UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

EL ESPACIO MÉTRICO UNIVERSAL DE URYSOHN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
FERNANDO JAVIER NUÑEZ ROSALES

DR. SERGEY ANTONYAN
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MEXICO, MEXICO. ABRIL DE 2017

El Espacio Métrico Universal de Urysohn

Fernando Javier Nuñez Rosales

27 de julio de 2017

Nadie nos salva excepto nosotros mismos. Nadie puede y nadie podría. Nosotros debemos andar por el Sendero por nosotros mismos, pero los Buddhas claramente muestran el camino.

El Buddha

A Adriana Armendarez y a Santino Nuñez...

Índice general

Introducción

Mucho se discute sobre cómo el lenguaje determina la realidad de un individuo. En la matemática creo que ocurre un fenómeno similar. Cuando se aprende una rama de la matemática se adquiere un lenguaje matemático, un esquema de pensamiento. Cuando se sabe de topología se perciben fenómenos de la topología en otras ramas; cuando se sabe de álgebra, o de categorías, o de lógica, lo mismo ocurre. A mi parecer, la comprensión de un lenguaje conlleva a buscar los patrones de este lenguaje en otros. Es de ahí de donde nace la belleza de aquellos teoremas donde distintas áreas de la matemática convergen. En este trabajo haremos una breve exposición de algunos resultados de esta naturaleza. Centraremos la atención en un objeto que se ha estudiado ya desde diversas ramas de la matemática, el espacio universal de Urysohn.

El espacio métrico universal de Urysohn, $\mathbb{U}$, es un objeto matemático muy interesante. En lo personal, me parece el objeto matemático más bello que conozco, pues el espectro de propiedades que se dibuja cuando se emplean diversas teorías matemáticas para estudiarlo es basto. Por ejemplo, si se parte desde la teoría de modelos, podremos notar similitudes entre $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ y $\mathbb{U}$. La construcción dada por Urysohn de $\mathbb{U}$ [22] es similar a la dada por Roland Fraïssé de $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ [7]. Hoy, en la teoría de modelos, se podrían estudiar los límites de Urysohn en vez de los límites de Fraïssé, pues la primer construcción del espacio métrico universal surgió alrededor de 30 años antes que la construcción de los racionales con su orden. Otras propiedades modelo-teóricas de $\mathbb{U}$ serán estudiadas en el capítulo 2 de este texto.

El contenido de este texto se encuentra en diversas áreas de la matemática; por ejemplo: en la teoría de modelos, en la teoría estructural de Ramsey, en la teoría de grupos topológicos de transformaciones, en el análisis matemático y en la teoría descriptiva de conjuntos. Por esta razón asumiremos que el lector tiene conocimientos básicos del análisis matemático y de la topología; en particular de la teoría de grupos topológicos de transformaciones. Los temas básicos de estas áreas se pueden consultar en [14], [4] y [5]. Por otro lado, el lenguaje de este texto es un lenguaje modelo-teórico. A los lectores que han estudiado teoría de modelos, el texto les parecerá familiar. Los lectores que no están familiarizados con la lógica pueden estudiar los conceptos básicos de la teoría de modelos en [9] y en [21]. En este texto también hay otros conceptos y notaciones que se han adoptado de la teoría de conjuntos; los tópicos básicos y la notación que empleamos en este texto de teoría de los conjuntos se pueden consultar en [15].

Uno de los objetivos de este texto es mostrar que el uso de las técnicas de la teoría de modelos en otras áreas de la matemática es rentable. Con este fin se ha incluido en los preliminares de este trabajo una exposición detallada de la teoría de Fraïssé, donde el lector que no está relacionado con la teoría de modelos tiene la oportunidad de familiarizarse con los conceptos y lenguaje de esta área.

En los preliminares hay algunos teoremas que se exponen sin prueba. Esto ocurre en algunas de las siguientes situaciones: o bien la prueba es meramente técnica, o para presentarla habría que abundar demasiado en algunos detalles, lo que nos alejaría de nuestros objetivos.

En el capítulo II se expone una prueba de la existencia y unicidad del espacio de Urysohn. La prueba que exhibimos sobre el espacio universal está basada en la construcción de Fraïssé y en el trabajo de Ziegler. Para mostrar que $\mathbb{U}$ tiene las propiedades que lo hacen sobresaliente, se emplea una ligera variación de una técnica de teoría de modelos llamada *saturación*. Se sabe que hay una relación entre aquellas estructuras cuya existencia asegura el Teorema de Fraïssé, la ω-saturación y la eliminación de cuantificadores. Esta relación se transmite a nuestro caso de interés: los espacios métricos. Así, a pesar que la definición de tipo que se maneja en este texto no es la definición modelo-teórica de tipo, se puede manejar de forma análoga; pues las funciones de Katětov pueden ser consideradas como conjuntos de fórmulas sin cuantificadores.

Los modelos saturados son estructuras ricas en propiedades, pero es difícil que existan. Si se asume la existencia de un cardinal κ que cumpla algunas propiedades combinatorias, entonces se pueden construir modelos saturados cuya cardinalidad sea κ [21]. La situación análoga en los espacios métricos es expuesta por Katětov en [11]. En este trabajo se presenta una construcción de los espacios universales de Urysohn-Katětov basada en la construcción de espacios saturados. La unicidad salvo isometría de los espacios de Urysohn-Katětov no se expone pero es una aplicación rutinaria de back-and-forth, similar a la expuesta para probar la unicidad del espacio de Urysohn. Para finalizar el capítulo se prueba la existencia de una clase propia a la cual se le puede dotar de estructura métrica. La construcción de esta clase está basada en los modelos monstruo. Los modelos monstruo tienen propiedades análogas a los modelos saturados y un inconveniente: a nivel lógico su unicidad depende del axioma de elección de Gödel o axioma de elección global.

La relación entre la extrema promediabilidad y la teoría estructural de Ramsey estudiada por Kechris, Pestov y Todorcevic, es otra muestra de la convergencia de varias áreas de la matemática. Esta relación se puede estudiar en la dinámica de grupos infinitodimensionales [18]. En el capítulo III se expone una prueba del teorema de Kechris, Pestov y Todorcevic; la relación que establece este teorema suele denominarse la relación KPT. También exponemos sin prueba una parte del trabajo del matemático Nesětřil, pues las técnicas que se usan en las pruebas son muy propias de la teoría estructural de Ramsey; por lo que nos limitamos a solo dar una descripción. La relación KPT y los resultados de Nesětřil solo son una parte del trabajo para probar que $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ es extremadamente promediable, el trabajo restante se lleva a cabo de manera detallada en el texto.

El grupo de isometrías del espacio de Urysohn, denotado con $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, es un grupo muy grande. $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ es universal para los grupos separables, es decir, todo grupo polaco se encaja en $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ [23]. Así que resultados como el de Vershik, sobre la existencia de una cadena de subgrupos finitos de $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, cuya unión es densa en $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, resultan bastante útiles. Para terminar el texto presentamos una prueba de la existencia de esta cadena empleando un teorema de Kechris-Rosendal y la propiedad de Hrushovski.

El presente trabajo no sólo es una exhibición de algunos resultados sobre el espacio universal de Urysohn, también se inscribe dentro de aquellos conocimientos que son de interés profesional del autor, pues formarían parte de un proyecto de investigación que éste desarrollaría con el fin de obtener el grado de doctor. Más aún, como se ha expuesto al principio de esta introducción, la convergencia de áreas de la matemática es un interés personal, sobre todo cuando la teoría de modelos está implicada.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo expondremos los resultados básicos de las teorías que se deben manejar para una adecuada lectura de este texto.

1.1. Teoría de modelos

Un tipo de semejanza τ, o tipo, es un conjunto de símbolos de tres categorías: relacionales, funcionales y constantes

$$\tau = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathscr{R}_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathscr{F}_n\Big) \cup \mathscr{C},$$

donde algunos uniendos son posiblemente vacíos y $\mathscr{R}_m$ es el conjunto de letras relacionales de aridad m, $\mathscr{F}_i$ es el conjunto de letras funcionales de aridad i y $\mathscr{C}$ es el conjunto de constantes. La única restricción que se establece es que un símbolo no sea la sucesión de otros símbolos.

Definición 1.1. *Dado τ se define una interpretación como un par ordenado $\langle A, I\rangle$ donde la primera entrada es un conjunto no vacío e I es una función con dominio τ que valúa de la siguiente manera:*

- *para cada símbolo relacional R de aridad m, $I(R) \subseteq A^m$;*
- *para cada símbolo funcional f de aridad n, $I(f)\colon A^n \longrightarrow A$ y*
- *para cada c constante, $I(c) \in A$.*

Con lo anterior se define una τ-estructura (elemental) o estructura del tipo τ como

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{I(R) : r \in \tau\}, \{I(f) : f \in \tau\}, \{I(c) : c \in \tau\}\rangle.$$

Donde la segunda entrada de la estructura es el conjunto de las interpretaciones de las letras relacionales del tipo τ, la tercera es el conjunto respectivo a las funcionales y la cuarta con las constantes.

Definición 1.2. *Dada una estructura*

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{I(R) : R \in \tau\}, \{I(f) : f \in \tau\}, \{I(c) : c \in \tau\}\rangle,$$

el conjunto A se llama universo de la estructura $\mathfrak{A}$.

Se emplea B para el universo de $\mathfrak{B}$, C para el universo de $\mathfrak{C}$, etc. También se usa $|\mathfrak{A}|$ para referirnos al universo de $\mathfrak{A}$.

Por la forma en la que se han definido las estructuras elementales, podemos establecer la siguiente notación.

Notación 1.3. *Dado un tipo de semejanza τ y una estructura elemental*

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{I(R) : R \in \tau\}, \{I(f) : f \in \tau\}, \{I(c) : c \in \tau\}\rangle,$$

el símbolo $s^{\mathfrak{A}}$ denota a $I(s)$, para cada $s \in \tau$.

Ahora es conveniente introducir algunas definiciones y notaciones básicas sobre las estructuras. Para llevar a cabo esta labor fijamos al tipo de semejanza τ.

Notación 1.4. *Denotamos con V_τ a la clase de todas las estructuras de tipo τ.*

Definición 1.5. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$. El tamaño o cardinal de la estructura $\mathfrak{A}$ es $|A|$.*

Definición 1.6. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $h \colon A \longrightarrow B$. La función h se llama morfismo si*

1. *para cada símbolo funcional $f \in \tau$ de aridad n y para todas $a_1, \ldots, a_n \in A$*

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n));$$

2. *para cada $R \in \tau$ símbolo relacional de aridad m y para todas $a_1, \ldots, a_m \in A$, $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}}$ si y solo si $(h(a_1), \ldots, h(a_m)) \in R^{\mathfrak{B}}$ y*

3. para cada constante $c \in \tau$, $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Si $h\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo, se denotará con $h\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$.

Los morfismos de estructuras pueden ser morfismos de muchas categorías, por ejemplo, monoides, grupos, ordenes, gráficas, espacios vectoriales, R-módulos, etc.

Definición 1.7. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ y $h\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. La función h se llama encaje si h es un morfismo y una función inyectiva. Si además la función h es sobreyectiva, h se llama isomorfismo.*

Definición 1.8. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$. Si $A \subseteq B$ y la función inclusión $i\colon A \longrightarrow B$ es un encaje, nos referiremos a este hecho diciendo que $\mathfrak{A}$ es subestructura de $\mathfrak{B}$ y lo denotamos con $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.*

Notación 1.9. *Si hay un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, lo denotaremos con $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Si hay un encaje de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, escribiremos $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$.*

Dado $X \subseteq A$, $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ es la subestructura generada por X en $\mathfrak{A}$; es decir, la $\subseteq$-menor subestructura de $\mathfrak{A}$ que contiene a X en su universo. Cuando X es finito la subestructura se denomina finitamente generada. Notemos que de esta definición, una estructura es finitamente generada si es generada por un subconjunto finito de sus elementos, como en el caso de los espacios vectoriales de dimensión finita. Otro hecho importante a observar es que en las estructuras relacionales[1] X mismo es el universo de la estructura generada, por lo tanto las finitamente generadas son finitas.

Caractericemos con un poco del lenguaje de primer orden a los elementos de una estructura generada. Para esto debemos introducir la noción de término del tipo τ, razón por la que necesitamos variables VAR $= \{x_i : i < \omega\}$ y procedemos como sigue:

Definición 1.10. *Se define el conjunto de los τ-términos TRM_τ, con las siguientes propiedades:*

1. a) $\mathscr{C} \subseteq TRM_\tau$;

   b) $VAR \subseteq TRM_\tau$ y

[1]Aquellas estructuras donde solo hay relaciones en su lenguaje, es decir, no hay símbolos funcionales ni constantes.

2. *TRM_τ es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales, es decir: Si $f \in \tau \cap \mathscr{F}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in TRM_\tau$, entonces*

$$f(t_1, \ldots, t_m) \in TRM_\tau.$$

Los términos se pueden pensar como polinomios, pues describen elementos de las estructuras; dados $t \in \mathrm{TRM}_\tau$ con n variables, $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, les corresponderá un elemento de A. Veamos como se hace la interpretación.

Definición 1.11. *Sean τ un tipo de semejanza, $\mathfrak{A} \in V_\tau$, $t \in TRM_\tau$ y*

$$s\colon VAR \longrightarrow A,$$

la cual se denominará asignación. Se define la Interpretación de t en la estructura $\mathfrak{A}$ bajo la asignación s, en símbolos $t^{\mathfrak{A}}[s]$, por recursión sobre TRM_τ:

1. *Para los básicos:*
   - $x^{\mathfrak{A}}[s] = s(x)$;
   - $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$ *y*

2. *Paso recursivo: Si $f \in \tau$ es una letra funcional de aridad n y $t_1, \ldots, t_n \in TRM_\tau$, entonces*

$$(f(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s]).$$

Solo hay un número finito de variables en un término. Cuando el término es una variable, se cumple nuestra afirmación. Cuando el término es una constante, el conjunto de las variables que ocurren en el termino es vacío. Nótese que si $t_1 \ldots, t_n \in \mathrm{TRM}_\tau$ tales que, en cada uno de ellos tiene una cantidad finita de variables y $f \in \tau$ es un símbolo de función de aridad n entonces, el término $f(t_1, \ldots t_n)$ tiene una cantidad finita de variables. En efecto, las variables que tiene $f(t_1, \ldots t_n)$ son la unión de las que tienen los t_i. Por lo que solo necesitamos una cantidad finita de valores de s. Estos valores se denotan con $(a_1, \ldots, a_n)$. Ahora caracterizaremos a los elementos de una subestructura generada.

Proposición 1.12. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $X \subseteq A$. Así para cada $a \in A$ es equivalente:*

1. $a \in |\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}|$;
2. *existe* $t(x_1, \ldots, x_n) \in TRM_\tau$ *y* $a_1, \ldots, a_n \in X$ *tales que*

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a.$$

No se presentara la prueba de este teorema por que es sumamente técnica, pero presentamos un esbozo de ella. Para probar la necesidad, solo se debe de considerar que las interpretaciones de las letras funcionales son funciones cerradas y que la composición de estas es una función cerrada. Por lo que cada término interpretado con parámetros en X, está en toda subestructura cuyo universo contenga a X. Para la suficiencia, se define el rango de un término con la función $\rho\colon \mathrm{TRM}_\tau \longrightarrow \omega$. La función ρ se define por recursión sobre TRM_τ. En las variables y las constantes vale cero; para un término complejo $f(t_1, \ldots, t_n)$,

$$\rho(f(t_1, \ldots, t_n)) = \max\big\{\rho(t_i) + 1 : i \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

El rango de un término es el valor de ρ en el término. Note que de manera análoga se puede definir el rango de un elemento de una subestructura generada. Por inducción sobre los naturales, se prueba que los términos de rango n interpretados con parámetros en X son exactamente los elementos de rango n de $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$.

Ahora podemos relacionar morfismos y términos con el siguiente resultado.

Proposición 1.13. *Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\tau$ *y* $h\colon A \longrightarrow B$. *Si* h *es un morfismo entonces para todo* $t \in TRM_\tau$ *y todas* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *se tiene que*

$$h(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

Para terminar este apartado solo hace falta definir un objeto que será de capital importancia en este trabajo.

Definición 1.14. *Sea* $\mathfrak{A} \in V_\tau$. *Denotamos con*

$$Aut(\mathfrak{A}) = \big\{h\colon A \longrightarrow A : h \text{ es isomorfismo } \big\}.$$

Es evidente que $\langle \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}), \circ, 1_A \rangle$ es un grupo, al cual identificaremos con $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, el grupo de automorfismos de $\mathfrak{A}$. También se tiene que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) \leqslant S_A$, donde S_A denota el conjunto de las biyecciones del conjunto A.

1.2. Teoría de Fraïssé

Una de las construcciones más majestuosa en matemáticas es la brindada por Roland Fraïssé, la cual estudiaremos a continuación con todo detalle, exhibiendo algunas propiedades y resultados. Recorreremos este tema iniciando por los tópicos necesarios para presentar el Teorema de Fraïssé e iremos agregando conceptos e información relevante para caracterizar a las estructuras construidas con el método de Fraïssé.

Definición 1.15. *Dada una estructura $\mathfrak{A} \in V_\tau$, definimos su esqueleto, que será denotado con $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$, como la colección de todas las estructuras isomorfas a alguna subestructura finitamente generada de $\mathfrak{A}$, en símbolos*

$$\mathcal{E}(\mathfrak{A}) = \big\{\mathfrak{B} \in V_\tau : \textit{hay } a_1, \ldots, a_n \in A \textit{ tales que } \langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle_{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{B}\big\}.$$

Si $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ para la cual existe $\mathfrak{C} \in V_\tau$ tal que $\mathcal{E}(\mathfrak{C}) = \mathcal{K}$, entonces diremos que $\mathcal{K}$ es un esqueleto.

Para ilustrar la definición tenemos el siguiente ejemplo, el cual también muestra que dos estructuras pueden tener el mismo esqueleto y no ser isomorfas.

Ejemplo 1.16. *Considérese la clase de los ordenes totales finitos, llamada COTOFIN. Así se tiene que*

$$\mathcal{E}(\langle\mathbb{Q}, \leqslant\rangle) = \mathcal{E}(\langle\mathbb{R}, \leqslant\rangle) = \mathit{COTOFIN}$$

El esqueleto de una estructura nunca es un conjunto, pero dependiendo de la estructura pueden parecer muy simples. Si la estructura es relacional sus subestructuras finitamente generadas tienen como universo subconjuntos finitos, pero si hay símbolos funcionales la situación cambia. Una manera de pensar a los esqueleto es como la clase de todas las estructuras finitamente generadas que se encajan en una dada.

Ahora se exhiben algunas definiciones para clases de estructuras. A primera vista estas definiciones podrán parecer muy simples, pero podremos caracterizar a través de ellas a las clases de estructuras que son un esqueleto.

