Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

CARACTERIZACIONES DE REFLEXIVIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JUAN CARLOS CAPULTITLA HERNÁNDEZ

TUTORA:

DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS

2017

CD.MX.

1. Datos del alumno
Capultitla
Hernández
Juan Carlos
56 77 23 17
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
413080150

2. Datos del tutor
Dra
Carmen
Martínez Adame
Isais

3. Datos del sinodal 1
Dr
Luis Octavio
Silva
Pereyra

4. Datos del sinodal 2
Dra
María de los Ángeles
Sandoval
Romero

5. Datos del sinodal 3
Dr
Fancisco Javier
Torres
Ayala

6. Datos del sinodal 4
Dr
Carlos
García
Azpeitia

7. Datos del trabajo escrito
Caracterizaciones de Reflexividad
176 p
2017

Agradecimientos

A Sara Efigenia Mendiola Morán, mi novia, prometida, futura esposa y compañera de vida por ser mi máxima inspiración y mi máximo motor así como por su amor y apoyo, buenas vibras y buenos deseos puros, sinceros, eternos, infinitos, incondicionales e inquebrantables infinitamente correspondidos y sin los cuales nada de esto hubiera sido posible. Gracias por estar a mi lado en todo momento, ayudarme a seguir creyendo en mí mismo, por todos los momentos maravillosos, increíbles, geniales e inolvidables que hemos pasado y que nos faltan por pasar juntos y por hacerme infinita e inmensamente feliz.

A mi mamá Araceli Hernández Guerrero, mi papá Salvador Hernández Guerrero, mi tía Graciela Hernández Guerrero y mis abuelos Graciela Guerrero Castillo y Salvador Hernández Guerrero por su enorme cariño infinitamente correspondido, por estar conmigo en todo momento, por tantos momentos y recuerdos increíbles e inolvidables, por sus enseñanzas que siempre recordaré y por apoyarme no sólo en mis estudios sino en todo ámbito posible y por lo cual estaré eterna e infinitamente agradecido.

A mis amigos tanto de mis primeros años escolares como de la facultad: Ricardo Javier Rivera García, David Rivera Flores, Eric Hernández Morales, Mauricio Carvallo Venegas, Paola Mariana Cárdenas Ramírez, Alfie Sergio González Salcedo, Tonatiuh Velázquez Ceciliano, Carlos Emilio Olmos Romero, Andrea Monserrat Ruiz Gómez, Juan Pablo Hernández Preciado, Rodolfo Abraham Sánchez Isidro, David Amaro Alcalá. Gracias por su inmenso apoyo y aprecio totalmente correspondidos y por los momentos agradables que hemos pasado y que seguiremos pasando, los cuales siempre me han sacado una sonrisa y me han ayudado a salir adelante de cualquier situación.

A mi asesora, la Dra. Carmen Martínez Adame Isais, por su enorme paciencia, su excelente disposición y apoyo y sus valiosos consejos que fueron de gran ayuda para culminar exitosamente esta tesis y por los cuales le estaré eternamente agradecido.

Índice general

Introducción

A partir del Teorema de Hahn-Banach y sus corolarios, es sencillo demostrar que si X es un espacio de Banach reflexivo sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces para cualquier funcional lineal y acotada x^* con dominio X existe un vector unitario u en X que satisface la siguiente igualdad:

$$|x^*(u)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)|. \tag{1}$$

Si bien durante muchos años se conjeturó la validez del resultado recíproco, no fue sino hasta 1964 que Robert C. James pudo probar la veracidad de esta conjetura en su trabajo *Characterizations of reflexivity* [4], razón por la cual a dicho resultado se le conoce como el Teorema de James.

El primero en preguntarse si la condición de que para toda funcional lineal y acotada con dominio X exista un vector unitario en X que cumpla la igualdad (1) era suficiente para asegurar la reflexividad de un espacio de Banach X fue Stanislaw Mazur en un artículo publicado en 1933 [10]. Sin embargo, el primer avance hacia una respuesta afirmativa a la pregunta planteada por Mazur fue dado por James en 1950 en [4] cuando mostró que si un espacio de Banach X es separable y tiene una base de Schauder, entonces X es reflexivo siempre y cuando todo espacio de Banach Y isomorfo a X tenga la propiedad de que para cada funcional lineal y acotada con dominio Y exista un vector unitario en Y que satisfaga la igualdad (1). En ese mismo año, Victor Klee, [8], demostró el mismo resultado obtenido por James para un espacio de Banach arbitrario basándose en el teorema que afirma que un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si toda sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados, convexos y acotados de dicho espacio tiene intersección no vacía.

En 1957, en [3] James probó que un espacio de Banach separable X es reflexivo si, dada una funcional lineal y acotada con dominio X, existe un vector unitario en X que cumple la igualdad (1) y, finalmente, siete años después, en el trabajo previamente citado, James mejoró su propio resultado al demostrar que la hipótesis sobre la separabilidad del espacio de Banach era innecesaria. En ese mismo año de 1964, James publicó otros dos trabajos de gran relevancia. En el primero de ellos, titulado *Weakly compact sets*, [6], obtuvo un importante teorema, conocido como el Teorema de compacidad débil de James, en el que caracteriza a todos los subconjuntos débilmente cerrados de un espacio de Banach que son, a su vez, débilmente compactos y a partir del cual se puede demostrar el Teorema de James, mientras que, en el segundo, que lleva por título *Weak compactness and reflexivity*, [5], enlistó una serie de enunciados que caracterizan tanto la reflexividad de un espacio de Banach como la compacidad débil de un subconjunto débilmente cerrado y acotado de un espacio vectorial topológico localmente convexo.

El impacto de los teoremas mostrados por James en 1964 fue ostensible e inmediato ya que, a raíz de su publicación, han surgido una gran cantidad de trabajos en los que se han hallado demostraciones más sencillas de dichos teoremas así como resultados similares o más fuertes, además de algunas aplicaciones de los mismos en distintas ramas de las matemáticas. Entre las pruebas más simples a la expuesta originalmente por James se encuentran aquéllas realizadas por Stephen Simons, [14], John D. Pryce, [13], y por el propio James, [7], en 1972. Como ejemplos de algunos teoremas análogos o más fuertes que se han obtenido a partir de aquéllos probados por James, podemos citar las investigaciones de Daniel Azagra y Robert Deville, [21], sobre la validez de los teoremas de James para cuerpos estrellados y acotados en un espacio de Banach, las caracterizaciones de reflexividad para un espacio de Banach en términos de polinomios n-homogéneos y formas n-lineales simétricas hechas por Mario D. Acosta, Julio Becerra y Manuel Ruiz Galán, [20], y la versión cuantitativa del Teorema de compacidad débil de James obtenida por Bernardo Cascales, Ondřej F.K. Kalenda y Jiří Suprný , [18]. En lo que respecta a las aplicaciones de los teoremas demostrados por James, cabe mencionar que una de las áreas de las matemáticas que tuvo un mayor auge a partir de la publicación de los mismos fue la Teoría de aproximación en espacios de Banach debido a que dichos resultados permiten caracterizar a los conjuntos cerrados, convexos y antiproximinales de un espacio de Banach, además de relacionar la reflexividad de un espacio de Banach con conjuntos proximinales, como lo muestra Stefan Cobzas en su artículo *Antiproximinal sets in Banach spaces*, [2]. Asimismo, tanto los teoremas de James como algunas de sus consecuencias teóricas han sido de utilidad en problemas de matemáticas financieras y problemas variacionales no lineales, de acuerdo con los trabajos de Jaime Orihuela y Ruiz Galán, [19], y de Cascales, Orihuela y Antonio Pérez, [15].

El propósito de esta tesis, la cual está dividida en tres capítulos, es presentar los resultados obtenidos por James en su artículo *Characterizations of reflexivity*, [4], y el Teorema de compacidad débil de James. Por cuestiones de brevedad, se han omitido las pruebas de algunos de los resultados que aquí se enunciarán, las cuales pueden ser consultadas en [9], [11] y [12].

En el primer capítulo, con base en los contenidos de los capítulos 2 y 4 de [9], el capítulo 1 de [11], el capítulo 2 de [1] y el capítulo 1 de [16], se enunciarán las definiciones y proposiciones sobre espacios vectoriales, espacios normados y operadores lineales y acotados que resultarán fundamentales para el desarrollo del presente trabajo. Entre los teoremas que serán de mayor relevancia para probar los resultados que se expondrán en el tercer capítulo de esta tesis, se encuentran el Teorema de Hahn-Banach en sus distintas versiones así como sus diversos corolarios.

El segundo capítulo está dedicado a la introducción de los conceptos de reflexividad, toplogía débil de un espacio normado y toplogía débil* del espacio dual de un espacio normado. Lo anterior se hará tomando como base los resultados expuestos en la sección 4.6 de [9], las secciones 2.4, 2.5 y 2.6 de [11] y la sección 26 de [12]. Cabe destacar que las definiciones de los espacios de sucesiones c_0 y ℓ_p, con $1 \leq p \leq \infty$, la noción de convergencia débil y los teoremas de Banach-Alaoglu y Goldstine serán de especial importancia para probar los teoremas que se enunciarán en el tercer capítulo del presente trabajo.

En el tercer y útlimo capítulo, comenzaremos por mostrar una serie de lemas sobre la reflexividad de un espacio de Banach, además de algunos resultados auxiliares, como el Teorema de Helly, con el fin de caracterizar a aquellos espacios normados que son reflexivos en términos de sucesiones decrecientes de conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados. En la siguiente sección de dicho capítulo, utilizaremos los teoremas de Banach-Alaoglu y de Goldstine para obtener una caracterización de reflexividad para espacios normados por medio de la compacidad débil de la bola unitaria cerrada de dichos espacios. En la tercera sección de este capítulo, se iniciará por caracterizar la propiedad de no reflexividad de un espacio de Banach X en términos de la existencia de cierto tipo de sucesiones en X y en su espacio dual X^*, para después enunciar todos los resultados, junto con sus pruebas originales, propuestos por James en [4]. Finalmente, para concluir esta tesis, presentaremos el Teorema de compacidad débil de James basándonos en la prueba que se puede encontrar del mismo en [11], la cual está, a su vez, inspirada en algunas ideas propuestas por el propio James en [7].

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos y resultados preliminares que servirán como base para el desarrollo de esta tesis, en especial aquéllos referentes a espacios normados, espacios de Banach y operadores lineales y acotados. A menos que se especifique lo contrario, a lo largo de este trabajo X denotará un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y supondremos que $X \neq \{0\}$. Además, si $Y \subseteq X$, $\langle Y \rangle$ denotará el subespacio de X generado por Y. Todas las definiciones y proposiciones presentadas en el presente capítulo pueden ser consultadas en [9] y [11].

1.1. Nociones básicas

Definición 1.1.1. Sea X un espacio vectorial. Si $x \in X$, $\beta \in \mathbb{K}$ y A y B son subconjuntos de X, entonces definimos los conjuntos $x+A$, $x-A$, $A+B$, $A-B$ y βA como:

a) $x \pm A = \{x \pm a : a \in A\}$.

b) $A \pm B = \{a \pm b : a \in A,\ b \in B\}$.

c) $\beta A = \{\beta a : a \in A\}$.

Con base en la definición anterior podemos introducir los conceptos de subconjunto convexo, balanceado y absorbente de un espacio vectorial.

Definición 1.1.2. Un subconjunto A de un espacio vectorial X es:

a) *convexo* si $tx+(1-t)y \in A$ para cualesquiera $x, y \in A$ y cualquier $t \in [0, 1]$.

b) *balanceado* si $\beta A \subseteq A$ para cualquier $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $|\beta| \leq 1$.

c) *absorbente* si para cada $x \in X$ existe un número real $s_x > 0$ tal que $x \in tA$ para cualquier $t > s_x$.

En el siguiente lema enunciaremos algunas de las propiedades esenciales que satisfacen los subconjuntos convexos, balanceados y absorbentes de un espacio vectorial.

Lema 1.1.3. *Sea X un espacio vectorial. Sean A un subconjunto de X y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X.*

a) Si A es absorbente, entonces $0 \in A$. Asimismo, si A es balanceado y no vacío, entonces $0 \in A$.

b) Si A es balanceado y $\beta \in \mathbb{K}$ es tal que $|\beta| = 1$, entonces $\beta A = A$.

c) Si A_i es balanceado para cada $i \in I$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ y $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ son subconjuntos balanceados de X.

d) Si A_i es convexo para cada $i \in I$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es un subconjunto convexo de X.

e) Si A es convexo, entonces βA y $x + A$ son subconjuntos convexos de X para cada $x \in X$ y cada $\beta \in \mathbb{K}$.

f) A es convexo si y sólo si $sA + tA = (s+t)A$ para cualesquiera $s, t \geq 0$.

Demostración. Sean X, A y $\{A_i\}_{i\in I}$ como en el enunciado del lema.

a) Supongamos que A es absorbente. Entonces, existe un número real $s_0 > 0$ tal que $0 \in tA$ para cualquier $t > s_0$. En particular, para $s_0+1 > s_0$ se tiene que $0 \in (s_0+1)A$ y, en consecuencia, existe $a \in A$ tal que $0 = (s_0+1)a$. Luego, como $s_0 + 1 \neq 0$, se sigue que $0 = a$ y, consecuentemente, $0 \in A$. Por otra parte, supongamos que A es balanceado y no vacío. Sea $a \in A$. Como $|0| = 0 \leq 1$, sabemos que $0A \subseteq A$, por lo que $0 = 0a \in 0A \subseteq A$. Por tanto, $0 \in A$.

b) Si A es balanceado y $\beta \in \mathbb{K}$ es tal que $|\beta| = 1$, tenemos que $\beta A \subseteq A$. Además, como $\left|\frac{1}{\beta}\right| = \frac{1}{|\beta|} = 1$, se tiene que $\frac{1}{\beta}A \subseteq A$, de donde se sigue que si $a \in A$, entonces $a = \beta\left(\frac{1}{\beta}a\right) \in \beta A$ y, por consiguiente, $A \subseteq \beta A$. En consecuencia, $A = \beta A$.

c) Supongamos que A_i es balanceado para cada $i \in I$. Sea $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $|\beta| \leq 1$. Sean $x \in \beta \bigcup_{i\in I} A_i$ y $u \in \beta \bigcap_{i\in I} A_i$. Entonces, existen $z \in \bigcup_{i\in I} A_i$ y $v \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tales que $x = \beta z$ y $u = \beta v$. Más aún, como $z \in \bigcup_{i\in I} A_i$ y $v \in \bigcap_{i\in I} A_i$, sabemos que existe $j \in I$ tal que $z \in A_j$ y que $v \in A_i$ $\forall i \in I$. Luego, como $|\beta| \leq 1$ y A_i es balanceado $\forall i \in I$, tenemos que $\beta A_i \subseteq A_i$ para cada $i \in I$. Así, obtenemos que $x = \beta z \in \beta A_j \subseteq A_j$ y que $u = \beta v \in \beta A_i \subseteq A_i$ $\forall i \in I$. De lo anterior, se obtiene que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ y $u \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Consecuentemente, $\beta \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ y $\beta \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ y, por tanto, $\bigcup_{i\in I} A_i$ y $\bigcap_{i\in I} A_i$ son balanceados.

d) Si A_i es convexo para cada $i \in I$, $t \in [0,1]$ y $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$, entonces $x, y \in A_i$ para cada $i \in I$, de donde se sigue, , por definición de conjunto convexo, que $tx+(1-t)y \in A_i$ para cada $i \in I$. De esta manera, obtenemos que $tx + (1-t)y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ y, en consecuencia, $\bigcap_{i\in I} A_i$ es convexo.

e) Supongamos que A es convexo. Sean $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $y, z \in \beta A$, $u, v \in x+A$ y $t \in [0,1]$. Entonces, existen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ tales que $y = \beta a_1$, $z = \beta a_2$, $u = x + a_3$ y $v = x + a_4$. Además, como A es convexo y $t \in [0,1]$, tenemos que $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ y $ta_3 + (1-t)a_4 \in A$. Así, se obtiene que $ty + (1-t)z = t\beta a_1 + (1-t)\beta a_2 = \beta(ta_1 + (1-t)a_2) \in \beta A$ y $tu+(1-t)v = t(x+a_3)+(1-t)(x+a_4) = (t+(1-t))x+ta_3+(1-t)a_4 = x + ta_3 + (1-t)a_4 \in x + A$. Por tanto, $x + A$ y βA son convexos.

f) Primero, supongamos que A es convexo. Sean $s, t \geq 0$. Si $s + t = 0$, entonces $s = t = 0$, por lo que $sA + tA = \emptyset = (s+t)A$ si $A = \emptyset$ y $sA + tA = \{0\} + \{0\} = \{0\} = (s+t)A$ si $A \neq \emptyset$. Por tanto, supongamos que $s + t \neq 0$, de modo que $s + t > 0$. Sea $x \in sA + tA$. Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $x = sa_1+ta_2$. Luego, como $\frac{s}{s+t} \in [0,1]$ y A es convexo, se tiene que $\frac{s}{s+t}a_1 + \left(1 - \frac{s}{s+t}\right) a_2 \in A$. Así, obtenemos que $x = sa_1+ta_2 = (s+t)\left(\frac{s}{s+t}a_1 + \frac{t}{s+t}a_2\right) = (s+t)\left(\frac{s}{s+t}a_1 + \left(1 - \frac{s}{s+t}\right) a_2\right) \in (s+t)A$ y, por tanto, $sA+tA \subseteq (s+t)A$. Más aún, como $(s+t)a = sa+ta \in sA+tA$ $\forall a \in A$, claramente se tiene que $(s+t)A \subseteq sA + tA$. De esta manera, podemos concluir que $sA + tA = (s+t)A$.

Conversamente, supongamos que $sA + tA = (s+t)A$ para cualesquiera $s, t \geq 0$. Sean $y, z \in A$ y $r \in [0,1]$. Es claro que $ry + (1-r)z \in rA + (1-r)A$. Además, como $r \geq 0$ y $1 - r \geq 0$, por hipótesis sabemos que $rA + (1-r)A = (r + (1-r))A = A$. En consecuencia, tenemos que $ry + (1-r)z \in A$ y, por consiguiente, A es convexo.

□

Observemos que a partir del inciso f) del lema anterior es fácil comprobar por inducción matemática que si X es un espacio vectorial, A es un subconjunto convexo de X y $n \in \mathbb{N}$, entonces $t_1 A + \ldots + t_n A = (t_1 + \ldots + t_n)A$ para cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \geq 0$.

A continuación, definiremos la noción de cápsula convexa de un subconjunto de un espacio vectorial.

Definición 1.1.4. Sean X un espacio vectorial y A un subconjunto de X. La *cápsula convexa* de A, denotada por $co(A)$, es el conjunto dado por:

$$co(A) = \bigcap \{C \subseteq X : C \text{ es convexo y } A \subseteq C\}.$$

Con base en la definición anterior y el Lema 1.1.3, es sencillo verificar que si X es un espacio vectorial y A es un subconjunto de X, entonces la cápsula convexa de A es el menor subconjunto convexo de X que contiene a A, es decir, la cápsula convexa de A es un subconjunto convexo de X que contiene a A y si C es cualquier subconjunto convexo de X tal que $A \subseteq C$, entonces $co(A) \subseteq C$. El siguiente resultado nos permite expresar de manera sencilla a la cápsula convexa de un subconjunto A de un espacio vectorial X en términos de cierto tipo de combinaciones lineales de elementos de A.

Lema 1.1.5. *Sean X un espacio vectorial y A un subconjunto de X. Entonces:*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i : n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A,\ t_1, \ldots, t_n \geq 0 \ y \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Demostración. Sean X un espacio vectorial y A un subconjunto de X. Sea $B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i : n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A,\ t_1, \ldots, t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$. Notemos que B es un subconjunto convexo de X. En efecto, si $x, y \in B$ y $r \in [0,1]$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$

y números reales no negativos $t_1, \ldots, t_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} s_i = 1$. Así, obtenemos que:

$$rx + (1-r)y = r\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) + (1-r)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(rt_i + (1-r)s_i)a_i.$$

Como $t_i \geq 0$ y $s_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $r \in [0,1]$, se tiene que $rt_i + (1-r)s_i \geq 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} rt_i + (1-r)s_i = r\sum_{i=1}^{n} t_i + (1-r)\sum_{i=1}^{n} s_i = r + (1-r) = 1$. Luego, como $a_i \in A\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, se sigue que $rx + (1-r)y = \sum_{i=1}^{n}(rt_i + (1-r)s_i)a_i \in B$ y, por consiguiente, B es un subconjunto convexo de X. Más aún, para cada $a \in A$ es claro que $a = 1a \in B$, por lo que $A \subseteq B$. Por tanto, B es un subconjunto convexo de X que contiene a A, de donde se obtiene que $co(A) \subseteq B$.

Por otra parte, si $z = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i \in B$, tenemos que $b_i \in A\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ y como $A \subseteq co(A)$, podemos concluir que $b_i \in co(A)\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$. De esta manera, obtenemos que $z = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i \in r_1 co(A) + \ldots + r_m co(A)$. Ahora, como $m \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_m \geq 0$ y $co(A)$ es un subconjunto convexo de X, sabemos que:

$$r_1 co(A) + \ldots + r_m co(A) = (r_1 + \ldots + r_m) co(A).$$

Además, como $\sum_{i=1}^{m} r_i = 1$, se tiene que $(r_1 + \ldots + r_m)co(A) = co(A)$. Así, obtenemos que $z \in co(A)$ y, por tanto, $B \subseteq co(A)$. Consecuentemente, tenemos que $co(A) = B$. $\square$

En seguida, introduciremos el concepto de compacidad en un espacio topológico, el cual se utilizará en capítulos posteriores de la tesis. También expondremos algunas de sus propiedades básicas, principalmente en espacios métricos.

Definición 1.1.6. Sean (A, τ) un espacio topológico y C un subconjunto de A. Decimos que C es un subconjunto *compacto* de A respecto a la topología τ si toda cubierta abierta de C contiene una subcubierta finita, es decir, si

$\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ es cualquier colección de conjuntos abiertos tal que $C \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces existe un subconjunto finito J de I tal que $C \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.

Sabemos que todo espacio métrico es un espacio topológico, por lo que podemos hablar de subconjuntos compactos en un espacio métrico. En lo que resta de este trabajo, cuando digamos que un subconjunto de un espacio métrico es compacto, se entenderá que dicho conjunto es compacto respecto a la topología inducida en dicho espacio por la métrica.

Una ventaja importante de trabajar con conjuntos compactos en un espacio métrico radica en que el concepto de compacidad puede simplificarse en dichos espacios de acuerdo con la siguiente caracterización en términos de sucesiones.

Teorema 1.1.7. *Sean M un espacio métrico y C un subconjunto de M. Las siguientes dos proposiciones son equivalentes:*

i) C es compacto.

ii) Toda sucesión de elementos de C contiene una subsucesión convergente a un elemento de C.

En un espacio métrico, un conjunto que satisface la condición ii) del teorema anterior es llamado un conjunto *compacto por sucesiones.*

Ahora, enunciaremos y probaremos una propiedad básica que satisface un subconjunto compacto en un espacio métrico.

Lema 1.1.8. *Sean M un espacio métrico y C un subconjunto compacto de M. Entonces, C es acotado y cerrado en M.*

Demostración. Sean M y C como en el enunciado del lema. Sea $x \in \overline{C}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en C tal que $x_n \longrightarrow x$. Como C es compacto, por el Teorema 1.1.7 sabemos que existe una subsucesión convergente de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, digamos $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, cuyo límite es un elemento de C. Además, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, de lo anterior se sigue que $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ converge a x y que $x \in C$. Por tanto, tenemos que $\overline{C} \subseteq C$ y es claro que $C \subseteq \overline{C}$. Así, se tiene que $C = \overline{C}$ y, por consiguiente, C es cerrado en M.

Por otra parte, es claro que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y,n)$, donde y es cualquier elemento de M y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B(y,n)$ es la bola abierta en M con centro en y y radio n. Luego, tenemos que $C \subseteq M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y,n)$, por lo que $\{B(y,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

es una cubierta abierta de C. Como C es compacto, obtenemos que existen $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $C \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(y, n_j)$. De esta manera, tomando $N = \text{máx}\{n_j : j \in \{1, \ldots, k\}\}$, se obtiene que $C \subseteq B(y, N)$. Por tanto, C es acotado. □

Para finalizar esta sección, enunciaremos dos resultados clásicos del cálculo diferencial e integral sobre el comportamiento de conjuntos compactos respecto a funciones continuas que se pueden generalizar fácilmente a espacios métricos.

Teorema 1.1.9. *Sean M y N dos espacios métricos. Sean $f : M \longrightarrow N$ una función continua y C un subconjunto compacto de M. Entonces, $f(C)$ es un subconjunto compacto de N.*

Corolario 1.1.10. *Sean M un espacio métrico y C un subconjunto compacto de M. Sea $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en puntos de C.*

1.2. Espacios normados y espacios de Banach

Ahora, introduciremos los conceptos de norma y espacio normado, los cuales serán fundamentales para el desarrollo del presente trabajo.

Definición 1.2.1. Una *norma* sobre un espacio vectorial X es una función real valuada con dominio X, denotada por $\| \cdot \|$, con las siguientes propiedades:

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$.

ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in X$.

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (*Desigualdad del triángulo*).

Definición 1.2.2. Un *espacio normado* X es un espacio vectorial con una norma sobre X, al cual denotaremos por $(X, \| \cdot \|)$ o, en caso de que no haya ambigüedad sobre la norma a la que se está haciendo referencia, simplemente por X.

Es importante notar que una norma sobre X nos permite definir de manera natural una métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Es sencillo verificar a partir de la definición de norma que, en efecto, la expresión (1.1) define una métrica sobre X. Por tanto, tenemos que todo espacio normado es un espacio métrico. Además, como se mencionó anteriormente en la sección 1.1, es bien sabido que todo espacio métrico es un espacio topológico. En consecuencia, tenemos que si X es un espacio normado, entonces la norma sobre X induce una métrica y, por consiguiente, una topología sobre X. Por esta razón, cuando mencionemos cualquier concepto topológico en un espacio normado sin especificar alguna topología, se entenderá que nos estamos refiriendo a la topología inducida por la norma en dicho espacio.

A continuación, presentaremos algunas de las propiedades básicas de los espacios normados.

