1} - \Psi_{h_1})(k_2) = (\mathbf{1} - \Psi_{h_2})(k_1),$$

donde $\mathbf{1}$ representa la aplicación identidad.

Por otra parte, observemos que para las parejas de la forma $(0, q) \in G$, se tiene

$$\begin{aligned}(0, q) \cdot (h_1, k_1) \cdot (0, q)^{-1} &= (0, q) \cdot [(h_1, k_1) \cdot (0, -q)] \\ &= (0, q) \cdot (h_1, \Psi_{h_1}(-q) + k_1) \\ &= (h_1, \Psi_0(\Psi_{h_1}(-q) + k_1) + q) \\ &= (h_1, \Psi_{h_1}(-q) + k_1 + q) \\ (114) \quad &= (h_1, [\mathbf{1} - \Psi_{h_1}](q) + k_1).\end{aligned}$$

En consecuencia, si $(\mathbf{1} - \Psi_{h_1})$ es invertible, existe q tal que $(0, q)$ conjuga (h_1, k_1) a $(h_1, 0)$. Suponiendo que $(\mathbf{1} - \Psi_{h_1})$ es invertible, analizaremos las parejas $(h_1, 0), (h_2, k_2) \in G$.

$$\begin{aligned}(h_1, 0) \cdot (h_2, k_2) &= (h_1 + h_2, \Psi_{h_1}(k_2) + 0) \\ &= (h_1 + h_2, \Psi_{h_1}(k_2)); \\ (h_2, k_2) \cdot (h_1, 0) &= (h_2 + h_1, \Psi_{h_2}(0) + k_2) \\ &= (h_1 + h_2, k_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(h_1, 0)$ conmuta con (h_2, k_2) , si y sólo si, $\Psi_{h_1}(k_2) = k_2$, si y sólo si, $(\mathbf{1} - \Psi_{h_1})k_2 = 0$. Como $(\mathbf{1} - \Psi_{h_1})$ es invertible, se sigue que $k_2 = 0$. Por lo tanto, en este caso, las parejas en G que conmutan, salvo conjugación, son de la forma $\{(h_1, 0), (h_2, 0)\}$. Así, salvo conjugación, si $(\mathbf{1} - \Psi_{h_i})$ es invertible

para algún i , tenemos que ρ toma valores en H . Se sigue que, X y Y son preservados por la holonomía.

Nos quedan pendientes los casos en los que ninguno de los dos, $(\mathbf{1} - \Psi_{h_1})$ ó $(\mathbf{1} - \Psi_{h_2})$, son invertibles y donde la imagen de la holonomía no está en $I_{\mathcal{F}_0}$. Trataremos estos casos de acuerdo a la estructura de G , la cual es determinada por Δ , el discriminante de P .

Cuando $\Delta > 0$: Dos valores propios reales y distintos.

Vamos a suponer que $h_i = (s_i, t_i)$, $k_1 = (w_1, w_2)$ y $k_2 = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$. Así, para las parejas (h_i, k_i) tenemos que

$$(\mathbf{1} - \Psi_{h_i}) = \begin{pmatrix} 1 - e^{s_i - a_1 t_i} & 0 \\ 0 & 1 - e^{s_i - a_2 t_i} \end{pmatrix}$$

no es invertible. Esto implica que el determinante de la matriz $(\mathbf{1} - \Psi_{h_i})$ es

$$(115) \quad (e^{s_i - a_1 t_i} - 1)(e^{s_i - a_2 t_i} - 1) = 0.$$

Se sigue de la ecuación (115) que $e^{s_i - a_1 t_i} - 1 = 0$ ó $e^{s_i - a_2 t_i} - 1 = 0$. Luego, $s_i - a_1 t_i = 0$ ó $s_i - a_2 t_i = 0$. Obsérvese que $t_i \neq 0$, para algún i , ya que de lo contrario fijaríamos la coordenada y , la cual no es constante. Así, salvo las simetrías naturales podemos suponer que $t_1 \neq 0$ y que $s_1 = a_1 t_1$ (si h_1 y h_2 son cero tenemos las parejas de la forma $(0, 0, w_1, w_2)$ y $(0, 0, \bar{w}_1, \bar{w}_2)$, por lo que la holonomía toma valores en $I_{\mathcal{F}_0}$). Como $s_1 \neq a_2 t_1$, salvo una conjugación de la forma (114), podemos suponer que $w_2 = 0$; ya que si hacemos $q = \frac{-w_2}{1 - e^{s_1 - a_2 t_1}}$ tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \Psi_{h_1})(q) + k_1 &= \begin{pmatrix} 1 - e^{s_1 - a_1 t_1} & 0 \\ 0 & 1 - e^{s_1 - a_2 t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{s_1 - a_2 t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-w_2}{1 - e^{s_1 - a_2 t_1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, existe q tal que $(0, q)$ conjuga (s_1, t_1, w_1, w_2) a $(s_1, t_1, w_1, 0)$.

Analicemos ahora el resto de los casos:

1). Si $s_2 = a_1 t_2$, la condición (113) está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{(a_1 - a_2)t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{(a_1 - a_2)t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto es, $[1 - e^{(a_1 - a_2)t_1}] \bar{w}_2 = 0$, lo que implica $\bar{w}_2 = 0$. Tenemos entonces que $(s_1, t_1, w_1, w_2) \mapsto (a_1 t_1, t_1, w_1, 0)$ y $(s_2, t_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2) \mapsto (a_1 t_2, t_2, \bar{w}_1, 0)$.

Es decir, existe un homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow H \ltimes_{\Psi} K$ dado por

$$(116) \quad \Phi(\xi, \zeta) = ((a_1\xi, \xi), (\zeta, 0)),$$

correspondiente a la subálgebra abeliana de dimensión dos de \mathfrak{g} generada por $a_1X + Y$ y Z_1 . Para mostrar que estos dos campos vectoriales son conmutativos, basta calcular su corchete de Lie y ver que éste es igual a cero.

Para los siguientes cálculos utilizaremos los resultados que obtuvimos en la ecuación (57) del Capítulo 2. En este caso los campos vectoriales son: $X = x\partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$, $Z_1 = e^{a_1y}\partial/\partial x$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} [a_1X + Y, Z_1] &= a_1[X, Z_1] + [Y, Z_1] \\ &= -aZ_1 + aZ_1 = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que los campos vectoriales $a_1X + Y$ y Z_1 son diferenciables en cada punto de $p \in \mathcal{M}$, la matriz de la aplicación lineal asociada a estos campos es la matriz jacobiana de los campos en el punto p . Así, mostrar que $a_1X + Y$ y Z_1 son linealmente independientes, se reduce a calcular el determinante de la matriz jacobiana y ver cuando este determinante es distinto de cero. Para este caso el determinante de la matriz es

$$\begin{vmatrix} a_1x & 1 \\ e^{a_1y} & 0 \end{vmatrix} = -e^{a_1y}$$

el cual nunca se anula.

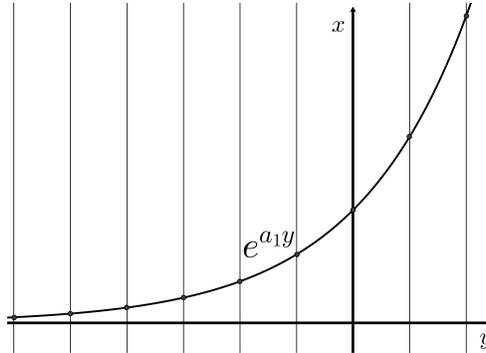


Figura 3. Foliación \mathcal{F}_0 transversal a la curva $x = e^{a_1y}$.

Por lo tanto, para este caso los dos campos vectoriales $a_1X + Y$ y Z_1 son linealmente independientes en todas partes. Tenemos que $(h_1, k_1) = \Phi(t_1, w_1)$ y $(h_2, k_2) = \Phi(t_2, \bar{w}_1)$. La acción correspondiente de \mathbb{R}^2 sobre \mathcal{M} es libre y transitiva.