Definición 1.17. *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de estructuras finitamente generadas. Definimos las siguientes propiedades para ella.*

1. *Decimos que $\mathcal{K}$ tiene la Propiedad Hereditaria (HP) si y solo si para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ocurre que $\mathcal{E}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{K}$.*

2. *Decimos que $\mathcal{K}$ tiene la Propiedad del Encaje Común (JEP) si y solo si para cualesquiera $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ existe $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$ y $h\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ encajes.*

Así las cosas, se tiene:

Proposición 1.18. *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de estructuras finitamente generadas en un lenguaje contable; esto es, $|\tau| \leqslant \omega$. Entonces $\mathcal{K}$ es el esqueleto de una estructura contable si y solo si $\mathcal{K}$ es cerrado bajo isomorfismo, $\mathcal{K}/_{\cong}$ es contable, $\mathcal{K}$ tiene HP y JEP.*

Prueba. La suficiencia es obvia, por lo que solo veremos la necesidad. Sea $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\omega}$ una clase de representantes de $\mathcal{K}/_{\cong}$. Definiremos una cadena de estructuras por recursión sobre ω. Sea $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_0$ y supongamos definida $\mathfrak{B}_n \in \mathcal{K}$. Por hipótesis $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de encaje común. Luego existe $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{A}_{n+1}$ y $\mathfrak{B}_n$ se encajan en ella, por lo que se puede tomar $\mathfrak{B}_{n+1}$ isomorfa a $\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{B}_{n+1}$, por lo que $\mathfrak{B}_{n+1} \in \mathcal{K}$. Consideramos

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{B}_i \ .$$

Afirmamos que $\mathcal{K} = \mathcal{E}(\mathfrak{F})$. En efecto, por construcción, para cada $n < \omega$ se tiene que $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{F}$, con lo que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{F})$.

Para la otra contención, sin perdida de generalidad, podemos tomar $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ finitamente generada[2], por lo que hay $b_1, \ldots, b_n \in B$ tales que $\langle\{b_1, \ldots, b_n\}\rangle_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$. Así existe $j < \omega$ tal que $b_1, \ldots, b_n \in B_j$, por lo que $\mathfrak{B}$ se encaja en $\mathfrak{B}_j$ y como $\mathcal{K}$ tiene la propiedad hereditaria, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. †

Ahora tenemos caracterizadas las clases de estructuras que son un esqueleto de alguna estructura contable. Pero no tenemos mucho control sobre la estructura resultante, pues tenemos situaciones como las siguiente:

Ejemplo 1.19.

$$COTOFIN = \mathcal{E}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle) = \mathcal{E}(\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle) = \mathcal{E}(\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle)$$

[2] Si se toma una estructura finitamente generada que se encaja en $\mathfrak{F}$, podemos trabajar con su imagen.

Así, es necesario analizar el caso cuando el esqueleto tiene más propiedades. En el ejemplo anterior estamos considerando a $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$, la cual tiene más propiedades que $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$. Para formalizarlo introduzcamos las siguientes definiciones.

Definición 1.20. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$.*

1. *Se dice que $\mathfrak{A}$ es homogénea si y solo si para todos $a, b \in A$ existe $h \in Aut(\mathfrak{A})$ tal que $h(a) = b$.*

2. *Sea κ un cardinal infinito se dice que $\mathfrak{A}$ es κ-homogénea si y solo si dadas $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}$ generadas por conjuntos de la misma cardinalidad menor que κ, tales que existe $h\colon B_1 \longrightarrow B_2$ isomorfismo, entonces existe $g \in Aut(\mathfrak{A})$ tal que $g \restriction B_1 = h$.*

Aunque el punto dos de la definición se ha hecho para cardinalidades arbitrarias, en esta sección solo nos interesa la ω-homogeneidad, puesto que estamos tratando con estructuras contables. Ahora toca estudiar la *propiedad de amalgamación* en clases de estructuras. La propiedad de amalgamación será una propiedad clave en la teoría de Fraïssé, pues como el lector podrá percatarse al final de esta sección: la amalgamación de estructuras está estrechamente vinculada a la ω-homogeneidad.

Definición 1.21. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de estructuras. Se dice que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de amalgamación (AP) si y solo si dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ tales que existen encajes $h_1\colon A \longrightarrow B$ y $h_2\colon A \longrightarrow C$, entonces existen $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$, $g_1\colon B \longrightarrow D$ y $g_2\colon C \longrightarrow D$ tales que $g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$.*

Ahora presentaremos una caracterización de la ω-homogeneidad.

Proposición 1.22. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{A}$ es ω-homogénea y*

2. *Para cualquier $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ finitamente generada y para cualesquiera encajes*

$$f, h\colon B \longrightarrow A,$$

   existe $g \in Aut(\mathfrak{A})$ tal que $g \circ f = h$.

Prueba. Probemos primero la suficiencia. Bajo las hipótesis establecidas se tiene que $f[\mathfrak{B}] \cong h[\mathfrak{B}]$ y consideremos a $g' \colon f[B] \longrightarrow h[B]$ testigo de la isomorfía. Como $\mathfrak{A}$ es ω-homogénea existe $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ tal que extiende a g'. Por lo que tenemos 2. Para probar la necesidad solo hay que dejar en claro que si $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ son subestructuras de $\mathfrak{A}$ finitamente generadas e isomorfas a la luz de una función h, entonces podemos considerar a h como un encaje de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$ y hacemos f el encaje inclusión; de lo cual existe $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ tal que $g \circ f = h$; es decir g extiende a h. †

Ahora podemos probar el siguiente resultado importante.

Proposición 1.23. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$. Si $\mathfrak{A}$ es ω-homogénea, entonces $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ tiene AP.*

Prueba. Sean $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathcal{E}(\mathfrak{A})$, $f_1 \colon B \longrightarrow C_1$ y $f_2 \colon B \longrightarrow C_2$ encajes. Como $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathcal{E}(\mathfrak{A})$, tenemos las inclusiones, que en realidad también son encajes, $i_1 \colon C_1 \longrightarrow A$ y $i_2 \colon C_2 \longrightarrow A$ en $\mathfrak{A}$. Luego al componer éstas con f_1 y f_2 estamos en el segundo inciso de la Proposición 1.22. Por lo que existe $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ tal que $g \circ i_1 \circ f_1 = i_2 \circ f_2$. Consideremos a D_1 un conjunto finito de generadores de $\mathfrak{C}_1$ en $\mathfrak{A}$, es decir $\langle D_1 \rangle_{\mathfrak{A}} = i_1[\mathfrak{C}_1]$. Análogamente D_2 es el conjunto de generadores de $i_2[\mathfrak{C}_2]$. Sea $\mathfrak{D} = \langle g D_1 \cup D_2 \rangle_{\mathfrak{A}}$. Como $g \circ i_1 \circ f_1 = i_2 \circ f_2$, entonces $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_2$ se encajan en $\mathfrak{A}$. †

Ahora con esto estamos en condiciones de probar el Teorema de Fraïssé.

Teorema 1.24 (Fraïssé). *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de estructuras finitamente generadas. Si $\mathcal{K}/\cong$ es contable y $\mathcal{K}$ tiene AP, JEP y PH, entonces existe $\mathfrak{F}$ tal que:*

1. *$\mathfrak{F}$ es contable;*
2. *$\mathcal{E}(\mathfrak{F}) = \mathcal{K}$;*
3. *$\mathfrak{F}$ es ω-homogénea y*
4. *$\mathfrak{F}$ es única salvo isomorfismo.*

Prueba. **(Existencia)** Por la Proposición 1.18, hay $\mathfrak{D} \in V_\tau$ contable tal que $\mathcal{K} = \mathcal{E}(\mathfrak{D})$. Sea

$$S = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) : \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{D} \text{ finitamente generadas}\}.$$

Esta colección es numerable, puesto que $\mathfrak{D}$ lo es. Con ello S es un conjunto de pares ordenados y se puede afirmar que para cada clase de isomorfía de $\mathcal{K}$, hay un representante como entrada en algún par en S. Construiremos una cadena de estructuras $\langle \mathfrak{F}_i : i \in \omega \rangle$ en $\mathcal{K}$ con la siguiente propiedad: Para cada $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in S$, y para cada encaje

$$h \colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$$

con $i \in \omega$, existe $i \leqslant j$ y un encaje

$$f : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{F}_j$$

que extiende a h. Sea $n < \omega$ y supongamos $\mathfrak{F}_i$ definida para todo $i < n$, definiremos $\mathfrak{F}_n$. Consideremos una biyección $p : \omega^2 \longrightarrow \omega$, tal que para cada $l, r < \omega$ se tiene que $l \leqslant p(l, r)$. Sea

$$\Theta = \{(\varphi_{i,m}, \mathfrak{A}_{i,m}, \mathfrak{B}_{i,m}) : m < \omega \text{ y } \ (\mathfrak{A}_{i,m}, \mathfrak{B}_{i.m}) \in S\}$$

donde para cada $j < \omega$ se tiene que $\varphi_{i,j} : \mathfrak{A}_{i,j} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$ es un encaje.

Como p es biyección, existe $s, l < \omega$ tales que $p(s, l) = n$. Ahora consideramos a $(\varphi_{s,l}, \mathfrak{A}_{s,l}, \mathfrak{B}_{s.l}) \in \Theta$ y se toma a $\mathfrak{F}_n$ la amalgama de $\mathfrak{A}_{s,l}$, $\mathfrak{B}_{s,l}$ y $\mathfrak{F}_s$; la cual se puede elegir de tal forma que $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_n$.

Veamos que la sucesión $(\mathfrak{F}_n)_{n<\omega}$ cumple con lo prometido. Sean $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in S$ e $i < \omega$. Tomamos un encaje $h \colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$. Como h es un encaje entre estructuras de $\mathcal{K}$, hay $j < \omega$ tal que $(h, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\varphi_{i,j}, \mathfrak{A}_{i,j}, \mathfrak{B}_{i,j})$. Por como se hizo la construcción de la cadena, $\mathfrak{F}_{p(i,j)}$ cumple lo requerido. Sea

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{F}_n.$$

Como cada $\mathfrak{F}_m$ es contable, $\mathfrak{F}$ lo es y claramente $\mathcal{K} = \mathcal{E}(\mathfrak{F})$.

Por construcción se tiene que si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ son finitamente generadas y $\varphi \colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{F}$ es un encaje, entonces existe $\bar{\varphi} \colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{F}$ tal que $\bar{\varphi}$ extiende a φ. Si tomamos dos subestructuras finitamente generadas de $\mathfrak{F}$, a saber $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ isomorfas, podríamos tomar una enumeración de F con la cual podemos, usando la propiedad anterior y back-and-forth, construir el automorfismo de $\mathfrak{F}$ que extiende al isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, con lo cual queda establecida la ω-homogeneidad.

[Unicidad] Para esto se toman $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in V_\tau$ ω-homogéneas y contables tales que $\mathcal{K}$ es su esqueleto. Sean $\langle b_i : i \in \omega \rangle$ y $\langle c_i : i \in \omega \rangle$ enumeraciones de B y C respectivamente. Construiremos un isomorfismo con éstas, para lo cual tomamos $\langle \{b_0\} \rangle_{\mathfrak{B}}$. Así existe $\mathfrak{D}_0 \in \mathcal{K}$ y existe un encaje $j : \langle \{b_0\} \rangle_{\mathfrak{B}} \longrightarrow \mathfrak{D}_0$. Por ser $\mathcal{K}$ esqueleto de $\mathfrak{C}$ existe un encaje $g_0 : \mathfrak{D}_0 \longrightarrow \mathfrak{C}$ del cual consideramos $h_0 = \{(b_0, g_0(j(b_0)))\}$, que es un encaje parcial.

Supongamos definido el encaje parcial $h_n : \{b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}\} \longrightarrow \mathfrak{C}$. Si n es par, tomamos $c_{k_{n+1}} \in C$ donde

$$k_{n+1} = min\{m \in \omega : c_m \notin |\langle h_n[\{b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}\}] \rangle_{\mathfrak{C}}|\}.$$

Por lo anterior hay un encaje

$$f : \langle \{b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}\} \rangle_{\mathfrak{B}} \longrightarrow \langle h_n[\{b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}\}] \cup \{c_{k_{n+1}}\} \rangle_{\mathfrak{C}}.$$

Siendo $\mathcal{K}$ el esqueleto de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ se pueden escoger estructuras en él isomorfas a las anteriores que tengan dicho encaje. Con ellas y la ω-homogeneidad escogemos $b_{l_{n+1}} \in B$ y definimos $h_{n+1} = h_n \cup \{(b_{l_{n+1}}, c_{k_{n+1}})\}$. En el caso de que n sea impar sólo hay que tomar $b_{l_{n+1}} \in B$ con el menor índice de la numeración de forma que dicho elemento no esté en el generado por $\{b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}\}$.

Por último tomemos $h = \bigcup_{i \in \omega} h_i$. Por construcción, se tiene que h es el isomorfismo buscado, con lo cual se ha probado la unicidad. †

Notación 1.25. *La única estructura ω-homogénea y contable, que resulta de una clase, según el resultado anterior, se llama límite de Fraïssé de la clase $\mathcal{K}$.*

Para una lectura tradicional sobre el tema se recomienda [9] y para una lectura más actual se puede consultar [21] que además introduce la construcción como la hace Hrushovski. Una fuente con una buena exposición del material es [3].

Ya se ha mencionado el hecho de que las estructuras finitamente generadas no necesariamente son finitas. En la siguiente sección solo emplearemos clases de estructuras finitas, así podemos variar algunas condiciones sobre las clases de estructuras finitas para que éstas tengan límites de Fraïssé numerables.

Definición 1.26. *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de estructuras finitas en un lenguaje contable. La clase $\mathcal{K}$ se llama de Fraïssé si y solo si $\mathcal{K}$ tiene HP, JEP y AP; $\mathcal{K}$ tiene una cantidad contable de clases de isomorfía y tiene estructuras arbitrariamente grandes; es decir, dado un natural n, se puede encontrar una estructura $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, tal que el cardinal de A es mayor que n.*

Toda clase de Fraïssé tiene un límite de Fraïssé. El límite es numerable, pues su esqueleto tiene estructuras arbitrariamente grandes. Además el límite tiene una nueva propiedad. Sabemos que las subestructuras finitamente generadas de un límite de Fraïssé están en su esqueleto, por lo tanto en el caso de una clase de Fraïssé, las subestructuras finitamente generadas de su límite son finitas. Las estructuras cuyas subestructuras finitamente generadas son finitas se llaman *localmente finitas*. De esta manera los límites de clases de Fráisse tienen límites localmente finitos.

Definición 1.27. *Sea $\mathfrak{F} \in V_\tau$ con τ contable. La estructura $\mathfrak{F}$ se llama de Fraïsse si es ω-homogénea, numerable y localmente finita.*

1.3. Teoría estructural de Ramsey

En esta sección abordaremos la teoría estructural de Ramsey, la cual es un tipo de generalización de la ya clásica teoría aplicada a números enteros. Haremos un recorrido rápido desde los teoremas típicos de Ramsey hasta los necesarios para nuestros objetivos.

Notación 1.28. *Dadas $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{C}$ definimos*

$$\left(\begin{array}{c} \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \end{array} \right) = \{\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{C} : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'\}.$$

Definición 1.29. *Sean $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{C}$ estructuras finitas y $k \geqslant 2$. Se dice que*

$$\mathfrak{C} \longrightarrow (\mathfrak{B})^{\mathfrak{A}}_k$$

si para cada k-coloración

$$q\colon \binom{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \longrightarrow \{1 \dots k\},$$

existe $\mathfrak{B}_0 \in \binom{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ tal que $\binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$ es monocromático; es decir, q es constante en $\binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$.

Ahora podemos presentar la definición más importante de la sección.

Definición 1.30. *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de estructuras finitas con la propiedad hereditaria. Se dice que $\mathcal{K}$ es una clase de Ramsey o que tiene la propiedad de Ramsey si para cualesquiera $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ y cualquier $k \in \omega - 2$ existe $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ tal que*

$$\mathfrak{C} \longrightarrow (\mathfrak{B})^{\mathfrak{A}}_k.$$

Ahora para ilustrar la definición presentaremos los Teoremas de Ramsey e iremos ilustrando cómo se relaciona con ésta.

Notación 1.31. *Sea A un conjunto y κ un cardinal. Establecemos la siguiente notación:*

1.
$$[A]^{\kappa} = \{B \subseteq A : |B| = \kappa\} \text{ y}$$

2.
$$[A]^{<\kappa} = \{B \subseteq A : |B| < \kappa\}.$$

Teorema 1.32 (Teorema de Ramsey infinito)**.** *Sea $k \geqslant 2$. Así para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para toda k-coloración $q\colon [\omega]^n \longrightarrow \{1 \dots k\}$ existe $B \subseteq \omega$ infinito tal que $[B]^n$ es monocromático.*

Definición 1.33. *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Si $a \leqslant b \leqslant c$ decimos que $c \longrightarrow (b)^a_k$ si para toda k-coloración $q\colon [c]^a \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ existe $b_0 \in [c]^b$ tal que $[b_0]^a$ es monocromático.*

Teorema 1.34 (Teorema de Ramsey finito)**.** *Para cada $k \in \omega - 2$ y para todo $a, b \in \omega$ si $a \leqslant b$ existe $c \in \omega$ con $c \geqslant b$ tal que $c \longrightarrow (b)^a_k$.*

Cambiemos la óptica desde la que se ven las cosas. Llamemos FIN a la clase de los conjuntos finitos. Veamos que la siguiente proposición tiene lugar.

Proposición 1.35. *FIN es una clase de Ramsey.*

Prueba. Veamos que FIN tiene la propiedad hereditaria. Si $x \in FIN$ no es vacío, podemos decir inmediatamente dos cosas: existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $\mathcal{E}(x)$ es la clase de todos los conjuntos con a lo más n elementos. Pues llevando los conjuntos a las estructuras tenemos que el tipo de semejanza a considerar será vacío y por lo tanto los morfismos son solo funciones y los encajes son funciones inyectivas. Así $\mathcal{E}(x) \subseteq FIN$.

Ahora consideremos $A, B \in FIN$ tales que $A \leqslant B$ y $k \in \omega - 2$. Como A y B son finitos podemos trabajar con sus cardinales, que son isomorfos a ellos, digamos $a, b \in \omega$, así $a \leqslant b$. Por el Teorema de Ramsey hay $c \in \omega$ tal que $c \to (b)^a_k$. Claramente $c \in FIN$. Sea C cualquier conjunto con c elementos, de lo cual $C \to (B)^A_k$. De estas observaciones es inmediato que FIN es una clase de Ramsey. †

La prueba deja ver que la Proposición 1.35 es una consecuencia directa del teorema de Ramsey finito. Esto ocurrirá también en la siguiente proposición.

Proposición 1.36. *COTOFIN es una clase de Ramsey.*

Prueba. Como cualesquiera dos ordenes totales finitos del mismo tamaño son isomorfos se tiene que dados $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, el conjunto $\binom{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ es biyectable con $[\mid B \mid]^{|A|}$. Además al ser finitos A y B se tiene que $\mid A \mid, \mid B \mid \in \omega$. Así dadas $k > 1$ y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in COTOFIN$ con $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, consideramos $a = \mid A \mid$ y $b = \mid B \mid$. Como $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ entonces $a \leqslant b$. Por el Teorema de Ramsey finito hay $c \in \omega$ tal que $b \leqslant c$ y $c \longrightarrow (b)^a_k$. Consideremos $\mathfrak{C} = \langle c, < \rangle$. Así una k-coloración de $\binom{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ induce una k-coloración en $[c]^a$. Por lo que existe $b_0 \in [c]^b$ tal que $[b_0]^a$ es monocromático. Consideremos $\mathfrak{B}_0 = \langle b_0, < \rangle$. Por la observación con la que iniciamos esta prueba, $\mathfrak{B}_0 \cong \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{C}$. Por cómo elegimos $\mathfrak{B}_0$ se tiene que $\binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$ es monocromático. La propiedad hereditaria de COTOFIN es obvia. †

Ahora tenemos dos ejemplos de clases de Ramsey, FIN y COTOFIN. Curiosamente FIN y COTOFIN también son clases de Fraïsse. Ahora queremos establecer una relación entre las clases de Ramsey y las de Fraïssé. Para esto necesitamos definir lo siguiente.