Lema 1.2.3. *Sea X un espacio normado. Entonces $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ $\forall x, y \in X$.*

Demostración. Sea X un espacio normado y sean $x, y \in X$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, tenemos que $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, de donde se sigue que $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
Intercambiando los papeles de x y de y en el argumento anterior, obtenemos que $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Ahora, por definición de norma, se tiene que $\|y - x\| = \| - (x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\|$. Así, se obtiene que $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ y, en consecuencia, $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$.
Por tanto, tenemos que $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ y, por consiguiente, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. □

Como consecuencia inmediata del Lema 1.2.3, podemos concluir la continuidad de la norma en un espacio normado.

Lema 1.2.4 (Continuidad de la norma)**.** *Sea X un espacio normado. Entonces el mapeo $x \mapsto \|x\|$ es una función continua de $(X, \|\cdot\|)$ en $\mathbb{R}$.*

En seguida, definimos los conceptos de convergencia de sucesiones y sucesiones de Cauchy en un espacio normado de la siguiente manera:

Definición 1.2.5. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ converge en X si existe $x \in X$ tal que la sucesión real $(\|x_n - x\|)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. En este caso, diremos que x es el *límite* de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Además, escribiremos $x_n \longrightarrow x$ o $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Definición 1.2.6. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ es una *sucesión de Cauchy* si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para cualesquiera $n, m \geq N_\epsilon$.

A partir de las dos definiciones anteriores es fácil probar que en un espacio normado X, el límite de una sucesión convergente en X es único y que toda sucesión convergente en X es una sucesión de Cauchy. Además, también es sencillo comprobar que existen espacios normados en los que no toda sucesión de Cauchy converge. Lo anterior motiva la definición y el estudio de aquellos espacios normados en los que las nociones de sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes son equivalentes.

Definición 1.2.7. Un espacio normado X es *completo* si tiene la propiedad de que toda sucesión de Cauchy converge en X. En este caso, se dice que X es un *espacio de Banach*.

Dados un espacio normado X y un subconjunto Y de X, diremos que Y es un *subespacio* de X si Y es un subespacio vectorial de X y dotamos a Y con una norma simplemente restringiendo la norma definida sobre X al subconjunto Y; de esta manera consideramos a Y como un espacio normado. Más aún, si X es un espacio de Banach, el siguiente teorema nos permite caracterizar de manera sencilla a aquellos subespacios de X que son, a su vez, completos.

Teorema 1.2.8. *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y sólo si Y es cerrado en X.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach y Y un subespacio de X.
Primero, supongamos que Y es completo. Sea $x \in \overline{Y}$. Entonces, existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n \longrightarrow x$. Luego, como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, tenemos que es una sucesión de Cauchy. Como Y es completo, se sigue que existe $y \in Y$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Así, tenemos que $y_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$ y, como el límite de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es único, obtenemos que $x = y$, por lo que $x \in Y$. De esta manera, hemos probado que $\overline{Y} \subseteq Y$ y es claro que $Y \subseteq \overline{Y}$. Por tanto $Y = \overline{Y}$ y Y es cerrado en X.
Conversamente, supongamos que Y es cerrado en X. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $Y \subseteq X$. Como X es un espacio de Banach, entonces se tiene que existe $x \in X$ tal que $y_n \longrightarrow x$. Luego, como $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ y $y_n \longrightarrow x$, tenemos que $x \in \overline{Y}$. Más aún, como Y es cerrado en X, sabemos que $Y = \overline{Y}$ y de este hecho y lo anterior obtenemos que $x \in Y$. Por tanto, $x \in Y$ y $y_n \longrightarrow x$ y,

como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ era una sucesión de Cauchy arbitraria en Y, se sigue que Y es completo. $\square$

Ahora, con base en la Definición 1.2.5, definiremos el concepto de series infinitas y convergencia absoluta en un espacio normado. En primer lugar, notemos que, dados un espacio normado X y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, a la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ podemos asociarle una nueva sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ dada por:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

A la sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ se le conoce comúnmente como la *sucesión de sumas parciales* asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Similarmente, a la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también le podemos asociar otra nueva sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Definición 1.2.9. Sea X un espacio normado. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión y $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida como en la expresión (1.2). Si existe $s \in X$ tal que $s_n \longrightarrow s$, entonces diremos que la *serie infinita* (o simplemente la *serie*) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge y que s es la *suma* o *límite* de dicha serie. Además, escribiremos $s = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Definición 1.2.10. Sea X un espacio normado. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión y $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida como en la expresión (1.3). Si $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente entonces decimos que la *serie infinita* (o la *serie*) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge absolutamente.*

A partir de las dos definiciones anteriores, podemos enunciar la siguiente caracterización de completez de espacios normados en términos de convergencia y convergencia absoluta de series.

Teorema 1.2.11. *Un espacio normado X es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es, a su vez, una serie convergente.*

Además, con base en la Definición 1.2.9, podemos introducir la noción de base de Schauder para un espacio de Banach de la siguiente manera:

Definición 1.2.12. Sea X un espacio de Banach. Una *base de Schauder* para X es una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ con la propiedad de que, dada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

En seguida, enunciaremos el importante teorema que afirma que, si bien no todo espacio normado es un espacio completo, sí es posible considerar a un espacio normado como un subespacio denso de un espacio de Banach. Para este fin necesitamos definir previamente el concepto de isomorfismo entre dos espacios normados.

Definición 1.2.13. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados (con X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$) . Un *isomorfismo* de X sobre Y es una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ con las siguientes propiedades:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in X$.

ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in X$.

iii) $\|x\|_X = \|f(x)\|_Y \quad \forall x \in X$.

Teorema 1.2.14 (Compleción de un espacio normado)**.** *Sea X un espacio normado. Entonces, existen un espacio de Banach $\widetilde{X}$ y un isomorfismo $f : X \longrightarrow W$, con W un subespacio denso de $\widetilde{X}$. Más aún, el espacio $\widetilde{X}$ es único salvo isomorfismos.*

Al espacio $\widetilde{X}$ del teorema anterior se le conoce como la *compleción* del espacio normado X.

A continuación, introduciremos la noción de espacio cociente asociado a un subespacio vectorial de un espacio vectorial.

Definición 1.2.15. Sea Y un subespacio vectorial de un espacio vectorial X. El *espacio cociente* X/Y es el espacio vectorial cuyo conjunto subyacente es la colección $\{x + Y : x \in X\}$ con las operaciones definidas como:

$$(x+Y) + (z+Y) = (x+z) + Y \quad \forall x+Y, z+Y \in X/Y,$$

y

$$\alpha(x+Y) = \alpha x + Y \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \text{y} \quad \forall x+Y \in X/Y.$$

Con base en la definición anterior, es sencillo comprobar que si Y es un subespacio vectorial de un espacio vectorial X, entonces, para cualesquiera $x+Y, z+Y \in X/Y$, se tiene que $x+Y = z+Y$ si y sólo si $x-z \in Y$. A partir de lo anterior y de la Definición 1.2.15, es fácil verificar que el vector cero de X/Y es $0+Y$ y que las operaciones definidas para el espacio cociente X/Y están bien definidas, esto es, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x, z, x', z' \in X$ son tales que $x+Y = x'+Y$ y $z+Y = z'+Y$, entonces $(x+Y)+(z+Y) = (x'+Y)+(z'+Y)$ y $\alpha(x+Y) = \alpha(x'+Y)$.

Ahora, si en la Definición 1.2.15 añadimos las hipótesis de que X sea un espacio normado y Y sea cerrado en X, entonces podemos definir la norma cociente de X/Y de la siguiente manera:

Definición 1.2.16. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado y Y un subespacio de X tal que Y es cerrado en X. La *norma cociente* de X/Y es la norma dada por $\|x+Y\| = \text{ínf}\,\{\|x+y\|_X : y \in Y\}$ para cada $x+Y \in X/Y$.

Con el objetivo de facilitar la notación en lo que resta de este trabajo, dados X un espacio normado y Y un subespacio cerrado de X, escribiremos $\|x+Y\|$ y $\|x\|$ para cada $x \in X$ omitiendo el subíndice X de la norma y entendiendo que la primera norma hace referencia a la norma cociente definida sobre X/Y y la segunda norma se refiere a la norma definida sobre X. El teorema que enunciaremos en seguida justifica el uso del término norma para la norma cociente definida anteriormente.

Teorema 1.2.17. *Si X es un espacio normado y Y es un subespacio de X tal que Y es cerrado en X, entonces la norma cociente de X/Y satisface las condiciones i)-iv) de la definición de norma (Definición 1.2.1). En consecuencia, X/Y es un espacio normado con la norma cociente.*

Demostración. Sean X un espacio normado y Y un subespacio cerrado de X. Sean $x+Y, z+Y \in X/Y$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

i) Como $\|x+y\| \geq 0\ \forall y \in Y$, entonces $\|x+Y\| = \text{ínf}\{\|x+y\| : y \in Y\} \geq 0$.

ii) Si $x+Y = 0+Y$, entonces $x = x-0 \in Y$. Luego, como Y es un subespacio de X, obtenemos que $-x \in Y$ y, por consiguiente:

$$0 = \|0\| = \|x+(-x)\| \geq \text{ínf}\{\|x+y\| : y \in Y\} = \|x+Y\| \geq 0.$$

De lo anterior, claramente se sigue que $\|x+Y\| = 0$.

Por otra parte, si $\|x+Y\| = 0$, entonces $\text{ínf}\{\|x+y\| : y \in Y\} = 0$.

En consecuencia, se tiene que existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que la sucesión $(\|x+y_n\|)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. Así, como $\|x+y_n\| = \|y_n-(-x)\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos que la sucesión $(\|y_n-(-x)\|)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, por lo que $y_n \longrightarrow -x$. Además, como $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ y Y es cerrado en X, de lo anterior se sigue que $-x \in \overline{Y} = Y$. Luego, como Y es un subespacio de X y $-x \in Y$, entonces $x \in Y$, de donde claramente se obtiene que $x+Y = 0+Y$. Por tanto, $\|x+Y\| = 0$ si y sólo si $x+Y = 0+Y$.

iii) Si $\alpha = 0$, entonces es claro que $\|\alpha(x+Y)\| = \|\alpha x+Y\| = \|0+Y\| = 0 = |0|\|x+Y\| = |\alpha|\|x+Y\|$. Por otra parte, si $\alpha \neq 0$, para cada $y \in Y$, definimos el vector $u = \frac{1}{\alpha}y \in Y$. De esta manera, tenemos que:

$$\|\alpha(x+Y)\| = \|\alpha x+Y\| = \text{ínf}\left\{\|\alpha x+y\| : y \in Y\right\} =$$

$$\text{ínf}\left\{\left\|\alpha\left(x+\frac{1}{\alpha}y\right)\right\| : y \in Y\right\} = \text{ínf}\left\{|\alpha|\left\|x+\frac{1}{\alpha}y\right\| : y \in Y\right\} =$$

$$|\alpha|\,\text{ínf}\left\{\left\|x+\frac{1}{\alpha}y\right\| : y \in Y\right\} = |\alpha|\,\text{ínf}\left\{\|x+u\| : u \in Y\right\} = |\alpha|\|x+Y\|.$$

Por tanto, $\|\alpha(x+Y)\| = |\alpha|\|x+Y\|$.

iv) Sean $y_1, y_2 \in Y$. Como Y es un subespacio de X, sabemos que $y_1+y_2 \in Y$. En consecuencia, por la desigualdad del triángulo, obtenemos que:

$$\|(x+Y)+(z+Y)\| = \|(x+z)+Y)\| = \text{ínf}\{\|x+z+y\| : y \in Y\} \leq$$

$$\|x+z+y_1+y_2\| \leq \|x+y_1\| + \|z+y_2\|. \tag{1.4}$$

De (1.4) es claro que $\|(x+Y)+(z+Y)\| - \|x+y_1\| \leq \|z+y\|$ $\forall y \in Y$, por lo que $\|(x+Y)+(z+Y)\| - \|x+y_1\| \leq \text{ínf}\{\|z+y\| : y \in Y\} = \|z+Y\|$ y, por consiguiente:

$$\|(x+Y)+(z+Y)\| - \|z+Y\| \leq \|x+y_1\|. \tag{1.5}$$

Luego, de (1.5) se obtiene que $\|(x+Y)+(z+Y)\| - \|z+Y\| \leq \|x+y\|$ $\forall y \in Y$ y, por tanto, $\|(x+Y)+(z+Y)\| - \|z+Y\| \leq \text{ínf}\{\|x+y\| : y \in Y\} = \|x+Y\|$ o, equivalentemente, $\|(x+Y)+(z+Y)\| \leq \|x+Y\| + \|z+Y\|$.

Por tanto, la norma cociente satisface las condiciones i)-iv) de la definición de norma y, consecuentemente, el espacio cociente X/Y es un espacio normado con la norma cociente. $\square$

En seguida, enunciaremos un lema, cuya prueba es sencilla, en el que se muestran dos propiedades básicas de la norma cociente y un teorema que nos da una condición suficiente para garantizar que un espacio cociente sea un espacio de Banach.

Lema 1.2.18. *Sea Y un subespacio de un espacio normado X tal que Y es cerrado en X. Entonces:*

a) $\|x\| \geq \|x+Y\|$ $\forall x \in X$.

b) *Para cualesquiera $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe $z \in X$ tal que $x+Y = z+Y$ y $\|z\| < \|x+Y\| + \epsilon$.*

Teorema 1.2.19. *Sean X un espacio normado y Y un subespacio cerrado de X. Si X es un espacio de Banach, entonces X/Y es un espacio de Banach.*

Ahora, presentaremos un resultado en el que se relacionarán los conceptos introducidos en la primera sección del presente capítulo con la topología inducida por la norma en un espacio normado.

Lema 1.2.20. *Sea X un espacio normado.*

a) *Si A es un subconjunto convexo de X, entonces $\overline{A}$ es un subconjunto convexo de X.*

b) *Toda bola abierta o cerrada en X es convexa.*

c) *Toda bola abierta o cerrada en X con centro en el vector cero de X es balanceada y abosrbente.*

Demostración. Sea X un espacio normado.

a) Supongamos que A es un subconjunto convexo de X. Sean $x, y \in \overline{A}$ y $t \in [0,1]$. Como $x, y \in \overline{A}$, sabemos que existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$. Además, como A es convexo y $t \in [0,1]$, se tiene que $tx_n + (1-t)y_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y es claro que $tx_n+(1-t)y_n \longrightarrow tx+(1-t)y$. De lo anterior se obtiene que $tx+(1-t)y \in \overline{A}$ y, por consiguiente, $\overline{A}$ es convexo.

b) Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Sea $B(x_0, \epsilon)$ la bola abierta en X con centro en x_0 y radio ϵ. Sean $x, y \in B(x_0, \epsilon)$ y $t \in [0,1]$. Entonces, tenemos que:

$$\|tx + (1-t)y - x_0\| = \|tx + (1-t)y - x_0 + tx_0 - tx_0\| \leq$$

$$\|tx - tx_0\| + \|(1-t)y - (1-t)x_0\| = t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\| <$$

$$t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon.$$

De lo anterior, se sigue que $tx+(1-t)y \in B(x_0, \epsilon)$ y, por tanto, $B(x_0, \epsilon)$ es convexa. Una prueba completamente análoga muestra que la bola cerrada en X con centro en x_0 y radio ϵ es convexa.

c) Sea $\delta > 0$. Sean $B(0, \delta)$ la bola abierta en X con centro en 0 y radio δ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$. Si $x \in \alpha B(0, \delta)$, entonces existe $y \in B(0, \delta)$ tal que $x = \alpha y$, de donde se sigue que $\|x\| = \|\alpha y\| = |\alpha| \|y\| \leq \|y\| < \delta$. Así, obtenemos que $x \in B(0, \delta)$ y, en consecuencia, $B(0, \delta)$ es balanceada. Análogamente se puede ver que la bola cerrada en X con centro en 0 y radio δ es balanceada.
Ahora, sea $z \in X$. Entonces, $s_z = \frac{\|z\|+1}{\delta} > 0$ es un número real tal que si $t > s_z > 0$, entonces se cumple que $\left\|\frac{1}{t}z\right\| = \frac{1}{t}\|z\| \leq \frac{1}{s_z}\|z\| = \frac{\delta\|z\|}{\|z\|+1} < \delta$, por lo que $\frac{1}{t}z \in B(0, \delta)$. Así, se obtiene que $\frac{1}{t}z \in B(0, \delta)$ para cualquier $t > s_z$, de donde claramente se sigue que $z = t\left(\frac{1}{t}z\right) \in tB(0, \delta)$ para cualquier $t > s_z$. Por tanto, para cada $z \in X$, se tiene que $s_z = \frac{\|z\|+1}{\delta} > 0$ es un número real tal que $z \in tB(0, \delta)$ para cualquier $t > s_z$. Así, podemos concluir que $B(0, \delta)$ es absorbente y de manera análoga se puede probar que la bola cerrada en X con centro en 0 y radio δ es absorbente.

□

A continuación, exploraremos algunas propiedades básicas de los espacios normados de dimensión finita que servirán de apoyo para desarrollar algunos resultados que se expondrán posteriormente.

Lema 1.2.21. *Sean X un espacio normado y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito no vacío de vectores linealmente independientes de X. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ se cumple que:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| \geq c\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right).$$

En seguida, enunciaremos un teorema que nos habla sobre una propiedad fundamental de los subespacios de dimensión finita en cualquier espacio normado.

Teorema 1.2.22. *Todo subespacio de dimensión finita Y de un espacio normado X es cerrado en X.*

Ahora, definiremos el concepto de equivalencia de normas en un espacio vectorial.

Definición 1.2.23. Se dice que una norma $\|\cdot\|_*$ sobre un espacio vectorial X es *equivalente* a una norma $\|\cdot\|_o$ sobre X si existen dos números positivos a y b tales que:

$$a\|x\|_* \leq \|x\|_o \leq b\|x\|_* \quad \forall x \in X.$$

Usando el Lema 1.2.21, podemos probar el siguiente teorema que afirma que cualesquiera dos normas sobre un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

Teorema 1.2.24. *Sea X un espacio normado de dimensión finita. Sean $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_o$ dos normas definidas sobre X. Entonces, las normas $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_o$ son equivalentes.*

Demostración. Sean X, $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_o$ como en el enunciado del teorema. Supongamos que $\dim X = n$, con $n \in \mathbb{N}$. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X y $x \in X$. Entonces, existen (únicos) escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es base para X, entonces $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un subconjunto finito no vacío de vectores linealmente independientes de X. Por el Lema 1.2.21, sabemos que existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\|x\|_* = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_* \geq c \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \right). \tag{1.6}$$

Por otra parte, sea $M = \text{máx}\{\|e_j\|_o : j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Luego, por la desigualdad del triángulo y la definición de norma, se tiene que:

$$\|x\|_o = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_o \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\|_o \leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, . \tag{1.7}$$

De las expresiones (1.6) y (1.7), se sigue que:

$$\frac{c}{M}\|x\|_o \leq c \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \right) \leq \|x\|_*.$$

Por tanto:

$$a\|x\|_o \leq \|x\|_*, \tag{1.8}$$

donde $a = \frac{c}{M} > 0$.
Intercambiando los papeles de $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_o$ en el argumento anterior, obtenemos que $r\|x\|_* \leq \|x\|_o$, donde $r = \frac{d}{N} > 0$, $d > 0$ es una constante positiva tal que $\|x\|_o = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|_o \geq d\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right)$ (cuya existencia sabemos por el Lema 1.2.21) y $N = \text{máx}\{\|e_j\|_* : j \in \{1, \ldots, n\}\}$. De lo anterior, se obtiene que:

$$\|x\|_* \leq b\|x\|_o, \tag{1.9}$$

con $b = \frac{1}{r} > 0$. De (1.8) y (1.9) se sigue que las normas $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_o$ son equivalentes. □

Es importante mencionar que, en general, el recíproco del Lema 1.1.8 no es válido, esto es, existe un espacio métrico en el que no todo subconjunto cerrado y acotado es compacto. No obstante, en un espacio normado de dimensión finita, el siguiente teorema nos asegura que los conjuntos compactos en dicho espacio son precisamente aquéllos conjuntos que son cerrados y acotados.

Teorema 1.2.25. *Sean X un espacio normado de dimensión finita y C un subconjunto de X. Entonces, C es compacto si y sólo si C es acotado y cerrado en X.*

Para terminar esta sección, presentaremos dos resultados que nos permitirán concluir que en cualquier espacio normado de dimensión infinita existe un subconjunto cerrado y acotado que no es compacto.

Lema 1.2.26 (Riesz)**.** *Sean X un espacio normado y Y un subespacio de X. Supongamos que Y es cerrado en X y que Y es un subconjunto propio de X. Entonces, para cualquier $\theta \in (0,1)$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \theta$ $\forall y \in Y$.*

Teorema 1.2.27. *Sea X un espacio normado. Entonces la bola unitaria cerrada en X es compacta si y sólo X es de dimensión finita.*

Demostración. Sean X un espacio normado y $B[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X.
Si $\dim X < \infty$, entonces el Teorema 1.2.25 nos asegura que $B[0,1]$ es compacta pues, claramente, $B[0,1]$ es acotada y cerrada en X.
Conversamente, supongamos que $\dim X = \infty$. Notemos que basta dividir cualquier vector distinto de cero de X por su norma para obtener un vector con

norma igual a uno en X. Sea pues $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$. Sea $X_1 = \langle x_1 \rangle$. Es claro que X_1 es un subespacio de X de dimensión igual a uno. Luego, como $\dim X = \infty$, tenemos que X_1 es un subconjunto propio de X, X_1 es cerrado en X, por el Teorema 1.2.22, y $x_1 \in X_1$. Por el Lema de Riesz (Lema 1.2.26) se sigue que, para $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Sea $X_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$. Claramente X_2 es un subespacio de X de dimensión finita por lo que, análogamente a como se hizo anteriormente con X_1, podemos concluir que X_2 es un subespacio propio de X, X_2 es cerrado en X y $x_1, x_2 \in X_2$. Nuevamente por el Lema de Riesz, sabemos que existe $x_3 \in X$ tal que $\|x_3\| = 1$ y

$$\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Continuando de esta manera, inductivamente, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $B[0,1]$ que satisface que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. De lo anterior, es claro que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no contiene ninguna subsucesión de Cauchy, por lo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $B[0,1]$ que no contiene ninguna subsucesión convergente. De esta forma, por el Teorema 1.1.7, se obtiene que $B[0,1]$ no es compacta. $\square$

1.3. Operadores y funcionales lineales

Una vez introducidos los conceptos y propiedades esenciales de los espacios normados y los espacios de Banach, definiremos aquellas funciones entre espacios vectoriales, conocidas como operadores lineales, que resultan fundamentales para el estudio de los mismos, pues preservan las operaciones algebraicas de dichos espacios.

Definición 1.3.1. Un *operador lineal* T es una función con las siguientes propiedades:

i) El dominio de T, denotado por $\mathcal{D}(T)$, es un espacio vectorial y el rango de T, que escribiremos como $\mathcal{R}(T)$, es un subconjunto de un espacio vectorial definido sobre el mismo campo que el dominio de T.

ii) $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T)$.

iii) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$ y para cualquier escalar α.

Definición 1.3.2. Sea T un operador lineal. El *espacio nulo* de T, denotado por $\mathcal{N}(T)$, es el conjunto definido por:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : T(x) = 0\}.$$

Una propiedad básica de todo operador lineal T que usaremos ampliamente a lo largo de la presente tesis es el hecho de que $T(0) = 0$, lo cual se puede comprobar fácilmente sustituyendo $\alpha = 0$ en la condición iii) de la Definición 1.3.1. Otras propiedades básicas de los operadores lineales que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo, se encuentran enlistadas en el siguiente teorema:

Teorema 1.3.3. *Sea T un operador lineal. Entonces:*

a) El rango $\mathcal{R}(T)$ es un espacio vectorial.

b) Si $\dim \mathcal{D}(T) = n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

c) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es un espacio vectorial.

En el siguiente teorema se justificará que la función inversa de un operador lineal T existe si y sólo si el único elemento del espacio nulo de T es el vector cero del dominio de T y que, en caso de existir, la inversa de un operador lineal es también un operador lineal, por lo que tiene sentido hablar del operador inverso de un operador lineal.

Teorema 1.3.4. *Sean X y Y dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo. Sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$ son subespacios vectoriales de X y de Y, respectivamente. Entonces:*

a) La inversa $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ de T existe si y sólo si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

b) Si T^{-1} existe, entonces T^{-1} es un operador lineal.

c) Si $\dim \mathcal{D}(T) = n$, con $n \in \mathbb{N}$, y T^{-1} existe, entonces $\dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$.

Demostración. Sean X, Y y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ como en el enunciado del teorema.

a) Supongamos que la inversa $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ de T existe. Como $T(0) = 0$, entonces $\{0\} \subseteq \mathcal{N}(T)$. Ahora, sea $x \in \mathcal{N}(T)$. Entonces $T(x) = 0 = T(0)$ y, en consecuencia, $x = T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(T(0)) = 0$, por lo que

$x \in \{0\}$. Así, se obtiene que $\mathcal{N}(T) \subseteq \{0\}$ y por tanto $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.
Conversamente, supongamos que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ y veamos que T es inyectivo. Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tales que $T(x_1) = T(x_2)$. Entonces, obtenemos que $0 = T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2)$ y, por consiguiente, $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(T) = \{0\}$. De lo anterior, se obtiene que $x_1 - x_2 = 0$ o, equivalentemente, $x_1 = x_2$. Por tanto, T es inyectivo y la inversa $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ de T existe.

b) Supongamos que T^{-1} existe. Es claro que $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$ y, por definición de operador lineal y por el Teorema 1.3.3, tenemos que $\mathcal{D}(T^{-1})$ y $\mathcal{R}(T^{-1})$ son espacios vectoriales sobre el mismo campo. Por otra parte, sean α un escalar y $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$. Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ los únicos elementos del dominio de T tales que $T(x_1) = y_1$ y $T(x_2) = y_2$, de modo que $T^{-1}(y_1) = x_1$ y $T^{-1}(y_2) = x_2$ De lo anterior, obtenemos que $\alpha y_1 = \alpha T(x_1) = T(\alpha x_1)$ y $y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2)$. Así, se obtiene que:

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = T^{-1}(T(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$$

y

$$T^{-1}(\alpha y_1) = T^{-1}(T(\alpha x_1)) = \alpha x_1 = \alpha T^{-1}(y_1).$$

Por tanto, T^{-1} es un operador lineal.

c) Supongamos que $\dim \mathcal{D}(T) = n$, con $n \in \mathbb{N}$, y que T^{-1} existe. Por el inciso b) del Teorema 1.3.3, sabemos que $\dim \mathcal{R}(T) \leq n = \dim \mathcal{D}(T)$. De esta manera, se obtiene que $\dim \mathcal{D}(T^{-1}) = \dim \mathcal{R}(T) \leq n < \infty$. Así, por el inciso b) del presente teorema, tenemos que T^{-1} es un operador lineal cuyo dominio es de dimensión finita. En consecuencia, nuevamente por el inciso b) del Teorema 1.3.3, sabemos que $\dim \mathcal{D}(T) = \dim \mathcal{R}(T^{-1}) \leq \dim \mathcal{D}(T^{-1}) = \dim \mathcal{R}(T)$. Por tanto, $\dim \mathcal{R}(T) \leq \dim \mathcal{D}(T)$ y $\dim \mathcal{D}(T) \leq \dim \mathcal{R}(T)$, de donde se sigue que $\dim \mathcal{D}(T) = \dim \mathcal{R}(T)$.