2). Si $s_2 = a_2 t_2$, la condición (114) se escribe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{(a_1 - a_2)t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{(a_2 - a_1)t_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así, $[1 - e^{(a_1 - a_2)t_1}]\bar{w}_2 = 0$ (en consecuencia $\bar{w}_2 = 0$) y $[1 - e^{(a_2 - a_1)t_2}]w_1 = 0$. Si $t_2 = 0$, $(h_1, k_1) = \Phi(t_1, w_1)$ y $(h_2, k_2) = \Phi(t_2, \bar{w}_1)$ para el morfismo (116). Si $t_2 \neq 0$, $w_1 = 0$. Así, $(s_1, t_1, w_1, w_2) \mapsto (a_1 t_1, t_1, 0, 0)$, esto implica que (h_1, k_1) es el flujo de $a_1 X + Y$ en tiempo t_1 y que, para $c = \bar{w}_1(a_1 - a_2)/(1 - e^{(a_2 - a_1)t_2})$, (h_2, k_2) es el flujo de $a_2 X + Y + cZ_1$ en tiempo t_2 . A continuación calcularemos el corchete de Lie de estos dos campos vectoriales para mostrar que conmutan.

$$\begin{aligned} [a_1 X + Y, a_2 X + Y + cZ_1] &= a_1 a_2 [X, X] + a_1 [X, Y] + a_1 c [X, Z_1] \\ &\quad + a_2 [Y, X] + [Y, Y] + c [Y, Z_1] \\ &\quad - a_2 a_1 [X, X] - a_2 [X, Y] - a_1 [Y, X] \\ &\quad - [Y, Y] - ca_1 [Z_1, X] - c [Z_1, Y] \\ &= -a_1 c Z_1 + ca_1 Z_1 - ca_1 Z_1 + ca_1 Z_1 = 0. \end{aligned}$$

Además, como el determinante de la matriz jacobiana esta dado por

$$\begin{vmatrix} a_1 x & 1 \\ a_2 x + ce^{a_1 y} & 1 \end{vmatrix} = a_1 x - a_2 x - ce^{a_1 y},$$

se sigue que los campos vectoriales $a_1 X + Y$ y $a_2 X + Y + cZ_1$ son linealmente independientes en el complemento de la curva C_0 dada por $(a_1 - a_2)x = ce^{a_1 y}$.

Cuando $\Delta < 0$: Dos valores propios complejos.

Sabemos que

$$[\mathbf{1} - \Psi_{h_i}] = \begin{pmatrix} 1 - e^{s_i - at_i} \cos(t_i) & -e^{s_i - at_i} \sen(t_i) \\ e^{s_i - at_i} \sen(t_i) & 1 - e^{s_i - at_i} \cos(t_i) \end{pmatrix}$$

no es invertible, si y sólo si, su determinante es igual con cero. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 0 &= [1 - e^{s_i - at_i} \cos(t_i)]^2 + [e^{s_i - at_i} \sen(t_i)]^2 \\ &= 1 - 2e^{s_i - at_i} \cos(t_i) + e^{2(s_i - at_i)} \cos^2(t_i) + e^{2(s_i - at_i)} \sen^2(t_i) \\ &= 1 - 2e^{s_i - at_i} \cos(t_i) + e^{2(s_i - at_i)} \\ (117) \quad &= \left(1 - e^{(s_i - at_i)}\right)^2 + 2e^{(s_i - at_i)} (1 - \cos(t_i)). \end{aligned}$$

La última igualdad (117) debe eliminarse término a término, así $t_i = 2\pi m_i$ con $m_i \in \mathbb{Z}$, y $s_i = at_i$. Por lo tanto, el hecho que $[\mathbf{1} - \Psi_{h_i}]$ no es invertible equivale a hacer $h_i = (2a\pi m_i, 2\pi m_i)$, para algún $m_i \in \mathbb{Z}$.

Recordemos de la Proposición 1.13 del Capítulo 3, que la acción de \mathbb{R}^2 sobre \mathcal{M} , para este caso (el caso complejo) viene dada por

$$(118) \quad (h_1, k_1) \cdot (x, y) \mapsto \begin{aligned} & (xe^{2a\pi m_1} + e^{a(y+2\pi m_1)} \cos(y + 2\pi m_1)w_1 \\ & + e^{a(y+2\pi m_1)} \operatorname{sen}(y + 2\pi m_1)w_2, y + 2\pi m_1); \end{aligned}$$

$$(119) \quad (h_2, k_2) \cdot (x, y) \mapsto \begin{aligned} & (xe^{2a\pi m_2} + e^{a(y+2\pi m_2)} \cos(y + 2\pi m_2)\bar{w}_1 \\ & + e^{a(y+2\pi m_2)} \operatorname{sen}(y + 2\pi m_2)\bar{w}_2, y + 2\pi m_2). \end{aligned}$$

Utilizaremos la suma de ángulos para el seno y el coseno:

$$(120) \quad \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b);$$

$$(121) \quad \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b).$$

Se sigue de las identidades trigonométricas (120) y (121) que para m_i con $i = 1, 2$:

$$(122) \quad \cos(y + 2\pi m_i) = \cos(y);$$

$$(123) \quad \operatorname{sen}(y + 2\pi m_i) = \operatorname{sen}(y).$$

Sustituyendo (122) y (123) en la acción (118), y factorizando $e^{2a\pi m_1}$, esta acción sobre \mathcal{M} se convierte en

$$(124) \quad (h_1, k_1)(x, y) \mapsto (e^{2a\pi m_1}[x + e^{ay}(\cos(y)w_1 + \operatorname{sen}(y)w_2)], y + 2\pi m_1);$$

Sean $n = \operatorname{mcd}(m_1, m_2)$ entonces $m_1 = \ell_1 n$ para algún $\ell_1 \in \mathbb{Z}$ y $m_2 = \ell_2 n$ para algún $\ell_2 \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} y + 2\pi m_i &= y + 2\pi \ell_i n \\ &= y \pmod{2\pi n}. \end{aligned}$$

Así, la función

$$\begin{aligned} [y] : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}/2m\pi\mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto [y] \end{aligned}$$

está bien definida, es sobreyectiva, es constante sobre las hojas e invariante por holonomía. Además, induce la función $\overline{[y]} : S \rightarrow \mathbb{R}/2m\pi\mathbb{Z}$ cuyas curvas nivel son uniones de las hojas de la foliación \mathcal{F} .

Sea $V_1 = (h_1, k_1) = (s_1, t_1, w_1, w_2)$ y $V_2 = (h_2, k_2) = (s_2, t_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2)$ entonces

$$(125) \quad \ell_2 V_1 - \ell_1 V_2 = (0, 0, \ell_2 w_1 - \ell_1 \bar{w}_1, \ell_2 w_2 - \ell_1 \bar{w}_2).$$

Con esto nos queda que no podemos tener parejas de la forma $(0, 0, w_1, w_2)$. Si $m_1 = 0$ entonces las hojas son cerradas,

$$(126) \quad (x, y) \mapsto (x + e^{ay}(\cos(y)\bar{w}_1 + \operatorname{sen}(y)\bar{w}_2), y).$$

Como $m_2 \neq 0$ y S es conexa, $y(\mathcal{D}(\tilde{S})) = \mathbb{R}$. Sea y_0 tal que, $\cos(y_0)w_2 + \operatorname{sen}(y_0)\bar{w}_2 = 0$. Cualquier punto de la forma (x, y_0) es fijado por (h_2, k_2) . Sea L_0 la hoja de la foliación \mathcal{F}_0 tal que $y(L_0) = y_0$ y sea L su imagen en S .

