



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
HIDRÁULICA – INGENIERÍA CIVIL

DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO
TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. ÁNGEL MENDOZA GONZÁLEZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

CIUDAD DE MÉXICO. AGOSTO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. FELIPE IGNACIO ARREGUÍN CORTÉS
Secretario: DR. VÍCTOR MANUEL ARROYO CORREA
Vocal: DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ
1^{er}. Suplente: DR. EFRAÍN MATEOS FARFÁN
2^{do}. Suplente: DR. SERGE LÉONARD TAMARI WAGNER

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA
JIUTEPEC, MORELOS

TUTOR DE TESIS:

DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ

FIRMA

***“El fin de todo discurso oído es este:
Teme a Dios, y guarda sus mandamientos;
porque esto es el todo del hombre”***

Eclesiastés 12:13

Gracias a DIOS

Que con su mano me ha sustentado
y guardado en cada etapa de mi vida,
enseñándome a vivir con fidelidad, respeto y amor.

Esta tesis la dedico con mucho amor a:

Mi esposa AINI

Por su apoyo incondicional en esta etapa de mi vida.

Mis hijos ANGEL CAMILO Y ANDRÉS

Por ser el motor de cada día.

Mis padres MARTHA Y CAMILO

Por su gran enseñanza
y por todo el apoyo que me han proporcionado.

Un agradecimiento a mi tutor Dr. Ariosto Aguilar Chávez por dirigir y sustentar este documento. Asimismo, un reconocimiento respetuoso a mis revisores:

Dr. Felipe Ignacio Arreguín Cortés

Dr. Víctor Manuel Arroyo Correa

Dr. Serge Leonard Tamari Wagner

Dr. Efraín Mateos Farfán

Mi gratitud y respeto a:

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA)

Por su apoyo durante la elaboración de esta tesis y por haberme dado la oportunidad de cumplir mis metas profesionales.

También quiero agradecer a mis amigos, compañeros y todos aquellos que de alguna manera me han acompañado en esta etapa de mi vida y me impulsaron a superar cualquier obstáculo. ¡A todos GRACIAS!

ÍNDICE

RESUMEN	1
---------------	---

1 INTRODUCCIÓN	3
-----------------------------	----------

1.1 Clasificación de flujos en canales a superficie libre.....	3
1.1.1 Descripción.....	3
1.1.2 Tipos de flujo.....	5
1.1.3 Condiciones cinéticas del flujo.....	7
1.1.3.1 Número adimensional de Reynolds	7
1.1.3.2 Número adimensional de Froude	8
1.2 Evaluación del esfuerzo cortante	9
1.2.1 Descripción.....	9
1.2.2 Velocidad de corte	10
1.3 Técnicas experimentales para medir el flujo turbulento.....	11
1.3.1 Anemómetro de Película/Hilo Caliente a Temperatura Constante (CTA)	12
1.3.2 Anemómetro Láser Doppler (LDA)	13
1.3.3 Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV)	14
1.3.4 Velocímetro Acústico de efecto Doppler	16
1.4 Objetivo de la investigación	17

2 TURBULENCIA EN FLUJOS A SUPERFICIE LIBRE	18
---	-----------

2.1 Subdivisión del flujo.....	19
2.2 Modelos de turbulencia	20
2.2.1 Descripción.....	20
2.2.2 Ecuaciones de flujo medio y el problema de cerradura.....	20
2.2.3 Simulación Numérica Directa (DNS).....	25
2.2.4 Simulación de Grandes Vórtices (LES).....	27
2.2.5 Modelos híbridos RANS-LES	28
2.2.6 Modelos de segundo orden (RANS).....	28
2.2.7 Modelos de primer orden (RANS)	29
2.2.8 Modelos de la ley de pared	30
2.2.8.1 Modelo de van Driest.....	31
2.2.8.2 Modelo de Cebeci & Chang.....	33
2.2.8.3 Modelo de von Kármán	34
2.2.8.4 Modelo de Spalding.....	37
2.2.8.5 Representación de los modelos de la ley de pared.....	39



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO
TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

2.3	Métodos de estimación de la velocidad de corte	42
2.4	Características de la turbulencia	46
2.4.1	Espectro de amplitud	46
2.4.2	Funciones universales de intensidad de turbulencia.....	48
2.5	Conclusión del capítulo	51
3	ACONDICIONAMIENTO DE ESTACIÓN EXPERIMENTAL.....	52
3.1	Canal de pruebas.....	52
3.1.1	Condición inicial del canal experimental	53
3.1.2	Condición experimental con modificaciones	55
3.2	Perfilador acústico ADV	56
3.2.1	Características principales	56
3.2.2	Configuración de la adquisición de datos.....	58
3.3	Conclusión del capítulo	60
4	METODOLOGÍAS PROPUESTAS.....	62
4.1	Determinación de la velocidad de corte	62
4.2	Determinación de la constante de adición y von Kármán del modelo “ley logarítmica”	66
4.3	Conclusión del capítulo	69
5	PRUEBAS EXPERIMENTALES.....	72
5.1	Descripción de pruebas.....	72
5.2	Pruebas en fondo liso.....	73
5.2.1	Resultados	74
5.2.1.1	Valores de la velocidad de corte y valores de la constante de adición y von Kármán	74
5.2.1.2	Perfiles adimensionales de velocidades medias.....	75
5.2.1.3	Perfil de esfuerzos de Reynolds.....	78
5.2.1.4	Intensidades de turbulencia.....	79
5.2.1.5	Espectros de amplitud.....	81
5.3	Pruebas en fondo de rugosidad incompleta	85
5.3.1	Resultados	85
5.3.1.1	Valores de la velocidad de corte y valores de la constante de adición y von Kármán	86
5.3.1.2	Perfiles adimensionales de velocidades medias.....	87
5.3.1.3	Perfil de esfuerzos de Reynolds.....	91



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO
TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

5.3.1.4	Intensidades de turbulencia.....	93
5.3.1.5	Espectros de amplitud.....	94
6	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	99
6.1	Conclusiones generales.....	99
6.2	Recomendaciones	100
	REFERENCIAS	101
	ANEXOS	108
Anexo A	Deducción del modelo de van Driest	108
Anexo B	Deducción del modelo de von Kármán	111
Anexo C	Propagación de errores del modelo clásico de velocidad de corte	113
Anexo D	Especificaciones técnicas del dispositivo ADV “Vectrino Profiler”	116
Anexo E	Prueba de normalidad de Anderson-Darling	117
Anexo F	Histogramas de la estimación de la velocidad de corte	119
Anexo G	Topología de errores de la determinación de las constantes de adición y von Kármán de la ley logarítmica.....	122

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Registro de velocidad u_1 (dirección principal, x_1) tomada en el laboratorio del posgrado IMTA-UNAM	3
Figura 1.2 Velocidades promediadas, $\bar{u}_1(x_1, x_2, x_3)$ y $\bar{U}_{1,2}(x_1, x_3)$	4
Figura 1.3 Velocidad promediada $\bar{U}_{m_1}(x_1)$, análisis unidimensional	5
Figura 1.4 Clasificación del flujo, utilizando el tiempo y espacio como criterio	6
Figura 1.5 Comportamiento del flujo. Tomado de Reynolds (1883).	7
Figura 1.6 Distribución de velocidad de un fluido viscoso entre dos placas planas (flujo de Couette)	10
Figura 1.7 Anemómetro de hilo caliente a temperatura constante (CTA). Basado en Martín Rodríguez et al. (2014)	12
Figura 1.8 Volumen de muestreo, técnica diferencial Doppler (LDA). Basado en Dantec Dynamics (2017)	13
Figura 1.9 Esquema general de funcionamiento de un sistema PIV. Tomado de Di Cristo (2011)	15
Figura 1.10 Modos de densidad de imagen de partícula. Tomado de Jahanmiri (2011)	15
Figura 1.11 Módulos de sistema ADV. Basado en Lohrmann et al. (1994)	16
Figura 1.12 Técnica de medición Doppler. Basado en Lohrmann et al. (1994)	17
Figura 2.1 Subdivisión de un flujo a superficie libre. Tomado de Nezu & Nakagawa (1993)	19
Figura 2.2 Descomposición de velocidad instantánea en valor medio y fluctuante. Muestreo tomado en el laboratorio del posgrado IMTA-UNAM	21
Figura 2.3 Clasificación general de los modelos de turbulencia	25
Figura 2.4 Escalas de movimiento en el proceso de turbulencia. Basado en Nikora (2010)	26
Figura 2.5 Concepto de longitud de mezcla. Basado en Doshi & Gill (1970)	32
Figura 2.6 Valores de las constantes de la ley logarítmica obtenidos por varios investigadores. Tomado de Zanoun et al. (2003)	36
Figura 2.7 Valores experimentales de κ y C_2 obtenidos por Zanoun et al. (2003). Tomado de Zanoun et al. (2003)	36
Figura 2.8 Representación de los modelos de la ley de pared. Modelo de von Kármán	39
Figura 2.9 Modelo de van Driest, perfil de velocidades completo	40
Figura 2.10 Comportamiento del modelo de Cebeci & Chang vs el modelo de van Driest en las tres categorías de rugosidad adimensional k_s^+ , $\kappa = 0.41$	41
Figura 2.11 Modelo de Spalding considerando expansión en serie hasta los términos de segundo, tercer y cuarto orden	42
Figura 2.12 Perfiles de esfuerzos de Reynolds en canal rectangular abierto para $b/h = 5$. Tomado de Yang (2005)	45
Figura 2.13 Configuración de tubo Preston. Tomado de Thornton et al. (2008)	46
Figura 2.14 Espectro de amplitud	47



Figura 2.15 Intensidad de turbulencia en dirección principal u_1 , región exterior. Tomado de Nezu & Rodi (1986).....	49
Figura 2.16 Intensidad de turbulencia en dirección principal u_1 , región de pared. Tomado de Nezu & Rodi (1986).....	50
Figura 2.17 Intensidad de turbulencia en dirección u_2 (misma simbología que la Figura 2.16). Tomado de Nezu & Rodi (1986).....	50
Figura 3.1 Estación experimental	52
Figura 3.2a Componentes de estación experimental	52
Figura 3.3 Características geométricas del canal de pendiente variable	53
Figura 3.4 Condición experimental inicial	54
Figura 3.5 Borbollón y resalto hidráulico por entrada abrupta del flujo	54
Figura 3.6 Estructuras tranquilizadoras del flujo.....	55
Figura 3.7 Condición experimental con estructuras tranquilizadoras	55
Figura 3.8 Volumen de muestreo del Vectrino Profiler. Tomado de ©Nortek AS (2017) ..	56
Figura 3.9 Ventana principal de software MIDAS.....	57
Figura 3.10 Gráfico de magnitudes de velocidad (u_1 , dirección principal del flujo) en el volumen de muestreo para un intervalo de 30 s.....	58
Figura 3.11 Configuración de adquisición de datos MIDAS	59
Figura 4.1 Perfil de muestreo	63
Figura 4.2 Perfil de velocidades medias. Prueba 01	64
Figura 4.3 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba 01	65
Figura 4.4 Perfil de esfuerzos de Reynolds. Prueba 01	65
Figura 4.5 Determinación de κ y C_2 . Prueba 01	68
Figura 4.6 Perfil adimensional de velocidades medias. Prueba 01	69
Figura 4.7 Análisis topológico de errores vs regresión lineal en la determinación de κ y C_2	71
Figura 5.1 Fondo de lija, $k_s = 0.535$ mm.....	72
Figura 5.2 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-01	75
Figura 5.3 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-02	76
Figura 5.4 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-03	76
Figura 5.5 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-04	77
Figura 5.6 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-05	77
Figura 5.7 Perfil de esfuerzos de Reynolds	79
Figura 5.8 Intensidades de turbulencia, marcadores de la Figura 5.7	80
Figura 5.9 Puntos de análisis para espectros de amplitud, prueba PFL-01	81
Figura 5.10 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_1 . Prueba PFL-01	82
Figura 5.11 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_2 . Prueba PFL-01	83



Figura 5.12 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_1	84
Figura 5.13 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_2	85
Figura 5.14 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-01	87
Figura 5.15 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-02	88
Figura 5.16 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-03	88
Figura 5.17 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-04	89
Figura 5.18 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-05	89
Figura 5.19 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-06	90
Figura 5.20 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-07	90
Figura 5.21 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-08	91
Figura 5.22 Perfil de esfuerzos de Reynolds	92
Figura 5.23 Intensidades de turbulencia, marcadores de la Figura 5.22	93
Figura 5.24 Puntos de análisis para espectros de amplitud, prueba PFR-01	94
Figura 5.25 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_1 . Prueba PFR-01	95
Figura 5.26 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_2 . Prueba PFR-01	96
Figura 5.27 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_1	97
Figura 5.28 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_2	98
Figura D.1 Vectrino Profiler. ©Nortek (2017).....	116
Figura F.1 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-01	119
Figura F.2 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-02.....	119
Figura F.3 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-03.....	119
Figura F.4 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-04.....	119
Figura F.5 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-05.....	120
Figura F.6 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-01.....	120
Figura F.7 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-02.....	120
Figura F.8 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-03.....	120
Figura F.9 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-04.....	120
Figura F.10 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-05.....	120
Figura F.11 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-06.....	121
Figura F.12 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-07.....	121
Figura F.13 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-08.....	121



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO
TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

Figura G.1 Topología de errores, prueba PFL-01	122
Figura G.2 Topología de errores, prueba PFL-02	123
Figura G.3 Topología de errores, prueba PFL-03	123
Figura G.4 Topología de errores, prueba PFL-04	124
Figura G.5 Topología de errores, prueba PFL-05	124
Figura G.6 Topología de errores, prueba PFR-01	125
Figura G.7 Topología de errores, prueba PFR-02	125
Figura G.8 Topología de errores, prueba PFR-03	126
Figura G.9 Topología de errores, prueba PFR-04	126
Figura G.10 Topología de errores, prueba PFR-05	127
Figura G.11 Topología de errores, prueba PFR-06	127
Figura G.12 Topología de errores, prueba PFR-07	128
Figura G.13 Topología de errores, prueba PFR-08	128

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Fórmulas de “la ley de pared”	37
Tabla 4.1 Condiciones experimentales. Prueba 01	62
Tabla 5.1 Condiciones experimentales de pruebas en fondo liso	74
Tabla 5.2 Valores obtenidos de la velocidad de corte u_* , constante de adición C_2 y constante de von Kármán κ	75
Tabla 5.3 Condiciones experimentales de pruebas en fondo de rugosidad incompleta	86
Tabla 5.4 Valores obtenidos de la velocidad de corte, constante de adición C_2 y constante de von Kármán κ	87
Tabla D.1 Especificaciones técnicas del dispositivo ADV “Vectrino Profiler”	116
Tabla E.1 Resultados de la prueba de normalidad de Anderson-Darling y rango intercuartil	118

NOMENCLATURA

A , área hidráulica [L^2]	p' , presión estática fluctuante [$ML^{-1}T^{-2}$]
b , base del canal [L]	P , perímetro mojado [L]
B_c , ancho de superficie libre de agua [L]	Q , caudal [L^3T^{-1}]
B , coeficiente de amortiguamiento del modelo de van Driest	R_e , número de Reynolds
C_2 , constante de integración del modelo de von Kármán	R_h , radio hidráulico [L]
D , diámetro de la tubería [L]	S , pendiente de plantilla
$E(k_w)$, espectro de energía para diferentes números de onda (k_w) [L^3T^{-2}]	S_f , pendiente de fricción
f , frecuencia [T^{-1}]	t , variable temporal
f_D , frecuencia de Doppler [T^{-1}]	t_0 , tiempo de inicio de muestreo [T]
F_r , número de Froude	T , tiempo de promediado [T]
F_i , vector de fuerzas de cuerpo	u_* , velocidad de corte [LT^{-1}]
g , aceleración de la gravedad [LT^{-2}]	u_i , vector de velocidad instantánea (u_1, u_2, u_3) [LT^{-1}]
G , función de filtrado	\bar{u}_i , vector de velocidad promediada temporal ($\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$) [LT^{-1}]
h , profundidad o tirante [L]	u'_i , vector de velocidad fluctuante (u'_1, u'_2, u'_3) [LT^{-1}]
$k = 1/2 (\overline{u'_i u'_i})$, energía cinética turbulenta [L^2T^{-2}]	$\overline{u'_i u'_j}$, tensor de esfuerzos de Reynolds
k_w , número de onda [L^{-1}]	$u^+ = \bar{u}_1/u_*$, velocidad adimensional
k_s , rugosidad absoluta [L]	$\bar{U}_{i,j}$, tensor de velocidad promediada en el sentido j
$k_s^+ = k_s u_*/\nu$, rugosidad adimensional	\bar{U}_{m_i} , vector de velocidad media ($\bar{U}_{m1}, \bar{U}_{m2}, \bar{U}_{m3}$) [LT^{-1}]
l , longitud de mezcla [L]	x_i , coordenada espacial (x_1, x_2, x_3) [L]
$l^+ = l u_*/\nu$, longitud de mezcla adimensional	X_j , longitud del dominio de integración [L]
L , longitud característica del flujo [L]	$X(k)$, coeficientes complejos de Fourier
n_i , vector unitario	$y^+ = x_2 u_*/\nu$, nivel adimensional
p , presión estática instantánea [$ML^{-1}T^{-2}$]	Y , tirante hidráulico [L]



Γ , función de amortiguamiento del modelo de van Driest	<i>ADV</i> , Velocimetría Acústica de efecto Doppler (<i>Acoustic Doppler Velocimetry</i>)
$\Delta = \nabla^2$, operador laplaciano	<i>ASM</i> , Modelo algebraico de esfuerzos (<i>Algebraic Stress Model</i>)
δ_{ij} , delta de Kronecker	<i>CFD</i> , Dinámica de Fluidos Computacional (<i>Computational Fluid Dynamics</i>)
$\varepsilon = u_0^3/L$, relación de pérdida de energía	<i>CTA</i> , Anemometría de Temperatura Constante (<i>Constant Temperature Anemometry</i>)
ε_{ijk} , tensor de Levi-Civita	<i>DNS</i> , Simulación Numérica Directa (<i>Direct Numerical Simulation</i>)
η , escala de longitud de Kolmogorov	<i>FFT</i> , Transformada Rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>)
θ , ángulo de plantilla del canal	<i>LDA</i> , Anemometría Láser Doppler (<i>Laser Doppler Anemometry</i>)
κ , constante de von Kármán	<i>LES</i> , Simulación de Grandes Remolinos (<i>Large Eddy Simulation</i>)
λ , longitud de onda del láser	<i>PIV</i> , Velocimetría por Imágenes de Partículas (<i>Particle Image Velocimetry</i>)
μ , viscosidad dinámica [$ML^{-1}T^{-1}$]	<i>RANS</i> , Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas de Reynolds (<i>Reynolds-Averaged Navier–Stokes</i>)
ν , viscosidad cinemática [L^2T^{-1}]	<i>RSM</i> , Modelo de Esfuerzos de Reynolds (<i>Reynolds Stress Model</i>)
ν_t , viscosidad turbulenta [L^2T^{-1}]	
$\xi = x_2/h$, relación de coordenada vertical	
ρ , densidad del fluido [ML^{-3}]	
τ , esfuerzo cortante [$ML^{-1}T^{-2}$]	
τ_0 , esfuerzo cortante en la pared [$ML^{-1}T^{-2}$]	
ω_n , frecuencia angular fundamental	

RESUMEN

El escurrimiento del agua en un conducto puede ser en dos formas, en un canal o en una tubería, la diferencia es la existencia de una superficie libre en el primer caso y la ausencia de esta en el segundo. En el caso de flujos a superficie libre, pueden ser clasificados de diferentes maneras, dependiendo de los criterios que se deseen utilizar, por ejemplo, las variaciones de sus variables como tirante h y área hidráulica A con respecto al tiempo o al espacio, o también, mediante las relaciones entre la fuerza inercial del fluido y la fuerza potencial o viscosa, dadas por los números adimensionales de Froude y Reynolds respectivamente (Hager & Castro-Orgaz, 2016; Sotelo Ávila, 2002; Te Chow & Saldarriaga, 1994).

En el caso de un flujo a superficie libre, su comportamiento está en función de la rugosidad del fondo (entre otros factores), debido a que esta ejerce resistencia al desplazamiento del fluido. En la literatura, existen diferentes expresiones que describen los efectos de la rugosidad en la forma en que se desplaza el flujo (Dey, 2014), algunas de ellas se exponen en el capítulo segundo de este escrito. Los efectos causados por la rugosidad en el desplazamiento del flujo pueden ser analizados de diferentes formas, una es bajo condiciones medias (promedios temporales) con el uso de valores o expresiones empíricas para estimar la fricción, por ejemplo: el factor de resistencia de Chezy, el coeficiente de rugosidad de Manning o el factor de fricción de Darcy-Weisbach (Wu, Shen, & Chou, 1999); otra forma es considerando las escalas de mayor frecuencia, es decir, las fluctuaciones que de forma natural se presentan en la velocidad del flujo aún bajo la consideración de régimen permanente, y siendo estas las que proporcionan información acerca del esfuerzo cortante en la pared.

El esfuerzo cortante que se presenta en el flujo es proporcional a la variación de la velocidad media con respecto a la coordenada vertical y por lo tanto variante en una sección vertical. A partir de esto Prandtl introduce el parámetro de “velocidad de corte” como valor representativo en una sección vertical a nivel local del flujo. Este parámetro ha sido aplicado en diferentes temas de investigación en la ingeniería hidráulica tales como: planteamiento de modelos empíricos de distribución de velocidad media e intensidad de turbulencia (George, 2007; Nezu & Rodi, 1986; Spalding, 1961), estudio de transporte de sedimentos (Celestini, Silvagni, Spizzirri, & Volpi, 2007; van Rijn, 1984), socavación (Avendaño & García López, 2013) y revestimiento de canales y ríos (Agostini, Conte, Malaguti, & Papetti, 1985; Dmitriev, Tyshenko, & Khlapuk, 1992); recientemente la velocidad de corte ha sido útil en la caracterización de flujos turbulentos con el planteamiento de relaciones adimensionales en modelos de correlación turbulenta (Auel, Albayrak, & Boes, 2014; Motlagh & Taghizadeh, 2016; Qiao, Delavan, Nokes, & Plew, 2016).



El amplio uso del parámetro de velocidad de corte en diferentes temas de investigación ha derivado en interés por evaluarlo con precisión buscando evitar correlaciones espurias; esto motiva al desarrollo del presente trabajo donde se proponen y aplican dos metodologías, la primera de ellas es para determinar la velocidad de corte, esta se plantea a partir de un análisis de la precisión de los diferentes métodos presentes en la literatura para su estimación, y esta requiere el uso de un dispositivo que mida la velocidad instantánea en el flujo a alta frecuencia, ya que deben de ser determinadas las fluctuaciones de velocidad para calcular los esfuerzos de Reynolds. La segunda metodología se plantea para la determinación de las constantes de adición y von Kármán de la ley logarítmica (correspondientes al modelo de von Kármán), esta se originó a causa de la variabilidad de estos parámetros ante las diferentes condiciones del flujo, ver por ejemplo Zanon, Durst, & Nagib (2003). Las dos metodologías ayudan a caracterizar con mayor precisión los flujos a superficie libre; estas se describen en forma extensa en el capítulo cuarto de este documento.

Para realizar la medición de la velocidad instantánea se aplicó la técnica de Velocimetría Acústica de efecto Doppler (ADV), utilizando un dispositivo ADV conocido comercialmente como “Vectrino Profiler™” de marca Nortek®. Las pruebas se llevaron a cabo en la estación experimental del laboratorio del Posgrado IMTA-UNAM, cuyas características son descritas en el capítulo tercero. Además, se realizaron bajo dos condiciones de rugosidad de plantilla, la primera con un fondo liso y la segunda con un fondo de lija, donde el valor de rugosidad absoluta fue conocido de acuerdo con la Norma de graduación ANSI.

Los resultados obtenidos del desarrollo de pruebas experimentales aplicando las metodologías propuestas se presentan en el capítulo quinto, estos muestran el buen ajuste de los valores experimentales con los modelos y expresiones teóricas; a partir de esto, se concluye que las metodologías que en este documento se plantean tienen un grado de precisión aceptable para la caracterización turbulenta de flujos a superficie libre.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Clasificación de flujos en canales a superficie libre

1.1.1 Descripción

El escurrimiento del agua en un conducto puede ser en dos formas, en un canal o en una tubería. La diferencia en la conducción es la existencia de la superficie libre, como sucede en un canal y la ausencia de esta en el caso de una tubería (Te Chow & Saldarriaga, 1994).

La resistencia al desplazamiento de un flujo en un canal está en función de la rugosidad del fondo y las paredes del conducto. En la práctica de la ingeniería hidráulica, existen diferentes expresiones que describen los efectos de la rugosidad en la forma en que se desplaza el flujo (Dey, 2014).

No obstante, a pesar de la gran cantidad de publicaciones sobre el tema de la rugosidad y los efectos en el flujo, aún se puede seguir analizando la física de este problema especialmente lo que está ligado a los efectos turbulentos que se presentan en la cercanía de la pared (Chen, Adrian, Zhong, Li, & Wang, 2014; Johnson & Cowen, 2017; Nezu & Nakagawa, 1993). Para estudiar los efectos de la rugosidad en la distribución del flujo en este estudio se cambia el enfoque de análisis, que consiste en considerar no solo los valores de promedios temporales sino también las fluctuaciones que de forma natural se presentan en la velocidad del flujo aún bajo la consideración de régimen permanente, tal como se muestra en la *Figura 1.1*.

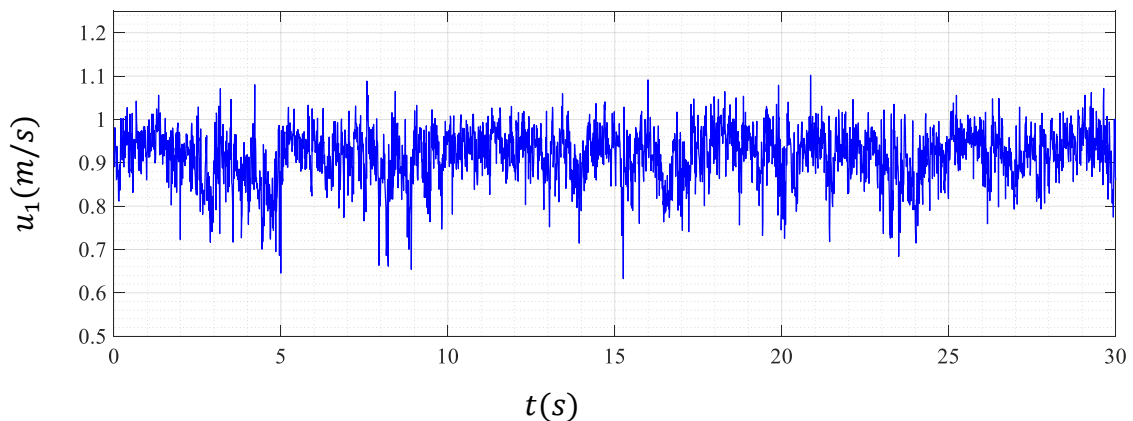


Figura 1.1 Registro de velocidad u_1 (dirección principal, x_1) tomada en el laboratorio del posgrado IMTA-UNAM



Para conocer la cinética de un *flujo en un canal abierto*, especialmente bajo la condición del comportamiento de la turbulencia, en donde el flujo tiene una aleatoriedad temporal (ver *Figura 1.1*), diferentes autores han propuesto el uso de funciones promediadas en el espacio-tiempo (Auel et al., 2014; Rajaratnam & Muralidhar, 1969; Reynolds, 1895), por ejemplo, para obtener un promediado temporal se puede utilizar la relación siguiente:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i(x_i, t) dt, \quad (1.1)$$

donde $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ es el vector de las variables independientes espaciales (el subíndice $i = 1, 2, 3$ indica el eje de referencia), t es la variable temporal, u_i es el vector de velocidad instantánea, t_0 es el tiempo de inicio de muestreo, T es el tiempo de promediado y \bar{u}_i es el vector de velocidad promediada temporal. En forma gráfica, en la *Figura 1.2* se muestran los resultados de un promedio temporal de las velocidades instantáneas u_i de una serie de puntos en la vertical en un canal.

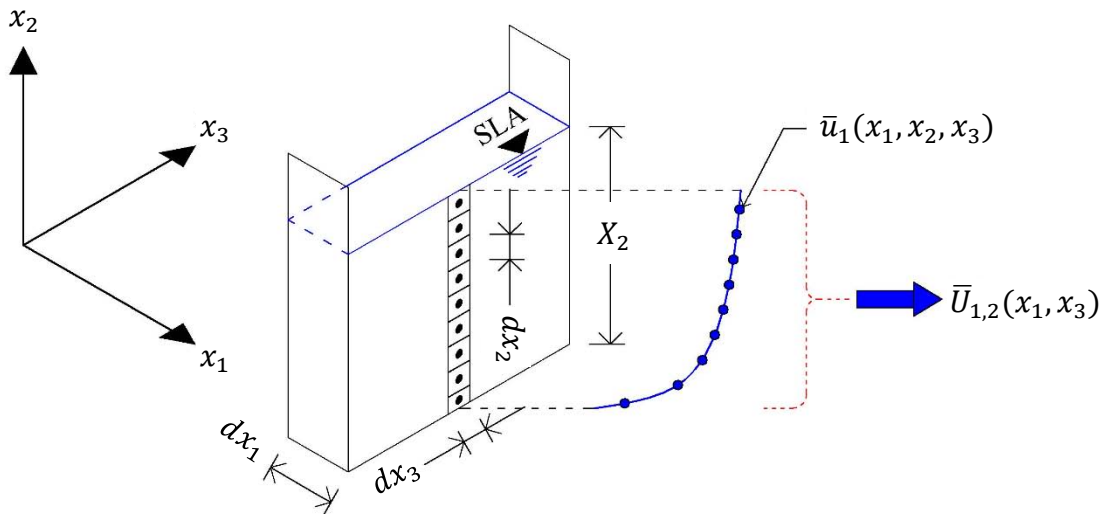


Figura 1.2 Velocidades promediadas, $\bar{u}_1(x_1, x_2, x_3)$ y $\bar{U}_{1,2}(x_1, x_3)$

Para obtener un promedio espacio temporal de la velocidad se puede utilizar la ecuación (1.2), que considera como límites de promediado la escala X_j y el tiempo t ,

$$\bar{U}_{i,j} = \frac{1}{X_j} \int_0^{X_j} \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i n_i dt \right) dx_j, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

donde $\bar{U}_{i,j}$ es el tensor de velocidad promediada en el sentido j , X_j es la longitud del dominio de integración del cauce; dx_j , es el diferencial en el sentido de integración y n_i es el vector unitario. Un esquema de la velocidad $\bar{U}_{1,2}$ ($i = 1$ y $j = 2$) se muestra en la *Figura 1.2*.



Para manejar los valores de la velocidad de un flujo, lo más usual en la práctica de la ingeniería hidráulica, es aplicar un promediado temporal y espacial sobre una sección transversal arbitraria, en forma gráfica se muestra en la *Figura 1.3*, para una orientación $i = 1$. Entonces, la velocidad promediada se calcula con la siguiente ecuación:

$$\bar{U}_{m_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \left(\frac{1}{T} \int_T u_i n_i dt \right) \varepsilon_{ijk} dx_j dx_k, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

donde \bar{U}_{m_i} es el vector de velocidad media, ε_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, y A_i es el área de la sección trasversal en el sentido de análisis.

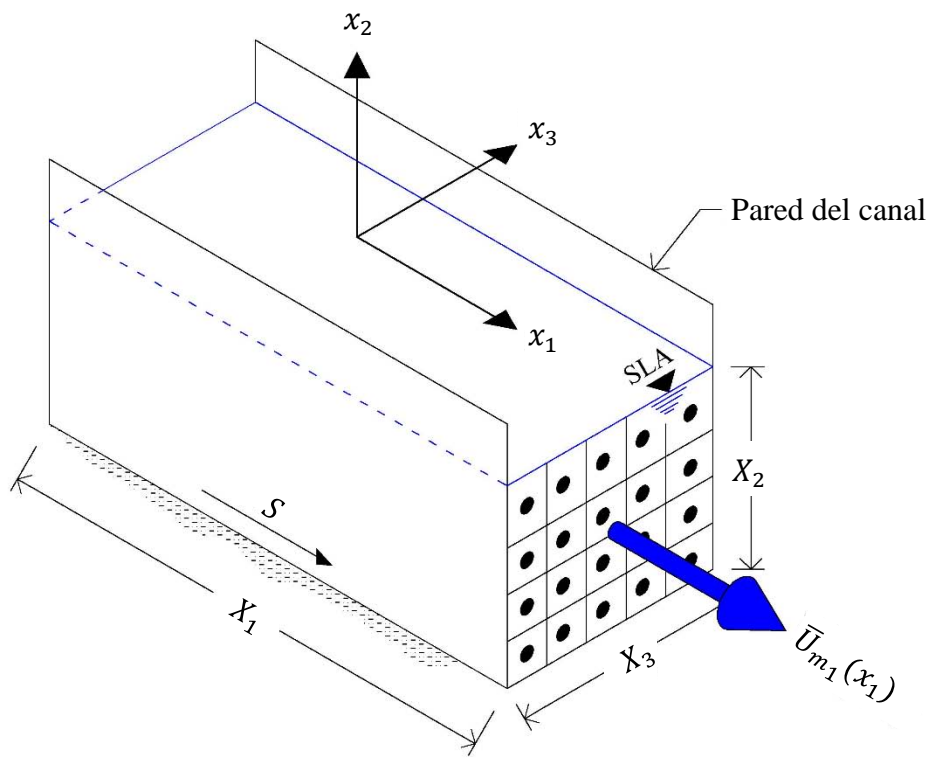


Figura 1.3 Velocidad promediada $\bar{U}_{m_1}(x_1)$, análisis unidimensional

1.1.2 Tipos de flujo

La clasificación de *flujos en un canal abierto* de acuerdo con el cambio en la profundidad respecto al tiempo y al espacio (Te Chow & Saldarriaga, 1994), se esquematiza en la *Figura 1.4*.

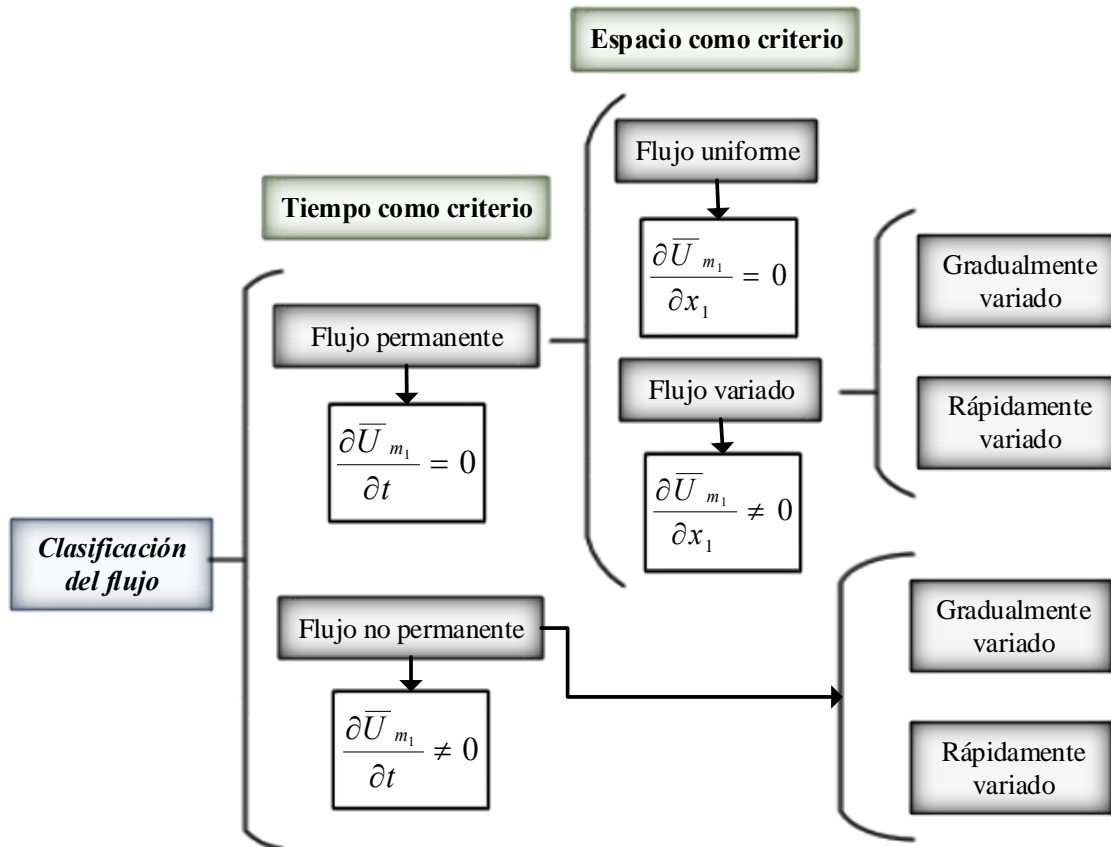


Figura 1.4 Clasificación del flujo, utilizando el tiempo y espacio como criterio

- Flujo permanente y no permanente.* Definido por los cambios en el tiempo; es permanente cuando la velocidad media \bar{U}_{m_1} en una sección dada se mantiene constante en un intervalo específico ($\partial \bar{U}_{m_1} / \partial t = 0$). Lo contrario acontece cuando el flujo es no permanente ($\partial \bar{U}_{m_1} / \partial t \neq 0$) (Sotelo Ávila, 2002).
- Flujo uniforme y variado.* Definido por los cambios en el espacio; se dice que el flujo es uniforme cuando la velocidad media \bar{U}_{m_1} es constante a lo largo del canal, entonces, ($\partial \bar{U}_{m_1} / \partial x_1 = 0$), lo mismo sucede con las variables de área hidráulica A y tirante h . En el flujo variado (o también denominado no uniforme) se tienen gradientes de cambio espacial de la velocidad, área y tirante ($\partial \bar{U}_{m_1} / \partial x_1 \neq 0$) (Sotelo Ávila, 2002).

En la ingeniería hidráulica los problemas de canales abiertos se estudian principalmente bajo una condición permanente, por ejemplo, para el diseño hidráulico de una red de canales de riego en un distrito agrícola. En cambio para el tránsito de un avenida en un río es necesario analizar las variaciones temporales y el flujo se analiza en una condición no permanente (Te Chow & Saldarriaga, 1994).



1.1.3 Condiciones cinéticas del flujo

La física del escurrimiento de un flujo en un canal está en función de la energía potencial que induce el movimiento, la resistencia que presenta la pared al retardar su deslizamiento y las propiedades de cohesión y deformación interna del fluido. Entonces el balance de energía los define la pendiente, la rugosidad de la pared y la viscosidad (este término incluye la variación térmica) y en la descripción dinámica de un fluido en forma experimental se analizan la relación entre estos parámetros, por ejemplo, la relación entre la energía potencial y cinética, o la relación entre la energía de movimiento y las propiedades estructurales del fluido. A continuación, se describen con detalle estas relaciones que son de utilidad en este documento.

1.1.3.1 Número adimensional de Reynolds

En el experimento de observación de un flujo en una tubería transparente, realizado en 1883 por Osborne Reynolds, se identificaron por medio de un trazador de color dos condiciones de comportamiento, uno *directo*, donde el colorante se comportó como una línea recta uniforme, ver *Figura 1.5a* y otro *sinuoso*, donde el colorante tenía un movimiento ondulatorio con la aparición de una secuencia de remolinos, ver *Figura 1.5b*; en una publicación elaborada por Reynolds posterior al experimento, les denomino como comportamiento *laminar* y *turbulento* respectivamente (Levi, 2001).

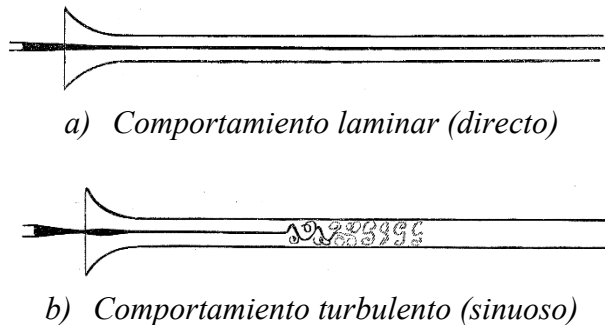


Figura 1.5 Comportamiento del flujo. Tomado de Reynolds (1883).

A partir de estos experimentos, Reynolds establece una expresión que relaciona las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas presentes en el fluido, y se denota como sigue,

$$Re = \frac{\bar{U}_{m1}L}{\nu}, \quad (1.4)$$

donde Re es el número de Reynolds, \bar{U}_{m1} es la velocidad media en dirección principal del flujo y representativa de toda la sección, L es una longitud característica y ν es la viscosidad cinemática. La longitud característica utilizada por Reynolds en sus experimentos fue el



diámetro de la tubería $L = D$. Posteriormente Reynolds (1895) define el valor crítico donde el flujo en una tubería pasa de ser estable a inestable, siendo, $R_e = 2000$, es decir, si R_e es menor que el valor crítico el flujo tiene un comportamiento laminar, si lo supera tiene un comportamiento sinuoso, es decir, turbulento.

En un canal abierto la longitud característica se representa con el radio hidráulico R_h , que relaciona el área hidráulica A con el perímetro mojado P como sigue,

$$R_h = \frac{A}{P}. \quad (1.5)$$

Para el caso de un conducto circular $R_h = D/4$, por tanto, el valor crítico obtenido por Reynolds para tuberías se divide en la misma proporción para aplicarse al caso de canales con superficie libre. De acuerdo con Sotelo Ávila (2002), asumiendo lo anterior, para el caso de canales abiertos se tienen los siguientes límites,

- a) Flujo laminar, cuando $R_e \leq 500$
- b) Flujo de transición, cuando $500 < R_e \leq 12500$
- c) Flujo turbulento, cuando $R_e > 12500$

1.1.3.2 Número adimensional de Froude

Para evaluar los efectos de la gravedad sobre el estado de flujo, se expresa la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas gravitacionales, que está dada por el número de Froude; en un sentido estrictamente unidimensional, se define como (Hager & Castro-Orgaz, 2016),

$$F_r = \frac{\bar{U}_{m1}}{\sqrt{g L}}, \quad (1.6)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y L es una longitud característica, que para el caso de canales abiertos es igual al tirante hidráulico Y (Sotelo Ávila, 2002), el cual está definido como el área hidráulica A dividida por el ancho de superficie libre B_c . Los tipos de régimen de flujo en función del número de Froude son (Hager & Castro-Orgaz, 2016):

- a) Flujo subcrítico, $F_r < 1$, en este estado las fuerzas gravitacionales dominan y, por tanto, el flujo tiene una velocidad baja y se describe como de corriente lenta.
- b) Flujo crítico, $F_r = 1$, igualdad entre la cinética y la energía potencial, en esta condición también se dice que el estado energético es mínimo.
- c) Flujo Supercrítico $F_r > 1$, en este estado las fuerzas inerciales se vuelven dominantes; el flujo tiene alta velocidad y se describe como rápido o torrencial.



1.2 Evaluación del esfuerzo cortante

1.2.1 Descripción

En el siglo XIX y XX, las investigaciones teóricas de la mecánica de fluidos se basaron principalmente en el fluido ideal, es decir, aquel en que no se consideraba la viscosidad, y por lo tanto es incompresible e irrotacional (Marriott, 2016; Pantón, 2013), lo anterior fue debido a las herramientas disponibles para obtener soluciones numéricas del flujo, que se refiere principalmente a bajos recursos computacionales. En el caso de flujos de fluidos no viscosos, no existen fuerzas tangenciales (esfuerzos cortantes) entre capas adyacentes; solo fuerzas normales (presiones). Lo anterior indica que un fluido ideal no se opone a un cambio en su forma con ninguna resistencia interna (Munson, Rothmayer, Okiishi, & Huebsch, 2013)

En la dinámica de un fluido que interactúe con una superficie rígida, se tiene que en el punto de contacto se presenta una condición de no deslizamiento, entonces en dirección hacia el seno del fluido se tendrá una velocidad, lo anterior genera de forma natural un gradiente de velocidad y por lo tanto un par dinámico de velocidades. Entonces, para un fluido ideal no existe ese par dinámico de la velocidad, por lo tanto, en esta condición no se puede generar un modelo que considere el esfuerzo cortante en el fondo. Por otra parte, las fuerzas tangenciales o de fricción presentes en los fluidos reales están conectadas a una propiedad física del fluido llamada viscosidad (Schlichting & Gersten, 2017).

En fechas más recientes, debido al avance de las teorías matemáticas y el desarrollo de la informática, se han tomado en cuenta con mucho más cuidado los efectos de viscosidad y compresibilidad del fluido.

Para comprender la naturaleza de la viscosidad se plantea el siguiente ejemplo o problema de flujo Couette; considérese el flujo entre dos placas planas infinitas y paralelas, donde la placa superior se desplaza con una velocidad \bar{u}_1 y la inferior permanece en reposo. La distancia entre las placas es d , ver *Figura 1.6*. Asumiendo que la presión en todo el fluido es constante, en la *Figura 1.6* se observa que el fluido se adhiere a ambas placas de modo que la velocidad en la placa inferior es cero, mientras que en la placa superior el fluido se mueve con velocidad \bar{u}_1 ; además, asumiendo el caso más simple, que es un fluido newtoniano a temperatura constante, se tiene entonces una distribución lineal entre las placas. Por lo tanto, la velocidad es proporcional a la distancia x_2 de la placa inferior, y se tiene (Bergada Grañó, 2012),

$$\bar{u}_1(x_2) = \frac{\bar{u}_1 x_2}{d}. \quad (1.7)$$

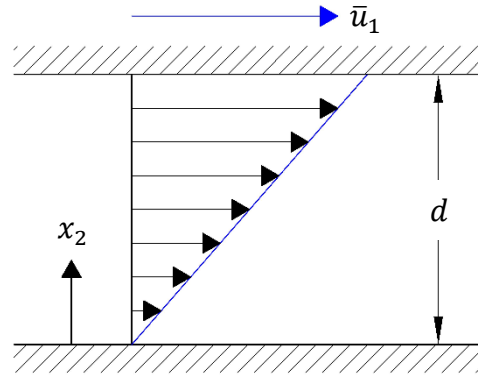


Figura 1.6 Distribución de velocidad de un fluido viscoso entre dos placas planas (flujo de Couette)

Para mantener el estado del movimiento, una fuerza tangencial en la dirección del movimiento debe actuar, manteniendo las fuerzas de fricción del fluido en equilibrio. Según los resultados experimentales, esta fuerza (fuerza por unidad de superficie de la placa = esfuerzo cortante τ) es proporcional a \bar{u}_1/d . En el caso general, esto puede ser remplazado por $\partial\bar{u}_1/\partial x_2$. La constante de proporcionalidad es la viscosidad dinámica μ que depende de la naturaleza del fluido (Schlichting & Gersten, 2017). Por lo tanto, tenemos la ley elemental de la fricción también llamada ley de fricción de Newton (Sotelo Ávila, 1997):

$$\tau = \mu \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2}, \quad (1.8)$$

donde τ es el esfuerzo cortante, x_2 es la coordenada vertical, \bar{u}_1 es la velocidad promediada temporal y μ es la viscosidad dinámica.

1.2.2 Velocidad de corte

Una forma de conocer el nivel de turbulencia en un flujo es determinando el valor del esfuerzo cortante, ya que es la fuerza resultante a causa del rozamiento entre el fluido y las paredes sólidas de la sección del conducto por donde pasa, o bien por el roce entre capas adyacentes, lo que origina inestabilidades en el flujo. Sin embargo, como se puede apreciar en (1.8) este valor no es constante ya que es proporcional a la variación de la velocidad con respecto a la vertical ($\partial\bar{u}_1/\partial x_2$). Por tanto, es necesario introducir una escala que represente el esfuerzo de corte. De acuerdo con Keulegan (1938), Prandtl introdujo el concepto de velocidad de corte en el ámbito hidráulico, mediante una expresión que relaciona el esfuerzo cortante en la pared y la densidad del fluido de la siguiente manera,



$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (1.9)$$

donde τ_0 es el esfuerzo cortante en la pared, ρ es la densidad del fluido y u_* es la velocidad de corte. La expresión (1.9) tiene dimensiones de una velocidad y es por tal razón que Prandtl le denominó velocidad de corte, misma que ha sido aceptada e introducida en el análisis teórico para representar la fuerza de corte en flujos de agua (Keulegan, 1938). Esta escala de velocidad es también llamada velocidad de fricción o de cizalla.

La velocidad de corte es un parámetro que diferentes autores han aplicado en temas tales como: planteamiento de modelos empíricos de distribución de velocidad media e intensidad de turbulencia (George, 2007; Nezu & Rodi, 1986; Spalding, 1961), estudio de transporte de sedimentos (Celestini et al., 2007; van Rijn, 1984), socavación (Avendaño & García López, 2013), y revestimiento de canales y ríos (Agostini et al., 1985; Dmitriev et al., 1992); recientemente la velocidad de corte ha sido útil en la caracterización de flujos turbulentos con el planteamiento de relaciones adimensionales en modelos de correlación turbulenta (Auel et al., 2014; Motlagh & Taghizadeh, 2016; Qiao et al., 2016). El amplio uso del parámetro de velocidad de corte en diferentes temas de investigación ha derivado el interés por evaluarlo, buscando evitar correlaciones espurias; siendo una de ellas, por ejemplo, la estimación de los valores de la intensidad de turbulencia por efecto de un error en la medición de la temperatura. En el capítulo segundo de este documento se exponen los métodos utilizados para la estimación de la velocidad de corte.

1.3 Técnicas experimentales para medir el flujo turbulento

La selección de un dispositivo para mediciones de turbulencia depende directamente de la aplicación que se le va a dar y de las condiciones experimentales que se tengan. Actualmente se ha logrado un gran avance tecnológico en el ámbito de la medición de flujos, con la innovación de dispositivos con alta capacidad de muestreo (frecuencia) y que tienen una estabilidad que permite llevar a cabo estudios con mayor profundidad y precisión.