□

Es sencillo verificar que la composición de dos operadores lineales es también un operador lineal. Además, el siguiente lema nos da una fórmula para el operador inverso de la composición de dos operadores lineales.

Lema 1.3.5. *Sean $T : X \longrightarrow Y$ y $S : Y \longrightarrow Z$ dos operadores lineales y biyectivos, con X, Y y Z espacios vectoriales sobre el mismo campo. Entonces la inversa $(ST)^{-1} : X \longrightarrow Z$ de la composición ST existe y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.*

A continuación, definiremos un tipo especial de operadores lineales, a saber, los operadores lineales y acotados, que resultarán de gran importancia en el estudio de los espacios normados.

Definición 1.3.6. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, con $\mathcal{D}(T)$ un subespacio de X. Diremos que T es *acotado* si existe un número real $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ para cualquier $x \in \mathcal{D}(T)$.

Si $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ es un operador lineal y acotado, con $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ y $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$, y $c \geq 0$ es un número real que satisface la Definición 1.3.6, claramente tenemos que:

$$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq c \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}. \tag{1.10}$$

Luego, de (1.10) obtenemos que el conjunto $\left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\} \right\}$ está acotado superiormente. Así, podemos definir la norma de un operador lineal y acotado de la siguiente manera:

Definición 1.3.7. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado, con $\mathcal{D}(T)$ un subespacio de X. Definimos la *norma* del operador T, denotada por $\|T\|$, como:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Si $\mathcal{D}(T) = \{0\}$, definimos la norma de T como $\|T\| = 0$.

Con el fin de simplificar la notación en lo que resta del presente trabajo, si X y Y son espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ es un oprerador lineal, con $\mathcal{D}(T) \subseteq X$, escribiremos $\|T(x)\|$ y $\|x\|$ para cada $x \in \mathcal{D}(T)$ omitiendo los subíndices X y Y de las normas y entendiendo que la primera norma hace referencia a la norma definida sobre Y y la segunda norma se refiere a la norma definida sobre X.

Con base en la Definición 1.3.7, es claro que si $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ es un operador lineal y acotado, con $\mathcal{D}(T) \subseteq X$, entonces $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ y que si $c \geq 0$ es un número real tal que $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $\|T\| \leq c$. Estos dos hechos serán usados frecuentemente en lo que resta del presente trabajo.

En el siguiente lema se justificará el uso del término norma en la Definición 1.3.7.

Lema 1.3.8. *Sean X y Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de X. Entonces:*

a) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\| = \text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$.

Además, si $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$, entonces $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\|$.

b) La norma de la Definición 1.3.7 satisface las propiedades i)-iv) de la definición de norma (Definición 1.2.1).

Demostración. Sean X, Y y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ como en el enunciado del lema.

a) Si $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$, para cada $x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$, definimos el vector $y = \frac{1}{\|x\|}x$, de modo que $\|y\| = 1$. De esta forma, por la linealidad de T, tenemos que:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| =$$

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = \sup_{\substack{y \in \mathcal{D}(T) \\ \|y\| = 1}} \|T(y)\|.$$

Por tanto, $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\|$ si $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$.

Ahora, veamos que $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|$.

Si $\mathcal{D}(T) = \{0\}$, como $T(0) = 0$, entonces es claro que:

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\| = 0 = \|T\|.$$

Por otra parte, si $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$, tenemos que:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\| \leq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|,$$

pues $\{\|T(x)\| : x \in \mathcal{D}(T), \|x\| = 1\} \subseteq \{\|T(x)\| : x \in \mathcal{D}(T), \|x\| \leq 1\}$.

Más aún, notemos que si $x \in \mathcal{D}(T)$ y $\|x\| \leq 1$, entonces $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$, de donde se sigue que $\sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| \leq \|T\|$.

Así, podemos concluir que $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|$ si $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$.

Finalmente, probaremos la igualdad:

$$\|T\| = \text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Como $\|T(x)\| \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| \geq 0$. Además, como $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$, tenemos que:

$$\text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\} \leq \|T\|.$$

Si $\text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\} < \|T\|$, se tendría que existe un número real $d \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq d\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ y $d < \|T\|$, lo cual no es posible ya que, como habíamos observado anteriormente, si $c \geq 0$ es cualquier número real con la propiedad de que $\|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $\|T\| \leq c$. Por tanto, podemos concluir que $\|T\| \leq \text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$ y, en consecuencia, $\|T\| = \text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$.

b) i) Como $\|T(x)\| \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| \geq 0$.

ii) Si $T = 0$, claramente se tiene que $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| = 0$, pues $T(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$.
Conversamente, si $\|T\| = 0$ y $\mathcal{D}(T) \neq 0$ (en el caso en que $\mathcal{D}(T) = 0$ es claro que $T = 0$ ya que $T(0) = 0$), entonces sabemos que:

$$\sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Luego, se obtiene que $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$, de donde se sigue que $\|T(x)\| = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$ y, en consecuencia, $T(x) = 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$. Más aún, como $T(0) = 0$, de lo anterior obtenemos que $T(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ y, por consiguiente, $T = 0$. Por tanto,

$\|T\| = 0$ si y sólo si $T = 0$.

iii) Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $\mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T)$, entonces tenemos que:

$$\|\alpha T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(\alpha T)\\ \|x\|\leq 1}} \|(\alpha T)(x)\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|\alpha T(x)\| =$$

$$\sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} |\alpha|\|T(x)\| = |\alpha| \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| = |\alpha|\|T\|.$$

iv) Sean $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \longrightarrow Y$ y $T_2 : \mathcal{D}(T_2) \longrightarrow Y$ operadores lineales y acotados, tales que $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ y $\mathcal{D}(T_1)$ es un subespacio de X. Por la desigualdad del triángulo, sabemos que $\|(T_1 + T_2)(x)\| = \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|$ para cualquier $x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2) = \mathcal{D}(T_1 + T_2)$. De lo anterior se obtiene que:

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T_1+T_2)\\ \|x\|\leq 1}} \|(T_1 + T_2)(x)\| =$$

$$\sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T_1+T_2)\\ \|x\|\leq 1}} \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T_1)\\ \|x\|\leq 1}} \|T_1(x)\| + \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T_2)\\ \|x\|\leq 1}} \|T_2(x)\| =$$

$$\|T_1\| + \|T_2\|.$$

□

El teorema que enunciaremos a continuación nos da otra propiedad fundamental de los espacios normados de dimensión finita.

Teorema 1.3.9. *Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces todo operador lineal con dominio X es acotado.*

En seguida, exhibiremos un importante teorema que afirma que los operadores lineales y continuos entre espacios normados son exactamente aquellos operadores lineales que son acotados.

Teorema 1.3.10. *Sean X y Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de X. Entonces:*

a) T es continuo si y sólo si T es acotado.

b) Si existe $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ tal que T es continuo en x_0, entonces T es continuo.

Demostración. Sean X, Y y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ como en el enunciado del teorema.

a) Supongamos que T es acotado. Sea $x \in \mathcal{D}(T)$. Sea $\epsilon > 0$. Consideremos $\delta = \dfrac{\epsilon}{1 + \|T\|} > 0$. Si $y \in \mathcal{D}(T)$ es tal que $\|y - x\| < \delta$, entonces:

$$\|T(y) - T(x)\| = \|T(y - x)\| \leq \|T\|\|y - x\| \leq \|T\|\delta = \frac{\epsilon\|T\|}{1 + \|T\|} < \epsilon.$$

Por tanto, T es continuo en x para cualquier $x \in \mathcal{D}(T)$ y, por consiguiente, T es continuo.

Conversamente, supongamos que T es continuo. Si $\mathcal{D}(T) = \{0\}$, entonces claramente T es acotado pues $T(0) = 0$. Por tanto, supongamos también que $\mathcal{D}(T) \neq \{0\}$. Sea $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Por hipótesis, sabemos que T es continuo en x_0. Entonces, para $\epsilon = 1 > 0$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < 1$ si $x \in \mathcal{D}(T)$ cumple que $\|x - x_0\| < \delta$. Sea $y \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$. Consideremos el vector $z = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|}y \in \mathcal{D}(T)$. Así, se tiene que $\|z - x_0\| = \left\|\frac{\delta}{2\|y\|}y\right\| = \frac{\delta}{2\|y\|}\|y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. En consecuencia, tenemos que:

$$\frac{\delta}{2\|y\|}\|T(y)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2\|y\|}y\right)\right\| = \|T(z - x_0)\| = \|T(z) - T(x_0)\| < 1.$$

De lo anterior es inmediato que $\|T(y)\| \leq \frac{2}{\delta}\|y\|$. Luego, obtenemos que $\|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$ y, como $T(0) = 0$, es claro que la desigualdad anterior es válida para $x = 0$. Por tanto $\frac{2}{\delta} > 0$ es un número real tal que $\|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{D}(T)$, de donde se sigue que T es acotado.

b) El argumento de la segunda parte de la prueba del inciso a) del presente teorema muestra que si existe $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ tal que T es continuo en x_0, entonces T es acotado y el inciso de a) de este teorema nos dice que si T es acotado, entonces T es continuo.

$\square$

Corolario 1.3.11. *Sea T un operador lineal y acotado. Entonces:*

a) $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ si $x_n \longrightarrow x$, con $x \in \mathcal{D}(T)$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$.

b) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en $\mathcal{D}(T)$.

Es sencillo ver que la composición de dos operadores lineales y acotados es un operador lineal y acotado. Además, el siguiente lema nos da una desigualdad para la norma de la composición de dos operadores lineales y acotados.

Lema 1.3.12. *Sean X, Y y Z espacios normados y sean $T_1 : X \longrightarrow Y$, $T_2 : Y \longrightarrow Z$ y $T : X \longrightarrow X$ operadores lineales y acotados. Entonces:*

a) $\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$.

b) $\|T^n\| \leq \|T\|^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

A continuación, definiremos las nociones de restricción y extensión de un operador lineal para después enunciar un teorema que nos garantiza que podemos extender un operador lineal y acotado a otro operador lineal y acotado sin alterar la norma del operador original.

Definición 1.3.13. Sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal. La *restricción* de T a un subconjunto B de $\mathcal{D}(T)$ es la función $T|_B : B \longrightarrow Y$ dada por $T|_B(x) = T(x) \ \forall x \in B$.

Definición 1.3.14. Sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal. Una *extensión* de T a un conjunto M que contiene a $\mathcal{D}(T)$ es una función $\widetilde{T} : M \longrightarrow Y$ tal que $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$.

Teorema 1.3.15. *Sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de un espacio normado X y Y es un espacio de Banach. Entonces T tiene una extensión $\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow Y$ tal que $\widetilde{T}$ es un operador lineal y acotado cuya norma satisface la igualdad $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Ahora, recordando la definición de espacio cociente (Definición 1.2.15), dados un espacio normado X y un subespacio Y de X con la propiedad de que Y es cerrado en X, definimos el mapeo canónico de X en X/Y como sigue:

Definición 1.3.16. Sean X un espacio normado y Y un subespacio cerrado de X. El *mapeo cociente* de X en X/Y es el mapeo $\pi : X \longrightarrow X/Y$ dado por $\pi(x) = x + Y$ para cada $x \in X$.

En seguida, enunciaremos y probaremos un sencillo lema sobre el mapeo cociente definido anteriormente con la finalidad de presentar un importante teorema que se puede obtener como consecuencia de dicho lema.

Lema 1.3.17. *Sean Y un subespacio de un espacio normado X tal que Y es cerrado en X y $\pi : X \longrightarrow X/Y$ el mapeo cociente de X en X/Y. Si $B_X(0,1)$ es la bola unitaria abierta en X y $B_{X/Y}(0+Y,1)$ es la bola unitaria abierta en X/Y, entonces $\pi\left(B_X(0,1)\right) = B_{X/Y}(0+Y,1)$.*

Demostración. Sean X, Y y $\pi : X \longrightarrow X/Y$ como en el enunciado del lema. Sean $B_X(0,1)$ la bola unitaria abierta en X y $B_{X/Y}(0+Y,1)$ la bola unitaria abierta en X/Y. Si $x \in B_X(0,1)$, por el Lema 1.2.18 sabemos que $\|\pi(x)\| = \|x+Y\| \leq \|x\| < 1$, por lo que $\pi(x) \in B_{X/Y}(0+Y,1)$ y, en consecuencia, $\pi(B_X(0,1)) \subseteq B_{X/Y}(0+Y,1)$. Por otra parte, si $z+Y \in B_{X/Y}(0+Y,1)$, entonces $\|z+Y\| < 1$. Luego, nuevamente por el Lema 1.2.18, sabemos que para $\epsilon = 1 - \|z+Y\| > 0$ existe $u \in X$ tal que $\pi(u) = u+Y = z+Y$ y $\|u\| < \|z+Y\| + (1 - \|z+Y\|) = 1$. Así, tenemos que $u \in B_X(0,1)$ y $\pi(u) = z+Y$, de donde se sigue que $z+Y \in \pi(B_X(0,1))$. De esta manera, hemos probado que $B_{X/Y}(0+Y,1) \subseteq \pi(B_X(0,1))$ y, por tanto, $\pi(B_X(0,1)) = B_{X/Y}(0+Y,1)$. $\square$

Teorema 1.3.18. *Sean X y Z espacios normados y $T : X \longrightarrow Z$ un operador lineal. Supongamos que Y es un subespacio cerrado de X tal que $Y \subseteq \mathcal{N}(T)$. Si $\pi : X \longrightarrow X/Y$ es el mapeo cociente de X en X/Y, entonces existe un único operador lineal $S : X/Y \longrightarrow Z$ tal que $T = S\pi$. Además, $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$, S es acotado si y sólo si T es acotado y, si T es acotado, entonces $\|T\| = \|S\|$.*

Ahora, introduciremos la noción de funcional lineal que resulta ser un caso particular del concepto de operador lineal.

Definición 1.3.19. Una *funcional lineal* f es un operador lineal cuyo dominio es un subespacio vectorial de un espacio vectorial X y cuyo rango está contenido en el campo escalar $\mathbb{K}$ de X.

Debido a que una funcional lineal es un caso especial de un operador lineal y $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es un espacio normado, de manera análoga a como se definió el concepto de operador lineal y acotado, podemos definir la noción de funcional lineal y acotada como sigue:

Definición 1.3.20. Sean X un espacio normado y $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ un operador lineal, con $\mathcal{D}(f)$ un subespacio de X. Se dice que f es *acotada* si existe un número real $c \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq c\|x\|$ para cualquier $x \in \mathcal{D}(f)$.

Similarmente a como se hizo anteriormente para un operador lineal y acotado, definimos la norma de una funcional lineal y acotada $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathcal{D}(f)$ es un subespacio de un espacio normado X, como:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

y si $\mathcal{D}(f) = \{0\}$, definimos la norma de f como $\|f\| = 0$.

Nuevamente es claro a partir de la definición de norma de una funcional lineal y acotada que $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ y que si $c \geq 0$ es un número real tal que $|f(x)| \leq c\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$, entonces $\|f\| \leq c$. Más aún, por el Lema 1.3.8, sabemos que:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(f)\\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathcal{D}(f)\},$$

y que si $\mathcal{D}(f) \neq \{0\}$, entonces:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(f)\\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

Notamos que, como un caso particular del Teorema 1.3.10, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.3.21. *Una funcional lineal $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathcal{D}(f)$ es un subespacio de un espacio normado X, es continua si y sólo si f es acotada.*

Para concluir esta sección enunciaremos un lema que nos permitirá expresar a toda funcional lineal en términos de su parte real y concluir que, por tanto, dos funcionales lineales son iguales si y sólo si sus respectivas partes reales coinciden.

Lema 1.3.22. *Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{C}$ y X_r el espacio normado sobre $\mathbb{R}$ que se obtiene al restringir el producto de vectores por escalares a $\mathbb{R}\times X$.*

a) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal, entonces $Re(f) : X_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal y $f(x) = Re(f)(x) - iRe(f)(ix)$ $\forall x \in X$.

b) Si $g : X_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal, entonces existe una única funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $Re(f) = g$.

c) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal, entonces f es acotada si y sólo $Re(f) : X_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada. Además, si f es acotada, entonces $\|f\| = \|Re(f)\|$.

Demostración. Sean X y X_r como en el enunciado del lema.

a) Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal. Claramente se tiene que el dominio X_r de $Re(f)$ es un espacio vectorial y que el rango de $Re(f)$ está contenido en el campo escalar $\mathbb{R}$ de X_r. Además, es claro que si z_1 y z_2 son cualesquiera dos números complejos y α es cualquier número real se cumple que $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ y $Re(\alpha z_1) = \alpha Re(z_1)$. Luego, por la linealidad de f, obtenemos que si $x_1, x_2 \in X_r$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$Re(f)(x_1 + x_2) = Re(f(x_1 + x_2)) = Re(f(x_1) + f(x_2)) =$$

$$Re(f(x_1)) + Re(f(x_2)) = Re(f)(x_1) + Re(f)(x_2),$$

y

$$Re(f)(\beta x_1) = Re(f(\beta x_1)) = Re(\beta f(x_1)) = \beta Re(f(x_1)) = \beta Re(f)(x_1).$$

Por tanto, $Re(f)$ es una funcional lineal. Más aún, notemos que si z es un número complejo, tenemos que:

$$Re(z) - iRe(iz) = Re(z) - iRe(i(Re(z) + iIm(z))) =$$

$$Re(z) - iRe(-Im(z) + iRe(z)) = Re(z) - i(-Im(z)) = Re(z) + iIm(z) = z.$$

De lo anterior y de la linealidad de f se obtiene que:

$$f(x) = Re(f(x)) - iRe(i(f(x))) = Re(f(x)) - iRe(f(ix)) =$$

$$Re(f)(x) - iRe(f)(ix),$$

para cualquier $x \in X$. Por tanto, $f(x) = Re(f)(x) - iRe(f)(ix)\ \forall x \in X$.

b) Sea $g : X_r \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $f(x) = g(x) - ig(ix)\ \forall x \in X$. Así, por la linealidad de g, obtenemos que si $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f(x_1 + x_2) = g(x_1 + x_2) - ig(i(x_1 + x_2)) = g(x_1) + g(x_2) - ig(ix_1 + ix_2) =$$

$$g(x_1) + g(x_2) - ig(ix_1) - ig(ix_2) = g(x_1) - ig(ix_1) + g(x_2) - ig(ix_2) =$$

$$f(x_1) + f(x_2),$$

y

$$f(\alpha x_1) = g(\alpha x_1) - ig(i(\alpha x_1)) =$$

$$g((Re(\alpha) + iIm(\alpha))x_1) - ig(i(Re(\alpha) + iIm(\alpha))x_1) =$$

$$g(Re(\alpha)x_1 + iIm(\alpha)x_1) - ig(-Im(\alpha)x_1 + iRe(\alpha)x_1) =$$

$$Re(\alpha)g(x_1) + Im(\alpha)g(ix_1) + iIm(\alpha)g(x_1) - iRe(\alpha)g(ix_1) =$$

$$(Re(\alpha) + iIm(\alpha))g(x_1) + (Im(\alpha) - iRe(\alpha))g(ix_1) =$$

$$(Re(\alpha) + iIm(\alpha))g(x_1) - i(Re(\alpha) + iIm(\alpha))g(ix_1) =$$

$$\alpha g(x_1) - i\alpha g(ix_1) = \alpha(g(x_1) - ig(ix_1)) = \alpha f(x_1).$$

Consecuentemente, f es una funcional lineal y, como g es real valuada, es claro que $Re(f) = g$. Además, si $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal tal que $Re(h) = g$, por el inciso a) del presente lema, sabemos que $h(x) = Re(h)(x) - iRe(h)(ix) = g(x) - ig(ix) = f(x)$ $\forall x \in X$. Por tanto, f es la única funcional lineal con dominio X que satisface la igualdad $Re(f) = g$.

c) Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal. Por el inciso a) de este lema, tenemos que $Re(f) : X_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal.
Si f es acotada, entonces $|Re(f)(x)| = |Re(f(x))| \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ $\forall x \in X_r$, por lo que $Re(f)$ es una funcional lineal y acotada.
Conversamente, supongamos que $Re(f)$ es acotada. Sea $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$. Si $f(x) = 0$, entonces 1 es un escalar tal que $|1| = 1$ y $1f(x) = f(x) = 0 = |0| = |f(x)|$. Por otra parte, si $f(x) \neq 0$, entonces $\frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}$ es un escalar que satisface que $\left|\frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}\right| = 1$ y $\frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}f(x) = \frac{|f(x)|^2}{|f(x)|} = |f(x)|$. En consecuencia, tenemos que existe un escalar α_x tal que $|\alpha_x| = 1$ y $\alpha_x f(x) = |f(x)|$. Además, por la linealidad de f sabemos que $\alpha_x f(x) = f(\alpha_x x)$ y como $f(\alpha_x x) = \alpha_x f(x) = |f(x)| \in \mathbb{R}$, entonces $f(\alpha_x x) = Re(f(\alpha_x x)) = Re(f)(\alpha_x x)$. Más aún, como $|\alpha_x| = 1$, se tiene que $\|\alpha_x x\| = |\alpha_x|\|x\| = \|x\| \leq 1$. Así, obtenemos que:

$$|f(x)| = f(\alpha_x x) = Re(f)(\alpha_x x) \leq |Re(f)(\alpha_x x)| \leq$$

$$\|Re(f)\|\|\alpha_x x\| \leq \|Re(f)\|.$$

Por tanto, $|f(x)| \leq \|Re(f)\|$ para cualquier $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$. De esta manera tenemos que si $y \in X$ y $y \neq 0$, entonces $u = \frac{1}{\|y\|}y \in X$ satisface que $\|u\| \leq 1$, por lo que $|f(y)| = \left|f\left(\frac{\|y\|}{\|y\|}y\right)\right| = \left|\|y\|f\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)\right| = \|y\|\left|f\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)\right| = \|y\||f(u)| \leq \|Re(f)\|\|y\|$. Además, como $f(0) = 0$, es claro que la desigualdad anterior también es válida para $y = 0$, de donde se sigue que $|f(x)| \leq \|Re(f)\|\|x\|$ $\forall x \in X$ y, por consiguiente, f es acotada.

Finalmente, observemos que si f es acotada, entonces la prueba realizada anteriormente muestra que $Re(f)$ es acotada y que las desigualdades $|Re(f)(x)| \leq \|f\|\|x\|$ y $|f(x)| \leq \|Re(f)\|\|x\|$ se satisfacen para cualquier $x \in X$ de donde se obtiene que $\|Re(f)\| \leq \|f\|$ y $\|f\| \leq \|Re(f)\|$ y, por tanto, $\|Re(f)\| = \|f\|$.

$\square$

1.4. Espacios de operadores y espacios duales

A continuación, presentaremos un nuevo espacio normado que se puede construir a partir del conjunto de todos los operadores lineales y acotados entre dos espacios normados.

Es bien sabido que, dados dos espacios vectoriales X y Y sobre el mismo campo, el conjunto de todos los operadores lineales con dominio X y rango contenido en Y es un espacio vectorial, al cual denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$. Más aún, de la Definición 1.3.6, es sencillo ver que si además X y Y son espacios normados, entonces el conjunto de todos los operadores lineales y acotados con dominio X y rango contenido en Y es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Notación. $B(X,Y)$ denotará al espacio vectorial de todos los operadores lineales y acotados con dominio X y rango contenido en Y, donde X y Y son dos espacios normados sobre el mismo campo.

El siguiente teorema, el cual es consecuencia inmediata del Lema 1.3.8, afirma que a $B(X,Y)$ se le puede dar una estructura de espacio normado.

Teorema 1.4.1. *Sean X y Y espacios normados. Entonces, el espacio vectorial $B(X,Y)$ de todos los operadores lineales y acotados con dominio X y rango contenido en Y es un espacio normado con la norma definida por:*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| =$$

$$\text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

Ahora que sabemos que $B(X,Y)$ es un espacio normado, tiene sentido preguntarnos bajo qué condiciones $B(X,Y)$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.4.2. *Si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sean X y Y espacios normados y supongamos que Y es un espacio de Banach. Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $B(X,Y)$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, sabemos que para $\widehat{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{1+\|x\|} > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \widehat{\epsilon}$ para cualesquiera $n, m \geq N_1$. De esta manera, obtenemos que:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \widehat{\epsilon}\|x\| < \epsilon,$$

para cualesquiera $n, m \geq N_1$.
Así, hemos probado que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy para cualquier $x \in X$. Como Y es completo, de lo anterior se sigue que, para cada $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $T_n(x) \longrightarrow y$. Por tanto, podemos definir la función $T : X \longrightarrow Y$ como $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ para cada $x \in X$. Como T_n es lineal $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces T es lineal pues:

$$T(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + T_n(x_2) =$$

$$T(x_1) + T(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

y

$$T(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) = \alpha T(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \forall x \in X.$$

Veamos que T es acotado y que $T_n \longrightarrow T$. Sean $\delta > 0$ y $x_0 \in X$. Como $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, tenemos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \frac{\delta}{2}$ para cualesquiera $n, m \geq N_2$. Entonces:

$$\|T_n(x_0) - T_m(x_0)\| = \|(T_n - T_m)(x_0)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x_0\| \leq \frac{\delta}{2}\|x_0\|, \quad (1.11)$$

para cualesquiera $n, m \geq N_2$.
Notemos que como la desigualdad obtenida en (1.11) es válida para cualquier $n \geq N_2$, podemos tomar el límite cuando m tiende a infinito en dicha expresión y usar la continuidad de la norma (Lema 1.2.4) para obtener que:

$$\|(T_n - T)(x_0)\| = \|T_n(x_0) - T(x_0)\| \leq \frac{\delta}{2}\|x_0\|, \quad (1.12)$$

para cualquier $n \geq N_2$ y cualquier $x_0 \in X$.
De (1.12) se sigue que $T_n - T$ es un operador lineal y acotado $\forall n \geq N_2$ y como T_n es acotado $\forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $T = T_{N_2} - (T_{N_2} - T)$ es un operador

acotado. Por tanto $T \in B(X,Y)$. Más aún, de (1.12) también se sigue que $\|T_n - T\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ para cualquier $n \geq N_2$. Como $\delta > 0$ era un número positivo arbitrario, de lo anterior se obtiene que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ y, por consiguiente, $T_n \longrightarrow T$. Por tanto, $B(X,Y)$ es un espacio de Banach. $\square$

Para terminar esta sección, definiremos el espacio dual y el espacio doble dual de un espacio normado y veremos que el espacio dual de todo espacio normado es un espacio normado completo.