Esta es una geodésica cerrada. Sea $\nu \in \pi_1(S)$ el elemento correspondiente a L . Para $p \in L_0$, tenemos la relación (21). Aplicando y a ambos lados de esta ecuación, concluimos que la acción de $\rho(\nu)$ sobre \mathcal{M} no cambia el valor de y , y así $\rho(\nu)$, que pertenece al grupo generado por (h_2, k_2) , es trivial. Sin embargo, $\mathcal{D}|_{\pi^{-1}(L)} : \pi^{-1}(L) \rightarrow L_0$ es la aplicación desarrollante de una geodésica cerrada y su holonomía no puede ser trivial. Esta contradicción demuestra que no hay modelos compactos en este caso.

Cuando $\Delta = 0$: Dos valores propios reales e iguales.

Análogamente a los dos casos anteriores, el hecho que

$$[1 - \Psi_{h_i}] = \begin{pmatrix} 1 - e^{s_i - at_i} & -t_i e^{s_i - at_i} \\ 0 & 1 - e^{s_i - at_i} \end{pmatrix}.$$

es invertible, equivale a que su determinante es cero. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - e^{s_i - at_i}) \cdot (1 - e^{s_i - at_i}) - 0 \cdot (-t_i e^{s_i - at_i}) \\ &= (1 - e^{s_i - at_i})^2. \end{aligned}$$

Luego, $s_i = at_i$. En particular, $h_1 = (s_1, at_1)$ con $t_1 \neq 0$ (pues si h_1 y h_2 son cero, la holonomía toma valores sobre $I_{\mathcal{F}_0}$). La condición (113) se escribe

$$\begin{pmatrix} 0 & -t_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

esto es, $t_1 \bar{w}_2 = t_2 w_2$.

Para $c \in \mathbb{R}$, hay un homomorfismo de grupos de Lie $\Phi_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$ dado por

$$(127) \quad \Phi_c(\xi, \zeta) = ((a\xi, \xi), (\zeta - \frac{1}{2}c\xi^2, c\xi)),$$

correspondiente a la subálgebra de Lie de \mathfrak{g} generada por $aX + Y + cZ_2$ y Z_1 . Análogamente a los dos casos anteriores, verificaremos a continuación que estos dos campos vectoriales comuntan.

$$\begin{aligned} [aX + Y + cZ_2, Z_1] &= a[X, Z_1] + [Y, Z_1] + c[Z_2, Z_1] \\ &\quad - a[Z_1, X] - [Z_1, Y] - c[Z_1, Z_2] \\ &= -aZ_1 + aZ_1 - aZ_1 + aZ_1 = 0. \end{aligned}$$

Calculando el determinante de la matriz jacobiana tenemos que

$$\begin{vmatrix} ax + cy e^{ay} & 1 \\ e^{ay} & 0 \end{vmatrix} = -e^{ay},$$

el cual nunca se anula. Por lo tanto, para este caso los campos vectoriales $aX + Y + cZ_2$ y Z_1 son linealmente independientes en todas partes. La acción correspondiente de \mathbb{R}^2 sobre \mathcal{M} es libre y transitiva.

Tenemos

$$\begin{aligned} (h_1, k_1) &= \Phi_c(t_1, w_1 + \frac{1}{2}ct_1^2); \\ (h_2, k_2) &= \Phi_c(t_2, \bar{w}_1 + \frac{1}{2}ct_2^2), \quad \text{para } c = w_2/t_1. \end{aligned}$$

Así, encontramos en cada caso admisible, una pareja de campos vectoriales en \mathcal{M} los cuales conmutan y son linealmente independientes en todas partes o en el complemento de una curva C_0 .

Estos campos vectoriales son por definición invariantes por holonomía. Ellos inducen, vía la aplicación cubriente $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ y la aplicación desarrollante $\mathcal{D} : \tilde{S} \rightarrow \mathcal{M}$, dos campos vectoriales globalmente definidos y conmutativos en S . Esto finaliza la prueba. \square

3. Demostración del Teorema principal

Demostraremos ahora el Teorema 0.3, para la familia de conexiones (39), en el caso donde el cubriente S producido por el Lema 2, es trivial. En particular, cuando $G = \text{Isom}^+(\nabla_0)$. De la proposición 2.1 sabemos que existen dos campos vectoriales de Killing conmutativos sobre \mathcal{M} invariantes por holonomía, los cuales son linealmente independientes en todas partes o en el complemento de una curva C_0 . La curva $\mathcal{D}^{-1}(C_0)$ en \tilde{S} es invariante por las transformaciones de cubierta e induce una curva compacta C (no necesariamente conexa) sobre S (ver Fig. 4), donde los campos vectoriales que inducen la acción sobre \mathbb{R}^2 tienen rango menor que dos.

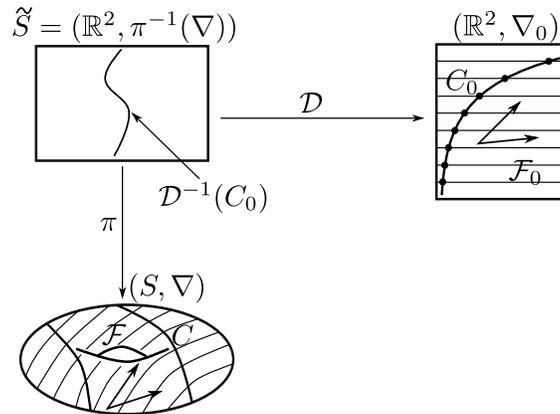


Figura 4. Encontramos vía la aplicación cubriente π y la aplicación desarrollante \mathcal{D} , dos campos vectoriales en S que son conmutativos y linealmente independientes en el complemento de una curva C .

Nuestro objetivo es probar que C es vacía, esto es, que la imagen de \mathcal{D} no interseca a C_0 . Esto implicaría que la acción de \mathbb{R}^2 sobre S es localmente

libre. De la demostración de la Proposición 2.1, hay dos situaciones donde C_0 es no vacía. En ambos casos, C_0 es de la forma $x = f(y)$ para alguna función f . En consecuencia, cada hoja de \mathcal{F}_0 (curva de nivel de y) interseca a un único punto de C_0 .

Cortamos S a lo largo de C para obtener un número finito de variedades conexas con frontera. Sea Ω una variedad de ese tipo. Como C es transversal a \mathcal{F} , por el teorema de índice de Poincaré-Hopf, Ω es un cilindro y tiene dos componentes \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 en la frontera, componentes conexas de C .

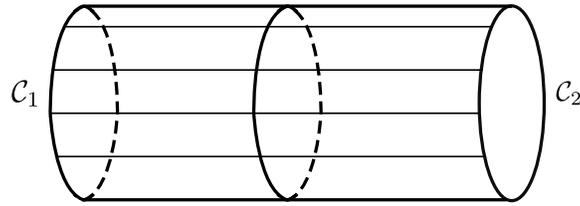


Figura 5. Encontramos vía la aplicación cubriente π y la aplicación desarrollante \mathcal{D} , dos campos vectoriales en S que son conmutativos y linealmente independientes en el complemento de una curva C .

Sea V un campo vectorial auxiliar que no se anula en ninguna parte, tangente a la foliación orientada \mathcal{F} y tal que, a lo largo de \mathcal{C}_1 , señala hacia adentro. Ninguna curva de \mathcal{F} que comienza en \mathcal{C}_1 puede intersectar nuevamente a \mathcal{C}_1 , porque lo haría señalando hacia fuera. Ninguna curva de \mathcal{F} comenzando en \mathcal{C}_1 puede intersectar a \mathcal{C}_2 , pues esto implicaría que una hoja de \mathcal{F}_0 interseca a C_0 dos veces. Así, cada órbita que empieza en \mathcal{C}_1 se acumula a algún subconjunto de Ω . Por el teorema de Poincaré-Bendixon, este conjunto límite contiene una órbita cerrada \mathcal{O} de \mathcal{F} . Además, \mathcal{O} y \mathcal{C}_1 son ambas, curvas cerradas simples generando la holonomía de Ω . Sea γ un generador del grupo fundamental de Ω . Por un lado, como γ es homóloga a \mathcal{C}_1 , la holonomía de γ debe actuar sin puntos fijos en C_0 . Por otro lado, como γ es homóloga a \mathcal{O} , su holonomía debe preservar la hoja L de \mathcal{F}_0 correspondiente a \mathcal{O} , y debe fijar el punto $L \cap \mathcal{O}$. Esta contradicción demuestra que C es vacía.