Los dispositivos más usados durante los últimos años para caracterización de flujos turbulentos son:

1. Anemómetro de Película/Hilo Caliente a Temperatura Constante (CTA)
2. Anemómetro Láser Doppler (LDA)
3. Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV)
4. Velocímetro Acústico de efecto Doppler (ADV)

A continuación, se describen de manera breve para la comprensión del funcionamiento general de cada uno de ellos.



1.3.1 Anemómetro de Película/Hilo Caliente a Temperatura Constante (CTA)

Los anemómetros de hilo o película caliente son dispositivos utilizados para medir las variables que se producen en flujos turbulentos, tales como componentes de velocidad media y fluctuante, temperatura media y fluctuante, etc. (Comte-Bellot, 1976). La diferencia entre llamar al anemómetro de película o hilo caliente consiste únicamente en el tipo de sensor que se utilice, estos son ampliamente descritos por Hasse & Dunckel (1980).

Un anemómetro de hilo caliente consiste en un filamento (hilo) calentado que se expone al paso de un flujo, mismo que se encuentra conectado a un circuito eléctrico capaz de monitorear las variaciones de resistencia eléctrica por la acción del flujo. La sonda del anemómetro en general está formada por un elemento sensor y por un soporte que está constituido por un conjunto de dientes, mismos que soportan el elemento sensor y conducen la corriente eléctrica, ver *Figura 1.7a* (Comte-Bellot, 1976; Martín Rodríguez, Martín Rodríguez, Loredo-Souza, & Camano Schettini, 2014).

El principio físico de su funcionamiento está basado en la transferencia de calor por convección entre el hilo calentado y el flujo pasando a su alrededor (Jensen, 2004). En los sensores, es calentada una pequeña estructura y expuesta al flujo para medir el intercambio térmico que se produce. La relación entre la velocidad del flujo y la tensión de salida es deducida sobre la base de las ecuaciones de transferencia de calor, tomando por referencia la potencia generada por la corriente eléctrica que pasa por el hilo. El sensor es calentado por una corriente eléctrica I y enfriado proporcionalmente, de acuerdo a la componente de la velocidad del flujo que incide perpendicular al elemento sensible, ver *Figura 1.7b* (Martín Rodríguez et al., 2014).

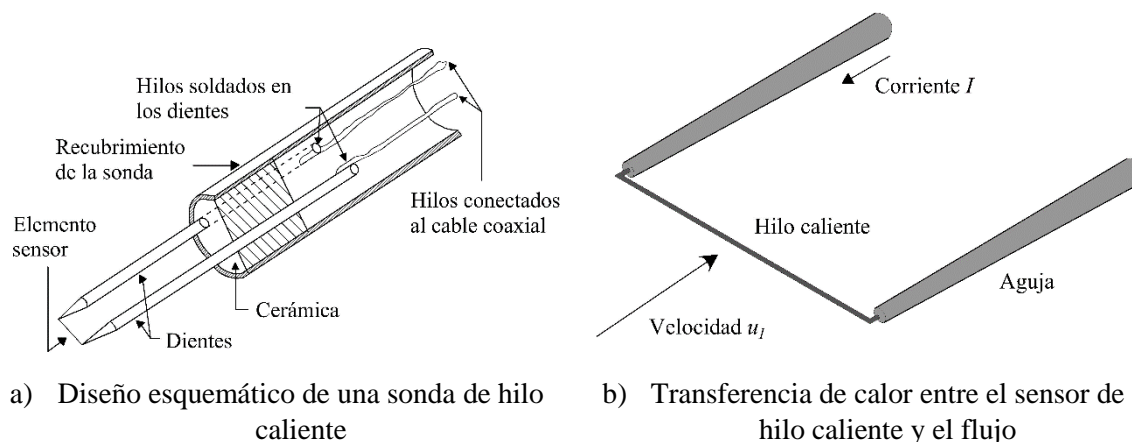


Figura 1.7 Anemómetro de hilo caliente a temperatura constante (CTA). Basado en Martín Rodríguez et al. (2014)

La adquisición de la tensión de salida del anemómetro de hilo caliente es un paso determinante en la medición y para el tratamiento posterior de los datos. La tensión de salida

es una señal continua y analógica. Para tratar la señal digital es necesario realizar inicialmente el muestreo, adquiriendo una serie temporal de los valores de la señal original a través de una placa de conversión de analógico-digital (A/D). Los parámetros que definen la adquisición de datos de una placa A/D son la tasa de muestreo y el número de muestras. El convertidor analógico-digital discretiza la señal en pequeños intervalos. Finalmente, al obtener los datos de la señal de salida es necesario realizar el proceso de calibración y determinar de la forma más precisa posible, la relación entre la tensión de salida del anemómetro y las propiedades físicas de interés, que son principalmente la velocidad y la temperatura (Comte-Bellot, 1976; Martín Rodríguez et al., 2014).

1.3.2 Anemómetro Láser Doppler (LDA)

La Anemometría Láser Doppler es una técnica no invasiva que permite medir la velocidad de un fluido, ya sea líquido o gaseoso. Como su nombre lo indica su funcionamiento está basado en el efecto Doppler, mismo que se incluye en diferentes técnicas, una de ellas es la técnica diferencial Doppler o de franjas (ver *Figura 1.8*), que permite calcular la velocidad mediante la luz dispersada por las partículas, que pasan a través del volumen de muestreo generando un cambio en la frecuencia Doppler que es directamente proporcional a la velocidad (Jensen, 2004). Esta relación está dada por la siguiente expresión:

$$u_1 = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}} f_D, \quad (1.10)$$

donde u_1 es la componente de velocidad, λ es la longitud de onda del láser, f_D es la frecuencia Doppler y θ es el ángulo entre los haces de luz. La técnica de velocimetría láser Doppler es ampliamente descrita por Durst, Melling, & Whitelaw (1981) y Jensen (2004).

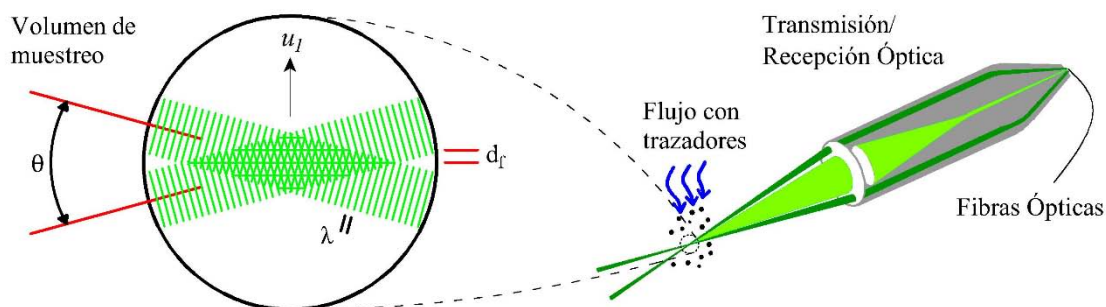


Figura 1.8 Volumen de muestreo, técnica diferencial Doppler (LDA). Basado en Dantec Dynamics (2017)



El montaje de un anemómetro láser Doppler es muy variable ya que está basado en las exigencias experimentales y las características del mismo dispositivo que pueden ser para medir una, dos o tres componentes de velocidad.

Nezu & Nakagawa (1993) presentan el siguiente listado de problemas que se presentan en el uso de LDA en flujos de canales abiertos:

- a) La manera en la cual la pendiente del canal es tomada en cuenta,
- b) Los méritos relativos de los sistemas de difusión de envío y recepción, y
- c) Los requerimientos de sembrado de partículas trazadoras

El primero (a) concierne a la precisa evaluación de la pendiente del canal, es decir, ante pendientes suaves es muy complicado ajustar el láser y llevar a cabo su rotación para la medición de las componentes. El inciso (b) hace referencia a las condiciones del canal experimental, donde se requiere limpieza y transparencia (en el caso de las paredes del canal) para un correcto funcionamiento del láser. Finalmente (c) indica el correcto sembrado de partículas trazadoras en el flujo a medir, donde dependerá de la pureza del agua; de acuerdo con Nezu & Nakagawa (1993) y su experiencia con LDA la resiembra de partículas trazadoras genera señales incoherentes.

1.3.3 Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV)

PIV no es considerado como un dispositivo, sino más bien como un sistema. La configuración experimental de un sistema PIV regularmente consta de varios subsistemas. Una de sus características principales es la necesidad de añadir forzosamente partículas trazadoras al flujo; estas partículas son iluminadas en un plano del flujo en un intervalo de tiempo, ver *Figura 1.9*. La luz dispersada por las partículas se registra ya sea en una sola trama o en una secuencia de tramas. El desplazamiento de las imágenes de partículas entre los pulsos de luz se determina mediante la evaluación de las grabaciones PIV. Para manejar la gran cantidad de datos que pueden recogerse empleando la técnica PIV, se requiere un post-proceso complejo (Brossard et al., 2009; Jahanmiri, 2011). La técnica experimental PIV es ampliamente descrita por (Raffel, Willert, Wereley, & Kompenhans, 2007).

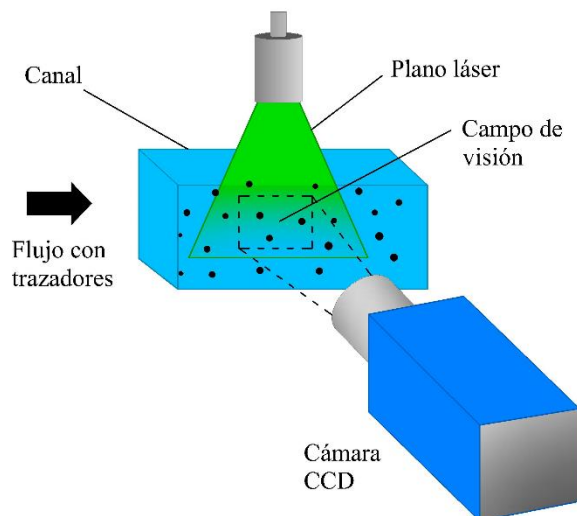


Figura 1.9 Esquema general de funcionamiento de un sistema PIV. Tomado de Di Cristo (2011)

Raffel et al. (2007) enlistan las principales características de la técnica PIV, algunas de ellas se presentan a continuación:

1. No es intrusiva
2. Medición de velocidad indirecta. Al igual que la técnica LDA, con PIV se mide la velocidad de un elemento fluido indirectamente por medio de la medición de la velocidad de las partículas trazadoras dentro del flujo.
3. Medición en un campo completo
4. Sembrado de partículas trazadoras
5. Retardo de velocidad. La necesidad de utilizar partículas trazadoras en la medición, obliga a comprobar cuidadosamente si las partículas seguirán fielmente el movimiento de los elementos fluidos.
6. Densidad de las imágenes de partículas del trazador. Cualitativamente pueden presentarse tres tipos diferentes de densidad de imagen, ver *Figura 1.10*.

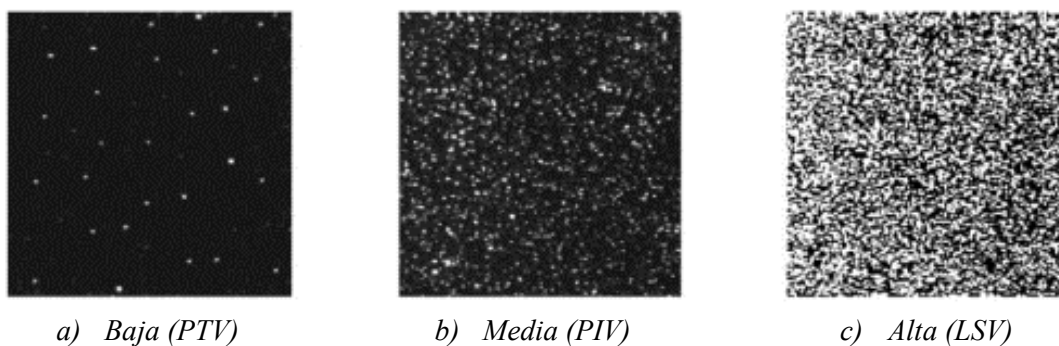


Figura 1.10 Modos de densidad de imagen de partícula. Tomado de Jahanmiri (2011).



1.3.4 Velocímetro Acústico de efecto Doppler

La técnica ADV se basa en el principio de desplazamiento Doppler para medir la velocidad de las partículas (Dombroski & Crimaldi, 2007). Su sistema consta de tres módulos principales: sonda de medición, módulo de condicionamiento de señal y módulo de procesamiento de señal, ver *Figura 1.11*. La sonda de medición se sumerge en el flujo. Los receptores están inclinados 30° desde el eje de la probeta emisora al punto central del volumen de control (Lohrmann, Cabrera, & Kraus, 1994).

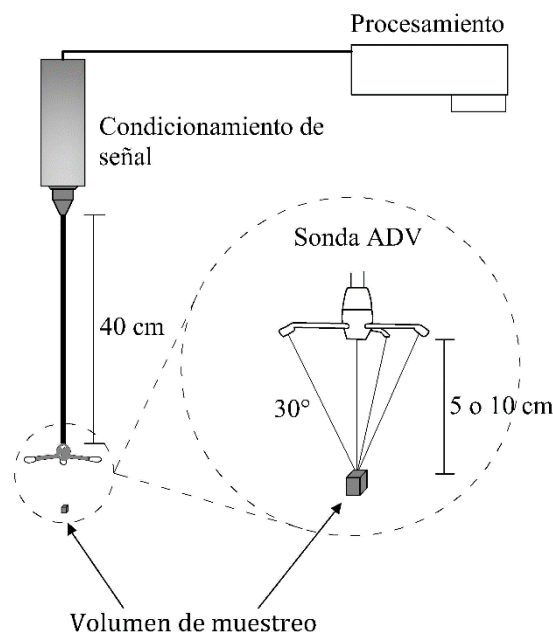


Figura 1.11 Módulos de sistema ADV. Basado en Lohrmann et al. (1994)

La *Figura 1.12* muestra la técnica de medición básica empleada por un ADV. El sistema opera por transmisión de pulsos acústicos cortos a lo largo de la probeta transmisora. Mientras los pulsos se propagan a través del agua, una fracción de la energía acústica es dispersada de regreso por pequeñas partículas suspendidas en el agua. Los tres receptores detectan el “eco” originado en el volumen de muestreo, que son desplazamientos Doppler debidos a la velocidad relativa del flujo. El desplazamiento Doppler observado en cada receptor es proporcional a la componente de velocidad del flujo (u_1 , u_2 y u_3) a lo largo de la bisectriz de la viga transmisora y receptora. Los desplazamientos Doppler medidos en los tres receptores proporcionan un estimado de la velocidad del flujo a lo largo de las tres diferentes direcciones, las cuales son entonces combinadas geoméricamente para obtener las tres componentes ortogonales del vector u_i de la velocidad del agua (Lohrmann et al., 1994).

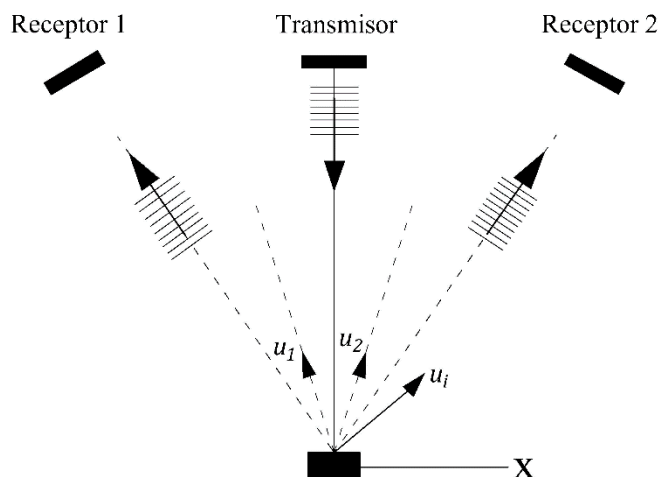


Figura 1.12 Técnica de medición Doppler. Basado en Lohrmann et al. (1994)

1.4 Objetivo de la investigación

Desarrollar una metodología que tome en cuenta los efectos turbulentos para determinar la velocidad de corte con un equipo de medición de velocidad de alta frecuencia de efecto Doppler ADV (Acoustic Doppler Velocimeter).

Para alcanzar este objetivo se desarrollarán las siguientes acciones:

- Recopilar y analizar los métodos para determinar la velocidad de corte,
- Identificar la influencia de los esfuerzos de Reynolds en la magnitud de la velocidad de corte,
- Realizar las pruebas experimentales con un procedimiento que asegure la repetibilidad y reproducibilidad.

2 TURBULENCIA EN FLUJOS A SUPERFICIE LIBRE

Berselli, Iliescu, & Layton (2005), Tennekes & Lumley (1972), Pope (2000) y Lesieur (2008), describen las características principales de los flujos turbulentos, mismas que se resumen a continuación,

- *Los flujos turbulentos son irregulares.* Debido a la irregularidad, el tratamiento de un flujo turbulento se vuelve complicado, resultando difícil la descripción del movimiento del flujo en todos los detalles como una función de las coordenadas espacio-temporales. Sin embargo, es posible indicar valores medios, tal como se indica en el subcapítulo 1.1.1.
- *Los flujos turbulentos son difusivos.* Esto causa una mezcla rápida e incrementa las relaciones de transferencia de masa, calor y momento. Los flujos turbulentos son capaces de mezclar cantidades transportadas más rápidamente que si solo estuvieran involucrados procesos de difusión molecular.
- *Los flujos turbulentos son rotacionales.* La turbulencia surge debido a la presencia de límites (fronteras rígidas) u obstáculos, que crean vorticidad dentro de un flujo inicialmente irrotacional.
- *Los flujos turbulentos son disipativos.* Los efectos de la viscosidad resultan en la conversión de la energía cinética del flujo en calor. Si no hay una fuente externa de energía para compensar esta pérdida de energía cinética, el movimiento turbulento tiene un decaimiento.
- *La turbulencia es un fenómeno continuo.* Las escalas más pequeñas que ocurren en un flujo turbulento son más grandes que cualquier escala de longitud molecular.
- *La turbulencia es una característica de los flujos de fluidos y no de los fluidos.* Si el número de Reynolds es suficientemente alto, la mayor parte de la dinámica de la turbulencia es la misma en todos los fluidos (líquidos o gases). Las características principales de los flujos turbulentos no están controladas por las propiedades moleculares del fluido.



2.1 Subdivisión del flujo

De acuerdo con Nezu & Nakagawa (1993) la estructura turbulenta de flujos a superficie libre puede ser dividida de acuerdo con la relación entre la coordenada vertical x_2 y la profundidad del flujo h en las siguientes tres subregiones:

1. *Región de pared* [$x_2/h < (0.15 - 0.2)$]. Esta región corresponde a la “capa interior” del tratamiento clásico de capa limite; la escala de longitud y velocidad son ν/u_* y u_* , respectivamente.
2. *Región intermedia* [$(0.15 - 0.2) \leq x_2/h \leq 0.6$]. Esta región no está fuertemente influenciada por los efectos de pared ni por los de superficie libre. La escala de longitud y velocidad son x_2 y $\sqrt{\tau/\rho}$, respectivamente.
3. *Región de superficie libre* [$0.6 < x_2/h \leq 1.0$]. En esta región, la estructura turbulenta es controlada por variables exteriores; la escala de longitud y velocidad son la profundidad del flujo h y la velocidad máxima de la corriente principal \bar{u}_{1max} respectivamente, como se indica en la *Figura 2.1*. La región intermedia y de superficie libre, también son llamadas como “región exterior” o “capa exterior”, y son una zona en la cual los efectos viscosos son despreciables.

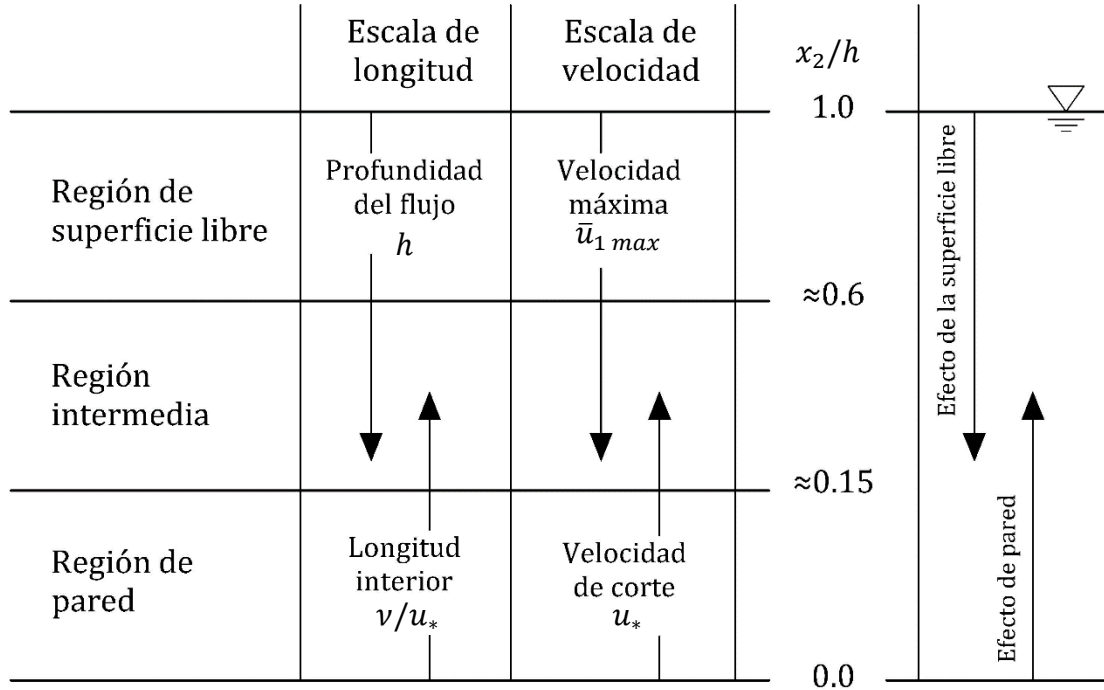


Figura 2.1 Subdivisión de un flujo a superficie libre. Tomado de Nezu & Nakagawa (1993)



2.2 Modelos de turbulencia

2.2.1 Descripción

A pesar de los avances en tecnología computacional, los flujos turbulentos no se han logrado calcular con un método exacto. Las ecuaciones exactas que describen el movimiento turbulento son conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes (Panton, 2013). En la literatura se encuentran diferentes procedimientos numéricos para resolver estas ecuaciones, pero la capacidad de almacenamiento y velocidad de las computadoras de hoy en día es insuficiente para dar solución en alta resolución a un flujo turbulento (Rodi, 2000).

En la práctica ingenieril, no es de interés principal aquellas escalas fluctuantes en el movimiento turbulento de un flujo sino más bien aquellas escalas que contienen la mayor parte de la energía, es a saber las condiciones medias. A partir de esto surgen diferentes propuestas, la primera de ellas de acuerdo con la literatura, es de Reynolds (1895) que indica la descomposición de la velocidad instantánea en un punto, en una velocidad promedio y una velocidad fluctuante. Sin embargo, al aplicar esta descomposición en las ecuaciones de Navier-Stokes surge un nuevo problema, ya que las ecuaciones dejan de ser un sistema cerrado por que contienen términos desconocidos que representan el transporte de momento medio originado por el movimiento turbulento. Entonces, el sistema de ecuaciones solo puede ser cerrado con la ayuda de datos empíricos (Rodi, 2000). De esta manera surgen los *modelos de turbulencia*, buscando dar solución al sistema de ecuaciones; de acuerdo con Rodi (2000) se definen como “*un conjunto de ecuaciones (diferenciales o algebraicas) que determinan los términos de transporte turbulento en las ecuaciones de flujo medio y en consecuencia cierran el sistema de ecuaciones*”.

2.2.2 Ecuaciones de flujo medio y el problema de cerradura

El origen de las ecuaciones que gobiernan la distribución del flujo a superficie libre son las leyes de conservación de masa y momento; para flujos incompresibles, se expresan de la siguiente manera,

Conservación de masa (ecuación de continuidad):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$



Conservación de momento (ecuaciones de Navier-Stokes¹):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad (2.2)$$

donde u_i es el vector de velocidades instantáneas en la dirección x_i , p es la presión instantánea, ν es la viscosidad cinemática y F_i es el vector de fuerzas de cuerpo.

Como se indicó en la descripción de este capítulo las ecuaciones de Navier-Stokes describen todos los detalles del movimiento turbulento, pero en la actualidad no se pueden solucionar para flujos turbulentos de relevancia práctica. A partir de lo anterior, se introduce un enfoque estadístico, sugerido inicialmente por Osborne Reynolds (1895), que consiste en la descomposición de las variables dependientes del tiempo como velocidad y presión instantánea, en una cantidad media y otra fluctuante, ver *Figura 2.2*,

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad p = \bar{p} + p', \quad (2.3)$$

donde \bar{u}_i es la componente de velocidad media, u'_i es la componente de velocidad fluctuante, \bar{p} es la presión media y p' es la presión fluctuante.

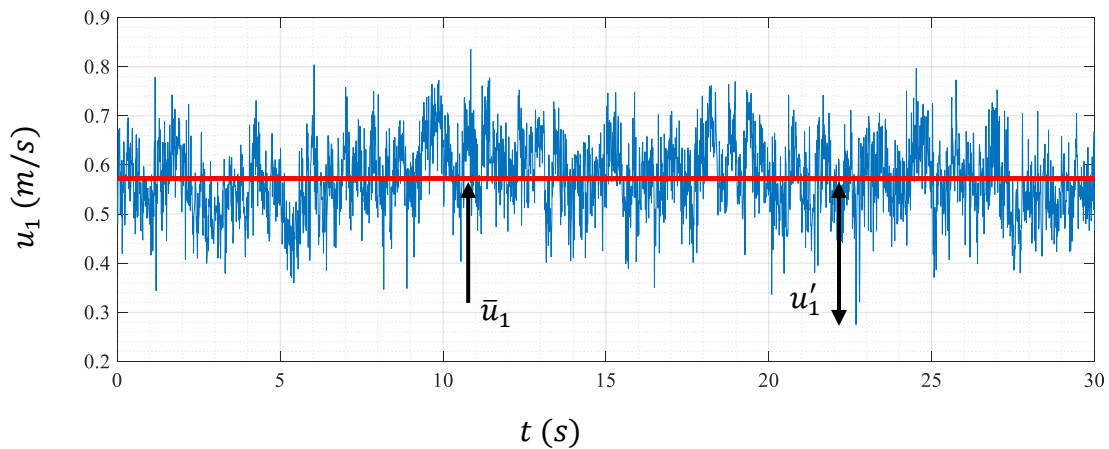


Figura 2.2 Descomposición de velocidad instantánea en valor medio y fluctuante. Muestreo tomado en el laboratorio del posgrado IMTA-UNAM

En la descripción del capítulo primero se mostró que la técnica de promediado temporal consiste en tomar los valores medidos de un punto en el espacio y promediar sobre un tiempo de muestreo, que debe ser lo suficientemente grande para que los valores medios sean

¹ La expresión (2.2) es llamada de “Navier-Stokes” en honor al ingeniero francés Louis Marie Henri Navier (1785-1836) y al matemático inglés Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), quienes desarrollaron los términos viscosos (Berselli et al., 2005).



independientes de él, es decir, que el valor medio debe ser invariante para cualquier tiempo de muestreo superior; esto, para el caso de flujos considerados o analizados como estacionarios/permanentes. Para flujos transitorios el intervalo temporal de análisis debe ser pequeño, de modo que el fenómeno que se estudie no se vea afectado por el valor promedio (Rodi, 2000).

Para la obtención de las ecuaciones de flujo medio se aplica la descomposición (2.3) en (2.1) y (2.2), y se aplica un promediado temporal, tal como sigue,

En el caso de la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.4)$$

y para las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} + F_i. \quad (2.5)$$

Antes de desarrollar los términos y simplificar, se realiza una transformación del término de advección (ecuaciones de Navier-Stokes) utilizando la regla del producto,

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - u_i \underbrace{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)}_C, \quad (2.6a)$$

de acuerdo con (2.1) el segundo término de la ecuación anterior es cero ($C = 0$), por lo tanto,

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}. \quad (2.6b)$$

Además, se tienen las siguientes reglas para dos funciones de variable aleatoria f y g , que cuentan con un valor medio \bar{f} y fluctuante f' , entonces se tienen las siguientes condiciones al aplicar un promediado:

$$\bar{f}' = 0, \quad (2.7a)$$

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}, \quad (2.7b)$$

$$\overline{f'g} = 0, \quad (2.7c)$$



$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad (2.7d)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \quad (2.7e)$$

$$\overline{f'g'} \neq 0. \quad (2.7f)$$

Aplicando las reglas (2.7a)-(2.7f) a (2.4) se obtiene la ecuación de continuidad promediada temporal,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_i} = 0. \quad (2.9)$$

Con la expresión anterior se demuestra que el analizar las perturbaciones no produce un cambio en la conservación de masa.

Ahora, aplicando un promedio temporal a las ecuaciones de Navier-Stokes, y sustituyendo (2.6b) en (2.5),

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad (2.10a)$$

desarrollando,

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u_j' + u_i' \bar{u}_j + u_i' u_j')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \dots \quad (2.10b)$$

$$\nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} + F_i,$$

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u_j' + u_i' \bar{u}_j + u_i' u_j')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \dots \quad (2.10c)$$

$$\nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} + F_i,$$



aplicando las reglas (2.7a)-(2.7f) y simplificando,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad (2.10d)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad (2.10e)$$

utilizando la transformación (2.6b) nuevamente, se tienen finalmente las ecuaciones promediadas temporales de Navier-Stokes, también denominadas como: expresiones de “*Navier-Stokes Promediadas de Reynolds*” abreviadas como *RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes)* por sus siglas en inglés,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) + F_i. \quad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.11) describen las cantidades de flujo medio (\bar{u}_i y \bar{p}). Las ecuaciones son exactas ya que no se han introducido supuestos en su derivación; pero ya no forman un conjunto cerrado: debido a la no linealidad de la ecuación (2.2), el proceso de promediado introduce correlaciones desconocidas entre las velocidades fluctuantes ($\overline{u'_i u'_j}$). Físicamente, estas correlaciones, multiplicadas por la densidad ρ , representan el transporte de momento debido al movimiento fluctuante (turbulencia). $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ es el transporte de momento de x_i en la dirección x_j (o viceversa, $\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_j u'_i}$); estos actúan como esfuerzos en el fluido y se les llama esfuerzos turbulentos o de Reynolds. En la mayoría de las regiones del flujo, los esfuerzos turbulentos son mucho más grandes que los laminares ($\nu \partial \bar{u}_i / \partial x_j$), los cuales a menudo son considerados insignificantes (Rodi, 2000).

Las ecuaciones (2.8) y (2.11) pueden ser resueltas para valores medios de velocidad \bar{u}_i y presión \bar{p} solo cuando las correlaciones turbulentas $\overline{u'_i u'_j}$ pueden ser determinadas de alguna manera. La determinación de estas correlaciones es el principal problema en el cálculo de flujos turbulentos; en la literatura le han denominado como: “*problema de cerradura o clausura*” de las RANS. Para resolver este, se recurre al uso de modelos de turbulencia, los cuales introducen aproximaciones de estas correlaciones de cierto orden en términos de correlaciones de orden inferior o de cantidades de flujo medio. Las leyes descritas por un modelo de turbulencia simulan el carácter promedio de la turbulencia real, estas leyes son expresadas mediante ecuaciones algebraicas o diferenciales, las cuales junto con las ecuaciones de flujo medio (2.8) y (2.11) forman un sistema cerrado (Rodi, 2000).

En la literatura se encuentran diferentes modelos de turbulencia propuestos. La *Figura 2.3* muestra la clasificación general de los mismos, ordenados en base a su complejidad y costo de recurso computacional para su uso. En el presente trabajo de investigación se analizan y



utilizan los modelos más sencillos que corresponden a los de cero ecuaciones también conocidos como modelos simples algebraicos que involucran el concepto de longitud de mezcla, y que son detallados en subcapítulos posteriores de este documento. El motivo por el cual se analiza esta clase de modelos es, porque en la práctica ingenieril son los más utilizados para caracterizar los flujos a superficie libre por su sencillez y buen ajuste con respecto a datos experimentales.

En los siguientes subcapítulos, se describen de manera resumida algunos de los modelos expresados en la *Figura 2.3*.

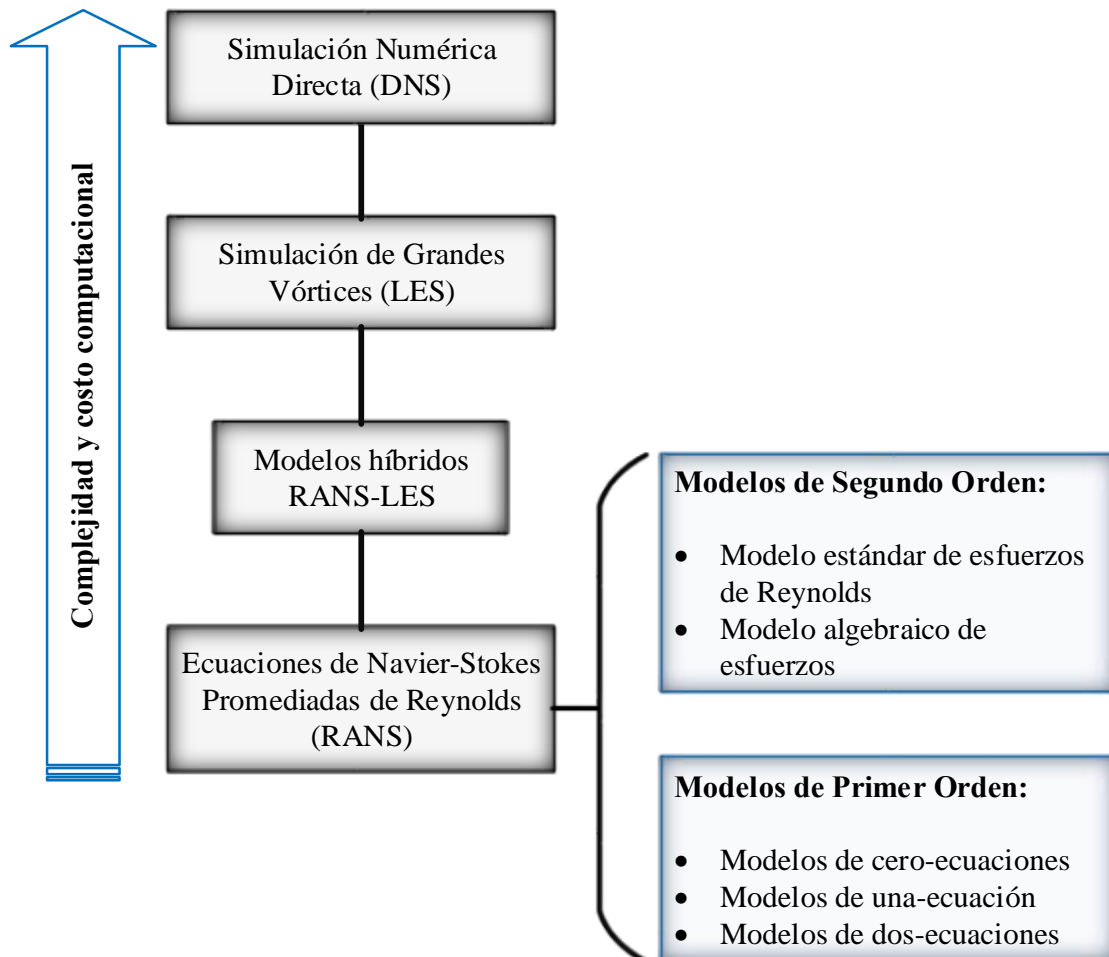


Figura 2.3 Clasificación general de los modelos de turbulencia

2.2.3 Simulación Numérica Directa (DNS)

La simulación numérica directa (DNS, *Direct Numerical Simulation*) es la rama de la CFD (*Computational Fluid Dynamics*) dedicada a la solución completa de las ecuaciones de Navier-Stokes (no promediadas), expresiones (2.1) y (2.2). Esta técnica surgió en 1922,



cuando el meteorólogo Richardson propuso esquemas numéricos para resolver de manera completa las ecuaciones de Navier-Stokes (Lesieur, Métais, & Comte, 2005). DNS difiere de los demás modelos en que resuelve la turbulencia explícitamente, es decir, no modela los términos de cerradura $\overline{u'_i u'_j}$ de las RANS. Esta técnica de modelación resulta difícil de aplicar (con los recursos computacionales de la actualidad) para flujos turbulentos con altos números de Reynolds, ya que se requiere resolver todas las escalas de movimiento que describen la turbulencia, desde la dimensión característica del problema L hasta la escala de Kolmogorov o de pequeños torbellinos η (ver *Figura 2.4*), expresadas respectivamente como sigue,

$$L = \frac{u_0^3}{\varepsilon}, \quad (2.12)$$

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad (2.13)$$

donde u_0 es la escala de velocidad y ε es la relación de pérdida de energía.

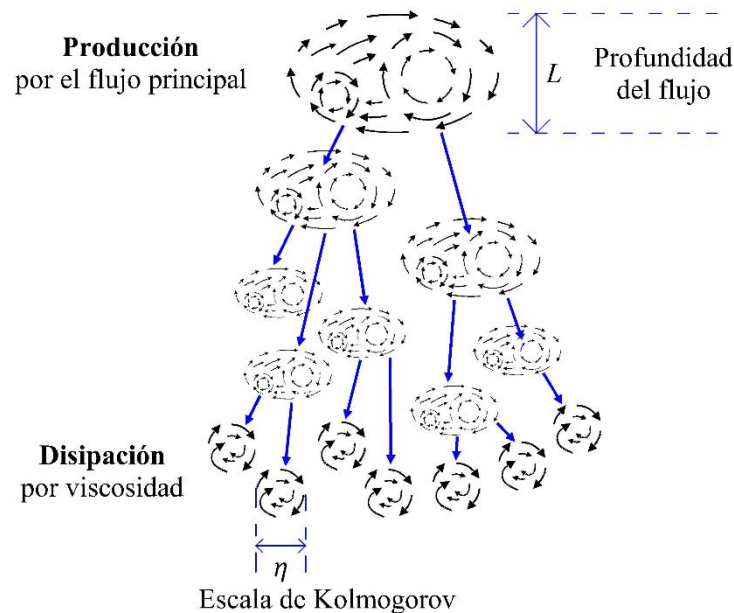


Figura 2.4 Escalas de movimiento en el proceso de turbulencia. Basado en Nikora (2010)

Por otra parte, Moin & Mahesh (1998) hacen énfasis en el cuidado de la solución numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes, debido a la amplia gama de escalas que se tienen en un flujo turbulento; resulta de gran importancia la revisión de las condiciones de frontera, y la discretización espacio-temporal.



DNS como herramienta de investigación permite obtener un conocimiento significativo de la física de la turbulencia para ciertas condiciones de flujo que no pueden ser representadas fácilmente de manera experimental y además ayuda al desarrollo y ajuste de modelos más simples (Moin & Mahesh, 1998). DNS es ampliamente descrita por Moin & Mahesh (1998), Coleman & Sandberg (2010) y Tryggvason, Scardovelli, & Zaleski (2011).

2.2.4 Simulación de Grandes Vórtices (LES)

En segundo lugar de la clasificación de modelos de turbulencia (basado en su complejidad, *Figura 2.3*), se encuentra LES, que se basa en un filtrado espacial de las ecuaciones de Navier-Stokes, de manera que se resuelven las grandes escalas (movimiento turbulento de grandes remolinos L), mientras que para las escalas más pequeñas se asume un modelo que permite considerar de forma aproximada su influencia en la variación general de los parámetros del flujo (Capote, Alvear, Abreu, Lázaro, & Espina, 2008).

Las ecuaciones que se emplean en LES se obtienen de manera análoga a las RANS, pero considerando la descomposición del vector velocidad como sigue,

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (2.14)$$

donde ahora \bar{u}_i es la componente de velocidad promediada espacial, que se obtiene en forma general, mediante un filtro espacial local definido por la convolución con una función de filtrado G , tal como sigue,

$$\bar{u}_i(x_i, t) = \int_D G(x_i - X_j) u_i(X_j, t) dX_j, \quad (2.15)$$

donde $G(x_i - X_j)$ es la función de filtrado aplicado a todos los puntos X_j del dominio de integración D , que es considerado el tamaño del filtro. La función de filtro G , puede depender del espacio o de la frecuencia. En la literatura se encuentran diferentes funciones de filtros, sin embargo, las de mayor aplicación son tres, dos de dependencia espacial, que son el filtro rectangular y gaussiano, y una que depende de la frecuencia de tipo filtro paso-bajo (Frisch, 1995; Layton & Rebholz, 2012; Sagaut, 2006).

De manera similar como ocurre en las RANS la descomposición y el filtrado espacial, traen como consecuencia la aparición de nuevas variables en el sistema de ecuaciones que obliga a emplear expresiones adicionales para cerrar el sistema, y modelar los componentes turbulentos de menor escala espacial (Capote et al., 2008).



De acuerdo con el método de filtrado y a la forma concreta de las ecuaciones de cierre se conocen varios submodelos dentro de LES, algunos de ellos son los siguientes:

1. Submodelo de Smagorinsky, descrito por Smagorinsky (1963)
2. Submodelo de similaridad de escala, descrito por Bardina, Ferziger & Reynolds (1980)
3. Submodelo dinámico de Germano, descrito por Germano, Piomelli, Moin & Cabot (1991)
4. Submodelos de función estructural, descrito por Lesieur & Métais (1996) y Métais & Ferziger (1997)

2.2.5 Modelos híbridos RANS-LES

De acuerdo con Piomelli (2008), el costo computacional para DNS aumenta en la proporción de Re^3 , y para el caso de LES, $Re^{2.4}$. Entonces, para el caso de flujos con alto número de Reynolds, resulta complicado aplicar DNS o LES, ya que computacionalmente se requiere de grandes recursos y tiempo de simulación. A partir de esto, surgen diferentes propuestas/alternativas para LES, que consisten en el uso de modelos más simples (derivados de las RANS) para resolver la zona de pared o bien la capa exterior, dependiendo de la zona de interés donde se requiera identificar con mayor detalle los efectos turbulentos.

En la literatura se encuentran diferentes propuestas o enfoques, para el acoplamiento de RANS-LES, por ejemplo, cuando se tiene interés en conocer el comportamiento turbulento con LES en la capa exterior, se tienen los siguientes enfoques, el primero, es pasar por alto la región de pared usando funciones simples (modelos algebraicos de cero-ecuaciones, RANS), y el segundo, acoplando débilmente a la zona de pared con algún modelo RANS de una o dos ecuaciones. Estos enfoques son detallados por Piomelli (2008).

La dificultad de estos modelos consiste en el acoplamiento de los límites en el mallado, es decir, aquellos puntos en los que se cambia de condición de modelado, ya sea de RANS a LES o viceversa; este proceso es descrito por Geurts & Probst (2013).

2.2.6 Modelos de segundo orden (RANS)

Los modelos de segundo orden son aplicados para dar solución al problema de cierre de las RANS. Estos modelos resuelven los esfuerzos turbulentos $\overline{u'_i u'_j}$ mediante la modelación de correlaciones de orden superior desconocidas que aparecen en las ecuaciones diferenciales de transporte, y, por tanto no utilizan la aproximación de Boussinesq. El problema es que ahora más términos se deben de modelar, estos son los momentos estadísticos de orden superior (correlaciones de tercer y cuarto orden), que tienen un efecto decreciente sobre las propiedades del flujo medio. La intención de estos modelos es, superar las limitaciones de



los modelos de primer orden que asumen turbulencia isotrópica. Los modelos de segundo orden más enunciados en la literatura son:

1. Modelo estándar de esfuerzos de Reynolds (RSM)
2. Modelo algebraico de esfuerzos (ASM)

Ambos modelos son brevemente descritos por Deng, Queutey, & Visonneau (2005).

2.2.7 Modelos de primer orden (RANS)

La mayoría de los modelos que caen en esta categoría aplican la aproximación de Boussinesq para solucionar el problema de cerradura de las RANS. El postulado publicado en 1877 por Boussinesq introduce el concepto de viscosidad de remolino asumiendo que, de manera similar a los esfuerzos viscosos en flujos laminares, los esfuerzos turbulentos son proporcionales a los gradientes de velocidad media (Schmitt, 2007). Para el caso de flujos incompresibles, este concepto puede expresarse como sigue,

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (2.16)$$

donde k es la energía cinética turbulenta, que se calcula con la expresión (2.17), δ_{ij} es el delta de Kronecker y ν_t es la viscosidad de remolino o turbulenta, la cual, a diferencia de la viscosidad molecular ν , no es una propiedad del fluido, pero si depende del nivel de turbulencia. ν_t puede variar significativamente de un punto a otro en el mismo flujo y también de un flujo a otro. La expresión (2.16) no constituye en sí un modelo de turbulencia, pero si proporciona el marco de referencia para la elaboración de un gran número de modelos (Rodi, 2000).

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2_1} + \overline{u'^2_2} + \overline{u'^2_3} \right). \quad (2.17)$$

Dentro de los modelos de primer orden hay subdivisiones, que de manera general son las siguientes:

1. Modelos de dos-ecuaciones
2. Modelos de una-ecuación
3. Modelos de cero-ecuaciones



Los modelos de dos ecuaciones son los más utilizados para el análisis de flujos tridimensionales en la actualidad; dentro de esta categoría se encuentran los siguientes modelos específicos:

1. Modelos k-epsilon ($k - \epsilon$)²
 - a) Modelo k-epsilon estándar
 - b) Modelo k-epsilon realizable
 - c) Modelo k-epsilon RNG

2. Modelos k-omega ($k - \omega$)³
 - a) Modelo k-omega de Wilcox
 - b) Modelo k-omega modificado de Wilcox
 - c) Modelo k-omega SST

Por otra parte, dentro de la categoría de modelos de una ecuación se encuentran los siguientes modelos específicos:

1. Modelo de Baldwin-Barth⁴
2. Modelo de Spalart-Allmaras⁵
3. Modelo de Prandtl⁶

Finalmente, los modelos más simples de acuerdo con la clasificación general, *Figura 2.3*, son los de cero-ecuaciones (modelos algebraicos) también denominados como *modelos de la ley de pared*. En el siguiente subcapítulo se describen algunos de estos modelos, que son de interés en el presente trabajo de investigación.

2.2.8 Modelos de la ley de pared

Los modelos de la ley de pared son utilizados como herramienta para la comprensión y análisis de flujos turbulentos de forma bidimensional y bajo condiciones de cantidades medias \bar{u}_i . Además, en estos modelos se asume régimen estacionario (permanente). Estos provienen de un análisis dimensional a partir de las ecuaciones RANS, que para flujos bidimensionales se escriben en forma extensa como sigue (Schlichting & Gersten, 2017),

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\overline{u_1'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\overline{u_1' u_2'} \right) + \nu \Delta \bar{u}_1, \quad (2.18)$$

² Los modelos k-epsilon son ampliamente descritos por Jones & Launder (1972), Launder & Sharma (1974), Bardina, Huang, & Coakley (1997) y Wilcox (2006)

³ Los modelos k-omega son descritos por Wilcox (1988), Wilcox (2006), Menter (1993) y Menter (1994)

⁴ Descrito por Wilcox (2006) y Baldwin & Barth (1990)

⁵ Descrito por Dacles-Mariani, Zilliac, Chow, & Bradshaw (1995) y Spalart & Allmaras (1992)

⁶ Descrito por Wilcox (2006)



$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} (-\overline{u'_1 u'_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (-\overline{u'^2_2}) + \nu \Delta \bar{u}_2, \quad (2.19)$$

donde Δ es el operador laplaciano.

2.2.8.1 Modelo de van Driest

Por su parte van Driest (1956) en su trabajo “*On Turbulent Flow Near a Wall*” expone un modelo generalizado. Para obtener el modelo propuesto de van Driest, en primera instancia se extraen los esfuerzos de corte totales τ de la ecuación (2.18), y mediante la integración en dirección vertical x_2 , se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) - \overline{u'_1 u'_2}, \quad (2.20)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación representa los esfuerzos debidos a la viscosidad del fluido, el segundo representa los esfuerzos turbulentos o esfuerzos de Reynolds. Para resolver los esfuerzos de Reynolds en esta clase de modelos se aplica la teoría de longitud de mezcla propuesta por Prandtl en 1925, que está representada por el siguiente modelo (Doshi & Gill, 1970; Keulegan, 1938),

$$-\overline{u'_1 u'_2} = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2, \quad (2.21)$$

donde l es la longitud de mezcla.

Fuentes (2011) define la longitud de mezcla como “*la distancia que una partícula fluida recorre sin perder su individualidad al mezclarse con sus vecinas, o bien como el diámetro de los agregados de partículas que avanzan juntas*”. La Figura 2.5 esquematiza el concepto de longitud de mezcla y las variables involucradas en la expresión (2.21).

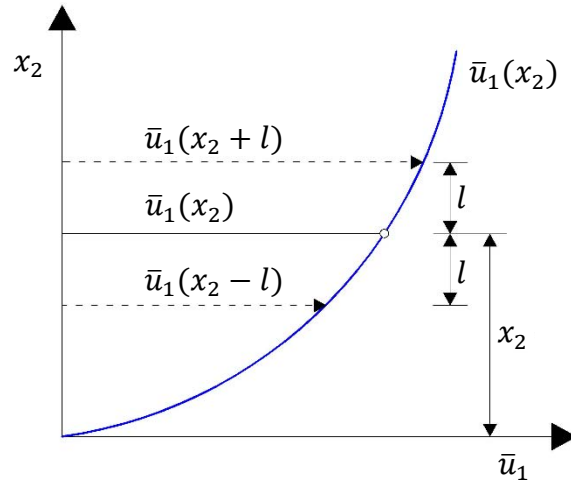


Figura 2.5 Concepto de longitud de mezcla. Basado en Doshi & Gill (1970)

Ahora, relacionando la expresión de velocidad de corte (1.9) con (2.20), se tiene,

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) - \overline{u_1' u_2'}, \quad (2.22)$$

y sustituyendo (2.21) en (2.22),

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) + l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2, \quad (2.23)$$

cómo se puede apreciar, en ambos términos del lado derecho de la ecuación se tiene la descripción del perfil de velocidades, siendo $\partial \bar{u}_1 / \partial x_2$.