Definición 1.4.3. Sea X un espacio normado. El *espacio dual* de X, denotado por X^*, es el espacio normado [1] de todas la funcionales lineales y acotadas con dominio X cuya norma está definida por:

$$\|x^*\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x^*(x)| =$$

$$\text{ínf}\{c \geq 0 : |x^*(x)| \leq c\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

El *espacio doble dual* de X, denotado por X^{**}, es el espacio dual del espacio normado X^*.

Observemos que como el rango de una funcional lineal está contenido en $\mathbb{K}$ (el campo escalar de X), entonces $X^* = B(X, \mathbb{K})$. Además, como $\mathbb{K}$ es completo con la métrica usual, a partir del Teorema 1.4.2 obtenemos de manera inmediata el siguiente resultado:

Teorema 1.4.4. *El espacio dual X^* de un espacio normado X es un espacio de Banach.*

1.5. Algunos teoremas fundamentales

En esta sección, enunciaremos y probaremos algunos teoremas que resultan fundamentales para el desarrollo de la teoría sobre espacios normados y operadores lineales y acotados, a saber, el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema del Acotamiento Uniforme, el Teorema del Mapeo Abierto y el Teorema de la

[1] Al ser un espacio normado, el espacio dual X^* de un espacio normado X es considerado como un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto escalar definidas como $(x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x)$ y $(\alpha x^*)(x) = \alpha x^*(x)$ para cualesquiera $x^*, y^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in X$. Alternativamente, si X es un espacio vectorial complejo, de acuerdo con Leonid V. Kantorovich y Gleb P. Akilov, [17], es posible definir el producto escalar en X^* como $(\alpha x^*)(x) = \overline{\alpha} x^*(x)$ para cualesquiera $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in X$.

Gráfica Cerrada. Empezaremos por presentar el Teorema de Hahn-Banach en su versión para espacios reales, su versión generalizada a espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y su versión para espacios normados, así como algunas de sus consecuencias teóricas. Para este fin requerimos definir previamente los conceptos de funcional sublineal y seminorma.

Definición 1.5.1. Sea X un espacio vectorial. Una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *funcional sublineal* si:

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in X$.

ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)\ \forall x \in X$ y para cualquier número real $\alpha \geq 0$.

Definición 1.5.2. Sea X un espacio vectorial. Una función $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *seminorma* si:

i) $\rho(x) \geq 0\ \forall x \in X$.

ii) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in X$.

iii) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)\ \forall x, y \in X$.

A partir de la Definición 1.5.1 podemos enunciar el Teorema de Hahn-Banach en su versión real.

Teorema 1.5.3 (Hahn-Banach real)**.** *Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional sublineal. Sean Z es un subespacio vectorial de X y $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal que satisface la propiedad:*

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Z.$$

Entonces f tiene una extensión $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}$ es una funcional lineal y $\widetilde{f}(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$.

Ahora, con base en la Definición 1.5.2 enunciaremos el Teorema de Hahn-Banach en su versión generalizada a espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, cuya prueba depende del teorema anterior.

Teorema 1.5.4 (Hahn-Banach generalizado)**.** *Sean X un espacio vectorial y $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma. Sean Z un subespacio vectorial de X y $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal que cumple la condición:*

$$|f(x)| \leq \rho(x) \quad \forall x \in Z.$$

Entonces f tiene una extensión $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\widetilde{f}$ es una funcional lineal y $|\widetilde{f}(x)| \leq \rho(x)$ $\forall x \in X$.

El Teorema de Hahn-Banach generalizado nos ayudará a demostrar el siguiente teorema fundamental para espacios normados conocido como el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados:

Teorema 1.5.5 (Hahn-Banach para espacios normados)**.** *Sean X un espacio normado y Z un subespacio de X. Sea $z^* : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal y acotada. Entonces z^* tiene una extensión $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que x^* es una funcional lineal y acotada y $\|x^*\| = \|z^*\|$.*

Demostración. Sean X, Z y $z^* : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ como en el enunciado del teorema. Si $Z = \{0\}$, entonces $z^*(0) = 0$ y es claro que la función $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $x^*(x) = 0$ $\forall x \in X$ cumple que x^* es una extensión de z^*, x^* es una funcional lineal y acotada y $\|x^*\| = \|z^*\| = 0$.
Por otra parte, si $Z \neq \{0\}$, consideremos la función $\rho : X \longrightarrow \mathbb{K}$ definida como $\rho(x) = \|z^*\|\|x\|$ para cada $x \in X$. Entonces, tenemos que ρ es una seminorma pues claramente $\rho(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ y, por la definición de norma, sabemos que:

$$\rho(x+y) = \|z^*\|\|x+y\| \leq \|z^*\|(\|x\| + \|y\|) = \rho(x) + \rho(y) \quad \forall x, y \in X,$$

y

$$\rho(\alpha x) = \|z^*\|\|\alpha x\| = |\alpha|\|z^*\|\|x\| = |\alpha|\rho(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \forall x \in X.$$

Además, se tiene que $|z^*(x)| \leq \|z^*\|\|x\| = \rho(x)$ $\forall x \in Z$. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach generalizado (Teorema 1.5.4), obtenemos que z^* tiene una extensión $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que x^* es una funcional lineal y:

$$|x^*(x)| \leq \rho(x) = \|z^*\|\|x\| \quad \forall x \in X. \tag{1.13}$$

De (1.13), claramente se sigue que x^* es una funcional lineal y acotada y que $\|x^*\| \leq \|z^*\|$. Más aún, como $Z \subseteq X$ y $x^*|_Z = z^*$, entonces es claro que:

$$\|z^*\| = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{|z^*(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|} = \|x^*\|,$$

y, por consiguiente, $\|z^*\| = \|x^*\|$. Por tanto, $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una extensión de z^*, x^* es una funcional lineal y acotada y $\|z^*\| = \|x^*\|$. $\square$

A continuación, enunciaremos dos resultados importantes que son una consecuencia sencilla del Teorema de Hahn-Banach para espacios normados.

Teorema 1.5.6. *Sean X un espacio normado y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq 0$. Entonces existe una funcional lineal y acotada $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x_0) = \|x_0\|$.*

Corolario 1.5.7. *Sean X un espacio normado y $x \in X$. Entonces:*

$$\|x\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ x^* \neq 0}} \frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|}.$$

En consecuencia, si $x_0 \in X$ es tal que $x^*(x_0) = 0$ $\forall x^* \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.

En seguida, definiremos la funcional de Minkowski asociada a un subconjunto absorbente de un espacio vectorial:

Definición 1.5.8. Sean X un espacio vectorial y A un subconjunto absorbente de X. La *funcional de Minkowski asociada a A* es la función $p_{_A} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p_{_A}(x) = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\}$ $\forall x \in X$.

Ahora, probaremos un teorema de separación que se puede obtener como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Para este fin, necesitamos enunciar previamente el siguiente resultado:

Lema 1.5.9. *Sean X un espacio vectorial y A un subconjunto absorbente de X. Sea $p_{_A} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la funcional de Minkowski asociada a A. Entonces:*

a) $p_{_A}(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ *y* $A \subseteq \{x \in X : p_{_A}(x) \leq 1\}$.

b) $p_{_A}$ *es una funcional sublineal si A es convexo.*

Demostración. Sean X, A y $p_{_A} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como en el enunciado del lema.

a) Sea $x \in X$. Es claro que 0 es cota inferior del conjunto $\{t > 0 : x \in tA\}$, por lo que $p_{_A}(x) = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\} \geq 0$. Además, si $a \in A$, entonces tenemos que $1 \in \{t > 0 : a \in tA\}$, de donde se sigue que $p_{_A}(a) \leq 1$ y, por consiguiente, $A \subseteq \{x \in X : p_{_A}(x) \leq 1\}$. Por tanto, $p_{_A}(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ y $A \subseteq \{x \in X : p_{_A}(x) \leq 1\}$.

b) Supongamos que A es convexo. Sea $x \in X$. Como A es absorbente, por el Lema 1.1.3 sabemos que $0 \in A$, por lo que $0 = t0 \in tA$ para cualquier $t > 0$. Así, obtenemos que $\{t > 0 : 0 \in tA\} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$, de donde

se sigue que $p_A(0) = \text{ínf}\{t \in \mathbb{R} : t > 0\} = 0$. De lo anterior, se obtiene que $p_A(0x) = p_A(0) = 0 = 0p_A(x)$. Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 0$. Sea $B_x = \{t > 0 : x \in tA\}$. Entonces $\{\alpha t : t \in B_x\} = \{s > 0 : \alpha x \in sA\}$ ya que si $t \in B_x$, tenemos que $\alpha t > 0$ y $\alpha x \in (\alpha t)A$, pues $x \in tA$, y si $s > 0$ es tal que $\alpha x \in sA$, claramente se tiene que $\frac{s}{\alpha} > 0$ y $x \in \frac{s}{\alpha}A$, de donde se sigue que $\frac{s}{\alpha} \in B_x$ y, por tanto, $s = \alpha\left(\frac{s}{\alpha}\right) \in \{\alpha t : t \in B_x\}$. En consecuencia, podemos concluir que $p_A(\alpha x) = \text{ínf}\{s > 0 : \alpha x \in sA\} = \text{ínf}\{\alpha t : t \in B_x\} = \alpha\, \text{ínf}\{t : t \in B_x\} = \alpha p_A(x)$. De esta manera, hemos probado que $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$ $\forall x \in X$ y para cualquier número real $\alpha \geq 0$.
Por otra parte, si $u, v \in X$ y $t > 0$ y $s > 0$ son tales que $u \in tA$ y $v \in sA$, entonces $u + v \in tA + sA$. Luego, como A es convexo, por el Lema 1.1.3 tenemos que $tA+sA = (t+s)A$, por lo que $u+v \in tA+sA = (t+s)A$, con $t+s > 0$. Consecuentemente, se tiene que $p_A(u+v) \leq t+s$. De lo anterior, obtenemos que $p_A(u + v) - t \leq s$ para cualquier número real $s > 0$ tal que $v \in sA$, por lo que $p_A(u + v) - t \leq p_A(v)$. De la desigualdad anterior podemos concluir que $p_A(u + v) - p_A(v) \leq t$ para cualquier número real $t > 0$ tal que $u \in tA$ y, por consiguiente, $p_A(u + v) - p_A(v) \leq p_A(u)$ o, equivalentemente, $p_A(u+v) \leq p_A(u)+p_A(v)$. Así, hemos demostrado que $p_A(u + v) \leq p_A(u) + p_A(v)$ $\forall u, v \in X$ y, por tanto, p_A es una funcional sublineal.

$\square$

Teorema 1.5.10. *Sea X un espacio normado. Sean C un subconjunto convexo no vacío de X y $x_0 \in X$ tal que $\inf_{c\in C} \|x_0 - c\| > 0$. Entonces, existe $x^* \in X^*$ tal que $Re(x^*)(x_0) > \sup_{c\in C} Re(x^*)(c)$.*

Demostración. Sean X un espacio normado y C un subconjunto convexo no vacío de X. Sean $x_0 \in X$ y $\delta = \inf_{c\in C} \|x_0 - c\|$. Supongamos que $\delta > 0$. A lo largo de esta demostración, dados $z_0 \in X$ y $\epsilon_0 > 0$, denotaremos a la bola abierta con centro en z_0 y radio ϵ_0 como $B(z_0, \epsilon_0)$.
Primero probaremos el teorema para el caso en que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sea $y_0 \in C$. Consideremos el conjunto $-y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. Notemos que, para cada $c \in C$, se satisface que $-y_0 + c + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = B\left(-y_0 + c, \frac{\delta}{2}\right)$ ya que si $b \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, entonces $\| - y_0 + c + b - (-y_0 + c)\| = \|b\| < \frac{\delta}{2}$, por lo que $-y_0 + c + b \in B\left(-y_0 + c, \frac{\delta}{2}\right)$ y, por otra parte, si $a \in B\left(-y_0 + c, \frac{\delta}{2}\right)$, entonces $a + y_0 - c \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ y, en consecuencia, podemos concluir que $a = -y_0 + c + (a + y_0 - c) \in -y_0 + c + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. De lo anterior, obtenemos que

$-y_0 + c + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ es abierto en X para cada $c \in C$ y, por tanto, tenemos que $-y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = \bigcup \left\{-y_0 + c + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) : c \in C\right\}$ es abierto en X. Más aún, se tiene que $-y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ es convexo. En efecto, si $y, z \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ y $t \in [0, 1]$, entonces existen $c_1, c_2 \in C$ y $b_1, b_2 \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ tales que $y = -y_0 + c_1 + b_1$ y $z = -y_0 + c_2 + b_2$, de donde se sigue que:

$$ty + (1 - t)z = t(-y_0 + c_1 + b_1) + (1 - t)(-y_0 + c_2 + b_2) =$$

$$-y_0 + (tc_1 + (1 - t)c_2) + (tb_1 + (1 - t)b_2). \tag{1.14}$$

Como C es convexo, sabemos que $tc_1 + (1 - t)c_2 \in C$. Además, por el Lema 1.2.20, tenemos que $B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ es convexa y, por tanto, $tb_1 + (1 - t)b_2 \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. De lo anterior y de (1.14), obtenemos que $ty + (1 - t)z \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ y, por consiguiente, $-y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ es convexo.

Por otra parte, si $u \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ y $u = -y_0 + c' + b'$, con $c' \in C$ y $b' \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, del Lema 1.2.3 se sigue que:

$$\|x_0 - y_0 - u\| = \|x_0 - y_0 - (-y_0 + c' + b')\| = \|x_0 - c' - b'\| \geq$$

$$\|x_0 - c'\| - \|b'\| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

de donde se obtiene que $\inf\left\{\|x_0 - y_0 - v\| : v \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} \geq \frac{\delta}{2} > 0$. Además, es claro que $0 = -y_0 + y_0 + 0 \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. En resumen, hemos probado que $-y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ es un subconjunto abierto, convexo y no vacío de X tal que $0 \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ y $x_0 - y_0 \in X$ satisface que $\inf\left\{\|x_0 - y_0 - v\| : v \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} > 0$. Supongamos que existe $x^* \in X^*$ tal que:

$$x^*(x_0 - y_0) > \sup\left\{x^*(v) : v \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\}. \tag{1.15}$$

Como $c = c + 0 \in C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ $\forall c \in C$, se tiene que $C \subseteq C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. Como x^* es funcional lineal, de lo anterior y de (1.15) obtenemos que:

$$x^*(x_0) > x^*(y_0) + \sup\left\{x^*(v) : v \in -y_0 + C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} =$$

$$x^*(y_0) + \sup\left\{x^*(-y_0 + c + b) : c \in C,\ b \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} =$$

$$x^*(y_0) + \sup\left\{-x^*(y_0) + x^*(c+b) : c \in C,\ b \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} =$$

$$\sup\left\{x^*(c+b) : c \in C,\ b \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} =$$

$$\sup\left\{x^*(w) : w \in C + B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right\} \geq \sup_{c \in C} x^*(c).$$

En consecuencia, $x^* \in X^*$ es tal que $x^*(x_0) > \sup_{c\in C} x^*(c)$ y, por tanto, basta probar el teorema para el caso en que C es un subconjunto abierto y no vacío de X tal que $0 \in C$. Supongamos pues que C es abierto en X y que $0 \in C$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(0,\epsilon) \subseteq C$. Por el Lema 1.2.20, sabemos que $B(0,\epsilon)$ es absorbente y, en consecuencia, para cada $x \in X$ existe un número real $s_x > 0$ tal que $x \in tB(0,\epsilon) \subseteq tC$ para cualquier $t > s_x$. De lo anterior se sigue que C es absorbente. Sea $p_C : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la funcional de Minkowski asociada a C. Observemos que como $\delta > 0$, entonces existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $s_0 x_0 \notin C$, pues, en caso contrario, tendríamos que $\left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_0 \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ de donde se obtendría que $\delta \leq \left\|x_0 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_0\right\| = \left\|\frac{1}{2n} x_0\right\| = \frac{1}{2n}\|x_0\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, se tendría que $\delta \leq 0$, contradiciendo la hipótesis sobre δ. Luego, como $s_0 \in (0,1)$ es tal que $s_0 x_0 \notin C$, entonces $x_0 \notin tC$ si $0 < t \leq \frac{1}{s_0}$, ya que si existiese un número real $t_0 > 0$ tal que $t_0 \leq \frac{1}{s_0}$ y $x_0 \in t_0 C$, claramente obtendríamos que $\frac{1}{t_0} x_0 \in C$ y que $s_0 t_0 \in (0,1]$ y, como $0 \in C$ y C es convexo, podríamos concluir que $s_0 x_0 = (s_0 t_0)\left(\frac{1}{t_0} x_0\right) + (1 - s_0 t_0) 0 \in C$, contradiciendo el hecho de que $s_0 x_0 \notin C$. Por tanto, si $0 < t \leq \frac{1}{s_0}$, entonces $x_0 \notin tC$ y, consecuentemente, $\frac{1}{s_0}$ es cota inferior del conjunto $\{t > 0 : x_0 \in tC\}$. De esta manera, se obtiene que $p_C(x_0) \geq \frac{1}{s_0}$. Además, por el Lema 1.5.9, sabemos que $C \subseteq \{x \in X : p_C(x) \leq 1\}$, por lo que $\sup_{c \in C} p_C(c) \leq 1$. Más aún, como $s_0 \in (0,1)$, de lo anterior obtenemos que:

$$p_C(x_0) \geq \frac{1}{s_0} > 1 \geq \sup_{c\in C} p_C(c). \tag{1.16}$$

Ahora, sea $Z = \langle x_0 \rangle$ y sea $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(tx_0) = tp_C(x_0)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Notemos que Z es un subespacio vectorial de X y que, como $\delta > 0$, entonces $x_0 \notin C$, de donde se sigue que $x_0 \neq 0$, pues $0 \in C$. Así, se obtiene que f está bien definida ya que si $tx_0 = sx_0$, entonces $t - s = 0$, por lo que $f(tx_0) = tp_C(x_0) = sp_C(x_0) = f(sx_0)$. Más aún, si $tx_0, sx_0 \in Z$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(tx_0 + sx_0) = f((t+s)x_0) = (t+s)p_C(x_0) = tp_C(x_0) + sp_C(x_0) = f(tx_0) + f(sx_0)$ y $f(\alpha(tx_0)) = f((\alpha t)x_0) = (\alpha t)p_C(x_0) = \alpha(tp_C(x_0)) = \alpha f(tx_0)$

y, por consiguiente, f es una funcional lineal. Como C es convexo, nuevamente por el Lema 1.5.9, se tiene que $p_C(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ y que p_C es una funcional sublineal. De lo anterior, obtenemos que $p_C(tx_0) = tp_C(x_0) = f(tx_0)$ si $t \geq 0$ y $p_C(tx_0) \geq 0 \geq tp_C(x_0) = f(tx_0)$ si $t < 0$. De esta forma, podemos concluir que f es una funcional lineal tal que $f(z) \leq p_C(z)$ $\forall z \in Z$, con Z subespacio vectorial de X y p_C funcional sublineal. Por el Teorema de Hahn-Banach en su versión para espacios reales (Teorema 1.5.3), sabemos que f tiene una extensión lineal $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x^*(x) \leq p_C(x)$ $\forall x \in X$. Luego, si $x \in B(0, \epsilon) \subseteq C$, tenemos que $-x \in B(0, \epsilon) \subseteq C$, pues $\|-x\| = \|x\| < \epsilon$, y $-x^*(x) = x^*(-x)$, de donde podemos concluir que:

$$|x^*(x)| = \text{máx}\{x^*(x), -x^*(x)\} = \text{máx}\{x^*(x), x^*(-x)\} \leq$$

$$\text{máx}\{p_C(x), p_C(-x)\} \leq \sup_{c \in C} p_C(c) \leq 1.$$

Así, se obtiene que si $x \in X \setminus \{0\}$, entonces $\left\| \frac{\epsilon}{2\|x\|} x \right\| = \frac{\epsilon}{2\|x\|} \|x\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, por lo que $\frac{\epsilon}{2\|x\|} x \in B(0, \epsilon)$ y, consecuentemente, $\left| x^* \left(\frac{\epsilon}{2\|x\|} x \right) \right| \leq 1$. De la desigualdad anterior claramente se sigue que:

$$|x^*(x)| \leq \frac{2}{\epsilon} \|x\| \quad \forall x \in X \setminus \{0\}. \tag{1.17}$$

Como $x^*(0) = 0$, es claro que la desigualdad en la expresión (1.17) es válida para $x = 0$ y, por tanto, x^* es acotada. Además, de (1.16) y del hecho de que $x^*(x) \leq p_C(x)$ $\forall x \in X$, obtenemos que $x^*(x_0) = f(x_0) = p_C(x_0) > \sup_{c \in C} p_C(c) \geq \sup_{c \in C} x^*(c)$. En consecuencia, $x^* \in X^*$ y $x^*(x_0) > \sup_{c \in C} x^*(c)$.
Finalmente, si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, consideramos el espacio normado real X_r que se obtiene restringiendo el producto de vectores por escalares a $\mathbb{R} \times X$. Entonces, C es un subconjunto convexo no vacío de X_r y $x_0 \in X_r$ es tal que $\delta > 0$. El caso probado anteriormente para espacios normados sobre $\mathbb{R}$ muestra que existe $y^* \in (X_r)^*$ tal que $y^*(x_0) > \sup_{c \in C} y^*(c)$. Luego, por el Lema 1.3.22, obtenemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $Re(x^*) = y^*$, de donde claramente se sigue que $Re(x^*)(x_0) = y^*(x_0) > \sup_{c \in C} y^*(c) = \sup_{c \in C} Re(x^*)(c)$. $\square$

A continuación, definiremos algunos conceptos topológicos en un espacio métrico como sigue:

Definición 1.5.11. Sean M un espacio métrico y B un subconjunto de M. Se dice que B es:

a) *denso en ninguna parte* de M si $int(\overline{B}) = \emptyset$.

b) *de la primera categoría* en M si existe una colección numerable $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de M tales que $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y B_n es denso en ninguna parte de M para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) *de la segunda categoría* en M si B no es de la primera categoría en M.

Con base en la definición anterior, podemos presentar el conocido Teorema de Categoría de Baire, el cual nos servirá como herramienta para probar el Teorema del Acotamiento Uniforme y cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 1.5.12 (Categoría de Baire)**.** *Sea M un espacio métrico no vacío. Si M es completo, entonces M es de la segunda categoría en M. Consecuentemente, si M es un espacio métrico no vacío, M es completo y $M = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con A_n cerrado en M $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(A_{n_0}) \neq \emptyset$.*

Teorema 1.5.13 (Acotamiento Uniforme)**.** *Sean X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales y acotados con dominio X y rango contenido en Y con la propiedad de que, para cada $x \in X$, existe un número real $c_x \geq 0$ tal que $\|T_n(x)\| \leq c_x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe un número real $c \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean X, Y y $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X,Y)$ como en el enunciado del teorema. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos un subconjunto A_k de X de la siguiente manera:

$$A_k = \{x \in X : \|T_n(x)\| \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $F_n(x) = \|T_n(x)\|$ $\forall x \in X$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de la continuidad de la norma (Lema 1.2.4) y la continuidad de T_n (Teorema 1.3.10), se obtiene que F_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Como el intervalo $[0,k]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, de lo anterior se sigue que $\{x \in X : \|T_n(x)\| \leq k\} = F_n^{-1}([0,k])$ es cerrado en X para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Así, podemos concluir que $A_k = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}([0,k])$ es cerrado en X para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, tenemos que $X = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, ya que si $x \in X$, por hipótesis sabemos

que existe un número real $c_x \geq 0$ tal que $\|T_n(x)\| \leq c_x \ \forall n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, tenemos que $\|T_n(x)\| \leq N \ \forall n \in \mathbb{N}$, donde N es un número natural mayor o igual a c_x y, por tanto, $N \in \mathbb{N}$ es tal que $x \in A_N$.
En resumen, hemos demostrado que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, con A_k cerrado en $X \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.5.12), sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(A_{k_0}) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in int(A_{k_0})$ y sea $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \subseteq A_{k_0}$, donde $B(x_0, r_0)$ es la bola abierta con centro en x_0 y radio r_0.
Ahora, para cada $x \in X \setminus \{0\}$, definimos el vector:

$$z = x_0 + \frac{r_0}{2\|x\|}x. \tag{1.18}$$

De (1.19) obtenemos que $\|z - x_0\| = \left\|\frac{r_0}{2\|x\|}x\right\| = \frac{r_0}{2} < r_0$, por lo que $z \in B(x_0, r_0) \subseteq A_{k_0}$. Luego, como $z \in A_{k_0}$, entonces:

$$\|T_n(z)\| \leq k_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Similarmente, como $x_0 \in B(x_0, r_0) \subseteq A_{k_0}$, también se tiene que:

$$\|T_n(x_0)\| \leq k_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.20}$$

Además, de (1.19) se sigue que:

$$x = \frac{2\|x\|}{r_0}(z - x_0). \tag{1.21}$$

De (1.20), (1.21) y (1.22) podemos concluir que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\|T_n(x)\| = \left\|T_n\left(\frac{2\|x\|}{r_0}(z - x_0)\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{r_0}\|T_n(z - x_0)\| =$$

$$\frac{2\|x\|}{r_0}\|T_n(z) - T_n(x_0)\| \leq \frac{2\|x\|}{r_0}(\|T_n(z)\| + \|T_n(x_0)\|) \leq$$

$$\frac{2\|x\|}{r_0}(2k_0) = \frac{4k_0}{r_0}\|x\|.$$

Así, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $x \in X \setminus \{0\}$, se tiene que

$\|T_n(x)\| \leq \dfrac{4k_0}{r_0}\|x\|$ y, en consecuencia:

$$\|T_n\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T_n(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{4k_0}{r_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\|T_n\| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$, con $c = \dfrac{4k_0}{r_0} \geq 0$. □

Ahora, definiremos el concepto de mapeo abierto entre espacios métricos de la siguiente manera:

Definición 1.5.14. Sean M y N espacios métricos. Decimos que una función $f : M \longrightarrow N$ es un *mapeo abierto* si la imagen bajo f de todo subconjunto abierto en M es un subconjunto abierto en N, es decir, si A es cualquier subconjunto abierto en M, entonces $f(A)$ es un subconjunto abierto en N.