Nos ocuparemos ahora del caso donde el cubriente de S no es trivial. De la Proposición 3.1 (Cap. 3) y el Lema 2, existe un subconjunto abierto conexo $\Omega \subset \mathcal{M}$ y un grupo $\Gamma \subseteq \text{Isom}^+(\nabla_0)$ actuando propiamente discontinua sobre Ω cuyo cociente es S . Existe un subgrupo $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ tal que el índice $[\Gamma : \bar{\Gamma}] = 2$ y tal que $\bar{\Gamma} \subset G$. Tenemos $\bar{S} = \Omega/\bar{\Gamma}$ y un doble cubriente natural $\pi : \bar{S} \rightarrow S$. Sea $\zeta \in \Gamma \setminus G$. La orientación de \mathcal{M} es preservada por ζ pero la de \mathcal{F} no lo es. Dado que ζ es conjugada a la isometría σ de la Proposición 3.1 (del Capítulo 2), tiene un punto fijo en \mathcal{M} . El caso $\Omega = \mathcal{M}$ debe ser excluido, ya que Γ debe actuar sin puntos fijos en \mathcal{M} . En los otros casos, Ω es el complemento

de la curva C_0 dada por $x = f(y)$ para algún f . Esto nos dice que cada hoja de \mathcal{F}_0 intersecta a C_0 . Pero ζ no puede invertir la orientación de \mathcal{F} y al mismo tiempo preservar Ω . Concluimos que estos casos no suceden y que el cubriente finito dado por el Lema 2 es en efecto, trivial. Esto finaliza la demostración del Teorema 0.3 para la familia de conexiones (39).

Espacios cubrientes

1. Homotopía y grupo fundamental

Definición 1.1. Sean X y Y espacios topológicos. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ se dicen *aplicaciones homotópicas* cuando existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. La aplicación H se llama *homotopía* entre f y g , y se denota por $H : f \simeq g$, o simplemente $f \simeq g$.

Dar una homotopía equivale a definir una familia continua a un parámetro $(H_t)_{t \in I}$ de aplicaciones de X en Y , es decir, la aplicación asociada $(x, t) \rightarrow H_t(x)$ es una aplicación continua. Tenemos $H_0 = f$ y $H_1 = g$ de manera que la familia $(H_t)_{t \in I}$ comienza con f y termina con g . Una *relación de homotopía*, $f \simeq g$, es una equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y . Las clases de equivalencia según la relación de homotopía son llamadas *clases de homotopía* y se denotan por $[f]$.

En lo que sigue, supondremos que nuestros caminos están definidos en el intervalo unitario $I = [0, 1]$, y nos interesarán los *caminos cerrados*: aquellos en los que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Un camino cerrado $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ que comienza y termina en x_0 , será llamado *camino cerrado con base en el punto x_0* o *lazo basado en x_0* . Las homotopías serán relativas a ∂I . El conjunto $\pi_1(X, x_0)$ formado por las clases de homotopías de lazos basados en x_0 , constituyen un grupo llamado el *grupo fundamental* del espacio X con base en el punto x_0 . El elemento neutro de este grupo es la clase de homotopía $\varepsilon = \varepsilon_{x_0}$ del camino constante en el punto x_0 . Supondremos que el lector está familiarizado con el concepto de grupo fundamental.

Indicaremos siempre con $\gamma = [c]$ la clase de homotopía del camino $c : I \rightarrow X$, esto es, el conjunto de todos los caminos en X que poseen las mismas extremidades que c y que son homotópicos a c con extremos fijos durante la homotopía.

Proposición 1.2. *Si x_0 y x_1 pertenecen a la misma componenete conexa por caminos de X , entonces $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos. Más precisamente, cada clase de homotopía γ de caminos que conectan x_0 con x_1 inducen un isomorfismo $\bar{\gamma} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.*

Demostración. Sea $\gamma = [c]$ la clase de equivalencia de caminos que conectan x_0 con x_1 . Sea α un lazo basado en x_1 , es decir, $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$. Tenemos entonces que $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ es un lazo basado en x_0 . Obsérvese además que $\bar{\gamma}(\alpha\beta) := \gamma\alpha\beta\gamma^{-1} = (\gamma\alpha\gamma^{-1})(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \bar{\gamma}(\alpha)\bar{\gamma}(\beta)$ por lo que $\bar{\gamma}$ es un homomorfismo. Como $\alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma$ es un inverso bilateral para $\bar{\gamma}$, concluimos que $\bar{\gamma}$ es un isomorfismo. \square

Corolario 1.3. *Si X es conexo por caminos entonces para cualesquiera puntos básicos x_0 y x_1 en X , los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos.*

En general no existe un isomorfismo natural entre los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$. Si variamos la clase γ , el isomorfismo $\bar{\gamma}$ generalmente varía también. El grupo $\pi_1(X, x_0)$ depende de la componente conexa por caminos en el punto x_0 y no del espacio X .

2. Espacios cubrientes

La noción de cubriente proporciona condiciones para la continuación analítica, esta última es un instrumento clásico para saber si un homomorfismo local es global. Sean \tilde{X} y X espacios topológicos y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación entre estos dos espacios. Decimos que un subconjunto abierto $U \subset X$ está *cubierto parejamente* o *uniformemente cubierto* por p si $p^{-1}(U) = \sqcup V_j$ es la unión disjunta de abiertos V_j de \tilde{X} , llamados *hojas*, tal que $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo para cada j .

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico. Un *espacio cubriente* de X es una pareja (\tilde{X}, p) que consiste de un espacio topológico \tilde{X} y una aplicación suprayectiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ con la propiedad de que para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U_x de X cubierta parejamente por p .

De la definición se puede observar que la aplicación cubriente p es continua, abierta y un homeomorfismo local del *espacio total* o *espacio cubriente* \tilde{X} sobre el *espacio base* X . Para cada $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x)$ se llama *fibra* sobre x y su cardinalidad es el *número de hojas* u *orden* del cubriente.

Proposición 2.2. Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación cubriente y el espacio base X es conexo, entonces todas las fibras $p^{-1}(x)$, $x \in X$, tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Para todos los puntos x de una vecindad U cubierta parejamente por p , la cardinalidad de la fibra $p^{-1}(x)$ es la misma. Luego, el conjunto de los puntos $x \in X$ tales que $p^{-1}(x)$ tiene la misma cardinalidad, es abierto. Esto determina una descomposición de X como unión de abiertos disjuntos, en cada uno de los cuales la cardinalidad de $p^{-1}(x)$ es constante. Como X es conexo, solo puede existir uno de esos abiertos. \square

Otra manera de verlo es mediante la función que asocia a cada punto x la cardinalidad de la fibra $p^{-1}(x)$, podemos notar que esta función es localmente constante, por lo que, si X es conexo, todas las fibras tienen la misma cardinalidad.

Definición 2.3. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un cubriente y $f : Y \rightarrow X$ una función continua. Un *levantamiento* de f con respecto a p es una aplicación $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$(128) \quad \begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

2.1. Espacios cubrientes y grupo fundamental. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos induce un homomorfismo $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ definido por $f_{\#}(\alpha) = [f \circ \alpha]$, donde $\alpha = [a]$. Podemos ver que $f_{\#}$ está bien definido ya que si $a \cong a'$ entonces $f \circ a \cong f \circ a'$. Como $f \circ (ab) = (f \circ a)(f \circ b)$ se tiene que $f_{\#}(\alpha\beta) = f_{\#}(\alpha)f_{\#}(\beta)$, por tanto, $f_{\#}$ es un homomorfismo. Si además de ser continua, $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, se puede verificar que $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.