Realizando un análisis dimensional (ver Anexo A) a (2.23) y despejando el término de interés que es la variación de la velocidad con respecto al tirante x_2 , se obtiene en forma adimensional la siguiente expresión,

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l^{+2}}}, \quad (2.24)$$

donde $u^+ = \bar{u}_1 / u_*$, $y^+ = x_2 u_* / \nu$ y $l^+ = l u_* / \nu$.



Para resolver el modelo (2.24) es necesario definir el modelo de longitud de mezcla. Por su parte Prandtl dio una distribución lineal (Tominaga & Nezu, 1992),

$$l = \kappa x_2, \quad (2.25)$$

donde l es la longitud de mezcla, κ es la constante de von Kármán y x_2 la coordenada vertical.

Por otro lado, van Driest (1956) introdujo una función de amortiguamiento en la distribución lineal de longitud de mezcla (2.25), para describir el efecto viscoso en la pared, como sigue,

$$l = \kappa x_2 \cdot \Gamma, \quad (2.26)$$

$$\Gamma = 1 - \exp \frac{-y^+}{B}, \quad (2.27)$$

donde Γ es la función de amortiguamiento y B es el coeficiente de amortiguamiento.

La función de amortiguamiento Γ describe la tasa de penetración de la turbulencia en la subcapa viscosa. Esto es, $\Gamma = 1$ significa un flujo totalmente turbulento, mientras $\Gamma = 0$ significa un flujo no turbulento. El coeficiente de amortiguamiento B es correlacionado con el espesor de la capa de amortiguamiento (Tominaga & Nezu, 1992).

Finalmente, el modelo de van Driest se obtiene sustituyendo (2.26) en la expresión (2.24), de la siguiente manera,

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\kappa y^+ \cdot \left(1 - \exp \frac{-y^+}{B} \right) \right]^2}}. \quad (2.28)$$

Integrando (2.28), se obtiene el perfil de velocidades en todas las regiones del flujo. De acuerdo con resultados experimentales, el modelo se ajusta correctamente con valores de $\kappa = 0.41$ y $B = 26$, para el caso de flujos en fondo liso, ya que, para fondos de rugosidad incompleta, el coeficiente de amortiguamiento es variable a diferencia de la constante de von Kármán que permanece estable (Tominaga & Nezu, 1992).

2.2.8.2 Modelo de Cebeci & Chang

El modelo de van Driest mencionado en el subcapítulo anterior no es válido para cauces completamente rugosos, en donde la subcapa viscosa desaparece en todas partes. Por su parte Cebeci & Chang (1978) introducen un término empírico para incorporar el efecto de la



rugosidad en la pared, modificando el concepto de longitud de mezcla propuesto por van Driest (2.26) y su función de amortiguamiento (2.27) sustituyendo $y^+ + \Delta y^+$ por y^+ ,

$$l^+ = \kappa(y^+ + \Delta y^+) \cdot \Gamma, \quad (2.29)$$

donde,

$$\Gamma = 1 - \exp\left(-\frac{y^+ + \Delta y^+}{B}\right). \quad (2.30)$$

Cebeci & Chang (1978), introdujeron el cambio de distancia desde el fondo, Δy^+ , que está empíricamente dado por,

$$\Delta y^+ = 0.9 \left[\sqrt{k_s^+} - k_s^+ \exp\left(-\frac{k_s^+}{6}\right) \right], \quad (2.31)$$

donde $k_s^+ = k_s u_* / \nu$ y k_s es la rugosidad absoluta.

Nótese que únicamente modificaron el modelo de longitud de mezcla, entonces, para obtener el modelo completo de Cebeci & Chang se sustituye (2.29) en (2.24),

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\kappa(y^+ + \Delta y^+) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+ + \Delta y^+}{B}\right) \right) \right]^2}}, \quad (2.32)$$

2.2.8.3 Modelo de von Kármán

De forma análoga al modelo de van Driest, el modelo de von Kármán surge a partir de un análisis dimensional de (2.23), sin embargo, von Kármán separa los términos viscosos de los turbulentos, obteniendo dos expresiones, la primera de ellas para la zona viscosa o subcapa laminar, expresión (2.33), y la segunda para la zona totalmente turbulenta (región exterior) donde los esfuerzos viscosos pierden influencia, expresión (2.34),

$$u^+ = y^+, \quad (2.33)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_2, \quad (2.34)$$



donde κ es la constante de von Kármán y C_2 es la constante de integración. El desarrollo detallado para la obtención de (2.33) y (2.34) se muestra en el Anexo B del presente documento. La expresión (2.34) es conocida como “ley logarítmica o log-law”.

El valor de la constante de von Kármán κ ha sido calculada experimentalmente por diferentes autores, sin embargo, el valor más aceptado de acuerdo con la literatura es de $\kappa = 0.4$ (Nezu & Nakagawa, 1993). En el caso de la constante de adición C_2 los valores obtenidos han sido muy variables. Por su parte, Zanoun, Durst, & Nagib (2003) muestran un gráfico de recopilación de valores obtenidos por diferentes autores para κ y C_2 , ver *Figura 2.6*; los valores obtenidos en su investigación se observan en la *Figura 2.7*. Nótese que el rango de los valores que muestran, oscila entre 0.33-0.45 para el valor de κ y entre 3.5-6.2 para el valor de C_2 ; en la literatura, la constante de von Kármán es considerada por algunos autores un parámetro universal, es decir, su valor se mantiene ante diferentes condiciones de flujo, a diferencia de la constante de adición que puede verse variable ante diferentes condiciones, donde una de ellas es el régimen del flujo, subcrítico o supercrítico, siendo este último el que mayor sensibilidad produce en la estimación de este parámetro.

George (2007) expone de manera extensa la controversia existente en la estimación de estos parámetros de la ley logarítmica. De lo anterior y de la visualización de la dispersión de los valores de estos parámetros ante las diferentes condiciones del flujo, se demuestra la sensibilidad del modelo de la ley logarítmica, cuestión que es tratada y expuesta durante el desarrollo del presente documento.

Por otra parte, von Kármán introdujo una expresión semi-empírica para representar aquella zona de transición entre la zona viscosa y la turbulenta, donde los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden (Shih, Povinelli, Liu, Potapczuk, & Lumley, 1999), comúnmente conocida como zona o capa de amortiguamiento/transición, y matemáticamente se expresa como sigue,

$$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.5, \quad (2.35)$$

La expresión (2.35) es únicamente válida, bajo un valor constante de $\kappa = 0.4$ y $C_2 = 5.5$, que fueron los valores determinados experimentalmente por von Kármán.



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

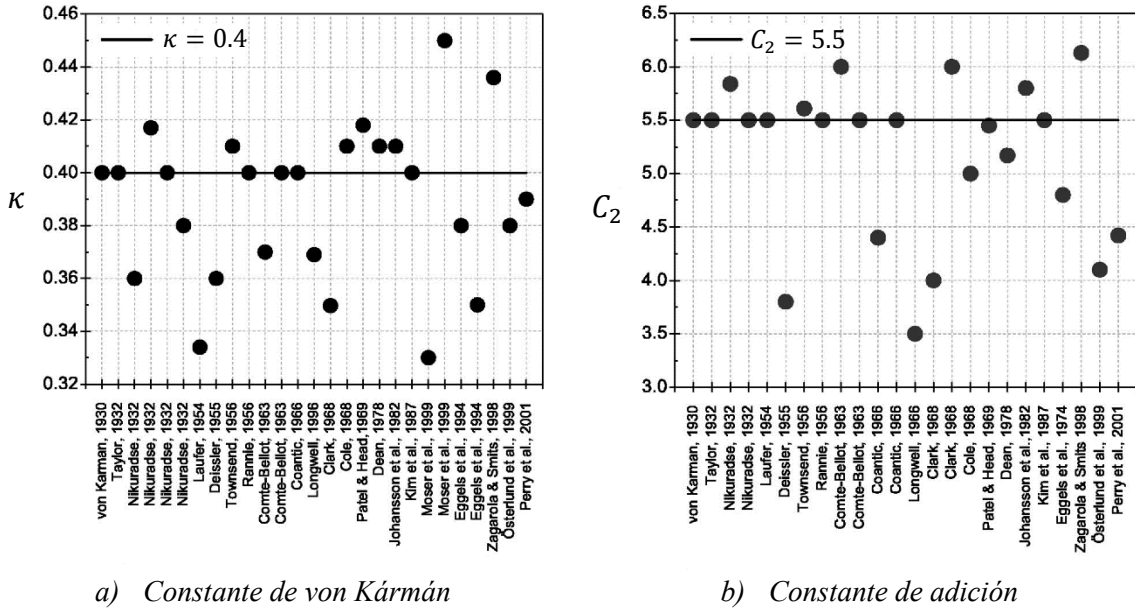
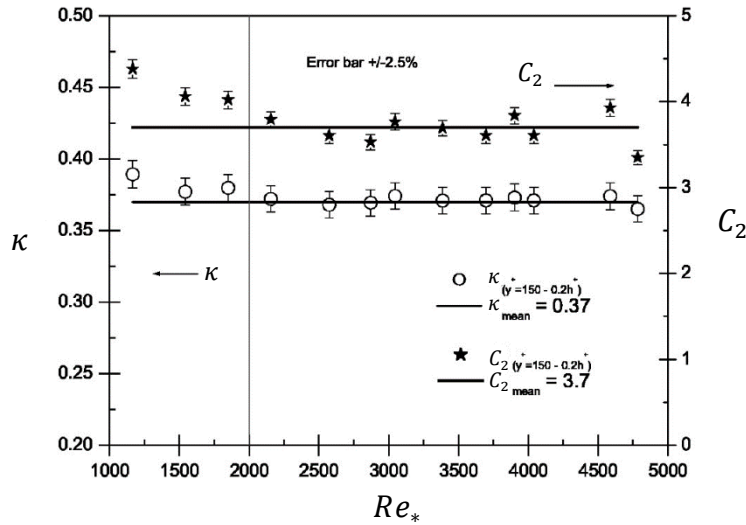


Figura 2.6 Valores de las constantes de la ley logarítmica obtenidos por varios investigadores. Tomado de Zanoun et al. (2003)





2.2.8.4 Modelo de Spalding

Spalding (1961) en su documento: *A Single Formula for the "Law of the Wall"*, presenta una fórmula basada en el modelo de von Kármán, que permite describir el perfil de velocidades en las diferentes regiones del flujo. Además, presenta una recopilación de modelos de la ley de pared, mismos que se presentan en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Fórmulas de "la ley de pared"

Autor	Rango de validez	Fórmulas
Prandtl	$0 \leq y^+ < 11.5$	$u^+ = y^+$
Taylor	$11.5 \leq y^+$	$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$
von Kármán	$\begin{cases} 0 \leq y^+ < 5 \\ 5 \leq y^+ < 30 \\ 30 \leq y^+ \end{cases}$	$\begin{cases} u^+ = y^+ \\ u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05 \\ u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \end{cases}$
Reichardt	$0 \leq y^+$	$u^+ = 2.5 \ln (1 + 0.4y^+) + 7.8 \left\{ 1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \left(\frac{y^+}{11} \right) e^{-0.33y^+} \right\}$
Deissler	$\begin{cases} 0 \leq y^+ < 26 \\ 26 \leq y^+ \end{cases}$	$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1 + n^2 u^+ y^+ (1 - e^{-n^2 u^+ y^+})}; n = 0.124$ $u^+ = 2.78 \ln y^+ + 3.8$
van Driest	$0 \leq y^+$	$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2dy^+}{1 + \{1 + 0.64y^{+2}[1 - \exp(y^+/26)]^2\}^{\frac{1}{2}}}$
Rannie	$0 \leq y^+ < 27.5$	$u^+ = 14.54 \tan h (0.0688 y^+)$
	$27.5 \leq y^+$	$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$

Nota. Tomado de Spalding (1961).

Como se observa en la Tabla 2.1, solo dos modelos presentan una ecuación, siendo los de Reichardt y van Driest, que son capaces de representar el perfil de velocidades en las diferentes zonas del flujo, sin embargo, la fórmula de Reichardt es muy compleja en su forma y por otro lado la de van Driest requiere ser resuelta mediante evaluación numérica. Por tanto, se tiene la necesidad de una fórmula más sencilla y fácil de evaluar. Los demás modelos consideran más de una expresión, siendo el modelo de von Kármán el que más presenta; dos de sus expresiones representan las zonas viscosa y turbulenta, y la tercera es para unir dichas zonas, ver subcapítulo 0. De acuerdo con la literatura, el modelo de von Kármán es el más



aceptado por su sencillez y por su buen ajuste con resultados experimentales (Nezu & Nakagawa, 1993).

El surgimiento del modelo de Spalding, en base al modelo de von Kármán, es a partir de los siguientes problemas planteados (Spalding, 1961),

1. Se requiere una expresión que pase por el punto: $y^+ = 0, u^+ = 0$;
2. Que sea tangencial en los puntos: $u^+ = y^+$;
3. Que sea asintótico a lo largo de y^+ para,

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5, \quad (2.36)$$

4. Que se ajuste a los puntos experimentales en los valores intermedios de y^+ (zona de amortiguamiento).

La gran mayoría de los modelos de la ley de pared presentes en la literatura, expresan u^+ en función de y^+ , sin embargo, esto no es obligatoriamente necesario ya que puede expresarse y^+ en función de u^+ , resultando una expresión de misma calidad de ajuste a los datos experimentales (Spalding, 1961). Una vez establecido lo anterior se busca una relación $y^+(u^+)$ tal que,

cerca de $u^+ = 0$,

$$y^+ = u^+, \quad (2.37)$$

y a lo largo de u^+ ,

$$y^+ = 0.1108e^{0.4u^+}. \quad (2.38)$$

La expresión (2.38) se deriva directamente de (2.36).

Ahora, expandiendo en serie de Maclaurin (centrada en cero) (2.38) hasta los términos de tercer orden, se obtiene,

$$f(u^+) = 0.1108 \left(1 + 0.4u^+ + \frac{(0.4u^+)^2}{2!} + \frac{(0.4u^+)^3}{3!} \right), \quad (2.39)$$

el modelo queda definido finalmente de la siguiente manera,

$$y^+ = u^+ + 0.1108 \left(e^{0.4u^+} - 1 - 0.4u^+ - \frac{(0.4u^+)^2}{2!} - \frac{(0.4u^+)^3}{3!} \right), \quad (2.40)$$



La expansión en serie es con la finalidad de que el modelo (2.40), ante bajos valores de u^+ no tenga contaminación de esfuerzos turbulentos, ya que corresponde únicamente al modelo viscoso representar dicha zona, y de la misma manera ante altos valores de u^+ , que no se presente contaminación de esfuerzos viscosos. De acuerdo con Spalding (1961) el truncado de la serie hasta los términos de tercer orden favorece la buena representación del modelo con respecto a valores experimentales obtenidos en las diferentes regiones del flujo; para algunos casos puede incluso tener buena representación truncando la serie ya sea hasta los términos de segundo o cuarto orden (ver siguiente subcapítulo).

2.2.8.5 Representación de los modelos de la ley de pared

Los modelos de la ley de pared expuestos en subcapítulos anteriores son representados gráficamente como sigue, ver *Figura 2.8*,

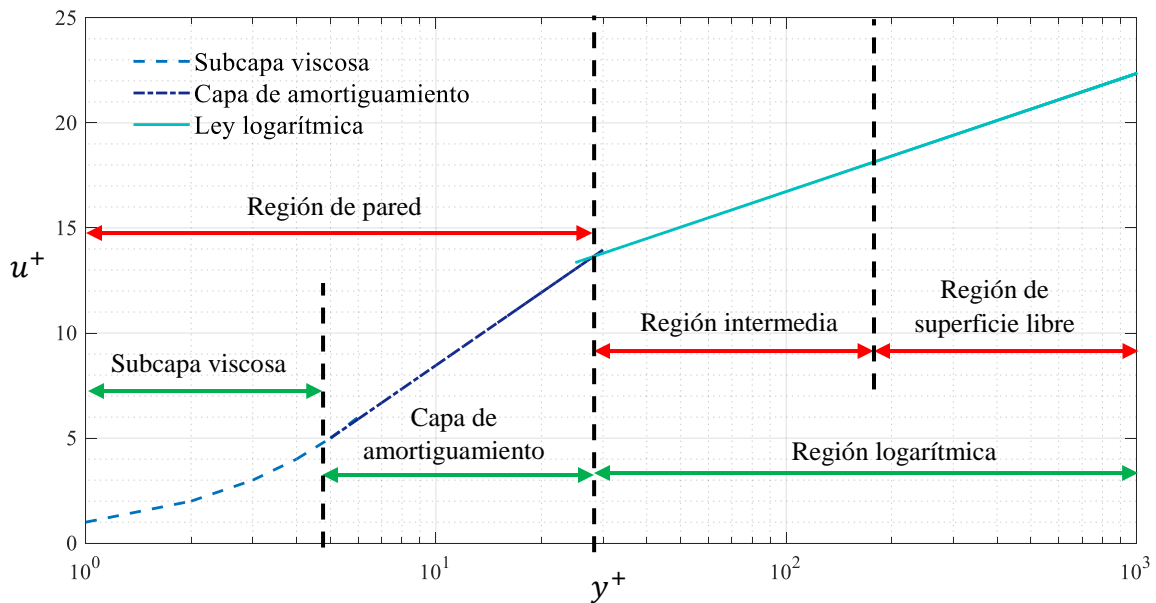


Figura 2.8 Representación de los modelos de la ley de pared. Modelo de von Kármán

En la *Figura 2.8* se presenta gráficamente el modelo de von Kármán considerando sus tres expresiones para las diferentes zonas del flujo y asumiendo los valores presentados en la *Tabla 2.1*. Nótese que las zonas definidas por Prandtl y von Kármán (indicadas con las flechas verdes) no son iguales a la subdivisión planteada por Nezu & Nakagawa (1993) (indicadas con flechas rojas), en el primer caso, Prandtl y von Kármán generan la división basada en la influencia de los esfuerzos (viscosos o turbulentos) en el perfil de velocidades medias, por su parte Nezu & Nakagawa lo hacen basado en las escalas de velocidades y longitudes que rigen la distribución de velocidades medias. Además, el gráfico se encuentra en escala



semilogarítmica con la finalidad de mejorar la visualización de las diferentes zonas o regiones del perfil.

El modelo de van Driest (2.28), es una ecuación diferencial ordinaria y es posible resolverla mediante la aplicación de un método numérico para problemas de valor inicial (Euler, Taylor, Runge-Kutta, etc.) (Burden & Faires, 2011), en este caso se aplica el método de Runge-Kutta de cuarto orden, y se obtiene la siguiente representación,

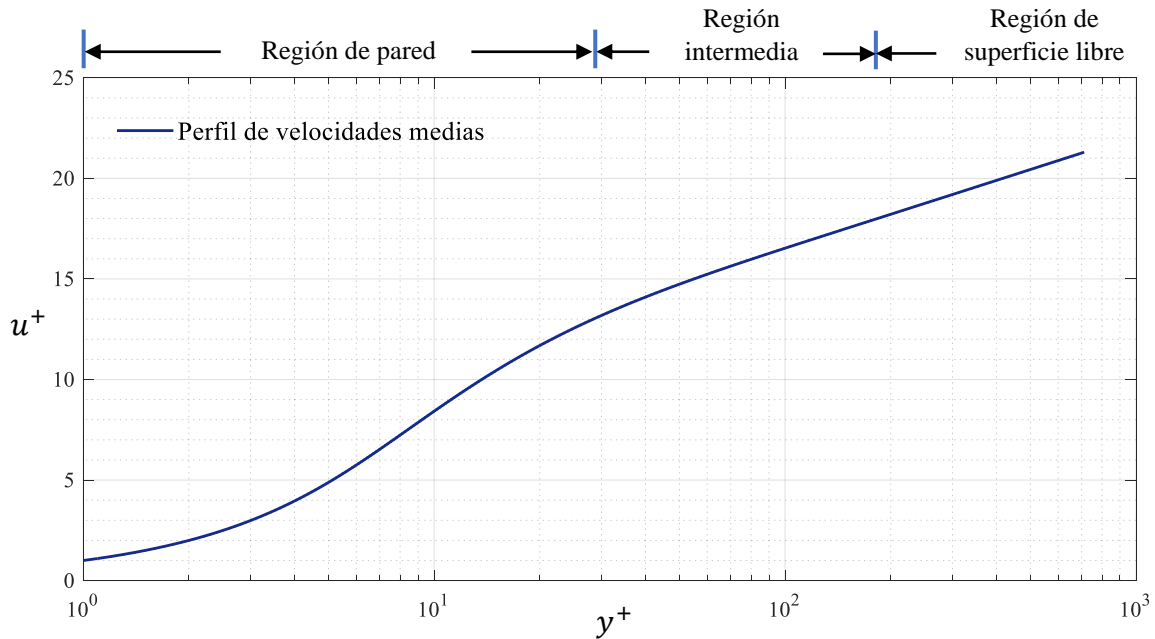


Figura 2.9 Modelo de van Driest, perfil de velocidades completo

La Figura 2.9 muestra el perfil de velocidades medias obtenido del modelo de van Driest en todas las zonas del flujo asumiendo los siguientes valores, $\kappa = 0.41$ y $B = 26$; que se ajustan al modelo de von Kármán con valores de $\kappa = 0.41$ y $C_2 = 5.5$.

El modelo de Cebeci & Chang se resuelve de la misma forma que el modelo de van Driest y es únicamente diferenciable (en el sentido visual) del modelo de van Driest para casos donde la subcapa viscosa desaparece, es decir, para el caso de flujos en canales completamente rugosos, ver Figura 2.10.

En la literatura se encuentran tres diferentes categorías para clasificar los efectos de rugosidad del fondo, dadas por las siguientes relaciones (Nezu & Nakagawa, 1993; Sotelo Ávila, 2002),

1. Hidráulicamente liso ($k_s^+ < 5$)
2. Rugosidad incompleta ($5 \leq k_s^+ \leq 70$)
3. Completamente rugoso ($k_s^+ > 70$)



Para comprender el comportamiento del modelo de Cebeci & Chang ante las tres diferentes categorías se muestra la *Figura 2.10*.

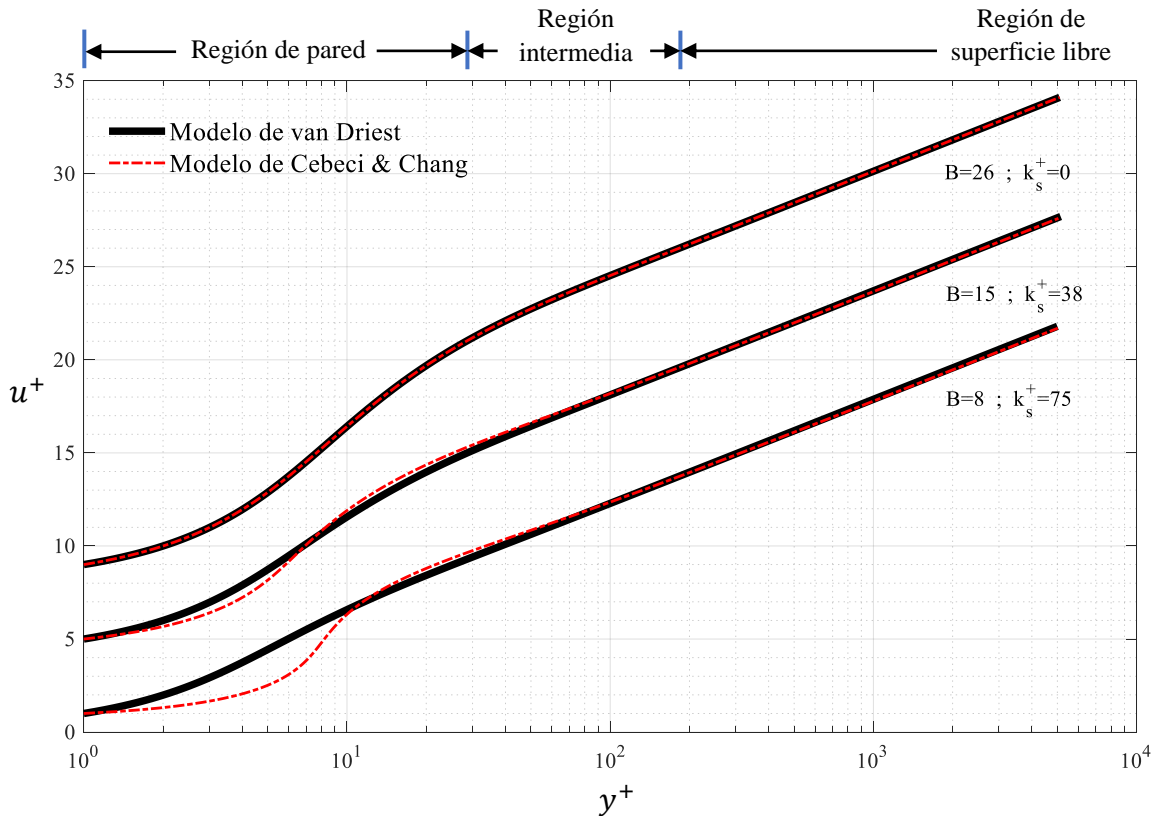


Figura 2.10 Comportamiento del modelo de Cebeci & Chang vs el modelo de van Driest en las tres categorías de rugosidad adimensional k_s^+ , $\kappa = 0.41$

Como se menciona en el subcapítulo 2.2.8.4, el modelo de Spalding considera la expansión en serie de Maclaurin del modelo que representa la zona turbulenta dado por la expresión (2.38). De acuerdo con Spalding (1961), truncando la serie en los términos de tercer orden se obtiene buen ajuste con respecto a datos experimentales obtenidos, sin embargo, es posible obtener un buen ajuste incluso truncando la serie hasta los términos ya sea de segundo o cuarto orden; para una mejor comprensión se presenta la *Figura 2.11*.

La *Figura 2.11* muestra el modelo de Spalding para tres diferentes consideraciones de la expansión en serie, la primera de ellas es considerándose hasta los términos de segundo orden (línea punteada), la segunda hasta los términos de tercer orden (línea continua) y la tercera hasta los términos de cuarto orden (línea de guion). Las líneas indicadas en color azul son las expansiones en serie evaluadas para valores de u^+ ; nótese que conforme se avanza en el eje de u^+ la función se desprende de la ley logarítmica tomando un comportamiento similar al de la función que representa la subcapa viscosa, siendo mejor para el caso número tres (cuarto orden), lo anterior permite que al evaluar el modelo de Spalding en la zona viscosa el modelo de la zona turbulenta no tenga influencia y viceversa; además permite que en la zona de



transición se produzca un efecto de amortiguamiento similar al que se presenta en el modelo de van Driest.

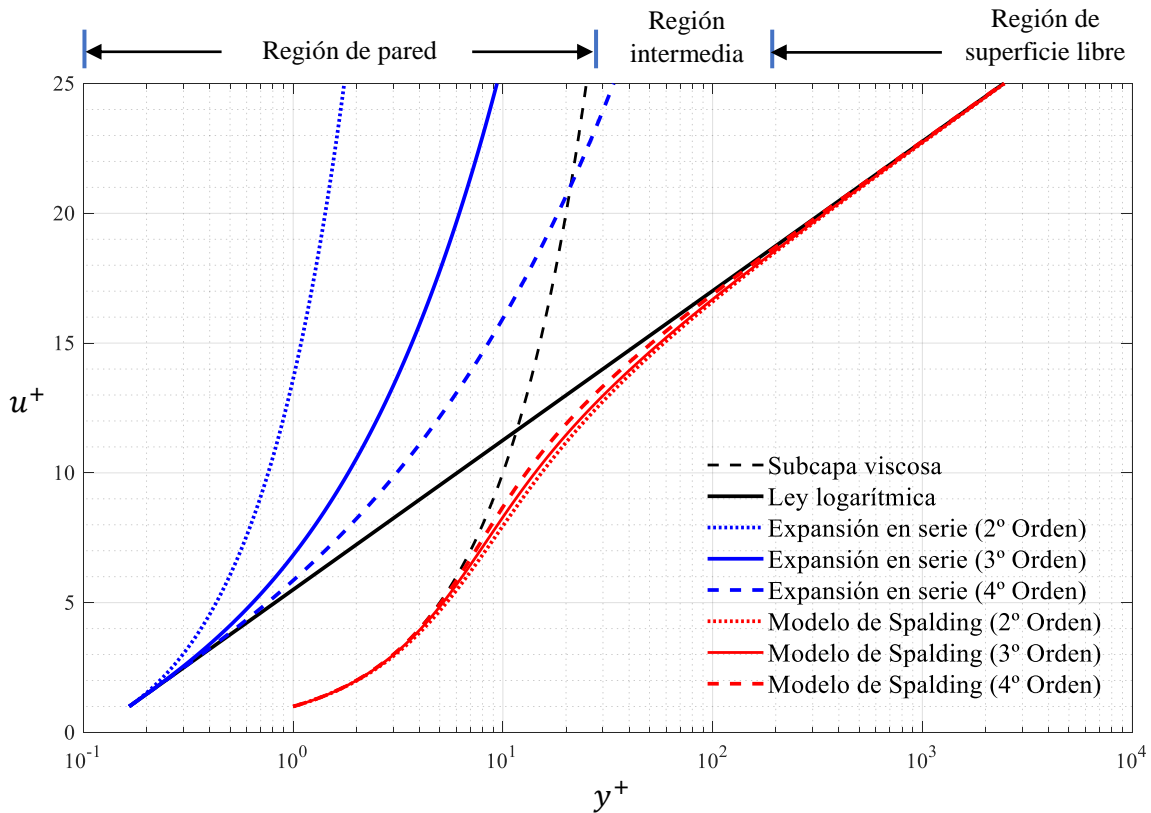


Figura 2.11 Modelo de Spalding considerando expansión en serie hasta los términos de segundo, tercer y cuarto orden

2.3 Métodos de estimación de la velocidad de corte

Nezu & Nakagawa (1993) enlistan cinco métodos para determinar la velocidad de corte, mismos que se enumeran a continuación,

- a) u_* puede ser evaluada por medio de la pendiente del canal $S \equiv \sin \theta = S_f$ bajo las condiciones de flujo normal y uniforme, es decir, $dh/dx = 0$, como sigue,

$$u_* = \sqrt{ghS}, \quad (2.41)$$

- b) u_* puede ser determinada de la medición de distribución de velocidad media $\bar{u}_1(x_2)$ en conjunto con la ley logarítmica, expresión (2.34),

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_2,$$



- c) u_* puede ser determinada de la medición de distribución de los esfuerzos de Reynolds $-\overline{u'_1 u'_2}(x_2)$, en conjunto con la siguiente expresión (modelo de van Driest),

$$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{u'_1 u'_2} + \nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = u_*^2 (1 - \xi), \quad (2.42)$$

donde $\xi = x_2/h$.

- d) En caso de la existencia de la subcapa viscosa, u_* puede ser determinada de la medición de distribución de velocidad de la misma, con ayuda de la expresión (2.33),

$$u^+ = y^+,$$

- e) Finalmente, u_* puede ser determinada mediante mediciones directas del esfuerzo cortante con un tubo Preston.

El primer método (a) es el más simple, y ha sido utilizado en el estudio de turbulencia por diversos investigadores, sin embargo, la precisión de la ecuación (2.41) depende directamente de las ondulaciones del fondo del canal por pequeñas que sean y de la superficie libre de agua, en otras palabras, depende de la precisión en la medición de la pendiente del fondo y del tirante del flujo, siendo el primero el que mayor error aporta en la evaluación de la velocidad de corte ante bajas pendientes del fondo ($S \rightarrow 0$), ver Anexo C. Además, la velocidad de corte evaluada a partir del modelo clásico (2.41) se considera como un parámetro global del flujo y no local, por tanto, no puede ser adecuado para la evaluación de características turbulentas (Nezu & Nakagawa, 1993).

El segundo método (b), considera un análisis estadístico, asumiendo valores para la constante de von Kármán κ y de adición C_2 . Generalmente se toman los valores obtenidos por Nikuradse, que son $\kappa = 0.4$ y $C_2 = 5.5$ (Zanoun et al., 2003). Asumiendo estos valores, la única variable a determinar es la velocidad de corte u_* ya que la velocidad media $\bar{u}_1(x_2)$ se obtiene mediante medición experimental junto con la coordenada vertical, y el valor de la viscosidad cinemática ν se asigna de acuerdo con la temperatura del agua. Entonces la velocidad de corte se despeja de (2.34), obteniendo,

$$u_{*i}(x_2, \bar{u}_1, u_{*i}) = \frac{\bar{u}_1}{\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2 u_{*i}}{\nu} \right) + C_2}, \quad (2.43)$$

donde i indica la posición espacial (en la vertical). La expresión (2.43) tiene implícita la variable a determinar que es la velocidad de corte u_* , entonces, para solucionar la ecuación en cada punto de medición i , se aplica un algoritmo numérico utilizado para la solución de ecuaciones de una variable (bisección, punto fijo, Newton) ampliamente descritos en la literatura, ver por ejemplo Burden & Faires (2011).



Finalmente, la velocidad de corte se obtiene con el cálculo de la mediana estadística de los valores u_{*i} obtenidos, esto debido a la baja cantidad de puntos que regularmente se miden en la vertical y por el desconocimiento de la función de densidad de probabilidad, que de acuerdo con resultados obtenidos no es de tendencia central (Mendoza & Aguilar, 2016). La desventaja de este método radica en la variación de los parámetros κ y C_2 de la ley logarítmica tal como se presentó en el subcapítulo 2.2.8.3.

El tercer método (c) requiere la estimación de los esfuerzos de Reynolds. Para aplicar este método es necesario utilizar un dispositivo de medición de alta frecuencia para tomar las muestras de velocidad instantánea.

A partir del cálculo de los esfuerzos de Reynolds se estima la velocidad de corte en cada punto medición i con la siguiente ecuación,

$$u_{*i}(x_2, \bar{u}_1, \overline{u'_1 u'_2}) = \left[\frac{-\overline{u'_1 u'_2} + \nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}}{(1 - \xi)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.44)$$

el término $\partial \bar{u}_1 / \partial x_2$ se evalúa de forma discreta aplicando una aproximación en diferencia finita con los valores de velocidad media obtenidos $\bar{u}_1(x_2)$, por lo tanto, es recomendable tomar muestras de velocidad con una separación en la vertical lo suficientemente pequeña para evitar errores en la evaluación de este término. El valor final de u_* se calcula de manera análoga al método (b).

Actualmente, con el avance tecnológico de dispositivos medidores de velocidad se ha logrado aplicar el método (c) y obtener el perfil de esfuerzos de Reynolds. La expresión (2.42) es diferente de (2.22), ya que se agrega el término $(1 - \xi)$; este se anexa basado en resultados experimentales obtenidos en los perfiles de esfuerzos de Reynolds por diferentes investigadores. Por su parte, Yang (2005) muestra resultados obtenidos de mediciones con LDA en un canal rectangular abierto en diferentes puntos de la sección transversal (x_3) donde se cumple la tendencia $(1 - \xi)$, ver *Figura 2.12*.

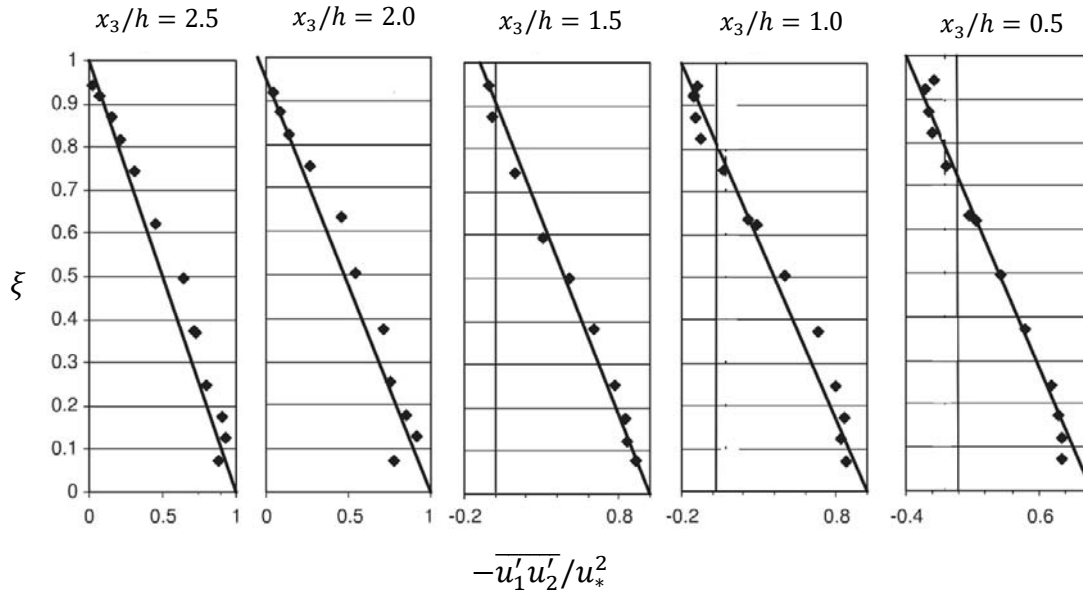


Figura 2.12 Perfiles de esfuerzos de Reynolds en canal rectangular abierto para $b/h = 5$. Tomado de Yang (2005)

El cuarto método (d), como se indica, es únicamente aplicable en el caso de la existencia de la subcapa viscosa (siendo el modelo que la representa), es decir, para casos de flujos en canales de fondo liso. De ser posible aplicar este método, la velocidad de corte se obtiene de la misma forma que el método (b), despejando la variable de interés u_* ,

$$u_{*i}(x_2, \bar{u}_1, u_{*i}) = \frac{\bar{u}_1 \nu}{x_2 u_{*i}}, \quad (2.45)$$

y utilizando un algoritmo numérico para su solución, para finalmente calcular la mediana estadística. La desventaja de este método consiste en la dificultad de medir en la zona viscosa y al mismo tiempo obtener la coordenada vertical (x_2) con precisión, situación que complica la aplicación del método; y siendo prácticamente imposible en el caso de flujos de fondo rugoso.

Finalmente, el quinto método (e) consiste en un dispositivo que permite medir el esfuerzo cortante directamente, conocido como tubo Preston. Esta técnica surgió en 1954 cuando Preston sugirió una relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad cerca del fondo bajo ciertas condiciones de idealización desarrolladas, y esto puede ser aplicado en un sentido más general, para canales de características similares (Ferriss, 1965; Thornton, Cox, & Sclafani, 2008). El dispositivo Preston consiste en un tubo de Pitot estático, que de manera general se puede representar su configuración con la *Figura 2.13*.



1. Línea de presión total
2. Línea de presión estática
3. Puerto dinámico de tubo Preston
4. Puerto estático de tubo Preston
5. Carcasa de tubo Preston
6. Punto de medición

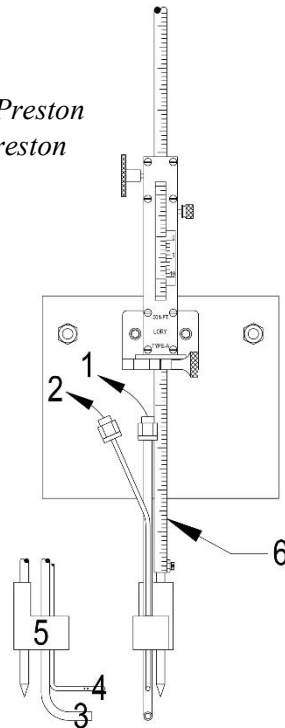


Figura 2.13 Configuración de tubo Preston. Tomado de Thornton et al. (2008)

La desventaja del tubo Preston radica en la determinación de la curva de calibración, que requiere de valores de esfuerzo cortante conocidos, y para el caso de fondos rugosos se requiere una curva de calibración para cada altura de rugosidad k_s (Jin, 1995).

2.4 Características de la turbulencia

2.4.1 Espectro de amplitud

El análisis espectral de una señal discreta tiene por objeto la descomposición de dicha señal en sus diversas componentes dentro del dominio de la frecuencia. Para llevar a cabo el análisis se utiliza la transformada discreta de Fourier, que consiste en una herramienta matemática empleada para transformar señales que se encuentran en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. La transformada discreta (DFT) e inversa de Fourier (IDFT) se expresan como sigue,

$$X(k) = \sum_{j=1}^N u_i(x_i, j) e^{-i\omega_n(j-1)(k-1)} \quad (2.46)$$



$$u_i(x_i, j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(k) e^{i\omega_n(j-1)(k-1)}, \quad (2.47)$$

donde $u_i(x_i, j)$ es la señal discreta de entrada, x_i es el indicador espacial, j el indicador de muestra temporal, $\omega_n = 2\pi/N$ es la frecuencia angular fundamental, $(k-1)\omega_n$ corresponde al k -ésimo armónico de la frecuencia fundamental y $X(k)$ son los coeficientes complejos de Fourier.

La expresión (2.46) se utiliza para calcular todos los coeficientes complejos de Fourier a partir de una señal periódica $u_i(x_i, j)$ dada; y se le suele denominar ecuación de análisis. Por otra parte, la ecuación (2.47) indica como reconstruir la señal $u_i(x_i, j)$ a partir de un conjunto de coeficientes $X(k)$ dados, y se le suele llamar ecuación de síntesis (Oppenheim, 1973; Porat, 1997).

Los coeficientes de Fourier $X(k)$ son números complejos, de modo que se pueden expresar en forma polar como sigue,

$$X(k) = |X(k)| e^{i \arg(X(k))}, \quad (2.48)$$

donde $|X(k)|$ define la amplitud del k -ésimo componente armónico de la señal $u_i(x_i, j)$, y el gráfico de $|X(k)|$ contra la frecuencia permite obtener el espectro de amplitud discreto de la señal, ver *Figura 2.14*. El gráfico del $\arg(X(k))$ en función de la frecuencia se denomina espectro de fase discreto. Se dice que el espectro es discreto porque tanto la amplitud como la fase de $X(k)$ están concentradas en las frecuencias localizadas en la señal de entrada y no están definidas de manera continua (Oppenheim, 1973; Porat, 1997).

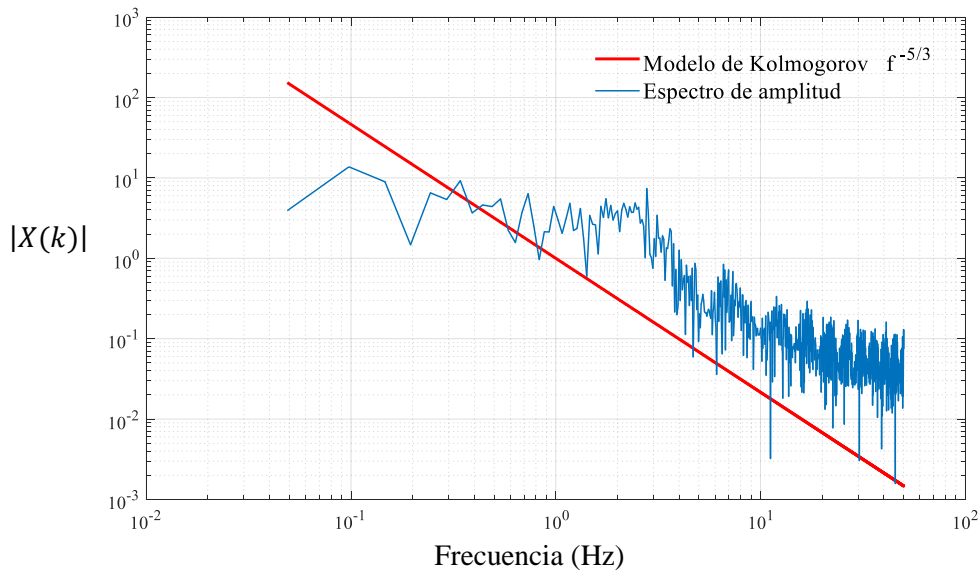


Figura 2.14 Espectro de amplitud



La *Figura 2.14* muestra el espectro de amplitud (también llamado espectro de frecuencias) de una señal discreta obtenida en una prueba experimental que se llevó a cabo en el canal experimental del laboratorio de posgrado IMTA-UNAM con flujo turbulento totalmente desarrollado, con una frecuencia de muestro de $f = 100$ Hz, donde la línea continua en color azul indica el espectro obtenido de la aplicación del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) que reduce las operaciones de cálculo de N^2 a $N \log_2(N)$, el único requisito es que el número de puntos en la serie (muestras) tiene que ser una potencia de 2 (2^N puntos). La línea continua en color rojo indica el modelo de espectro de Kolmogorov. La frecuencia máxima visualizada en el eje horizontal del gráfico es $f = 50$ Hz en cumplimiento con el teorema de Nyquist, que indica que para la reconstrucción exacta de una señal periódica se requiere de una tasa de muestreo igual al doble o superior.

De acuerdo con Nezu & Nakagawa (1993) y Schlichting & Gersten (2017) a partir del espectro de amplitud se puede obtener el espectro de energía en función del número de onda $E(k_w)$, aplicando las siguientes expresiones,

$$E(k_w) = \left(\frac{\bar{u}_i}{2\pi}\right) |X(k)| \quad (2.49)$$

$$k_w = \frac{2\pi f}{\bar{u}_i} \quad (2.50)$$

donde f es la frecuencia, \bar{u}_i es la velocidad media en dirección i y k_w es el número de onda.

2.4.2 Funciones universales de intensidad de turbulencia

En la literatura se encuentran diferentes expresiones semi-teóricas para obtener las relaciones de intensidad de turbulencia, entre las cuales se tienen las siguientes para cada componente vectorial (Nezu & Nakagawa, 1993):

$$\frac{\sqrt{u_1'^2}}{u_*} = D_1 \exp(-\lambda_1 \xi), \quad (2.51)$$

$$\frac{\sqrt{u_2'^2}}{u_*} = D_2 \exp(-\lambda_2 \xi), \quad (2.52)$$

$$\frac{\sqrt{u_3'^2}}{u_*} = D_3 \exp(-\lambda_3 \xi), \quad (2.53)$$



donde D_1, D_2, D_3 y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son constantes empíricas. Nezu & Rodi (1986) muestran valores obtenidos para estas constantes basadas en resultados experimentales realizados con LDA en dos dimensiones (x_1 y x_2), siendo los siguientes:

$$D_1 = 2.26, \quad \lambda_1 = 0.88, \quad D_2 = 1.23, \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0.67 \quad (2.54)$$

De acuerdo con Tominaga & Nezu (1992) los valores son independientes de los números de Reynolds y Froude. Sustituyendo los valores que obtuvieron, las expresiones (2.51) y (2.52) se convierten en:

$$\frac{\sqrt{u_1'^2}}{u_*} = 2.26 \exp(-0.88\xi), \quad (2.55)$$

$$\frac{\sqrt{u_2'^2}}{u_*} = 1.23 \exp(-0.67\xi), \quad (2.56)$$

Los resultados de intensidades de turbulencia en u_1 y u_2 obtenidos por Nezu & Rodi (1986) se muestran en la *Figura 2.15*, *Figura 2.16* y *Figura 2.17*.