En seguida enunciaremos un lema que será de gran utilidad para demostrar el Teorema del Mapeo Abierto.

Lema 1.5.15. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, acotado y suprayectivo. Si $B_X(0,1)$ es la bola unitaria abierta en X, entonces la imagen de $B_X(0,1)$ bajo T contiene una bola abierta en Y con centro en el vector cero de Y.*

En seguida, presentaremos y demostraremos el Teorema del Mapeo Abierto, el cual nos da condiciones suficientes para asegurar que un operador lineal es un mapeo abierto. Además, dicho teorema nos permite concluir que el operador inverso de cualquier operador lineal, acotado y biyectivo entre espacios de Banach es un operador lineal y acotado.

Teorema 1.5.16 (Mapeo Abierto)**.** *Sean X y Y espacios de Banach. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, acotado y suprayectivo, entonces T es un mapeo abierto. En consecuencia, si además $T : X \longrightarrow Y$ es biyectivo, entonces $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ es un operador lineal y acotado.*

Demostración. Sean X, Y y $T : X \longrightarrow Y$ como en el enunciado del teorema. Sea A un subconjunto abierto en X. Si $T(A) = \emptyset$, entonces es claro que $T(A)$ es abierto en Y. Por tanto, supongamos que $T(A) \neq \emptyset$. Sea $y \in T(A)$. Como $y \in T(A)$, sabemos que existe $x \in A$ tal que $y = T(x)$. Además, como A es abierto en X, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B_X(x,r) \subseteq A$, donde $B_X(x,r)$

es la bola abierta en X con centro en x y radio r. Sea $B_X(0,1)$ la bola unitaria abierta en X. Si $w \in B_X(0,1)$, entonces $\|w\| < 1$, por lo que:

$$\|(rw + x) - x\| = \|rw\| = r\|w\| < r.$$

De lo anterior, se sigue que $rw + x \in B_X(x,r) \subseteq A$ y, por consiguiente, $rw + x \in A$. Por tanto, sabemos que existe $a_0 \in A$ tal que $rw + x = a_0$, de donde se obtiene que $w = \frac{1}{r}(a_0 - x) \in \frac{1}{r}(A - x)$. Así, hemos probado que $B_X(0,1) \subseteq \frac{1}{r}(A - x)$ y, en consecuencia, $T(B_X(0,1)) \subseteq T\left(\frac{1}{r}(A - x)\right)$.
Ahora, por el Lema 1.5.15, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(0,\epsilon) \subseteq T(B_X(0,1))$, donde $B_Y(0,\epsilon)$ es la bola abierta en Y con centro en 0 y radio ϵ. Luego, como $T(B_X(0,1)) \subseteq T\left(\frac{1}{r}(A - x)\right)$, de lo anterior se sigue que $B_Y(0,\epsilon) \subseteq T\left(\frac{1}{r}(A - x)\right)$. Sea $B_Y(T(x), r\epsilon)$ la bola abierta en Y con centro en $T(x)$ y radio $r\epsilon$. Si $u \in B_Y(T(x), r\epsilon)$, entonces $\|u - T(x)\| < r\epsilon$, de donde se obtiene que:

$$\left\|\frac{1}{r}(u - T(x))\right\| = \frac{1}{r}\|u - T(x)\| < \epsilon.$$

Así, obtenemos que $\frac{1}{r}(u - T(x)) \in B_Y(0,\epsilon) \subseteq T\left(\frac{1}{r}(A - x)\right)$, por lo que $\frac{1}{r}(u - T(x)) \in T\left(\frac{1}{r}(A - x)\right)$. Por tanto, existe $a_1 \in A$ tal que $\frac{1}{r}(u - T(x)) = T\left(\frac{1}{r}(a_1 - x)\right) = \frac{1}{r}(T(a_1) - T(x))$. De lo anterior, claramente se sigue que $u = T(a_1)$ y, por consiguiente, $u \in T(A)$. De esta forma, hemos demostrado que $B_Y(y, r\epsilon) = B_Y(T(x), r\epsilon) \subseteq T(A)$ y como y era un elemento arbitrario de $T(A)$, podemos concluir que $T(A)$ es abierto en Y. Por tanto, T es un mapeo abierto.
Ahora, si además T es biyectivo, entonces $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ existe y es un operador lineal por el Teorema 1.3.4. Más aún, si B es un subconjunto abierto en X, como ya vimos que T es un mapeo abierto, entonces $\left(T^{-1}\right)^{-1}(B) = T(B)$ es un subconjunto abierto en Y. Así, se tiene que la imagen inversa bajo T^{-1} de cualquier subconjunto abierto en X es un subconjunto abierto en Y, por lo que T^{-1} es un operador lineal y continuo y, por el Teorema 1.3.10, podemos concluir que T^{-1} es un operador lineal y acotado. $\square$

A continuación, introduciremos la noción de operador lineal y cerrado entre espacios normados.

Definición 1.5.17. Sean X y Y espacios normados y sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de X. Diremos que T es *cerrado* si su *gráfica* $\mathcal{G}(T) = \{(x,y) : x \in \mathcal{D}(T),\ y = T(x)\}$ es cerrada en el espacio normado $X \times Y$, donde $X \times Y$ es un espacio vecotrial con las operaciones definidas como:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y,$$

y

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \forall (x, y) \in X \times Y.$$

y la norma sobre $X \times Y$ se define de la siguiente manera:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Observemos que en la definición anterior también hemos presentado una manera de darle estructura de espacio normado al producto cartesiano de dos espacios normados. Además, a partir de dicha definición es sencillo comprobar que si X y Y son dos espacios normados y $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X \times Y$, entonces $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ si y sólo si $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$ y que $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq X \times Y$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ son de Cauchy.

Como ya vimos anteriormente en la sección 1.1, el concepto de compacidad se puede simplificar en un espacio métrico en términos de sucesiones. Asimismo, la noción de operador lineal y cerrado entre espacios normados se puede facilitar en términos de sucesiones conforme al siguiente teorema:

Teorema 1.5.18. *Sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de un espacio normado X y Y es un espacio normado. Entonces T es cerrado si y sólo si T satisface la siguiente propiedad: si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$ es tal que $x_n \longrightarrow x$ y $T(x_n) \longrightarrow y$, entonces $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y = T(x)$.*

Demostración. Sean X y Y espacios normados y sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, con $\mathcal{D}(T)$ un subespacio de X. A lo largo de esta prueba, consideramos a $X \times Y$ como un espacio normado con la norma introducida en la Definición 1.5.17.

Primero, supongamos que T es cerrado. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $T(x_n) \longrightarrow y$. Como $x_n \longrightarrow x$ y $T(x_n) \longrightarrow y$, entonces $(x_n, T(x_n)) \longrightarrow (x, y)$ y claramente $((x_n, T(x_n)))_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}(T)$. Luego, obtenemos que $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Además, como T es cerrado, sabemos que G es cerrada en $X \times Y$, por lo que $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(T)$. De lo anterior, se obtiene que $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$

y, en consecuencia, $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y = T(x)$.
Conversamente, supongamos que T satisface la propiedad de que si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$ es tal que $x_n \longrightarrow x$ y $T(x_n) \longrightarrow y$, entonces $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y = T(x)$. Sea $(u,v) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Entonces, existe una sucesión $((u_n,v_n))_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{G}(T)$ tal que $(u_n,v_n) \longrightarrow (u,v)$. Como $(u_n,v_n) \longrightarrow (u,v)$, tenemos que $u_n \longrightarrow u$ y $v_n \longrightarrow v$. Más aún, como $((u_n,v_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}(T)$, se tiene que $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$ y $v_n = T(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, obtenemos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$, $u_n \longrightarrow u$ y $T(u_n) \longrightarrow v$. Luego, por hipótesis, se obtiene que $u \in \mathcal{D}(T)$ y $v = T(u)$, por lo que $(u,v) \in \mathcal{G}(T)$. De esta forma, hemos probado que $\overline{\mathcal{G}(T)} \subseteq \mathcal{G}(T)$ y es claro que $\mathcal{G}(T) \subseteq \overline{\mathcal{G}(T)}$, de donde se sigue que $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(T)$. Por tanto, $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $X \times Y$ y, por consiguiente, T es cerrado. $\square$

Ahora, enunciaremos el Teorema de la Gráfica Cerrada, el cual nos da condiciones suficientes para garantizar que un operador lineal y cerrado entre dos espacios normados es acotado.

Teorema 1.5.19 (Gráfica Cerrada)**.** *Sean X y Y espacios de Banach y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal y cerrado, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de X. Si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en X, entonces T es acotado.*

Demostración. Sean X, Y y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ como en el enunciado del teorema. Supongamos que $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en X. En lo que resta de esta prueba, $X \times Y$ es considerado como un espacio normado con la norma presentada en la Definición 1.5.17.
Notemos que $X \times Y$ es un espacio de Banach , ya que si $((x_n,y_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq X \times Y$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ son sucesiones de Cauchy, de donde se sigue que existen $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, por ser X y Y completos, y, como consecuencia de lo anterior, se obtiene que $(x_n,y_n) \longrightarrow (x,y)$. Por otra parte, como T es cerrado, sabemos que $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $X \times Y$. Además, es fácil comprobar que $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio de $X \times Y$. Así, tenemos que $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$ y que $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio cerrado de X. Luego, como $X \times Y$ y X son espacios de Banach, obtenemos que $\mathcal{G}(T)$ y $\mathcal{D}(T)$ son completos por el Teorema 1.2.8.
Ahora, consideremos el mapeo $P : \mathcal{G}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ dado por $P((x,T(x))) = x$ $\forall (x,T(x)) \in \mathcal{G}(T)$. Es claro que $\mathcal{D}(P) = \mathcal{G}(T)$ es un espacio vectorial, por ser subespacio de $X \times Y$, y que el rango de P está contenido en el espacio vectorial $\mathcal{D}(T)$. Más aún, P es lineal ya que si $(x_1,T(x_1)),(x_2,T(x_2)) \in \mathcal{G}(T)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,

entonces:

$$P((x_1, T(x_1)) + (x_2, T(x_2))) = P((x_1 + x_2, T(x_1) + T(x_2))) =$$

$$P((x_1 + x_2, T(x_1 + x_2))) = x_1 + x_2 = P((x_1, T(x_1))) + P((x_2, T(x_2))),$$

y

$$P(\alpha(x_1, T(x_1))) = P((\alpha x_1, \alpha T(x_1))) = P((\alpha x_1, T(\alpha x_1))) =$$

$$\alpha x_1 = \alpha P((x_1, T(x_1))).$$

Por tanto, P es un operador lineal. Además, claramente se tiene que el mapeo $P^{-1} : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G}(T)$ dado por $P^{-1}(x) = (x, T(x))\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ es el mapeo inverso de P, por lo que P es un mapeo biyectivo. Más aún, tenemos que P es acotado ya que:

$$\|P((x, T(x)))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\| \quad \forall (x, T(x)) \in \mathcal{G}(T).$$

Por tanto, $P : \mathcal{G}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ es un operador lineal, acotado y biyectivo, con $\mathcal{G}(T)$ y $\mathcal{D}(T)$ espacios de Banach. En consecuencia, por el Teorema del Mapeo Abierto (Teorema 1.5.18), se obtiene que P^{-1} es un operador lineal y acotado, por lo que existe un número real $c \geq 0$ tal que $\|P^{-1}(x)\| \leq c\|x\|\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$. Así, podemos concluir que T es acotado ya que:

$$\|T(x)\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\| = \|P^{-1}(x)\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Por tanto, T es un operador lineal y acotado. □

Para finalizar esta sección, presentaremos un lema que nos permite ver bajo qué condiciones un operador lineal y acotado es, a su vez, cerrado y bajo qué condiciones el dominio de un operador lineal y acotado es cerrado.

Lema 1.5.20. *Sean $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de un espacio normado X y Y es un espacio normado. Entonces:*

a) T es cerrado si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en X.

b) $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en X si T es cerrado y Y es un espacio de Banach.

1.6. Operadores adjuntos

En seguida, definiremos el operador adjunto asociado a un operador lineal y acotado y estudiaremos algunas de sus propiedades fundamentales, para lo cual usaremos el Teorema 1.5.6.

Definición 1.6.1. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado, con X y Y espacios normados. El *operador adjunto* $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ de T es el operador definido por:

$$(T^*(y^*))(x) = y^*(T(x)) \quad \forall y^* \in Y^* \text{ y } \forall x \in X.$$

El siguiente teorema nos asegura que el operador adjunto de un operador lineal y acotado también es un operador lineal y acotado y que, de hecho, las normas de un operador lineal y acotado y de su operador adjunto son iguales.

Teorema 1.6.2. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Entonces el operador adjunto T^* de T es un operador lineal y acotado y $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demostración. Sean X y Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Sea $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ el operador adjunto de T. Notemos que el dominio Y^* de T^* es un espacio vectorial y que el rango de T^* está contenido en el espacio vectorial X^*, ya que si $y^* \in Y^*$, entonces $T^*(y^*) = y^*T$ y $y^*T \in X^*$ por ser la composición de un operador lineal y acotado con dominio X seguido de una funcional lineal y acotada. Además, si $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{gathered}(T^*(y_1^* + y_2^*))(x) = (y_1^* + y_2^*)(T(x)) = y_1^*(T(x)) + y_2^*(T(x)) = \\ (T^*(y_1^*))(x) + (T^*(y_2^*))(x) = (T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*))(x) \quad \forall x \in X,\end{gathered} \tag{1.22}$$

y

$$\begin{gathered}(T^*(\alpha y_1^*))(x) = (\alpha y_1^*)(T(x)) = \alpha y_1^*(T(x)) = \\ \alpha(T^*(y_1^*))(x) = (\alpha T^*(y_1^*))(x) \quad \forall x \in X.\end{gathered} \tag{1.23}$$

De (1.23) y (1.24) se obtiene que $T^*(y_1^* + y_2^*) = T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*)$ y $T^*(\alpha y_1^*) = \alpha T^*(y_1^*)$ $\forall y_1^*, y_2^* \in Y^*$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. Por tanto, T^* es un operador lineal. Más aún, como $T^*(y^*) = y^*T$ $\forall y^* \in Y^*$, sabemos que $\|T^*(y^*)\| = \|y^*T\| \leq \|y^*\|\|T\|$ por el Lema 1.3.12, de donde se sigue que T^* es un operador lineal y acotado y que $\|T^*\| \leq \|T\|$. En consecuencia, para ver que $\|T^*\| = \|T\|$ basta probar que

$\|T\| \leq \|T^*\|$.
Sea $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$. Si $T(x_0) = 0$, entonces $\|T(x_0)\| = 0 \leq \|T^*\|$. Por otra parte, si $T(x_0) \neq 0$, por el Teorema 1.5.6, sabemos que existe $y^* \in Y^*$ tal que $\|y^*\| = 1$ y $y^*(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$. Luego, como $\|x_0\| = \|y^*\| = 1$, obtenemos que:

$$\|T(x_0)\| = y^*(T(x_0)) = (T^*(y^*))(x_0) \leq |(T^*(y^*))(x_0)| \leq \|T^*(y^*)\|\|x_0\| =$$

$$\|T^*(y^*)\| \leq \|T^*\|\|y^*\| = \|T^*\|.$$

De esta manera, hemos probado que $\|T(x_0)\| \leq \|T^*\|$ para cualquier $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$, por lo que:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\| \leq \|T^*\|.$$

Por tanto, $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es un operador lineal y acotado y $\|T\| = \|T^*\|$. $\square$

Ahora, presentaremos un lema en el que se enlistan algunas fórmulas, las cuales son sencillas de comprobar, para el operador adjunto de la composición de dos operadores lineales y acotados y el operador adjunto del operador inverso de un operador lineal y acotado.

Lema 1.6.3. *Sean X, Y y Z espacios normados.*

a) Si $S, T \in B(X,Y)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $(S+T)^* = S^* + T^*$ y $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.

b) Si $T \in B(X,Y)$ y $S \in B(Y,Z)$, entonces $(ST)^* = T^* S^*$.

c) Si $T \in B(X,Y)$, T^{-1} existe y $T^{-1} \in B(Y,X)$, entonces $(T^*)^{-1}$ existe, $(T^*)^{-1} \in B(X^*, Y^*)$ y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Para terminar esta sección enunciaremos un lema, cuya prueba es inmediata, para después probar un importante teorema que nos asegura que si existe un isomorfismo de un espacio normado X sobre un espacio normado Y, entonces también existe un isomorfismo del espacio normado Y^* sobre el espacio normado X^*.

Lema 1.6.4. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo. Si $B_X[0,1]$ es la bola unitaria cerrada en X y $B_Y[0,1]$ es la bola unitaria cerrada en Y, entonces $T(B_X[0,1]) = B_Y[0,1]$.*

Teorema 1.6.5. *Sean X y Y espacios normados. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo, entonces el operador adjunto T^* de T es un isomorfismo de Y^* sobre X^*.*

Demostración. Sean X, Y y $T : X \longrightarrow Y$ como en el enunciado del teorema. Sean $B_X[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X, $B_Y[0,1]$ la bola unitaria cerrada en Y y $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ el operador adjunto de T. Por el Teorema 1.6.2, sabemos que T^* es un operador lineal. Veamos que T^* es biyectivo. Si $y^* \in \mathcal{N}(T^*)$, entonces $T^*(y^*) = 0$. Luego, como T es biyectivo, para cualquier $y \in Y$, tenemos que $y^*(y) = y^*(T(T^{-1}(y))) = (T^*(y^*))(T^{-1}(y)) = 0$, por lo que $y^* = 0$. De esta manera, obtenemos que $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \{0\}$ y claramente $\{0\} \subseteq \mathcal{N}(T^*)$, de donde se sigue que $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$. En consecuencia, por el Teorema 1.3.4, obtenemos que el operador inverso de T^* existe y, por consiguiente, T^* es inyectivo. Por otra parte, nuevamente por el Teorema 1.3.4, sabemos que como T es un operador lineal y biyectivo, entonces T^{-1} también es un operador lineal. Más aún, como T es un isomorfismo, se tiene que $\|T^{-1}(y)\| = \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|$ $\forall y \in Y$ y, por consiguiente, T^{-1} es un operador lineal y acotado. Así, si $x^* \in X^*$, entonces $x^*T^{-1} \in Y^*$, por ser composición de dos operadores lineales y acotados. Además, para cualquier $x \in X$, se tiene que $(T^*(x^*T^{-1}))(x) = (x^*T^{-1})(T(x)) = x^*(T^{-1}(T(x))) = x^*(x)$. De lo anterior se obtiene que $T^*(x^*T^{-1}) = x^*$ y, consecuentemente, T^* es suprayectivo. Por tanto, T^* es biyectivo. Ahora, para cada $x \in X$, sea $y = T(x)$. Por el Lema 1.6.4, sabemos que $T(B_X[0,1]) = B_Y[0,1]$. En consecuencia, para cualquier $y^* \in Y^*$ tenemos que:

$$\|T^*(y^*)\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |(T^*(y^*))(x)| = \sup_{x \in B_X[0,1]} |y^*(T(x))| =$$

$$\sup_{y \in B_Y[0,1]} |y^*(y)| = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \leq 1}} |y^*(y)| = \|y^*\|.$$

Por tanto, T^* es un operador lineal y biyectivo tal que $\|T^*(y^*)\| = \|y^*\|$ $\forall y^* \in Y^*$ y, en consecuencia, $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es un isomorfismo. $\square$

Capítulo 2

Reflexividad y topologías débiles

El propósito de este segundo capítulo es introducir el concepto de reflexividad de un espacio normado así como algunos resultados fundamentales referentes a dicho concepto. Asimismo, se definirán la topología débil de un espacio normado, la topología débil* del espacio dual de un espacio normado y algunas nociones topológicas que serán de gran utilidad para probar los teoremas que se presentarán en el tercer capítulo de esta tesis. Todas las pruebas omitidas en este capítulo pueden encontrarse en [9], [11] y [12].

2.1. Espacios reflexivos

En esta sección introduciremos el concepto de reflexividad en espacios normados. A lo largo de esta sección consideraremos un espacio normado X, su espacio dual X^* y su espacio doble dual X^{**}. Comenzaremos por asociar una función a cada elemento de un espacio normado de la siguiente manera:

Definición 2.1.1. Sea X un espacio normado. Para cada $x \in X$, definimos la función $g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ como:

$$g_x(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*. \tag{2.1}$$

El lema que enunciaremos a continuación afirma que, para cada $x \in X$, la función g_x definida anteriormente es una funcional lineal y acotada y que las normas de x y g_x coinciden.

Lema 2.1.2. *Sea X un espacio normado. Para cada $x \in X$, la función $g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ definida según la expresión (2.1) es una funcional lineal y acotada, de modo que $g_x \in X^{**}$, y se satisface la igualdad $\|x\| = \|g_x\|$.*

Demostración. Sean X un espacio normado y $x \in X$. Sea $g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ la función definida según la expresión (2.1). Es claro que el dominio X^* de g_x es un espacio vectorial y que el rango de g_x es un subconjunto del campo escalar $\mathbb{K}$. Además, si $x_1^*, x_2^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$g_x(x_1^* + x_2^*) = (x_1^* + x_2^*)(x) = x_1^*(x) + x_2^*(x) = g_x(x_1^*) + g_x(x_2^*),$$

y

$$g_x(\alpha x_1^*) = (\alpha x_1^*)(x) = \alpha x_1^*(x) = \alpha g_x(x_1^*).$$

Por tanto g_x es una funcional lineal. Más aún, sabemos que $|g_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\| \ \forall x^* \in X^*$, de donde se sigue que g_x es acotada.
Por otra parte, por el Corolario 1.5.7, sabemos que:

$$\|x\| = \sup_{\substack{x^* \in X* \\ x^* \neq 0}} \frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|} = \sup_{\substack{x^* \in X* \\ x^* \neq 0}} \frac{|g_x(x^*)|}{\|x^*\|} = \|g_x\|.$$

Por tanto, $g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal y acotada y $\|x\| = \|g_x\|$. □

Con base en la Definición 2.1.1, podemos definir el mapeo canónico de un espacio normado en su espacio doble dual de la siguiente manera:

Definición 2.1.3. Sea X un espacio normado. El *mapeo canónico* de X en X^{**} es la función $C : X \longrightarrow X^{**}$ dada por:

$$C(x) = g_x \quad \forall x \in X,$$

donde g_x es la función definida según la expresión (2.1).

El teorema que mostraremos a continuación nos permite ver que el mapeo canónico de un espacio normado X en su espacio doble dual X^{**} es un operador lineal e inyectivo que preserva normas.

Lema 2.1.4. *Sean X un espacio normado y $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Entonces C es un isomorfismo del espacio normado X sobre el espacio normado $\mathcal{R}(C)$ (el rango de C).*

Demostración. Sean X y $C : X \longrightarrow X^{**}$ como en el enuncaido del lema. Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces, para cualquier $x^* \in X^*$ se tiene que:

$$(C(x+y))(x^*) = g_{x+y}(x^*) = x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y) =$$

$$g_x(x^*) + g_y(x^*) = (C(x) + C(y))(x^*), \tag{2.2}$$

y

$$(C(\alpha x))(x^*) = g_{\alpha x}(x^*) = x^*(\alpha x) =$$

$$\alpha x^*(x) = \alpha g_x(x^*) = (\alpha C(x))(x^*). \tag{2.3}$$

Así, de (2.2) y (2.3) obtenemos que $C(x+y) = C(x)+C(y)$ y que $C(\alpha x) = \alpha C(x)$ $\forall x, y \in X$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. Ahora, por el Lema 2.1.2, sabemos que:

$$\|C(x)\| = \|g_x\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

De lo anterior se sigue C es inyectiva ya que si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $C(x_1) = C(x_2)$, entonces $0 = \|C(x_1) - C(x_2)\| = \|C(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$ y, por consiguiente, $x_1 - x_2 = 0$ o, equivalentemente, $x_1 = x_2$. Luego, como C es inyectiva, tenemos que la función $C : X \longrightarrow \mathcal{R}(C)$ es una función biyectiva del espacio normado X sobre el espacio normado $\mathcal{R}(C)$ que satisface la definición de isomorfismo de espacios normados (Definición 1.2.13). $\square$

El caso en el que el mapeo canónico resulta ser suprayectivo es de gran importancia y motiva la definición de espacios reflexivos.

Definición 2.1.5. Un espacio normado X es *reflexivo* si $\mathcal{R}(C) = X^{**}$, donde $C : X \longrightarrow X^{**}$ es el mapeo canónico de X en X^{**}.

Como consecuencia del Lema 2.1.4, obtenemos que si un espacio normado X es reflexivo, entonces el mapeo canónico de X en X^{**} es un isomorfismo del espacio normado X sobre el espacio normado X^{**}. Más aún, por el Teorema 1.4.4, sabemos que el espacio doble dual X^{**} es un espacio de Banach. Como consecuencia de lo anterior, claramente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.1.6. *Si un espacio normado X es reflexivo, entonces X es un espacio de Banach.*

El siguiente teorema nos da otra propiedad de los espacios normados de dimensión finita, esta vez con respecto a reflexividad.