Dada una aplicación cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$, sea $x \in X$ con $x = p(\tilde{x})$. Denotaremos por $H(\tilde{x})$ la imagen del homomorfismo inducido por la aplicación cubriente $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$. Observemos que

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}) &= \{ \alpha \in \pi_1(X, x) \mid \alpha = p_{\#}(\tilde{\alpha}) \text{ para algún } \tilde{\alpha} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \} \\ &= \{ \alpha \in \pi_1(X, x) \mid [a] = [p \circ \tilde{a}], \text{ donde } \alpha = [a] \text{ y } \tilde{\alpha} = [\tilde{a}] \} \end{aligned}$$

consiste de las clases de homotopía de lazos basados en x , cuyo levantamiento a \tilde{X} son lazos basados en \tilde{x} . Por teoría de grupos sabemos que $H(\tilde{x})$ es un subgrupo de $\pi_1(X, x)$, veremos en este capítulo que $H(\tilde{x})$ es la pieza más importante para caracterizar el cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

Proposición 2.4. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Para cualquier $x_0 \in X$ tal que $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, el homomorfismo inducido $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.*

Demostración. Para mostrar la inyectividad veremos que el $\ker p_{\#}$ es trivial. Sea $\tilde{\alpha} \in \ker p_{\#}$ entonces $p_{\#}(\tilde{\alpha}) = [p \circ \tilde{\alpha}] \simeq [\varepsilon_{x_0}]$ es homotópico al lazo trivial basado en x_0 . Así, cualquier levantamiento $\tilde{\alpha}$ basado en \tilde{x}_0 , es homotópico al lazo trivial \tilde{x}_0 . \square

A continuación veremos que si \tilde{X} es conexo por caminos, entonces cuando \tilde{x} recorre la fibra $p^{-1}(x_0)$, la imagen $H(\tilde{x}) = p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ describe toda la clase de conjugación del subgrupo $H(\tilde{x}_0)$.

Lema 3. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación cubriente con \tilde{X} conexo por caminos. Considere los puntos $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, si $\tilde{\gamma}$ es una trayectoria con punto inicial \tilde{x}_0 y punto final \tilde{x}_1 , entonces $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = \gamma p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\gamma^{-1}$.*

Demostración. Si \tilde{X} es conexo por trayectorias entonces para cualquier $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ existe un camino \tilde{c} en \tilde{X} que comienza en \tilde{x} y termina en \tilde{x}_0 . De manera que $c = p \circ \tilde{c}$ es un camino cerrado en X con base en el punto x_0 . Recordemos de la Proposición 1.2 que todo elemento $\alpha \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ es de la forma $\alpha = [\tilde{c}\tilde{\beta}\tilde{c}^{-1}]$ con $\tilde{\beta} = [\tilde{b}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Luego $p_{\#}(\alpha) = \gamma p_{\#}(\tilde{\beta})\gamma^{-1}$ donde $\gamma = [c]$. Se tiene entonces que $H(\tilde{x}) = \gamma \cdot H(\tilde{x}_0) \cdot \gamma^{-1}$. Recíprocamente, sea $H = \gamma \cdot H(\tilde{x}_0) \cdot \gamma^{-1}$ cualquier subgrupo conjugado de $H(\tilde{x}_0)$ en $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Escribimos $\gamma = [c]$. Levantando el camino cerrado c^{-1} a partir del punto \tilde{x}_0 , obtenemos un camino \tilde{c}^{-1} en \tilde{X} cuyo punto final llamaremos \tilde{x} . Entonces $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ y el camino \tilde{c} en \tilde{X} comienza en el punto \tilde{x} y termina en \tilde{x}_0 , con $p \circ \tilde{c} = c$. por lo que acabamos de ver, esto nos da $H(\tilde{x}) = \gamma \cdot H(\tilde{x}_0) \cdot \gamma^{-1}$ y por lo tanto $H = H(\tilde{x})$. \square

Proposición 2.5. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación cubriente con \tilde{X} conexo por caminos. Para cada $x \in X$, el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ actúa por la derecha transitivamente en la fibra $p^{-1}(x)$. El grupo de isotropía de cada punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ es el subgrupo $H(\tilde{x}) = p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.*

Demostración. Dados $\gamma \in \pi_1(X, x)$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Consideremos la aplicación $\sigma : p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \rightarrow p^{-1}(x)$ que manda $(\tilde{x}, \gamma) \mapsto \tilde{x} \cdot \gamma = \tilde{\gamma}(1)$, donde $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ basado en \tilde{x} . Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x)$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, observemos que

$$(129) \quad \tilde{x} \cdot (\gamma_1\gamma_2) = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$$

donde $\tilde{\gamma}_1$ es el levantamiento de γ_1 basado en \tilde{x} y $\tilde{\gamma}_2$ es el levantamiento de γ_2 basado en $\tilde{\gamma}_1(1)$. Por otra parte,

$$(130) \quad (\tilde{x} \cdot \gamma_1)\gamma_2 = \tilde{\gamma}_1(1) \cdot \gamma_2 = \tilde{\gamma}_2(1).$$

De las ecuaciones (129) y (130) se sigue que $\tilde{x} \cdot (\gamma_1\gamma_2) = (\tilde{x} \cdot \gamma_1)\gamma_2$. Tenemos además que $\tilde{x} \cdot \varepsilon_x = \tilde{\varepsilon}_x(1) = \varepsilon_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$ donde $\varepsilon_{\tilde{x}}$ es el levantamiento del camino constante ε_x basado en \tilde{x} . Sigue de lo anterior que la aplicación $\sigma : p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \rightarrow p^{-1}(x)$ es una acción derecha del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ sobre la fibra $p^{-1}(x)$.

La transitividad resulta de ser \tilde{X} conexo por caminos: dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(x)$, sea $\tilde{\gamma}$ un camino en \tilde{X} que comienza en \tilde{x} y termina en \tilde{y} . Entonces $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ es un camino cerrado en X con base en el punto x . Sea $\gamma = [c]$. Se sigue que $\tilde{x} \cdot \gamma = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{y}$.

Tomemos $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y analicemos el grupo de isotropía de \tilde{x} :

$$\begin{aligned} G_{\tilde{x}} &= \{\gamma \in \pi_1(X, x) \mid \tilde{x} \cdot \gamma = \tilde{x}\} \\ &= \{\gamma \in \pi_1(X, x) \mid \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}\} \subset H(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Es decir, el grupo de isotropía de un $\tilde{x} \in \tilde{X}$, es el conjunto de lazos γ basados en x cuyo levantamiento $\tilde{\gamma}$ está basado en \tilde{x} y tiene punto final \tilde{x} . Podemos ver entonces que un elemento del grupo de isotropía es también un elemento de la imagen de $p_{\#}$. Por otra parte, la imagen del homomorfismo inducido $H(\tilde{x})$ está dada por

$$H(\tilde{x}) = \{\gamma \in \pi_1(X, x) \mid p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \text{ para algún } \tilde{\gamma} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})\} \subset G_{\tilde{x}}.$$

Es decir, el conjunto de lazos γ basados en x cuyo levantamiento $\tilde{\gamma}$ está basado en \tilde{x} . Sigue entonces, que el grupo de isotropía $G_{\tilde{x}}$, de cada punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$, es la imagen $H(\tilde{x})$ del homomorfismo inducido $p_{\#}$. \square

En la Proposición 1.4 del Capítulo 1 vimos que la órbita de un punto bajo la acción de un grupo está en biyección con el cociente del grupo módulo el estabilizador del punto. Esto junto con la proposición anterior nos permite dar el siguiente corolario.

Corolario 2.6. *Si \tilde{X} es conexo por caminos entonces para cualquier $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $x = p(\tilde{x})$, el número de hojas de p es igual al índice del subgrupo $H(\tilde{x}) \subset \pi_1(X, x)$.*

Recordemos que un espacio topológico X es *simplemente conexo* cuando es conexo por caminos y su grupo fundamental es el grupo trivial.