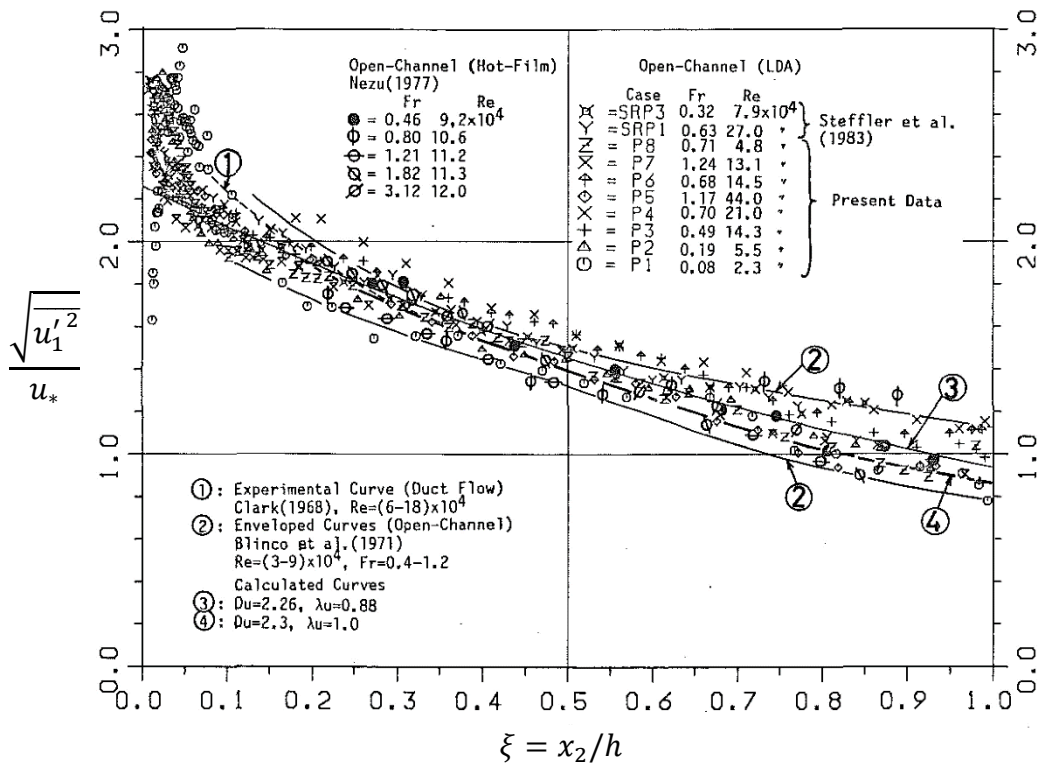


Figura 2.15 Intensidad de turbulencia en dirección principal u_1 , región exterior. Tomado de Nezu & Rodi (1986)

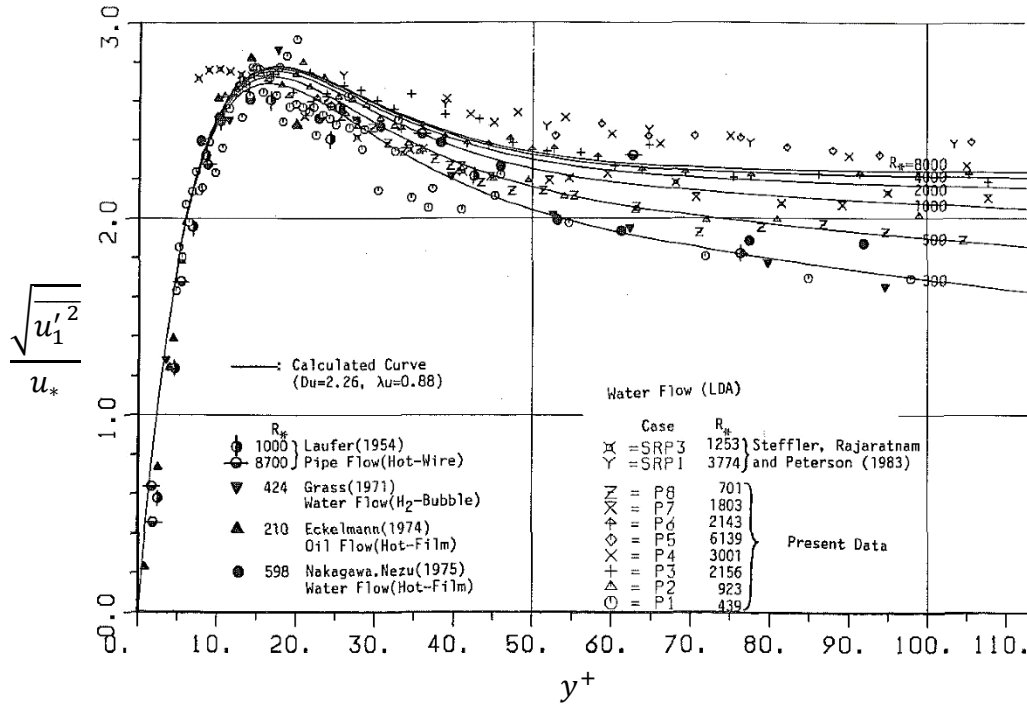


Figura 2.16 Intensidad de turbulencia en dirección principal u_1 , región de pared. Tomado de Nezu & Rodi (1986)

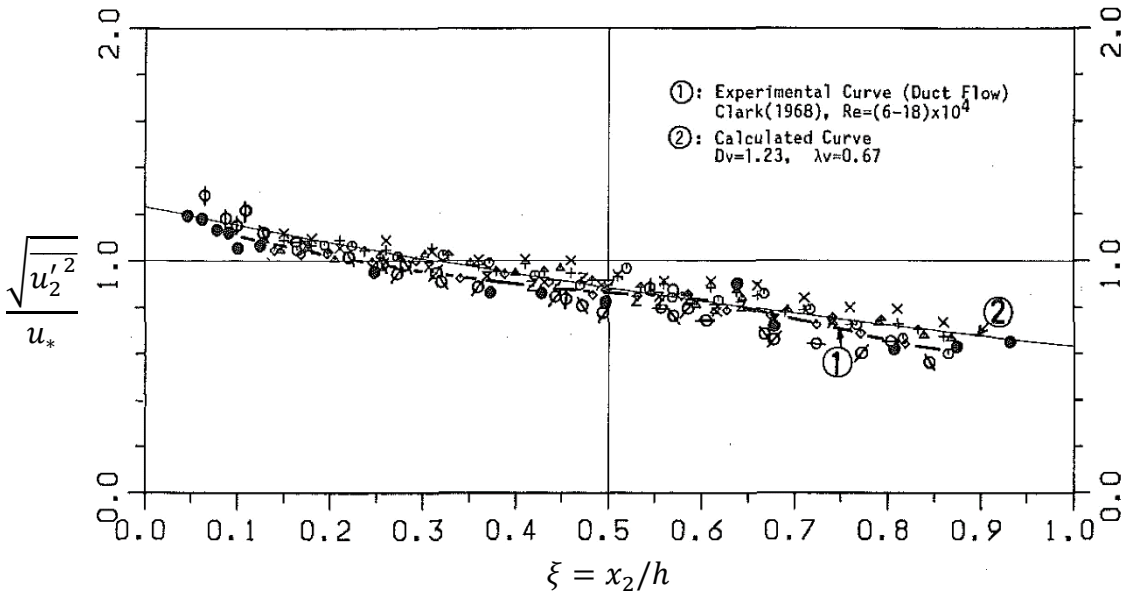


Figura 2.17 Intensidad de turbulencia en dirección u_2 (misma simbología que la Figura 2.16). Tomado de Nezu & Rodi (1986)



2.5 Conclusión del capítulo

En este apartado se describieron las características principales de los flujos turbulentos a superficie libre, además se presentó la subdivisión del flujo descrita por Nezu & Nakagawa (1993) que es de gran importancia para comprender la influencia de las escalas de longitud y velocidad en la distribución del perfil de velocidades medias.

Los modelos de turbulencia se describieron brevemente desde su origen teórico (problema de cerradura), y se presentó su clasificación en base a la complejidad y costo computacional para su aplicación, donde DNS representa la técnica de mayor requerimiento computacional, que actualmente a pesar del gran avance tecnológico es difícil implementar ante altos números de Reynolds. Lo anterior da origen al segundo lugar de la clasificación, LES, que disminuye los requerimientos computacionales mediante la aplicación de un filtrado espacial de las ecuaciones de Navier-Stokes, sin embargo, a pesar de esto, la complejidad no disminuye en gran medida de acuerdo con Piomelli (2008). Posteriormente se encuentran los modelos híbridos, que combinan la técnica LES y RANS basándose en el problema a estudiar, y finalmente están los modelos RANS que son los más aplicados en la ingeniería hidráulica por su fácil implementación en comparación con los modelos de mayor nivel, además, han sido aceptados en gran medida por su buen ajuste con resultados experimentales.

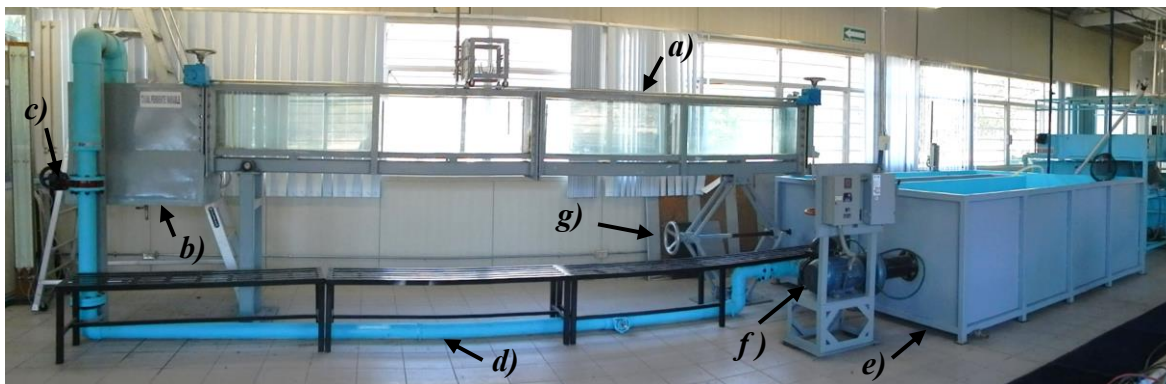
Los modelos CFD que utilizan las ecuaciones RANS, incluyen un modelo de la ley de pared para resolver la zona cercana al fondo. El concepto de “ley de pared” fue inicialmente introducido por Spalding (1961). Los modelos de la ley de pared se originan de un análisis bidimensional del flujo con las ecuaciones RANS y son ampliamente aplicados para obtener soluciones prácticas en la ingeniería hidráulica por su sencillez y buen ajuste con resultados experimentales. De acuerdo con Zanoun et al. (2003) y George (2007) el modelo de von Kármán es el más empleado en la práctica ingenieril para la caracterización de flujos a superficie libre.

Finalmente, se detallaron los métodos descritos por Nezu & Nakagawa (1993) para estimar la velocidad de corte, donde resulta que el método (3), correspondiente al modelo de esfuerzos totales extraídos de las RANS, es el de mayor precisión considerando su origen teórico, ya que no involucra valores empíricos como lo hace la ley logarítmica, método (2) (Nezu & Nakagawa, 1993).

3 ACONDICIONAMIENTO DE ESTACIÓN EXPERIMENTAL

3.1 Canal de pruebas

La parte experimental del presente trabajo de investigación se desarrolló en la estación ubicada en las instalaciones del laboratorio de Posgrado del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, ver *Figura 3.1*.



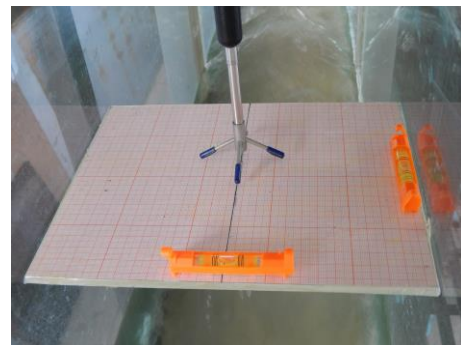
a) Canal de pendiente variable b) Tanque de llegada c) Válvula de regulación
d) Tubería de recirculación e) Tanque de recirculación f) Bomba de 10 hp g) Gato mecánico

Figura 3.1 Estación experimental

La estación experimental cuenta con diversos componentes además de los mostrados en la *Figura 3.1* que son esenciales para el desarrollo del presente trabajo de investigación, estos se visualizan en la *Figura 3.2a* y *Figura 3.2b*.



a) Vertedor triangular



b) Base de nivelación

Figura 3.2a Componentes de estación experimental



c) Limnómetro de punta



d) Soporte para dispositivo ADV

Figura 3.2b Componentes de estación experimental

Las características geométricas del canal de pendiente variable se presentan en la *Figura 3.3*, donde se muestra que la sección transversal es rectangular y uniforme en toda su extensión.

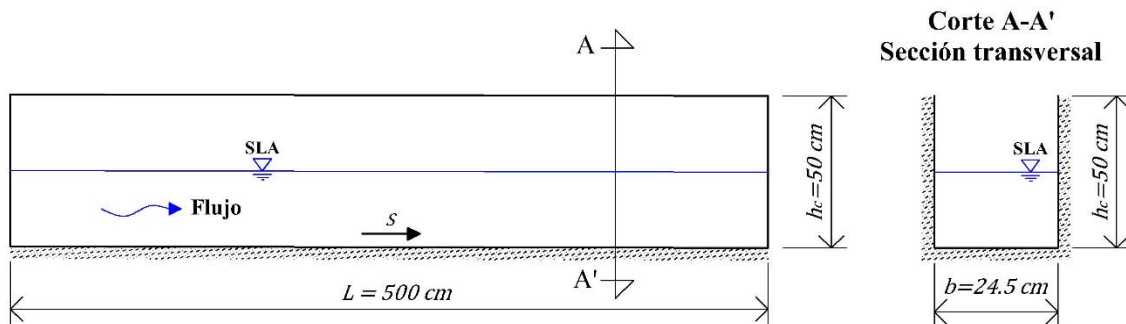


Figura 3.3 Características geométricas del canal de pendiente variable

Como parte de las acciones para el cumplimiento del objetivo, se requiere tener reproducibilidad y repetibilidad en los experimentos, ya que estas son las condicionantes principales para evaluar el proceso de medición.

3.1.1 Condición inicial del canal experimental

Las condiciones iniciales del canal experimental impedían el cumplimiento de la reproducibilidad y repetibilidad de los experimentos, por causa de perturbaciones en la superficie libre a la entrada del canal, causadas por la entrada abrupta del flujo en el tanque de llegada, ver *Figura 3.4* y *Figura 3.5*.

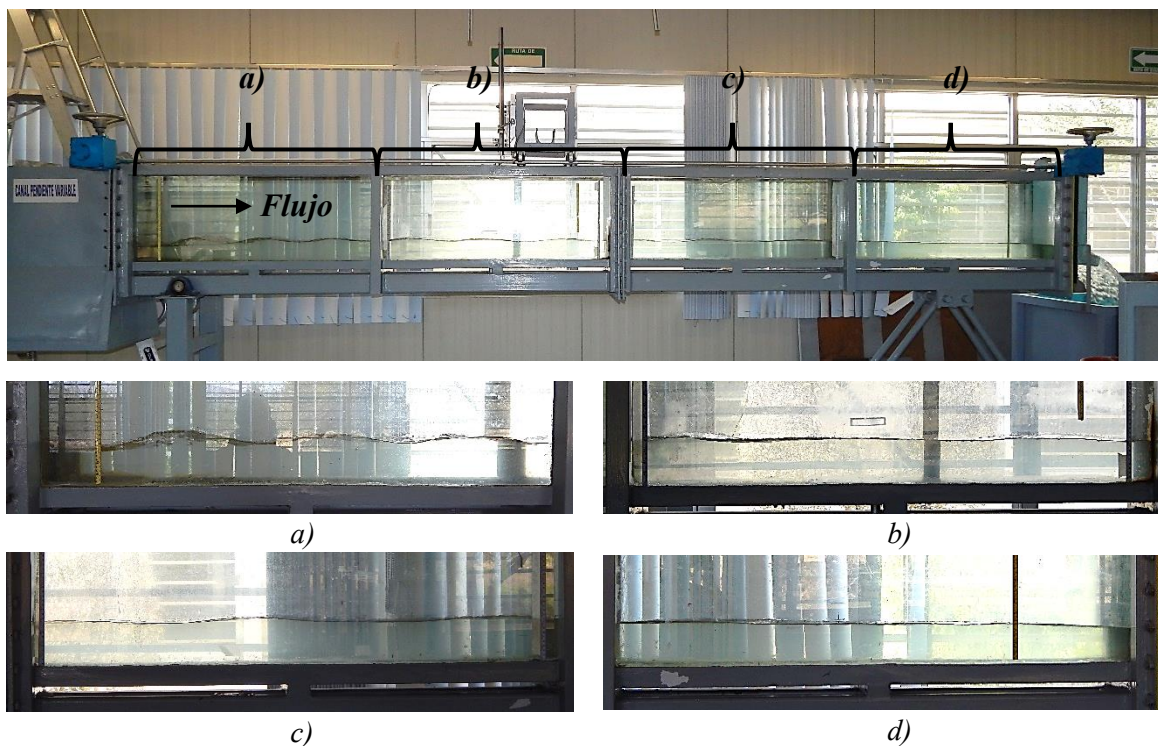
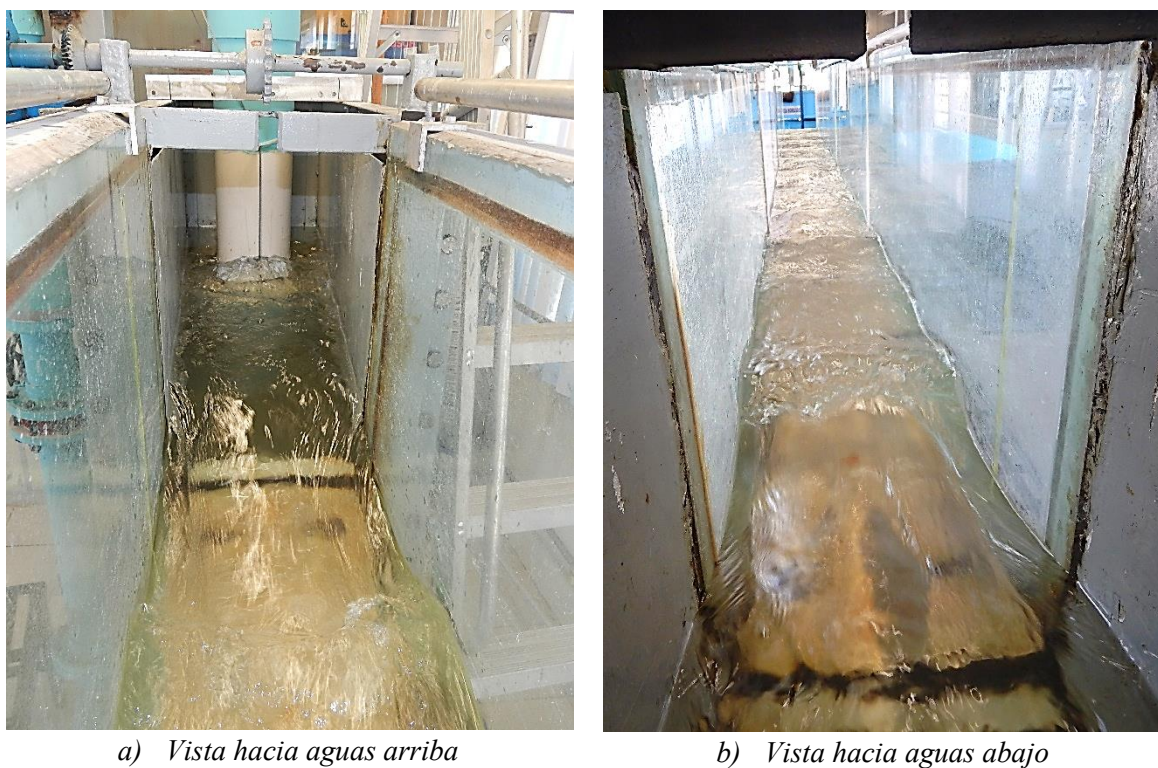


Figura 3.4 Condición experimental inicial



a) Vista hacia aguas arriba

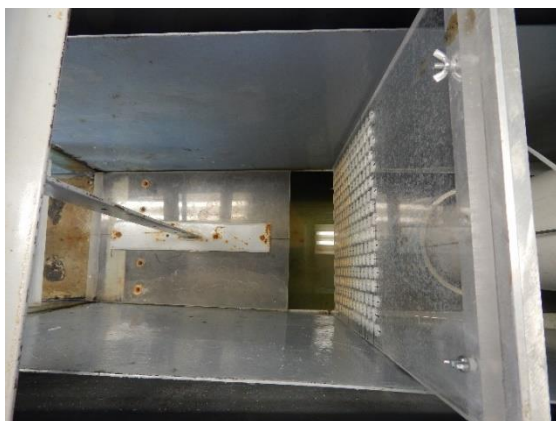
b) Vista hacia aguas abajo

Figura 3.5 Borbollón y resalto hidráulico por entrada abrupta del flujo

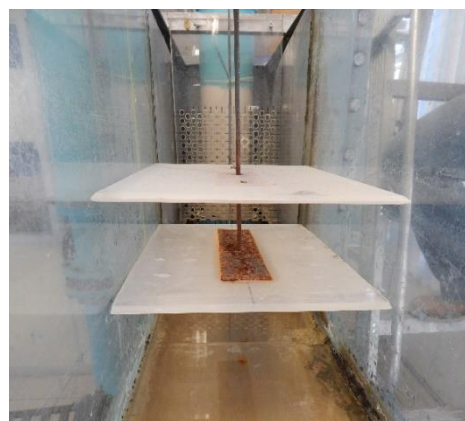


3.1.2 Condición experimental con modificaciones

Con la intención de anular las fluctuaciones de la superficie libre, se diseñaron tres piezas que se instalaron en el tanque de llegada y en la entrada del canal, ver *Figura 3.6*. Las estructuras dieron resultados favorables, en el sentido que permitieron condiciones estables para las pruebas consiguiendo repetibilidad, ver *Figura 3.7*.



a) Extensión de base del canal y placa tranquilizadora



b) Placas estabilizadoras

Figura 3.6 Estructuras tranquilizadoras del flujo

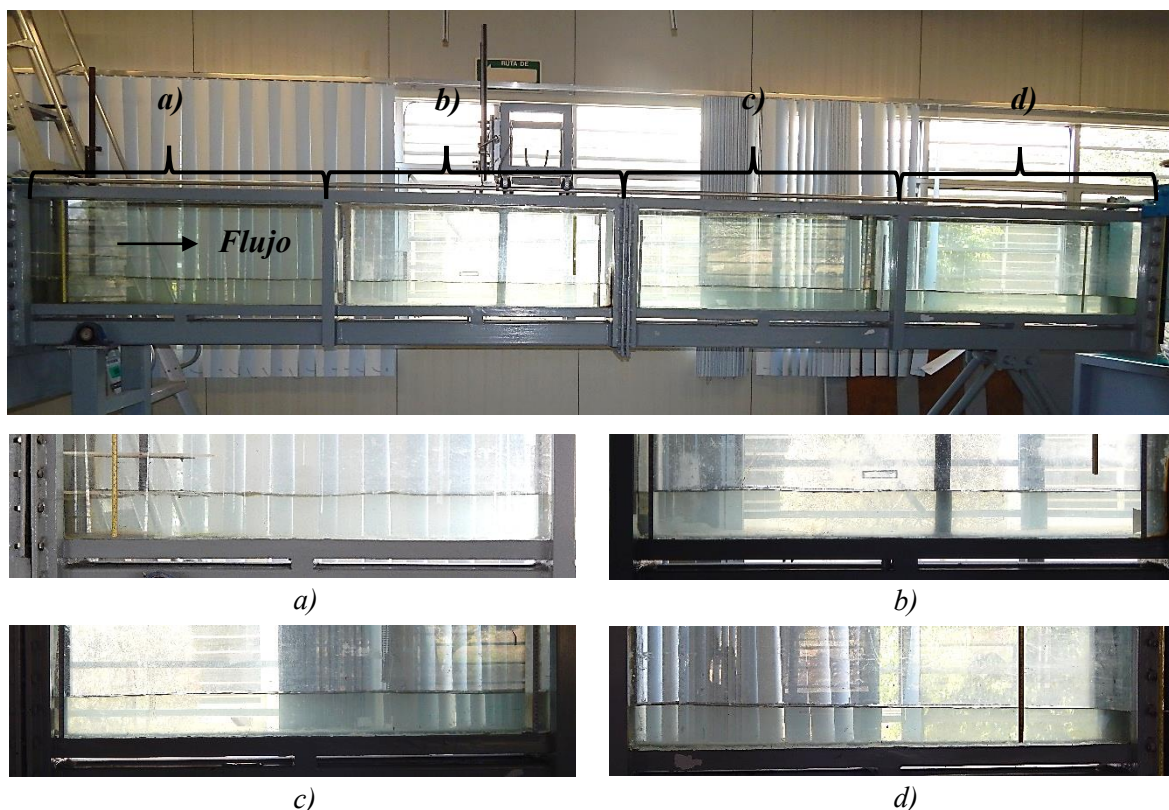


Figura 3.7 Condición experimental con estructuras tranquilizadoras



Las fotos mostradas en la *Figura 3.4* y *Figura 3.7*, fueron tomadas en las mismas condiciones de pendiente y caudal con la intención de visualizar la mejoría que se obtiene con las estructuras tranquilizadoras.

3.2 Perfilador acústico ADV

En el subcapítulo 1.3 se exponen las técnicas experimentales más utilizadas durante los últimos años para la caracterización de flujos turbulentos. En la presente investigación se utilizó la técnica de velocimetría acústica de efecto Doppler (ADV). El dispositivo ADV empleado para la toma de muestras de velocidad instantánea es de marca Nortek® conocido comercialmente como Vectrino Profiler™. En este apartado se exponen sus características principales y configuración en la adquisición de los datos; las especificaciones técnicas se presentan en el Anexo D. En el subcapítulo 1.3.4 se describe el principio del funcionamiento de un dispositivo ADV, que es descrito extensamente por Lohrmann et al. (1994).

3.2.1 Características principales

Una de las principales características del Vectrino Profiler, en comparación con otros dispositivos ADV del mercado (Nortek AS, 2017), es su capacidad de muestrear un perfil de hasta 30 mm con una separación de 1 mm entre celdas, teniendo un máximo de 31 celdas, en otras palabras, es posible muestrear en 31 puntos (separados entre sí, 1 mm) las tres componentes de velocidad (u_i) a una frecuencia máxima de 100 Hz. El volumen de muestreo se encuentra a 4 cm de la probeta emisora, tal como se muestra en la *Figura 3.8*. Esta característica permite evitar contratiempos en la toma de muestras cuando se requiere un gran número de puntos.

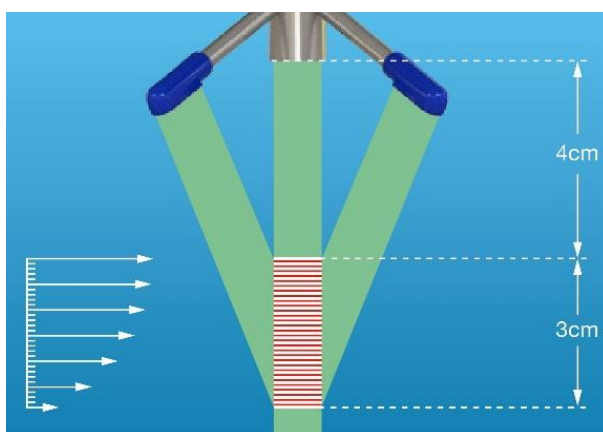


Figura 3.8 Volumen de muestreo del Vectrino Profiler. Tomado de ©Nortek AS (2017)

Para la adquisición de datos con el ADV, Nortek® proporciona el software MIDAS (Multi-instrument Data Acquisition System) en su versión V1.32 con fecha más reciente de



actualización (27 de febrero del 2015). Este consta en forma general de tres secciones que se esquematizan en la *Figura 3.9*.

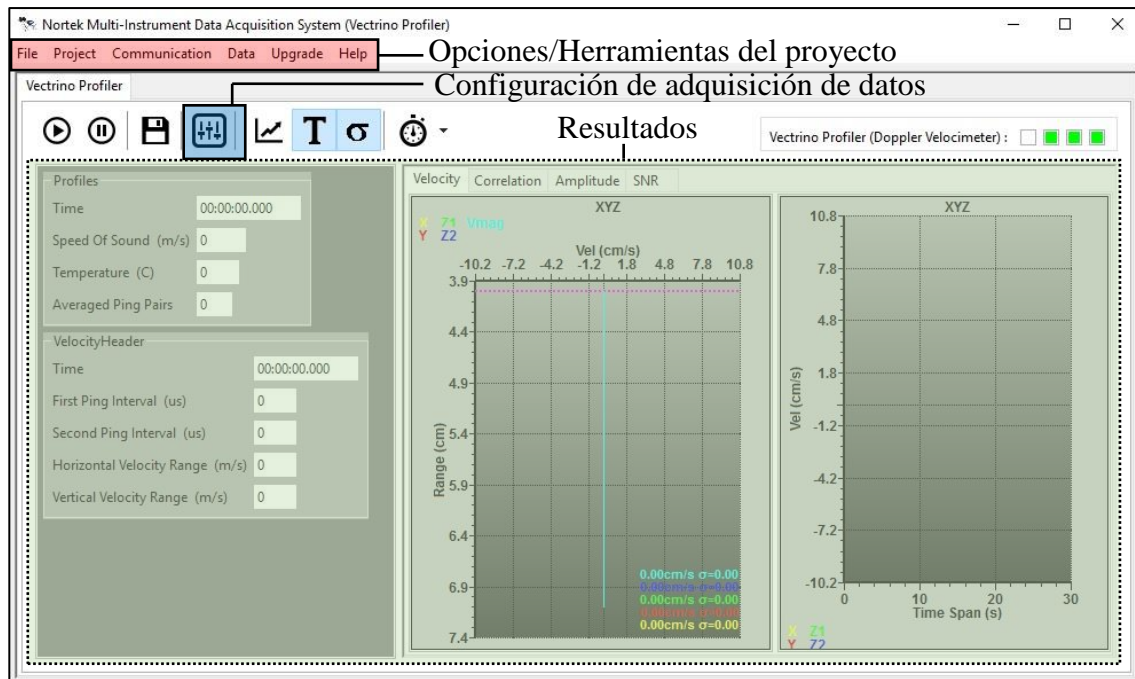
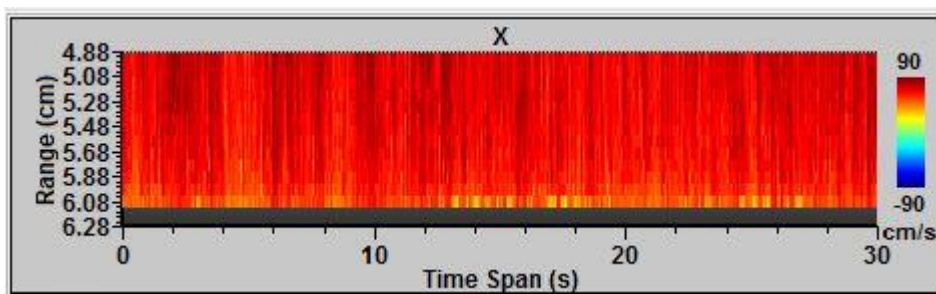


Figura 3.9 Ventana principal de software MIDAS

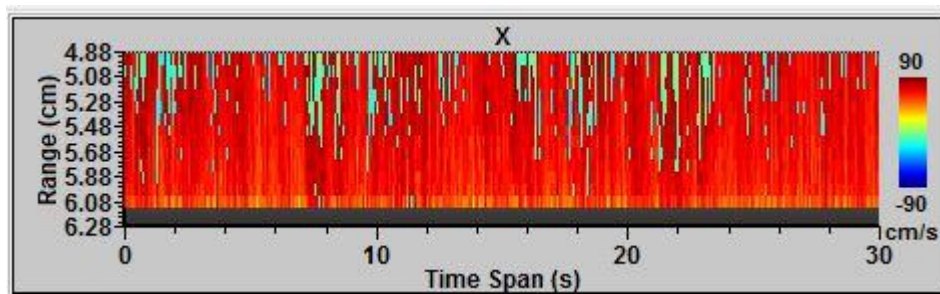
Dentro de la sección de resultados del MIDAS (ver *Figura 3.9*), se visualizan gráficamente diferentes características de los datos obtenidos en tiempo real, siendo las siguientes,

- a) Perfil de velocidades (velocidades instantáneas en las tres componentes),
- b) Correlación de cada componente de velocidad,
- c) Amplitud de la señal en cada transductor,
- d) SNR (relación señal-ruido) de la señal en cada transductor,
- e) Velocidades instantáneas para un punto de muestreo,
- f) Gráfico de magnitudes de velocidad en el volumen de muestreo, para cada componente,
- g) Espectro de amplitud de un punto de muestreo para cada componente de velocidad,
- h) Histograma para las tres componentes de velocidad.

Del inciso *f)* al *h)* son gráficos visibles para un intervalo temporal definido, que puede ser establecido para el tiempo de grabación de interés con la finalidad de identificar puntos débiles (de baja correlación) y eliminarlos, o bien descartar la grabación de los datos, evitando contratiempos en la etapa de post-procesamiento, ver *Figura 3.10*.



a) Muestreo en condiciones de SNR y correlación estable



b) Muestreo en condiciones de SNR y correlación inestable

Figura 3.10 Gráfico de magnitudes de velocidad (u_1 , dirección principal del flujo) en el volumen de muestreo para un intervalo de 30 s.

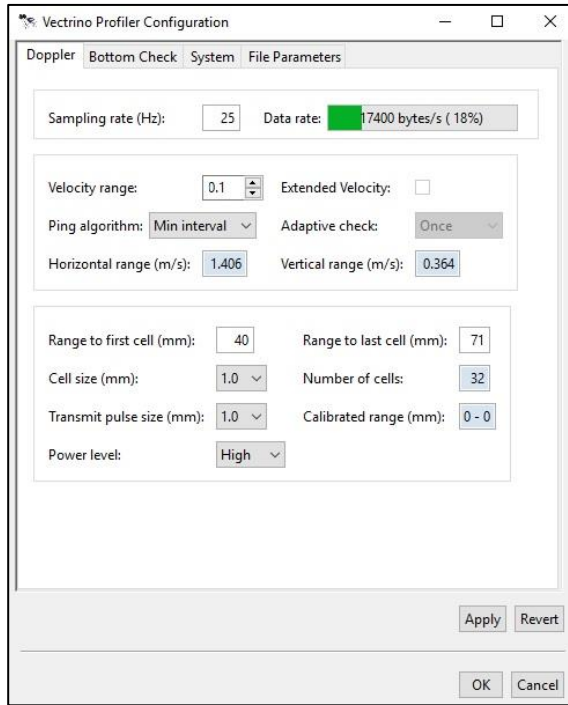
Los puntos pixelados de la Figura 3.10 (b) son los puntos débiles que surgen por cuestiones de baja correlación y SNR en una medición; estos generan correlaciones espurias en el tratamiento estadístico de los datos, por lo que es indispensable identificarlos visualmente antes de realizar el post-proceso.

3.2.2 Configuración de la adquisición de datos

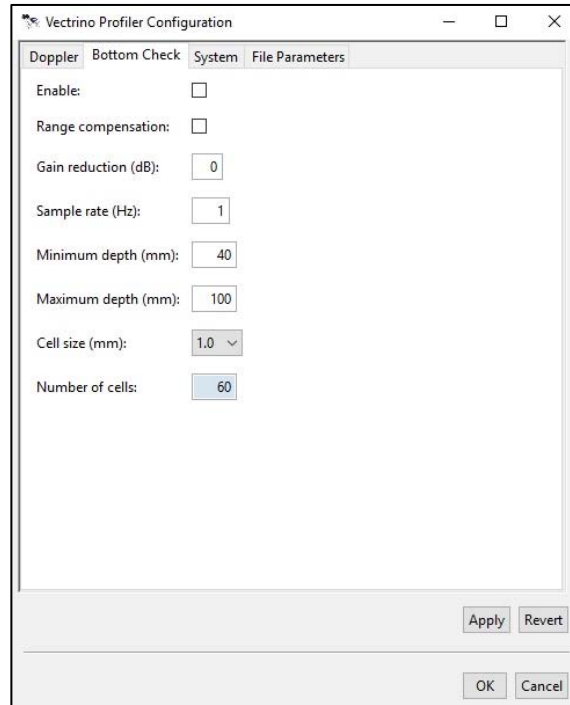
La configuración de adquisición de datos del ADV es parte esencial en el desarrollo de esta investigación, puesto que evita la posibilidad de correlaciones espurias causadas por puntos de baja correlación, SNR y amplitud. El acceso a las opciones de configuración de adquisición de datos es mediante el icono correspondiente dentro de la ventana principal del MIDAS (ver Figura 3.9). Este apartado de configuración consta de cuatro pestañas indicadas en la Figura 3.11.



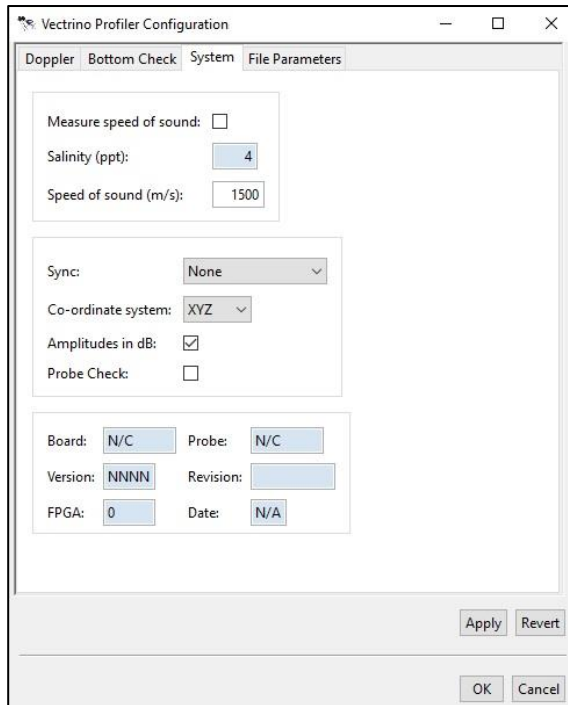
DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE



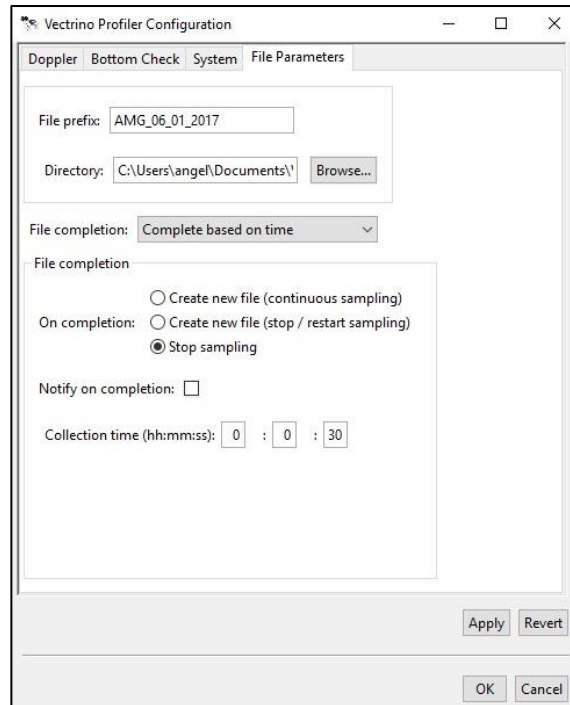
a) Configuración principal (frecuencia de muestreo)



b) Configuración de medición de distancia al fondo



c) Configuración del sistema coordinado



d) Configuración de almacenamiento de datos

Figura 3.11 Configuración de adquisición de datos MIDAS



En la primera pestaña, *Figura 3.11 (a)*, se establece la frecuencia de muestreo, la magnitud de velocidad esperada, el rango del volumen de muestreo, que es permisible desde los 40 mm hasta los 70 mm (31 celdas como máximo), la separación entre celdas (desde 1-4 mm), y finalmente el tipo de algoritmo para los pulsos Doppler, en este último se tienen las siguientes tres opciones,

1. *Adaptativo*, es recomendado cuando se presentan puntos débiles en el perfil de muestreo, ya que automáticamente identifica el ping óptimo para las condiciones del flujo.
2. *Intervalo mínimo*, es recomendable en el análisis de características turbulentas, midiendo con precisión las velocidades instantáneas en alta frecuencia.
3. *Intervalo máximo*, es recomendable en la medición y caracterización de flujos laminares; presenta alta sensibilidad ante cualquier interferencia acústica.

En la segunda pestaña, *Figura 3.11 (b)*, se hacen los ajustes de medición de distancia al fondo, siendo de gran importancia para obtener la coordenada vertical de cada punto de medición del volumen de muestreo. La distancia al fondo se obtiene mediante la probeta emisora de pulsos, que para este caso funciona de manera mono-estática, emitiendo y recibiendo la señal directa al fondo e identificando la distancia al mismo. La frecuencia de muestreo para esta característica puede ser seleccionada de 1-10 Hz.

En la tercera pestaña, *Figura 3.11 (c)*, se selecciona el sistema coordenado y se tiene la posibilidad de cambiar el valor de la velocidad del sonido, sin embargo, Nortek® no recomienda modificarlo por cuestiones de estabilidad en el funcionamiento del dispositivo.

En la última pestaña, *Figura 3.11 (d)*, se configura la ruta de almacenamiento de los datos muestreados y se establecen las condiciones de guardado, teniendo las siguientes opciones,

1. *Detener manualmente la grabación*, útil cuando no se ha definido el intervalo temporal requerido en la medición.
2. *Basado en un tiempo específico*, útil cuando ya se tiene definido el tiempo a analizar.
3. *Basado en un número de muestras*, útil cuando se requiere un número de datos específicos y se utilizan diferentes frecuencias de muestreo.
4. *Basado en un tamaño de archivo*, útil cuando se requiere controlar las opciones de espacio computacional.

3.3 Conclusión del capítulo

En este capítulo se presentó en forma visual como la condición inicial de la estación experimental (*Figura 3.4*) no cumplía con las condiciones de repetibilidad y reproducibilidad debido a la presencia de fuertes ondulaciones en la superficie libre a lo largo del canal. Lo anterior motivo la adecuación de la estación experimental con una serie de estructuras de



conducción que uniformizarán el flujo, estas resultaron favorables y anularon las fluctuaciones en la superficie libre (ver *Figura 3.7*). Finalmente, con estas estructuras se tuvo una estación experimental que permitió realizar mediciones reproducibles y repetibles.

Con el desarrollo de pruebas preliminares se tuvo un mejor conocimiento del funcionamiento del dispositivo ADV, lo cual fue muy importante para tener una correcta adquisición de los datos experimentales. Otro aspecto importante fue observar el gráfico de la SNR en tiempo real del software MIDAS, con lo cual se tiene la posibilidad de descartar directamente la medición, ya que existe una correlación entre bajos valores de SNR y la presencia de puntos débiles que generan correlaciones espurias en el post-procesamiento de los datos. Lo anterior fue de vital importancia en todo el desarrollo experimental de este trabajo.

En las pruebas experimentales que se desarrollaron en este trabajo de investigación se utilizó el algoritmo de *intervalo mínimo* para procesar los pulsos Doppler, ya que el *adaptativo* filtra en exceso los datos experimentales cerca de la pared y el de *intervalo máximo* sólo se aplica para flujo laminar, y en este caso los experimentos son con flujos turbulentos totalmente desarrollados.

4 METODOLOGÍAS PROPUESTAS

4.1 Determinación de la velocidad de corte

Los métodos de estimación de la velocidad de corte expuestos en el subcapítulo 2.3, fueron analizados considerando la precisión de cada uno de ellos. En forma general el método que tiene mayor nivel de precisión por su base teórica es el número (3), que considera la estimación de los esfuerzos de Reynolds $\overline{u'_1 u'_2}$, sin embargo, su aplicación requiere de ciertas exigencias, como por ejemplo, una elevada frecuencia de muestreo f , esto implica tener un equipo de medición de alto costo.

La metodología que se propone en el presente documento consiste en la aplicación del método (3), bajo las siguientes indicaciones:

Para comprender de mejor forma la metodología, se aplica a manera de ejemplo con una prueba llevada a cabo con las condiciones experimentales que se muestran en la Tabla 4.1

Tabla 4.1 *Condiciones experimentales. Prueba 01*

Pendiente	Tirante del flujo	Relación de aspecto	Velocidad media	Número de Froude	Número de Reynolds	Caudal	Densidad	Temperatura	Viscosidad cinemática
S ($\times 10^{-3}$) (-)	h (cm)	b/h (-)	\bar{U}_{m_1} (cm/s)	F_r (-)	Re (-)	Q (l/s)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ν ($\times 10^{-6}$) (m ² /s)
1.06	8.20	2.99	63.82	0.71	31349.35	12.82	996.31	27.64	0.84

Nota. Los valores de densidad ρ y viscosidad cinemática ν son de acuerdo con las tablas de Wagner & Kretschmar (2008), basadas en la formulación industrial IAPWS-IF97.

El muestreo se llevó a cabo en un perfil de 13 mm cerca de la pared, tal como se presenta en la *Figura 4.1*, con una duración de 30 segundos y frecuencia de 100 Hz.

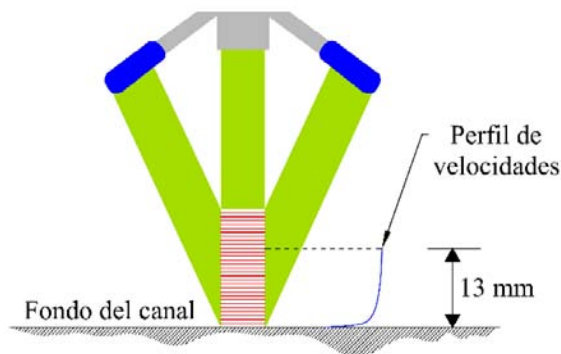


Figura 4.1 Perfil de muestreo

En primera instancia se tiene el modelo de extracción de esfuerzos totales de la ecuación de Navier-Stokes promediada de Reynolds para flujo bidimensional,

$$-\overline{u_1' u_2'} + \nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = u_*^2 \left(1 - \frac{x_2}{h}\right), \quad (4.1)$$

despejando la velocidad de corte u_* ,

$$u_* = \sqrt{\frac{-\overline{u_1' u_2'} + \nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}}{\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)}}. \quad (4.2)$$

La expresión (4.2) debe evaluarse para cada uno de los puntos del perfil de muestreo. Primero se evalúa el término de variación de velocidad con respecto al tirante $\partial \bar{u}_1 / \partial x_2$ utilizando la aproximación de diferencia centrada para mayor precisión, de la siguiente manera,

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \approx \frac{\bar{u}_{1,j+1} - \bar{u}_{1,j-1}}{x_{2,j+1} - x_{2,j-1}}, \quad (4.3)$$

donde el indicador j representa la posición en el perfil de muestreo. Debido a la aplicación de la aproximación de diferencia centrada, el primer y último punto del perfil de muestreo no contienen derivada y, por tanto, el análisis se reduce al rango de $j = 2$ a $j = N - 1$, tal como se muestra en la Figura 4.2.

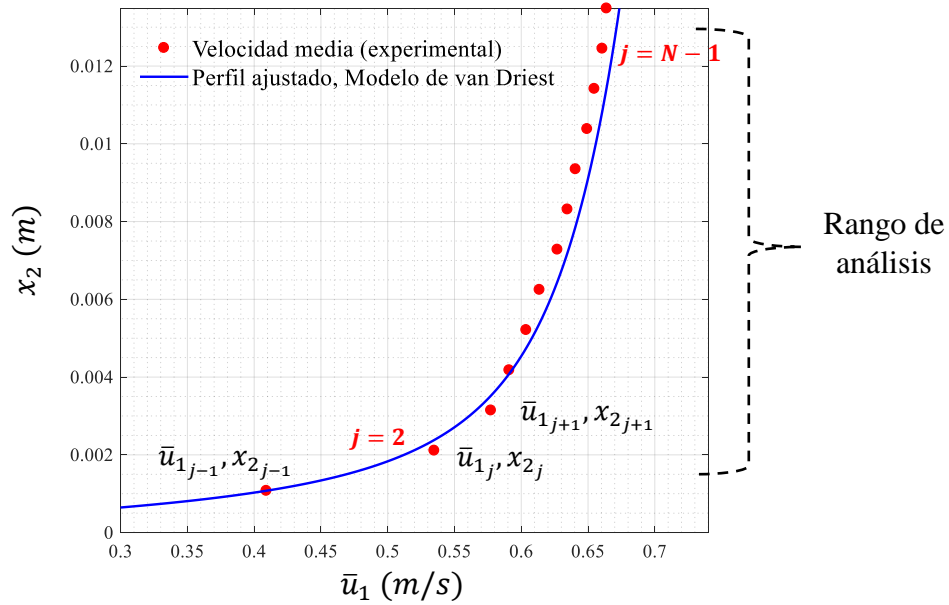


Figura 4.2 Perfil de velocidades medias. Prueba 01

Debido al bajo número de puntos del rango de análisis, y con la finalidad de tener estadísticamente una función de distribución densa en cuanto número de datos, se recurre a sustituir en la expresión (4.2) el valor medio de los esfuerzos de Reynolds $\overline{u'_1 u'_2}$ por su valor instantáneo $u'_{1,i} u'_{2,i}$, donde i es el indicador de número de muestra (temporal). Sustituyendo lo anterior y (4.3) en (4.2), se tiene,

$$u_{*,i,j} = \sqrt{\frac{-u'_{1,i,j} u'_{2,i,j} + v \left(\frac{\bar{u}_{1,j+1} - \bar{u}_{1,j-1}}{x_{2,j+1} - x_{2,j-1}} \right)}{\left(1 - \frac{x_{2,j}}{h} \right)}}. \quad (4.4)$$

La evaluación de (4.4) se debe realizar únicamente si se cumple lo siguiente,

$$-u'_{1,i,j} u'_{2,i,j} + v \left(\frac{\bar{u}_{1,j+1} - \bar{u}_{1,j-1}}{x_{2,j+1} - x_{2,j-1}} \right) > 0. \quad (4.5)$$

Finalmente, la velocidad de corte u_* se obtiene con la mediana de los datos $u_{*,i,j}$ calculados, siendo el mejor estimado puesto que la función de densidad de probabilidad no es de tendencia central, ver Figura 4.3. Esto se justifica formalmente con la prueba de Anderson-Darling que se presenta en el Anexo E, donde se incluye el cálculo del rango intercuartil como intervalo de confianza, asegurando un 50 % de cobertura alrededor del valor representativo.

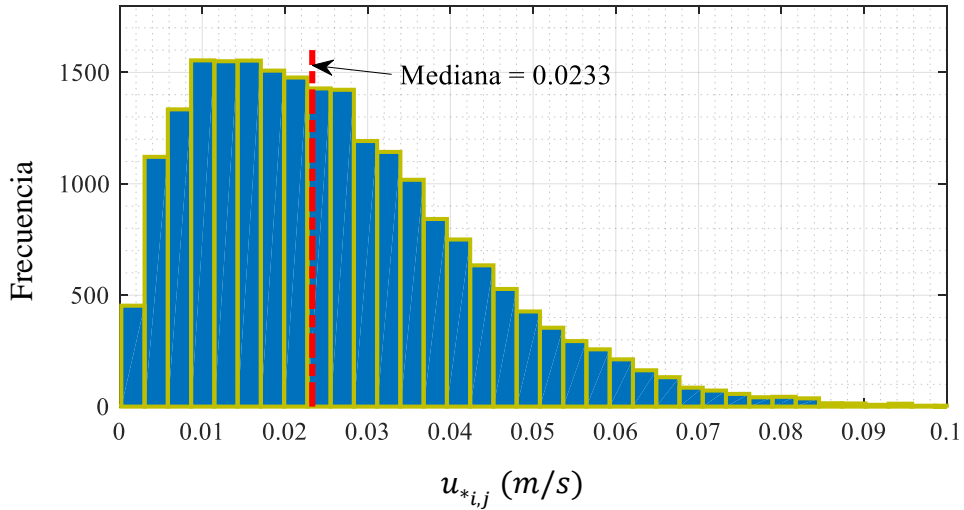


Figura 4.3 Histograma de valores $u_{*,i,j}$. Prueba 01

El resultado de la Prueba 01 es entonces, $u_* = 2.33 \text{ cm/s}$, con un rango intercuartil de: $1.14 - 2.91 \text{ cm/s}$. De manera comparativa se calcula u_* con el modelo clásico (2.41), obteniendo $u_* = 2.92 \text{ cm/s}$; de esto se concluye que para la Prueba 01 la velocidad de corte es sobrestimada si se calcula con (2.41).

Una vez que se obtiene la velocidad de corte es posible trazar el perfil de esfuerzos de Reynolds, que para el caso de la Prueba 01 se muestra en la Figura 4.4.