Definición 1.37. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$. La estructura $\mathfrak{A}$ se llama rígida si $Aut(\mathfrak{A})$ es trivial.*

Proposición 1.38. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de Ramsey de estructuras rígidas. Si $\mathcal{K}$ tiene JEP, entonces $\mathcal{K}$ tiene AP.*

Prueba. Supongamos que $\mathcal{K}$ no tiene la propiedad de amalgamación. Por lo tanto existen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ y existen encajes $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ y $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ para los cuales no existe una amalgama en $\mathcal{K}$. Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ una estructura testigo de que $\mathcal{K}$ tiene JEP entre $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, por lo que $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{D}$. Como $\mathcal{K}$ es una clase de Ramsey, existe $\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{D} \leqslant \mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{D})^{\mathfrak{A}}_3.$$

Definamos una 3-coloración q para $\binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}$. Por la rigidez de las estructuras en la clase $\mathcal{K}$ la 3-coloración q estará bien definida. Para $\mathfrak{A}_0 \in \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}$ definimos $q(\mathfrak{A}_0) = 3$ si $\mathfrak{A}_0$ se obtiene mediante un encaje de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{F}$ pero no se obtiene con un encaje de $\mathfrak{B}$; el color 2 se define análogamente. El color 1, si $\mathfrak{A}_0$

no se puede obtener como imagen de un encaje de $\mathfrak{B}$ ni de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{F}$. Así hay $\mathfrak{D}_0 \in \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$ tal que $\binom{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{A}}$ es monocromático, veamos que esto es imposible. Notemos primero que la rigidez de $\mathfrak{A}$ asegura que el isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y cualquier copia suya es único. Si $q[\binom{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{A}}] = \{3\}$, el isomorfismo entre $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}_0$ lleva los elementos de $\binom{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ en $\binom{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{A}}$. Luego hay copias de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{D}_0$ que se obtienen mediante encajes de $\mathfrak{B}$, por lo que su color no es 3. Análogamente se llega a una contradicción en los casos de los otros colores. †

En este trabajo veremos que el espacio universal de Urysohn es prácticamente un límite de Fraïssé. Por lo que es normal preguntarse si su esqueleto es una clase de Ramsey. Más adelante veremos que la clase de los espacios métricos finitos cuya métrica solo toma valores racionales es una clase de Ramsey. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar como se relacionan los fenomenos tipo Ramsey con la dinámica de ciertos grupos de automorfismos de estructutras, relación magnificamente descrita y explotada en [12].

En la Proposición 1.38 se probó que las clases de Ramsey de estructuras rígidas que tienen JEP tiene AP. Lo que nos lleva a la siguiente proposición.

Proposición 1.39. *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de estructuras rígidas finitas arbitrariamente grandes en un lenguaje contable tal que $\mathcal{K}/_{\cong}$ es contable. Si $\mathcal{K}$ es una clase de Ramsey con JEP, entonces $\mathcal{K}$ es una clase de Fraïssé.*

Prueba. Para que $\mathcal{K}$ sea una clase de Fraïssé solo nos falta la propiedad de amalgamación, pero esta se tiene por la Proposición 1.38. †

A continuación veremos que las propiedades de coloración de las clases de Ramsey, cuando éstas son también clases de Fraïssé, se pueden verificar en sus límites.

Teorema 1.40. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de Fraïssé con límite $\mathfrak{F}$. Así los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\mathcal{K}$ es de Ramsey y*
2. *para todas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, si $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ entonces*

$$\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{B})^{\mathfrak{A}}_2.$$

Prueba. Para la suficiencia. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ como en las hipótesis de 2. Como $\mathcal{K}$ es de Ramsey existe $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C} \longrightarrow (\mathfrak{B})^{\mathfrak{A}}_2$. Luego $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{F}$

pues $\mathcal{K}$ es el esqueleto de $\mathfrak{F}$; por lo que podemos tomar $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$. Así cualquier 2-coloración de $\binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}$ induce una en $\binom{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$. Luego el conjunto monocromático para $\mathfrak{C}$ también lo es en $\mathfrak{F}$.

Veamos la otra dirección. Supongamos que la clase no es de Ramsey. Puesto que $\mathcal{K}$ es hereditaria por ser de Fraïssé, existen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ con $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ tales que para cada $\mathfrak{C} \geqslant \mathfrak{B}$ hay una coloración $q_{\mathfrak{C}} \colon \binom{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \longrightarrow 2$ tal que para ninguna $\mathfrak{B}_0 \in \binom{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, q es constante en $\binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$. Sea I el conjunto de todas las subestructuras finitas de $\mathfrak{F}$. Para cada $\mathfrak{A} \in I$, definimos

$$Ext(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{B} \in I : \mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}\}$$

y afirmamos que $\{Ext(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \in I\}$ tiene PIF, la propiedad de la intersección finita. Esto ocurre por que $\mathcal{K}$ tiene JEP, ya que si $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in I$ existe una estructura $\mathfrak{B} \in I$ donde se encaja cada $\mathfrak{A}_i$. Por lo que

$$Ext(\mathfrak{B}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Ext(\mathfrak{A}_i).$$

Por lo tanto existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I que extiende a $\{Ext(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \in I\}$. Si dado $\mathfrak{A}_0 \in I$ hacemos

$$Ext_i(\mathfrak{A}_0) = \{\mathfrak{B} \in Ext(\mathfrak{A}_0) : q_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}_0) = i\}$$

con $i \in 2$, entonces

$$Ext_0(\mathfrak{A}_0) \in \mathscr{U} \text{ o } Ext_1(\mathfrak{A}_0) \in \mathscr{U}.$$

Por lo cual se puede definir

$$q \colon \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$$

de la siguiente manera $q(\mathfrak{A}_0) = i$ si $Ext_i(\mathfrak{A}_0) \in \mathscr{U}$. Como $\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{B})^{\mathfrak{A}}_2$, entonces existe $\mathfrak{B}_0 \in \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{B}}$ tal que $\binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$ es monocromático. Pero si tomamos

$$\mathfrak{D} \in \Big(\bigcap_{\mathfrak{A}_0 \in \binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}} Ext_i(\mathfrak{A}_0)\Big) \cap Ext(\mathfrak{B}_0),$$

y notamos que $q(\mathfrak{A}_1) = q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{A}_1)$ para cada $\mathfrak{A}_1 \in \binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$, obtenemos una contradicción. †

Corolario 1.41. *Sea $\mathfrak{F}$ una estructura en un lenguaje numerable y $\mathcal{K}$ su esqueleto. Entonces son equivalentes la siguientes afirmaciones,*

- *$\mathcal{K}$ es de Ramsey y*
- *para todas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, si $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ entonces*

$$\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{B})_2^{\mathfrak{A}}.$$

Más adelante estudiaremos los efectos que la propiedad de Ramsey tiene en la dinámica de grupos de automorfismos de límites de clases de Ramsey-Fraïssé.

1.4. Grupos topológicos, grupos de isometrías y acciones de grupos

Cuando creamos objetos a través de otros nos preguntamos que propiedades se heredan. A continuación enlistaremos algunos de estos resultados para un espacio métrico y su grupo de isometrías.

Definición 1.42. *Un espacio topológico completamente metrizable y separable se llama grupo polaco.*

Proposición 1.43 ([18])**.** *Sean X un espacio métrico y $G = Iso(X)$. Así la topología de la convergencia puntual y la compacto abierta coinciden en G.*

Proposición 1.44 ([18])**.** *Sea X un espacio topológico. Si X es polaco, entonces el grupo $Iso(X)$ con la topología compacto-abierta también es polaco.*

Teorema 1.45 (Birkhoff-Kakutani [2])**.** *Sea G un grupo topológico. Entonces G es metrizable si y solo si G es Hausdorff y 1_G tiene una base fundamental numerable. Más aún si G es metrizable, entonces G admite una métrica compatible izquierda invariante $d \colon G \times G \longrightarrow G$, es decir,*

$$\forall g, x, y \in G\big[d(x, y) = d(gx, gy)\big].$$

Análogamente se puede tener una métrica derecha invariante.

A continuación se enuncian algunas definiciones sobre acciones de grupos para establecer un lenguaje en común.

Definición 1.46. *Sea $\langle G, *, 1_G \rangle$ un grupo topológico y X un espacio topológico. Una acción de G en X es una función continua*

$$\alpha \colon G \times X \longrightarrow X$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. *$\forall x \in X$, $\alpha(1_G, x) = x$ y*
2. *$\forall g, h \in G$, $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(g * h, x)$.*

Comúnmente se denota con gx a $\alpha(g, x)$. Si hay una acción de G en el espacio X y no hay ningún tipo de confusión, la denotamos con $G \curvearrowright X$. La terna $\langle G, X, \alpha \rangle$ se conoce como G-espacio, si no hay confusión solo diremos que X es un G-espacio.

Notemos que una acción induce un morfismo de G en en grupo de homeomorfismos de X, $\mathrm{Hom}(X)$. Pues para cada g la función $\theta_g(x)\alpha(g, x)$, es un homeomorfismo debido a las propiedades algebraicas de G. La existencia del elemento inverso y la definición de acción garantizan que ésta es biyectiva y de la continuidad de la acción se derivan que ella y su inversa son continuas.

Definición 1.47. *Sea G un grupo topológico, X un G-espacio, $F \subseteq X$, $x \in X$ y $g \in G$. Denotamos los siguientes conjuntos.*

- *$gF = \{gx : x \in F\}$;*
- *El estabilizador puntual de F, $G_{(F)} = \{g \in G : \forall x \in F, gx = x\}$;*
- *El estabilizador conjuntista de F, $G_F = \{g \in G : gF = F\}$;*
- *El estabilizador del punto x, $G_x = G_{\{x\}}$.*
- *$G(F) = GF = \{gx : g \in G \ \& \ x \in F\}$ y*
- *$G(x) = G(\{x\})$.*

De la definición se tiene que $G_{(F)} \leqslant G_F \leqslant G$ y $G_x \leqslant G$. Además cuando un subconjunto $F \subseteq X$, cumple que $G(F) = F$ le llamaremos G-invariante o invariante.

Proposición 1.48. *Sea G un grupo topológico y X un G-espacio. Así para toda $x \in X$ se tiene que $\overline{G(x)}$ es un subconjunto invariante.*

Capítulo 2

Espacio universal de Urysohn

2.1. El espacio de Urysohn

Para los objetivos de este trabajo daremos por sentado el conocimiento de las propiedades básicas de los espacios métricos, los cuales se exponen de muy buena manera en [14]

En este capítulo presentaremos una construcción del espacio universal de Urysohn. La construcción que presentamos es la dada en [24]. A continuación enunciaremos el Teorema de Pavel Urysohn y su prueba se irá dando poco a poco.

Teorema 2.1 (Urysohn)**.** *Existe un único espacio métrico (salvo isometría), que cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Separabilidad;*
2. *Universalidad: para cualquier $\langle X, \rho_X \rangle$ separable, existe un encaje isométrico $i : X \longrightarrow \mathbb{U}$;*
3. *ω-homogeneidad y*
4. *Completud.*

Podemos notar de manera inmediata la similitud con el Teorema 1.24; y como ya hemos enunciado en la introducción, lo emplearemos para probar este teorema. Para usar el Teorema 1.24, debemos de emplear estructuras. Los espacios métricos no son estructuras, pero podemos construir estructuras a partir de espacios métricos de la siguiente forma:

Dado un espacio métrico $\langle X, \rho \rangle$, definimos $\tau' = \{R_r : r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ y una interpretación $\mathfrak{A}$ con universo X, como sigue: dados $a, b \in X$ se establece que $\langle a, b \rangle \in R_r^{\mathfrak{A}}$ si y solo si $\rho(a, b) = r$. Así

$$\mathfrak{A} = \langle X, \{R_r^{\mathfrak{A}} : r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \rangle$$

es una estructura elemental. Con esta construcción, un encaje isometrico (isometría) dará lugar a un encaje entre estructuras (isomorfismo). Un aparente inconveniente es que los espacios métricos son difícilmente capturables con axiomas de primer orden, pero no necesitamos de ellos, por lo tanto, si queremos hacer la conversión inversa se tiene que estar completamente seguros que al dar $\langle A, \{R_r^{\mathfrak{A}}\} \rangle$ y definir $\rho \colon A^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a través de la interpretación, ésta es una métrica.

Para dar inicio a la prueba del Teorema 2.1, consideramos la clase de los espacios métricos finitos y racionales $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, es decir, la clase de todos aquellos espacios finitos para los cuales la métrica solo toma valores racionales. En vista de las consideraciones del párrafo anterior no haremos distinciones entre espacios métricos o estructuras elementales, empleando sin previo aviso la que nos sea más útil.

Proposición 2.2. $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ *es una clase de Fraïssé.*

Prueba. Por considerar solo las métricas que tienen valores racionales ya se tiene que el tipo de semejanza es contable.

Para verificar la HP, consideramos $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ y Y un espacio métrico tal que existe un encaje isometrico $j : Y \longrightarrow X$. Así la métrica en Y solo toma valores racionales y Y es finito pues j es una función inyectiva.

Para probar que se cumple la JEP sean $X, Y \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, al ser finitos X y Y, tomamos $p, s \in \mathbb{Q}$ los máximos en sus métricas. Definimos la nueva métrica en la unión ajena de X con Y como

$$d_{X \sqcup Y}(a, b) = \begin{cases} d_X(a, b) & \text{si } a, b \in X, \\ d_Y(a, b) & \text{si } a, b \in Y, \\ p + q & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para probar que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ tiene AP, tomamos $A, B, C \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ y los encajes $i \colon A \longrightarrow B$ y $j \colon A \longrightarrow C$. Sin perdida de generalidad podemos suponer B y C ajenos, pues si no lo son podemos considerar copias isomorfas que si lo cumplan. Sean B_1 y C_1 tales. Consideremos un isomorfismo $\varphi_B\colon B \longrightarrow B_1$ y análogamente φ_C. Así $\varphi_B \circ i\colon A \longrightarrow B_1$ es un encaje y también $\varphi_C \circ j\colon A \longrightarrow C_1$; con lo que estamos en la situación de inicio. Definimos

$$Z = \big(B \backslash i[A]\big) \cup C$$

y la métrica $d_Z\colon Z \times Z \longrightarrow Z$, de la siguiente manera: si dos puntos están en alguno de los uniendos, entonces la distancia entre ellos es la dada por el uniendo. Si $x \in B\backslash i[A]$ y $y \in C$, entonces

$$d_Z(x, y) = \min\{d_B(x, i(a)) + d_C(j(a), y) : a \in A\}.$$

Tomar el mínimo tiene sentido pues A es finito y es racional pues cada cantidad considerada lo es. Verificar que d_Z está bien definida es una cuestión meramente técnica, pues las propiedades a verificar se heredan directamente de d_A, d_B y d_C a d_Z. A este espacio se le llama amalgama canónica, en algunos textos se le denota como $B \oplus_A C$.

Para finalizar, hay que ver que ${}^{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}}/_{\cong}$ es contable. Si

$$\langle X, \rho\rangle \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}},$$

entonces $\rho[X \times X] \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$ y como $[\mathbb{Q}]^{<\omega}$ es contable, se tiene que hay ω clases de isomorfía en $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. Otra manera de verlo es la siguiente. Para cada $n < \omega$, si X tiene n elementos, entonces

$$\big\{d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{Q} : d \text{ es métrica}\big\} \subseteq \big\{f : f\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{Q}\big\},$$

por lo que

$$\Big|\big\{d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{Q} : d \text{ es métrica}\big\}\Big| \leqslant \omega.$$

Lo anterior indica que para cada natural, hay a lo más ω espacios métricos no isomorfos dos a dos. Luego $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ tiene una cantidad contable de clases de isomorfía, pues la clase de los representantes se puede tomar como unión contable de contables. †

En la prueba de la Proposición 2.2 se ha construido una amalgama para elementos de una clase $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. Las amalgamas se pueden construir para espacios cualesquiera, de una manera similar a la ya expuesta.

Proposición 2.3. *La clase de los espacios métricos tiene la propiedad de amalgamación.*

Prueba. Sean $\langle A, d_A\rangle, \langle B, d_B\rangle$ y $\langle C, d_C\rangle$ espacios métricos tales que existen encajes $i_1 \colon A \longrightarrow B$ y $i_2 \colon A \longrightarrow C$. Sin perdida de generalidad supongamos que $B \cap C = \varnothing$. Consideremos

$$Z = B \backslash i_1[A] \sqcup C$$

y definimos $d'_Z \colon Z \times Z \longrightarrow Z$ como sigue: si $x, y \in C$, entonces $d'_Z(x, y) = d_C(x, y)$. Análogamente si $x, y \in B$, entonces $d'_Z(x, y) = d_B(x, y)$. Sin perdida de generalidad podemos tomar $x \in B$ y $y \in C$. Establecemos

$$d'_Z(x, y) = \inf\big\{d_B(x, i_B(a)) + d_C(i_C(a), y) : a \in A\big\}.$$

Ésta función está bien definida. Cuando $x, y \in B$ o $x, y \in C$, no cabe duda del hecho, veamos el caso restante. Como d_B y d_C son métricas, el conjunto $\{d_B(x, i_B(a)) + d_C(i_C(a), y) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ se encuentra acotado inferiormente por el 0. De la completud de $\mathbb{R}$ se tiene que $d'_Z(x, y)$ está bien definida para todo $x, y \in Z$. Sea

$$B \oplus_A C = {}^{Z}\big/_{\{(x,y)\in Z\times Z : d'_Z(x,y)=0\}}.$$

La función d'_Z cumple con la desigualdad triangular y la simetría por estar definida directamente de métricas. Lo que no cumple d'_Z es que solo se anule en la identidad de $Z \times Z$. Así la función inducida por d'_Z en $B \oplus_A C$, resultará una métrica. Al conjunto $B \oplus_A C$ dotado con la métrica inducida por el cociente se le llama amalgama canónica para A, B y C con i_1 e i_2. †

Otra observación importante es que hay otra forma de verificar JEP en $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. Ésta forma es más general, es tomar el producto cartesiano de los dos espacios y dotarlos de la métrica máximo, por lo que: La clase de los espacios métricos tiene JEP.

Del Teorema 2.2 se tiene que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ es una clase de Fraïssé, por lo que tiene un límite. Al límite de $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ lo denotaremos con $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$. En la literatura se le llama *Urysohn racional*. El espacio universal de Urysohn será la completación de éste y le denotaremos con $\mathbb{U}$.

Para probar la existencia de $\mathbb{U}$, podemos aplicar el teorema de Fraïssé a $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ por que el lenguaje que se necesita para esta clase es numerable. Así para cada $S \subset \mathbb{R} \cup \{0\}$ contable, podemos considerar la clase de espacios métricos finitos cuya métrica toma valores en S, a saber $\mathcal{M}_S$. ¿Será $\mathcal{M}_S$ una clase de Fraïssé? Por el Teorema 1.24 esta pregunta es equivalente a la existencia de un espacio análogo a $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$, denotado con $\mathbb{U}_S$. Remontandonos a la prueba del Teorema 2.2, nosotros necesitamos que

$$\inf\{d(x,a)+d(a,y) : a \in A\} \text{ ó } \sup\{\mid d(x,a)-d(a,y)\mid : a \in A\}$$

existan. Esta situación es estudiada a fondo por Sauer en [19].

Ahora resta verificar que $\mathbb{U}$ tiene las propiedades enunciadas en el Teorema 2.1, para lo cual necesitaremos algunas herramientas más. Dichas herramientas nos serán útiles en algunas secciones posteriores.