Teorema 2.1.7. *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo.*

En seguida, enunciaremos un lema que se obtiene a partir del Teorema de Hahn-Banach para espacios normados, así como un teorema sobre espacios separables, cuya prueba depende del lema anteriormente mencionado, y un corolario de dicho teorema. Para este fin, necesitamos definir previamente la noción de separabilidad de un espacio normado.

Definición 2.1.8. Un espacio normado X es *separable* si existe un subconjunto numerable D de X tal que D es denso en X.

Lema 2.1.9. *Sea Y un subespacio de un espacio normado X tal que Y es cerrado en X y $Y \subsetneq X$. Sean $x_0 \in X \setminus Y$ y $\delta = \inf_{y \in Y} \|y - x_0\|$. Entonces, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$, $x^*(y) = 0$ $\forall y \in Y$ y $x^*(x_0) = \delta$.*

Teorema 2.1.10. *Si el espacio dual X^* de un espacio normado X es separable, entonces X es separabale.*

Corolario 2.1.11. *Si X es un espacio normado separable y el espacio dual X^* de X no es seprabale, entonces X no es reflexivo.*

Demostración. Sea X un espacio normado separable tal que el espacio dual X^* de X no es separable. Supongamos que X es reflexivo. Entonces, el mapeo canónico $C : X \longrightarrow X^{**}$ es un isomorfismo de espacios normados. Luego, como X es separable, de lo anterior se sigue que X^{**} es separable. En consecuencia, por el Teorema 2.1.10, se obtiene que X^* es separable, contradiciendo la hipótesis sobre X^*. Por tanto, X no es reflexivo. $\square$

Ahora, presentaremos un ejemplo de un espacio reflexivo y de un espacio normado que no es reflexivo.

Ejemplo 2.1.12. Sean $p \in (1, \infty)$ y ℓ_p el espacio vectorial de todas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por e_n a la sucesión en ℓ_p cuyo enésimo término es igual a 1 y todos sus demás términos son iguales a cero. Es bien sabido que ℓ_p es un espacio de Banach con la norma dada por $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$. Además, es sencillo ver que, para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$, se tiene que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Más aún, si $q \in (1, \infty)$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, también es bien sabido que la función

$T : \ell_p \longrightarrow (\ell_q)^*$ tal que, para cada elemento $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ_p, $T(x)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(T(x))(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \ \forall y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$ es un isomorfismo y que la función $S : (\ell_p)^* \longrightarrow \ell_q$ tal que, para cada $x^* \in (\ell_q)^*$, $S(x^*)$ es la sucesión $(x^*(e_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$ también es un isomorfismo. Luego, por el Teorema 1.6.5, sabemos que el operador adjunto S^* de S es un isomorfismo de $(\ell_q)^*$ sobre $(\ell_p)^{**}$. Así, tenemos que si $C : \ell_p \longrightarrow (\ell_p)^{**}$ es el mapeo canónico de ℓ_p en $(\ell_p)^{**}$, entonces $C = S^*T$. En efecto, si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$, entonces, para cada $x^* \in (\ell_p)^*$, tenemos que:

$$((S^*T)(x))(x^*) = (S^*(T(x)))(x^*) = (T(x))(S(x^*)) =$$

$$(T(x))((x^*(e_n))_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n x^*(e_n).$$

En consecuencia, por la linealidad y la continudad de x^*, de lo anterior obtenemos que:

$$((S^*T)(x))(x^*) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n x^*(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n e_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x^*(x_n e_n) =$$

$$\lim_{k\to\infty} x^*\left(\sum_{n=1}^{k} x_n e_n\right) = x^*\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n e_n\right) =$$

$$x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = x^*(x) = (C(x))(x^*). \tag{2.4}$$

De (2.4) claramente se sigue que $C(x) = (S^*T)(x) \ \forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ y, por consiguiente, $C = S^*T$. Consecuentemente, como S^* y T son isomorfismos, entonces $C = S^*T$ es biyectivo, por lo que $\mathcal{R}(C) = \ell_p$ y, por tanto, ℓ_p es reflexivo.

Ejemplo 2.1.13. Sea ℓ_∞ el espacio de vectorial de todas las sucesiones acotadas en $\mathbb{K}$ y sea c_0 el subespacio vectorial de ℓ_∞ cuyos elementos son las sucesiones en $\mathbb{K}$ convergentes a cero. Es bien sabido que ℓ_∞ es un espacio de Banach con la norma definida como $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ y que c_0 es un subespacio cerrado de ℓ_∞. A continuación, probaremos que el espacio normado c_0, considerado como un subespacio de ℓ_∞, no es reflexivo. Sea $\mathbb{F}$ un subconjunto numerable de $\mathbb{K}$ tal que $\mathbb{F}$ es denso en $\mathbb{K}$ (por ejemplo $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{F} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Siguiendo con la notación del ejemplo anterior, sean $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ y D el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A con coeficientes en $\mathbb{F}$. Es claro que $D \subseteq c_0$ y que D es numerable, por ser $\mathbb{F}$ y A numerables. Veamos que D es denso en c_0. Sean $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ y $\epsilon > 0$. Como a converge a cero, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall n \geq N$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\beta_n \in \mathbb{F}$ tal que $|a_n - \beta_n| < \frac{\epsilon}{3}$. Observando que los primeros N términos de la sucesión $a - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$ son iguales a cero y que todos los términos de la sucesión $\sum_{n=1}^{N} a_n e_n - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n$ son iguales a cero a excepción de los primeros N, obtenemos que $\sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n$ es un elemento de D tal que:

$$\left\| a - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \right\|_\infty \leq \left\| a - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\|_\infty + \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \right\|_\infty =$$

$$\sup_{n \geq N+1} |a_n| + \sup_{n \leq N} |\beta_n - a_n| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

De lo anterior se sigue que D es denso en c_0 y, por tanto, c_0 es separable.

Por otra parte, si B es un subconjunto denso de ℓ_∞, entonces B no es numerable. En efecto, si $S = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty : x_n \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, entonces claramente S no es numerable. Ahora, sean $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S$ tales que $x \neq y$. Claramente tenemos que $\|x - y\|_\infty = 1$. Más aún, si $B(x, \frac{1}{3})$ es la bola abierta en ℓ_∞ con centro en x y radio $\frac{1}{3}$ y $B(y, \frac{1}{3})$ es la bola abierta en ℓ_∞ con centro en y y radio $\frac{1}{3}$, entonces $B(x, \frac{1}{3})$ y $B(y, \frac{1}{3})$ son ajenas ya que si $z \in B(x, \frac{1}{3}) \cap B(y, \frac{1}{3})$, se tendría que $1 = \|x - y\|_\infty \leq \|x - z\|_\infty + \|z - y\|_\infty < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, lo cual claramente es una contradicción. Luego, como B es denso en ℓ_∞, de lo anterior podemos concluir que por cada elemento x de S, la bola abierta $B(x, \frac{1}{3})$ contiene un elemento distinto de B y como S no es numerable, obtenemos que B no es numerable. De esta manera, hemos probado que cualquier subconjunto denso de ℓ_∞ no puede ser numerable, por lo que ℓ_∞ no es separable.

Finalmente, si ℓ_1 es el espacio vectorial de todas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, es bien sabido que ℓ_1 es un espacio de Banach con la norma dada por $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ y que existen isomorfismos de ℓ_∞ sobre $(\ell_1)^*$ y de ℓ_1 sobre $(c_0)^*$, digamos $T : \ell_\infty \longrightarrow (\ell_1)^*$ y $W : \ell_1 \longrightarrow (c_0)^*$. Consecuentemente, por el Teorema 1.6.5, sabemos que el operador adjunto W^* de W es un isomorfismo de $(c_0)^{**}$ sobre $(\ell_1)^*$ y, por ser T un isomorfismo, se tiene que $T^{-1} : (\ell_1)^* \longrightarrow \ell_\infty$ es un operador lineal y biyectivo y además $\|x^*\| = \|T(T^{-1}(x^*))\| = \|T^{-1}(x^*)\|_\infty$ $\forall x^* \in (\ell_1)^*$. Si suponemos que c_0 es reflexivo y $C : c_0 \longrightarrow (c_0)^{**}$ es el mapeo canónico de c_0 en $(c_0)^{**}$, de lo anterior claramente se sigue que $T^{-1}W^*C$ es un isomorfismo de c_0 sobre ℓ_∞, lo cual es una contradicción ya que c_0 es separable y ℓ_∞ no lo es. Por tanto, c_0 no es reflexivo.

Concluimos esta sección probando que si X es un espacio normado y Y es un subespacio cerrado de X, entonces X es reflexivo si y sólo si Y y X/Y son reflexivos. Para este fin, comenzaremos por introducir los conceptos de anulador de un subconjunto de un espacio normado y anulador de un subconjunto del espacio dual de un espacio normado como sigue:

Definición 2.1.14. Sea X un espacio normado. Sean A y B subconjuntos de X y X^*, respectivamente. El *anulador* de A en X^*, denotado por $A^\perp$, es el conjunto $A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \ \forall x \in A\}$. Asimismo, el *anulador* de B en X, denotado por ${}^\perp B$, es el conjunto ${}^\perp B = \{x \in X : x^*(x) = 0 \ \forall x^* \in B\}$.

El siguiente lema, cuya prueba depende del Lema 2.1.9, nos da algunas propiedades elementales de los anuladores definidos anteriormente:

Lema 2.1.15. *Sea X un espacio normado. Sean A y B subconjuntos de X y X^*, respectivamente.*

a) Los anuladores $A^\perp$ y ${}^\perp B$ son subespacios cerrados de X^* y X, respectivamente.

b) ${}^\perp(A^\perp)$ es el menor subespacio cerrado de X que contiene a A, esto es, ${}^\perp(A^\perp)$ es un subespacio cerrado de X que contiene a A y si Z es cualquier subespacio cerrado de X que contiene a A, entonces ${}^\perp(A^\perp) \subseteq Z$.

c) Si A es un subespacio de X, entonces ${}^\perp(A^\perp) = \overline{A}$.

A continuación, presentaremos dos teoremas que nos muestran dos isomorfismos importantes de espacios normados que relacionan los conceptos de anulador, espacio dual y espacio cociente.

Teorema 2.1.16. *Sean X un espacio normado y Y un subespacio de X. Entonces, existe un isomorfismo $T : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ tal que, para cada elemento*

$x^* + Y^\perp$ de $X^*/Y^\perp$, $T(x^* + Y^\perp)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(T(x^* + Y^\perp))(y) = x^*(y)$ $\forall y \in Y$.

Teorema 2.1.17. *Sea Y un subespacio de un espacio normado X tal que Y es cerrado en X. Entonces, existe un isomorfismo $T : Y^\perp \longrightarrow (X/Y)^*$ tal que, para cada $x^* \in Y^\perp$, $T(x^*)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(T(x^*))(x+Y) = x^*(x)$ $\forall x + Y \in X/Y$.*

Demostración. Sean X y Y como en el enunciado del teorema. Sean $\pi : X \longrightarrow X/Y$ el mapeo cociente de X en X/Y y S la función que a cada elemento z^* de $(X/Y)^*$ le asigna la función $z^*\pi$. Claramente el rango de S está contenido en $Y^\perp$ ya que si $z^* \in (X/Y)^*$, entonces $(S(z^*))(y) = z^*(\pi(y)) = z^*(y + Y) = z^*(0 + Y) = 0$ $\forall y \in Y$. Por tanto, S es una función del espacio vectorial $(X/Y)^*$ en el espacio vectorial $Y^\perp$. Además, S es lineal ya que si $z_1^*, z_2^* \in (X/Y)^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que:

$$S(z_1^* + z_2^*) = (z_1^* + z_2^*)\pi = z_1^*\pi + z_2^*\pi = S(z_1^*) + S(z_2^*),$$

y

$$S(\alpha z_1^*) = (\alpha z_1^*)\pi = \alpha(z_1^*\pi) = \alpha S(z_1^*).$$

Por otra parte, si $x^* \in Y^\perp$, es claro de la definición de anulador que $Y \subseteq \mathcal{N}(x^*)$. Así, tenemos que si $x^* \in Y^\perp$, entonces $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal y acotada tal que $Y \subseteq \mathcal{N}(x^*)$, de donde se sigue, por el Teorema 1.3.18, que existe una única funcional lineal y acotada $u^* : X/Y \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $x^* = u^*\pi = S(u^*)$ y $\|u^*\| = \|x^*\| = \|S(u^*)\|$. Así tenemos que, para cada $x^* \in Y^\perp$, existe una única $u^* \in (X/Y)^*$ tal que $x^* = S(u^*)$, por lo que S es un operador lineal inyectivo y suprayectivo, y $\|u^*\| = \|x^*\| = \|S(u^*)\|$. Por tanto, $S : (X/Y)^* \longrightarrow Y^\perp$ es un isomorfismo. En consecuencia, tenemos que si $T = S^{-1}$, entonces, para cada $x^* \in Y^\perp$, $T(x^*)$ es el único elemento de $(X/Y)^*$ tal que $x^* = T(x^*)\pi$, T es un operador lineal y biyectivo (por el Teorema 1.3.4) y $\|x^*\| = \|S(T(x^*))\| = \|T(x^*)\|$ $\forall x^* \in Y^\perp$, de donde se obtiene que $T : Y^\perp \longrightarrow (X/Y)^*$ es un isomorfismo. Finalmente, notemos que si $x^* \in Y^\perp$, entonces $(T(x^*))(x + Y) = (T(x^*))(\pi(x)) = (T(x^*)\pi)(x) = x^*(x)$ $\forall x + Y \in X/Y$. $\square$

Ahora, demostraremos un teorema que nos permitirá identificar al espacio doble dual de un subespacio Y de un espacio normado X con el anulador $(Y^\perp)^\perp$, al cual denotaremos por $Y^{\perp\perp}$ para simplificar la notación.

Teorema 2.1.18. *Sean Y un subespacio de un espacio normado X y $T : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ el isomorfismo del Teorema 2.1.16. Para cada $y^* \in Y^*$, sea $x^*_{y^*} + Y^\perp$ el único elemento de $X^*/Y^\perp$ que satisface la igualdad $T(x^*_{y^*} + Y^\perp) = y^*$. Entonces, existe un isomorfismo $S : Y^{\perp\perp} \longrightarrow Y^{**}$ tal que, para cada $x^{**} \in Y^{\perp\perp}$, $S(x^{**})$ es la funcional lineal y acotada dada por $(S(x^{**}))(y^*) = x^{**}(x^*_{y^*})$ $\forall y^* \in Y^*$.*

Demostración. Sean X, Y y $T : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ como en el enunciado del teorema y, para cada $y^* \in Y^*$, sea $x^*_{y^*} + Y^\perp$ el único elemento de $X^*/Y^\perp$ que cumple la igualdad $T(x^*_{y^*} + Y^\perp) = y^*$. Sea T^* el operador adjunto de T. Por el Lema 2.1.15, sabemos que $Y^\perp$ es un subespacio cerrado de X^*. Luego, por el Teorema 2.1.17, obtenemos que existe un isomorfismo $W : Y^{\perp\perp} \longrightarrow (X^*/Y^\perp)^*$ tal que, para cada $x^{**} \in Y^{\perp\perp}$, $W(x^{**})$ es la funcional lineal y acotada dada por $(W(x^{**}))(x^* + Y^\perp) = x^{**}(x^*)$ $\forall x^* + Y^\perp \in X^*/Y^\perp$. Además, como $T : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ es un isomorfismo, por el Teorema 1.6.5, se tiene que $T^* : Y^{**} \longrightarrow (X^*/Y^\perp)^*$, es un isomorfismo. De lo anterior, se sigue que $(T^*)^{-1}$ es un operador lineal y biyectivo. Sea $S = (T^*)^{-1}W$. Como $(T^*)^{-1}$ y W son operadores lineales y biyectivos, entonces S es también un operador lineal y biyectivo. Además, como T^* y W son isomorfismos, entonces $\|x^{**}\| = \|W(x^{**})\| = \|T^*((T^*)^{-1}(W(x^{**})))\| = \|(T^*)^{-1}(W(x^{**}))\| = \|S(x^{**})\|$ $\forall x^{**} \in Y^{\perp\perp}$. Así, tenemos que $S : Y^{\perp\perp} \longrightarrow Y^{**}$ es un isomorfismo. Más aún, observemos que, para cualesquiera $x^{**} \in Y^{\perp\perp}$ y $y^* \in Y^*$, tenemos que:

$$(S(x^{**}))(y^*) = (((T^*)^{-1}W)(x^{**}))(T(x^*_{y^*} + Y^\perp)) =$$

$$(T^*(((T^*)^{-1}W)(x^{**})))(x^*_{y^*} + Y^\perp) = (W(x^{**}))(x^*_{y^*} + Y^\perp) = x^{**}(x^*_{y^*}).$$

□

El siguiente lema caracteriza la reflexividad de un subespacio de un espacio normado en términos de anuladores.

Lema 2.1.19. *Sean Y un subespacio de un espacio normado X y $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Entonces Y es reflexivo si y sólo si $C(Y) = Y^{\perp\perp}$.*

Como consecuencia del lema anterior, podemos obtener el teorema que mostraremos en seguida, el cual nos garantiza la reflexividad de un subespacio cerrado de un espacio reflexivo, así como varios corolarios importantes de dicho teorema.

Teorema 2.1.20. *Sean X un espacio normado y Y un subespacio de X tal que Y es cerrado en X. Si X es reflexivo, entonces Y es reflexivo.*

Demostración. Sean X y Y como en el enunciado del teorema y $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. En primer lugar, veamos que $C({}^{\perp}(Y^{\perp})) = Y^{\perp\perp}$. Si $x \in {}^{\perp}(Y^{\perp})$, entonces es claro que $(C(x))(x^*) = x^*(x) = 0\ \forall x^* \in Y^{\perp}$, por lo que $C(x) \in Y^{\perp\perp}$ y, por consiguiente, $C({}^{\perp}(Y^{\perp})) \subseteq Y^{\perp\perp}$. Por otra parte, si $x^{**} \in Y^{\perp\perp} \subseteq X^{**}$, como X es reflexivo, sabemos que existe $y \in X$ tal que $C(y) = x^{**}$. Luego, como $x^{**} \in Y^{\perp\perp}$, entonces $x^*(y) = (C(y))(x^*) = x^{**}(x^*) = 0\ \forall x^* \in Y^{\perp}$, de donde se sigue que $y \in {}^{\perp}(Y^{\perp})$. De lo anterior, se obtiene que $x^{**} = C(y) \in C({}^{\perp}(Y^{\perp}))$ y, en consecuencia, $Y^{\perp\perp} \subseteq C({}^{\perp}(Y^{\perp}))$. Por tanto $C({}^{\perp}(Y^{\perp})) = Y^{\perp\perp}$. Además, como Y es un subespacio cerrado de X, de lo anterior y del Lema 2.1.15 obtenemos que $Y^{\perp\perp} = C({}^{\perp}(Y^{\perp})) = C(\overline{Y}) = C(Y)$. Así, se tiene que $Y^{\perp\perp} = C(Y)$ y, por el Lema 2.1.19, podemos concluir que Y es reflexivo. $\square$

Corolario 2.1.21. *Si X es un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.*

Corolario 2.1.22. *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio normado X. Si X es reflexivo, entonces X/Y es reflexivo.*

Demostración. Sean X un espacio normado y Y un subespacio de X tales que X es reflexivo y Y es cerrado en X. Como X es reflexivo, por el Teorema 2.1.6, tenemos que X es un espacio de Banach. Luego, por la reflexividad de X y el Corolario 2.1.21, obtenemos que X^* es reflexivo. Además, como $Y^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^*, de la reflexividad de X^* y del Teorema 2.1.20, se obtiene que $Y^{\perp}$ es reflexivo. Más aún, por el Teorema 2.1.17, sabemos que $Y^{\perp}$ es isomorfo a $(X/Y)^*$, de donde se sigue que $(X/Y)^*$ es reflexivo. Ahora, como X es un espacio de Banach, por el Teorema 1.2.19, sabemos que X/Y es un espacio de Banach. Así, como X/Y es un espacio de Banach y $(X/Y)^*$ es reflexivo, nuevamente por el Corolario 2.1.21, podemos concluir que X/Y es reflexivo. $\square$

Corolario 2.1.23. *Sean X un espacio normado y Y un subespacio de X tal que Y es cerrado en X. Si Y y X/Y son reflexivos, entonces X es reflexivo.*

Demostración. Sean X y Y como en el enunciado del corolario. Supongamos que Y y X/Y son reflexivos. Sea $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Sea $x^{**} \in X^{**}$. Por el Teorema 2.1.17, sabemos que existe un isomorfismo

$T : Y^{\perp} \longrightarrow (X/Y)^*$ tal que, para cada $x^* \in Y^{\perp}$, $T(x^*)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(T(x^*))(x+Y) = x^*(x)\ \forall x+Y \in X/Y$. Como T es un operador lineal y biyectivo, entonces T^{-1} es un operador lineal y biyectivo. Además, como T es un isomorfismo, tenemos que T^{-1} es acotado pues $\|z^*\| = \|T(T^{-1}(z^*))\| = \|T^{-1}(z^*)\|\ \forall z^* \in (X/Y)^*$. Luego, como $T^{-1} : (X/Y)^* \longrightarrow Y^{\perp}$ es un operador lineal y acotado, se tiene que $x^{**}T^{-1} \in (X/Y)^{**}$, por ser composición de dos operadores lineales y acotados. Ahora, como X/Y es reflexivo, sabemos que existe $x + Y \in X/Y$ tal que $Q(x + Y) = x^{**}T^{-1}$, donde Q es el mapeo canónico de X/Y en $(X/Y)^{**}$. Así, tenemos que si $x^* \in Y^{\perp}$, entonces:

$$x^{**}(x^*) = x^{**}((T^{-1}T)(x^*)) = (x^{**}T^{-1})(T(x^*)) =$$

$$(Q(x + Y))(T(x^*)) = (T(x^*))(x + Y) = x^*(x) = (C(x))(x^*).$$

De lo anterior, claramente se obtiene que $(x^{**} - C(x))(x^*) = 0\ \forall x^* \in Y^{\perp}$, por lo que $x^{**} - C(x) \in Y^{\perp\perp}$. Más aún, como Y es reflexivo, por el Lema 2.1.19, sabemos que $C(Y) = Y^{\perp\perp}$ y, en consecuencia, se tiene que existe $y \in Y$ tal que $x^{**} - C(x) = C(y)$. Finalmente, por la linealidad de C, de lo anterior obtenemos que $x^{**} = C(x + y)$ y, por consiguiente, $x^{**} \in \mathcal{R}(C)$. De esta manera, hemos probado que C es suprayectivo y, por tanto, X es reflexivo. □

Observemos que, como consecuencia del Teorema 2.1.20 y los Corolarios 2.1.22 y 2.1.23, obtenemos el resultado deseado que afirma que, dados un espacio normado X y un subespacio cerrado Y de X, entonces X es reflexivo si y sólo si Y y X/Y son reflexivos.

2.2. Topología débil

En seguida introduciremos y estudiaremos una topología que se puede definir en un espacio normado además de la topología inducida por la norma en dicho espacio. Esta toplogía se conoce como la topología débil. Comenzaremos por enunciar y demostrar un sencillo lema a partir del cual podremos definir la topología débil inducida por una familia de funciones en un conjunto.

Lema 2.2.1. *Sea A un conjunto y sean $\mathfrak{F}$ una familia de funciones y $\{(B_f, \tau_f) : f \in \mathfrak{F}\}$ una familia de espacios topológicos con la propiedad de que cada función f en $\mathfrak{F}$ mapea al conjunto A en B_f. Entonces existe una única topología $\tau_{\mathfrak{F}}$ sobre A tal que:*

i) cada f en $\mathfrak{F}$ es continua con respecto a la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$; y

ii) Si τ es una toplogía sobre A tal que cada f en $\mathfrak{F}$ es continua con respecto a la toplogía τ, entonces $\tau_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau$.

Además, la familia $\{f^{-1}(U) : f \in \mathfrak{F},\ U \in \tau_f\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una subbsase para la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$.

Demostración. Sean A, $\mathfrak{F}$ y $\{(B_f, \tau_f) : f \in \mathfrak{F}\}$ como en el enunciado del lema. Sea $\mathfrak{S} = \{f^{-1}(U) : f \in \mathfrak{F},\ U \in \tau_f\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ y sea $\tau_{\mathfrak{F}}$ la topología sobre A generada por la subbase $\mathfrak{S}$. Como $\mathfrak{S} \subseteq \tau_{\mathfrak{F}}$, entonces, para cada $f \in \mathfrak{F}$, tenemos que $f^{-1}(U) \in \tau_{\mathfrak{F}}\ \forall\ U \in \tau_f$, de donde se sigue que cada función f en $\mathfrak{F}$ es continua con respecto a la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$. Ahora, supongamos que τ es una topología sobre A tal que cada función f en $\mathfrak{F}$ es continua con respecto a esta topología. Luego, para cada $f \in \mathfrak{F}$, se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau\ \forall\ U \in \tau_f$, por lo que $\mathfrak{S} \subseteq \tau$. En consecuencia, como $\mathfrak{S}$ es una subbsase para la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$, de lo anterior se obtiene que $\tau_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau$. Por tanto, la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$ es una topología sobre A que cumple las condiciones i) y ii) del lema y que tiene a la familia $\{f^{-1}(U) : f \in \mathfrak{F},\ U \in \tau_f\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ como subbase. Además, si σ es una topología sobre A que satisface las propiedades i) y ii) del lema, claramente tenemos que $\sigma \subseteq \tau_{\mathfrak{F}}$, pues cada función f en $\mathfrak{F}$ es continua con respecto a la topología σ, y $\tau_{\mathfrak{F}} \subseteq \sigma$, ya que cada función f en $\mathfrak{F}$ es continua con respecto a la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$ y σ cumple la condición ii) del lema, de donde se obtiene la unicidad de $\tau_{\mathfrak{F}}$. Por tanto, $\tau_{\mathfrak{F}}$ es la única topología sobre A que satisface las propiedades i) y ii) del lema y $\{f^{-1}(U) : f \in \mathfrak{F},\ U \in \tau_f\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una subbase para $\tau_{\mathfrak{F}}$. □

Definición 2.2.2. Siguiendo la notación del Lema 2.2.1, a la única topología sobre A que cumple las condiciones i) y ii) de dicho lema la llamaremos la *topología débil* de A inducida por $\mathfrak{F}$ o la $\mathfrak{F}$ *topología* de A y la denotaremos por $\sigma(X, \mathfrak{F})$. La familia $\{f^{-1}(U) : f \in \mathfrak{F},\ U \in \tau_f\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es la *subbsase estándar* para la $\mathfrak{F}$ topología de A. La *base estándar* para la $\mathfrak{F}$ topología de A es la colección de todos los subconjuntos de A que son intersecciones de una cantidad finita de elementos de la subbase estándar para dicha topología.