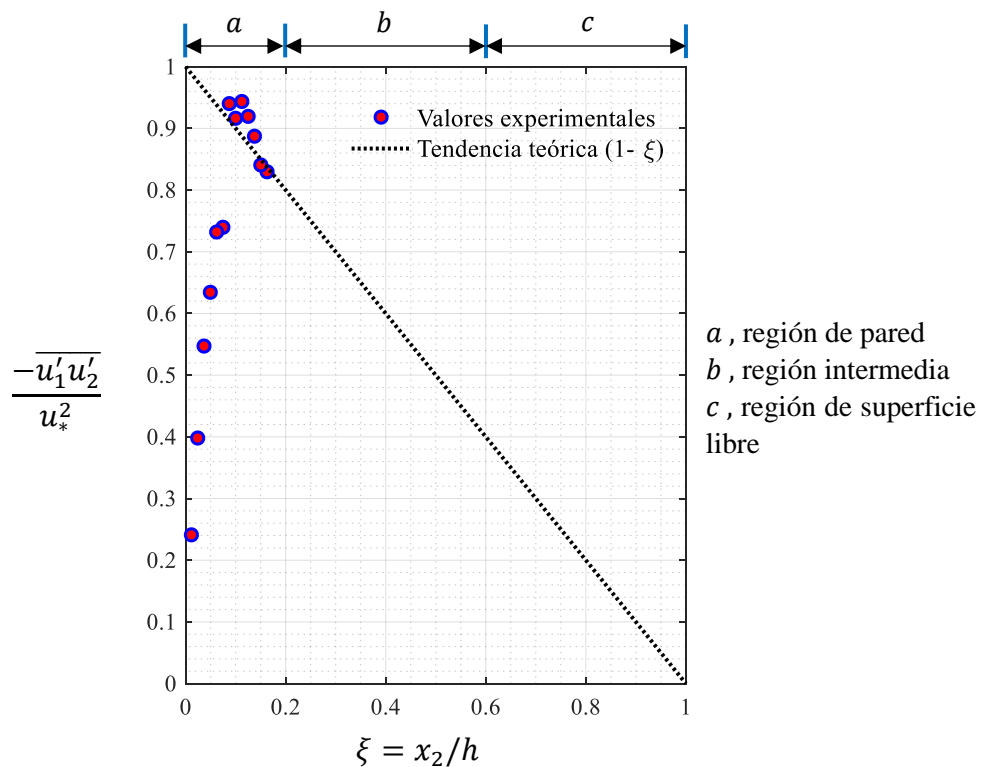


Figura 4.4 Perfil de esfuerzos de Reynolds. Prueba 01



En la *Figura 4.4* se presenta el perfil de esfuerzos de Reynolds hasta una relación aproximada $x_2/h \approx 0.2$, ya que únicamente se midió en la cercanía de la pared tal como se muestra en el perfil de velocidades medias de la *Figura 4.2*. La medición en la cercanía de la pared permite visualizar la importancia de la evaluación del término de esfuerzos viscosos ($\nu \partial \bar{u}_1 / \partial x_2$) en la determinación de la velocidad de corte, ya que se aprecia un ascenso brusco en el rango $0 < x_2/h < 0.1$, que es originado por la disminución de los esfuerzos de Reynolds en dicha zona y, por tanto, dominan los esfuerzos viscosos.

4.2 Determinación de la constante de adición y von Kármán del modelo “ley logarítmica”

A partir de lo descrito en el subcapítulo 0 acerca de la variación de la constante de adición C_2 y von Kármán κ de la ley logarítmica, en este documento, se propone una metodología para su determinación, que es posible aplicar únicamente cuando se conoce de alguna forma la velocidad de corte u_* , por ejemplo, aplicando la metodología descrita en este documento (subcapítulo 4.1) o bien alguno de los métodos descritos en el subcapítulo 2.3, excepto aquellos que utilicen la ley logarítmica.

La metodología que se propone consiste en lo siguiente:

Sea la ley logarítmica,

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2 u_*}{\nu} \right) + C_2, \quad \text{para } x_2 \geq 30 \frac{\nu}{u_*} \quad (4.6)$$

se deben determinar las constantes de von Kármán κ y de adición C_2 . La velocidad media \bar{u}_1 y el tirante/coordenada vertical x_2 se obtienen de la medición experimental, en el caso de la viscosidad cinemática ν se asigna un valor en función de la temperatura. La velocidad de corte u_* se debe obtener como ya se indicó en el párrafo anterior. Los puntos de coordenada vertical x_2 menor a la relación que se indica en (4.6) no deben ser considerados en el análisis, porque están fuera de la zona de la ley logarítmica, que corresponde a la región turbulenta (Nezu & Nakagawa, 1993).

A partir de (4.6), se plantea la siguiente función de error,

$$E(\kappa, C_2) = \frac{\bar{u}_1}{u_*} - \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2 u_*}{\nu} \right) + C_2 \right], \quad (4.7)$$

donde κ y C_2 son las variables independientes, $E(\kappa, C_2)$ se le denomina función de error, donde $E: \Omega(\kappa, C_2) = [a, b] \times [c, d]$, $\kappa = [a, b]$, $C_2 = [c, d]$. Se recomiendan intervalos para κ y C_2 en base a valores que se presentan en la literatura, por ejemplo, los expuestos por Zanoun et al. (2003). Además, no se evalúan valores negativos para la variable κ , es decir, $a > 0$.



Una vez que se establecen los puntos del rango de análisis, se aplica la función de error (4.7), bajo las siguientes indicaciones:

El interés radica en conocer los valores de κ y C_2 con los cuales el modelo se ajuste en lo mayor posible; por tanto, se proponen vectores de valores para ser evaluados en (4.7), un vector para κ ,

$$\kappa = \{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}^T, \quad \text{donde } \kappa \in \mathbb{R}_+^n \quad (4.8)$$

y un vector para C_2 ,

$$C_2 = \{C_{21}, \dots, C_{2n}\}^T. \quad \text{donde } C_2 \in \mathbb{R}^n \quad (4.9)$$

Ahora (4.7) se evalúa en cada punto del rango de análisis, teniendo como resultado un vector de error $E(\kappa, C_2, x_{2j}) \in \mathbb{R}^n$ para cada combinación posible entre los valores de los vectores propuestos de κ y C_2 , tal como sigue,

$$E(\kappa, C_2, x_{2j}) = \{E_1, \dots, E_n\}, \quad (4.10)$$

donde $E(\kappa, C_2, x_{2j})$ es el vector de error de ajuste, y su dimensión n es del tamaño del número de puntos del rango de análisis. Para obtener un valor único del error, se aplica la norma vectorial euclidiana, que indica la distancia entre el vector de error $E(\kappa, C_2, x_{2j})$ y el vector nulo, es decir, representa el error que existe entre el perfil de velocidades experimental y el perfil semi-teórico para los valores asignados de κ y C_2 . El error (valor escalar) queda entonces definido como sigue,

$$E(\kappa, C_2) = \left\| E(\kappa, C_2, x_{2j}) \right\|, \quad (4.11)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana.

Lo anterior se aplica a cada combinación entre κ y C_2 , obteniendo una matriz de errores,

$$E = \begin{bmatrix} E(\kappa_1, C_{21}) & \dots & E(\kappa_n, C_{21}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\kappa_1, C_{2n}) & \dots & E(\kappa_n, C_{2n}) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Finalmente, mediante un algoritmo de rastreo programado en MATLAB® R2017a se localiza el mínimo *minimorum* en la matriz de errores, y de esta forma se identifican los valores óptimos de κ y C_2 que ajustan el modelo semi-teórico con respecto a los datos experimentales.



Aplicando la metodología descrita en la Prueba 01, se tienen los siguientes resultados,

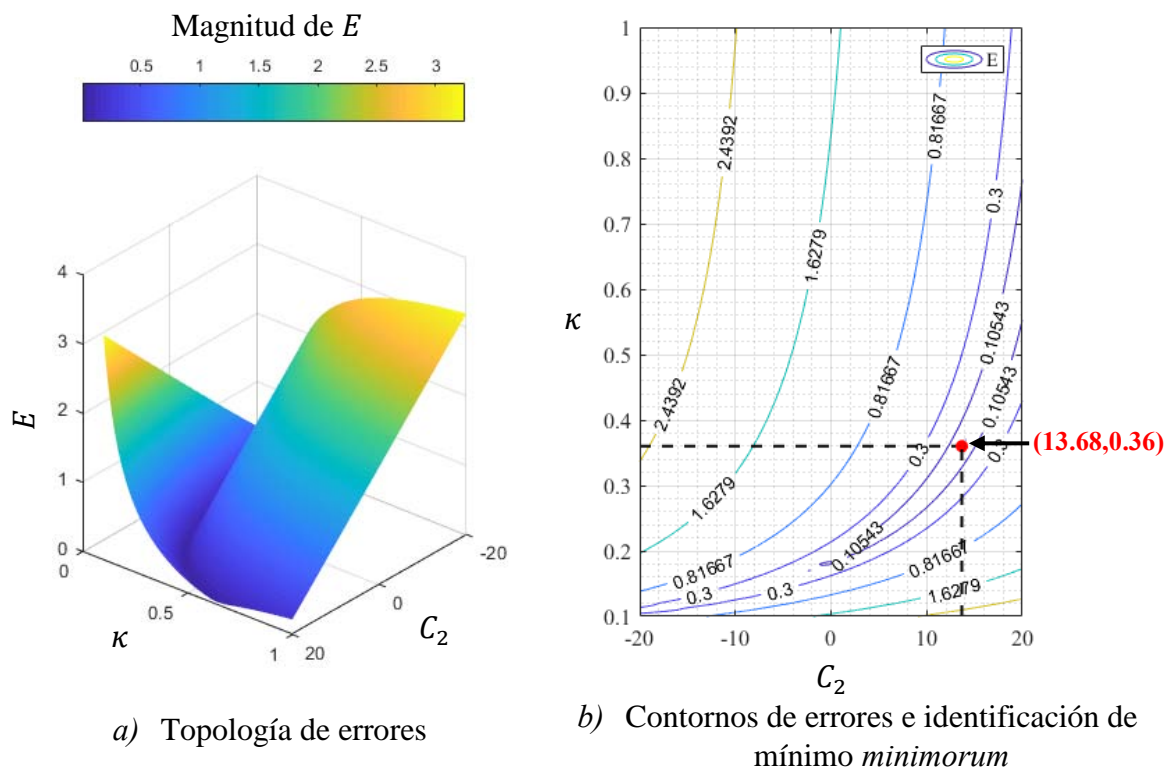


Figura 4.5 Determinación de κ y C_2 . Prueba 01

La Figura 4.5 (a) muestra la topología de los valores obtenidos al evaluar la norma euclidiana (4.11), mientras que la Figura 4.5 (b) corresponde a la extracción de contornos para ciertos valores de error y permite observar la correlación entre estos dos parámetros; el punto marcado en rojo corresponde a la solución, es decir, el mínimo *minimorum*, que corresponde al punto con el menor error de todas las combinaciones calculadas y que se localiza con el algoritmo de rastreo.

Para el caso de κ , la solución obtenida se encuentra dentro del rango recopilado por Zanoun et al. (2003), y para C_2 se tiene un valor superior al rango que presenta, esto se justifica por la baja relación de aspecto que se tiene en este experimento $b/h = 2.99$, ya que la recopilación de Zanoun et al. (2003) corresponde a experimentos en canales anchos, es decir, $b/h > 5$ (Tominaga & Nezu, 1992).

Una vez determinados los valores de κ y C_2 , se grafica el perfil adimensional de velocidades medias.

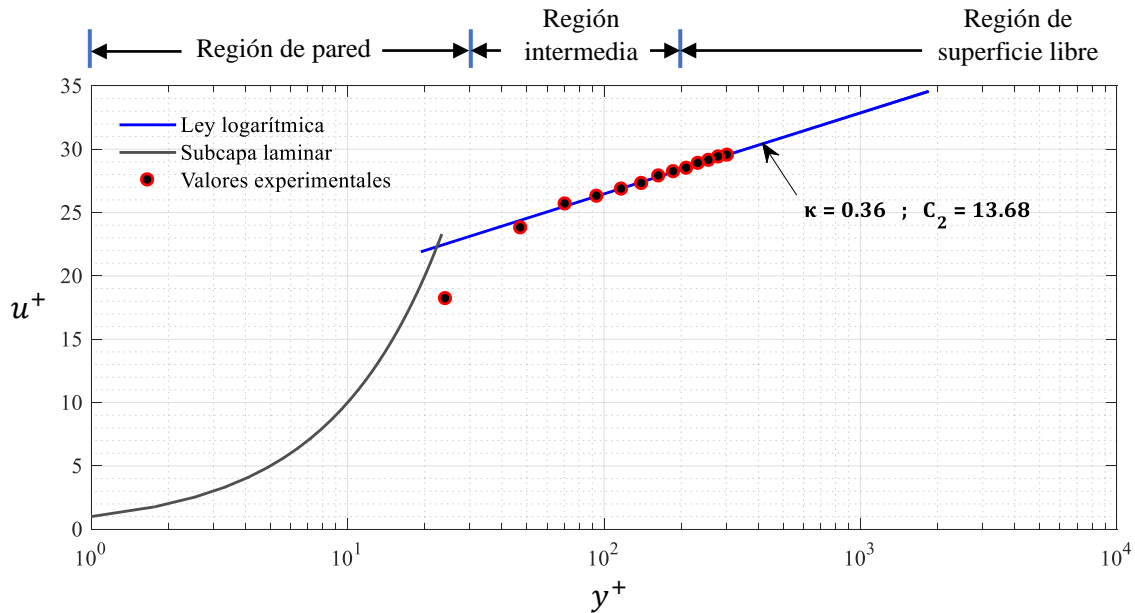


Figura 4.6 Perfil adimensional de velocidades medias. Prueba 01

La Figura 4.6 esquematiza el perfil adimensional de velocidades medias obtenido para la Prueba 01, donde se observa un punto fuera del modelo, que no cumplió con la relación indicada en (4.6), por tanto, se encuentra en la zona de amortiguamiento y la ley logarítmica no lo puede representar. Entonces, el modelo que se presenta en la Figura 4.6 (sustituyendo κ y C_2) es el siguiente,

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{0.36} \ln \left(\frac{x_2 u_*}{\nu} \right) + 13.68 . \quad (4.13)$$

4.3 Conclusión del capítulo

La metodología propuesta para la estimación de la velocidad de corte tiene su origen en el tercer método (c) que considera la estimación de los esfuerzos de Reynolds y que es descrito en el subcapítulo 2.3, sin embargo, se plantea desde un enfoque distinto, donde los esfuerzos de Reynolds se evalúan para cada una de las muestras temporales y espaciales del perfil de muestreo con la intención de tener un mayor número de datos en el análisis estadístico. A partir del histograma de frecuencias y del análisis estadístico que se presenta en el Anexo E se confirma que la función de densidad de probabilidad no es de tendencia central, por lo tanto, el valor representativo se estima con el cálculo de la mediana, puesto que la media aritmética se ve afectada por los valores extremos y en todos los casos subestima el valor esperado central, ver Anexo E.



Por otra parte, a pesar de haber sido utilizado en este caso un dispositivo ADV no se restringe el uso de la metodología cuando la toma de muestras se realiza con algún otro dispositivo, siendo el único requerimiento la frecuencia de muestreo, por sugerencia $f > 80$ Hz de acuerdo a pruebas preliminares y a estudios similares encontrados en la literatura, ver por ejemplo Tominaga & Nezu (1992).

En el caso de la metodología propuesta para determinar la constante de adición C_2 y von Kármán κ de la ley logarítmica, se plantea una función de error que permite evaluar la distancia entre el perfil de velocidades medias de los valores experimentales y el perfil semi-teórico obtenido con la ley logarítmica; a partir de la evaluación de esta función se genera una topología de errores, obtenida de las combinaciones entre los valores propuestos de κ y C_2 para finalmente identificar con el algoritmo de rastreo el valor óptimo (el mínimo *minimorum*), que es justamente el punto que tiene el menor error (o distancia) entre los valores experimentales y los semi-teóricos, además este punto tiene como coordenadas un valor de C_2 y κ que se toman como solución.

Del resultado obtenido para la Prueba 01 se observa en el gráfico de contornos de errores (*Figura 4.5 b*) que la correlación entre estos dos parámetros (κ y C_2) no es lineal, por tanto, utilizar la regresión lineal no es un camino óptimo para su cálculo si lo que se desea es tener precisión, tal como se muestra en la *Figura 4.7* donde se compara la ley logarítmica obtenida utilizando la metodología propuesta y la regresión lineal en la obtención de κ y C_2 . De lo anterior se concluye que, la determinación de κ y C_2 por medio del análisis de la topología de errores, aumenta la precisión en comparación con algún tipo de regresión estadística, ya que se abarca todo un espacio de combinaciones de donde se obtienen los valores óptimos.

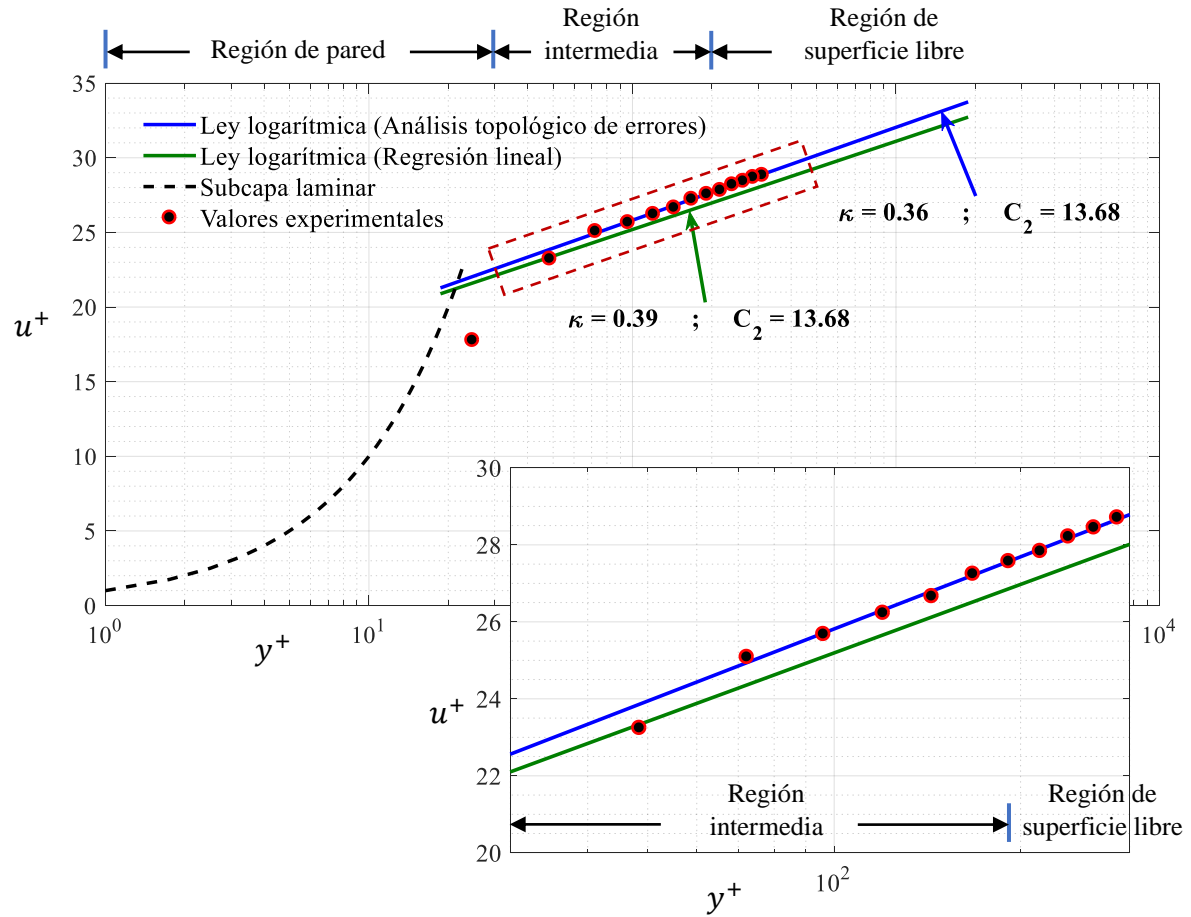
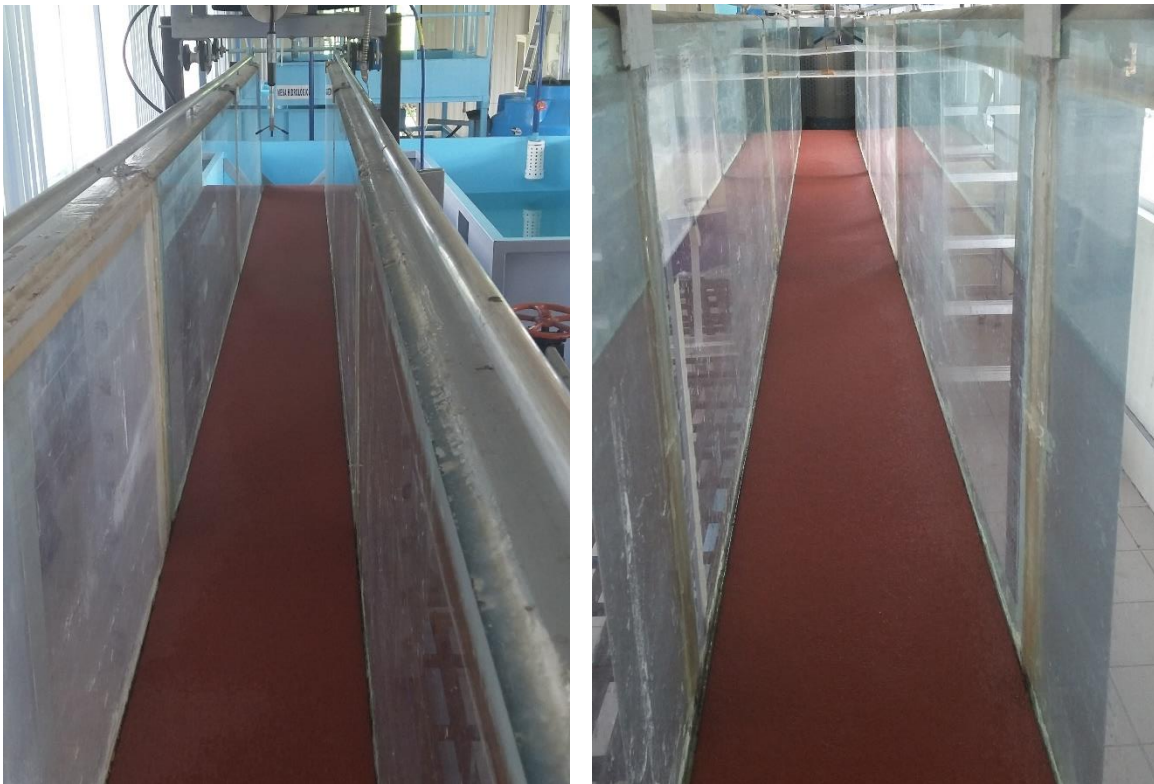


Figura 4.7 Análisis topológico de errores vs regresión lineal en la determinación de κ y C_2

5 PRUEBAS EXPERIMENTALES

5.1 Descripción de pruebas

Las pruebas experimentales fueron desarrolladas bajo dos condiciones de rugosidad en el fondo, la primera, consistió en el fondo original del canal que es de material metálico y cuyo valor de k_s es desconocido; sin embargo, se aprecia visualmente y por contacto de la superficie que el valor de k_s es lo suficientemente pequeño para ser considerado un fondo liso. La segunda condición consistió en la colocación de un fondo de lija cuyo valor de rugosidad k_s está regido bajo la norma de graduación ANSI, ver *Figura 5.1*.



a) Vista hacia aguas abajo

b) Vista hacia aguas arriba

Figura 5.1 Fondo de lija, $k_s = 0.535$ mm



En general, las pruebas se llevaron a cabo bajo las siguientes acciones ordenadas,

1. *Preparación de estación experimental.* Este paso consistió en el establecimiento de la pendiente del canal experimental y posicionamiento del dispositivo ADV con su nivelación. El dispositivo ADV se posicionó (para todas las pruebas) aproximadamente a 3.5 m de distancia de la entrada del flujo con la intención de evitar defectos en el perfil de velocidades causados ya sea por la entrada abrupta del flujo o por la salida en caída libre hacia el tanque de recirculación.
2. *Abastecimiento de caudal y ajuste de placas estabilizadoras.* El abastecimiento del flujo se realizó con la bomba de 10 hp, y se controló con la válvula reguladora. Una vez que se normalizó el flujo (sin variaciones en el gasto de ingreso) se ajustó la placa estabilizadora al nivel de la superficie libre de agua para anular las fluctuaciones originadas por el ingreso abrupto del flujo.
3. *Medición con dispositivo ADV.* Las mediciones se llevaron a cabo en la zona cercana a la pared, considerando un volumen de muestreo de 13 mm, con un tiempo de grabación de 30 s a una frecuencia de 100 Hz, teniendo 3,000 datos en cada punto del perfil de muestreo. El tamaño del volumen de muestreo fue seleccionado en base a pruebas preliminares, siendo la zona con mayor estabilidad en cuanto a correlación y SNR.
4. *Exportación de datos.* El software MIDAS permite exportar en dos diferentes formatos los resultados grabados del muestreo, ya sea en ASCII o archivo.mat para su tratamiento con MATLAB®.
5. *Post-procesamiento de datos.* Se utilizó MATLAB® R2017a para el tratamiento de los datos y la representación de los resultados.

5.2 Pruebas en fondo liso

Las pruebas en fondo liso, como se indicó en la descripción, corresponden a la condición del fondo original del canal de pendiente variable.

Se realizaron 50 pruebas, de las cuales se presentan solo cinco de manera representativa, en las que se midió más de un volumen de muestreo, es decir, se midió lo mayor posible de la región exterior del flujo desplazando el dispositivo ADV en la vertical. Las condiciones experimentales de las pruebas se presentan en la Tabla 5.1.



Tabla 5.1 *Condiciones experimentales de pruebas en fondo liso*

Caso	Pendiente ($\times 10^{-3}$) S (-)	Tirante del flujo h (cm)	Relación de aspecto b/h (-)	Velocidad media \bar{U}_{m_1} (cm/s)	Número de Froude F_r (-)	Número de Reynolds ($\times 10^3$) R_e (-)	Caudal Q (l/s)	Densidad ρ (kg/m ³)	Temperatura T (°C)	Viscosidad cinemática ($\times 10^{-6}$) ν (m ² /s)
PFL-01	0.213	10.5	2.33	70.38	0.69	39.79	18.10	996.46	27.09	0.85
PFL-02	1.064	10.5	2.33	71.18	0.70	40.24	18.31	997.11	24.72	0.89
PFL-03	1.064	10.1	2.43	75.05	0.75	41.54	18.57	996.87	25.63	0.88
PFL-04	1.064	7.0	3.50	59.41	0.72	26.46	10.19	997.32	23.83	0.92
PFL-05	1.064	8.0	3.06	61.76	0.70	29.88	12.10	996.77	25.99	0.87

Nota. Los valores de densidad ρ y viscosidad cinemática ν son de acuerdo con las tablas de Wagner & Kretzschmar (2008), basadas en la formulación industrial IAPWS-IF97.

5.2.1 Resultados

Los resultados se presentan en el siguiente orden,

1. Valores de la velocidad de corte y valores de la constante de adición y von Kármán
2. Perfiles adimensionales de velocidad media
3. Perfil de esfuerzos de Reynolds
4. Intensidades de turbulencia
5. Espectros de amplitud

5.2.1.1 Valores de la velocidad de corte y valores de la constante de adición y von Kármán

Los resultados que se presentan se obtuvieron aplicando las metodologías propuestas en este documento, para la estimación de la velocidad de corte u_* y para la determinación de las constantes de adición C_2 y von Kármán κ de la ley logarítmica; las dos metodologías se aplicaron únicamente a los puntos del volumen de muestreo más cercano a la pared, por lo que los puntos de medición adicionales solo se graficaron para observar su comportamiento en las diferentes características que se presentan.

Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 5.2; adicionalmente se presenta de manera comparativa el valor estimado de velocidad de corte con el modelo clásico, ecuación (2.41).



Tabla 5.2 Valores obtenidos de la velocidad de corte u_* , constante de adición C_2 y constante de von Kármán κ

Prueba	Velocidad de corte u^* (cm/s)		Constante de adición	Constante de von Kármán
	Metodología propuesta	Modelo clásico, ecuación (2.41)	C_2	κ
PFL-01	2.58	1.48	9.22	0.34
PFL-02	2.76	3.31	6.91	0.32
PFL-03	2.77	3.24	5.01	0.29
PFL-04	2.33	2.70	7.87	0.35
PFL-05	2.82	2.88	4.88	0.31

5.2.1.2 Perfiles adimensionales de velocidades medias

Los valores de κ y C_2 fueron calculados mediante la metodología descrita en el subcapítulo 4.2. El coeficiente de amortiguamiento del modelo de van Driest B se estimó con un algoritmo programado en MATLAB® R2017a que consiste en asignar un valor de $y^+ > 30$ y calcular u^+ con el modelo de von Kármán, posteriormente se evalúa u^+ con el modelo de van Driest asignando diferentes valores de B y se toma como correcto el que genere un valor de u^+ aproximado o igual al valor calculado con el modelo de von Kármán; en este caso se utilizó un valor de $y^+ = 100$.

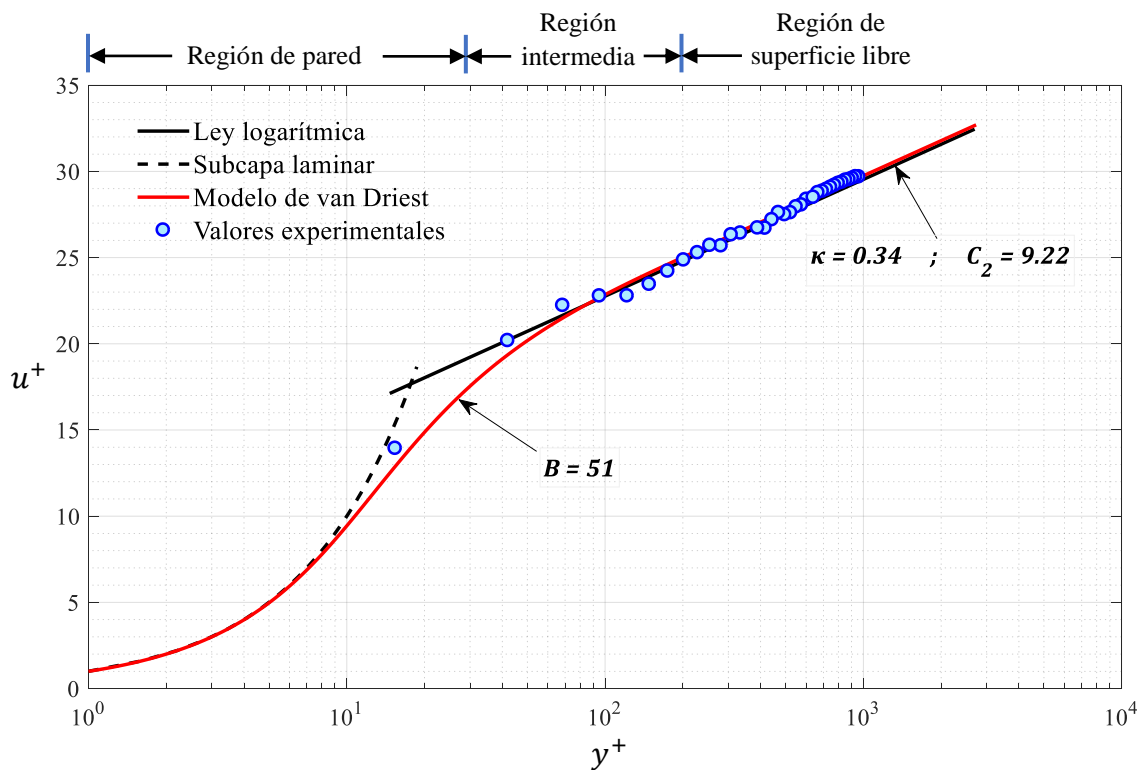


Figura 5.2 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-01

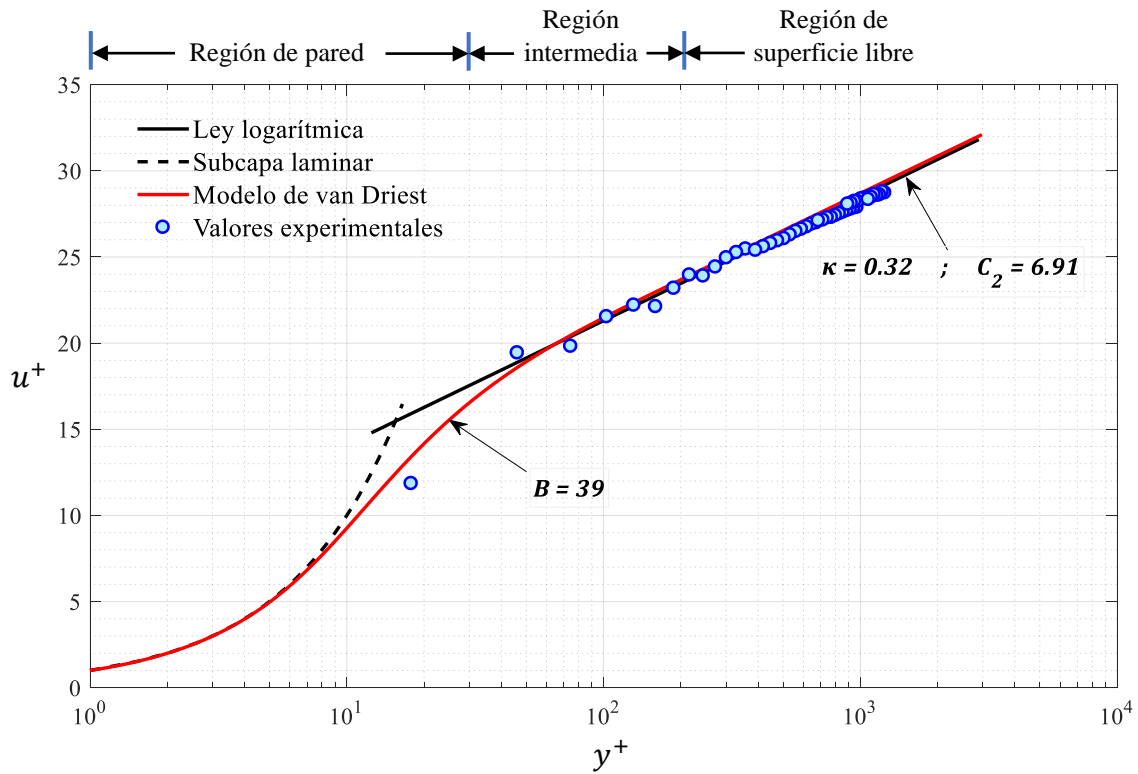


Figura 5.3 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-02

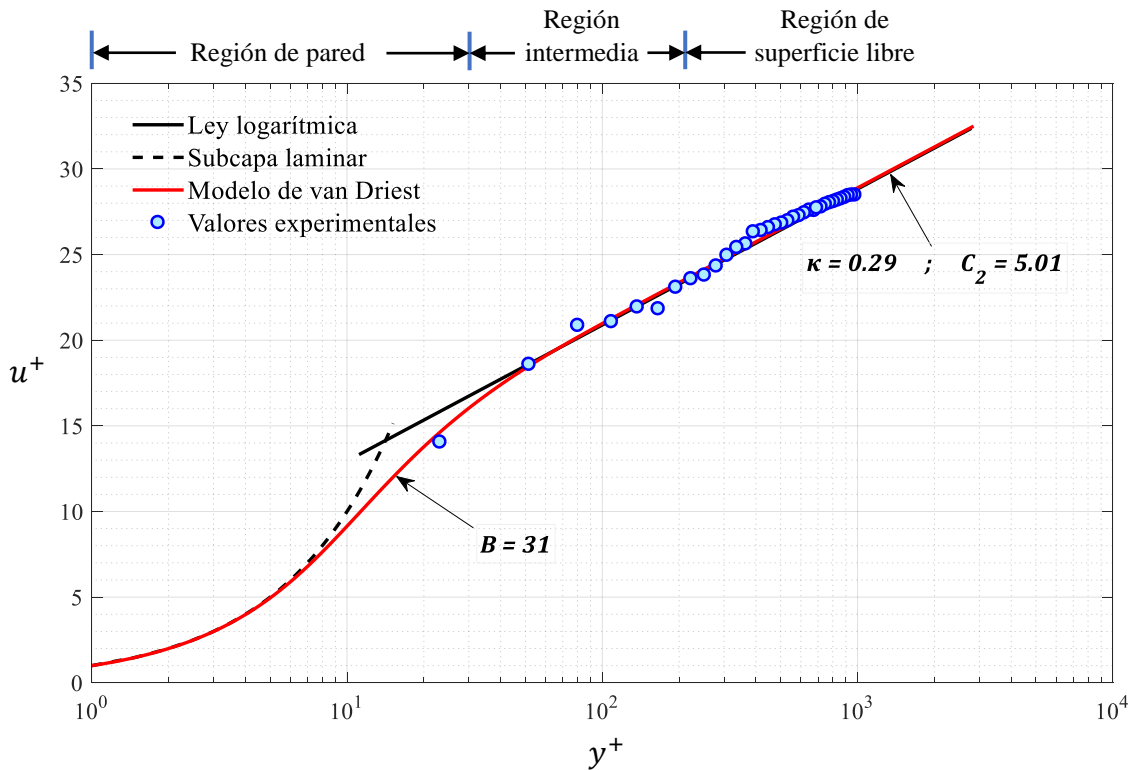


Figura 5.4 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-03

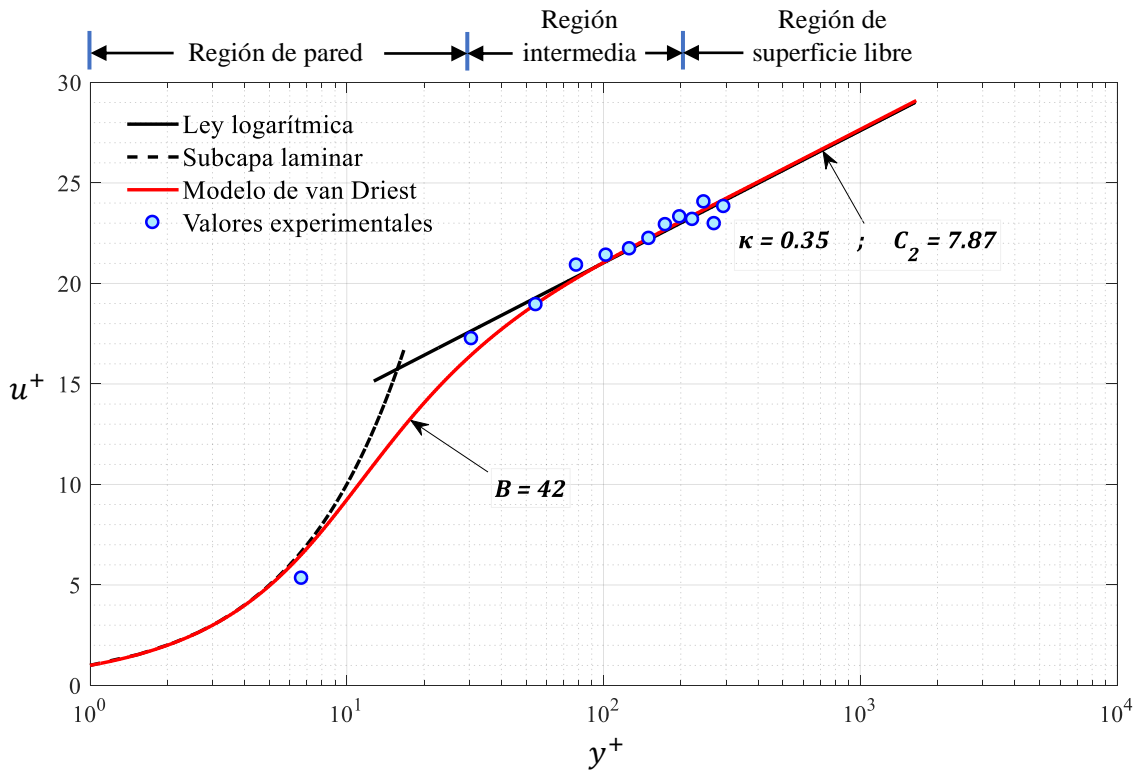


Figura 5.5 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-04

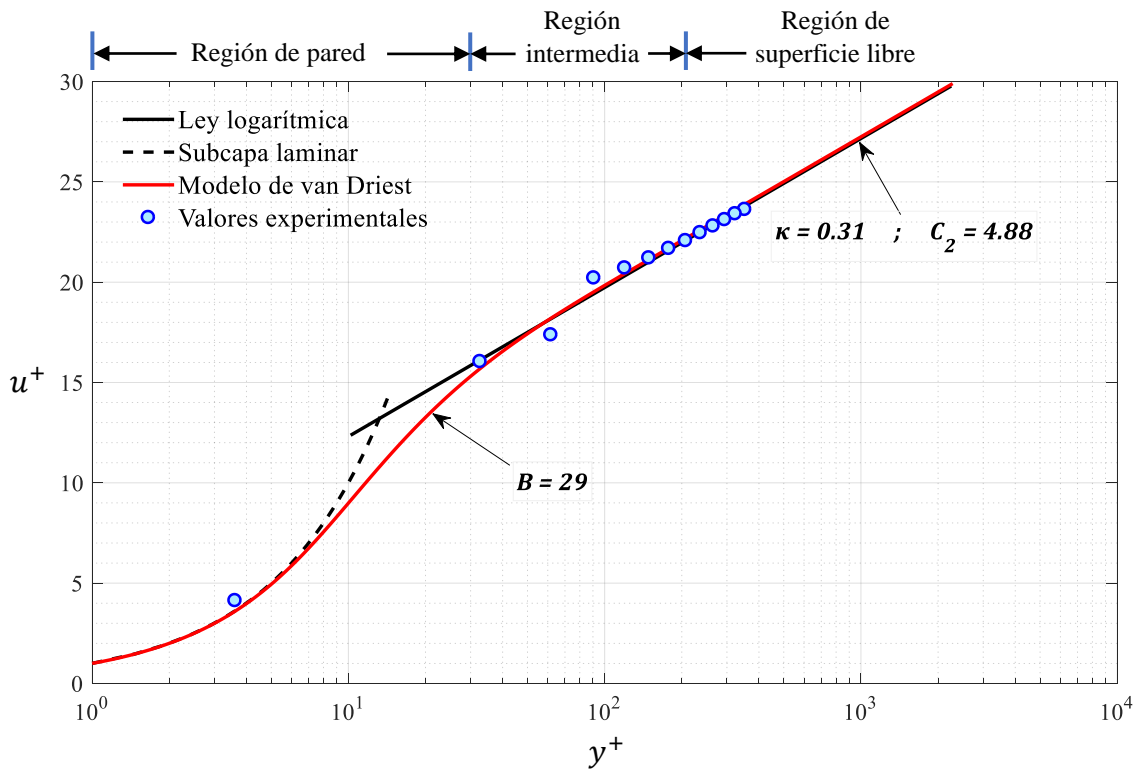


Figura 5.6 Perfil adimensional de velocidades medias, PFL-05



5.2.1.3 Perfil de esfuerzos de Reynolds

En la *Figura 5.7* se visualiza la tendencia del perfil de esfuerzos de Reynolds para las pruebas realizadas en fondo liso. En los valores obtenidos se presenta un desprendimiento de la tendencia teórica expresada por Nezu & Nakagawa (1993). Esta tendencia teórica $(1 - \xi)$ es ampliamente aceptada para el caso de canales anchos o bien aquellos que cumplan la siguiente relación,

$$\frac{b}{h} \geq 5. \quad (5.1)$$

De acuerdo con Tominaga & Nezu (1992), el cumplimiento de (5.1) indica que el flujo en un canal abierto rectangular es bidimensional, es decir, las corrientes secundarias (transversales, u_3) no contribuyen o afectan el flujo principal. Recientemente Auel et al. (2014) presentan resultados obtenidos en un canal rectangular para bajas relaciones de aspecto ($b/h < 5$) en los que se presenta un desprendimiento de la tendencia teórica $(1 - \xi)$, lo que da sustento a lo mostrado en la *Figura 5.7*. Las relaciones de aspecto fueron bajas en las pruebas realizadas debido a limitantes experimentales, dado que la técnica empleada es intrusiva y el volumen de muestreo del dispositivo ADV no permite medir en 4 cm cercanos a la probeta emisora y, por tanto, la profundidad h en todos los casos es superior a 5 cm.

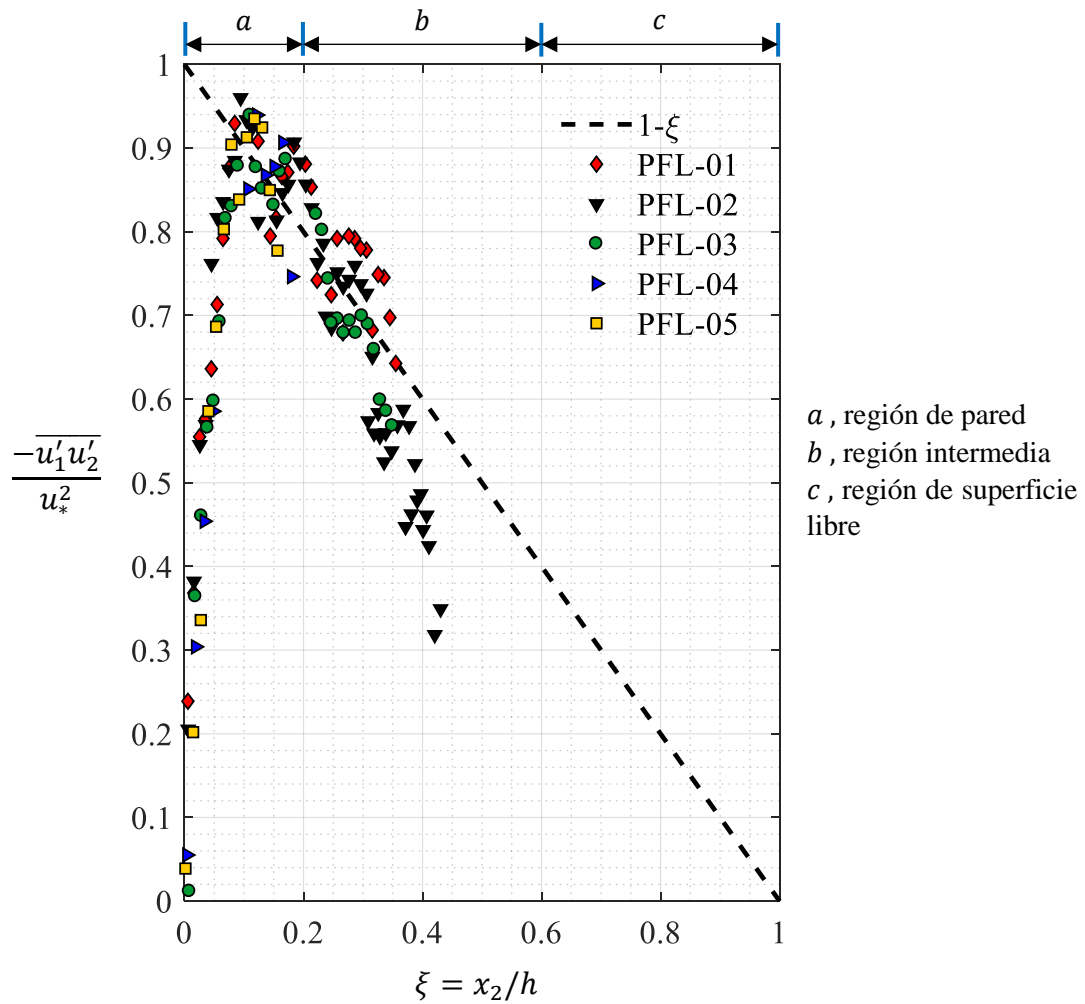


Figura 5.7 Perfil de esfuerzos de Reynolds

5.2.1.4 Intensidades de turbulencia

En la *Figura 5.8* se presentan los valores y tendencias de intensidad de turbulencia para las tres componentes de velocidad u_i . Las constantes empíricas de las funciones universales de intensidad de turbulencia expresadas en el subcapítulo 2.4.2, se obtuvieron mediante ajuste visual, quedando definidas para el caso de fondo liso de la siguiente manera,

$$\frac{\sqrt{u_1'^2}}{u_*} = 3.0 \exp(-1.6 \xi), \quad (5.2)$$



$$\frac{\sqrt{u_2'^2}}{u_*} = 0.9 \exp(-0.2 \xi), \quad (5.3)$$

$$\frac{\sqrt{u_3'^2}}{u_*} = 1.8 \exp(-0.9 \xi). \quad (5.4)$$

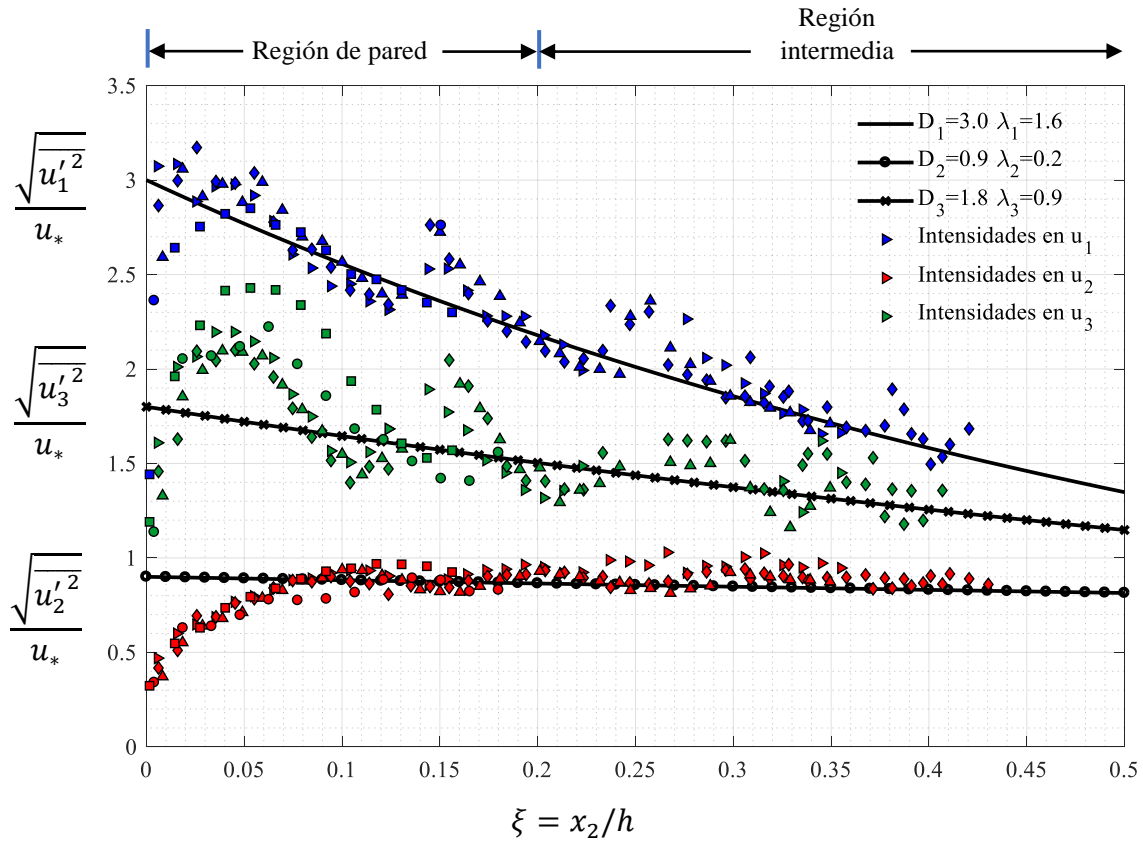


Figura 5.8 Intensidades de turbulencia, marcadores de la Figura 5.7



5.2.1.5 Espectros de amplitud

Los espectros de amplitud se obtienen mediante la aplicación de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) que implementa el software MATLAB®. Se muestran únicamente para la prueba PFL-01 y en dos puntos del perfil de muestreo que se indican en la *Figura 5.9*. Estos fueron seleccionados con la finalidad de mostrar el decaimiento de energía en dos diferentes zonas del flujo, siendo la capa de amortiguamiento (punto P_1) y la región logarítmica (punto P_2).