Definición 2.4. *Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico.*

1. *Una función $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se llama función de Katětov si para cualesquiera dos puntos $a, b \in X$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$|f(a)-f(b)| \leqslant d(a,b) \leqslant f(a)+f(b);$$

2. *Para cada $A \subseteq X$, a la sucesión $p = (r_a)_{a\in A}$ en $\mathbb{R} \cup \{0\}$ se le llama 1-tipo métrico con parámetros en A si existe una función de Katětov $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a) = r_a$ para cada $a \in A$. Si no hay lugar a confusiones diremos, en este caso, que p es un tipo sobre A y*

3. *Para todo $B \subseteq X$, $S_X(B)$ denota el conjunto de todos los tipos con parámetros en B.*

En teoría de modelos también se consideran objetos llamados tipos. Estos tipos son similares a los que hemos definido anteriormente, sin embargo el lector no debe confundirlos. Para definir un tipo de algún objeto se necesita que sea posible la existencia, en algún lugar, de una realización de este. Razón por la cual es necesaria la consistencia entre las propiedades del objeto y las propiedades de los parámetros que tiene el tipo. En la teoría de modelos, una herramienta frecuente para asegurar la consistencia de un conjunto de propiedades es el *teorema de compacidad.* Nosotros podemos tomar un conjunto de formulas para caracterizar un tipo métrico y aplicar directamente el teorema de compacidad, pero los modelos resultantes no serán necesariamente espacios métricos. Por eso es que en la definición de tipo métrico empleamos las funciones de Katětov, pues con estas se rescatan las condiciones mínimas para extensiones unipuntuales de espacios métricos; esto a su vez nos brinda las condiciones necesarias de consistencia para que sea posible la realización del tipo.

Dado un espacio métrico $\langle X, d\rangle$, $w \notin X$ y $(r_x)_{x\in X} \in S_X(X)$, se define en el conjunto $X \cup \{w\}$ una función $d_{X\cup\{w\}}$ que extiende a d y que para cada $x \in X$ se tiene que $d_{X\cup\{w\}}(w, x) = r_x$. La función $d_{X\cup\{w\}}$ resulta ser una métrica por las desigualdades que se manejan en la definición de función de Katětov. De alguna manera los tipos son una descripción de cómo agregar un nuevo elemento a un espacio métrico y que el objeto resultante sea un espacio métricos.

Definición 2.5. *Sean $\langle X, d_X\rangle$ un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $(r_a)_{a\in A} \in S_X(A)$. Si existe $w \in X$ tal que $d(w, a) = r_a$ para cada $a \in A$, se dice que w realiza a $(r_a)_{a\in A}$.*

En un espacio métrico $\langle X, d_X\rangle$, si se toman $y \in X$ y $A \subseteq X$, se puede considerar

$$f\colon A \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por $f(a) = d_X(y, a)$. Así, se tiene que f es una función de Katětov. A su tipo correspondiente, $(f(a)_a)_{a\in A}$, a veces lo denotaremos por $tp^X(y/A)$.

Más adelante analizaremos el poder de esta observación y su relación con las técnicas de teoría de modelos, por ahora nos limitaremos a trabajar en $\mathbb{U}$. Hay varias formas de trabajar a los tipos. Como funciones de Katětov se les puede dotar de la métrica uniforme, pero queremos abarcar el caso cuando el conjunto donde toman parámetros no es el mismo, para lo cual, dado un espacio X, $A \subseteq X$ de diámetro finito y $p = (r_a)_{a\in A}$ definimos

$$\bar{p} = \{(r_a, a) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R} \times A.$$

A $\mathbb{R} \times A$ se le puede dotar con la métrica máximo, con lo cual podemos definir

$$D\colon \Big(\bigcup\{S_X(A) : A \subseteq X : diam(A) < \infty\}\Big)^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si $p_1 \in S_X(A)$ y $p_2 \in S_X(B)$, entonces $D(p_1, p_2)$ es el valor de la métrica de Hausdorff inducida por la métrica máximo en $\mathbb{R} \times A$, entre $\overline{p_1}$ y $\overline{p_2}$. Cuando el conjunto de parámetros de los dos tipos es el mismo, nuestra métrica concuerda con la métrica del supremo entre las funciones de Katětov correspondientes.

De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrarío, ρ será la métrica en $\mathbb{U}$ y cuando se hable de la distancia entre dos subconjuntos de un espacio métrico $\langle X, d\rangle$ se estará considerando la distancia de Hausdorff:

$$d(A, B) = \mathrm{Inf}\{r > 0 : B \subseteq N(A, r) \text{ y } A \subseteq N(B, r)\}.$$

Lema 2.6. *Para todo* $A \in [\mathbb{U}_\mathbb{Q}]^{<\omega}$ *y todo* $p = (r_a)_{a\in A} \in S_{\mathbb{U}_\mathbb{Q}}(A)$ *tales que para cada* $a \in A$, $r_a \in \mathbb{Q}$, *existe* $u \in \mathbb{U}_\mathbb{Q}$ *que realiza* p.

Prueba. Sea A y p como en las hipótesis. Como A es un subespacio de $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$, este mismo es un espacio métrico, así $A \in \mathcal{M}_\mathbb{Q}$. Sea z un punto que no está en A y consideramos $B = A \cup \{z\}$. Solo basta definir la distancia entre z y a como r_a para cada $a \in A$, de lo cual $B \in \mathcal{M}_\mathbb{Q}$. Ahora al ser $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ el límite de $\mathcal{M}_\mathbb{Q}$ existen encajes $\varphi_A\colon A \longrightarrow \mathbb{U}_\mathbb{Q}$, $\varphi_B\colon B \longrightarrow \mathbb{U}_\mathbb{Q}$ y existe $g \in Aut(\mathbb{U}_\mathbb{Q})$ tales que $g\varphi_B[A] = \varphi_A[A]$, por lo que $g(\varphi_B(w))$ realiza p. †

También es cierto que $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es el único (salvo isometría) con esta propiedad. La prueba es una aplicación de *back-and-forth* y quedará clara cuando la usemos para probar la unicidad de $\mathbb{U}$.

Lema 2.7. *Sean* $\langle X, d\rangle$ *un espacio métrico,* $A, B \subseteq X$ *de diámetro finito y* $x, y \in X$. *Si* $p = tp_X(x/A)$ *y* $q = tp_X(y/B)$, *entonces*

$$d(A, B) \leqslant D(p, q) \leqslant d(A, B) + d(x, y).$$

Prueba. Para probar que $d(A, B) \leqslant D(p, q)$, tomamos a $r = D(p, q)$. Vamos a probar que $A \subseteq N(B, r)$, por lo que basta probar que $\forall a \in A \exists b \in B(d(a, b) < r)$. Sea $a \in A$, así $(a, d(a, x)) \in \overline{p}$. Como $r = D(p, q)$, entonces hay $b \in B$ tal que $d_{\max}((a, d(x, a)), (b, d(b, y))) < r$. Por lo tanto $d(a, b) < r$. Para probar que $D(p, q) \leqslant d(A, B) + d(x, y)$, tomemos $s = d(x, y)$ y $l = s + d(A, B)$. Sea $(a, d(a, x)) \in \overline{p}$. Así existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < d(A, B)$. Afirmamos que $d_{\max}((a, d(a, x)), (b, d(b, y))) < l$. Si $d_{\max}((a, d(a, x)), (b, d(b, y))) = d(a, b)$, como $d(a, b) < d(A, B) < l$ hemos terminado. Si $d_{\max}((a, d(a, x)), (b, d(b, y))) = |d(a, x) - d(y, b)|$, entonces tomamos en cuenta que

$$\begin{aligned} |d(a, x) - d(y, b)| &\leqslant |d(a, x) - d(a, y)| + |d(a, y) - d(y, b)| \\ &\leqslant d(x, y) + d(a, b), \end{aligned}$$

con lo que obtenemos el resultado deseado. †

Lema 2.8. *Sean* $\langle X, d\rangle$ *un espacio métrico, y* $A, B \subseteq X$ *de diámetro finito. Si* $p \in S_X(A)$ *y* $q \in S_X(B)$, *entonces existe una extensión* Y *de* X, *donde existe* $x \in Y$ *tal que* x *realiza a* p *y* $y \in Y$ *que realiza a* q *y*

$$d(x, y) \leqslant 2\Big(D(p, q) + d(A, B)\Big).$$

Prueba. Sin perdida de generalidad, por amalgamación, podemos considerar a $X = A \cup B$. Dividiremos la prueba en dos casos:

[Caso 1] $A = B$. Si $p = q$, tomamos una extensión $A \cup \{w\}$ donde w realiza p. Por lo que w realiza q. Así $0 = d(w, w) \leqslant 2D(p, q) = 0$. Así, supongamos que $p \neq q$.

Sean x y y puntos que no están en A. Tomamos las extensiones $A \cup \{x\}$ que realiza a p, y $A \cup \{y\}$ que realiza a q. Ahora definiremos una métrica en $A \cup \{x, y\}$, a la cual llamaremos d'. Si $u, w \in A$, entonces $d'(u, w) = d_A(u, w)$. Para toda $a \in A$, se tiene que $d'(a, x) = d_{A\cup\{x\}}(a, x)$ y $d'(a, y) = d_{A\cup\{y\}}(a, y)$. Y

$$d'(x, y) = \sup\big\{d_{A\cup\{x\}}(x, a) - d_{A\cup\{y\}}(a, y) : a \in A\big\}.$$

Para probar que la métrica d' está bien definida, solo presentamos la prueba de la desigualdad triangular; las otras propiedades se deducen directamente de la definición. Sean $u, w, z \in A \cup \{x, y\}$. Si $u, w, z \in A$ la afirmación es cierta. Si $x = u$ y $w, z \in A$, entonces $d'(w, z) \leqslant d'(w, x) + d'(x, z)$. En efecto, pues x realiza a p y tanto $d'(w, x)$ como $d'(x, z)$ están considerados en p. Lo anterior sirve también cuando $y = u$ y $w, z \in A$. Por lo que solo falta el caso cuando se considera $w \in A$, x y y. Como ya hemos notado que la desigualdad del triangulo tiene lugar cuando se consideran dos elementos de A se tiene que, para cada $a \in A$ se cumple que

$$|d'(x, a) - d'(a, w)| \leqslant d'(x, w) \text{ y que } |d'(y, a) - d'(a, w)| \leqslant d'(y, w).$$

Así, para toda $a \in A$

$$\begin{aligned} |d'(x, a) - d'(a, y)| &\leqslant |d'(x, a) - d'(a, w)| + |d'(w, a) - d'(a, y)| \\ &\leqslant d'(x, w) + d'(w, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d'(x, y) = \sup\{|d'(x, a) - d'(a, y)| : a \in A\} \leqslant d'(x, w) + d'(w, y).$$

Con lo que queda probado que d' es una métrica.

Para continuar con la prueba del lema, notemos que:

$$d'(x, y) = \sup\{d'(x, a) - d'(a, y) : a \in A\}$$

$$= \sup\{d_{A\cup\{x\}}(x,a) - d_{A\cup\{y\}}(a,y) : a \in A\}$$
$$\leqslant D(p,q) \leqslant 2D(p,q).$$

Con lo que $A \cup \{x,y\}$ es la extensión buscada.

[Caso 2] Si $A \neq B$, entonces tomamos una realización x de p. Amalgamamos $A \cup B$ y $A \cup \{x\}$, y en este espacio se considera $p' = tp^{X\cup\{x\}}(x/B)$ (claramente x realiza p'). Con lo cual tenemos, en base a lo anterior

$$d(x,y) \leqslant 2D(q,p') \leqslant 2(D(q,p) + D(p,p'))$$
$$\leqslant 2(D(p,q) + d(A,B)).$$

†

Lema 2.9. *Para cada $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, cada $p \in S_A(A)$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $q \in S_A(A)$ tal que q es racional y $D(p,q) < \varepsilon$*

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Procedemos por inducción sobre el conjunto de parámetros. Cuando solo hay un parámetro el conjunto de los tipos se puede identificar con el conjunto de los reales no negativos. Por la densidad de $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{R}$ tenemos el caso $n = 1$. Supongamos que la propiedad se tiene para los espacios métricos finitos racionales de tamaño n. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ y $p \in S_A(A)$. Hagamos $A' = A - \{a_{n+1}\}$ y $p' = p \restriction_{A'}$, el cual es ahora un tipo con parámetros en A'. Por hipótesis de inducción existe un tipo racional q con parámetros en A' tal que $D(p',q) < \varepsilon$. Luego por el Lema 2.8 existe una extensión B de A' con realizaciones x de p' y y de q tales que

$$d(x,y) < 2D(p',q) < 2\varepsilon.$$

Sin perdida de generalidad, podemos pensar que B es igual a $\{a_1, \ldots, a_n, x, y\}$. Así consideremos $C = A' \cup \{x, y, a_{n+1}\}$ donde la distancia es como sigue: Las distancias entre los elementos de B como en B, $d(a_i, a_{n+1})$ como en A,

$$d(a_{n+1}, y) = \min\{d(a_{n+1}, a_i) + d(a_i, y) : i = 1, \ldots, n\} \in \mathbb{Q}$$

y $d(a_{n+1}, x) = p_{a_{n+1}}$, por lo que

$$D(p, tp^C(y/A)) = d(x,y) < 2\varepsilon$$

y $tp^C(y/A)$ es un tipo racional. Con lo anterior concluimos. †

Con esto estamos listos para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.10. $\mathbb{U}$ *realiza los tipos con parámetros en subconjuntos totalmente acotados.*

Prueba. Sea $A \subseteq \mathbb{U}$ totalmente acotado y sea $p \in S_{\mathbb{U}}(A)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $A_n \subseteq \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ finito tal que $\rho(A_n, A) < \frac{1}{10n}$. Consideremos w una realización de p, y hagamos $X = \mathbb{U} \cup \{w\}$. Definimos $q_n = tp^X(w/A_n)$. Por el Lema 2.9 existe un tipo racional con parámetros en A_n, a saber p_n, tal que $D(p_n, q_n) < \frac{1}{10n}$. Así

$$D(p, p_n) \leqslant D(p, q_n) + D(q_n, p_n) \leqslant D(p, q_n) + \frac{1}{10n}$$

pero $q_n = tp^X(w/A_n)$. Por el Lema 2.7 tenemos que

$$D(p, q_n) \leqslant \rho(A, A_n) < \frac{1}{10n}.$$

Por lo tanto $D(p, p_n) \leqslant \frac{1}{5n}$.

Como cada p_n es racional con parámetros en subconjuntos de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$, por el Lema 2.6 sus realizaciones están en $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$. Construyamos una sucesión de estas por recursión como sigue: Consideramos $u_1 \in \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ cualquier realización de p_1. Supongamos definida u_n. Por el Lema 2.8 existen $u, w \in \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ tales que

$$\rho(u, w) \leqslant 2\big(D(p_n, p_{n+1}) + \rho(A_n, A_{n+1})\big).$$

Claramente $A_n \cup \{u_n\}$ es isométrico a $A_n \cup \{u\}$. Por ω-homogeneidad de los límites de Fraïssé existe $g \in Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ tal que $g[A_n \cup \{w\}] = A_n \cup \{u\}$. Definimos $u_{n+1} = g(w)$ con lo que $\rho(u_n, u_{n+1}) = \rho(u, w)$ y como ya hemos probado que $D(p, p_n) \leqslant \frac{1}{5n}$, tenemos que

$$D(p_n, p_{n+1}) \leqslant D(p_n, p) + D(p, p_{n+1})$$

$$\leqslant \frac{1}{5n} + \frac{1}{5(n+1)}$$

y $\rho(A_n, A_{n+1}) \leqslant \frac{1}{10n} + \frac{1}{10(n+1)}$. Por lo tanto

$$\rho(u_n, u_{n+1}) \leqslant \frac{1}{10n} + \frac{1}{10(n+1)} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5(n+1)}.$$

Así $(u_{n+1})_{n<\omega}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo que existe $b \in \mathbb{U}$ donde $(u_{n+1})_{n<\omega}$ converge. Además $tp^{\mathbb{U}}(b/A) = tp^{X}(b/A)$ pues $\mathbb{U} \subseteq X$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} &D(tp^X(b/A), p) \\ &\leqslant D(tp^X(b/A), tp^X(b/A_m)) + D(tp^X(b/A_m), p_m) + D(p_m, p) \\ &\leqslant \frac{1}{10m} + \rho(b, u_m) + \frac{1}{5m}. \end{aligned}$$

Por lo que b realiza a p. †

Corolario 2.11. $\mathbb{U}$ *es ω-saturado.*

Prueba. Todo conjunto finito es totalmente acotado. †

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 2.1. Por la construcción que hemos brindado tenemos aseguradas la completud y la separabilidad, pues $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ es numerable por el Teorema 1.24. Las propiedades restantes las obtendremos por partes.

Proposición 2.12. $\mathbb{U}$ *es universal.*

Prueba. Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico separable y $Y \subseteq X$ un denso contable. Consideramos $\langle y_i : i < \omega\rangle$ una enumeración de Y. Definiremos por recursión una familia de encajes parciales $(h_n)_{n<\omega}$. Sea $u_0 \in \mathbb{U}$ cualquier elemento y definimos $h_0 = (y_0, u_0)$. Sea $n > 0$ y supongamos definido el encaje

$$h_n \colon \{y_0, \ldots, y_n\} \longrightarrow \mathbb{U},$$

donde $u_i = h_n(y_i)$. Consideremos $y_{n+1} \in Y$ y $p = tp^X(y_{n+1}/\{y_0, \ldots, y_n\})$. Como h_n es un encaje, se tiene que $(d(y_{n+1}, y_i))_{u_i} \in S_{\mathbb{U}}(u_0, \ldots, u_n)$. Como $\mathbb{U}$ es ω-saturado, entonces existe $a \in \mathbb{U}$ que realiza p. Consideramos

$$h_{n+1} = h_n \cup \{(y_{n+1}, a)\}.$$

Por la forma de elegir a a se tiene que h_{n+1} es un encaje y por construcción h_{n+1} extiende a h_n. Definimos el encaje

$$h = \bigcup_{n<\omega} h_n \colon Y \longrightarrow \mathbb{U}.$$

Por ser Y denso en $\mathbb{U}$, existe un único encaje isometrico $\bar{h} \colon X \longrightarrow \mathbb{U}$ que extiende a h. La prueba de la existencia de esta función, y de que esta cumple con las propiedades deseadas se puede verificar en [14]. †

En la prueba de la Proposición 2.12 se ha utilizado la ω-saturación de $\mathbb{U}$ para construir un encaje. En la siguiente proposición haremos algo similar, pero esta vez la ω-saturación se aplica al rango y al dominio para construir una isometría.

Proposición 2.13. $\mathbb{U}$ *es* ω*-homogéneo.*

Prueba. Sean $A, B \in [\mathbb{U}]^{<\omega}$ tales que existe una isometría $h\colon A \longrightarrow B$. Sea $(a_j)_{j<\omega}$ una enumeración del Urysohn racional. Definimos $h_0 = h$ y supongamos definido h_n. Si n es par se toma

$$k = \min\{s < \omega : a_s \notin \mathrm{Dom}(h_n)\}.$$

Luego consideramos $tp\mathbb{U}(a_k/\mathrm{Dom}(h_n)$ y como se hizo en la Proposición 2.12, tomamos una relización b de $(\rho(a_k, h_n^{-1}(x)))_{x\in\mathrm{Img}(h_n)}$. Así definimos

$$h_{n+1} = h_n \cup \{(a_k, b)\}.$$

Si n es impar, consideramos el primer natural $k < \omega$ tal que $a_k \notin Img(h_n)$ y definimos

$$p = tp^{\mathbb{U}}(a_k/Img(h_n)).$$

Como $\mathbb{U}$ es ω-saturado, existe $c \in \mathbb{U}$ tal que $\rho(c, x) = \rho(a_k, h_n(x))$ para cada $x \in Dom(h_n)$. Sea

$$\varphi = \bigcup_{n<\omega} h_n.$$

Claramente φ es un encaje. Por construcción, $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{Img}(\varphi) \cap \mathrm{Dom}(\varphi)$. Por lo que afirmamos que φ se puede extender a un $g \in Aut(\mathbb{U})$. En efecto, como $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$, entonces existe un encaje $g\colon \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ que extiende a h. Veamos que g es sobreyectiva. Sea $u \in \mathbb{U}$. Como $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ es denso en $\mathbb{U}$, hay una sucesión $(w_i)_{i<\omega}$ de elementos de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ que converge a u. Por lo que $(h^{-1}(w_i))_{i<\omega}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{U}$ es completo y $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{Img}(g)$, entonces existe $w \in \mathbb{U}$ tal que $\{g^{-1}(w_i)\}_{i<\omega} \to w$. Por lo que $g(w) = u$.