Corolario 2.7. *Si \tilde{X} es simplemente conexo entonces el número de hojas del cubriente es igual al número de elementos de $\pi_1(X, x)$. Cuando esos dos números son finitos, la igualdad entre ellos implica \tilde{X} simplemente conexo.*

Las permutaciones de la fibra $p^{-1}(x)$ de la forma $\tilde{x} \mapsto \tilde{x} \cdot \gamma$, donde $\gamma \in \pi_1(X, x)$ constituyen un grupo $\mathcal{M}(x)$, llamado el *grupo de monodromía* o *transformaciones de cubierta* de la aplicación cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ en el

punto x . Para todo $x \in X$, \mathcal{M} es una imagen homomorfa de $\pi_1(X, x)$. Más precisamente, se tiene

$$\mathcal{M}(x) = \pi_1(X, x)/H_0, \quad \text{donde} \quad H_0 = \bigcap_{p(\tilde{x})=x} H(\tilde{x}).$$

2.2. El teorema fundamental del levantamiento. Recordemos que un espacio es *localmente conexo por caminos* si posee una base de vecindades formada por subconjuntos conexos por trayectorias. Daremos a continuación una de las propiedades principales de los espacios cubrientes, que es la de levantar *caminos*.

Veremos en el siguiente enunciado, cómo el grupo fundamental permite que se dé una respuesta algebraica al problema topológico de saber si una aplicación continua admite un levantamiento.

Teorema 2.8 (Existencia de los levantamientos). *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación cubriente con X conexo por caminos. Sea Y un espacio conexo y localmente conexo por caminos (luego conexo por caminos) y $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ una aplicación continua. Dado $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, a fin de que f posea un levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ es necesario y suficiente que $f_{\#}\pi_1(Y, y_0) \subset H(\tilde{x}_0)$.*

Diremos que una aplicación continua y sobreyectiva $f : X \rightarrow Y$ goza de la *propiedad de levantamiento de caminos* cuando, dados arbitrariamente un camino $a : I \rightarrow Y$ y un punto $x \in X$ tal que $f(x) = a(0)$, existe un camino $\tilde{a} : I \rightarrow X$ tal que $\tilde{a}(0) = x$ y $f \circ \tilde{a} = a$. El siguiente corolario nos dice porqué los caminos pueden siempre ser levantados.

Corolario 2.9. *Sea X conexo por caminos y Z simplemente conexo y localmente conexo por caminos. Toda aplicación continua $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ admite un levantamiento $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, donde $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ es escogido arbitrariamente.*

Teorema 2.10 (Unicidad de los levantamientos). *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación cubriente y Z un espacio conexo. Sean $\tilde{g}, \hat{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{g} = p \circ \hat{g} = g$ entonces, o $\tilde{g}(z) = \hat{g}(z)$ para todo $z \in Z$ ó $\tilde{g} = \hat{g}$.*

Demostración. Sea $A = \{z \in Z \mid \tilde{g}(z) = \hat{g}(z)\}$. Tomemos un punto $a \in A$, luego, $\tilde{g}(a) = \hat{g}(a)$. Como p es localmente inyectiva $\tilde{g}(a) = \hat{g}(a) \in \tilde{X}$ tiene una vecindad V tal que $p|_V$ es inyectiva. Por la continuidad de \tilde{g} y \hat{g} existe una vecindad U de a tal que $\tilde{g}(U) \subset V$ y $\hat{g}(U) \subset V$. Entonces para todo $z \in U$ tenemos que $p\tilde{g}(z) = p\hat{g}(z)$ y por la inyectividad de p en V tenemos que $\tilde{g}(z) = \hat{g}(z)$. Luego $U \subset A$, por lo tanto A es abierto. Mostraremos ahora que A es cerrado. Sea $z \in Z$ tal que $\hat{g}(z) \neq \tilde{g}(z)$, por hipótesis tenemos que $p \circ \hat{g}(z) = p \circ \tilde{g}(z) = g(z) \in X$, sea V una vecindad de $g(z)$ cubierta

parejamente por p , luego $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ es la unión disjunta de abiertos U_{α} en \tilde{X} que son homeomorfos a V mediante p . Existen por tanto $\alpha \neq \beta$ tales que $\tilde{g}(z) \in U_{\alpha}$ y $\hat{g}(z) \in U_{\beta}$. Por la continuidad de \tilde{g} y \hat{g} existe W vecindad de $z \in Z$ tal que $\tilde{g}(w) \in U_{\alpha}$ y $\hat{g}(w) \in U_{\beta}$. Vemos que $\tilde{g}(w) \neq \hat{g}(w)$ para todo $w \in W$. Luego, $w \notin A$ entonces $z \in W$. Como $W \cap A \neq \emptyset$ se tiene que A es cerrado. \square

Del Teorema 2.10 podemos deducir que una aplicación continua puede tener varios levantamientos, veremos en el siguiente resultado que para el caso de trayectorias, cuando $Z = I$, el levantamiento es único si fijamos el punto inicial de los levantamientos.

Lema 4. *Sea (\tilde{X}, p) un espacio cubriente de un espacio X . Si $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$ son levantamientos de una trayectoria $\sigma : I \rightarrow X$ con el mismo punto inicial, entonces $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$.*

Un cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ con \tilde{X} simplemente conexo y localmente conexo por trayectorias se llama un *cubriente universal* pues \tilde{X} cubre a cualquier otro cubriente del espacio X .

3. Transformaciones de cubierta

Consideremos $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ y $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ dos aplicaciones cubrientes con la misma base X . Un *homomorfismo de espacios cubrientes* es una aplicación continua $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ f = p_1$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$(131) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

En el caso cuando f es un homeomorfismo diremos que $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ es un *isomorfismo de espacios cubrientes*, con inversa $f^{-1} : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tal que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\tilde{X}_1}$ y $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\tilde{X}_2}$. Si además, \tilde{X}_1 y \tilde{X}_2 son el mismo, diremos que f es un *automorfismo*. El conjunto $G(\tilde{X})$ de automorfismos del cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ constituye un grupo con la composición de aplicaciones llamado el *Grupo de transformaciones de cubierta* o *Grupo de Galois*.

Si f es un homomorfismo de cubrientes, la condición $p_2 \circ f = p_1$ significa que f aplica cada fibra $p_1^{-1}(x)$ en la fibra $p_2^{-1}(x)$. Es decir, para todo $x \in X$ $f(p_1^{-1}(x)) \subset p_2^{-1}(x)$. Cuando \tilde{X}_1 y \tilde{X}_2 son el mismo, f aplica cada fibra $p^{-1}(x)$ en si misma. En particular, si $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ es un isomorfismo se tiene la igualdad $f(p_1^{-1}(x)) = p_2^{-1}(x)$. Tenemos entonces que un isomorfismo f induce, para cada $x \in X$, una biyección de la fibra $p_1^{-1}(x)$ sobre la fibra

$p_2^{-1}(x)$. A su vez, un automorfismo determina una permutación en cada fibra $p^{-1}(x)$.

Note que un homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ es un levantamiento de la aplicación continua $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ con respecto al cubriente $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$. Así, cuando \tilde{X}_1 es conexo, dos homomorfismos que coinciden en un punto $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ son iguales. El siguiente lema nos dice que si un conjunto (no necesariamente un grupo) de automorfismos del cubriente actúa transitivamente en alguna fibra, entonces este conjunto tiene que ser $G(\tilde{X})$.

Lema 5. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un espacio cubriente conexo, y H un conjunto de automorfismos del cubriente \tilde{X} con la propiedad de que para alguna fibra $p^{-1}(x)$, cualesquiera dos puntos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ pueden ser llevados uno en el otro por un elemento de H , entonces $H = G(\tilde{X})$.*

Demostración. Sea $g \in G(\tilde{X})$, si $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ entonces $g(\tilde{x}_0) \in p^{-1}(x_0)$ pues $G(\tilde{X})$ deja invariante las fibras, luego existe $h \in H$ tal que $h(\tilde{x}_0) = g(\tilde{x}_0)$ y por el Teorema 2.10 de unicidad de levantamientos, se sigue que $h = g$. \square

Definición 3.1. Un espacio cubriente se dice *normal* si $G(\tilde{X})$ actúa transitivamente en las fibras. Un cubriente normal también es conocido como *cubriente de Galois*.