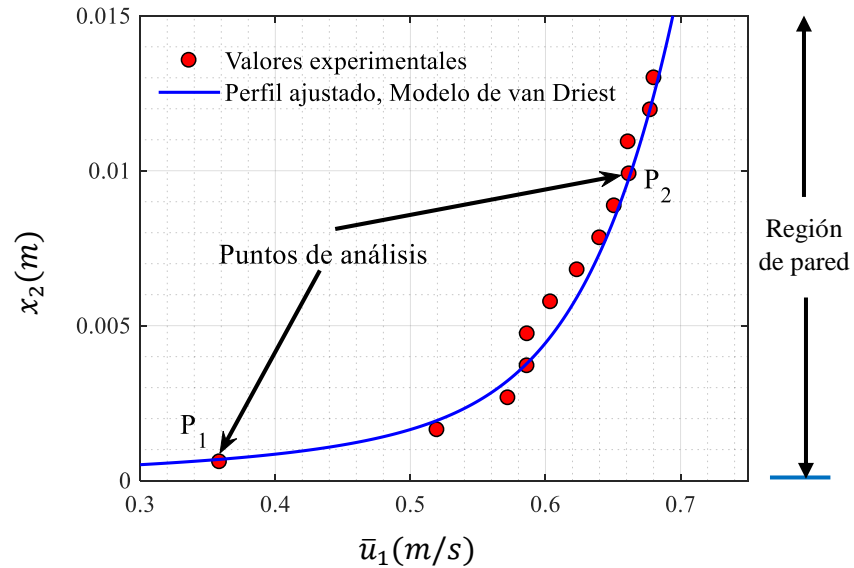


Figura 5.9 Puntos de análisis para espectros de amplitud, prueba PFL-01

Los espectros de amplitud de los datos obtenidos de la medición directa para las tres componentes de velocidad u_i se muestran a continuación; en la *Figura 5.10* para el punto P_1 y en la *Figura 5.11* para el punto P_2 .

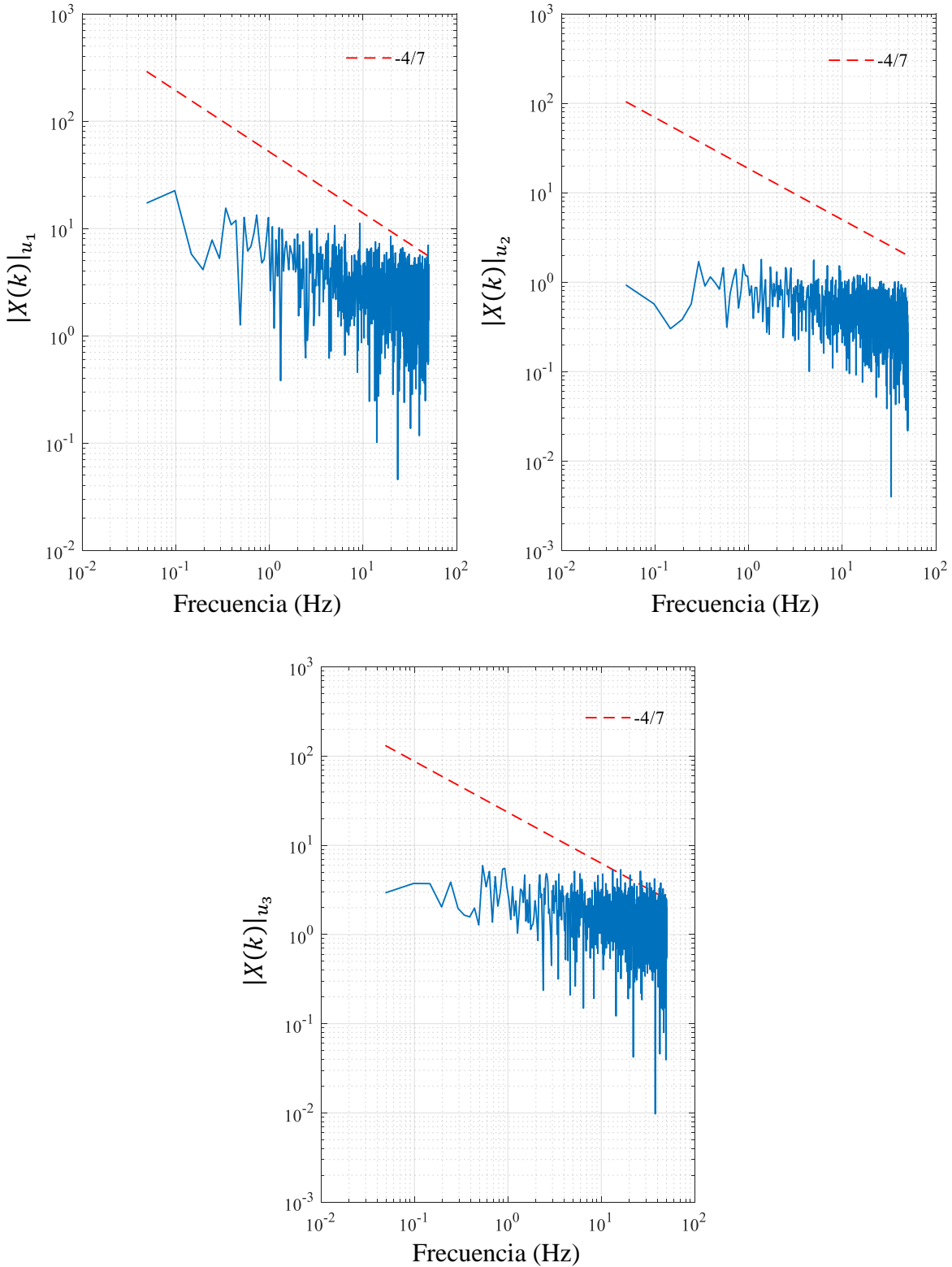


Figura 5.10 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_1 . Prueba PFL-01

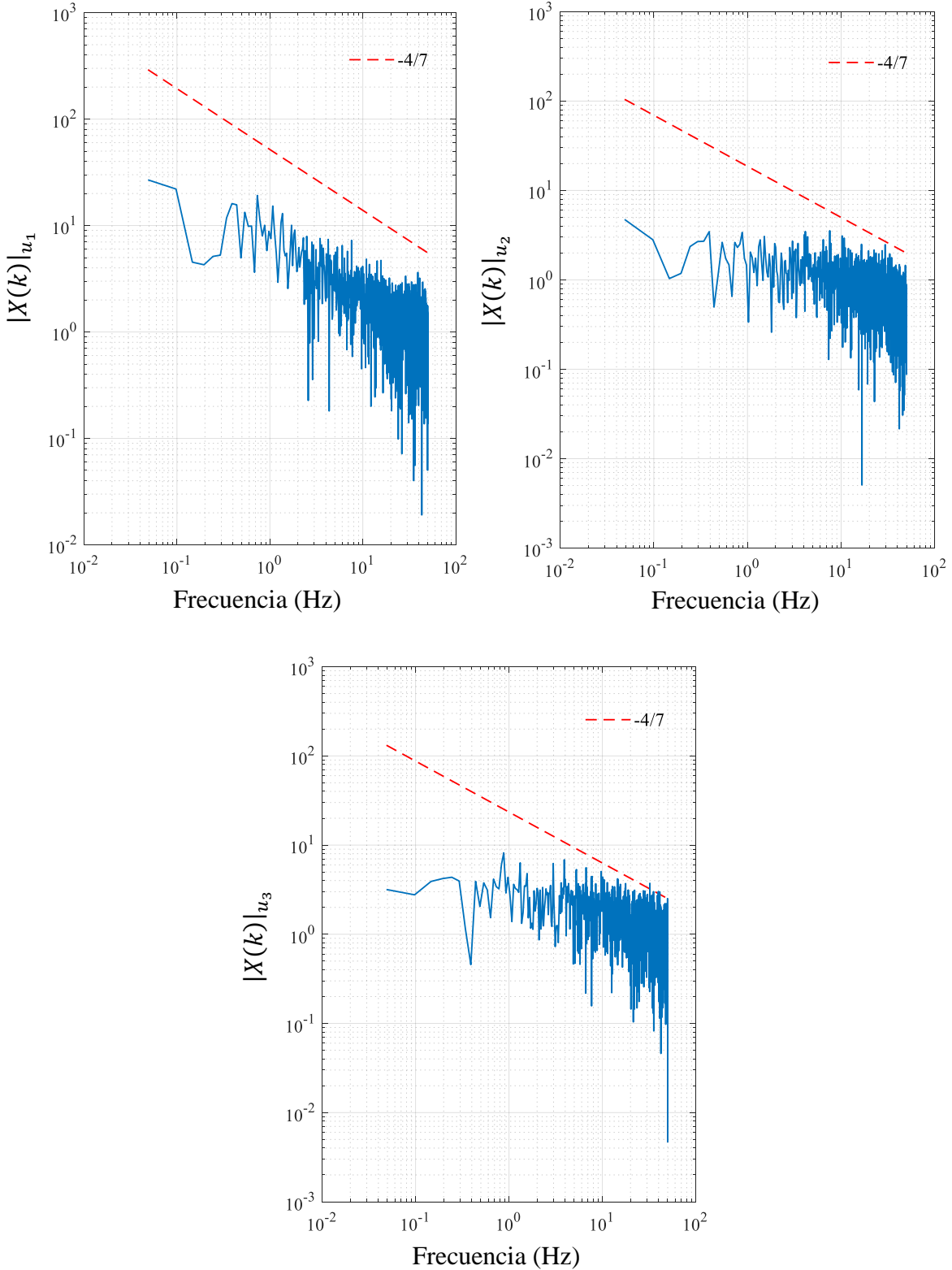


Figura 5.11 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_2 . Prueba PFL-01



En los resultados obtenidos de los espectros de amplitud para los puntos de análisis P_1 y P_2 , se observa que la pendiente en el decaimiento de la energía difiere de lo que indica el modelo de Kolmogorov ($f^{-\frac{5}{3}}$), a partir de esto, se considera la posibilidad de la presencia de un ruido aleatorio en la señal obtenida; a partir de esto, se aplicó un filtro Gaussiano a la serie de datos temporales, y se obtuvieron los resultados que se muestran a continuación, donde también se presentan los espectros de número de onda que se lograron aplicando las expresiones (2.49) y (2.50). Los resultados se muestran únicamente para la componente de velocidad en dirección principal del flujo u_1 .

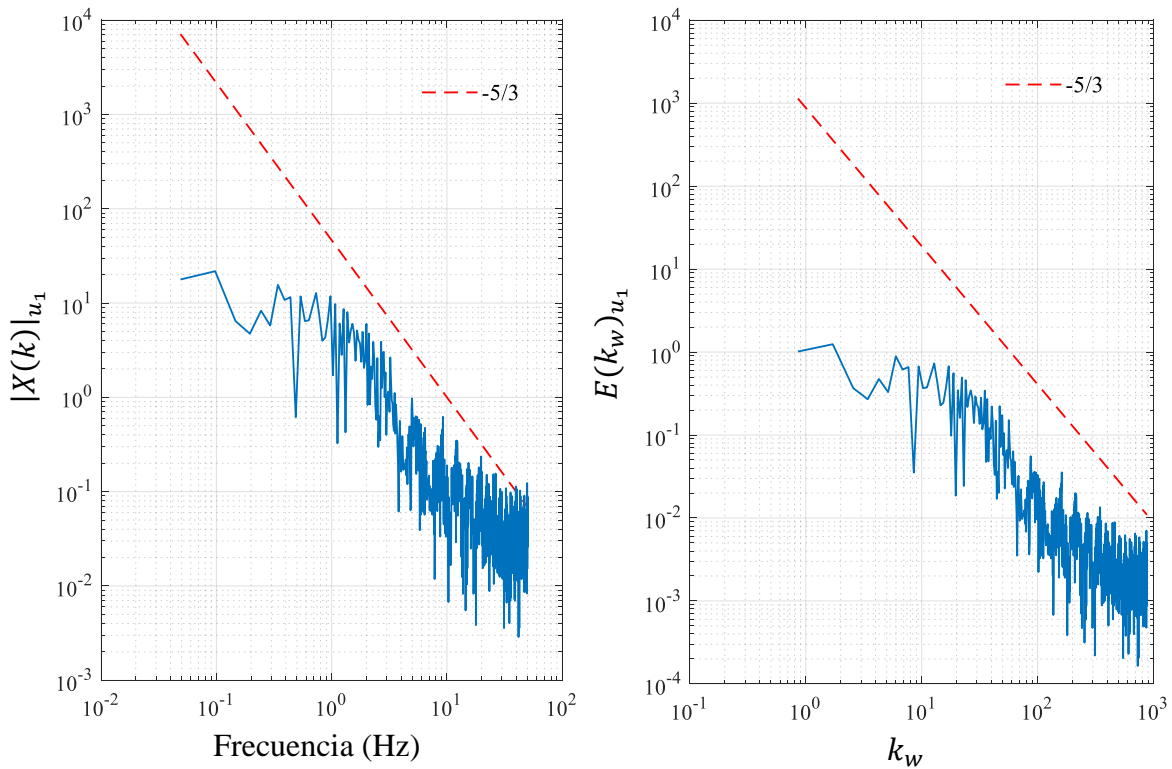


Figura 5.12 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_1

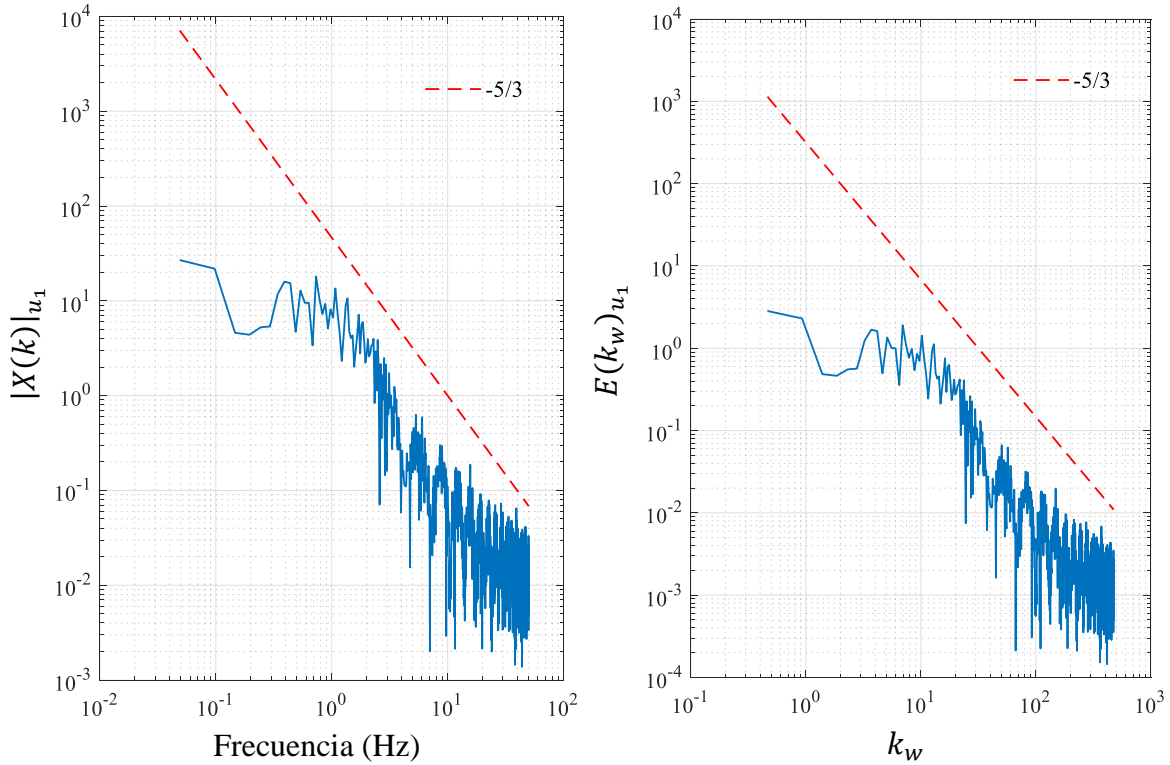


Figura 5.13 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_2

5.3 Pruebas en fondo de rugosidad incompleta

5.3.1 Resultados

Las pruebas en la condición de fondo de lija fueron dentro de la clasificación de rugosidad incompleta (Nezu & Nakagawa, 1993; Sotelo Ávila, 2002), dado que ninguna superó la relación $k_s^+ > 70$ ni fue tan baja como $k_s^+ < 5$, tal como se muestra en la Tabla 5.3.



Tabla 5.3 *Condiciones experimentales de pruebas en fondo de rugosidad incompleta*

Caso	Pendiente	Tirante del flujo	Relación de aspecto	Velocidad media	Número de Froude	Número de Reynolds	Rugosidad adimensional	Caudal	Densidad	Temperatura	Viscosidad cinemática
	($\times 10^{-3}$) S (-)	h (cm)	b/h (-)	\bar{U}_{m_1} (cm/s)	F_r (-)	($\times 10^3$) R_e (-)	k_s^+ (-)	Q (l/s)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	($\times 10^{-6}$) ν (m ² /s)
PFR-01	0.532	7.6	3.22	51.85	0.60	24.31	18	9.65	997.15	24.55	0.90
PFR-02	0.532	9.2	2.66	59.23	0.62	31.11	20	13.35	996.62	26.54	0.86
PFR-03	0.532	11.5	2.13	71.63	0.67	42.48	25	20.18	996.31	27.64	0.84
PFR-04	0.532	13.4	1.83	77.21	0.67	49.41	26	25.35	996.93	25.44	0.88
PFR-05	1.064	8.0	3.06	55.77	0.63	26.99	21	10.93	997.15	24.55	0.90
PFR-06	1.064	9.3	2.63	59.06	0.62	31.22	20	13.46	996.98	25.26	0.89
PFR-07	1.064	11.4	2.15	70.79	0.67	41.79	25	19.77	996.72	26.17	0.87
PFR-08	1.064	12.2	2.01	84.81	0.78	51.83	27	25.35	996.46	27.09	0.85

Nota. Los valores de densidad ρ y viscosidad cinemática ν son de acuerdo con las tablas de Wagner & Kretzschmar (2008), basadas en la formulación industrial IAPWS-IF97.

El perfil adimensional completo en esta serie de pruebas se ajustó con el modelo de Cebeci & Chang, utilizando el valor de rugosidad adimensional k_s^+ . De manera análoga a las pruebas en fondo liso se aplicaron las metodologías planteadas en este documento únicamente al perfil de muestreo cercano a la pared. Los resultados se muestran en el siguiente orden,

1. Valores de la velocidad de corte y valores de la constante de adición y von Kármán
2. Perfiles adimensionales de velocidad media
3. Perfil de esfuerzos de Reynolds
4. Intensidades de turbulencia
5. Espectros de amplitud

5.3.1.1 *Valores de la velocidad de corte y valores de la constante de adición y von Kármán*

La Tabla 5.4 presenta los valores obtenidos de la velocidad de corte u_* , la constante de adición C_2 y la constante de von Kármán κ , para cada una de las pruebas. Adicionalmente se presenta de manera comparativa el valor estimado de velocidad de corte con el modelo clásico, ecuación (2.41).



Tabla 5.4 Valores obtenidos de la velocidad de corte, constante de adición C_2 y constante de von Kármán κ

Prueba	Velocidad de corte u^* (cm/s)		Constante de adición	Constante de von Kármán
	Metodología propuesta	Modelo clásico, ecuación (2.41)	C_2	κ
PFR-01	3.03	1.99	3.08	0.43
PFR-02	3.14	2.19	3.00	0.43
PFR-03	3.85	2.45	1.66	0.43
PFR-04	4.26	2.64	1.55	0.45
PFR-05	3.58	2.89	2.65	0.52
PFR-06	3.40	3.12	1.68	0.44
PFR-07	4.09	3.45	0.63	0.43
PFR-08	4.36	3.57	-2.80	0.33

5.3.1.2 Perfiles adimensionales de velocidades medias

Los valores de κ y C_2 fueron calculados mediante la metodología descrita en el subcapítulo 4.2, y el coeficiente de amortiguamiento del modelo de Cebeci & Chang B se calculó de manera análoga al coeficiente de amortiguamiento del modelo de van Driest, con el algoritmo programado en MATLAB® R2017a.

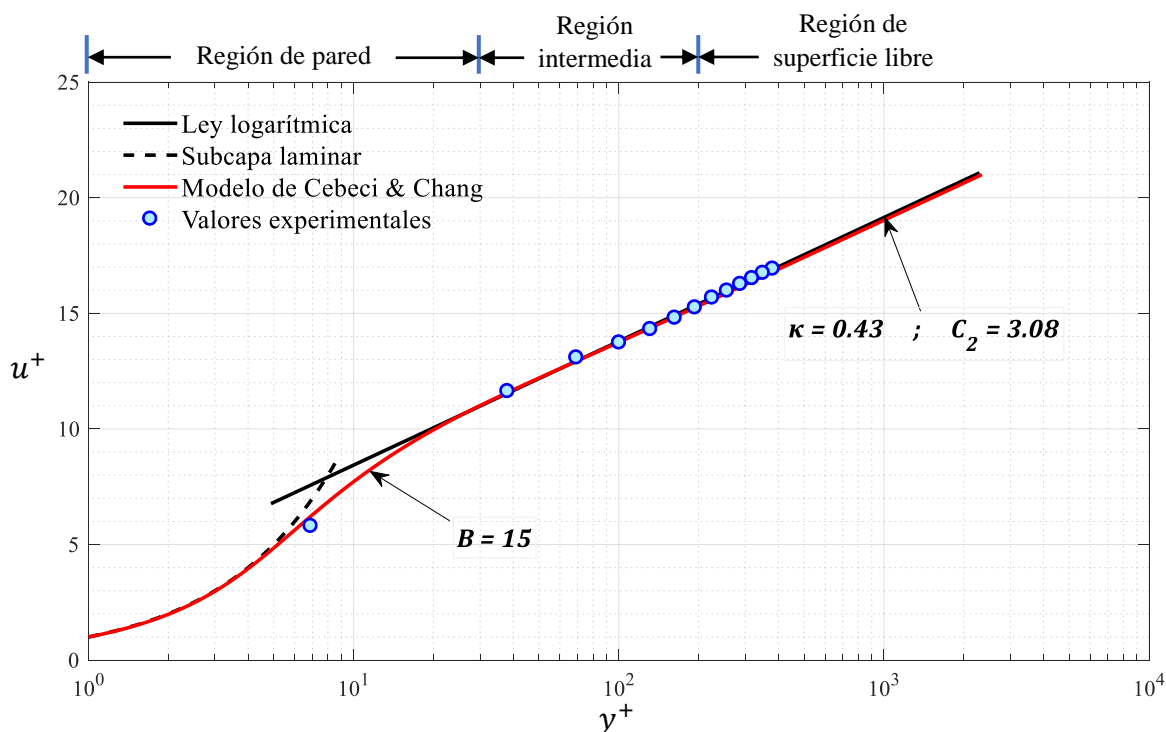


Figura 5.14 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-01

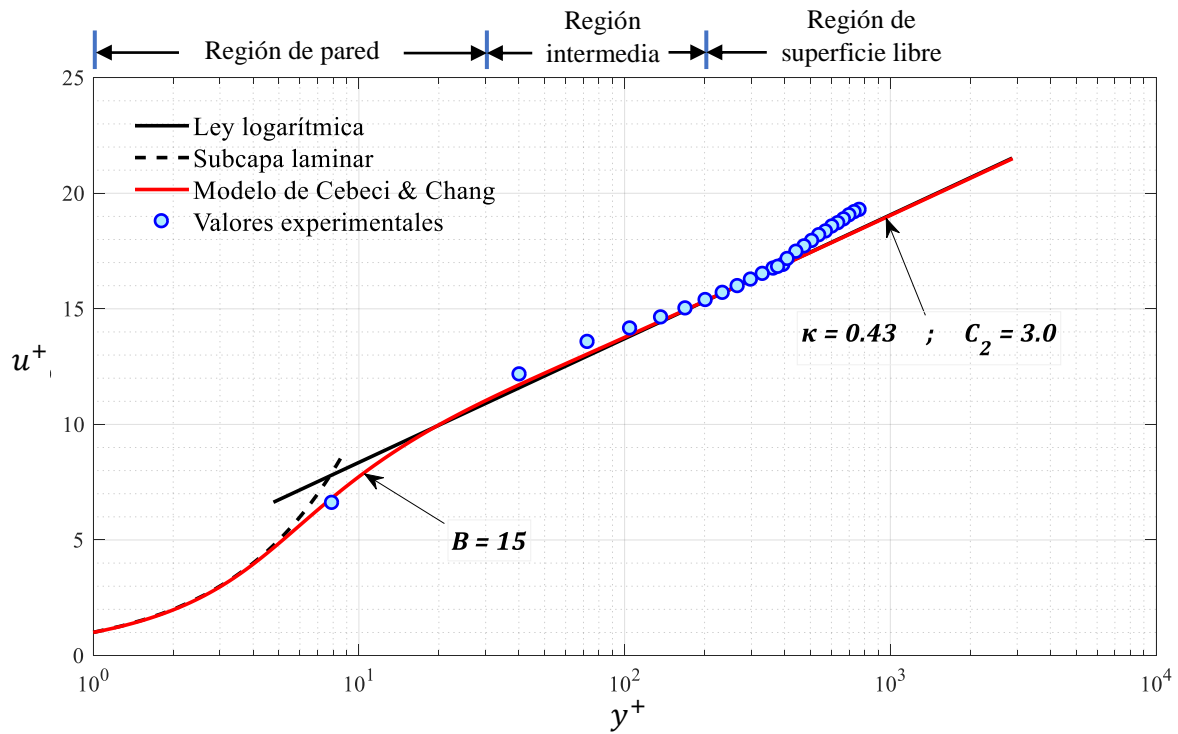


Figura 5.15 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-02

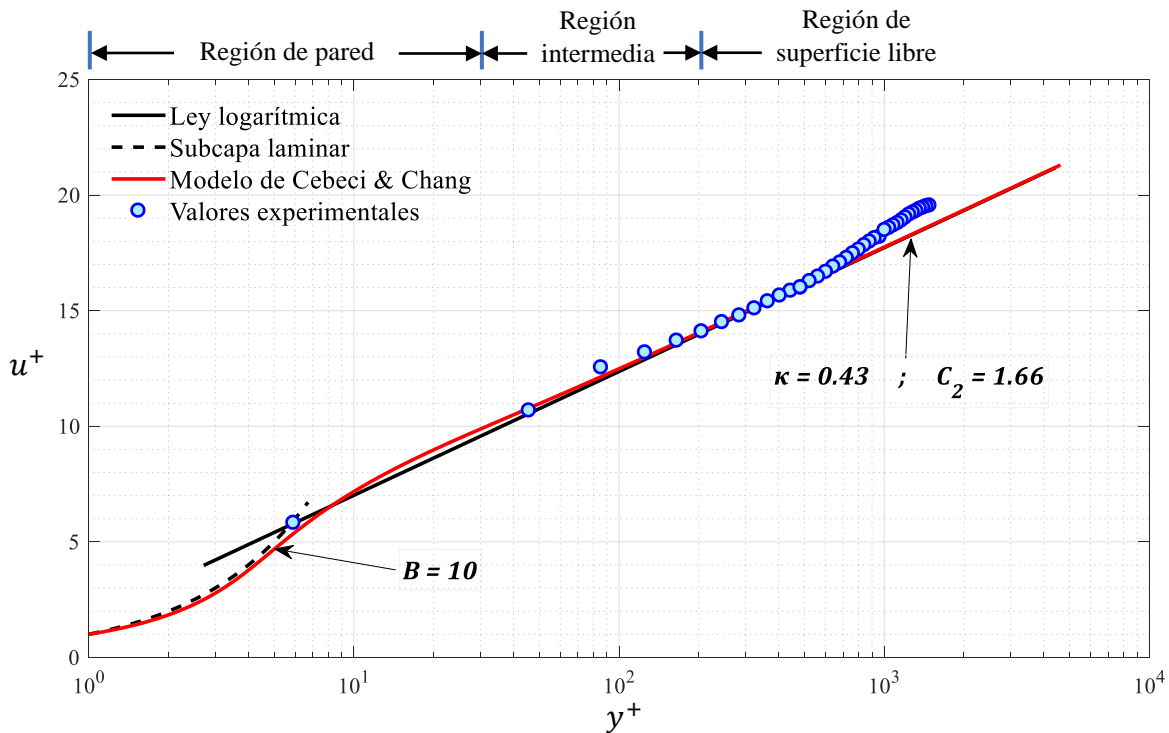


Figura 5.16 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-03

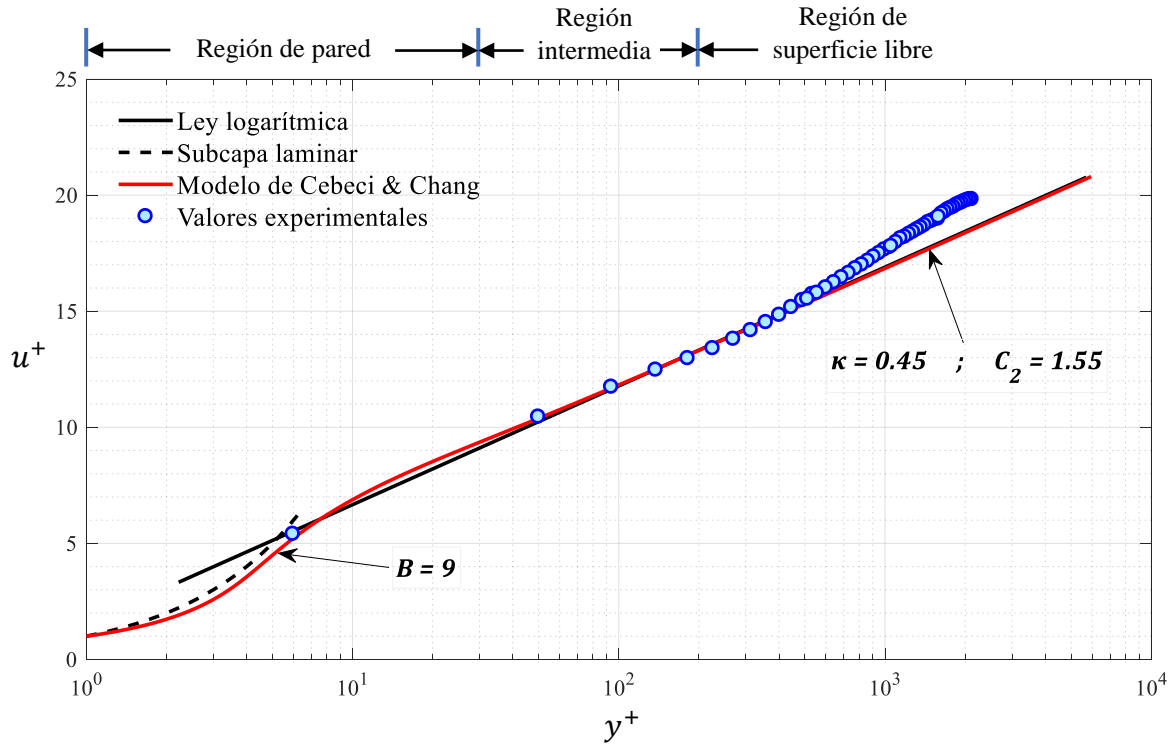


Figura 5.17 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-04

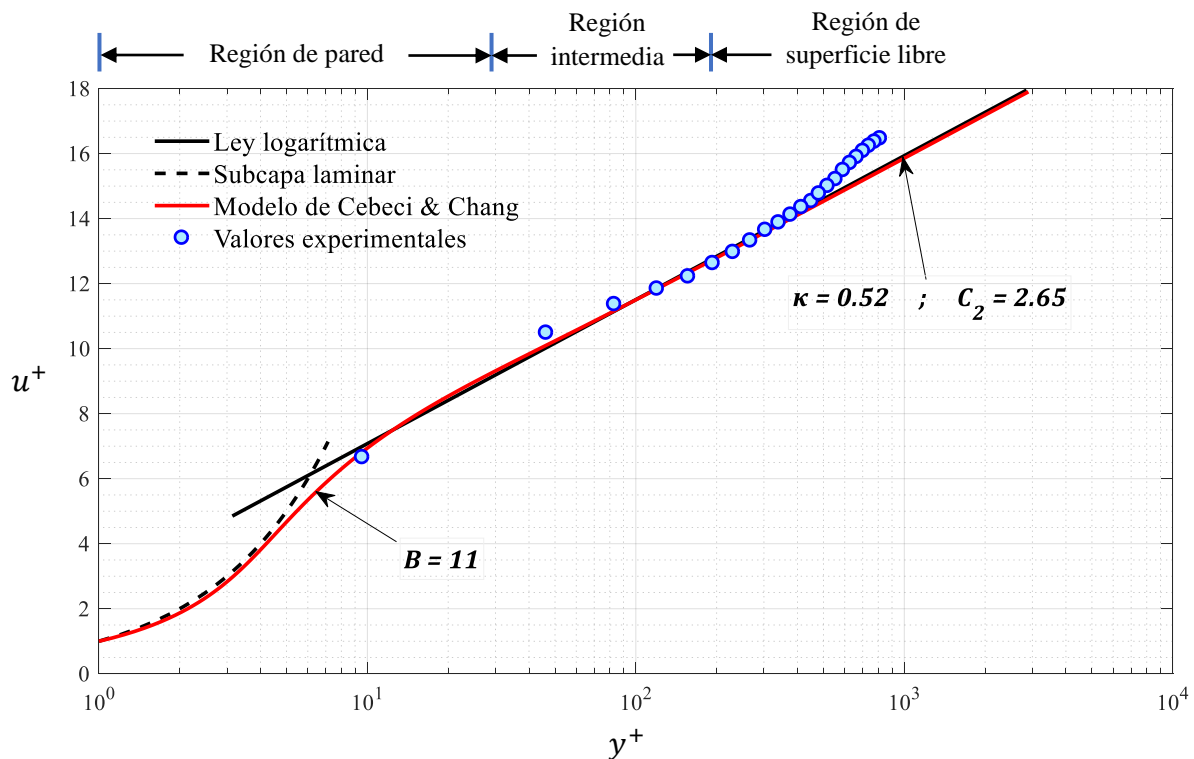


Figura 5.18 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-05

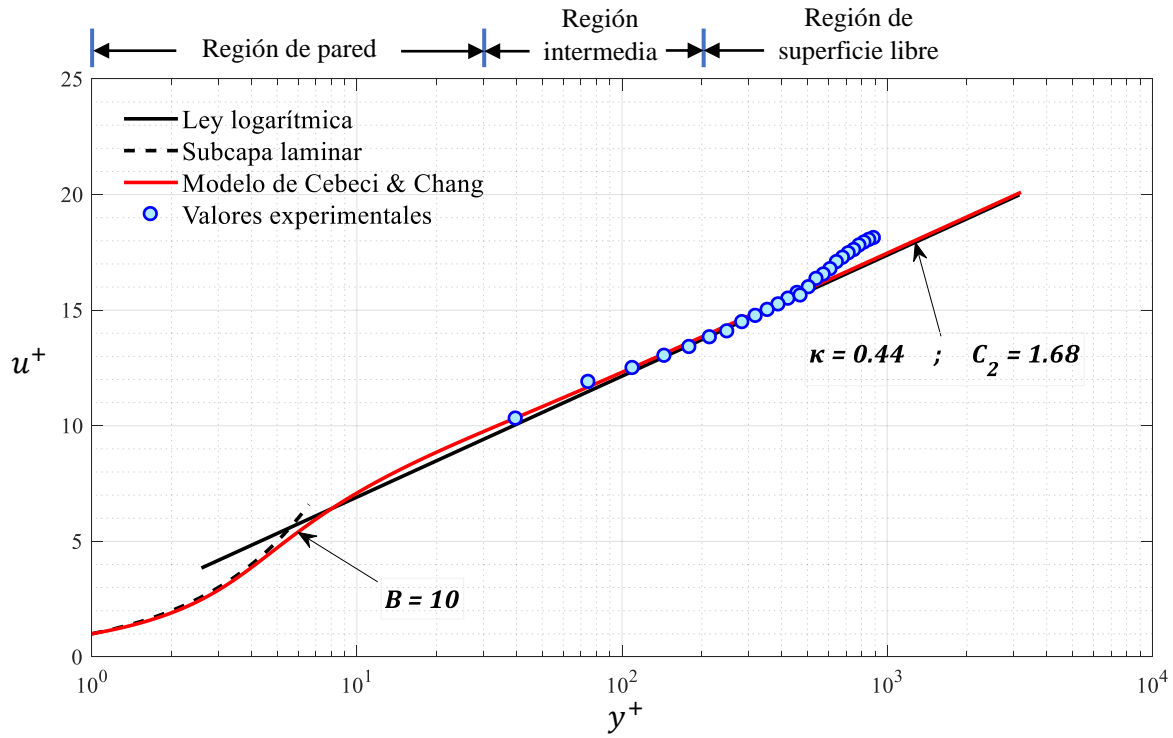


Figura 5.19 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-06

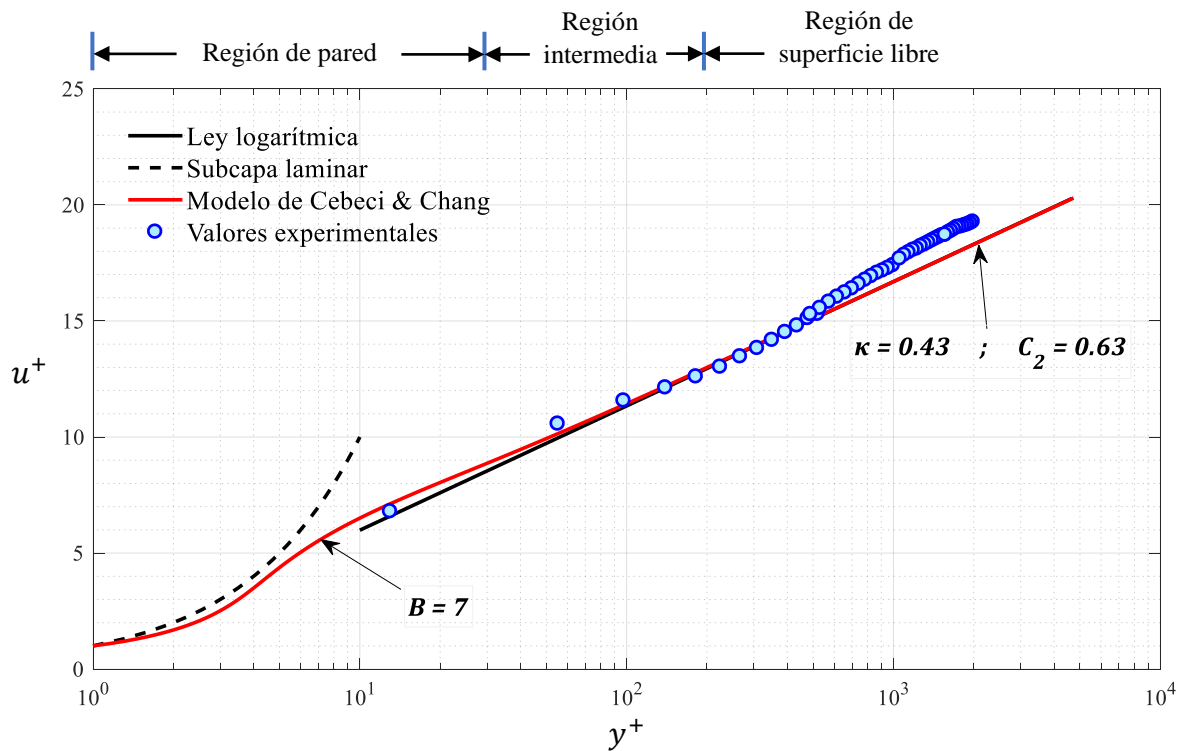


Figura 5.20 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-07

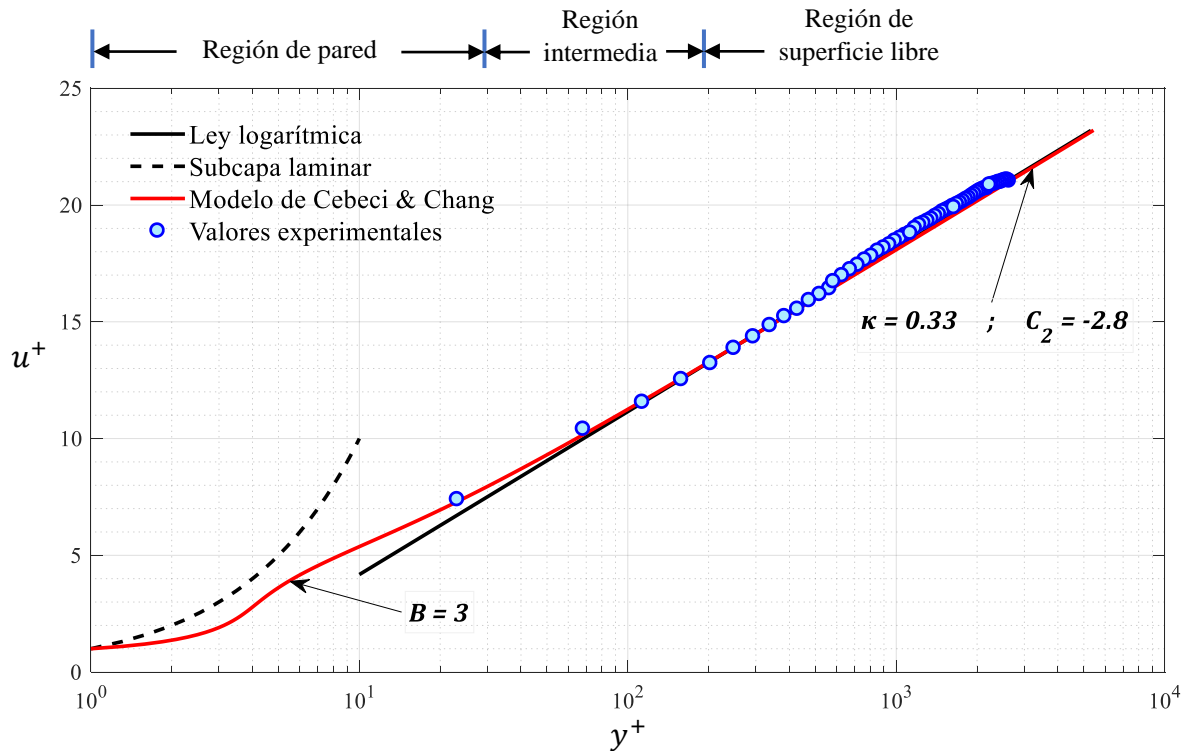


Figura 5.21 Perfil adimensional de velocidades medias, PFR-08

5.3.1.3 Perfil de esfuerzos de Reynolds

En la Figura 5.22 se muestra la tendencia del perfil de esfuerzos de Reynolds para las pruebas realizadas en fondo de rugosidad incompleta. De manera similar al perfil de esfuerzos para el caso de fondo liso, se presenta un desprendimiento de la tendencia teórica aproximadamente en la relación $\xi > 0.2$, esto indica defectos en la tendencia teórica $(1 - \xi)$ causados por la existencia de corrientes secundarias generadas por las bajas relaciones de aspecto que se tienen en las pruebas.

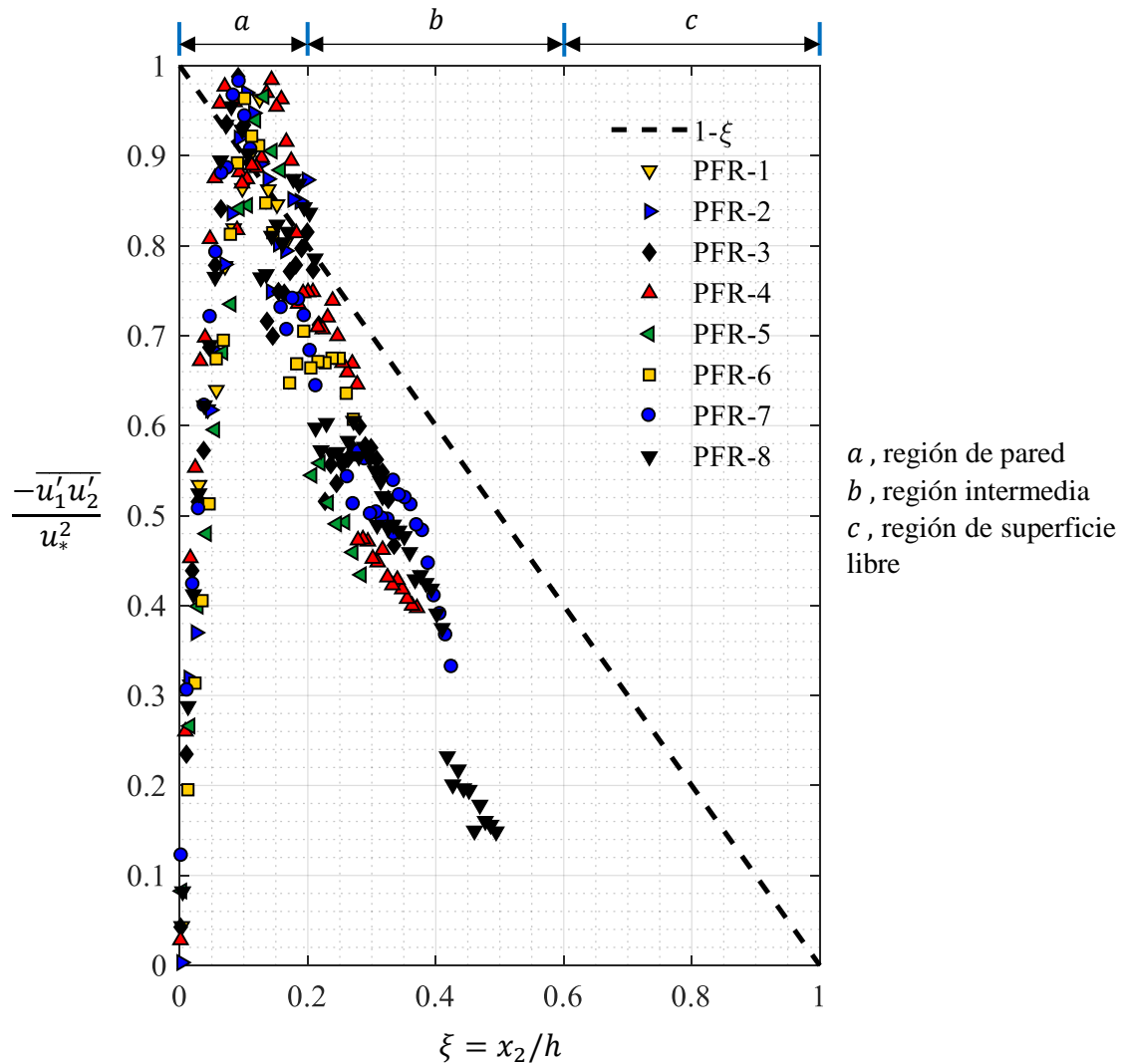


Figura 5.22 Perfil de esfuerzos de Reynolds

Los perfiles de esfuerzos de Reynolds obtenidos para las dos condiciones de rugosidad en el fondo muestran el ascenso rápido en los valores experimentales, esto causado por el aumento de los esfuerzos turbulentos y la disminución de los esfuerzos viscosos al alejarse del fondo. En los experimentos revisados en la literatura no presentan este ascenso (ver por ejemplo los mostrados en la *Figura 2.12*) que es importante para comprender la influencia de los esfuerzos viscosos en la determinación de la velocidad de corte. Lo anterior da sustento a la metodología que se propone en este documento para determinar la velocidad de corte.