Como φ extiende a h, tenemos que g extiende a h. †

De esta forma ya tenemos la prueba del Teorema 2.1. Nosotros usamos el Teorema 2.10 para probar el Teorema 2.1. Sin embargo el Teorema 2.10 indica que $\mathbb{U}$ realiza los tipos con parámetros en conjuntos totalmente acotados, nosotros solo hemos usado la ω-saturación, no hemos usado en su totalidad el Teorema 2.10. A continuación explotaremos más este resultado.

Proposición 2.14. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{U}$ totalmente acotados. Si existe una isometría $h\colon A \longrightarrow B$, entonces existe $g \in Aut(\mathbb{U})$ que extiende a h.*

Prueba. La prueba es idéntica a la de la Proposición 2.13. Solo hay que considerar que en la familia de encajes que se define por recursión, cada uno de ellos debe tener domino e imagen totalmente acotados. El paso recursivo de la definición de la familia de encajes es posible por que la unión de un conjunto totalmente acotado y un conjunto finito es un conjunto totalmente acotado. †

La proposición previa tiene una importante secuela.

Corolario 2.15. *Para cualesquiera $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{U}$ compactos, si existe una isometria $h\colon K_1 \longrightarrow K_2$, entonces existe $g \in Aut(\mathbb{U})$ que extiende a h.*

Prueba. Los subconjuntos compactos de un espacio métrico son conjuntos totalmente acotados. †

Hasta este punto hemos presentado y estudiado diversas propiedades. Estas propiedades se han expuesto en el estudio del espacio de Urysohn, pero han sido definidas sin ninguna dependencia a este. Si analizamos con cuidado la prueba de la Proposición 2.12, se puede ver que esta afirmación se puede generalizar, y obtener como resultado que en los espacios ω-saturados se puede encajar cualquier espacio métrico contable. Por lo tanto, cualquier espacio métrico separable se puede encajar en un espacio métrico completo y ω-saturado. De manera análoga, también se puede obtener que los espacios ω-saturados y completos son ω-homogéneos. En lo que resta de esta sección, analizaremos algunas consecuencias y relaciones de las propiedades que han resultado notables en el estudio de $\mathbb{U}$.

A continuación presentamos otra caracterización del espacio de Urysohn, esta vez con el concepto de ω-saturación.

Teorema 2.16. $\mathbb{U}$ *es el único espacio métrico con las siguientes propiedades:*

1. *completud;*

2. *separabilidad y*

3. *ω-saturación.*

Prueba. Ya sabemos que $\mathbb{U}$ tiene estas propiedades. Para verificar la unicidad salvo isometría lo que resta hacer es ver que la ω-saturación es consecuencia de las propiedades que se establecen en el Teorema 2.1.

Sea $A \subseteq \mathbb{U}$ finito no vacío y $p \in S_{\mathbb{U}}(A)$. Consideramos un elemento w que no esté en A y tomamos $B = A \cup \{w\}$ donde declaramos la métrica ρ' de la siguiente forma: en los elementos de A, ρ' es ρ, la métrica en $\mathbb{U}$, y para cada $a \in A$, $\rho'(a, w) = r_a$. Así B es un espacio métrico finito. Por lo tanto existe un encaje $\varphi \colon B \longrightarrow \mathbb{U}$. Luego A y $\varphi[A]$ son isométricos, por lo que existe $g \in Aut(\mathbb{U})$ tal que $g(\varphi(a)) = a$ para todo $a \in A$. Así

$$\rho(g(\varphi(w)), a) = r_a;$$

es decir, $g(\varphi(w))$ realiza p. †

Sabemos que $\mathbb{U}$ realiza los tipos con parámetros en subconjuntos totalmente acotados. Llamemosle a esta propiedad TA-saturación. Claramente esta propiedad es más fuerte que la ω-saturación. Para terminar esta discusión veamos que los espacios separables TA-saturados y universales son completos.

Proposición 2.17. *Si $\langle X, d\rangle$ TA-saturado, separable y universal, entonces X es completo.*

Prueba. Empleando técnicas usadas en la prueba de la Proposición 2.13, es claro que las isometrías entre subconjuntos totalmente acotados de X pueden extenderse a un automorfismo de X.

Sea $(a_n)_{n<\omega}$ una sucesión de Cauchy en X. Considerémosle como espacio métrico. Definimos $Y = \{a_n : n < \omega\}$. Así podemos considerar a $\overline{Y}$ como su completación, la cual es separable, pues Y es contable y se encaja densamente en $\overline{Y}$. Así hay un encaje $\varphi \colon \overline{Y} \longrightarrow X$. Notemos que podemos pensar a $\overline{Y}$ como $Y \cup \{*\}$ donde $\{a_n\}_{n<\omega} \to *$. Por lo que $\{\varphi(a_n) : n < \omega\}$ es isométrico $(\varphi(a_n) \mapsto a_n)$ a Y. Por lo tanto existe $g \in Aut(X)$ que extiende a h. Así $(a_n)_{n<\omega}$ converge a $g(*)$. Por lo que X es completo. †

2.2. Espacios Universales de Urysohn-Katětov

Cuando decimos que $\mathbb{U}$ es un espacio universal, deberíamos ocupar un lenguaje más fino. Con el adjetivo universal nos referimos a que $\mathbb{U}$ es universal para una clase especifica de espacios, los espacios métricos separables. En este caso, la teoría desarrollada en la sección anterior hace notar que es la numerabilidad de ciertos conjuntos lo que nos permite tener las propiedades deseadas. Básicamente podríamos decir que las propiedades de $\mathbb{U}$ se reducen a cuestiones numerables. Lo que trae una pregunta: ¿Habrá otros espacios métricos con propiedades similares, pero referentes a otros cardinales?

Una de las hipótesis del Teorema 1.24 limita la cantidad de clases de isomorfía de la clase de estructuras finitamente generadas. Cuando se pretende construir la sucesión de estructuras cuya unión será el límite de la clase, en cada paso de la recursión se están comparando ω estructuras, ya que

$$\langle(\varphi_{i,j}, \mathfrak{A}_{i,j}, \mathfrak{B}_{i,j}) : j < \omega\rangle$$

es una enumeración adecuada de todas ellas y para seleccionar la indicada se usa el hecho de que $\omega \times \omega$ es equipotente con ω. En la construcción del límite primero se nota que la clase es un esqueleto. Luego se toma la estructura de la que es esqueleto para consideran las estructuras finitamente generadas de ésta. La colección de estas estructuras finitamente generadas es numerable pues

$$|[\omega]^{<\omega}| = \omega^{<\omega} = \omega.$$

La última igualdad es una propiedad combinatoria extremadamente fuerte. Se sabe que ω es un cardinal regular, limite y fuerte (estas definiciones se pueden consultar en [15]). A los cardinales no numerables que cumplen con estas propiedades se les llama fuertemente inaccesibles y no es posible demostrar su existencia desde **ZFC**. Esta relación lógica no será una limitante, pues nosotros queremos examinar cómo las propiedades combinatorias de algunos cardinales son aquellas que influyen para que sea posible la construcción de espacios universales de otros pesos topológicos.

Lema 2.18. *Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces*

$$|S_X(A)| \leqslant 2^{\,\omega|A|}.$$

Prueba. Sean $\mathrm{E}(A)$ el conjunto de las funciones de Katětov con dominio A, $C(A, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas de A a $\mathbb{R}$ y ${}^{A}\mathbb{R}$ el conjunto de todas las funciones de A a $\mathbb{R}$.

Por definición de tipo se tiene que $|S_X(A)| = |E(A)|$. Por otro lado tenemos que

$$E(A) \subseteq C(A, \mathbb{R}) \subseteq {}^{A}\mathbb{R}.$$

Por lo que $|E(A)| \leqslant 2^{\ \omega|A|}$. De las dos expresiones anteriores se tiene lo deseado. †

Para lograr nuestro objetivo brindaremos algunas definiciones sobre cardinales. Con CAR denotamos la clase de los cardinales infinitos.

Definición 2.19. *Un cardinal κ se llama singular si existe $\lambda \in CAR$ tal que $\lambda < \kappa$, y existe una sucesión $(\mu_\xi)_{\xi<\lambda}$ en κ tal que*

$$Sup\{\mu_\xi : \xi < \lambda\} = \kappa.$$

Los cardinales regulares son aquellos que no son singulares.

Definición 2.20. *Sean $\lambda, \kappa \in CAR$. Definimos*

$$\kappa^{<\lambda} = Sup\{\kappa^\xi : \xi < \lambda\}.$$

Con esto podemos iniciar la construcción de otros espacios universales.

Lema 2.21. *Sea $\lambda \in CAR$ tal que $\omega < \lambda$ y $\lambda = \lambda^{<\lambda}$. Si X es un espacio métrico tal que $|X| \leqslant \lambda$, entonces existe una extensión Y de X tal que $|Y| \leqslant \lambda$ y Y realiza los tipos con parámetros en subconjuntos de X de tamaño menor que λ.*

Prueba. Sea X como en las hipótesis. Por el Lema 2.18, se tiene que

$$|S_X(A)| \leqslant 2^{\ \omega|A|}$$

para todo $A \in [X]^{<\lambda}$. Como $|A| < \lambda$ y λ no es numerable, tenemos que $|S_X(A)| \leqslant \lambda$. Por lo que

$$|\bigcup_{A\in[X]^{<\lambda}} S_X(A)| = \sum_{A\in[X]^{<\lambda}} \lambda \leqslant \Big(\sum_{\xi<\lambda} \lambda^\xi\Big)\lambda = \lambda\lambda = \lambda.$$

Así, sea $(p_\xi)_{\xi<\lambda}$ una enumeración de

$$\bigcup_{A\in[X]^{<\lambda}} S_X(A)$$

posiblemente con repeticiones. Haciendo recusión sobre λ definimos la siguiente cadena de espacios:

- $X_0 = X$;
- para todo $\xi < \lambda$ definimos
$$X_{\xi+1} = X_\xi \cup \{x_\xi\}$$
donde x_ξ es un punto que realiza a p_ξ y
- si $\gamma < \lambda$ es límite $X_\gamma = \bigcup_{\vartheta<\gamma} X_\vartheta$.

En los casos limite y 0 los espacios métricos están bien definidos, veamos el caso sucesor. Supongamos definido X_ξ y consideramos también a p_ξ. Supongamos que $A \subseteq X$ es el conjunto de parámetros de p_ξ. Luego tomamos un elemento w tal que p_ξ se realiza en $A \cup \{w\}$. Para terminar consideramos $X_{\xi+1} = (A \cup \{w\}) \oplus_A X_\xi$ que concuerda con $X_{\xi+1} = X_\xi \cup \{w\}$. Con esto se prueba que la cadena está bien definida.

Consideramos $Y = \bigcup_{\xi<\lambda} X_\xi$. Por construcción

$$|Y| \leqslant |X| + \Big| \bigcup_{A \in [X]^{<\lambda}} S_X(A)\Big| \leqslant \lambda + \lambda = \lambda.$$

Por lo que $|Y| \leqslant \lambda$ y cada tipo de X con parámetros en un conjunto cuyo tamaño es menos que λ se realiza en Y. †

Si X es un espacio métrico que cumple con las hipótesis del lema 2.21, su correspondiente Y lo denotaremos con X^*. Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 2.22. *Sea $\lambda \in CAR$. Si λ es regular, $\omega < \lambda$ y $\lambda = \lambda^{<\lambda}$, entonces existe un espacio métrico λ-saturado.*

Prueba. Sea X cualquier espacio métrico de tamaño a lo más λ. Definimos por recursión transfinita para λ, la siguiente cadena: $X_0 = X$; si $\xi < \lambda$

$$X_{\xi+1} = \big(X_\xi\big)^*$$

y para cada límite $\gamma < \lambda$ se define

$$X_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi.$$

Sean $\mathbb{K}$ la unión de la cadena $(X_\xi)_{\xi<\lambda}$, $A \in [\mathbb{K}]^{<\lambda}$ y $p \in S_{\mathbb{K}}(A)$. Como $|A| < \lambda$, λ es regular y

$$A \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} X_\xi,$$

entonces existe $\alpha < \lambda$ tal que $A \subseteq X_\alpha$. Por lo que $p \in S_{X_\alpha}(A)$. Así existe $z \in X_{\alpha+1}$ que realiza a p. Como $X_{\alpha+1} \subseteq \mathbb{K}$, se tiene que $\mathbb{K}$ realiza p. †

Para terminar el tema, fijemos λ como en las hipótesis del teorema. El espacio $\mathbb{K}$ tiene propiedades análogas a las de $\mathbb{U}$. A continuación las enumeramos en la siguiente proposición que presentamos sin prueba, pues el autor del texto considera que son completamente análogas a las expuestas para $\mathbb{U}$.

Proposición 2.23. $\mathbb{K}$ *goza de las siguiente propiedades:*

- $|\mathbb{K}| = \lambda$*;*
- *Cualquier espacio de tamaño a lo más* λ *se encaja isométricamente en* $\mathbb{K}$ *y*
- $\mathbb{K}$ *es* λ*-homogéneo.*

El espacio $\mathbb{U}$ es completo, así fue construido. La completud de $\mathbb{K}$ será consecuencia de la no numerabilidad de λ y de que $\mathbb{K}$ es λ-saturado. La prueba es completamente análoga a la prueba del la completud del espacio en la Proposición 2.17.

Teorema 2.24. $\mathbb{K}$ *es un espacio métrico completo.*

Prueba. Sea $(x_i)_{i<\omega}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. Así $Y = \{x_i : i \in \omega\}$ es un espacio métrico. Sea $\overline{Y}$ su completación. Luego $\overline{Y}$ se encaja en $\mathbb{K}$. Llamemos e al encaje testigo. Por lo tanto la regla $e(x_i) \mapsto x_i$ es un encaje parcial entre subconjuntos numerables de $\mathbb{K}$, al ser éste λ-saturado con λ no numerable, existe $\varphi \in Aut(\mathbb{K})$ que lo extiende. Así si $z \in \overline{Y}$ es el punto de completación de Y, entonces $(x_i)_{i<\omega} \to \varphi(e(z))$. †

Con esto hemos probado que para todos los cardinales regulares κ, que cumplan con $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, existe un espacio universal completo, κ-homogéneo y de tamaño κ.

2.3. El Espacio Métrico Monstruo

Para terminar este capítulo ofreceremos la construcción de un espacio métrico análogo a los modelos monstruo. Para lo cual se deben notar algunas cosas. La primera es que la construcción que se dió de $\mathbb{K}$ es análoga a la construcción de modelos saturados, la cual vamos a extender. La segunda es que Urysohn probó que no existe un espacio métrico que contenga una copia isométrica de cualquier otro, es decir, no existe un universal para $\mathcal{M}$, la clase de los espacios métricos. A continuación ofrecemos una prueba de estos hechos.

Teorema 2.25. *No existe un universal para $\mathcal{M}$.*

Prueba. Supongamos lo contrario. Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico universal para $\mathcal{M}$. Consideremos la clase OR de los ordinales y cada $\alpha \in$ OR con la métrica discreta. Por lo que para todo $\alpha \in$ OR, $\alpha \leqslant X$. Como X es un conjunto tiene un cardinal, a saber λ. Como $2^\lambda \in$ OR, se tiene que $2^\lambda \leqslant X$. Por lo que hay una función inyectiva de 2^λ en λ. Lo que contradice el Teorema de Cantor, pues $|X| = \lambda$. †

En la prueba de este teorema se puede ver que la limitación para la existencia de un espacio universal para $\mathcal{M}$, es que en la definición de espacio se pide que éste esté definido sobre un conjunto. En la matemática de manera cotidiana trabajamos con clases o categorías, solo se tiene mucho cuidado en no tratarlas como conjuntos. En seguida ofrecemos una construcción donde no tomamos en cuenta esta limitante y se define un objeto análogo a $\mathbb{U}$ y a $\mathbb{K}$, cuyo universo es una clase propia.

Lema 2.26. *Si X un espacio métrico, entonces existe un espacio X' que realiza cualquier tipo con parámetros en X.*

Prueba. Consideremos $\bigcup_{A\subseteq X} S_X(A)$. Por lo que

$$\Big|\bigcup_{A\subseteq X} S_X(A)\Big| = \sum_{A\subseteq X} \Big|S_X(A)\Big| \leqslant \sum_{A\subseteq X} 2^{\ \omega|A|} \leqslant \sum_{A\subseteq X} 2^{|X|} \leqslant 2^{|X|}.$$

Así, por recursión sobre $2^{|X|}$ y amalgamando se consigue dicho X'; como en la prueba del Lema 2.21. †

Dado un espacio métrico X, al espacio resultante del Lema 2.26 le denotaremos con X'.

Ahora consideramos cualquier espacio X. Por recursión para OR definimos la siguiente cadena de espacios métricos: $X_0 = X$; si $\beta \in \mathrm{OR}$, entonces $X_{\beta+1} = \left(X_\beta\right)'$. Y para $\gamma \in \mathrm{OR}$ límite, consideramos

$$X_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi.$$

Definimos

$$\mathbb{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{OR}} X_\alpha.$$

Claramente $\mathbb{M}$ no es un conjunto, es una clase propia[1]. Para trabajar con $\mathbb{M}$ hay que tener ciertas precauciones, como emplear solo subclases de él que sí sean conjuntos.

Proposición 2.27. $\mathbb{M}$ *es κ-saturado para todo $\kappa \in CAR$.*

Prueba. Sean $\kappa \in \mathrm{CAR}$, $A \subseteq \mathbb{M}$ de tamaño menor que κ y $p \in S_{\mathbb{M}}(A)$. Así A es un conjunto y como

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathrm{OR}} X_\alpha,$$

existe $\alpha_0 \in \mathrm{OR}$ tal que $A \subseteq X_{\alpha_0}$. Por lo que p se realiza en $\left(X_\alpha\right)'$, por tanto en $\mathbb{M}$. †

Hace falta calcar las pruebas ya expuestas con las precauciones necesarias para ver que cualquier espacio se puede encajar en $\mathbb{M}$ y que si $X, Y \leqslant \mathbb{M}$ son espacios para los cuales existe una isométria $h\colon X \longrightarrow Y$, entonces se puede construir una funcional de $\mathbb{M}$ en sí mismo que trabaja como isometría y extiende a h.

Con esto hemos explotado técnicas modelo-teóricas para la construcción de varios espacios universales, inclusive el monstruo que propiamente hablando no es uno, pero solo difiere de ellos por que su universo no es un conjunto.

[1]En la literatura de teoría de modelos se le puede encontrar como modelo-clase. Una clase propia es una colección que no es un conjunto.

Capítulo 3

El Grupo de isometrías del espacio de Urysohn

En este capítulo estudiaremos el grupo de isometrías del espacio de Urysohn, pues algunas propiedades de este grupo son consecuencia de algunas propiedades que posee la clase $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. En el capítulo 2 de este texto, se ha expuesto una construcción de $\mathbb{U}$ como la completación del límite $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ de la clase $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. Por el Teorema 2.1 sabemos que $\mathbb{U}$ es polaco. Así el grupo de isometrías del espacio de Urysohn, con la topología de la convergencia puntual, es un grupo polaco. Por otro lado, como consecuencia de la Proposición 1.43, en este grupo coinciden la topología de la convergencia puntual y la topología compacto-abierta.