Hemos visto en el Corolario 1.3 que si X es conexo por caminos entonces para cualesquiera puntos básicos $x_0, x_1 \in X$ los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos. Tenemos a continuación el siguiente resultado.

Lema 6. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación cubriente con \tilde{X} conexo por trayectorias, $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ tales que $p(\tilde{x}_0) = x_0$ y $p(\tilde{x}_1) = x_1$ entonces $H(\tilde{x}_0)$ es normal en $\pi_1(X, x_0)$ si y sólo si $H(\tilde{x}_1)$ es normal en $\pi_1(X, x_1)$.*

Demostración. Tomemos una trayectoria $\tilde{\gamma}$ en \tilde{X} con punto inicial \tilde{x}_1 y punto final \tilde{x}_0 . Denotemos por $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, luego la aplicación (vista en la Proposición 1.2) $\bar{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ definida como $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ es un isomorfismo, más aún, $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(\bar{\gamma}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)))$. \square

Proposición 3.2. *Sean \tilde{X}_1 y \tilde{X}_2 conexos y localmente conexos por caminos. A fin de que exista un homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ con $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ es necesario y suficiente que $H_1(\tilde{x}_1) \subset H_2(\tilde{x}_2)$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.8 pues un homomorfismo f es un levantamiento de p_1 relativamente el cubriente p_2 . \square

Proposición 3.3. *Sea X localmente conexo por trayectorias. Dos espacios cubrientes conexos $p_1 : \tilde{X} \rightarrow X_1$ y $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ son isomorfos, vía*

un isomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ que preserva los puntos bases, si y sólo si $p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Demostración. Supongamos que existe un isomorfismo $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ entre los espacios cubrientes (\tilde{X}_1, p_1) y (\tilde{X}_2, p_2) , como f es un homeomorfismo se tiene que $f_{\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ y como $p_{1\#} = p_{2\#} \circ f_{\#}$ se sigue que $p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2\#}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Supongamos ahora que $p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, entonces por la Proposición 3.2 existen homomorfismos $f_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ y $f_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$(132) \quad \begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \\ & & \uparrow f_2 \\ & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) & \\ & \uparrow f_1 & \downarrow p_1 \\ (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_1} & (X, x_0) \end{array}$$

Por el Teorema de unicidad de levantamientos 2.10, se tiene que $f_2 \circ f_1 = \text{Id}_{\tilde{X}_1}$ y $f_1 \circ f_2 = \text{Id}_{\tilde{X}_2}$. Por lo tanto, $(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ y $(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ son isomorfos. \square

Proposición 3.4. Sea $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un espacio cubriente conexo, con X localmente conexo por trayectorias y sea $H(\tilde{x}_0) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Entonces el espacio cubriente (\tilde{X}, p) es un cubriente de Galois, si y sólo si, $H(\tilde{x}_0)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Supongamos que (\tilde{X}, p) es un cubriente de Galois. Sea $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$, con $\gamma = [c]$. Existe $\tilde{\gamma}$ en \tilde{X} tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ y $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, entonces por el Lema 3 tenemos $\gamma p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\gamma^{-1} = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1)))$. Como $G(\tilde{X})$ actúa transitivamente en las fibras, en particular en $p^{-1}(x_0)$, existe una transformación de cubierta $T : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ que manda $\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{\gamma}(1)$. Luego, de la Proposición 3.3 $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1)))$. Por lo tanto, $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ es normal en $\pi_1(X, x_0)$. Por otro lado, supongamos que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$. Sean $x_1 \in X$ y $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_1)$, luego por el Lema 6 se tiene que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ es normal en $\pi_1(X, x_1)$. Como \tilde{X} es conexo por trayectorias, existe $\tilde{\gamma}$ en \tilde{X} tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_1$ y $\tilde{\gamma}(x_2)$, luego $\gamma = \tilde{\gamma} \circ p$ y por el Lema 3 se tiene $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = \gamma p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$, luego por la Proposición 3.3 existe un isomorfismo $T : (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_2)$. \square

Proposición 3.5. Si $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ es un cubriente conexo del espacio X localmente por trayectorias, entonces $G(\tilde{X}) \cong N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0)$, donde $N(H(\tilde{x}_0))$ es el normalizador de $H(\tilde{x}_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$.

En particular, si el cubriente \tilde{X} es un cubriente de Galois, $G(\tilde{X})$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Entonces para el cubriente universal $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tenemos que $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Recordemos que $H(\tilde{x}_0) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Tomemos $\gamma \in N(H(\tilde{x}_0))$, luego $\gamma H(\tilde{x}_0)\gamma^{-1} = H(\tilde{x}_0)$. Sea $\tilde{\gamma}$ un levantamiento de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, por el Lema 3, $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1))) = \gamma p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\gamma^{-1}$, por lo que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1)))$, se sigue de la Proposición 3.3 que existe $g_{\gamma} \in G(\tilde{X})$ tal que $g_{\gamma}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}(1)$. Por la propiedad de levantamientos de homotopías g_{γ} no depende del representante $\gamma = [c]$: si tomamos $\gamma_1, \gamma_2 \in N(H(\tilde{x}_0))$ y suponemos que son homotópicas entonces sus levantamientos $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$, respectivamente, son homotópicos también. Así, $g_{\gamma_1}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1) = g_{\gamma_2}(\tilde{x}_0)$, como $g_{\gamma_1}, g_{\gamma_2} \in G(\tilde{X})$ en particular son levantamientos, y como coinciden en un punto, por la Propiedad de unicidad de levantamientos se tiene que $g_{\gamma_1} = g_{\gamma_2}$ en todo punto. Tenemos así, una aplicación que está bien definida

$$f : N(H(\tilde{x}_0)) \longrightarrow G(\tilde{X})$$

$$\gamma \mapsto g_{\gamma}.$$

Verifiquemos que f es un homomorfismo. Sea $\gamma_1, \gamma_2 \in N(H(\tilde{x}_0))$. Obsérvese que $p(\tilde{\gamma}_1 \cdot (g_{\gamma_1} \circ \tilde{\gamma}_2)) = (p \circ \tilde{\gamma}_1) \cdot (p \circ g_{\gamma_1} \circ \tilde{\gamma}_2) = \gamma_1 \cdot \gamma_2$, por lo $\tilde{\gamma}_1 \cdot (g_{\gamma_1} \circ \tilde{\gamma}_2)$ es el levantamiento de $\gamma_1\gamma_2$ con punto inicial \tilde{x}_0 . Se sigue entonces que

$$g_{\gamma_1 \cdot \gamma_2}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1 \cdot (g_{\gamma_1} \circ \tilde{\gamma}_2)(1) = g_{\gamma_1} \circ \tilde{\gamma}_2(1) = g_{\gamma_1} \circ g_{\gamma_2}(\tilde{x}_0).$$

Del Teorema 2.10 de unicidad de levantamientos se sigue que $g_{\gamma_1\gamma_2} = g_{\gamma_1}g_{\gamma_2}$. Por lo tanto, f es un homomorfismo de grupos. Por otro lado, como $g \in G(\tilde{X})$ y X es conexo por trayectorias, existe $\tilde{\gamma}$ en \tilde{X} tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ con punto inicial \tilde{x}_0 y punto final $g(\tilde{x}_0)$. Por la unicidad de los levantamientos se sigue que $g_{\gamma} = g$. Entonces $H(\tilde{x}_0) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, g(\tilde{x}_0)))$. Por otro lado, por el Lema 3, se tiene $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, g(\tilde{x}_0))) = \gamma H(\tilde{x}_0)\gamma^{-1}$, luego $\gamma \in N(H(\tilde{x}_0))$ y por lo tanto f es un homomorfismo. Por último, observemos que $\ker(f) = H(\tilde{x}_0)$ ya que

$$H(\tilde{x}_0) = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{\gamma \in \pi_1(X, x_0) \mid p \circ \tilde{\gamma} = \gamma, \tilde{\gamma} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\}.$$

Es decir, los elementos de $H(\tilde{x}_0)$ están representados por elementos de $\pi_1(X, x_0)$ cuyo levantamiento son lazos basados en \tilde{x}_0 . Finalmente, por el primer Teorema de isomorfismo $N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0) \cong G(\tilde{X})$. En el caso particular cuando $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubriente normal, $N(H(\tilde{x}_0)) = \pi_1(X, x_0)$ y $H(\tilde{x}_0) \cong \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, por lo tanto, $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. En el caso cuando $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es el cubriente universal, $H(\tilde{x}_0)$ es trivial, por lo tanto, $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$. \square

Tablas

Tabla 1

Álgebras de Lie imprimitivas y transitivas de campos vectoriales en \mathbb{R}^2 .