5.3.1.4 Intensidades de turbulencia

En la *Figura 5.23* se presentan los valores y tendencias de intensidad de turbulencia para las tres componentes de velocidad u_i . Las constantes empíricas de las funciones universales de intensidad de turbulencia expresadas en el subcapítulo 2.4.2, se obtuvieron mediante ajuste visual, quedando definidas para el caso de fondo de rugosidad incompleta de la siguiente manera,

$$\frac{\sqrt{u_1'^2}}{u_*} = 2.9 \exp(-1.7 \xi), \quad (5.5)$$

$$\frac{\sqrt{u_2'^2}}{u_*} = 0.9 \exp(-0.7 \xi), \quad (5.6)$$

$$\frac{\sqrt{u_3'^2}}{u_*} = 2.0 \exp(-1.3 \xi). \quad (5.7)$$

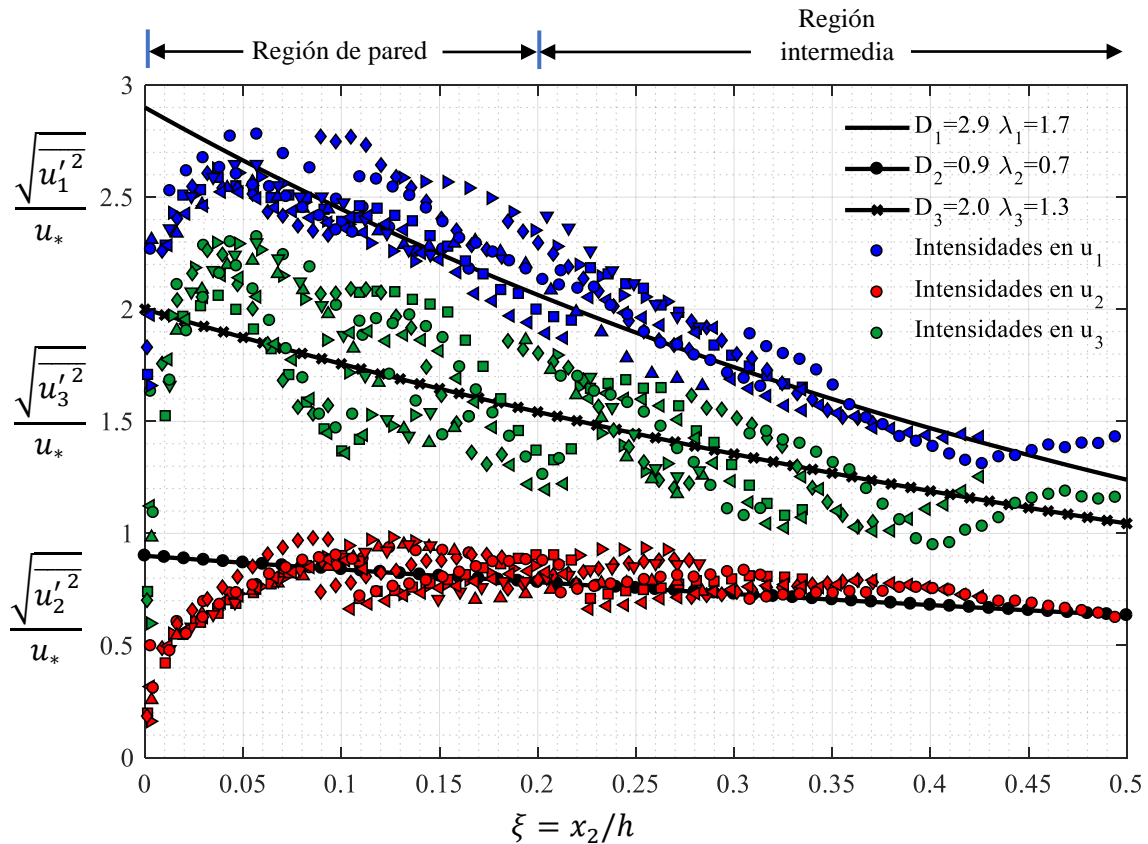


Figura 5.23 Intensidades de turbulencia, marcadores de la *Figura 5.22*



5.3.1.5 Espectros de amplitud

De manera análoga a las pruebas en fondo liso se muestran los espectros de amplitud solo para dos puntos de la prueba PFR-01, que se indican en la *Figura 5.24*, donde el punto P_1 se encuentra en la zona de amortiguamiento y el punto P_2 pertenece a la región logarítmica.

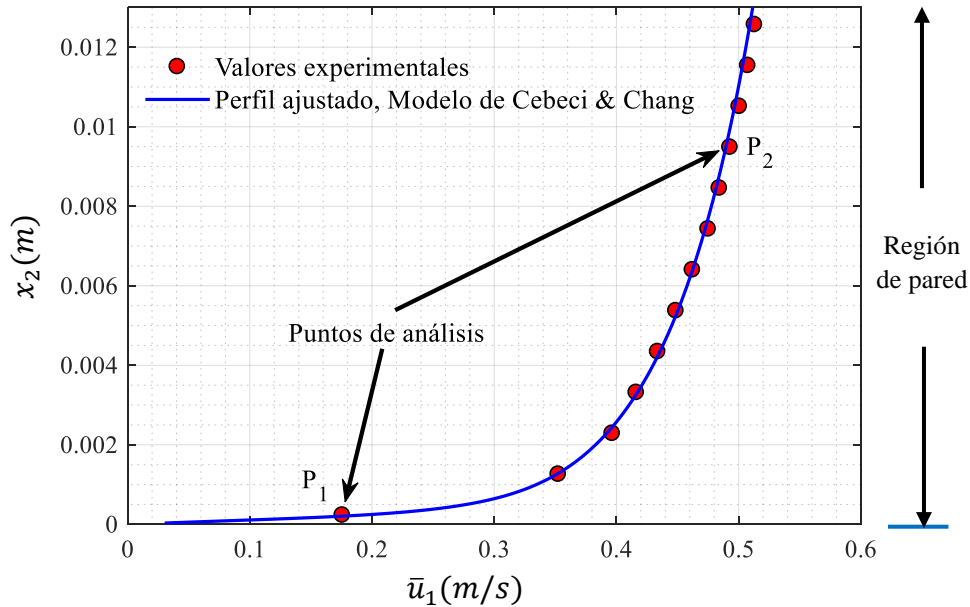


Figura 5.24 Puntos de análisis para espectros de amplitud, prueba PFR-01

Los espectros de amplitud de los datos obtenidos de la medición directa para las tres componentes de velocidad u_i se muestran a continuación en la *Figura 5.25* para el punto P_1 y en la *Figura 5.26* para el punto P_2 .

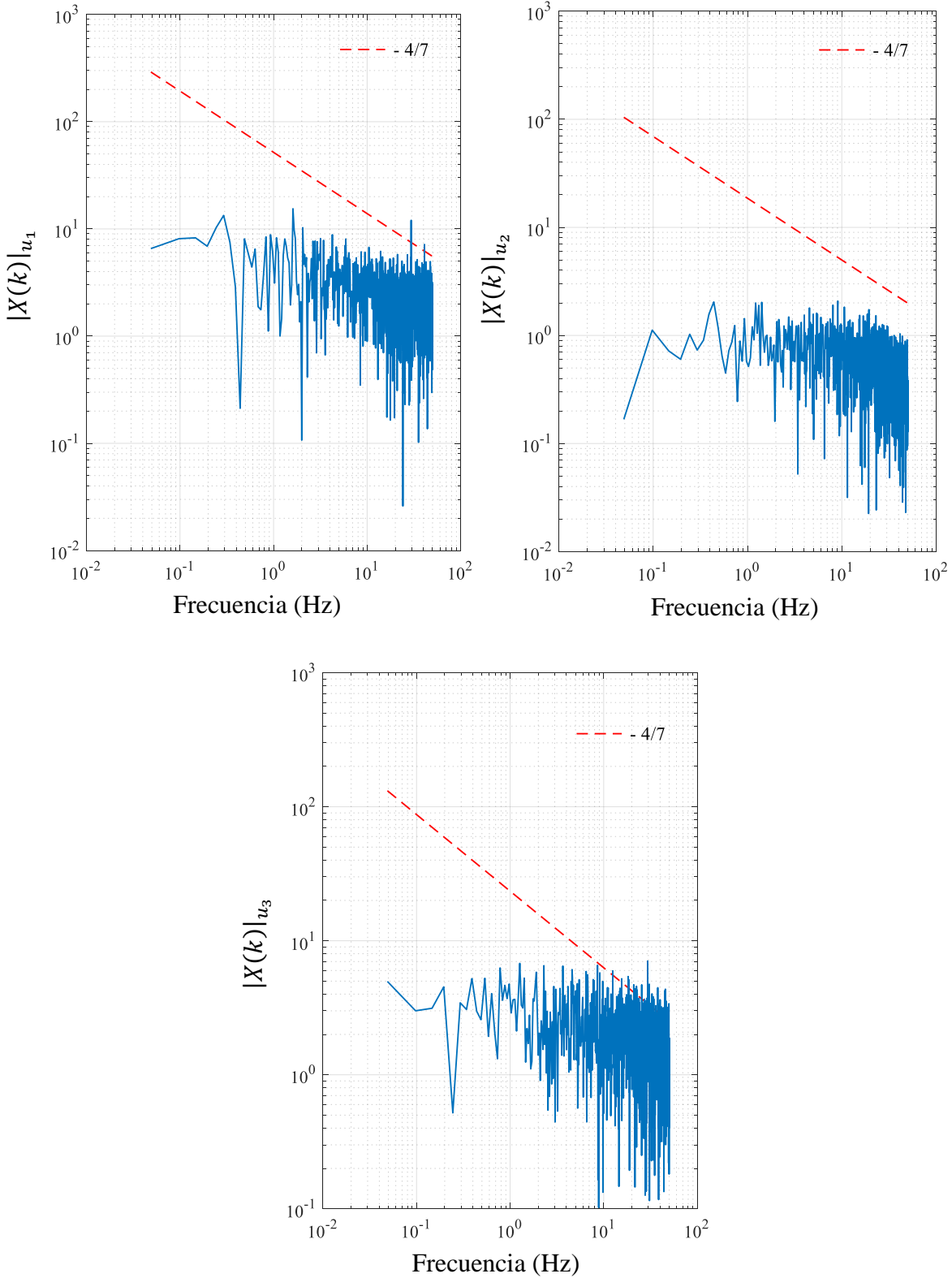


Figura 5.25 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_1 . Prueba PFR-01

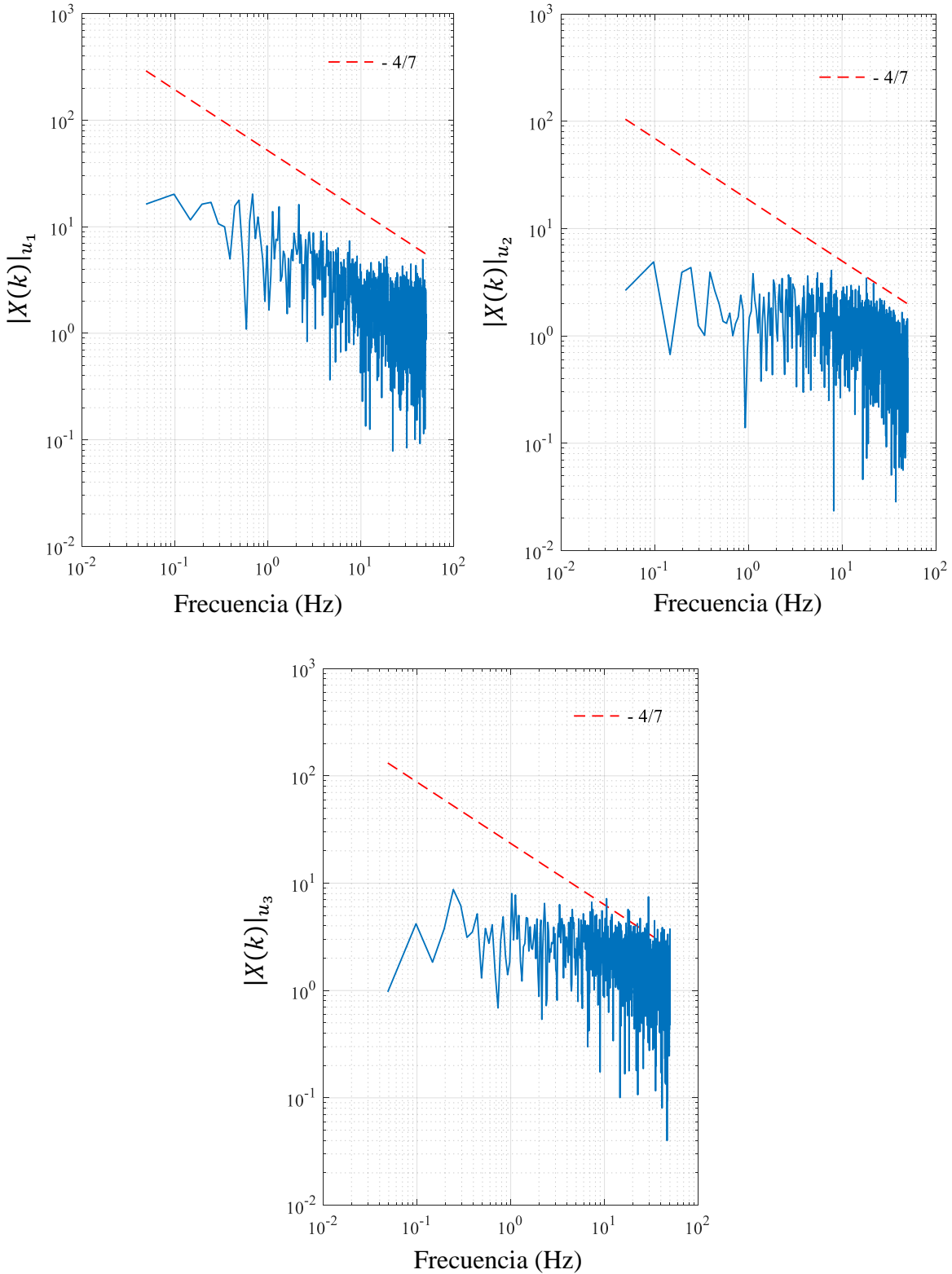


Figura 5.26 Espectro de amplitud en las tres componentes de velocidad, punto P_2 . Prueba PFR-01



Los resultados de espectros de amplitud en ambos puntos muestran un comportamiento semejante al caso de fondo liso, teniendo una pendiente en el decaimiento de energía aproximada de $-4/7$; por tanto, se aplicó un filtro Gaussiano a los datos obtenidos para eliminar el posible ruido aleatorio y se utilizaron las expresiones (2.49) y (2.50) para obtener los espectros en función del número de onda. Los resultados se muestran únicamente para la componente de velocidad en dirección principal del flujo u_1 .

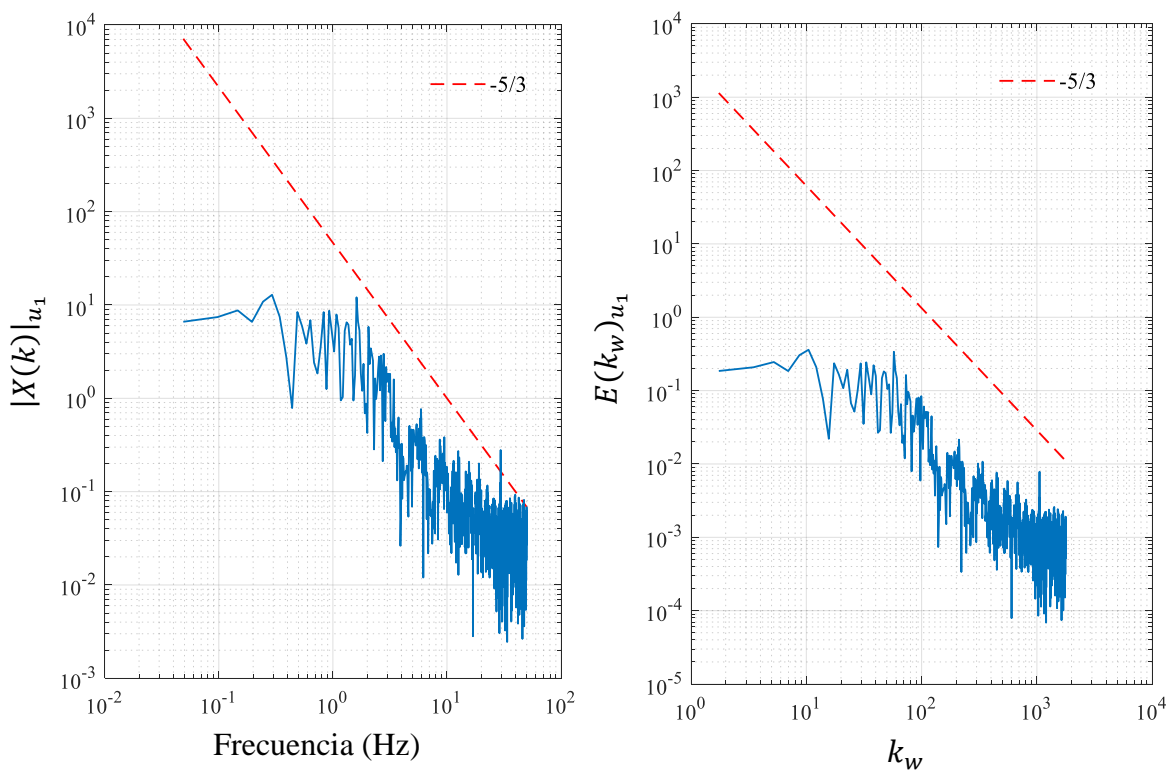


Figura 5.27 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_1

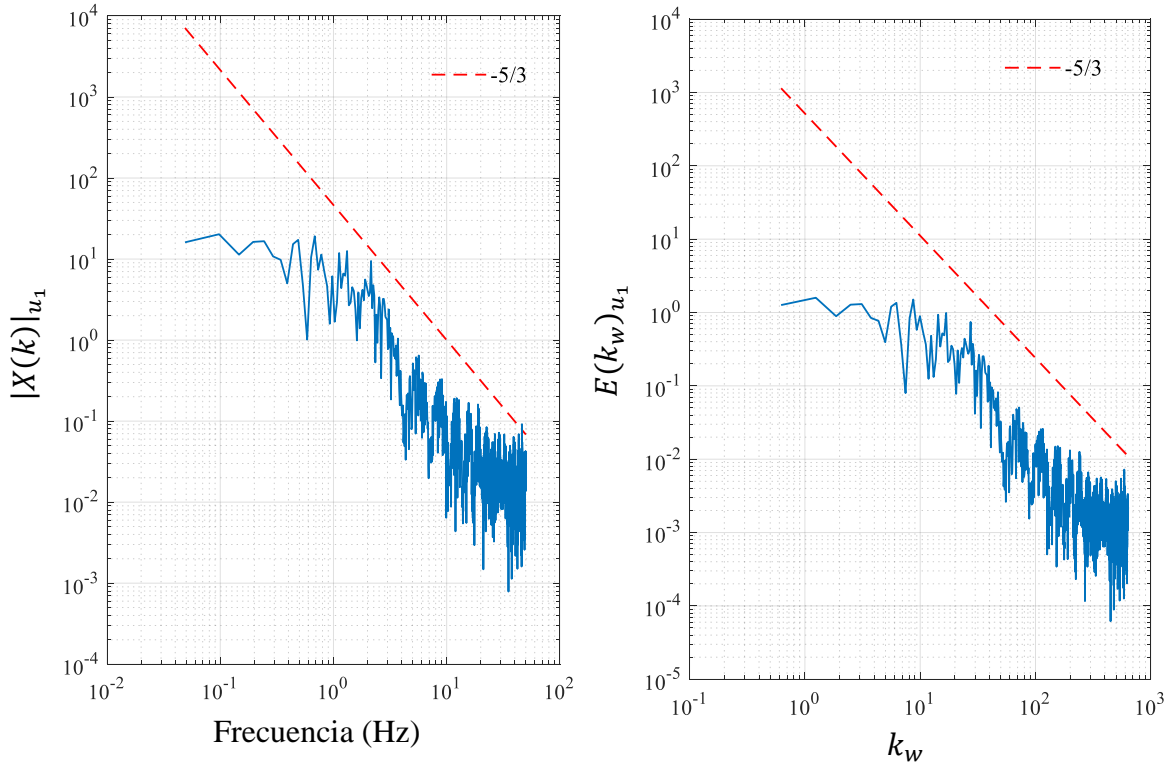


Figura 5.28 Espectro de amplitud y número de onda de datos filtrados en dirección principal del flujo u_1 , punto P_2

Los espectros de amplitud y número de onda de la señal filtrada tienen una pendiente en el decaimiento de la energía aproximada a $-5/3$, tal como lo indica la teoría de Kolmogorov, de esto se argumenta que la señal obtenida directamente del dispositivo tiene un ruido blanco, que debe ser eliminado en el caso de analizar con precisión la energía que contienen las frecuencias características en el flujo.

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones generales

La aplicación de la metodología para estimar la velocidad de corte que se desarrolló en este trabajo tuvo resultados aceptables, como se muestra en las tendencias que tienen los perfiles de esfuerzos de Reynolds y las curvas de intensidades de turbulencia, estos resultados mostraron tendencias similares para las dos condiciones de rugosidad en el fondo.

Debido a la configuración de la estación experimental, canal corto y estrecho, los perfiles de esfuerzos de Reynolds tiene una desviación de la tendencia teórica $(1 - \xi)$, lo anterior se debe a la baja relaciones de aspecto $(b/h < 5)$, y que es similar a lo obtenido por Auel et al. (2014), indicando que se tiene la presencia de corrientes secundarias.

Los valores obtenidos de intensidades de turbulencia se ven ligeramente superiores para el caso de fondo liso en dirección principal del flujo, tal como lo indican resultados obtenidos por diferentes autores en casos de flujos subcríticos, como por ejemplo Tominaga & Nezu (1992). Para las intensidades en dirección transversal (x_3) los valores son muy dispersos a causa de los posibles efectos de corrientes secundarias generadas por la cercanía con las paredes de la sección, y finalmente para las intensidades en dirección vertical (x_2) se tienen tendencias bien definidas y similares para ambos casos de fondo (liso y rugoso).

A partir de la aplicación de la metodología para determinar la constante de adición C_2 y de von Kármán κ se realizó el trazo de los perfiles adimensionales y se pudo observar que se tiene un buen ajuste en la tendencia.

Los modelos de van Driest y Cebeci & Chang se ajustaron mediante un algoritmo que identifica la intersección con el modelo logarítmico, a partir de esto se obtuvieron los valores del coeficiente de amortiguamiento B . Los resultados muestran buen ajuste con la zona de transición, esto se verificó para los valores que se lograron medir en esta zona. El modelo de Cebeci & Chang representó con mayor precisión los puntos cercanos a la subcapa viscosa, puesto que el modelo de van Driest tiene dificultades ante bajos valores de la constante de integración (caso de fondo rugoso).

Del análisis y visualización de los resultados, se concluye que las metodologías que en este documento se plantean tienen un grado de precisión aceptable para la caracterización turbulenta de flujos a superficie libre.



6.2 Recomendaciones

A pesar de que las pruebas expuestas en este documento fueron en régimen subcrítico las metodologías planteadas no se limitan únicamente a estos y por tanto pueden ser aplicadas a casos de flujos en régimen supercrítico.

El dispositivo empleado en este estudio fue un ADV, sin embargo, las metodologías se pueden aplicar con otras técnicas de velocimetría siempre y cuando las muestras de velocidad se realicen en alta frecuencia, por recomendación $f > 80$ Hz.

De acuerdo con los resultados de perfiles de esfuerzos de Reynolds, se recomienda aplicar la metodología de determinación de la velocidad de corte a los puntos de muestreo que se encuentren en la relación $0 \leq \xi \leq 0.2$, esto garantiza que no se presente desprendimiento de los valores con respecto a la tendencia teórica en el caso de canales estrechos donde $b/h < 5$.

De los resultados de perfiles adimensionales, se recomienda que la metodología para determinar la constante de adición y von Kármán se aplique con aquellos puntos de muestreo que estén en la relación $400 \nu/u_* \geq x_2 \geq 30 \nu/u_*$, esto asegura que la existencia del fenómeno de inmersión o de estela (como algunos autores han denominado al desprendimiento de valores de la ley logarítmica, donde entra en función la ley de Coles (Nezu & Nakagawa, 1993)) no afecten en el cálculo.

REFERENCIAS

- Agostini, R., Conte, A., Malaguti, G., & Papetti, A. (1985). *Flexible linings in Reno mattress and gabions for canals and canalized water courses*. Retrieved from <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:5901d9b2-36cd-4f60-8a36-f66a61d99959?collection=research>
- Auel, C., Albayrak, I., & Boes, R. M. (2014). Turbulence Characteristics in Supercritical Open Channel Flows: Effects of Froude Number and Aspect Ratio. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(4). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0000841](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000841)
- Avendaño, J. A., & García López, M. (2013). Analysis of Undermining and Lateral Erosion to Maximize Designs of River Crossing of Pipelines. <https://doi.org/10.1115/IPG2013-1914>
- Baldwin, B. S., & Barth, T. J. (1990). *A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows* (Aerospace Sciences Meetings). *29th Aerospace Sciences Meeting*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. <https://doi.org/doi:10.2514/6.1991-610>
- Bardina, J. E., Huang, P. G., & Coakley, T. J. (1997). *Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development*. *Nasa Technical Memorandum*. <https://doi.org/10.2514/6.1997-2121>
- Bardina, J., Ferziger, J. H., & Reynolds, W. C. (1980). Improved Subgrid Scale Models for Large Eddy Simulation. *AIAA Journal*, 1–10. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2514/6.1980-1357>
- Bergada Grañó, J. M. (2012). *Mecánica de fluidos: Breve introducción teórica con problemas resueltos*. Universitat Politecnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politecnica.
- Berselli, L. C., Iliescu, T., & Layton, W. J. (2005). *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*. *New York*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/b137408>
- Brossard, C., Monnier, J.-C., Barricau, P., Vandernoot, F.-X., Sant, Y. Le, Champagnat, F., & Besnerais, G. Le. (2009). Principles and applications of particle image velocimetry. *Onera AerospaceLab Journal*, (1), 1–11.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. *Cengage Learning* (9th ed.). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Capote, J. A., Alvear, D., Abreu, O. V., Lázaro, M., & Espina, P. (2008). Influencia del modelo de turbulencia y del refinamiento de la discretización espacial en la exactitud de las simulaciones computacionales de incendios. *Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo Y Diseño En Ingeniería*, 24(3), 227–245.
- Cebeci, T., & Chang, K. C. (1978). Calculation of incompressible rough-wall boundary layer



- flows. *AIAA Journal*, 16(7), 730–735. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2514/3.7571>
- Celestini, R., Silvagni, G., Spizzirri, M., & Volpi, F. (2007). Sediment transport in sewers. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, 103(April), 273–282. <https://doi.org/10.2495/WRM070261>
- Chen, Q., Adrian, R. J., Zhong, Q., Li, D., & Wang, X. (2014). Experimental study on the role of spanwise vorticity and vortex filaments in the outer region of open-channel flow. *Journal of Hydraulic Research*, 52(4), 476–489. <https://doi.org/10.1080/00221686.2014.919965>
- Coleman, G. N., & Sandberg, R. D. (2010). *A primer on direct numerical simulation of turbulence - methods, procedures and guidelines*. Aerodynamics & Flight Mechanics Research Group School.
- Comte-Bellot, G. (1976). Hot-Wire Anemometry. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 8(1), 209–231. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.08.010176.001233>
- Dacles-Mariani, J., Zilliac, G. G., Chow, J. S., & Bradshaw, P. (1995). Numerical/experimental study of a wingtip vortex in the near field. *AIAA Journal*, 33(9), 1561–1568. <https://doi.org/10.2514/3.12826>
- Dantec Dynamics. (2017). Measurement principles of LDA. Retrieved from <https://www.dantecdynamics.com/measurement-principles-of-lda>
- Deng, G. B., Queutey, P., & Visonneau, M. (2005). Three-Dimensional Flow Computation with Reynolds Stress and Algebraic Stress. In M. B. T.-E. T. M. and E. 6 Mulas (Ed.), *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6* (pp. 389–398). Amsterdam: Elsevier Science B.V. <https://doi.org/http://doi.org/10.1016/B978-008044544-1/50037-6>
- Dey, S. (2014). *Fluvial Hydrodynamics: Hydrodynamic and Sediment Transport Phenomena*. Springer Berlin Heidelberg.
- Di Cristo, C. (2011). *Particle Imaging Velocimetry and Its Applications in Hydraulics: A State-of-the-Art Review*. (P. Rowinski, Ed.), *GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences* (Vol. 1). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17475-9>
- Dmitriev, A. F., Tyshenko, A. I., & Khlapuk, N. N. (1992). Hydraulic studies of grass carpets for revetting canals. *Hydrotechnical Construction*, 26(5), 306–310. <https://doi.org/10.1007/BF01545044>
- Dombroski, D. E., & Crimaldi, J. P. (2007). The accuracy of acoustic Doppler velocimetry measurements in turbulent boundary layer flows over a smooth bed. *Limnology and Oceanography: Methods*, 5(1), 23–33. <https://doi.org/10.4319/lom.2007.5.23>
- Doshi, M. R., & Gill, W. N. (1970). A note on the mixing length theory of turbulent flow. *AIChE Journal*, 16(5), 885–888. <https://doi.org/10.1002/aic.690160532>
- Durst, F., Melling, A., & Whitelaw, J. H. (1981). *Principles and practice of laser-Doppler anemometry*. Academic Press.
- Echávez Aldape, G. (1996). *Introducción a los modelos hidráulicos de fondo fijo y a la*



ingeniería experimental. Universidad Nacional Autónoma de México.

- Ferriss, D. H. (1965). *Preston tube measurements in turbulent boundary layers and fully developed pipe flow*. Ministry of aviation. Aeronautical Research Council. Retrieved from <http://aerade.cranfield.ac.uk/ara/arc/cp/0831.pdf>
- Frisch, U. (1995). *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- Fuentes, C. (2011). Longitud de mezcla hiperbólica, perfil de las velocidades y ley de resistencia al flujo. *Tecnología Y Ciencias Del Agua*, 2(1), 19–31.
- George, W. K. (2007). Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows? *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1852), 789–806. <https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1941>
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., & Cabot, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, 3(7), 1760–1765. <https://doi.org/10.1063/1.857955>
- Geurts, K., & Probst, A. (2013). Computational Flight Testing. In N. Kroll, R. Radespiel, J. W. van der Burg, & K. Sorensen (Eds.), *Computational Flight Testing* (Vol. 123, pp. 27–41). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-38877-4>
- Hager, W. H., & Castro-Orgaz, O. (2016). William Froude and the Froude Number. *Journal of Hydraulic Engineering*, 3716001. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0001213](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001213)
- Hasse, L., & Dunckel, M. (1980). Hot Wire and Hot Film Anemometers BT - Air-Sea Interaction: Instruments and Methods. In F. Dobson, L. Hasse, & R. Davis (Eds.) (pp. 47–63). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-9182-5_3
- Jahanmiri, M. (2011). *Particle Image Velocimetry: Fundamentals and Its Applications*. *Fundamentals and Its Applications*.
- JCGM 100. (2008). JCGM 100:2008 - Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement. *International Organization for Standardization Geneva ISBN*. Retrieved from <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>
- Jensen, K. D. (2004). Flow Measurements Techniques. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, XXVI(4), 400–419. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782004000400006>
- Jin, M. (1995). Boundary shear stress measurements by two tubes. *Journal of Hydraulic Research*, 33(3), 385–396.
- Johnson, E. D., & Cowen, E. A. (2017). Estimating bed shear stress from remotely measured surface turbulent dissipation fields in open channel flows. *Water Resources Research*, 53(3), 1982–1996. <https://doi.org/10.1002/2016WR018898>
- Jones, W. P., & Launder, B. E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2), 301–314. [https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90076-2](https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(72)90076-2)
-



- Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. <https://doi.org/10.6028/jres.021.039>
- Lauder, B. E., & Sharma, B. I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1(2), 131–138. [https://doi.org/10.1016/0094-4548\(74\)90150-7](https://doi.org/10.1016/0094-4548(74)90150-7)
- Layton, W. J., & Rebholz, L. G. (2012). *Approximate deconvolution models of turbulence: Analysis, phenomenology and numerical analysis. Lecture Notes in Mathematics* (Vol. 2042). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-24409-4_1
- Lesieur, M. (2008). *Turbulence in Fluids*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6435-7>
- Lesieur, M., & Métais, O. (1996). New Trends in Large-Eddy Simulations of Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28, 45–82. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.28.010196.000401>
- Lesieur, M., Métais, O., & Comte, P. (2005). *Large-Eddy Simulations of Turbulence*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/DOI:10.1017/CBO9780511755507>
- Levi, E. (2001). *El agua según la ciencia*. AMH IMTA. <https://doi.org/10.1080/00221689109499011>
- Lohrmann, A., Cabrera, R., & Kraus, N. C. (1994). Acoustic-Doppler Velocimeter(ADV) for laboratory use. *Fundamentals and Advancements in Hydraulic Measurements and Experimentation*.
- Marriott, M. (2016). *Civil Engineering Hydraulics* (6th ed.). Wiley.
- Martín Rodríguez, P., Martín Rodríguez, E., Loredó-Souza, A., & Camano Schettini, E. B. (2014). Utilización de anemómetro de hilo caliente a temperatura constante para mediciones de velocidad de aire en túnel de viento. *Ingeniería Electrónica, Automática Y Comunicaciones*, 35, 78–92.
- Mendoza, Á., & Aguilar, A. (2016). Determinación de la velocidad de corte en un flujo de canal abierto de baja pendiente.
- Menter, F. R. (1993). Zonal Two Equation k-w Turbulence Models for Aerodynamic Flows. In *24 Fluid Dynamics Conference* (pp. 1–22). <https://doi.org/10.2514/6.1993-2906>
- Menter, F. R. (1994). Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8), 1598–1605. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2514/3.12149>
- Métais, O., & Ferziger, J. (1997). *New Tools in Turbulence Modelling* (1st ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08975-0>
- Moin, P., & Mahesh, K. (1998). DIRECT NUMERICAL SIMULATION: A Tool in Turbulence Research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1), 539–578. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.539>
-



- Motlagh, S. Y., & Taghizadeh, S. (2016). POD analysis of low Reynolds turbulent porous channel flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 61, 665–676. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2016.07.010>
- Munson, B. R., Rothmayer, A. P., Okiishi, T. H., & Huebsch, W. W. (2013). *Fundamentals of Fluid Mechanics* (7th ed.). Wiley.
- Nezu, I., & Nakagawa, H. (1993). *Turbulence in Open Channel Flows*. IAHR Monographs. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1994\)120:10\(1235\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1994)120:10(1235))
- Nezu, I., & Rodi, W. (1986). Open-channel Flow Measurements with a Laser Doppler Anemometer. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(5), 335–355. [https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1986\)112:5\(335\)](https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1986)112:5(335))
- Nikora, V. (2010). Hydrodynamics of Aquatic Ecosystems: An interface between ecology, biomechanics and environmental fluid mechanics. *River Research and Applications*, 26(4), 367–384. <https://doi.org/10.1002/rra.1291>
- Nortek AS. (2017). Vectrino Profiler brochure. Retrieved from <http://www.nortek-es.com/es/producto/velocimetros/vectrino-ii>
- Oppenheim, A. V. (1973). *Papers on Digital Signal Processing*. (3, Ed.). The Massachusetts Institute of Technology.
- Panton, R. L. (2013). *Incompressible Flow* (4th ed.). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118713075>
- Piomelli, U. (2008). Wall-layer models for large-eddy simulations. *Progress in Aerospace Sciences*, 44(6), 437–446. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.06.001>
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Porat, B. (1997). *A Course in Digital Signal Processing*.
- Qiao, J. D., Delavan, S. K., Nokes, R. I., & Plew, D. R. (2016). Flow structure and turbulence characteristics downstream of a spanwise suspended linear array. *Environmental Fluid Mechanics*, 16(5), 1021–1041. <https://doi.org/10.1007/s10652-016-9465-0>
- Raffel, M., Willert, C. E., Wereley, S. T., & Kompenhans, J. (2007). *Particle Image Velocimetry. Current Science* (2nd ed., Vol. 79). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72308-0>
- Rajaratnam, N., & Muralidhar, D. (1969). Boundary shear stress distribution in rectangular open channels. *La Houille Blanche*, (6), 603–610. <https://doi.org/https://doi.org/10.1051/lhb/1969047>
- Reynolds, O. (1883). An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of Law of Resistance in Parallel Channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174, 935–982. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/109431>
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.
-



- Rodi, W. (2000). *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, A state of the art review*. CRC Press.
- Sagaut, P. (2006). *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows* (3rd ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/b137536>
- Schlichting, H., & Gersten, K. (2017). *Boundary-Layer Theory* (9th ed.). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5>
- Schmitt, F. G. (2007). About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus - Mecanique*, 335(9–10), 617–627. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2007.08.004>
- Shih, T.-H., Povinelli, L. A., Liu, N.-S., Potapczuk, M. G., & Lumley, J. L. (1999). A Generalized Wall Function. *Nasa Center for Aerospace Information*, (July), 1–20. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19990081113.pdf>
- Smagorinsky, J. (1963). General Circulation Experiments with the Primitive Equations. *Monthly Weather Review*, 91(3), 99–164. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)
- Sotelo Ávila, G. (1997). *Hidráulica General*. LIMUSA.
- Sotelo Ávila, G. (2002). *Hidráulica de canales*. Facultad de Ingeniería.
- Spalart, P., & Allmaras, S. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Journal*. <https://doi.org/doi:10.2514/6.1992-439>
- Spalding, D. B. (1961). A Single Formula for the “Law of the Wall.” *Journal of Applied Mechanics*, 28(3), 455–458. <https://doi.org/10.1115/1.3641728>
- Stephens, M. A. (1974). EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69(347), 730–737. <https://doi.org/10.2307/2286009>
- Te Chow, V., & Saldarriaga, J. G. (1994). *Hidráulica de canales abiertos*. McGraw-Hill.
- Tennekes, H., & Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press.
- Thornton, C. I., Cox, A. L., & Sclafani, P. (2008). *Preston Tube Calibration*.
- Tominaga, A., & Nezu, I. (1992). Velocity Profiles in Steep Open-Channel Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(1), 73–90. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1992\)118:1\(73\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1992)118:1(73))
- Tryggvason, G., Scardovelli, R., & Zaleski, S. (2011). *Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows. ... Methods in Biological and Physical Flows*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975264>
- Van Driest, E. R. (1956). On Turbulent Flow Near a Wall. *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, 23(11), 1007–1011. <https://doi.org/10.2514/8.3713>
- van Rijn, L. C. (1984). Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(10), 1431–1456. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-)
-



9429(1984)110:10(1431)

- Wagner, W., & Kretzschmar, H.-J. (2008). *International Steam Tables - Properties of Water and Steam based on the Industrial Formulation IAPWS-IF97* (2nd ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74234-0>
- Wilcox, D. C. (1988). Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11), 1299–1310. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2514/3.10041>
- Wilcox, D. C. (2006). *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries.
- Wu, F.-C., Shen, H. W., & Chou, Y.-J. (1999). Variation of Roughness Coefficients for Unsubmerged and Submerged Vegetation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(9), 934–942. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1999\)125:9\(934\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1999)125:9(934))
- Yang, S.-Q. (2005). Interactions of boundary shear stress, secondary currents and velocity. *Fluid Dynamics Research*, 36(3), 121–136. <https://doi.org/10.1016/j.fluidyn.2005.01.002>
- Zanoun, E. S., Durst, F., & Nagib, H. (2003). Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows. *Physics of Fluids*, 15(10), 3079–3089. <https://doi.org/10.1063/1.1608010>

Deducción del modelo de van Driest

Sea la expresión (2.23), que describe la relación que existe entre la velocidad de corte y los esfuerzos totales en el flujo,

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) + l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2, \quad (\text{A.1})$$

adimensionalizando las variables de interés $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(u^+)$ y $x_2 = x_2(y^+)$, dividiendo por la escala de velocidad u_* y longitud ν/u_* respectivamente,

$$u^+ = \frac{\bar{u}_1}{u_*}, \quad (\text{A.2})$$

$$y^+ = \frac{x_2 u_*}{\nu}, \quad (\text{A.3})$$

donde u^+ es la velocidad adimensional y y^+ es la coordenada vertical adimensional.

Despejando \bar{u}_1 y x_2 de (A.2) y (A.3),

$$\bar{u}_1 = u^+ u_*, \quad (\text{A.4})$$

$$x_2 = \frac{y^+ \nu}{u_*}. \quad (\text{A.5})$$

Aplicando una expansión paramétrica al término $\partial \bar{u}_1 / \partial x_2$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y^+} (u^+ u_*) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2 u_*}{\nu} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = u_* \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \frac{u_*}{\nu} \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{\partial u^+}{\partial y^+}. \quad (\text{A.7})$$



Ahora, sustituyendo (A.7) en (A.1),

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{u_*^2}{\nu} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) + l^2 \left(\frac{u_*^2}{\nu} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2, \quad (\text{A.8})$$

desarrollando y simplificando,

$$u_*^2 = \nu \frac{u_*^2}{\nu} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) + l^2 \frac{u_*^4}{\nu^2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 = u_*^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) + l^2 \frac{u_*^4}{\nu^2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2, \quad (\text{A.9})$$

$$1 = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + l^2 \frac{u_*^2}{\nu^2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2. \quad (\text{A.10})$$

Las dimensiones son:

$$O(1) = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + l^2 \frac{u_*^2}{\nu^2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2. \quad (\text{A.11})$$

Los valores dimensionales de esta ecuación son de igual magnitud entre el lado izquierdo y derecho, por lo tanto, agrupando la longitud de mezcla se tiene que,

$$l^+ = \frac{lu_*}{\nu} = O(1), \quad (\text{A.12})$$

donde l^+ es la longitud de mezcla adimensional.

Sustituyendo (A.12) en (A.11),

$$1 = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + l^{+2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2, \quad (\text{A.13})$$

finalmente se tiene una ecuación cuadrática,

$$l^{+2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 + \frac{\partial u^+}{\partial y^+} - 1 = 0. \quad (\text{A.14})$$

Con la finalidad de hacer más sencillo el modelo, la ecuación (A.14) se ordena en términos de $\partial y^+ / \partial u^+$, quedando de la siguiente manera,



$$\left(\frac{\partial y^+}{\partial u^+}\right)^2 - \frac{\partial y^+}{\partial u^+} - l^{+2} = 0, \quad (\text{A.15})$$

dado que (A.15) es una ecuación cuadrática, se aplica la fórmula de solución para ecuaciones cuadráticas,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (\text{A.16})$$

donde,

$$x = \frac{\partial y^+}{\partial u^+}; \quad a = 1; \quad b = -1; \quad c = -l^{+2}. \quad (\text{A.17})$$

Sustituyendo los términos de (A.17) en (A.16),

$$\frac{\partial y^+}{\partial u^+} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-l^{+2})}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l^{+2}}}{2}, \quad (\text{A.18})$$

la solución uno y dos son,

$$\left(\frac{\partial y^+}{\partial u^+}\right)_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4l^{+2}}}{2}, \quad (\text{A.19})$$

$$\left(\frac{\partial y^+}{\partial u^+}\right)_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4l^{+2}}}{2}. \quad (\text{A.20})$$

La solución uno, es considerando el signo negativo; se puede apreciar que para cualquier valor de longitud de mezcla adimensional mayor que cero ($l^+ > 0$) el resultado del término radical es mayor a 1, es decir, $\sqrt{1 + 4l^{+2}} > 1$, entonces el resultado siempre es negativo, y dado que físicamente no es posible tener valores negativos para $\partial y^+ / \partial u^+$ (en el caso de canales abiertos y considerando que no se presenta el fenómeno de inmersión), la solución se descarta y se toma como única solución la expresión (A.20) que finalmente se despeja en términos de $\partial u^+ / \partial y^+$ obteniendo el modelo generalizado de van Driest,

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l^{+2}}}. \quad (\text{A.21})$$

ANEXO B

Deducción del modelo de von Kármán

Separando los términos viscosos de los turbulentos en la expresión (A.1), tenemos,

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$u_*^2 = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2, \quad (\text{B.2})$$

la ecuación (B.1) corresponde a los esfuerzos viscosos únicamente; mientras que (B.2) son los esfuerzos turbulentos.

Ahora, sustituyendo (A.7) en (B.1),

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{u_*^2}{\nu} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) = \nu \frac{u_*^2}{\nu} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) = u_*^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right), \quad (\text{B.3})$$

simplificando,

$$1 = \frac{\partial u^+}{\partial y^+}, \quad (\text{B.4})$$

integrando,

$$\int \partial u^+ = \int 1 \partial y^+, \quad (\text{B.5})$$

$$u^+ = y^+ + C_1, \quad (\text{B.6})$$

para determinar el valor de la constante de integración, se sustituye el valor de u^+ en la pared, con un valor igual a cero, considerando que en la pared no existe movimiento del flujo y, por lo tanto, y^+ es cero (recuérdese que es la coordenada vertical adimensional), y en consecuencia la única forma de cumplir la igualdad en (B.6) es que el valor de C_1 sea igual a cero, quedando de la siguiente manera,

$$u^+ = y^+. \quad (\text{B.7})$$



Realizando el mismo proceso con (B.2), aplicando el modelo de longitud de mezcla lineal propuesto de Prandtl (2.25),

$$u_*^2 = \kappa^2 x_2^2 \left(\frac{u_*^2 \partial u^+}{\nu \partial y^+} \right)^2 = \frac{\kappa^2 x_2^2 u_*^4}{\nu^2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2, \quad (\text{B.8})$$

simplificando,

$$1 = \kappa^2 y^{+2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 = \kappa y^+ \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y^+}, \quad (\text{B.10})$$

integrando,

$$\int \partial u^+ = \frac{1}{\kappa} \int \frac{1}{y^+} \partial y^+, \quad (\text{B.11})$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_2, \quad (\text{B.12})$$

para determinar el valor de la constante C_2 no se tiene un valor de referencia, ya que (B.12) es el modelo que representa la zona totalmente turbulenta, por lo tanto, es un valor que se determina experimentalmente, para cada prueba con sus condiciones particulares.

ANEXO C

Propagación de errores del modelo clásico de velocidad de corte

En un ensayo donde intervienen varias mediciones, cada una aporta cierto error y este error se propaga hasta que aparece en el resultado dependiendo de la relación funcional entre las variables (Echávez Aldape, 1996). A continuación, se presenta el análisis de la función del modelo clásico de velocidad de corte,

$$u_* = \sqrt{ghS}.$$

La velocidad de corte se encuentra en función de dos variables siendo la profundidad del flujo h y la pendiente de plantilla S (considerando flujo uniforme), ya que la aceleración de la gravedad g se considera constante a nivel global del flujo.

Para determinar la incertidumbre estándar combinada se considera la siguiente función (JCGM 100, 2008),

$$I_c^2(u_*) = \left(\frac{\partial u_*}{\partial h}\right)^2 \delta^2(h) + \left(\frac{\partial u_*}{\partial S}\right)^2 \delta^2(S), \quad (C.1)$$

donde I_c es la incertidumbre estándar combinada y δ es la desviación estándar que se evalúa con la siguiente expresión,

$$\delta(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}, \quad (C.2)$$

donde q es la variable de entrada, \bar{q} es la media aritmética y n es el número de muestras.

Ahora, desarrollando las derivadas parciales para (C.1),

$$\frac{\partial u_*}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \sqrt{ghS} = \frac{1}{2} \frac{gS}{\sqrt{ghS}} = \frac{\sqrt{gS}}{2\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{ghS}}{2h}, \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \sqrt{ghS} = \frac{1}{2} \frac{gh}{\sqrt{ghS}} = \frac{\sqrt{gh}}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{ghS}}{2S}. \quad (C.4)$$



Sustituyendo (C.3) y (C.4) en (C.1),

$$I_c^2(u_*) = \left(\frac{\sqrt{ghS}}{2h} \right)^2 \delta^2(h) + \left(\frac{\sqrt{ghS}}{2S} \right)^2 \delta^2(S). \quad (C.5)$$

La expresión (C.5) permite identificar que variable aporta mayor incertidumbre en el cálculo de la velocidad de corte u_* , para esto, se plantea el siguiente ejemplo:

Ejemplo de aplicación. Considerando un canal de 1 m de longitud, con flujo uniforme; se tienen los siguientes datos obtenidos de las mediciones,

$h = 0.10 \text{ m}$, corresponde al valor estimado (media aritmética)

$\delta(h) = 0.001 \text{ m}$, corresponde a la desviación estándar de las muestras.

$S = 0.001$, corresponde al valor estimado (media aritmética)

$\delta(S) = 0.0005$, corresponde a la desviación estándar de las muestras.

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

sustituyendo y evaluando en (C.5),

$$I_c^2(u_*) = \left(\frac{\sqrt{\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (0.1 \text{ m})(0.001)}}{2(0.1 \text{ m})} \right)^2 (0.001 \text{ m})^2 + \dots \quad (C.6)$$
$$\left(\frac{\sqrt{\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (0.1 \text{ m})(0.001)}}{2(0.001)} \right)^2 (0.0005)^2,$$

$$I_c^2(u_*) = 2.45 \times 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}} + 6.13 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6.1345 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (C.7)$$

Finalmente, la incertidumbre estándar combinada es,

$$I_c(u_*) = \sqrt{6.1345 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 7.83 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (C.8)$$



Entonces, el resultado final de u_* se expresa como sigue,

$$u_* = \sqrt{ghS} \pm 7.83 \times 10^{-3} \frac{m}{s} = 0.0313 \pm 0.00783 \frac{m}{s}. \quad (C.9)$$

Analizando (C.7), se tiene que los términos de la variable S y h contribuyen 99.96 % y 0.04 % respectivamente en la incertidumbre estándar combinada; de esto se concluye que la medición de la pendiente del fondo del canal requiere de alta precisión para minimizar la incertidumbre estándar combinada en la estimación de la velocidad de corte, principalmente en canales de baja pendiente.