En el capítulo 2, se estableció una relación entre espacios métricos y estructuras elementales. De esta relación se derivó que los encajes isométricos pudiesen ser considerados como encajes entre estructuras y viceversa; análogamente con las isometrías. Así, como conjuntos, $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ y $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$. Los límites de clases de Fraïssé son estructuras numerables, por lo que, sin pérdida de generalidad, se puede considerar a ω como su universo. Por lo tanto, el grupo de automorfismos de un límite de una clase de Fraïssé puede realizarse como un grupo de permutaciones de ω. En este capítulo emplearemos algunas técnicas de la teoría descriptiva de conjuntos. Para ello emplearemos como ambiente a S_ω; el grupo de permutaciones de ω con la topología de la convergencia puntual, donde ω es considerado con la topología discreta. Como ω con la topología discreta[1] es polaco, entonces S_ω

[1]En este trabajo, si no se indica lo contrarío, a ω se le considera con la topología discreta.

es polaco. Tomando en cuenta lo anterior:

Notación 3.1. *Dada $\mathfrak{A} \in V_\tau$ una estructura numerable, con $Aut(\mathfrak{A})$ se denota al grupo $\langle Aut(\mathfrak{A}), \circ, 1_\omega \rangle \leqslant S_\omega$ con la topología de subespacio.*

Notación 3.2. *Si X es un espacio métrico, entonces $Iso(X)$ denota al grupo $\langle Iso(X), \circ, 1_X \rangle$ con la topología heredada de $C(X, X)$ con la topología punto-abierta.*

3.1. Grupos extremadamente promediables

En esta sección estudiaremos los subgrupos de S_ω que tienen la propiedad del punto fijo para compactos. A estos grupos se les llama extremadamente promediables. Como es de esperarse, $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_0)$ tendrá esta propiedad y para deducirlo haremos uso de la teoría estructural de Ramsey sobre la clase de los espacios métricos finitos racionales ordenados. Se tratará de ir directamente a establecer la relación entre la teoría estructural de Ramsey y la extrema promediabilidad.

Proposición 3.3. *Sea G un grupo topológico y X un G-espacio compacto y de Hausdorff. Así los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Existe $x \in X$ tal que para todo $g \in G$ se tiene que $gx = x$.*
2. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, para toda $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $F \in [G]^{<\omega}$ no vacío hay $x \in X$ tal que para cada $h \in F$ se tiene que*

$$\| f(x) - f(hx) \| \leqslant \varepsilon.$$

Prueba. Una implicación es trivial, veamos la otra. Para cada $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ y $F \in [G]^{<\omega}$ no vacío se define

$$A(f, \varepsilon, F) = \{x \in X : \forall h \in F \; \| f(x) - f(hx) \| \leqslant \varepsilon\} \subseteq X.$$

Cada $A(f, \varepsilon, F)$ es un conjunto cerrado y por hipótesis no es vacío. Por lo tanto

$$\bigcap \{A(f, \varepsilon, F) : f \in C(X, \mathbb{R}^n), \varepsilon > 0 \text{ y } F \in [G]^\omega \setminus \{\varnothing\}\} \neq \varnothing,$$

si la familia de los $A(f, \varepsilon F)$ tiene la propiedad de intersección finita. En efecto, sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Para cada $0 < i < k+1$ se toman $n_i \in \mathbb{Z}^+$, $f_i \in C(X, \mathbb{R}^n_i)$,

$\varepsilon_i > 0$ y $F_i \in [G]^{<\omega}$. Definimos $F = F_1 \cup \ldots \cup F_k$, $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ y $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$ dada por $f = (f_1, \ldots, f_k)$. Así, de la hipótesis, el conjunto $A(f, \varepsilon, F)$ no es vacío y además

$$A(f, \varepsilon, F) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A(f_i, \varepsilon_i, F_i),$$

de lo cual

$$\bigcap \big\{A(f, \varepsilon, F) : f, \varepsilon > 0 \text{ y } F \in [G]^{\omega}\big\} \neq \varnothing.$$

Sea

$$x \in \bigcap \big\{A(f, \varepsilon, F) : f, \varepsilon > 0 \text{ y } F \in [G]^{\omega}\big\}.$$

Afirmamos que x es un punto fijo de G. Supongamos que no, es decir, supongamos que hay $g_0 \in G$ tal que $gx \neq x$, por lo que hay una función de Urysohn $h\colon X \longrightarrow [0, 1]$ que los separa. Por lo tanto $x \notin A(h, \frac{1}{4}, \{g_0\})$, lo que contradice la elección de x. †

Con la herramienta anterior podemos empezar a trabajar con la extrema promediabilidad, para lo cual brindaremos la definición formal y caracterizaremos a los subgrupos de S_ω que son extremadamente promediables. Con el fin de establecer un lenguaje en común hacemos la siguiente notación.

Notación 3.4. *Sea G un grupo y $H \subseteq G$. Entonces*

- $$^{G}/_{H} = \big\{gH : g \in G\big\} \text{ y}$$

- $$_{H}\backslash^{G} = \big\{Hg : g \in G\big\}.$$

Definición 3.5. *Sea G un grupo topológico.*

1. *Un G-espacio X se llama G-flujo si X es compacto y Hausdorff.*

2. *El grupo G se llama extremadamente promediable si para cada G-flujo X, hay $x \in X$ tal que para todo $g \in G$, $gx = x$. También se dice que G tiene la propiedad del punto fijo sobre compactos.*

La Proposición 3.3 brinda un método para verificar la propiedad del punto fijo. En el siguiente teorema lo emplearemos.

Teorema 3.6. *Sea $G \leqslant S_\omega$ cerrado. Así las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *el grupo G es extremadamente promediable y*
- *para todos $H \leqslant G$ abierto, $k > 1$, $q : {}^{G}/_{H} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ una coloración y $A \subseteq {}^{G}/_{H}$, entonces existe $g \in G$ tal que gA es monocromático.*

Prueba. Comencemos con la suficiencia. Consideramos

$$Z = {}^{G/H}\{1, \ldots, k\},$$

el espacio de todas las k-coloraciones de ${}^{G}/_{H}$. Este es un espacio compacto, por lo que podemos hacer de Z un G-flujo considerando la acción natural; esto es, para cada $p \in Z$ y cualesquiera $g, g_1 \in G$, se tiene que

$$(gp)(g_1H) = p(g^{-1}g_1H).$$

Tomemos $k \geqslant 2$ y

$$q\colon {}^{G}/_{H} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}.$$

Así $\overline{G(q)}$ es un subconjunto compacto e invariante de Z. Luego $\overline{G(q)}$ es un G-flujo. Al ser G extremadamente promediable, existe $c \in \overline{G(q)}$ tal que para todo $g, g' \in G$ tenemos que $c(g'H) = (gc)(g'H) = c(g^{-1}g'H)$. Por esta razón c es constante.

Sea $A \subseteq {}^{G}/_{H}$ finito y no vacio. Como $c \in \overline{G(q)}$, entonces existe $g_0 \in G$ tal que

$$g_0^{-1}c \restriction_A = q \restriction_A .$$

Así q es constante en $g_0^{-1}A$.

Para la necesidad emplearemos la Proposición 3.3. Sea X un G-flujo. Consideramos así f,ε y F como en la Proposición 3.3. Como $G \leqslant S_\omega$, los estabilizadores de conjuntos finitos de ω son una base fundamental para 1_G [1]. Por lo que hay $V = G_K$ con $K \subseteq \omega$ finito, tal que para todo $x \in X$ y todo $v \in V$ se tiene que $\| f(x) - f(vx) \| < \frac{\varepsilon}{4}$. Como f es continua, $f[X]$ es compacto. Por lo que se pueden encontrar $A_1, \ldots, A_k \subseteq f[X]$ tales que

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i = f[X] \text{ y } diam(A_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si fijamos $w \in X$, con la división de $f[X]$ podemos dividir a G definiendo $U_i = \{g \in G : f(gw) \in A_i\}$. Luego para cada $g \in G$ hay $i \leqslant k$ tal que $Vg \subseteq VU_i$. Por lo que podemos definir $q\colon {}_V\backslash^G \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ de tal manera que para cada $1 \leqslant i \leqslant k$, $q(Vg) = i$ si $Vg \subseteq VU_i$. Consideremos

$$A = \{Vh : h \in F \cup \{1_G\}\}.$$

Luego tomamos a ${}_V\backslash^G$ como G-espacio, donde la acción queda definida de la siguiente manera: para todos $g, h \in G$, $g * Vh = Vhg^{-1}$. Por hipótesis hay $g \in G$ tal que gA es monocromático. Por lo que hay $j \leqslant k$ tal que $q(Vhg^{-1}) = j$ para cada $h \in F \cup \{1_G\}$.

Afirmamos que $g^{-1}w$ es el elemento que verifica que para cada $h \in F$, $\| f(g^{-1}w) - f(hg^{-1}w) \| \leqslant \varepsilon$. En efecto, sea $x = g^{-1}w$. Como $A ={}_V \backslash^{(}F \cup \{1_G\})$, entonces

$$gA = \{Vhg^{-1} : h \in F \cup \{1_G\}\}.$$

Como $q(Vhg^{-1}) = j$ para cada $h \in F \cup \{1_G\}$, entonces se tiene que

$$\bigcup\{Vhg^{-1} : h \in F \cup \{1_G\}\} \subseteq VU_j.$$

Así $Vhg^{-1} \subset VU_j$. Luego para cada $h \in F \cup \{1_G\}$ y cada $v \in V$ existen $u \in U_j$ y $v' \in V$ tales que $vhg^{-1} = v'u$. Por lo que hay $v_1 \in V$ tal que $v_1hg^{-1} \in U_j$. Así $f(v_1hx) \in A_j$ y por nuestra elección de V, se tiene que

$$|f(hx) - f(v_1hx)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $Vg^{-1} \in A$, también $|f(x) - f(v''x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Por lo que

$$f(x), f(hx) \in \bigcup_{a \in A_j} B(a, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Por la desigualdad del triangulo se concluye lo deseado. †

La prueba anterior es útil, pues caracteriza la extrema promediabilidad de un grupo G con propiedades de coloración sobre algunos conjuntos de clases laterales. Por otro lado si $G \leqslant S_\omega$ es cerrado y extremadamente promediable, entonces $G \curvearrowright 2^\omega$ con la acción natural. Además pensando en la colección de ordenes lineales de ω, $\mathrm{LO} \subseteq 2^{\omega\times\omega}$, no es difícil ver que ésta puede considerarse como subespacio del espacio de Cantor. Por lo tanto $G \curvearrowright \mathrm{LO}$. Así hay un orden que G fija en ω.

Notación 3.7. *Sean X y Y conjuntos y $C \subseteq {}^XY$. Para cada $x \in X$ y $W \subseteq Y$ tomamos*

$$M_C(x, W) = \{f \in C : f(x) \in W\}.$$

Si no hay lugar a confusión respecto al ambiente C, simplemente escribimos $M(x, W)$.

Para comenzar a emplear la teoría estructural de Ramsey, observemos que si $\mathfrak{A}$ es una estructura numerable, entonces podemos considerar a su universo como ω. Por lo que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) \leqslant S_\omega$. Además, afirmamos que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ es cerrado en S_ω. En efecto, si $g \in S_\omega \backslash \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, entonces g o no preserva una relación, o no respeta una función o toma un valor distinto a la interpretación de alguna constante, para alguna constante. En esta prueba solo se muestra el caso donde g no preserva alguna relación, los otros casos son análogos.

Sea $R \in \tau$ una relación que no sea preservada por g. Por lo tanto existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$$

y

$$(g(a_1), \ldots, g(a_n)) \notin R^{\mathfrak{A}}.$$

Por lo que

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n} M(a_i, \{g(a_i)\}) \subseteq S_\omega \backslash \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}).$$

Ahora veremos que la conversa se da de una manera excelente.

Lema 3.8. *Para cada $G \leqslant S_\omega$ existe un tipo de semejanza numerable τ y $\mathfrak{A}_G \in V_\tau$ una estructura de Fraïssé tales que $\overline{G} = Aut(\mathfrak{A}_G)$.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene la acción natural $G \curvearrowright \omega^n$ definida como sigue: para cada $g \in G$ y cada $x_1, \ldots, x_n \in \omega^n$,

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (gx_1, \ldots, gx_n).$$

Hacemos $\tau = \{R_{o,n}\}_{o \in \omega^n/_G}^{n \in \mathbb{Z}^+}$. Tomamos $\mathfrak{A}_G = \langle \omega, \{R_{o,n}^{\mathfrak{A}_G}\} \rangle$, donde

$$R_{o,n}^{\mathfrak{A}_G} = o \in {}^{\omega^n}/_G.$$

De lo anterior $G \leqslant \overline{G} \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_G)$. Consideremos $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_G)$. Si $a \in \omega$, entonces $h \in M(a, \{h(a)\})$. Así

$$a \in R_{o,1}^{\mathfrak{A}_G} \Leftrightarrow h(a) \in R_{o,1}^{\mathfrak{A}_G}.$$

De lo cual existe $g \in G$ tal que $ga = h(a)$, luego $g \in M(a, \{h(a)\})$. Así $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_G) \subseteq \overline{G}$.

Para terminar afirmamos que $\mathfrak{A}_G$ es ω-homogénea. En efecto, sean

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \leqslant \mathfrak{A}_G$$

finitas e isomorfas. Llamamos

$$h \colon B_1 \longrightarrow B_2$$

al isomorfismo que verifica la isomorfía entre B_1 y B_2. Luego si escribimos $B_1 = \{b_1, \ldots, b_n\}$, entonces $B_2 = \{h(b_1), \ldots, h(b_n)\}$. Por lo que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ y existe $o \in {}^{\omega^n}/_G$ tales que $(b_1, \ldots, b_n) \in o$.

Ahora,

$$(b_1, \ldots, b_n) \in o \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) \in R_{o,n}^{\mathfrak{A}_G}$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) \in R_{o,n}^{\mathfrak{B}_1} \Leftrightarrow (h(b_1), \ldots, h(b_n)) \in R_{o,n}^{\mathfrak{B}_2}$$

$$\Leftrightarrow (h(b_1), \ldots, h(b_n)) \in R_{o,n}^{\mathfrak{A}_G} \Leftrightarrow (h(b_1), \ldots, h(b_n)) \in o.$$

por lo tanto existe $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_G)$ que extiende a h.

Como $\mathfrak{A}_G$ es relacional, entonces es localmente finita; hemos tomado $|\mathfrak{A}_G| = \omega$, por lo tanto $\mathfrak{A}_G$ es numerable y ya está probado que $\mathfrak{A}_G$ es ω-homogénea. Así $\mathfrak{A}_G$ es una estructura relacional. †

Corolario 3.9. *Sea $G \leqslant S_\omega$ cerrado. Entonces existe un tipo de semejanza τ y una estructura numerable $\mathfrak{A}_G \in V_\tau$ tales que*

$$Aut(\mathfrak{A}_G) = G.$$

Definición 3.10. *Una estructura $\mathfrak{A} \in V_\tau$ se llama ordenada si hay $< \in \tau$ tal que la $\{<\}$-estructura $\langle A, <^{\mathfrak{A}} \rangle \in COTO$.*

Ahora presentamos los teoremas más importante de esta sección.

Teorema 3.11 (Kechris-Pestov-Todorcevic)**.** *Sea $G \leqslant S_\omega$ cerrado. Si G es extremadamente promediable, entonces existe τ un tipo de semejanza y existe $\mathfrak{F} \in V_\tau$ ordenada tal que $Aut(\mathfrak{F}) = G$, cada estructura en $\mathcal{E}(\mathfrak{F})$ es rígida y $\mathcal{E}(\mathfrak{F})$ tiene la propiedad de Ramsey.*

Prueba. Definimos
$$\tau' = \left\{R_{o,n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^+}^{o\in\omega^n/G}.$$
Por la prueba del Corolario 3.9, sabemos que hay una estructura de Fraïssé $\mathfrak{A}_G \in V_{\tau'}$ tal que
$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_G) = G.$$
Como G es extremadamente promediable, entonces G fija un orden $\mathcal{O}$ sobre ω.

Definimos
$$\tau = \tau' \cup \{\prec\}.$$
Ahora consideramos $\mathfrak{F} \in V_\tau$ definida como sigue:

1. $|\mathfrak{F}| = \omega$;
2. para cada $R_{o,n} \in \tau'$,
$$R_{o,n}^{\mathfrak{F}} = R_{o,n}^{\mathfrak{A}_G} \text{ y}$$
3. $\prec^{\mathfrak{F}} = \mathcal{O}$.

Como $\prec^{\mathfrak{F}}$ es un punto fijo de G, entonces
$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_G) = G.$$

Sea $\mathcal{K} = \mathcal{E}(\mathfrak{F})$. Las estructuras en $\mathcal{K}$ son rígidas, ya que son finitas y ordenadas. Veamos que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de Ramsey. Por el Teorema 1.40 basta probar que para todo $2 \leqslant k$ y para cualesquiera $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, se tiene que $\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{B})_k^{\mathfrak{A}}$.

Sean $k \geqslant 2$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$. Como $\mathfrak{A}$ es rígida entonces se puede identificar $\binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}$ con ${}^{G}/_{G_A}$. Tomamos una k-coloración
$$q\colon \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}.$$
Por lo que q induce una k-coloración
$$q'\colon {}^{G}/_{G_A} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}.$$
Sea $E' = \binom{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$. Por lo tanto E' es finito y hay su correspondiente $E \subseteq {}^{G}/_{G_A}$. Dado que G es extremadamente promediable y G_A es un subgrupo abierto

de G, entonces existe $g \in G$ tal que gE es q'-monocromático. Luego $g\binom{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ es q-monocromático. Pero $g\binom{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \binom{g\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, por lo que $g\mathfrak{B}$ es la estructura buscada. Como $\mathcal{K}$ es un esqueleto, entonces tiene HP una clase de Ramsey.

†

Teorema 3.12 (Kechris-Pestov-Todorcevic)**.** *Sea $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de Fraïssé con límite $\mathfrak{F}$. Si $\mathcal{K}$ es de Ramsey y $\mathfrak{F}$ ordenada, entonces Aut($\mathfrak{F}$) es extremadamente promediable.*

Prueba. Nombremos $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$. Notemos que al ser $\mathfrak{F}$ ordenada, las estructuras en $\mathcal{K}$ son rígidas. Por otro lado $G \leqslant S_\omega$, por lo que para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$, G_F es un subgrupo abierto de G. De lo cual

$$\left\{G_D \leqslant G : D \subseteq \omega \ \ \& \ \ D \text{ es el universo de una subestructura finita de } \mathfrak{F}\right\}$$

es una base fundamental para la identidad. Así basta verificar con ellos las propiedades de coloración.

Sea $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{F}$ finita, $k \geqslant 2$,

$$q : {}^{G}/_{G_A} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

y $E \subseteq {}^{G}/_{G_A}$ finito. Como en la prueba del Teorema 3.11, ${}^{G}/_{G_A}$ se puede identificar con $\binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}$. Lo cual induce una k-coloración

$$q' : \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

Definimos

$$\mathfrak{B} = \langle \cup\{gA : gG_A \in E\}\rangle_{\mathfrak{F}}.$$

Así $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$. Como $\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{B})^{\mathfrak{A}}_k$, entonces hay $\mathfrak{B}_0 \in \binom{\mathfrak{F}}{\mathfrak{B}}$ tal que $\binom{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{A}}$ es monocromático para q'. Sea h el isomorfismo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}_0$. Como $\mathfrak{F}$ es ω-homogénea, existe $g \in G$ tal que $gB = B_0$. Por lo que $\{gA_0 : \mathfrak{A}_0 \in \binom{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\}$ es monocromático para q'. Por lo tanto gE es monocromático para q. †

Corolario 3.13. *Sea $\mathfrak{F}$ una estructura de Fraïssé ordenada. Si $\mathcal{K}$ es el esqueleto de $\mathfrak{F}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *Aut($\mathfrak{F}$) es extremadamente promediable*
- *$\mathcal{K}$ es de Ramsey*

Con lo cual tenemos un resultado inmediato.