Observemos que si X es un espacio normado, entonces su espacio dual X^* es una familia de funciones tal que cada función x^* en X^* mapea al conjunto X en el campo $\mathbb{K}$, el cual es un espacio topológico con la topología inducida por la métrica usual. Con base en lo anterior y en la Definición 2.2.2, podemos definir la topología débil de un espacio normado de la siguiente manera:

Definición 2.2.3. Sea X un espacio normado. La *topología débil de* X es la topología $\sigma(X, X^*)$ o la X^* topología de X, donde consideramos al campo $\mathbb{K}$ como un espacio topológico con la topología inducida por la métrica usual.

En lo que resta del presente trabajo, cuando mencionemos cualquier concepto o propiedad topológica con respecto a la topología débil de un espacio normado, diremos que dicho concepto o dicha propiedad es *débil* o que se cumple *débilmente*. Es importante notar que el Lema 2.2.1 nos asegura que si X es un espacio normado, entonces toda función en su espacio dual X^* es continua con respecto a la topología débil de X y que si τ es cualquier topología sobre X con la propiedad de que toda función en X^* es continua con respecto a la topología τ, entonces $\sigma(X, X^*) \subseteq \tau$. En particular, como toda función en X^* es continua con respecto a la topología inducida por la norma en X, tenemos que dicha toplogía contiene a la topología débil de X. Como consecuencia inmediata de lo anterior obtenemos el siguiente resultado:

Lema 2.2.4. *Sean X un espacio normado y $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal. Entonces f es continua con respecto a la topología débil de X si y sólo si f es continua con respecto a la topología inducida por la norma en X.*

El lema que enunciaremos a continuación nos da una subbase sencilla para la topología débil de un espacio normado además de la subbase estándar.

Lema 2.2.5. *Sea X un espacio normado. Para cada $x \in X$ y cada $x^* \in X^*$, sea*

$$B(x, x^*) = \{y \in X : |x^*(y - x)| < 1\}.$$

Similarmente, para cada $x \in X$ y cada subconjunto finito no vacío A de X^*, sea

$$B(x, A) = \{y \in X : |x^*(y - x)| < 1 \ \forall x^* \in A\}.$$

Sean

$$\mathfrak{D} = \{B(x, x^*) : x \in X, \ x^* \in X^*\},$$

y

$$\mathfrak{B} = \{B(x, A) : x \in X, \ A \text{ es un subcojnuto finito de } X^*\}.$$

Entonces $\mathfrak{D}$ es una subbase y $\mathfrak{B}$ es una base para la topología débil de X. Además, si $U \in \sigma(X, X^*)$ y $x_0 \in U$, entonces existe un subconjunto finito A_0 de X^* tal que $B(x_0, A_0) \subseteq U$.

Ahora, definiremos el concepto de convergencia débil de sucesiones en un espacio normado de la siguiente manera:

Definición 2.2.6. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ es *débilmente convergente* en X si existe $x \in X$ tal que si $U \in \sigma(X, X^*)$ y $x \in U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ $\forall n \geq N$. En este caso, se dice que x es el *límite débil* de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge débilmente a* x. Además, escribiremos $x_n \xrightarrow{w} x$.

La noción de convergencia débil que acabamos de definir se puede simplificar en términos de funcionales lineales y acotadas de acuerdo con el siguiente lema:

Lema 2.2.7. *Sean X un espacio normado y $x \in X$. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ converge débilmente a x si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$ $\forall x^* \in X^*$.*

Demostración. Sean X un espacio normado, $x \in X$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x. Sea $x^* \in X^*$. Sean $\epsilon > 0$ y $B(x^*(x), \epsilon)$ la bola abierta en $\mathbb{K}$ con centro en $x^*(x)$ y radio ϵ. Como $B(x^*(x), \epsilon)$ es abierta en $\mathbb{K}$, entonces $(x^*)^{-1}(B(x^*(x), \epsilon))$ es un elemento de la subbase estándar de la topología débil de X. De lo anterior, se sigue que $(x^*)^{-1}(B(x^*(x), \epsilon)) \in \sigma(X, X^*)$ y claramente tenemos que $x^*(x) \in B(x^*(x), \epsilon)$, por lo que $x \in (x^*)^{-1}(B(x^*(x), \epsilon))$. Luego, por definición de convergencia débil, obtenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (x^*)^{-1}(B(x^*(x), \epsilon))$ $\forall n \geq N$. En consecuencia, se tiene que $x^*(x_n) \in B(x^*(x), \epsilon)$ $\forall n \geq N$ o, equivalentemente, $|x^*(x_n) - x^*(x)| < \epsilon$ $\forall n \geq N$. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$ para cualquier $x^* \in X^*$.
Conversamente, supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$ $\forall x^* \in X^*$. Sea $U \in \sigma(X, X^*)$ tal que $x \in U$. Por el Lema 2.2.5, sabemos que existe un subconjunto finito no vacío A de X^* tal que

$$B(x, A) = \{y \in X : |x^*(y - x)| < 1 \ \forall x^* \in A\} \subseteq U.$$

Supongamos que $A = \{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$, con $m \in \mathbb{N}$. Entonces, como $x_i^* \in X^*$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, por hipótesis sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^*(x_n) = x_i^*(x)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i^*(x_n) - x_i^*(x)| < 1$ $\forall n \geq N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Así, se tiene que si $n \geq N$, entonces $n \geq N_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, por lo que $|x_i^*(x_n) - x_i^*(x)| < 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Además, como x_i^* es lineal para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, de lo anterior se obtiene que si $n \geq N$, entonces $|x_i^*(x_n - x)| = |x_i^*(x_n) - x_i^*(x)| < 1 \; \forall i \in \{1, \ldots, m\}$. En consecuencia, tenemos que $x_n \in B(x, A) \subseteq U \; \forall n \geq N$ y, por consiguiente, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x. $\square$

En seguida, introduciremos la noción de conjunto débilmente acotado en un espacio normado y enunciaremos un teorema que nos asegura que este concepto es equivalente al concepto usual de conjunto acotado, así como un par de corolarios de dicho teorema.

Definición 2.2.8. Sean X un espacio normado y B un subconjunto de X. Decimos que B es *débilmente acotado* si para cada $U \in \sigma(X, X^*)$ tal que $0 \in U$ se tiene que existe $s_{_U} > 0$ tal que $B \subseteq tU$ para cualquier $t > s_{_U}$.

Teorema 2.2.9. *Un subconjunto de un espacio normado es débilmente acotado si y sólo si es acotado.*

Corolario 2.2.10. *Un subconjunto débilmente compacto de un espacio normado es acotado.*

Corolario 2.2.11. *Un subconjunto B de un espacio normado X es acotado si y sólo si $x^*(B)$ es un conjunto acotado de escalares para cualquier $x^* \in X^*$.*

Como consecuencia del corolario anterior, podemos enunciar y probar la siguiente caracterización de operadores lineales y acotados:

Lema 2.2.12. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces, T es acotado si y sólo $y^*T \in X^* \; \forall y^* \in Y^*$.*

Demostración. Sean X, Y y $T : X \longrightarrow Y$ como en el enunciado del lema. Sea $B[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X. Notemos que si T es acotado, entonces $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\| \; \forall x \in B[0,1]$, por lo que $T(B[0,1])$ es acotado. Por otra parte, si $T(B[0,1])$ es acotado, tenemos que existe un número real $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq c \; \forall x \in B[0,1]$. Así, se tiene que si $x \in X \setminus \{0\}$, entonces $\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$, de donde se sigue que:

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{\|x\|}{\|x\|} x \right) \right\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| \leq c\|x\|.$$

En consecuencia, tenemos que $\|T(x)\| \leq c\|x\| \; \forall x \in X \setminus \{0\}$ y como $T(0) = 0$, es claro que $\|T(0)\| \leq c\|0\|$. Por tanto $\|T(x)\| \leq c\|x\| \; \forall x \in X$ y, por consiguiente, T es acotado. De esta manera, hemos probado que T es acotado si y sólo si

$T(B[0,1])$ es acotado. Además, como $T(B[0,1]) \subseteq Y$, por el Corolario 2.2.11 sabemos que $T(B[0,1])$ es acotado si y sólo si $y^*(T(B[0,1]))$ es un conjunto acotado de escalares para cualquier $y^* \in Y^*$. Más aún, como $y^*T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal para cualquier $y^* \in Y^*$, un argumento análogo al que se usó para demostrar que T es acotado si y sólo si $T(B[0,1])$ es acotado, muestra que, para cualquier $y^* \in Y^*$, tenemos que $y^*(T(B[0,1]))$ es acotado si y sólo si y^*T es acotado o, equivalentemente, $y^*T \in X^*$. Por tanto, T es acotado si y sólo si $y^*T \in X^*$ $\forall y^* \in Y^*$. $\square$

Para finalizar esta sección, enunciaremos un importante teorema que relaciona la cerradura y la cerradura débil de un subconjunto convexo de un espacio normado.

Teorema 2.2.13. *La cerradura y la cerradura débil de un subconjunto convexo de un espacio normado son iguales. En particular, un subconjunto convexo de un espacio normado es cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.*

Es claro que un subespacio de un espacio normado es un subconjunto convexo de dicho espacio, por lo que el siguiente corolario del Teorema 2.2.13 es inmediato.

Corolario 2.2.14. *La cerradura y la cerradura débil de un subespacio de un espacio normado son iguales. En particular, un subespacio de un espacio normado es cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.*

2.3. Topología débil*

Sabemos que si X es un espacio normado, entonces su espacio dual X^* es un espacio normado, por lo que podemos hablar de la topología inducida por la norma en X^* y la topología débil de X^*. En esta sección definiremos otra topología, denominada topología débil*, sobre el espacio dual de un espacio normado además de las dos topologías mencionadas anteriormente. A menos que se especifique lo contrario, a lo largo de esta sección, dado un espacio normado X, $C : X \longrightarrow X^{**}$ denotará el mapeo canónico de X en su espacio doble dual X^{**}.

En primer lugar, notemos que si X es un espacio normado, entonces el rango de C es un subconjunto de X^{**}. Por esta razón, el rango de C es una familia de funciones tal que cada función x^{**} en $\mathcal{R}(C)$ mapea al conjunto X^* en el campo $\mathbb{K}$, que puede ser considerado como un espacio topológico con la topología inducida por la métrica usual. A partir de lo anterior y de la Definición 2.2.2, podemos definir la topología débil* del espacio dual de un espacio normado como sigue:

Definición 2.3.1. Sea X un espacio normado. La *topología débil* de* X^* es la topología $\sigma(X^*, \mathcal{R}(C))$ o la $\mathcal{R}(C)$ topología de X^*, considerando al campo $\mathbb{K}$ como un espacio topológico con la topología inducida por la métrica usual.

Recordemos que en el Lema 2.1.4 demostramos que si X es un espacio normado, entonces C es un isomorfismo del espacio normado X sobre el espacio normado $\mathcal{R}(C)$. Debido a este hecho y con el fin de simplificar la notación en lo que resta de la presente tesis, dado un espacio normado X, denotaremos la topología débil* de X^* como $\sigma(X^*, X)$. Además, a partir de este punto, cuando mencionemos cualquier concepto o propiedad topológica con respecto a la topología débil* del espacio dual de un espacio normado, diremos que dicho concepto o dicha propiedad es *débil** o que se cumple de manera *débil**.

Cabe mencionar que, al igual que con la topología débil de un espacio normado, el Lema 2.2.1 nos garantiza que si X es un espacio normado, entonces toda función en el rango de C es continua con respecto a la topología débil* de X^* y que si τ es cualquier topología sobre X^* con la propiedad de que toda función en el rango de C es continua con respecto a la topología τ, entonces $\sigma(X^*, X) \subseteq \tau$. En consecuencia, como toda función en X^{**} y, por tanto, en el rango de C, es continua con respecto a la topología débil de X^*, tenemos que esta toplogía contiene a la topología débil* de X^*.

A continuación, probaremos un teorema que caracteriza a aquellos espacios normados para los cuales las topologías débil y débil* de sus espacios duales coinciden. Para este fin, necesitamos enunciar previamente un resultado y un teorema cuya prueba depende dicho resultado.

Lema 2.3.2. *Sean X un espacio vectorial y $n \in \mathbb{N}$. Sean f y $f_1, \ldots, f_n$ funcionales lineales con dominio X. Entonces f es una combinación lineal de $f_1, \ldots, f_n$ si y sólo si* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{N}(f_i) \subseteq \mathcal{N}(f)$.

Teorema 2.3.3. *Sean X un espacio vectorial y $X^{\#}$ el espacio vectorial de todas las funcionales lineales con dominio X. Sea X' un subespacio vectorial de $X^{\#}$. Entonces:*

$$X' = \left\{ f \in X^{\#} : f \text{ es continua con respecto a la topología } \sigma(X, X') \right\}.$$

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio normado. Entonces las toplogías débil y débil* de X^* coinciden si y sólo si X es reflexivo. Más aún, si $f : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal, entonces f es continua con respecto a la topología débil* de X^* si y sólo si existe $x \in X$ tal que $f(x^*) = x^*(x)$ $\forall x^* \in X^*$.*

Demostración. Sea X un espacio normado.
Primero, supongamos que X es reflexivo. Entonces $\mathcal{R}(C) = X^{**}$, por lo que claramente $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$. Por tanto, la topología débil y débil* de X^* coinciden.
Conversamente, supongamos que X no es reflexivo, de modo que $\mathcal{R}(C) \subsetneq X^{**}$. Sea $y^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{R}(C)$. Por el Teorema 2.3.3, sabemos que:

$$\mathcal{R}(C) = \{x^{**} \in X^{**} : x^{**} \text{ es continua con respecto a la topología } \sigma(X^*, X)\}\,.$$

Luego, como $y^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{R}(C)$, tenemos que y^{**} no es continua con respecto a la topología débil* de X^* y que y^{**} es continua con respecto a la topología débil de X^*. En consecuencia, existe un subconjunto A de $\mathbb{K}$ tal que A es abierto en $\mathbb{K}$ y $(y^{**})^{-1}(A) \notin \sigma(X^*, X)$. Sin embargo, como y^{**} es continua con respecto a la toplogía débil de X^*, se tiene que $(y^{**})^{-1}(A) \in \sigma(X^*, X^{**})$. Así, obtenemos que $(y^{**})^{-1}(A) \in \sigma(X^*, X^{**}) \setminus \sigma(X^*, X)$ y, por consiguiente, $\sigma(X^*, X^{**}) \neq \sigma(X^*, X)$. Por tanto, si X no es reflexivo, entonces las topologías débil y débil* de X^* no coinciden. Finalmente, la segunda parte del teorema se sigue claramente de la definición del mapeo canónico de X en X^{**} y de la siguiente igualdad que obtenemos como consecuencia del Teorema 2.3.3:

$$\mathcal{R}(C) = \left\{f \in (X^*)^{\#} : f \text{ es continua con respecto a la topología } \sigma(X^*, X)\right\},$$

donde $(X^*)^{\#}$ es el espacio vectorial de todas las funcionales lineales con dominio X^*. $\square$

En seguida, enunciaremos un lema similar al Lema 2.2.5 que nos da una subbase para la topología débil* del espacio dual de un espacio normado distinta a la subbase estándar.

Lema 2.3.5. *Sea X un espacio normado. Para cada $x^* \in X^*$ y cada $x \in X$, definimos el conjunto $B(x^*, x)$ como*

$$B(x^*, x) = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x)| < 1\}\,.$$

Similarmente, para cada $x^* \in X^*$ y cada subconjunto finito no vacío A de X, definimos el conjunto $B(x^*, A)$ como

$$B(x^*, A) = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x)| < 1 \ \forall x \in A\}.$$

Sean

$$\mathfrak{D} = \{B(x^*, x) : x^* \in X^*, \ x \in X\},$$

y

$$\mathfrak{B} = \{B(x^*, A) : x^* \in X^*, \ A \text{ es un subcojnuto finito de } X\}.$$

Entonces $\mathfrak{D}$ es una subbase y $\mathfrak{B}$ es una base para la topología débil de X^*. Además, si $U \in \sigma(X^*, X)$ y $x_0^* \in U$, entonces existe un subconjunto finito A_0 de X tal que $B(x_0^*, A_0) \subseteq U$.*

Ahora, introduciremos el concepto de convergencia débil* de sucesiones en el espacio dual de un espacio normado de la siguiente manera:

Definición 2.3.6. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ es *débil*-convergente* en X^* si existe $x^* \in X^*$ tal que si $U \in \sigma(X^*, X)$ y $x^* \in U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n^* \in U \ \forall n \geq N$. En este caso, se dice que x^* es el *límite débil** de la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ y que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es *débil*-convergente a* x^*. Además, escribiremos $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

De manera análoga a como lo hicimos para la convergencia débil en la sección anterior, podemos simplificar la noción de convergencia débil* conforme al siguiente lema:

Lema 2.3.7. *Sean X un espacio normado y $x^* \in X^*$. Una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ es débil*-convergente a x^* si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$ $\forall x \in X$.*

Demostración. Sean X, x^* y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ como en el enunciado del lema.
Supongamos que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es débil*-convergente a x^*. Sea $x \in X$. Sean $\epsilon > 0$ y $B(x^*(x), \epsilon)$ la bola abierta en $\mathbb{K}$ con centro en $x^*(x)$ y radio ϵ. Como $C(x) \in \mathcal{R}(C)$ y $B(x^*(x), \epsilon)$ es abierta en $\mathbb{K}$, entonces $(C(x))^{-1}(B(x^*(x), \epsilon))$ es un elemento de la subbase estándar de la topología débil* de X^*, de donde se sigue que $(C(x))^{-1}(B(x^*(x), \epsilon)) \in \sigma(X^*, X)$. Además, como $x^*(x) = (C(x))(x^*)$, es claro que $x^* \in (C(x))^{-1}(B(x^*(x), \epsilon))$. Luego, por definición de convergencia débil*, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n^* \in (C(x))^{-1}(B(x^*(x), \epsilon)) \ \forall n \geq N$. Así, obtenemos que $|x_n^*(x) - x^*(x)| = |(C(x))(x_n^*) - x^*(x)| < \epsilon$ para cualquier

$n \geq N$. De lo anterior, se obtiene que $(x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}$ converge a $x^*(x)$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)\ \forall x \in X$.
Conversamente, supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)\ \forall x \in X$. Sea $U \in \sigma(X^*, X)$ tal que $x^* \in U$. Por el Lema 2.3.5 sabemos que existe un subconjunto finito no vacío A de X tal que

$$B(x^*, A) = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x)| < 1\ \forall x \in A\} \subseteq U.$$

Supongamos que $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, con $m \in \mathbb{N}$. Entonces, como $x_i \in X$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, por hipótesis sabemos que $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_i) = x^*(x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n^*(x_i) - x^*(x_i)| < 1\ \forall n \geq N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Así, se tiene que si $n \geq N$, entonces $n \geq N_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, por lo que $|(x_n^* - x^*)(x_i)| = |x_n^*(x_i) - x^*(x_i)| < 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. De lo anterior, claramente se sigue que $x_n^* \in B(x^*, A) \subseteq U\ \forall n \geq N$ y, por consiguiente, $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es débil*-convergente a x^*. □

Análogamente a como se hizo en la sección anterior para la topología débil, podemos definir la noción de conjunto débil*-acotado en el espacio dual de un espacio normado como sigue:

Definición 2.3.8. Sean X un espacio normado y B un subconjunto de X^*. Decimos que B es *débil*-acotado* si para cada $U \in \sigma(X^*, X)$ tal que $0 \in U$ se tiene que existe $s_U > 0$ tal que $B \subseteq tU$ para cualquier $t > s_U$.

El siguiente teorema, el cual es similar al Teorema 2.2.9, nos permite concluir que los subconjuntos débil*-acotados del espacio dual de un espacio de Banach son exactamente aquellos subconjuntos que son acotados.

Teorema 2.3.9. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, un subconjunto de X^* es débil*-acotado si y sólo si es acotado.*

Corolario 2.3.10. *Sea X un espacio de Banach. Entonces un subconjunto débil*-compacto de X^* es acotado.*

Corolario 2.3.11. *Sea X un espacio de Banach. Entonces un subconjunto B de X^* es acotado si y sólo si $(C(x))(B) = \{x^*(x) : x^* \in B\}$ es un conjunto acotado de escalares para cada $x \in X$.*

A continuación, introduciremos el concepto de espacio de Hausdorff:

Definición 2.3.12. Un espacio topológico (A, τ) es un *espacio de Hausdorff* si para cualesquiera $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ existen $U, V \in \tau$ con la propiedad de que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

El siguiente lema nos da una propiedad fundamental de los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff:

Lema 2.3.13. *Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado en dicho espacio.*

Observemos que si X es un espacio normado y $x^*, y^* \in X^*$ son tales que $x^* \neq y^*$, entonces existe $x \in X$ tal que $(C(x))(x^*) = x^*(x) \neq y^*(x) = (C(x))(y^*)$. Luego, como $(C(x))(x^*)$ y $(C(x))(y^*)$ son dos elementos distintos del campo $\mathbb{K}$, es sencillo verificar que existen dos subconjuntos U y V de $\mathbb{K}$ tales que U y V son abiertos en $\mathbb{K}$, $(C(x))(x^*) \in U$, $(C(x))(y^*) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Consecuentemente, como U y V son abiertos en $\mathbb{K}$ y $C(x)$ es un elemento de $\mathcal{R}(C)$, tenemos que $(C(x))^{-1}(U)$ y $(C(x))^{-1}(V)$ son elementos de la subbase estándar de la topología débil* de X^*. De esta manera, obtenemos que $(C(x))^{-1}(U), (C(x))^{-1}(V) \in \sigma(X^*, X)$, $x^* \in (C(x))^{-1}(U)$, $y^* \in (C(x))^{-1}(V)$ y $(C(x))^{-1}(U) \cap (C(x))^{-1}(V) = (C(x))^{-1}(U \cap V) = (C(x))^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por tanto, se tiene que X^* con la topología débil* es un espacio de Hausdorff y, como consecuencia del Lema 2.3.13, se obtiene el siguiente resultado:

Lema 2.3.14. *Si X es un espacio normado, entonces todo subconjunto débil*-compacto de X^* es débil*-cerrado.*

En seguida, enunciaremos uno de los teoremas más importantes sobre espacios normados, conocido como el Teorema de Banach-Alaoglu, que nos garantiza la compacidad débil* de la bola unitaria cerrada en X^*.

Teorema 2.3.15 (Banach-Alaoglu)**.** *Sea X un espacio normado. Si $B_{X^*}[0,1]$ es la bola unitaria cerrada en X^*, entonces $B_{X^*}[0,1]$ es débil*-compacta.*

Corolario 2.3.16. *Sea X un espacio normado. Si U es un subconjunto de X^* tal que U es acotado y débil*-cerrado, entonces U es débil*-compacto.*

Ahora, definiremos las nociones de topología inducida en un subconjunto de un espacio topológico y homeomorfismo entre espacios topológicos con la finalidad de enunciar un lema que nos asegura que, dado un espacio normado X, si consideramos la topología débil de X y la topología inducida por la topología débil* de X^{**} en $\mathcal{R}(C)$, entonces el mapeo canónico $C : X \longrightarrow \mathcal{R}(C)$ es un homeomorfismo.

Definición 2.3.17. Sean (A, τ) un espacio topológico y B un subconjunto de A. La colección $\{B \cap U : U \in \tau\}$ es una topología sobre B conocida como la *topología inducida* por la topología τ en B.

Definición 2.3.18. Sean (A, τ_A) y (B, τ_B) espacios topológicos. Una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ es un *homeomorfismo* si f y la función inversa de f son continuas.

Lema 2.3.19. *Si X es un espacio normado, entonces el mapeo canónico $C : X \longrightarrow \mathcal{R}(C)$ es un homeomorfismo, donde las topologías consideradas para X y $\mathcal{R}(C)$ son la topología débil de X y la topología inducida por la topología débil* de X^{**} en $\mathcal{R}(C)$, respectivamente.*

Ahora, presentaremos otro de los teoremas de mayor relevancia sobre espacios normados, a saber, el Teorema de Goldstine, que nos permitirá concluir que si X es un espacio normado, entonces la cerradura débil* de $C(B_X[0,1])$ es la bola unitaria cerrada en X^{**}, donde $B_X[0,1]$ es la bola unitaria cerrada en X. Para este fin, necesitamos enunciar previamente los siguientes dos resultados:

Lema 2.3.20. *Sean X un espacio normado. Si $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal y acotada, entonces $\|x^*\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} Re(x^*)(x)$.*

Demostración. Sean X un espacio normado y $x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal y acotada. Claramente tenemos que $Re(x^*)(x) \leq |x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\| \leq \|x^*\|$ para cualquier $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, por lo que:

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} Re(x^*)(x) \leq \|x^*\|.$$

En consecuencia, para demostrar la igualdad deseada basta probar que $\|x^*\| \leq \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} Re(x^*)(x)$.