Especificaciones técnicas del dispositivo ADV “Vectrino Profiler”

Tabla D.1 *Especificaciones técnicas del dispositivo ADV “Vectrino Profiler”*

Mediciones de velocidad en agua	
Rango de velocidad:	Incrementos de 0.1 m/s hasta un máximo de 3.0 m/s
Intervalo de ping adaptativo:	Una sola vez, o en un segundo hasta 1 hora
Precisión:	$\pm 5\%$ del valor medido ± 1 mm
Tasa de muestreo (salida):	1-100 Hz
Mediciones de distancia	
Rango mínimo:	20 mm
Rango máximo:	Hasta 2 m dependiendo de la intensidad de la señal
Precisión:	0.5 mm en 1 mm de tamaño de celda
Tasa de muestreo:	1-10 Hz
Volumen de muestreo	
Rango del perfil:	Hasta 30 mm
Localización:	40-70 mm desde la probeta
Diámetro:	6 mm
Tamaño de celda:	1-4 mm (selección del usuario)
Intensidad de eco	
Frecuencia acústica:	10 MHz
Resolución:	Lineal o escala logarítmica
Rango dinámico:	60 dB
Sensores	
Temperatura:	Termistor incrustado en la sonda
Rango:	-4 °C hasta 40 °C
Precisión/Resolución:	1 °C/0.1 °C
Tiempo de respuesta:	5 min

Nota. Tomado de ©Nortek (2017)

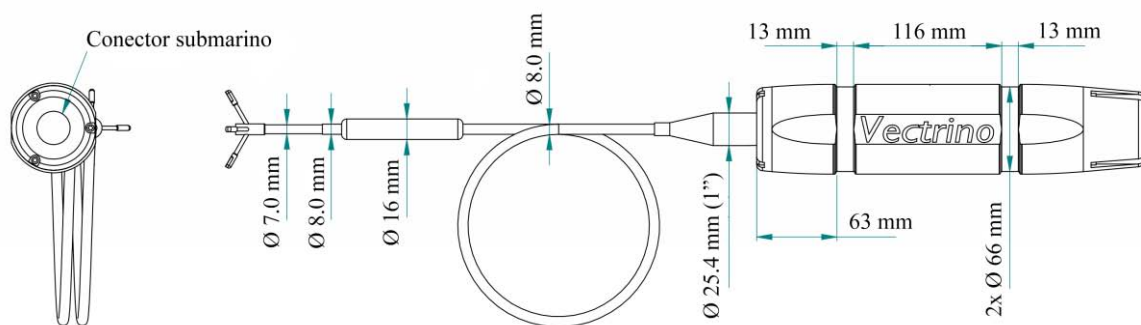


Figura D.1 Vectrino Profiler. ©Nortek (2017)

Prueba de normalidad de Anderson-Darling

Como parte del análisis se realizó la prueba de normalidad de Anderson-Darling para determinar si los datos obtenidos $u_{*i,j}$ al evaluar la expresión (4.4) siguen una distribución normal, para esto se calcula el valor estadístico de la prueba con la siguiente ecuación,

$$A^2 = - \frac{\{\sum_{i=1}^n (2i - 1) [\ln z_i + \ln(1 - z_{n+1-i})]\}}{n} - n, \quad (E.1)$$

donde n es el número de datos, i es el indicador de número de dato, z es la variable estandarizada y A^2 es el valor estadístico de Anderson-Darling.

De acuerdo con Stephens (1974), el valor crítico es de 0.754 cuando el número de datos es mayor a 100 con un nivel de significación del 5%, por tanto, si el valor estadístico A^2 de la prueba para la muestra es menor a 0.754 ($A^2 < 0.754$), se admite que una distribución normal representa los datos, en caso contrario, se rechaza la posibilidad de que los datos sigan una distribución de tendencia central.

Debido al desconocimiento de la función de densidad de probabilidad y con la finalidad de asegurar una cobertura del 50% de los datos alrededor del valor representativo de u_* , se calcula la ubicación del primer (Q_1) y tercer cuartil (Q_3) de los datos ordenados en forma creciente, con las siguientes expresiones,

$$Q_1 = \frac{n + 1}{4}, \quad (E.2)$$

$$Q_3 = \frac{3(n + 1)}{4}. \quad (E.3)$$

A partir de las ubicaciones del primer y tercer cuartil se localizan los valores $u_{*i,j}$ y se obtiene el rango intercuartil.

Los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba Anderson-Darling a los experimentos que se presentan en este documento se muestran en la Tabla E.1, donde la primera columna (1) indica el caso experimental, las columnas (2) y (3) son los valores calculados con la mediana y la media aritmética respectivamente de los datos $u_{*i,j}$, la columna (4) indica el rango intercuartil y finalmente la columna (5) contiene los valores estadísticos obtenidos de la prueba Anderson-Darling.



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO
TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

Tabla E.1 *Resultados de la prueba de normalidad de Anderson-Darling y rango intercuartil*

Caso	Velocidad de corte (Mediana) u_* (cm/s)	Velocidad de corte (Media) u_* (cm/s)	Valores del rango intercuartil $[Q_1 - Q_3]$ (cm/s)	Valor estadístico Anderson-Darling A^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Prueba preliminar				
Prueba-01	2.33	2.60	1.14 - 2.91	33.94
Pruebas en fondo liso				
PFL-01	2.58	2.96	1.31 - 3.42	39.80
PFL-02	2.76	3.17	1.26 - 3.41	22.90
PFL-03	2.77	3.20	1.30 - 3.56	29.84
PFL-04	2.33	2.78	1.43 - 3.32	40.14
PFL-05	2.82	3.27	1.41 - 3.22	46.93
Pruebas en fondo de rugosidad incompleta				
PFR-01	3.03	3.47	1.37 - 3.81	30.57
PFR-02	3.14	3.47	1.28 - 3.61	27.46
PFR-03	3.85	4.10	1.34 - 3.74	34.44
PFR-04	4.26	4.65	1.64 - 4.48	24.38
PFR-05	3.58	3.98	1.44 - 3.95	27.05
PFR-06	3.40	3.84	1.62 - 4.04	21.90
PFR-07	4.09	4.36	1.59 - 4.41	29.35
PFR-08	4.36	4.73	1.67 - 4.74	35.89

En todos los casos el valor estadístico de la prueba Anderson-Darling es mayor que el valor crítico ($A^2 > 0.754$), por lo tanto, se descarta la posibilidad de representar la distribución de los datos con una función de tendencia central.

Histogramas de la estimación de la velocidad de corte

En el presente anexo se muestran los histogramas obtenidos de la aplicación de la metodología para determinar la velocidad de corte, para el conjunto de pruebas que se presentan en este documento, para el caso de fondo liso (PFL-01 a PFL-05) y para el de rugosidad incompleta (PFR-01 a PFR-08). Los gráficos se identifican de acuerdo a la Tabla 5.1 y Tabla 5.3.

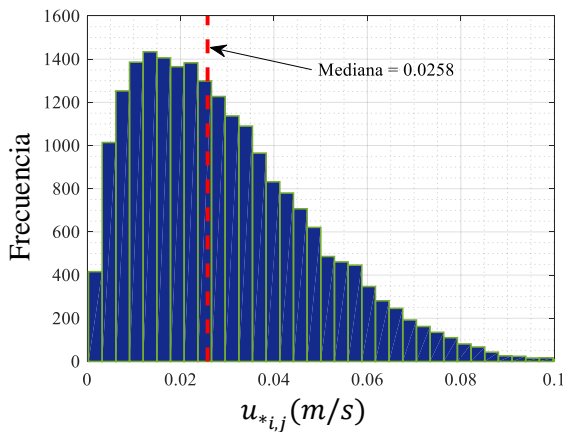


Figura F.1 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-01

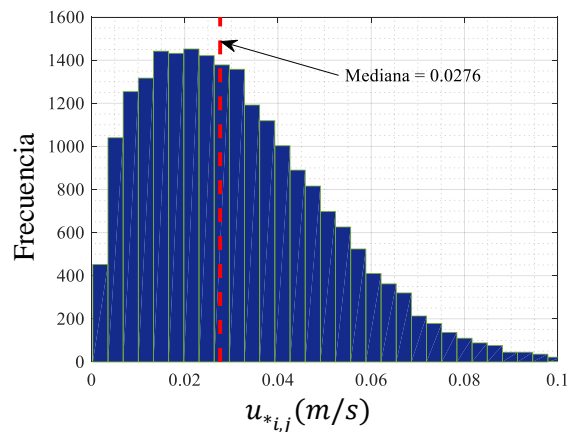


Figura F.2 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-02

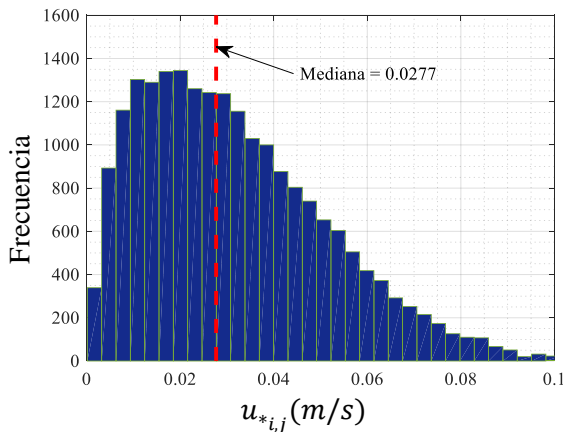


Figura F.3 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-03

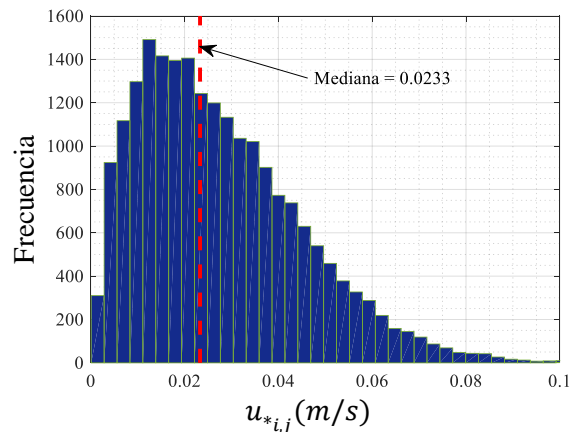


Figura F.4 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-04



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

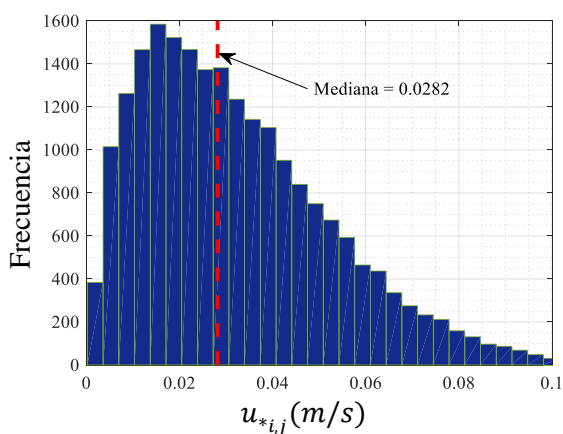


Figura F.5 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFL-05

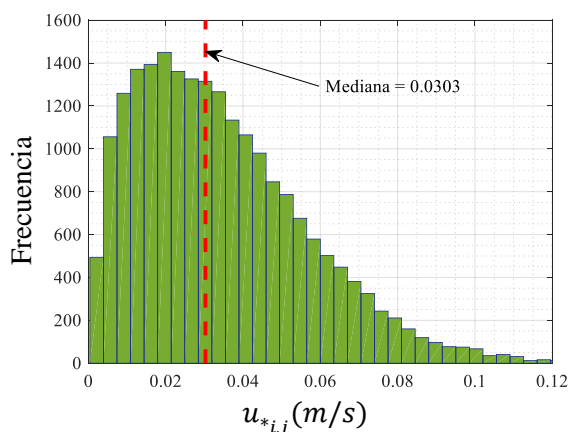


Figura F.6 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-01

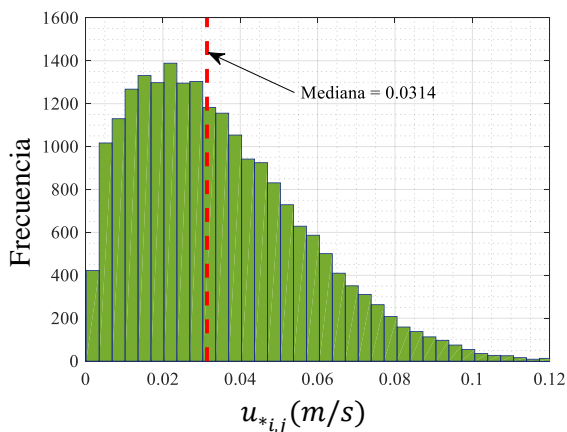


Figura F.7 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-02

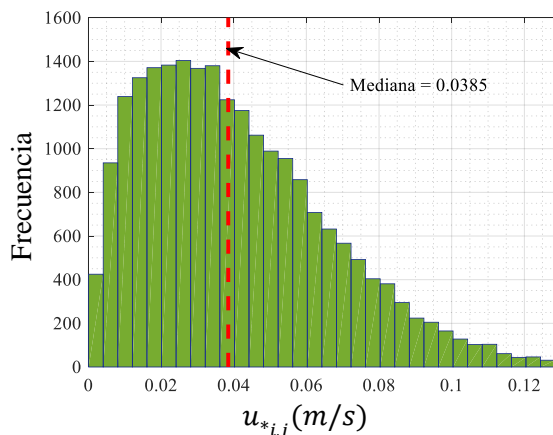


Figura F.8 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-03

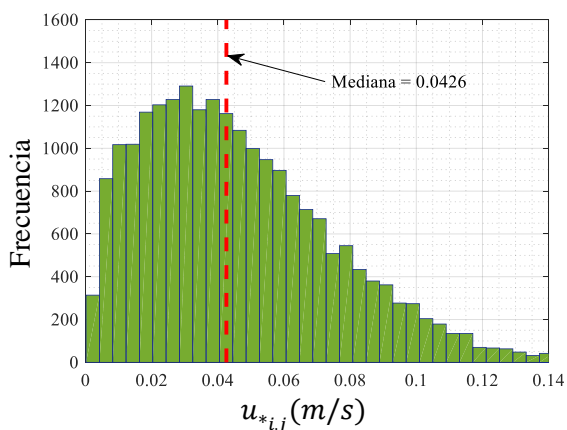


Figura F.9 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-04

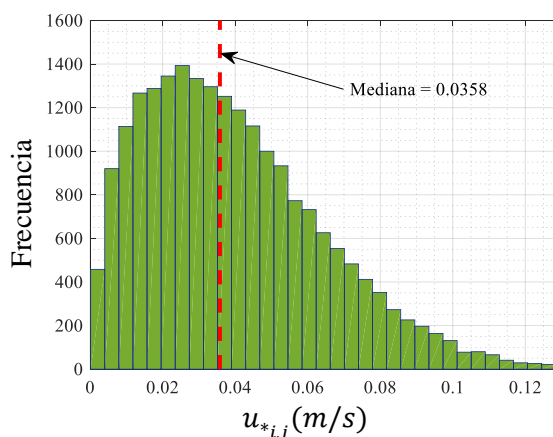


Figura F.10 Histograma de valores $u_{*i,j}$. Prueba PFR-05



DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE CORTE EN UN CANAL CON FLUJO TURBULENTO A SUPERFICIE LIBRE

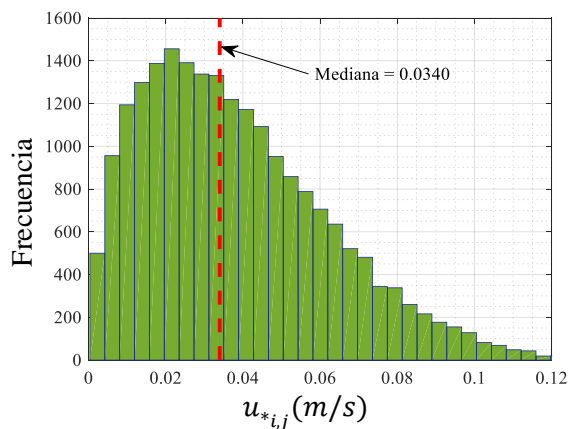


Figura F.11 Histograma de valores $u_{*i,j}$.
Prueba PFR-06

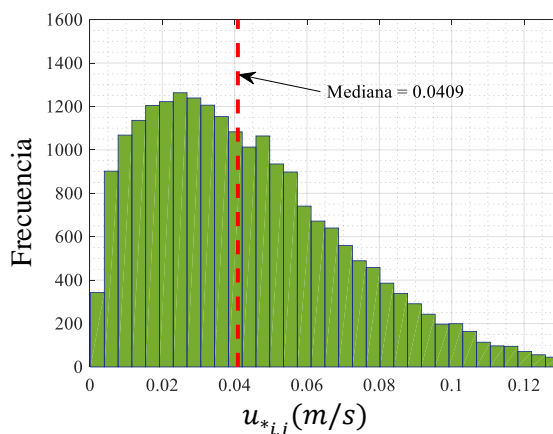


Figura F.12 Histograma de valores $u_{*i,j}$.
Prueba PFR-07

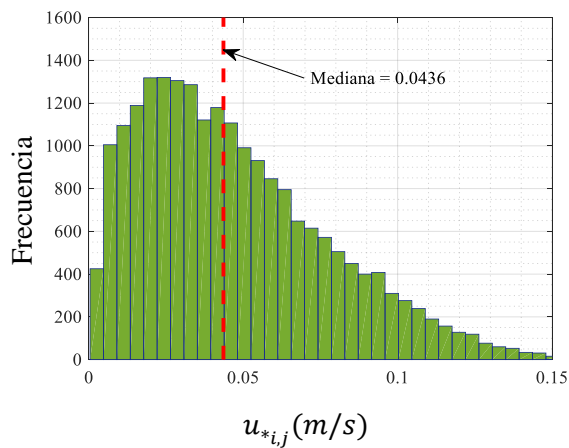


Figura F.13 Histograma de valores $u_{*i,j}$.
Prueba PFR-08

Topología de errores de la determinación de las constantes de adición y von Kármán de la ley logarítmica

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la metodología propuesta para la determinación de los parámetros constantes de la ley logarítmica, que son, la constante de adición C_2 y von Kármán κ . Se muestran para todas las pruebas que se presentan en este documento, de manera similar al Anexo E.

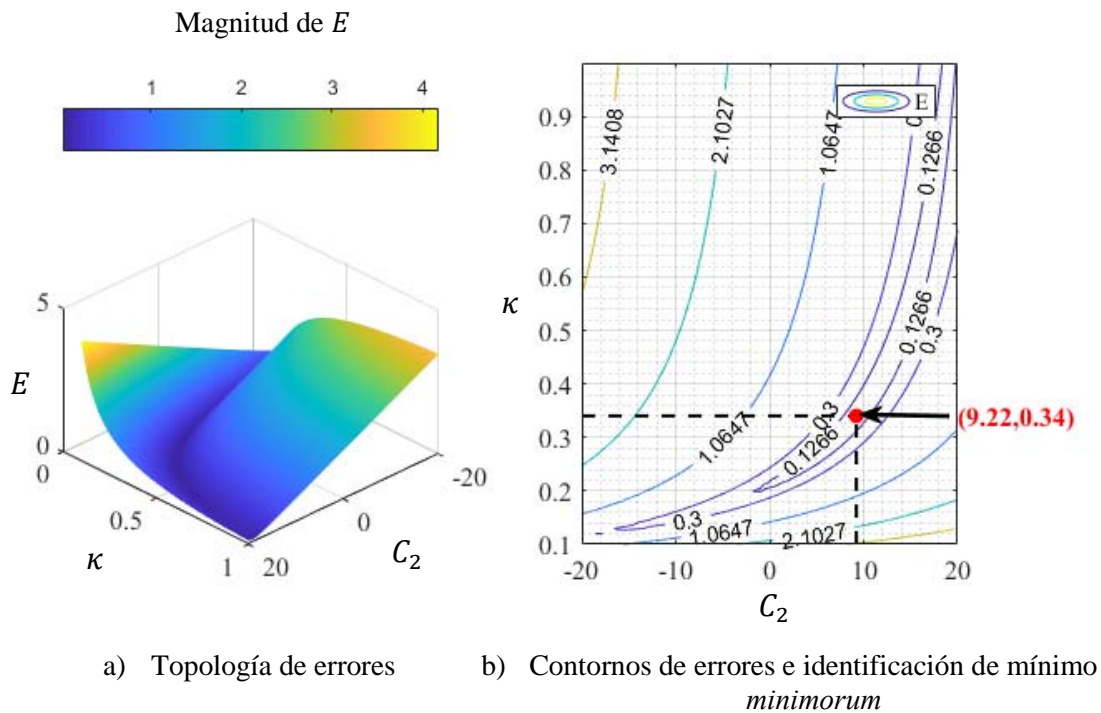


Figura G.1 Topología de errores, prueba PFL-01

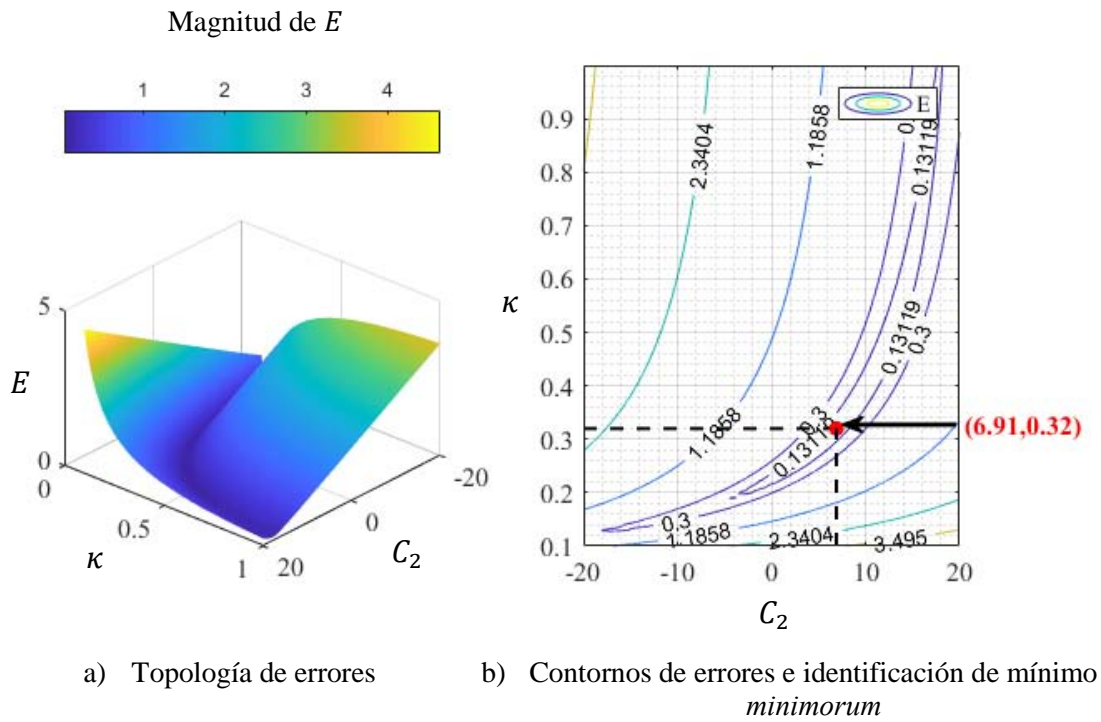


Figura G.2 Topología de errores, prueba PFL-02

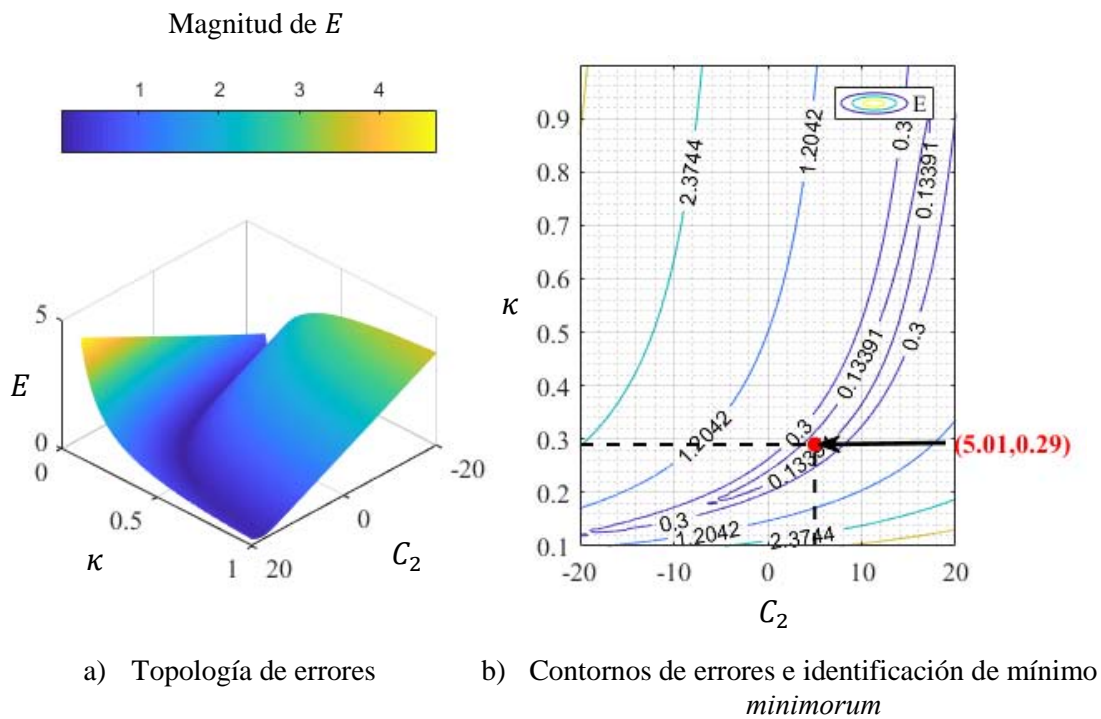


Figura G.3 Topología de errores, prueba PFL-03

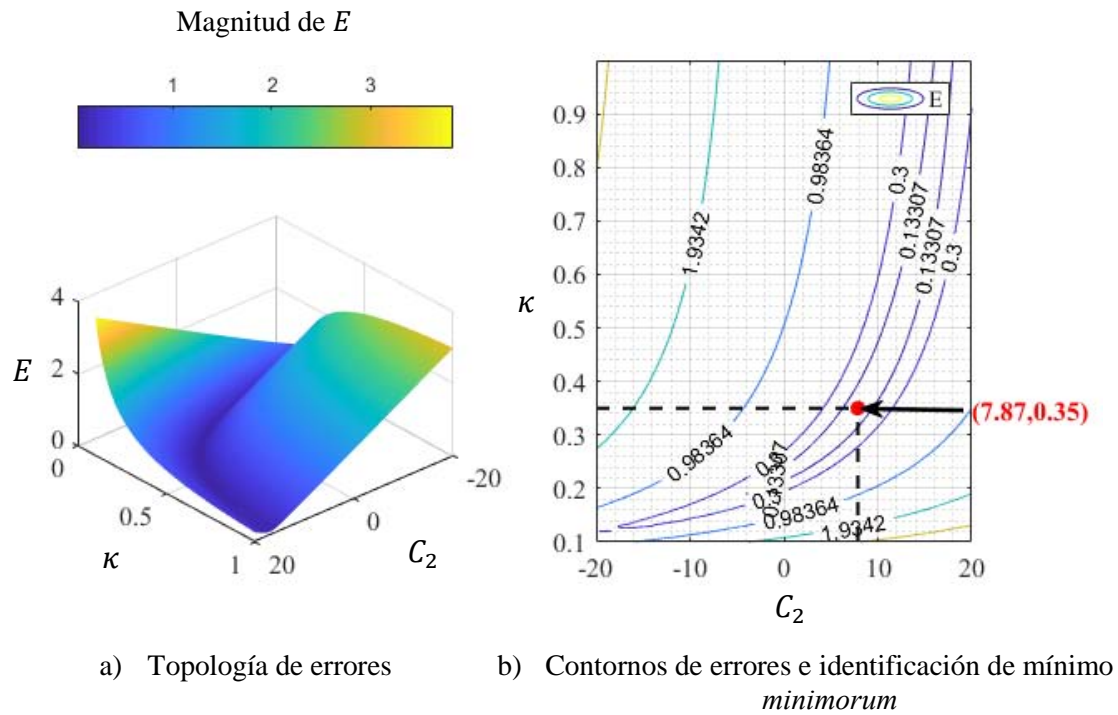


Figura G.4 Topología de errores, prueba PFL-04

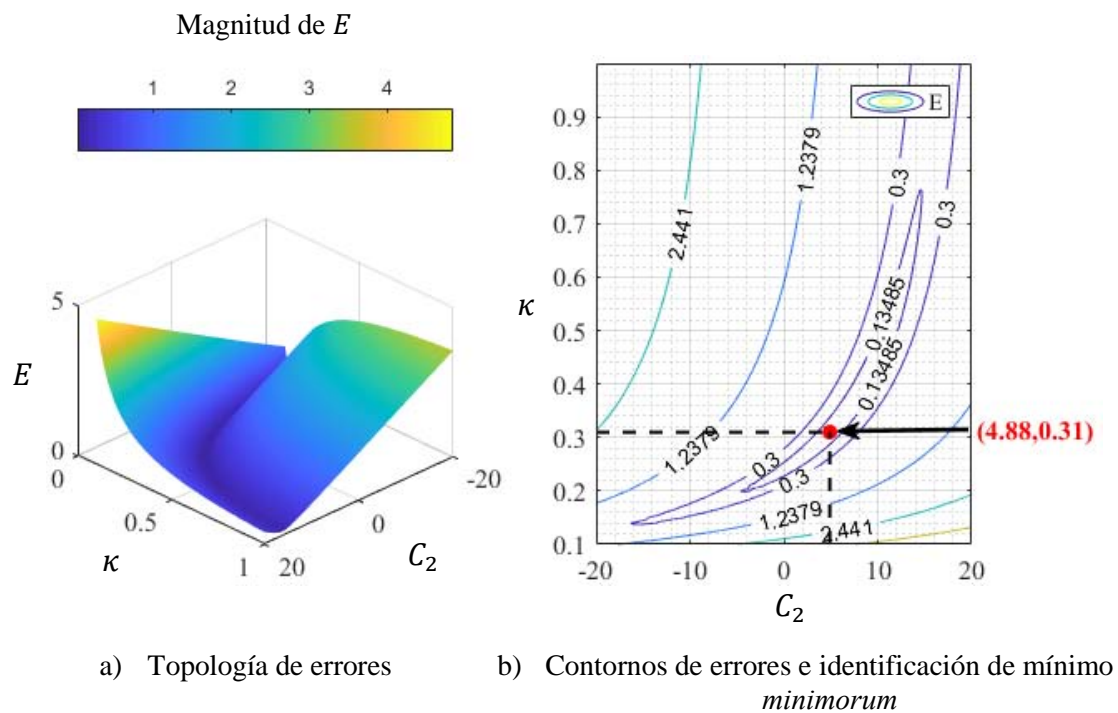


Figura G.5 Topología de errores, prueba PFL-05

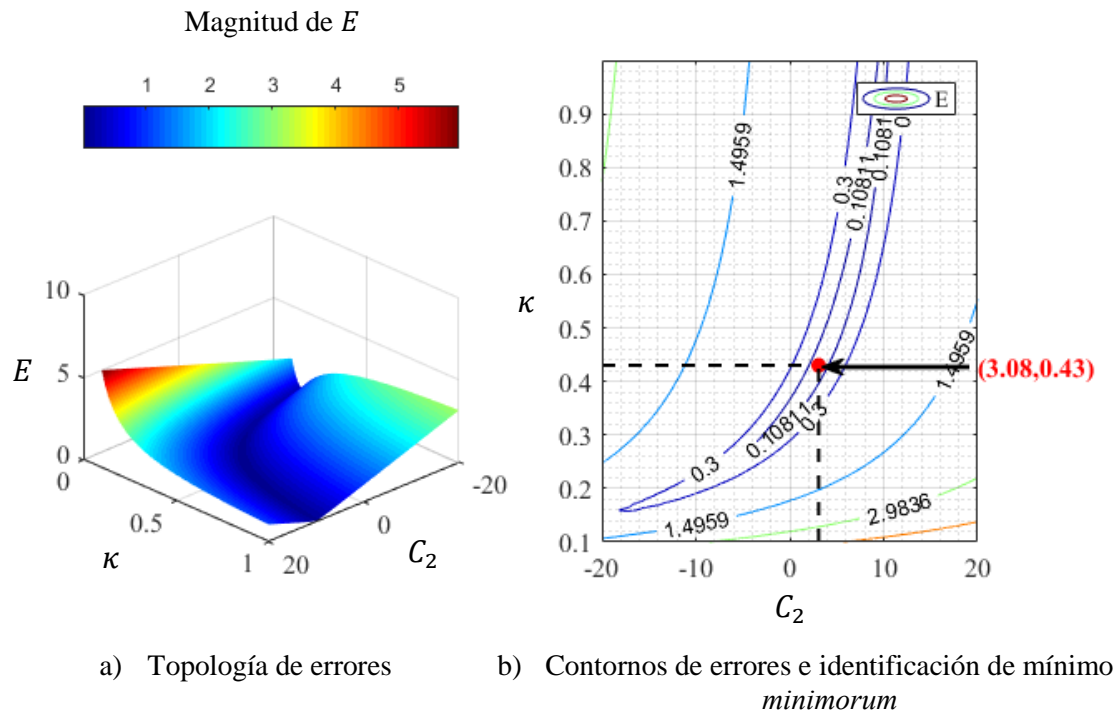


Figura G.6 Topología de errores, prueba PFR-01

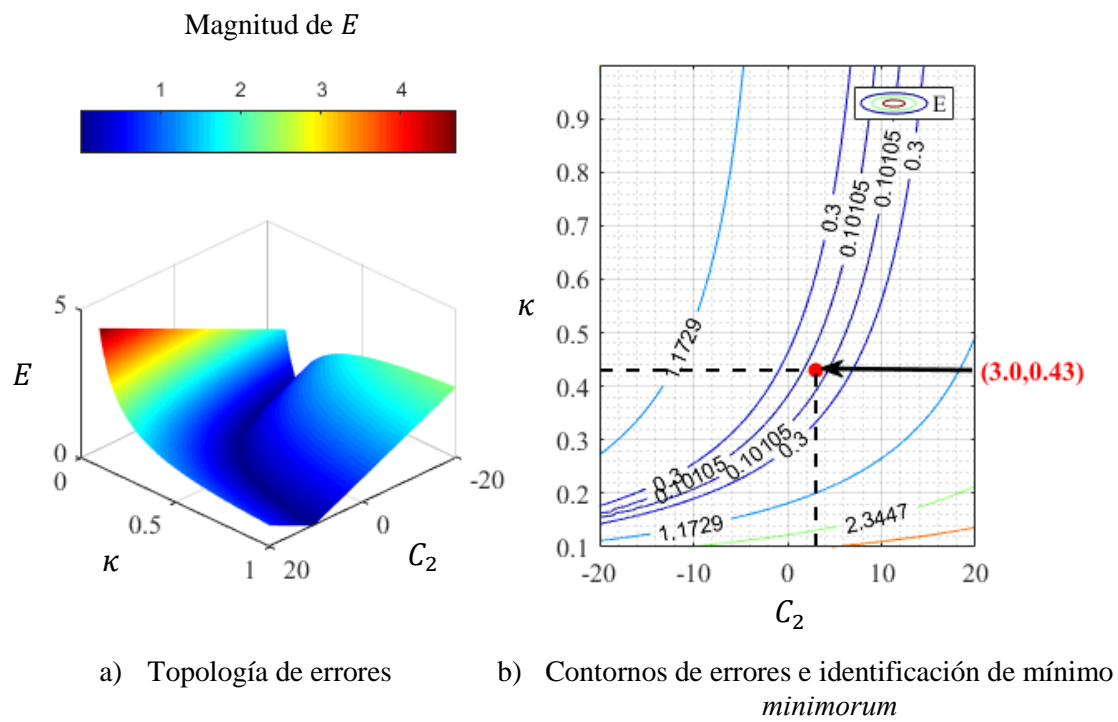


Figura G.7 Topología de errores, prueba PFR-02

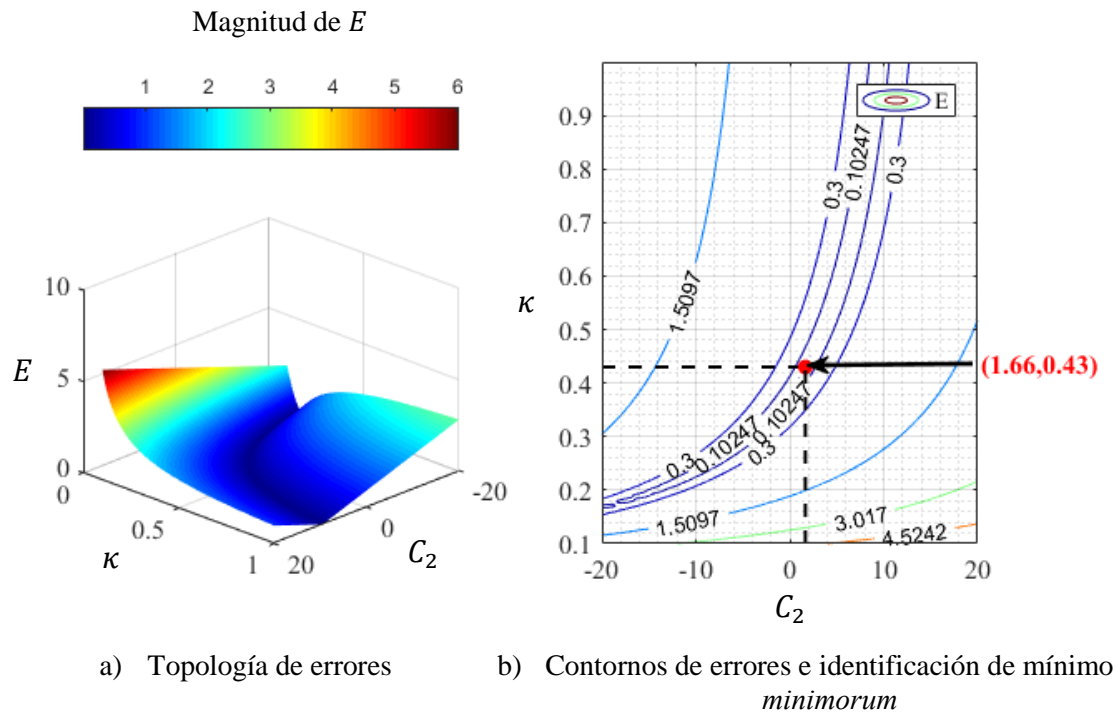


Figura G.8 Topología de errores, prueba PFR-03

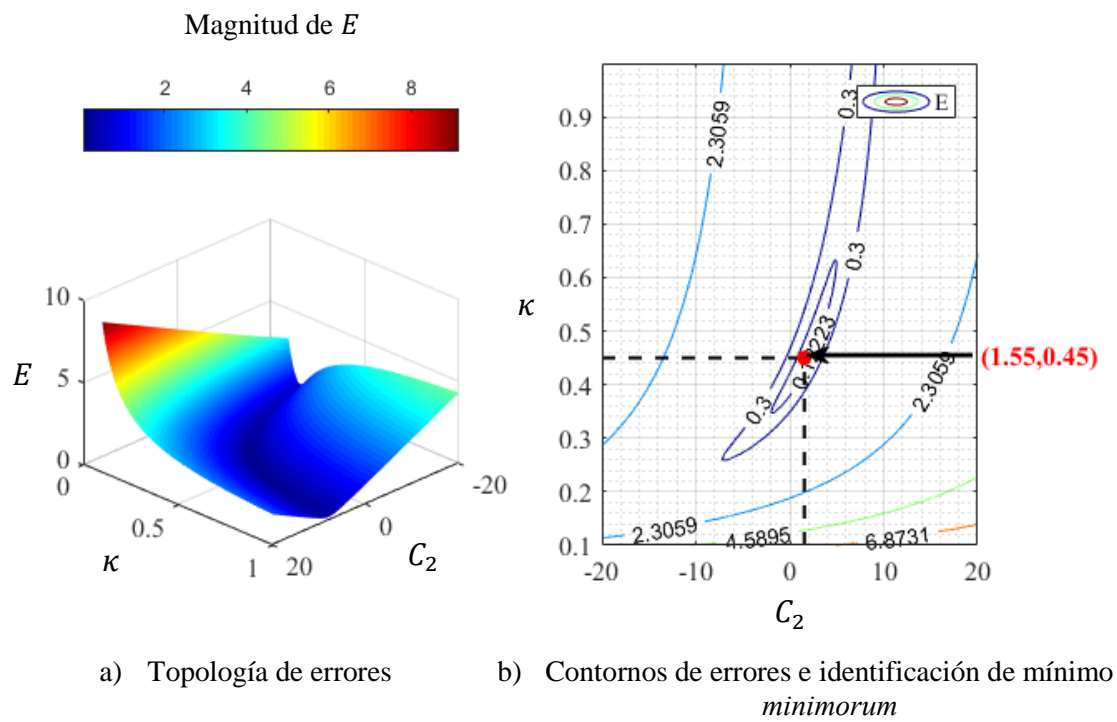


Figura G.9 Topología de errores, prueba PFR-04

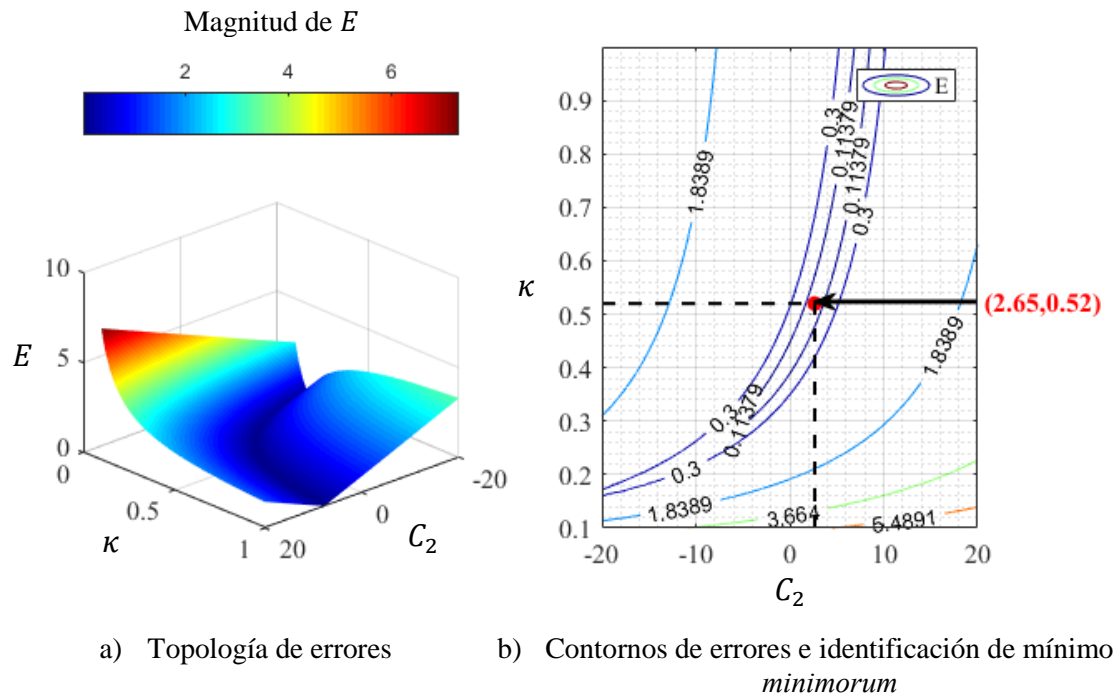


Figura G.10 Topología de errores, prueba PFR-05

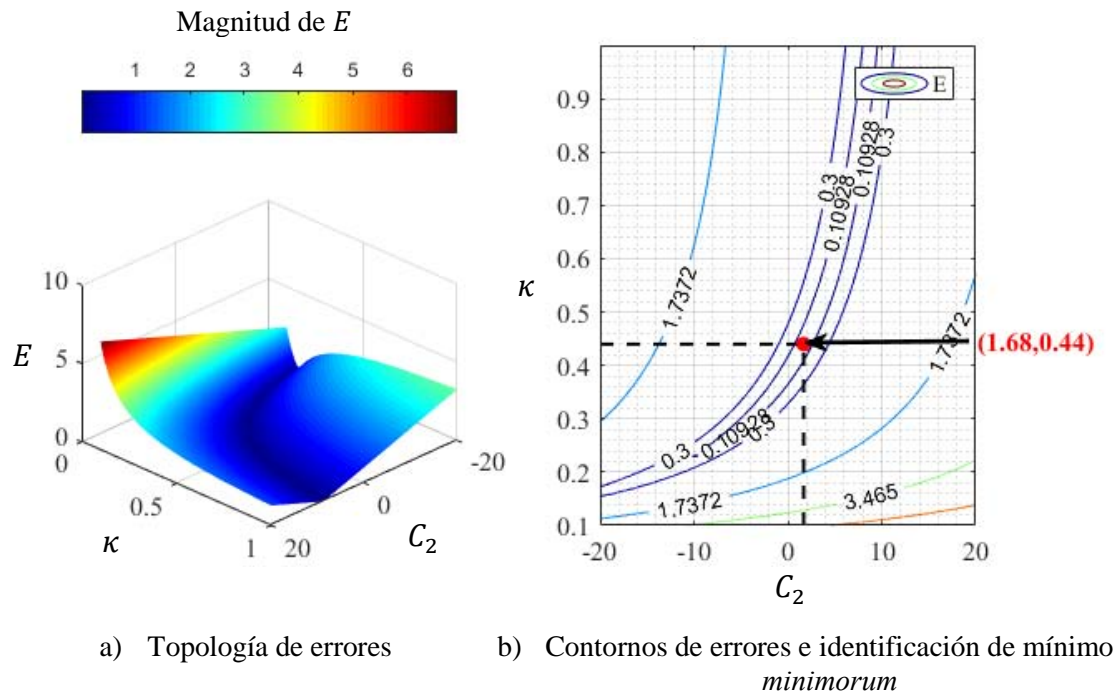


Figura G.11 Topología de errores, prueba PFR-06

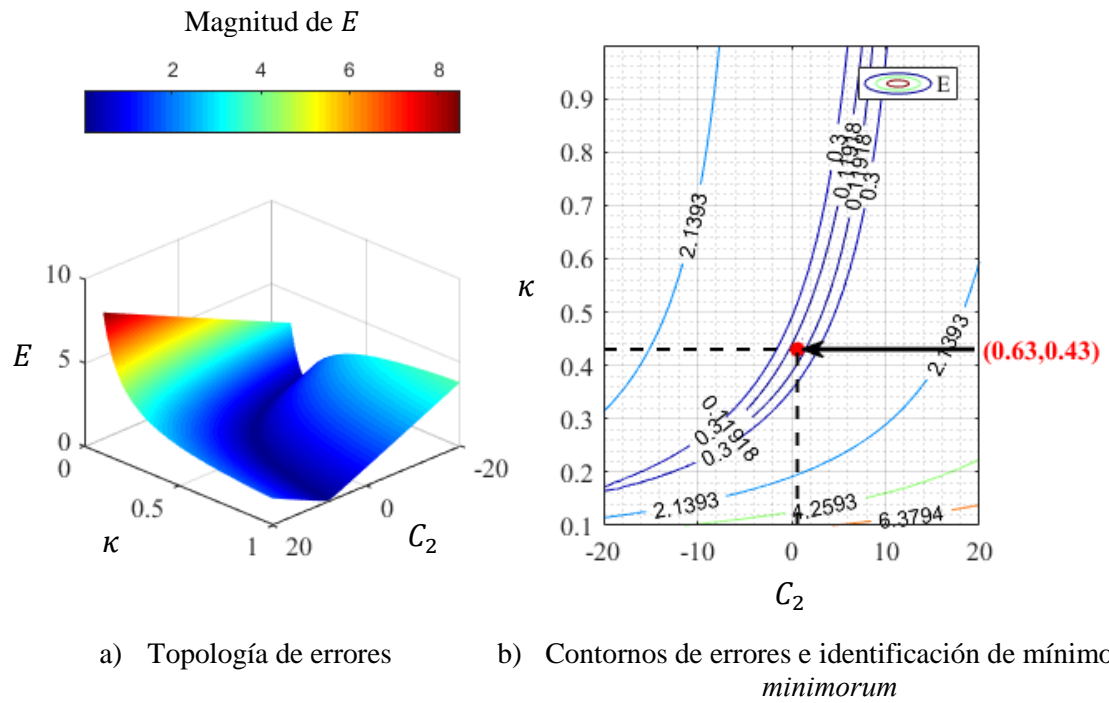


Figura G.12 Topología de errores, prueba PFR-07

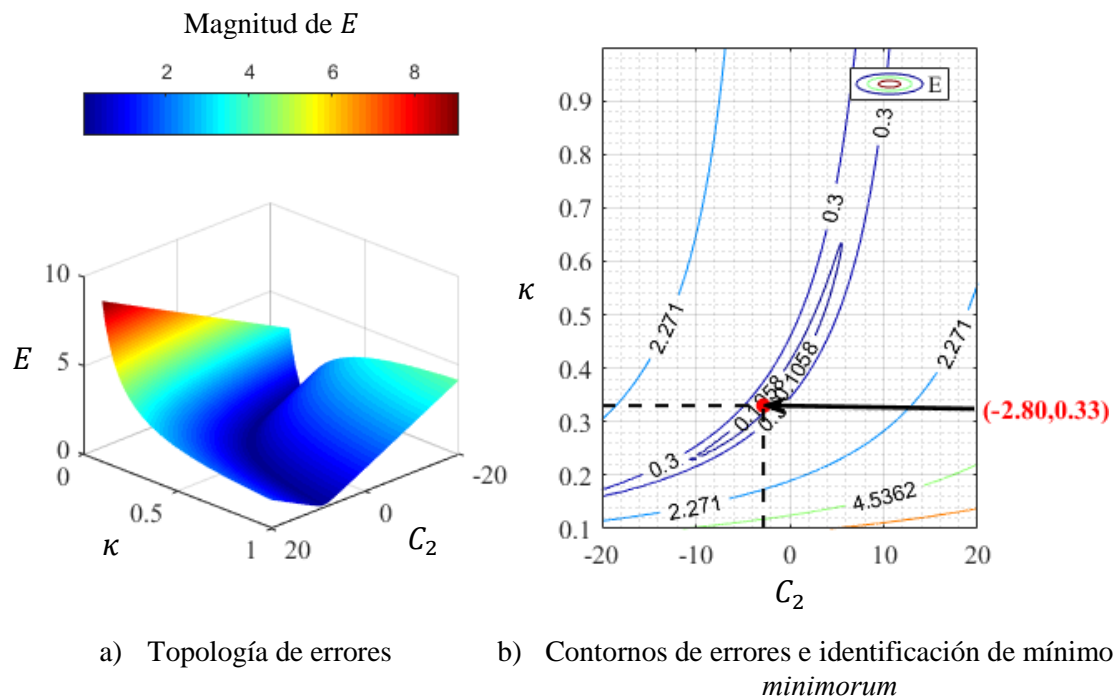


Figura G.13 Topología de errores, prueba PFR-08