Teorema 3.14 (Pestov). *El grupo Aut*$(\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle)$ *es extremadamente promediable.*

Prueba. Sabemos que $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ es el limite de Fraïssé de COTOFIN y una estructura ordenada. Por la Proposición 1.36 sabemos que COTOFIN es de Ramsey. Por el Corolario 3.13 tenemos que $\mathrm{Aut}(\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle)$ es extremadamente promediable. †

Ahora tenemos un buen ejemplo de la extrema promediabilidad, pues en el se refleja la importancia del orden en la estructura. Sabemos que ω es el límite de Fraïsse de $\mathrm{FIN} - \{\varnothing\}$ y que ésta es una clase de Ramsey. Pero S_ω no es extremadamente promediable, puesto que ya hemos notado que fijar un orden en ω es necesario para ésto. Lo cual no ocurre, basta tomar $\mathcal{O}$ una relación de orden para ω: Sean $a, b \in \omega$ y sin perdida de generalidad suponemos que $(a, b) \in \mathcal{O}$. Por lo tanto cualquier $g \in S_\omega$ que extienda al ciclo $a \mapsto b$ y $b \mapsto a$ sirve para probar que $S_\omega(\mathcal{O})$ tiene más de un elemento.

3.2. El grupo de isometrías del espacio de Urysohn es extremadamente promediable

Nuestro objetivo es probar que $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ con la topología de la convergencia puntual es extremadamente promediable. Suena tentador afirmar que lo es pues $\mathbb{U}$ ha sido construido a partir de un límite de Fraïssé y $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_\mathbb{Q})$ se puede encajar en $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, pero debemos recordar que en la teoría que hemos desarrollado todo se ha manejado para subgrupos cerrados de S_ω, donde ω tiene la topología discreta, por lo que debemos crear enlaces y verificar algunas cosas. En lo que sigue presentaremos los resultados para obtener nuestro objetivo.

Definición 3.15. *Por* $\mathcal{M}_S^<$ *denotamos a la clase de lo espacios métricos finitos ordenados con distancias en* S*.*

Ya hemos probado que $\mathcal{M}_\mathbb{Q}$ es una clase de Fraïssé. Para ver el caso de $\mathcal{M}_\mathbb{Q}^<$ basta agregar algunas observaciones.

Teorema 3.16. $\mathcal{M}_\mathbb{Q}^<$ *es una clase de Fraïssé.*

Prueba. Para esta prueba emplearemos que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ y COTOFIN son clases de Fraïssé.

Como el tipo de semejanza que usamos para la clase es relacional, entonces $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ tiene la HP. Pues dados cualquier $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ y cualquier $X \subseteq A$, se tiene que X es el universo de un espacio métrico finito ordenado y racional.

Como $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ es una clase de Fraïsse, entonces

$$\left|\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}/_{\cong}\right| \leqslant \omega.$$

Así, dado un conjunto X con n elementos hay a lo sumo ω espacios métricos con universo X. Sea $(\mathfrak{A}_i)_{i<\omega}$ una enumeración de todos ellos, posiblemente con repeticiones. También sabemos que COTOFIN es una clase de Fraïsse. Así dado un conjunto Y con n elementos, hay a lo sumo ω ordenes lineales sobre Y. Por lo tanto, si consideramos un espacio $\mathfrak{A}_i$, a éste se le puede dotar a lo más de ω ordenes lineales sobre $A_i = X$. Luego para cada $m < \omega$ hay a lo sumo $\omega \cdot \omega = \omega$ espacios métricos finitos ordenados y racionales sobre un conjunto de tamaño m. Así, la cantidad de clases de isomorfía en $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es contable.

Dada $\mathfrak{B} \in$ COTOFIN, a B se le puede equipar con la métrica discreta. Como COTOFIN es de Fraïssé, entonces tiene estructuras arbitrariamente grandes. Así $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ tiene estructuras arbitrariamente grandes.

Se probará que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ tiene JEP. Considérense $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$. Ahora se toman $\langle A, <^{\mathfrak{A}}\rangle, \langle B, <^{\mathfrak{B}}\rangle \in$ COTOFIN, las estructuras resultantes de retirar de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ la métrica. Como COTOFIN es una clase de Fraïsse, existe

$$\mathfrak{C}' = \langle C, <^{\mathfrak{C}'}\rangle \in \text{COTOFIN}$$

y existen encajes

$$f_1 \colon \langle A, <^{\mathfrak{A}}\rangle \longrightarrow \mathfrak{C}' \text{ y}$$
$$f_2 \colon \langle B, <^{\mathfrak{B}}\rangle \longrightarrow \mathfrak{C}'.$$

Por lo que sin perdida de generalidad podemos suponer que $f_1[A] \cup f_2[B] = C$. Ahora definimos una métrica d_C sobre C de la siguiente forma:

1. para cada $a_1, a_2 \in A$, $d_C(f_1(a_1), f_1(a_2)) = d_A(a_1, a_2)$;

2. si $b_1, b_2 \in B$, entonces $d_C(f_2(b_1), f_2(b_2)) = d_B(b_1, b_2)$ y

3. para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$,

$$d_C(f_1(a), f_2(b)) = \max d_A[A \times A] + \max d_B[B \times B].$$

Sea $\mathfrak{C}$ el espacio métrico que resulta de equipar a $\mathfrak{C}'$ con d_C. Así $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$. Por construcción f_1 y f_2 son encajes. En efecto, f_1 y f_2 ya han sido tomados encajes de ordenes. Por la manera en la que se definió la métrica en C también son encajes isométricos. Por lo que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ tiene JEP.

La prueba de que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ tiene AP es completamente análoga a la prueba de la JEP. De tomar tres estructuras con sus encajes respectivos en $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$, podemos solo considerar su parte ordenada, por ser clase de Fraïsse COTOFIN éstos tendrán una amalgama. A la cual se le da la métrica de forma idéntica que en la prueba de la Proposición 2.2.

Por lo tanto $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es una clase de Fraïssé. †

Denotamos con $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}$ al límite de Fraïsse de la clase $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$.

Lema 3.17. *$Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}) \leqslant Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ y $Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<})$ es denso en $Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$.*

Prueba. La parte de que $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}) \leqslant \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ es clara.

Se probará la densidad de $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<})$ en $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$. Sea $V \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ un abierto no vacío. Por lo que existe $g \in V$. Luego existe $n \in \mathbb{Z}^+$ y existen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ tales que

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n} M(a_i, \{b_i\}) \subseteq V \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}).$$

Notemos que $\{(a_i, b_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una isometría entre conjuntos finitos. Además podemos considerar órdenes $<^A$ y $<^B$ para $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ respectivamente, tales que

$$a_1 <^A a_2 <^A \ldots <^A a_n \text{ y } b_1 <^B b_2 <^B \ldots <^B b_n.$$

Por lo que $\{(a_i, b_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ también se puede considerar como morfismo de ordenes.

Como $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es el límite de $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$, entonces

$$\langle \{a_1, \ldots, a_n\}, <^A, \rho \restriction_{\{a_1,\ldots,a_n\} \times \{a_1,\ldots,a_n\}} \rangle \leqslant \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<} \text{ y}$$

$$\langle \{b_1, \ldots, b_n\}, <^B, \rho \restriction_{\{b_1,\ldots,b_n\}\times\{b_1,\ldots,b_n\}} \rangle \leqslant \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}.$$

Como $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es ω-homogénea, existe $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<})$ que lo extiende a $\{(a_i, b_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Por lo tanto

$$h \in \bigcap_{i=1}^{n} M(a_i, \{b_i\}) \subseteq V.$$

Así $V \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<}) \neq \varnothing$, obteniendo lo que buscábamos. †

El Lema 3.17 lo emplearemos más adelante cuando veamos que la extrema promediabilidad se preserva bajo morfismos continuos. El siguiente punto a tratar es que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es una clase de Ramsey, lo cual es un trabajo de Jaroslav Nešětřil [16] [17]. Presentar una prueba autocontenida del resultado resultaría muy largo, en [6] podemos encontrarla. Estas notas se recomiendan ampliamente por la claridad con la que se han expuesto las ideas y la organización de los resultados. Nosotros nos limitaremos a explicar la idea de la prueba.

El trabajo en la teoría estructural del Ramsey se hace sobre clases de estructuras que son un poco distintas a las clases de estructuras de primer orden, pues se les suele imponer propiedades que no se pueden expresar en estos lenguajes. Por lo que también se tienen que definir los morfismos de las clases. Nuestro referente son los espacios métricos. Si $\mathfrak{A}$ es un espacio métrico, sabemos que $R_0^{\mathfrak{A}}$ es la identidad y que es la única relación que la contiene. Para un real positivo r, $R_r^{\mathfrak{A}}$ es irreflexiva y simétrica. Por lo que podemos identificarla con $\{\{a, b\} \subseteq A : d(a, b) = r\}$. Así la propiedad de ser isometría queda determinada por imágenes directas de pares desordenados. Lo que nos muestra que algunas relaciones pueden ser manejadas como conjuntos de n-conjuntos. Se define un sistema relacional de la siguiente manera: dado un conjunto I contable, se considera $\Delta = (\delta_i)_{i \in I}$ una sucesión de enteros positivos, a la que llamaremos *signatura*. Definimos el *sistema relacional* como un par ordenado $\langle A, \mathcal{S} \rangle$ donde A es un conjunto finito no vacío linealmente ordenado y $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_i : i \in I\}$ tal que para cada $i \in I$, $\mathcal{S}_i \subseteq [A]^{\delta_i}$. Llamamos $Rel(\Delta)$ a la clase de sistemas relacionales con signatura Δ y Rel la clase de todas los sistemas relacionales.

Teorema 3.18 (Nešětřil [6])**.** *$Rel(\Delta)$ es de Ramsey.*

A pesar de que podemos tomar I un conjunto numerable de reales no negativos, no todos los sistemas relacionales son espacios métricos, pues estos no distinguen la desigualdad triangular necesariamente. Para ir aproximando el concepto de espacio métrico se emplea una función que a cada arista en un sistema relacional le asigne un real positivo. Sean d y D dos reales positivos tales que $d < D$. Así $Rel(d, D)$ es una subclase de Rel donde $\delta_i = 2$ e $I \subseteq [d, D]$ contable. Un morfismo f, además de preservar el orden, también debe preservar el real asignado a cada arista; es decir, $\{a, b\} \in \mathcal{S}_i$ si y solo si $\{f(a), f(b)\} \in \mathcal{S}_i$. Los objetos de $Rel(d, D)$ se pueden considerar como estructuras relacionales, donde todas las relaciones son de aridad 2 y simétricas.

Teorema 3.19 (Nešetřil [6]). *$Rel(d, D)$ es de Ramsey.*

Para garantizar la desigualdad del triangulo, se introduce para cada entero positivo l, la noción de arista l-métrica.

Definición 3.20. *Dado un sistema relacional $\langle X, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$ con $I \subseteq [d, D] \subseteq \mathbb{R}$ contable y $a, b \in X$. La arista $\{a, b\} \in R_i$ se llama l-métrica si para toda trayectoria*

$$a = u_0, u_1, \ldots, u_t = b$$

con $t \leqslant l$ tal que $\{u_k, u_{k+1}\} \in R_{i_k}$ se tiene que $i \leqslant i_1 + \ldots + i_t$.

Así se define $Rel_l(d, D)$ como la subclase de $Rel(d, D)$ donde los sistemas $\langle A, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$ cumplen las siguientes propiedades:

- cada R_i es irreflexiva y simétrica;
- para cada $i, j \in I$, si $i \neq j$ entonces $R_j \cap R_i = \varnothing$ y
- cada arista es l-métrica.

Si en un sistema relacional cada arista es l-métrica para cada l, decimos que la arista es métrica. Con esto tenemos que un sistema donde cada par de puntos están unidos por una arista métrica se puede considerar como un espacio métrico.

No todos los objetos de $Rel_l(d, D)$ son espacios métricos. Sin embargo es posible asignarles un espacio métrico bastante conveniente. Dados dos puntos x y y definimos su distancia como el mínimo de los valores que se obtienen sumando los pesos de las aristas en una $x - y$ trayectoria. Así los valores de esta métrica están en el submonoide generado por $I \subset \mathbb{R}$. Por otro lado, tomando el mínimo entre esta métrica y D podemos asegurar la existencia de una métrica que toma valores en los elementos del submonoide generado por I que están en el intervalo $[d, D]$.

Teorema 3.21 (Nešetřil)**.** *Sean $l \in \mathbb{Z}^+$ y $d, D \in \mathbb{R}^+$ tales que $d < D$. Si $\mathfrak{A} \in Rel(d, D)$ es un espació métricos, entonces para cada $\mathfrak{B} \in Rel_l(d, D)$ tal que $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ existe $\mathfrak{C} \in Rel_l(d, D)$ donde*

$$\mathfrak{C} \longrightarrow (\mathfrak{B})_2^{\mathfrak{A}} \text{ en la clase } Rel_l(d, D).$$

El resultado anterior es el que nos lleva a verificar que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es de Ramsey.

Teorema 3.22 (Nešetřil)**.** *$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{<}$ es una clase de Ramsey.*

Prueba. Sean $\langle X, \rho_X\rangle, \langle Y, \rho_Y\rangle \in \mathcal{M}^<$ tales que $\langle X, \rho_X\rangle \leqslant \langle Y, \rho_Y\rangle$. Consideramos d el mínimo valor positivo de ρ_Y y D el valor máximo de ésta. Sea $l \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{D}{d} < l$. Consideramos los sistemas relacionales asociados, que en nuestro caso se pueden identificar con estructuras elementales, $\mathfrak{A}$ para X y $\mathfrak{B}$ para Y. Así $\mathfrak{A} \in Rel(d, D)$ con $\mathfrak{A}$ espacio métrico y $\mathfrak{B} \in Rel_l(d, D)$, pues al ser espacio métrico sus aristas son métricas y por lo tanto l-métricas. También se tiene que $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ pues $(X, \rho_X) \leqslant (Y, \rho_Y)$. Luego por el Teorema 3.21, existen $J \subseteq [d, D]$ y $\langle C, \{R_j\}_{j\in J}\mathfrak{C} \in Rel_l(d, D)$ tales que

$$\mathfrak{C} \longrightarrow (\mathfrak{B})_2^{\mathfrak{A}} \text{ en la clase } Rel_l(d, D).$$

Definimos una métrica en C de la siguiente forma: si $x, y \in C$, $\rho_C(x, y)$ es el mínimo entre D y el mínimo de los $j_1 + \ldots + j_s$ tales que existe una trayectoria $x = c_0, \ldots, c_s = y$ con $\{x_j, x_{j+1}\} \in R_{j+1}^{\mathfrak{C}}$. Como $\mathfrak{C} \in Rel_l(d, D)$, cada arista es l-métrica. Afirmamos que $\rho_C(x, y) = j$ si y solo si $\{x, y\} \in R_j^{\mathfrak{C}}$. En efecto, la parte solo si es obvia, veamos el si. Sea $x = c_0, \ldots, c_s = y$ una trayectoria. Si $s \leqslant l$, por ser $\{x, y\}$ una arista l-métrica se tiene que

$$j \leqslant j_1 + \ldots + j_s.$$

Si $l \leqslant s$, se tiene que $j_1 + \ldots + j_s > ld > D$, luego $j \leqslant j_1 + \ldots + j_s$.

Con lo anterior si φ es un morfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{C}$ se le puede considerar como una isometría, pues $\rho_A(x, y) = i$ si y solo si $\{x, y\} \in R_i^{\mathfrak{A}}$ si y solo si $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in R_i^{\mathfrak{C}}$ si y solo si $\rho_C(\varphi(x), \varphi(y)) = i$. Con lo que

$$\langle C, \rho_C\rangle \longrightarrow (\langle B, \rho_B\rangle)_2^{\langle X, \rho_X\rangle}.$$

†

El Teorema 3.22 es más general de lo que queríamos, pues habla de la clase de los espacios métricos finitos ordenados, la cual es $\mathcal{E}(\mathbb{U}^{<})$. Por otro lado, para la estructura $\mathfrak{C}$ también se ha probado que $\rho_C(x,y) = j$ si y solo si $\{x,y\} \in R_j^{\mathfrak{C}}$. Por lo cual si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ basta tomar $\mathfrak{C}$ como el subespacio métrico racional del espacio cuya existencia garantiza el Teorema 3.22.

Corolario 3.23 (Nešetřil [6])**.** *$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{<}$ es una clase de Ramsey.*

Del Corolario 3.23, la Proposición 3.16 y el Teorema 3.12 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.24. *$Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<})$ es extremadamente promediable.*

Ahora debemos transferir la extrema promediabilidad de $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}^{<})$ a $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$.

Proposición 3.25. *Sean G_1 y G_2 grupos topológicos. Si G_1 es extremadamente promediable y existe un morfismo continuo $h\colon G_1 \longrightarrow G_2$ cuya imagen es densa, entonces G_2 también es extremadamente promediable.*

Prueba. Sea X un G_2-flujo y consideremos la acción $\alpha\colon G_2 \times X \longrightarrow X$. Definimos una acción $\beta\colon G_1 \times X \longrightarrow X$ de la siguiente manera:

$$\forall g \in G_1 \forall x \in X, \beta(g,x) = \alpha(h(g),x).$$

La acción β es continua, pues α y h lo son. Como G_1 es extremadamente promediable, existe un punto fijo $x_0 \in X$. Así para cada $g \in G_1$, se tiene que $\alpha(h(g),x_0) = x_0$ y como $h[G_1]$ es denso en G_2, entonces x_0 también es punto fijo para α. Por lo que G_2 también es extremadamente promediable. †

Del la Proposición 3.25 y del Lema 3.17 se desprende que $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ es extremadamente promediable. Como $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ es denso en $\mathbb{U}$, a cada $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ le corresponde una única extensión $\overline{g} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$. Veamos que esta asignación es continua.

Lema 3.26. *La asignación $g \mapsto \overline{g}$ entre elementos de $Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ y $Aut(\mathbb{U})$ es continua.*

Prueba. Sea $\{g_n\}_{n<\omega} \to g$ una sucesión en $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$. Afirmamos que

$$\{\overline{g_n}\}_{n<\omega} \to \overline{g}.$$

Sea $x \in \mathbb{U}$. Veamos que $\{\overline{g_n}(x)\}_{n<\omega} \to \overline{g}(x)$. Para lo cual se toman $\varepsilon > 0$ y $u \in \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ tal que $\rho(x,u) < \frac{\varepsilon}{4}$. Si $n < \omega$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\rho(\overline{g_n}(x), \overline{g}(x)) \\ &\leqslant \rho(\overline{g_n}(x), \overline{g_n}(u)) + \rho(\overline{g_n}(u), \overline{g}(u)) + \rho(\overline{g}(u), \overline{g}(x)) \\ &= \rho(x,u) + \rho(g_n(u), g(u)) + \rho(u,x). \end{aligned}$$

Como $\{g_n\}_{n<\omega} \to g$ en $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ y $u \in \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$, existe $N \in \omega$ tal que para todo $m > N$ se tiene que $g_m(u) = g(u)$. Luego para todo $m > N$

$$\rho(x,u) + \rho(g_m(u), g(u)) + \rho(u,x) < \varepsilon.$$

†

Lema 3.27. *La asignación $g \mapsto \overline{g}$ entre elementos de $Aut(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ y $Aut(\mathbb{U})$ es un morfismo de grupos.*

Prueba. Sean $g, h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ y $x \in \mathbb{U}$. Por lo tanto hay una sucesión $(u_i)_{i<\omega}$ en $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ tal que $(u_i)_{i<\omega} \to x$. Luego

$$\begin{aligned} \overline{g \circ h}(x) &= \lim_{n\to\infty} (g \circ h)(u_n) = \lim_{n\to\infty} (\overline{g} \circ h)(u_n) \\ &= \overline{g}\big(\lim_{n\to\infty} (h(u))\big) = \big(\overline{g} \circ \overline{h}\big)(x). \end{aligned}$$

†

De la Proposición 3.25, el Lema 3.26 y el Lema 3.27 tenemos que el grupo $[\{\overline{g} : g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})\}]_{\mathrm{Iso}(\mathbb{U})}$ es extremadamente promediable.