Generadores	Dim	Estructura
1.1 $\partial_x, x\partial_x - u\partial_u, x^2\partial_x - 2xu\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$
1.2 $\partial_x, x\partial_x - u\partial_u, x^2\partial_x - (2xu + 1)\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$
1.3 $\partial_x, x\partial_x, u\partial_u, x^2\partial_x - xu\partial_u$	4	$\mathfrak{gl}(2)$
1.4 $\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x, \partial_u, u\partial_u, u^2\partial_u$	6	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$
1.5 $\partial_x, \eta_1(x)\partial_u, \dots, \eta_k(x)\partial_u$	$k + 1$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^k$
1.6 $\partial_x, u\partial_u, \eta_1(x)\partial_u, \dots, \eta_k(x)\partial_u$	$k + 2$	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^k$
1.7 $\partial_x, x\partial_x + \alpha u\partial_u, \partial_u, x\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k + 2$	$\mathfrak{a}(1) \ltimes \mathbb{R}^k$
1.8 $\partial_x, x\partial_x + (ku + x^k)\partial_u, \partial_u, x\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k + 2$	$\mathfrak{a}(1) \ltimes \mathbb{R}^k$
1.9 $\partial_x, x\partial_x, u\partial_u, \partial_u, x\partial_u, x^2\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k + 2$	$\mathfrak{c}(1) \ltimes \mathbb{R}^k$
1.10 $x\partial_x, 2x\partial_x + (k - 1)u\partial_u, x^2\partial_x + (k - 1)xu\partial_u,$ $\partial_u, x\partial_u, x^2\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k + 3$	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^k$
1.11 $\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x + (k + 1)xu\partial_u, u\partial_u,$ $\partial_u, x\partial_u, x^2\partial_u, \dots, x^{k-1}\partial_u$	$k + 4$	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^k$

Donde $\mathfrak{c}(1) = \mathfrak{a}(1) \oplus \mathbb{C}$.

En los casos 1.5 y 1.6, las funciones $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_k(x)$ satisfacen una ecuación diferencial ordinaria, lineal y homogénea $\mathcal{D}(u) = 0$ de orden k , con coeficientes constantes.

En los casos 1.5-1.11 se pide $k \geq 1$. Sin embargo, note que si hacemos $k = 0$ en el Caso 1.10 y reemplazamos u por u^2 , obtenemos el Caso 1.1.

Similarmente, si hacemos $k = 0$ en el Caso 1.11, obtenemos el Caso 1.3. Los casos 1.7 y 1.8 para $k = 0$ son equivalentes al álgebra de Lie $\{\partial_x, e^x \partial_u\}$ y pertenecen al caso 1.5. El caso 1.9 para $k = 0$ es equivalente al álgebra de Lie $\{\partial_x, \partial_u, u\partial_u\}$ del tipo 1.6.

Tabla 6

Álgebras de Lie primitivas de campos vectoriales en \mathbb{R}^2 .

Generadores	Dim	Estructura
6.1 $\partial_x, \partial_u, \alpha(x\partial_x + u\partial_u) + u\partial_x - x\partial_u$	3	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$
6.2 $\partial_x, x\partial_x + u\partial_u, (x^2 - u^2)\partial_x + 2xu\partial_u$	3	$\mathfrak{sl}(2)$
6.3 $u\partial_x - x\partial_u, (1 + x^2 - u^2)\partial_x + 2xu\partial_u$ $2xu\partial_x + (1 - x^2 + u^2)\partial_u$	3	$\mathfrak{so}(3)$
6.4 $\partial_x, \partial_u, x\partial_x + u\partial_u, u\partial_x - x\partial_u$	4	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
6.5 $\partial_x, \partial_u, x\partial_x - u\partial_u, u\partial_x, x\partial_u$	5	$\mathfrak{sa}(2)$
6.6 $\partial_x, \partial_u, x\partial_x, u\partial_x, x\partial_u, u\partial_u$	6	$\mathfrak{a}(2)$
6.7 $\partial_x, \partial_u, x\partial_x + u\partial_u, u\partial_x - x\partial_u, (x^2 - u^2)\partial_x + 2xu\partial_u,$ $2xu\partial_x + (x^2 - u^2)\partial_u$	6	$\mathfrak{so}(3, 1)$
6.8 $\partial_x, \partial_u, x\partial_x, u\partial_x, x\partial_u, u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u,$ $xu\partial_x + u^2\partial_u$	8	$\mathfrak{sl}(3)$

Bibliografía

- [AMK08] Teresa Arias-Marco and Oldřich Kowalski. *Classification of locally homogeneous affine connections with arbitrary torsion on 2-dimensional manifolds*. Monatsh. Math., 153(1):1–18, 2008.
- [Benz59] J. P. Benzécri. *Variétés localement affines*. Séminaire Ehresmann. Topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. no. 7, p. I - III +1-35.
- [CL85] C. Camacho and A. Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Birchauser, Boston, 1985.
- [DG13] Sorin Dumitrescu and Adolfo Guillot. *Quasihomogeneous analytic affine connections on surfaces*. J. Topol. Anal., 5(4):491–532, 2013.
- [DG91] G. D'Ambra and M. Gromov. *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics*. In Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990) pages 19–111. Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.
- [Eis90] Luther Pfahler Eisenhart. *Non-Riemannian geometry*, volume 8 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. Reprint of the 1927 original.
- [GB72] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York and London, 1972.
- [GS14] Adolfo Guillot and Antonia Sánchez Godínez. *A classification of locally homogeneous affine connections on compact surfaces*. Ann. Global Anal. Geom., 46(4):335–349, 2014.
- [Gro88] Michael Gromov. Rigid transformations groups. In *Géométrie différentielle (Paris, 1986)*, volume 33 of Travaux en Cours, pages 65–139. Hermann, Paris, 1988.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol I*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963.
- [Kob72] Shoshichi Kobayashi. *Transformation Groups in differential geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.
- [KOV04] Oldřich Kowalski, Barbara Opozda, and Zdeněk Vlášek. *A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds via group-theoretical approach*. Cent. Eur. J. Math., 2(1):87–102 (electronic), 2004.

-
- [Lam00] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam. *Lectures on differential geometry*. Series on university mathematics -Vol. 1, World Scientific Publishing, Singapore, 2000.
- [NY74] Tadashi Nagano and Katsumi Yagi. *The affine structures on the real two-torus. I*. Osaka J. Math., 11:181–210, 1974.
- [Olv95] Peter J. Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Opo04] Barbara Opozda. *Locally homogeneous affine connections on compact surfaces*. Proc. Amer. Math. Soc., 132(9):2713–2721 (electronic), 2004.
- [Pal57] Richard S. Palais. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*. Mem. Amer. Math. Soc. No.22, iii+123, 1957.
- [Ract06] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds. Second Edition*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2006.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [Warn83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag New York, (1983).
- [Wolf11] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. 6th Edition. AMS Chelsea Publishing American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2011).