Afirmamos que

$$\big[\{\overline{g} : g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})\}\big]_{\mathrm{Iso}(\mathbb{U})} = \mathrm{Iso}(\mathbb{U}).$$

Sea $M(x, B(y,r))$ un abierto de $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$. Tomamos $u_x, u_y \in \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ tales que $\rho(u_x, x), \rho(u_y, y) < \frac{r}{4}$. Como $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ es ω-homogéneo, existe $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ tal que $g(u_x) = u_y$. Veamos que $\overline{g} \in M(x, B(y,r))$. Así

$$\begin{aligned} \rho(\overline{g}(x), y) &\leqslant \rho(\overline{g}(x), \overline{g}(u_x)) + \rho(\overline{g}(u_x), y) \\ &= \rho(x, u_x) + \rho(g(u_x), y) = \rho(x, u_x) + \rho(u_y, y) < r. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{g} \in M(x, B(y,r))$. En suma tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.28. *$Iso(\mathbb{U})$ con la topología de la convergencia puntual es extremadamente promediable.*

3.3. La Propiedad de Hrushovski

Definición 3.29. *Una función p es un isomorfismo parcial de la estructura $\mathfrak{A}$, si existen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$, tales que $p\colon \mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$. Denotaremos por $Part(\mathfrak{A})$ el conjunto de los isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$.*

El matemático Ehud Hrushovski probó que para el caso de las gráficas finitas se tiene esta propiedad; es decir:

Teorema 3.30 (Hrushovski [10])**.** *Para cada gráfica finita G, existe una gráfica finita G' tal que*

1. *$G \leqslant G'$ y*
2. *para cada $p \in Part(G)$ existe $g \in Aut(G')$ tal que $g \restriction_G = p$.*

Cuando una clase de estructuras finitas tiene esta propiedad se denomina *clase de Hrushovski*. El Teorema 3.30 dice que la clase de las gráficas finitas es una clase de Hrushovski. Ya hemos visto en este trabajo que la clase de los espacios métricos finitos racionales tiene varias propiedades combinatorias, esta será una más.

La prueba del Teorema de Hrushovski es de carácter combinatorio y nada trivial, el caso de los espacios métricos tampoco lo es. Nosotros presentaremos la prueba dada por Solecki, la cual emplea el Teorema de Herwing-Lascar.

Definición 3.31. *Sean τ un tipo de semejanza finito y relacional, $F \subseteq V_\tau$ un conjunto finito y $\mathfrak{A} \in V_\tau$. La estructura $\mathfrak{A}$ se llama F libre si no hay un morfismo débil*[2] *de alguna estructura de F en $\mathfrak{A}$.*

Teorema 3.32 (Herwing-Lascar [8])**.** *Sea τ un tipo de semejanza finito y relacional. Sea $F \subseteq V_\tau$ un conjunto finito. Si $\mathfrak{A} \in \tau$ es finita y F-libre, entonces existe una estructura finita $\mathfrak{B} \in V_\tau$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$;*
2. *$\mathfrak{B}$ es F-libre y*
3. *Cualquier isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ se extiende a un automorfismo de $\mathfrak{B}$.*

[2]En la definición de morfismo, para las letras relacionales se pidió que se cumpliera un bicondicional, la debilidad consiste en que solo se pide la suficiencia.

Podemos pensar a F como un conjunto de subobjetos prohibidos. A continuación probaremos el resultado que nos dejara deducir que $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ es una clase de Hrushovski.

Teorema 3.33 (Solecki [20])**.** *La clase de los espacios métricos finitos es una clase de Hrushovski.*

Prueba. Sea $\mathfrak{A}$ un espacio métrico finito. Consideremos

$$D = \{d_A(a, b) : a \neq b \ \ \& \ \ a, b \in A\}.$$

Sea $\tau = \{R_i\}_{i \in D \cup \{0\}}$. Claramente $\mathfrak{A} \in V_\tau$. Ahora se construirá un conjunto finito de estructuras que se usará para aplicar el Teorema de Herwing-Lascar. Definimos una configuración en D como $\alpha = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in D^{n+1}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} r_i < r_0.$$

Dada una configuración α se define la estructura $\mathfrak{C}_\alpha \in V_\tau$ como sigue:

$$C = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\};$$

para R_i con i que no aparece en la configuración α se decreta la relación vacía; si r_{j+1} ocurre en la configuración α, entonces

$$R_{r_{j+1}}^{\mathfrak{C}_\alpha} = \{(z_j, z_{j+1}), (z_{j+1}, z_j)\}$$

y $R_{r_0}^{\mathfrak{C}_\alpha} = \{(z_0, z_n), (z_n, z_0)\}$. Se toma

$$F = \{\mathfrak{C}_\alpha : \alpha \text{ es configuración } \}.$$

Si hubiera un morfismo débil de una estructura de F en $\mathfrak{A}$ se tendría que hay $m + 1$ puntos en A tales que

$$\sum_{i=1}^{m} d_A(w_j, w_{j+1}) < d_A(w_0, w_m).$$

Lo que contradice la desigualdad del triangulo. Por lo tanto $\mathfrak{A}$ es F-libre. Así, por el Teorema de Herwing-Lascar existe una τ-estructura finita $\mathfrak{C}$ que es F-libre y su grupo de automorfismos posee extensiones para los isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$.

Como no hay garantía que $\mathfrak{C}$ sea un espacio métrico, se construira una subestructura de $\mathfrak{C}$ a la que se le pueda dotar de una métrica.

Considérese la gráfica $\mathfrak{C}'$ cuyo conjunto de vértices es C y para cada $x, y \in C$, se tiene que (x, y) es una arista de $\mathfrak{C}'$ si y solo si hay $r \in D$ tal que $(x, y) \in R_r^{\mathfrak{C}}$. Como $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{C}$, podemos identificarla como subestructura. Así, la gráfica inducida por A es completa y por tanto conexa. Sea $\mathfrak{G}'$ la componente conexa de la gráfica $\mathfrak{C}'$ inducida por A. Consideramos $\mathfrak{G}'' = \langle G' \rangle_{\mathfrak{C}}$. Por la elección de $\mathfrak{G}'$ tenemos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}''$. A la estructura $\mathfrak{G}''$ se le dotará de estructura métrica. Si $x, y \in G'$, entonces por conexidad de $\mathfrak{G}'$ existe una trayectoria

$$x = u_0, \ldots, u_n = y$$

en $\mathfrak{G}'$. Además se tiene que para cada $i < n$, $(u_i, u_{i+1}) \in R_{r_i}^{\mathfrak{C}}$. Tomamos en consideración $r_0 + \ldots + r_n$. Así $d_G(x, y)$ será el mínimo de las sumas $r_0 + \ldots + r_n$ corriendo sobre las trayectorias de x a y. Afirmamos que esta regla de correspondencia es una métrica. En efecto, como $D \subseteq \mathbb{R}^+$ se tiene que $d_G(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. Por la simetría de las trayectorias tenemos la simetría de d_G y por considerar la suma mínima de los pesos de las aristas tenemos la desigualdad triangular. Llamaremos $\mathfrak{G}$ al respectivo espacio métrico que resulta de $\mathfrak{G}'$.

Como A induce una gráfica completa tenemos que $d_G \restriction_{A \times A} = d_A$. Veamos que toda isometría parcial de $\mathfrak{A}$ se extiende a una isometría de $\mathfrak{G}$. Sea $\varphi' \in \operatorname{Part}(\mathfrak{A})$. Por el Teorema 3.32, existe $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{C})$ que lo extiende.

Veamos que $\tilde{\varphi}[G] = G$. Si $\tilde{\varphi}(w) \in \tilde{\varphi}[G]$, entonces para todo $a \in A$ hay un camino de w a a. Consideremos $a \in Dom(\varphi')$. Luego existe un camino $w = u_0, \ldots, u_n = a$ donde $(u_i, u_{i+1}) \in R_{r_i}$. Al ser $\tilde{\varphi}$ extensión de φ', tenemos que

$$\tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(u_0), \ldots, \tilde{\varphi}(u_n) = \varphi'(a)$$

es una trayectoria de un elemento de A a $\tilde{\varphi}(w)$. Por lo tanto $\tilde{\varphi}(w) \in G$. Con lo que se concluye que $\tilde{\varphi}[G] \subseteq G$. Como G es finito y $\tilde{\varphi}$ es biyectiva, entonces $\tilde{\varphi}[G] = G$. Si se toma $\varphi = \tilde{\varphi} \restriction_G$, tenemos que $\varphi \in \operatorname{Iso}(\mathfrak{G})$ y φ extiende a φ'. †

Notemos que en la prueba del Teorema 3.33, la métrica d_G toma valores en el submonoide generado por D en $\mathbb{R}$; es decir, las distancias del nuevo espacio métrico se encuentran en el submonoide de $\mathbb{R}$ generado por las distancias del dado. Así se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.34. *$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ es una clase de Hrushovski.*

Veamos qué repercusiones tiene ésto en $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ con un teorema de corte más general.

Teorema 3.35 (Kechris-Rosendal [13])**.** *Si $\mathcal{K} \subseteq V_\tau$ una clase de Fraïssé con límite $\mathfrak{F}$, entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{K}$ es de Hrushovski y*
2. *Existe una cadena*
$$G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant Aut(\mathfrak{F})$$
de subgrupos compactos cuya unión es densa en $Aut(\mathfrak{F})$.

Prueba. Para la suficiencia se construirá primero una cadena de subestructuras finitas de $\mathfrak{F}$.

Sea $(a_m)_{m\in\omega}$ una enumeración del universo de $\mathfrak{F}$. Tomemos $\mathfrak{A}_0 \in \mathcal{K}$ cualquier estructura. Supongamos definida la estructura finitamente generada $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{F}$. Así existe $n_0 \in \omega$ tal que $a_{n_0} \notin A_n$. Como $\mathcal{K}$ es una clase de Hrushovski, existe $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ que verifica la propiedad de extensión de isomorfismos parciales para $\mathfrak{A}_n \cup \{a_{n_0}\}$ tal que $\mathfrak{A}_n \leqslant \mathfrak{B}$. Así por la ω-homogeneidad de $\mathfrak{F}$, tomamos una extension $\mathfrak{A}_{n+1}$ de $\mathfrak{A}_n$ isomorfo a $\mathfrak{B}$. Así se tiene la cadena

$$(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}.$$

Definimos para cada $n < \omega$ el grupo

$$H_n = \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_n).$$

Como $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_{n+1})$ extiende los isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}_n \cup \{a_m\}$, con m como se ha indicado, en particular extiende a los elementos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_n)$. Por lo tanto para cada $n < \omega$,
$$H_n \leqslant H_{n+1}.$$

Veamos ahora que la unión es densa en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$. Sea $V \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$ abierto no vacío. Como $V \neq \emptyset$, entonces hay $g \in V$. Por lo que existe $n \in \mathbb{Z}$ y existen $e_1, \ldots, e_n, b_1, \ldots, b_n \in F$ tales que

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n} M(e_i, \{b_i\}) \subseteq V.$$

Bajo estas consideraciones hay $s < \omega$ tal que $e_1, \ldots, e_n, b_1, \ldots, b_n \in A_s$. Así

$$\{(e_i, b_i) : i \leqslant n\} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{A}_s).$$

De lo cual hay $g' \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_{s+1})$ tal que

$$\{(e_i, b_i) : i \leqslant n\} \subseteq g'.$$

De este hecho se sigue que $g' \in V$; es decir,

$$\bigcup_{n<\omega} H_n \cap V \neq \varnothing.$$

Así $\bigcup_{n<\omega} H_n$ es denso en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$.

Para la necesidad consideramos $(G_n)_{n<\omega}$ como en la hipótesis y $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Como $\mathfrak{F}$ es el límite de Fraïssé de $\mathcal{K}$, entonces $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{F}$. Por lo que $\mathfrak{A}$ se puede considerar como subestructura de $\mathfrak{F}$. Así para cada $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{A})$, se considera

$$V_p = \bigcap_{x \in Dom(p)} M(x, \{p(x)\}).$$

Por lo que V_p es un abierto en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$, pues el dominio de p es finito.

Por la densidad de $\bigcup\{G_n : n < \omega\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$, se tiene que

$$V_p \cap \Big(\bigcup_{n<\omega} G_n\Big) \neq \varnothing.$$

Para cada $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{A})$ consideramos $g_p \in V_p \cap \Big(\bigcup_{n<\omega} G_n\Big)$. Al ser $\mathrm{Part}(\mathfrak{A})$ finito podemos encontrar G_m que contiene a cada g_p. Definimos

$$\mathfrak{B} = \langle G_m(A)\rangle_{\mathfrak{F}}.$$

Como A es finito y G_m compacto, entonces $G_m(A)$ es un compacto de F. Como se esta considerando la topología discreta en F, entonces $G_m(A)$ es finito. Por lo tanto $\mathfrak{B}$ también es finito.

Veamos que B es G_m-invariante. Como $1_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{F})} \in G_m$ claramente $B \subseteq G_m(B)$. Para ver la otra contención se toma $b \in B$. Por la Proposición 1.12 existe $t \in TRM_\tau$ y existen $g_1a_1, \ldots, g_na_n \in G_m(A)$ tales que

$$t^{\mathfrak{F}}(g_1a_1, \ldots, g_na_n) = b.$$

Debido a que cada $g \in G_m$ es un automorfismo de $\mathfrak{F}$ se tiene, por la Proposición 1.13, que para todo $g \in G_m$,

$$g(t^{\mathfrak{F}}(g_1a_1, \ldots, g_na_n)) = t^{\mathfrak{F}}(gg_1a_1, \ldots, gg_na_n) \in |\langle G_m(A)\rangle_{\mathfrak{F}}| = |\mathfrak{B}|.$$

Por lo que $G_m \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$; es decir, $\mathfrak{B}$ es G_m-invariante. Como $\mathfrak{B}$ es finitamente generada en $\mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Como $G_m \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ se tiene que cada isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ tiene una extension en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$. Con lo que se concluye lo deseado. †

Corolario 3.36. *Sea $\mathfrak{R}$ la gráfica random. Si $G = Aut(\mathfrak{R})$, entonces existe una cadena $G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G$ de subgrupos compactos tal que*

$$\bigcup_{n<\omega} G_n \subseteq Aut(\mathfrak{R})$$

es densa.

Prueba. La gráfica random $\mathfrak{R}$ se define como el límite de Fraïssé de la clase de las gráficas finitas, GRAFIN. Por el Teorema 3.30 GRAFIN es de Hrushovski. Por el teorema anterior se tiene la existencia de la cadena de subgrupos de G, cuya unión es densa. †

Para concluir este trabajo, de nuevo hay que transferir las propiedades de $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ a $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$. Recordamos al lector que $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ se está considerando como subgrupo de S_ω y a $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ con la topología dada por la métrica de $\mathbb{U}$.

Teorema 3.37. *Existe una sucesión de $G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots Iso(\mathbb{U})$ numerable de subgrupos compactos cuya unión es densa en $Iso(\mathbb{U})$.*

Prueba. Como $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ es una clase de Hrushovski, entonces existe una cadena numerable $G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ de subgrupos compactos de cuya unión es densa en $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$. Ya se ha visto que cada $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ se extiende a un único $\overline{g} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$. Además esta correspondencia es continua (Lema 3.26) y densa. Por lo que

$$\left\{\overline{g} : g \in \bigcup_{n<\omega} G_n\right\}$$

es densa en $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$. Si se define $H_n = \{\overline{g} : g \in G_n\}$, se tiene que H_n es compacto. Además, para cada $m < \omega$, se tiene que

$$H_n \leqslant H_{n+1} \leqslant \mathrm{Iso}(\mathbb{U}).$$

Con lo que se concluye la prueba. †

Con esto terminamos la exposición de estos resultados que son consecuencia directa del carácter combinatorio y modelo-teórico del espacio de $\mathbb{U}$rysohn.

Bibliografía

[1] H. Becker and A. Kechris, *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*, no. 42 in London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1993.

[2] S. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer-Verlag, 1974.

[3] P. Cameron, *The age of a relational structure*, Discrete Mathematics 95, 95 (1991), pp. 49–67.

[4] F. Casarrubias and Á. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Sociedad Matemática Méxicana, 2012.

[5] S. de Neymet, *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, Sociedad Matemática Méxicana, 2005.

[6] C. Di Prisco, *Ramsey theory for structures: Nesětřil's result on finite metric spaces*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 13 (2006), pp. 115–127.

[7] R. Fraïsse, *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 71 (1954), pp. 363–388.

[8] B. Herwing and D. Lascar, *Extending partial automorphisms and the profinite topology on the free groups*, Transactions of the American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 1985–2021.

[9] W. Hodges, *Model Theory*, no. 42 in Encyclopedia of Mathematics an its Applications, Cambridge University Press, 1993.

[10] E. Hrushovski, *Extending partial isomorphisms of graphs*, Combinatorica 12, 12 (1992), pp. 411–416.

[11] M. Katětov, *On universal metric spaces*, Proc. of the 6th Prague Topological Symposium 1986, VI (1988), pp. 323–330.

[12] A. Kechris, V. Pestov, and S. Todorcevic, *Fraïsse limits, ramsey theory and topological dynamics of automorphism groups*, GAFA, Geometry & functional analysis, 15 (2005), pp. 106–189.

[13] A. Kechris and C. Rosendal, *Turbulence, amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures*, Proceedings of the London Mathematical Society 94, 94 (2007), pp. 302–350.

[14] Kolmogorov and Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, MIR Moscu, 1975.

[15] K. Kunen, *Set Theory An Introduction To Independence Proofs*, vol. 102, North Holland, 1983.

[16] J. Nesětřil, *Metric spaces are ramsey*, European Journal of Combinatorics, 28 (2007), pp. 457–468.

[17] V. Nesětřil, Jaroslav Röld, *Partitions of finite relational and set systems*, Journal of Combinatorial Theory Ser, 22 (1978), pp. 289–312.

[18] V. Pestov, *Dynamics of Infinite-Dimensional Groups: The Ramsey-Dvoretzky-Milman Phenomenon*, vol. 40, American Mathematical Society, 2006.

[19] N. Sauer, *Distance sets of urysohn metric spaces*, Canadian Journal of Mathematics, 65 (2012), pp. 222–240.

[20] S. Solecki, *Extending partial isometries*, Israel Journal of Mathematics, 150 (2005), pp. 315–331.

[21] K. Tent and M. Ziegler, *A Course in Model Theory*, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2012.

[22] P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bulletin Des Sciences Mathématiques, (1927), pp. 43–64 and 74–90.

[23] V. Uspenskij, *On the group of isometries of the urysohn universal metric space*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 31 (1990), pp. 181–182.

[24] M. Ziegler, *On urysohn's universal separable metric space*.