Sea $y \in X$ tal que $\|y\| \leq 1$. Si $x^*(y) = 0$, entonces $1 \in \mathbb{K}$ es tal que $1 = |1|$ y $1\overline{x^*(y)} = \overline{x^*(y)} = 0 = |0| = |x^*(y)|$. Por otra parte, si $x^*(y) \neq 0$ entonces $\frac{\overline{x^*(y)}}{|x^*(y)|} \in \mathbb{K}$ satisface que $\left|\frac{\overline{x^*(y)}}{|x^*(y)|}\right| = 1$ y $\frac{\overline{x^*(y)}}{|x^*(y)|} x^*(y) = \frac{|x^*(y)|^2}{|x^*(y)|} = |x^*(y)|$. Por tanto, existe un escalar $\alpha_y \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha_y| = 1$ y $\alpha_y x^*(y) = |x^*(y)|$. Más aún, por la linealidad de x^*, sabemos que $x^*(\alpha_y y) = \alpha_y x^*(y)$ y como $x^*(\alpha_y y) = \alpha_y x^*(y) = |x^*(y)| \in \mathbb{R}$, entonces $x^*(\alpha_y y) = Re(x^*)(\alpha_y y)$. Además, se tiene que $\|\alpha_y y\| = |\alpha_y|\|y\| = \|y\| \leq 1$. Así, obtenemos que:

$$|x^*(y)| = x^*(\alpha_y y) = Re(x^*)(\alpha_y y) \leq \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} Re(x^*)(x).$$

De esta manera, hemos probado que $|x^*(y)| \leq \sup\limits_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} Re(x^*)(x)$ para cualquier $y \in X$ tal que $\|y\| \leq 1$, de donde se sigue que:

$$\|x^*\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} |x^*(x)| \leq \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} Re(x^*)(x).$$

$\square$

Lema 2.3.21. *Sean X un espacio normado y U un subconjunto no vacío de X^* tal que U es convexo y débil*-compacto. Si $x_0^* \in X^* \setminus U$, entonces existe $x \in X$ tal que $\sup\limits_{x^*\in U} Re(x^*)(x) < Re(x_0^*)(x)$.*

Teorema 2.3.22 (Goldstine)**.** *Sea X un espacio normado. Sean $B_X[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X y $B_{X^{**}}[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X^{**}, respectivamente. Entonces, $C(B_X[0,1])$ es débil*-denso en $B_{X^{**}}[0,1]$.*

Demostración. Sean X, $B_X[0,1]$ y $B_{X^{**}}[0,1]$ como en el enunciado del lema. Sea $\tau_{w*(B)}$ la topología inducida por la topología débil* de X^{**} en $B_{X^{**}}[0,1]$. Por el Lema 2.1.4, sabemos que $C : X \longrightarrow \mathcal{R}(C)$ es un isomorfismo de espacios normados, por lo que $\|C(x)\| = \|x\| \leq 1 \; \forall x \in B_X[0,1]$. De lo anterior, se sigue que $C(B_X[0,1]) \subseteq B_{X^{**}}[0,1] \subseteq X^{**}$. Sean $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ la cerradura débil* de $C(B_X[0,1])$ y $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)}$ la cerradura de $C(B_X[0,1])$ en la topología $\tau_{w*(B)}$, respectivamente.
Notemos que si $x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)}$, entonces es claro que $x^{**} \in B_{X^{**}}[0,1]$. Además, si U es abierto en la topología débil* de X^{**} y $x^{**} \in U$, tenemos que $U \cap B_{X^{**}}[0,1]$ es abierto en la topología $\tau_{w*(B)}$ y $x^{**} \in U \cap B_{X^{**}}[0,1]$. Luego, como $x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)}$, se tiene que $U \cap B_{X^{**}}[0,1] \cap C(B_X[0,1]) \neq \emptyset$, por lo que $U \cap C(B_X[0,1])$ es no vacío y, por consiguiente, $x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$. De lo anterior se obtiene que $x^{**} \in B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ y, consecuentemente, $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)} \subseteq B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$.
Por otra parte, si $y^{**} \in B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ y $V \in \tau_{w*(B)}$ es tal que $y^{**} \in V$, entonces existe $W \in \sigma(X^{**}, X^*)$ tal que $V = W \cap B_{X^{**}}[0,1]$. Así, como $y^{**} \in V$, obtenemos que $y^{**} \in W$. Más aún, como W es abierto en la topología

débil* de X^{**} y $y^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$, obtenemos que $W \cap C(B_X[0,1]) \neq \emptyset$. Más aún, como $C(B_X[0,1]) \subseteq B_{X^{**}}[0,1]$, sabemos que $V \cap C(B_X[0,1]) = W \cap B_{X^{**}}[0,1] \cap C(B_X[0,1]) = W \cap C(B_X[0,1]) \neq \emptyset$. Así, obtenemos que $y^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)}$ y, consecuentemente, $B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq \overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)}$. De esta manera, hemos probado que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)} = B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$.

Ahora, veamos que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ es convexo. Sean $x^{**}, y^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ y $t \in [0,1]$. Si $t = 0$, entonces es claro que $tx^{**} + (1-t)y^{**} = y^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ y si $t = 1$, claramente se tiene que $tx^{**} + (1-t)y^{**} = x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$. Por tanto, supongamos que $t \neq 0$ y $t \neq 1$, de modo que $t > 0$ y $1 - t > 0$. Sea $Z \in \sigma(X^{**}, X^*)$ tal que $tx^{**} + (1-t)y^{**} \in Z$. Por el Lema 2.3.5, sabemos que existe un subconjunto finito A de X^* tal que $B(tx^{**} + (1-t)y^{**}, A) = \{z^{**} \in X^{**} : |(z^{**} - tx^{**} - (1-t)y^{**})(x^*)| < 1\ \forall x^* \in A\} \subseteq Z$. Ahora, para cada $x^* \in A$, sean $B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*) = \left\{z^{**} \in X^{**} : |(z^{**} - x^{**})(x^*)| < \frac{1}{2t}\right\}$ y $B_{\frac{1}{2(1-t)}}(y^{**}, x^*) = \left\{z^{**} \in X^{**} : |(z^{**} - y^{**})(x^*)| < \frac{1}{2(1-t)}\right\}$. Sea Q el mapeo canónico de X^* en X^{***}. Observemos que, para cada $x^* \in A$, se tiene que $B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*) = (Q(x^*))^{-1}(B(x^{**}(x^*), \frac{1}{2t}))$, donde $B(x^{**}(x^*), \frac{1}{2t})$ es la bola abierta en $\mathbb{K}$ con centro en $x^{**}(x^*)$ y radio $\frac{1}{2t}$, pues $|(z^{**} - x^{**})(x^*)| = |z^{**}(x^*) - x^{**}(x^*)| = |(Q(x^*))(z^{**}) - x^{**}(x^*)|\ \forall z^{**} \in X^{**}$. Luego, como $B(x^{**}(x^*), \frac{1}{2t})$ es abierta en $\mathbb{K}$ y $Q(x^*) \in \mathcal{R}(Q)$, obtenemos que $B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*) = (Q(x^*))^{-1}(B(x^{**}(x^*), \frac{1}{2t}))$ es un elemento de la subbase estándar de $\sigma(X^{**}, X^*)$. Más aún, como A es finito, tenemos que $\bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*)$ es abierto en la topología débil* de X^{**} y, claramente, $x^{**} \in \bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*)$. De manera similar, se puede ver que $\bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2(1-t)}}(y^{**}, x^*)$ es abierto en la topología débil* de X^{**} y que $y^{**} \in \bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2(1-t)}}(y^{**}, x^*)$. Como $x^{**}, y^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$, de lo anterior se obtiene que existen $x, y \in B_X[0,1]$ tales que $C(x) \in \bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*)$ y $C(y) \in \bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2(1-t)}}(y^{**}, x^*)$. Notemos que $tx + (1-t)y \in B_X[0,1]$, ya que $B_X[0,1]$ es convexa (Lema 1.2.20). En consecuencia, tenemos que $C(tx + (1-t)y) \in C(B_X[0,1])$. Además, como $C(x) \in \bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2t}}(x^{**}, x^*)$ y $C(y) \in \bigcap_{x^* \in A} B_{\frac{1}{2(1-t)}}(y^{**}, x^*)$, por la linealidad de C, para cualquier $x^* \in A$

tenemos que:

$$|(C(tx) - tx^{**})(x^*)| = |t(C(x) - x^{**}))(x^*)| = t|(C(x) - x^{**})(x^*)| < \frac{1}{2},$$

y

$$|(C((1-t)y) - (1-t)y^{**})(x^*)| = |(1-t)(C(y) - y^{**})(x^*)| =$$

$$(1-t)|(C(y) - y^{**})(x^*)| < \frac{1}{2}.$$

Así, obtenemos que, para cualquier $x^* \in A$, se cumple que:

$$|(C(tx + (1-t)y) - tx^{**} - (1-t)y^{**})(x^*)| =$$

$$|(C(tx) + C((1-t)y) - tx^{**} - (1-t)y^{**})(x^*)| =$$

$$|(C(tx) - tx^{**})(x^*) + (C((1-t)y) - (1-t)y^{**})(x^*)| \leq$$

$$|(C(tx) - tx^{**})(x^*)| + |(C((1-t)y) - (1-t)y^{**})(x^*)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

En consecuencia, $C(tx + (1-t)y) \in C(B_X[0,1]) \cap B(tx^{**} + (1-t)y^{**}, A) \subseteq C(B_X[0,1]) \cap Z$. Por tanto, $Z \cap C(B_X[0,1]) \neq \emptyset$, de donde se sigue que $tx^{**} + (1-t)y^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ y, consecuentemente, $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ es convexo.

Por otra parte, notemos que de la contención $C(B_X[0,1]) \subseteq B_{X^{**}}[0,1]$ se obtiene que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq \overline{B_{X^{**}}[0,1]}^{w*}$, donde $\overline{B_{X^{**}}[0,1]}^{w*}$ es la cerradura débil* de $B_{X^{**}}[0,1]$. Ahora, por el Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 2.3.15), tenemos que $B_{X^{**}}[0,1]$ es débil*-compacta. Luego, por el Lema 2.3.14, podemos concluir que $B_{X^{**}}[0,1]$ es débil*-cerrada y, en consecuencia, $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq \overline{B_{X^{**}}[0,1]}^{w*} = B_{X^{**}}[0,1]$. Así, como $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ es débil*-cerrado y $B_{X^{**}}[0,1]$ es un subconjunto débil*-compacto que contiene a $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$, se tiene que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ es débil*-compacto.

Finalmente, tenemos que $X^{**} \setminus \overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq X^{**} \setminus B_{X^{**}}[0,1]$. En efecto, si $u^{**} \in X^{**} \setminus \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$, por el Lema 2.3.21, sabemos que existe $y^* \in X^*$ tal que $Re(u^{**})(y^*) > \sup\left\{Re(x^{**})(y^*) : x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}\right\}$, por ser $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ convexo, débil*-compacto y no vacío. Más aún, es claro que $C(B_X[0,1]) \subseteq \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$, por lo que:

$$\sup\left\{Re(x^{**})(y^*) : x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}\right\} \geq$$

$$\sup\left\{Re(x^{**})(y^*) : x^{**} \in C(B_X[0,1])\right\}.$$

De lo anterior se obtiene que:

$$|u^{**}(y^*)| \geq Re(u^{**})(y^*) > \sup\left\{Re(x^{**})(y^*) : x^{**} \in \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}\right\} \geq$$

$$\sup\left\{Re(x^{**})(y^*) : x^{**} \in C(B_X[0,1])\right\} = \sup\left\{Re((C(x))(y^*) : x \in B_X[0,1]\right\} =$$

$$\sup\left\{Re(y^*)(x) : x \in B_X[0,1]\right\} = \|y^*\|,$$

donde la última igualdad es consecuencia del Lema 2.3.20. Por tanto, $|u^{**}(y^*)| > \|y^*\|$ y, por consiguiente, $y^* \neq 0$, ya que si $y^* = 0$, entonces $0 = |u^{**}(0)| > \|0\| = 0$, lo cual claramente es una contradicción. De esta forma, podemos concluir que:

$$\|u^{**}\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ x^* \neq 0}} \frac{|u^{**}(x^*)|}{\|x^*\|} \geq \frac{|u^{**}(y^*)|}{\|y^*\|} > 1.$$

De lo anterior obtenemos que $u^{**} \in X^{**} \setminus B_{X^{**}}[0,1]$ y, consecuentemente, $X^{**} \setminus \overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq X^{**} \setminus B_{X^{**}}[0,1]$ o, equivalentemente, $B_{X^{**}}[0,1] \subseteq \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$. Así, se tiene que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)} = B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*} = B_{X^{**}}[0,1]$ y, en consecuencia, $C(B_X[0,1])$ es débil*-denso en $B_{X^{**}}[0,1]$. □

Corolario 2.3.23. *Sea X un espacio normado. Sean $B_X[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X y $B_{X^{**}}[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X^{**}, respectivamente. Entonces, la cerradura débil* de $C(B_X[0,1])$ es igual a $B_{X^{**}}[0,1]$.*

Demostración. Sean X, $B_X[0,1]$ y $B_{X^{**}}[0,1]$ como en el enunciado del corolario. Sea $\tau_{w*(B)}$ la topología inducida por la topología débil* de X^{**} en $B_{X^{**}}[0,1]$ y sean $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ la cerradura débil* de $C(B_X[0,1])$ y $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)}$ la cerradura de $C(B_X[0,1])$ en la topología $\tau_{w*(B)}$, respectivamente. Por el Teorema de Goldstine (Teorema 2.3.22), sabemos que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)} = B_{X^{**}}[0,1]$. Además, en la prueba de dicho teorema vimos que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)} = B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$. De lo anterior, se obtiene que $B_{X^{**}}[0,1] = \overline{C(B_X[0,1])}^{w*(B)} = B_{X^{**}}[0,1] \cap \overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq \overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$. Por otra parte, en la demostración del Teorema de Goldstine también se comprobó que $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*} \subseteq B_{X^{**}}[0,1]$. Por tanto, $\overline{C(B_X[0,1])}^{w*} = B_{X^{**}}[0,1]$. □

Para terminar sección, enunciaremos el Teorema de Eberlein-Šmulian, el cual nos asegura que, al igual que en un espacio métrico, el concepto de compacidad débil en un espacio normado se puede simplificar por medio de sucesiones. Dicho teorema, cuya prueba depende del lema que enunciaremos en seguida, será de gran relevancia para probar algunos resultados que se presentarán más adelante en esta tesis.

Lema 2.3.24. *Sea X un espacio normado y sean A y B subconjuntos de X y X^*, respectivamente.*

a) *Si todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación débil y $x_0 \in \overline{A}^w$, donde $\overline{A}^w$ denota la cerradura débil de A, entonces existe una sucesión en A que converge débilmente a x_0.*

b) *Si todo subconjunto infinito de B tiene un punto de acumulación débil y $x_0^* \in \overline{B}^{w*}$, donde $\overline{B}^{w*}$ es la cerradura débil* de B, entonces existe una sucesión en B que converge débilmente a x_0^*.*

Teorema 2.3.25 (Eberlein-Šmulian)**.** *Sean A un subconjunto de un espacio normado X. Las siguientes dos proposiciones son equivalentes:*

a) *A es débilmente compacto.*

b) *Toda sucesión de elementos de A contiene una subsucesión débilmente convergente a un elemento de A.*

Capítulo 3

Algunas caracterizaciones de reflexividad

Una vez que hemos introducido los conceptos y resultados que servirán como base para el desarrollo del presente trabajo, en este capítulo presentaremos algunas caracterizaciones de reflexividad para espacios normados y espacios de Banach, con el objetivo de enunciar y probar aquélla introducida por Robert.C. James en [4]. En lo que resta del presente trabajo, dado un conjunto A, denotaremos la cardinalidad de A por $|A|$.

3.1. Caracterización por medio de sucesiones de conjuntos convexos

Comenzaremos por enunciar un lema que nos garantiza que para probar que un espacio normado complejo X es reflexivo, basta demostrar que el espacio normado real obtenido al restringir el producto por escalares a $\mathbb{R} \times X$ es reflexivo.

Lema 3.1.1. *Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{C}$ y X_r el espacio normado sobre $\mathbb{R}$ que se obtiene restringiendo el producto de vectores por escalares a $\mathbb{R} \times X$. Entonces, X es reflexivo si y sólo si X_r es reflexivo.*

Demostración. Sean X y X_r como en el enunciado del lema. Sean $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}, $C_r : X_r \longrightarrow (X_r)^{**}$ el mapeo canónico de X_r en $(X_r)^{**}$ y $(X^*)_r$ el espacio normado real obtenido al restringir el producto de funcionales en X^* por escalares a $\mathbb{R} \times X^*$. Sea $T : (X^*)_r \longrightarrow (X_r)^*$ la función dada por $T(x^*) = Re(x^*)$ $\forall x^* \in (X^*)_r$. Como $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ y $Re(\alpha z_1) = \alpha Re(z_1)$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces claramente tenemos que $T(x^*+y^*) = Re(x^*+y^*) = Re(x^*) + Re(y^*) = T(x^*) + T(y^*)$ y $T(\alpha x^*) = Re(\alpha x^*) = \alpha Re(x^*) = \alpha T(x^*)$ para cualesquiera $x^*, y^* \in (X^*)_r$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. En consecuencia, se tiene que T es un operador lineal. Además, por el Lema 1.3.22, sabemos que para cada $z^* \in (X_r)^*$ existe un único elemento u^* de $(X^*)_r$ tal que $T(u^*) = Re(u^*) = z^*$, de donde se sigue que T es suprayectivo e inyectivo y, por consiguiente, biyectivo. Más aún, nuevamente por el Lema 1.3.22 se obtiene que $\|x^*\| = \|Re(x^*)\| = \|T(x^*)\|$ $\forall x^* \in (X^*)_r$. Así, podemos concluir que T es un isomorfismo del espacio normado $(X^*)_r$ sobre el espacio normado $(X_r)^*$. Luego, por el Teorema 1.6.5, obtenemos que el operador adjunto $T^* : (X_r)^{**} \longrightarrow ((X^*)_r)^*$ de T es un isomorfismo de espacios normados.

Supongamos primero que X es reflexivo. Sea $x^{**} \in (X_r)^{**}$. Entonces, tenemos que $T^*(x^{**}) \in ((X^*)_r)^*$, esto es, $T^*(x^{**}) : (X^*)_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal y acotada. Ahora, por el Lema 1.3.22 obtenemos que existe $y^{**} \in X^{**}$ tal que $Re(y^{**}) = T^*(x^{**})$. Como X es reflexivo, sabemos que existe $x \in X$ tal que $y^{**} = C(x)$. Así, se tiene que si $z^* \in (X_r)^*$, entonces existe $u^* \in (X^*)_r$ tal que $Re(u^*) = T(u^*) = z^*$, por ser T biyectivo, de donde se sigue que $x^{**}(z^*) = x^{**}(T(u^*)) = (T^*(x^{**}))(u^*) = Re(y^{**})(u^*) = Re(C(x))(u^*) = Re(u^*(x)) = (T(u^*))(x) = z^*(x) = (C_r(x))(z^*)$. En consecuencia, $x \in X_r$ satisface que $x^{**}(z^*) = (C_r(x))(z^*)$ $\forall z^* \in (X_r)^*$, por lo que $x^{**} = C_r(x)$ y, por tanto, X_r es reflexivo.

Conversamente, supongamos que X_r es reflexivo. Sea $z^{**} \in X^{**}$. Por el Lema 1.3.22, sabemos que $Re(z^{**}) : (X^*)_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal y acotada, es decir, $Re(z^{**}) \in ((X^*)_r)^*$. Como T^* es un isomorfismo, tenemos que existe $x^{**} \in (X_r)^{**}$ tal que $T^*(x^{**}) = Re(z^{**})$. Luego, como X_r es reflexivo, se obtiene que existe $x \in X_r$ tal que $x^{**} = C_r(x)$. De esta manera, obtenemos que $x \in X$ cumple que $Re(z^{**})(x^*) = (T^*(x^{**}))(x^*) = x^{**}(T(x^*)) = (C_r(x))(T(x^*)) = (T(x^*))(x) = Re(x^*(x)) = Re(C(x))(x^*)$ para cualquier $x^* \in X^*$. De lo anterior, se sigue que $Re(z^{**}) = Re(C(x))$ y, nuevamente por el Lema 1.3.22, podemos concluir que:

$$z^{**}(y^*) = Re(z^{**})(y^*) - iRe(z^{**})(iy^*) =$$

$$Re(C(x))(y^*) - iRe(C(x))(iy^*) = (C(x))(y^*),$$

para cualquier $y^* \in X^*$. Así, se tiene que $z^{**} = C(x)$ y, consecuentemente, X

es reflexivo. □

A continuación, presentaremos una propiedad que satisface toda sucesión acotada en un espacio reflexivo, para lo cual necesitamos enunciar previamente el siguiente resultado:

Lema 3.1.2. *Sea X un espacio normado. Si A es un subconjunto numerable de X, entonces $\overline{\langle A\rangle}$ es un subespacio separable de X.*

Demostración. Sean X y A como en el enunciado del lema. Como $\langle A\rangle$ es un subespacio de X, tenemos que $0 \in \langle A\rangle \subseteq \overline{\langle A\rangle}$. Además, si $x, y \in \overline{\langle A\rangle}$ y $\beta \in \mathbb{K}$, sabemos que existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\langle A\rangle$ tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$. Como $\langle A\rangle$ es un subespacio de X, de lo anterior obtenemos que $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\beta x_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en $\langle A\rangle$ tales que $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ y $\beta x_n \longrightarrow \beta x$, de donde se sigue que $x + y \in \overline{\langle A\rangle}$ y $\beta x \in \overline{\langle A\rangle}$. Por tanto, $\overline{\langle A\rangle}$ es un subespacio de X. Notemos que si $A = \emptyset$, entones es claro que $\overline{\langle A\rangle} = \{0\}$ es un subespacio separable de X. En consecuencia, podemos suponer que $A \neq \emptyset$. Sean $\mathbb{F}$ un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y D el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A con coeficientes en $\mathbb{F}$. Como A y $\mathbb{F}$ son numerables, claramente se tiene que D es numerable y que $D \subseteq \langle A\rangle \subseteq \overline{\langle A\rangle}$. Veamos que D es denso en $\overline{\langle A\rangle}$. Sean $z \in \overline{\langle A\rangle}$ y $\epsilon > 0$. Como $z \in \overline{\langle A\rangle}$, sabemos que existe $y \in \langle A\rangle$ tal que $\|z - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Más aún, como $y \in \langle A\rangle$, tenemos que existen $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ y $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tales que $y = \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i$. Sea $M = \max\{\|a_i\| : i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Como $\mathbb{F}$ es denso en $\mathbb{K}$, sabemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe $q_i \in \mathbb{F}$ tal que $|\beta_i - q_i| < \frac{\epsilon}{2k(M+1)}$. Así, se obtiene que $\sum_{i=1}^{k} q_i a_i$ es un elemento de D tal que:

$$\left\|z - \sum_{i=1}^{k} q_i a_i\right\| \leq \|z - y\| + \left\|y - \sum_{i=1}^{k} q_i a_i\right\| = \|z - y\| + \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i - \sum_{i=1}^{k} q_i a_i\right\| =$$

$$\|z - y\| + \left\|\sum_{i=1}^{k} (\beta_i - q_i) a_i\right\| \leq \|z - y\| + \sum_{i=1}^{k} |\beta_i - q_i| \|a_i\| \leq$$

$$\|z - y\| + \sum_{i=1}^{k} |\beta_i - q_i| M < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon M}{2k(M+1)} =$$

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon k M}{2k(M+1)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De lo anterior se sigue que D es denso en $\overline{\langle A \rangle}$ y, consecuentemente, $\overline{\langle A \rangle}$ es separable. $\square$

Teorema 3.1.3. *Si un espacio normado X es reflexivo, entonces toda sucesión acotada en X contiene una subsucesión débilmente convergente en X.*

Demostración. Sean X un espacio reflexivo y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ un sucesión acotada en X. Sea $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Primero probaremos el teorema para el caso en que X es separable. Supongamos pues que X es separable. Como X es reflexivo, sabemos que C es un isomorfismo de X sobre X^{**}, de donde se sigue que X^{**} es separable. Luego, por el Teorema 2.1.10, obtenemos que X^* es separable. Sea $\left\{x_j^* : j \in \mathbb{N}\right\}$ un subconjunto denso y numerable de X^*. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, sabemos que existe un número real $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, se tiene que $|x_1^*(x_n)| \leq \|x_1^*\|\|x_n\| \leq \|x_1^*\|M \ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $(x_1^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{K}$. De lo anterior, se obtiene que la sucesión $(x_1^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente, digamos $(x_1^*(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$. Sea $y_1 = x_{n_1}$. Similarmente, tenemos que $|x_2^*(x_{n_k})| \leq \|x_2^*\|\|x_{n_k}\| \leq \|x_2^*\|M \ \forall k \in \mathbb{N}$ y, consecuentemente, $(x_2^*(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{K}$, por lo que dicha sucesión contiene una subsucesión convergente, digamos $(x_2^*(x_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$. Sea $y_2 = x_{n_{k_2}}$. Continuando de esta manera, recursivamente, podemos construir una subsucesión $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que el límite de la sucesión $(x_j^*(y_m))_{m=1}^{\infty}$ existe para cualquier $j \in \mathbb{N}$.

Sea $x^* \in X^*$. Como $\left\{x_j^* : j \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en X^* sabemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^* - x_i^*\| < \frac{\epsilon}{4M}$. Además, como $(x_i^*(y_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{K}$, se tiene que $(x_i^*(y_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y, por consiguiente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i^*(y_m) - x_i^*(y_l)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cualesquiera $m, l \geq N$. Luego, para cualesquiera $m, l \geq N$, tenemos que:

$$|x^*(y_m) - x^*(y_l)| = |x^*(y_m - y_l) + x_i^*(y_m - y_l) - x_i^*(y_m - y_l)| \leq$$

$$|x_i^*(y_m - y_l)| + |x^*(y_m - y_l) - x_i^*(y_m - y_l)| =$$

$$|x_i^*(y_m) - x_i^*(y_l)| + |(x^* - x_i^*)(y_m - y_l)| \leq$$

$$|x_i^*(y_m) - x_i^*(y_l)| + \|x_i^* - x^*\|\|y_m - y_l\| \leq$$

$$|x_i^*(y_m) - x_i^*(y_l)| + \|x_i^* - x^*\|(\|y_m\| + \|y_l\|) \leq$$

$$|x_i^*(y_m) - x_i^*(y_l)| + \|x_i^* - x^*\| 2M < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De lo anterior, obtenemos que $(x^*(y_m))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, por tanto, $(x^*(y_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{K}$ para cualquier $x^* \in X^*$. Sea $T : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ la función dada por $T(x^*) = \lim\limits_{m\to\infty} x^*(y_m)$ $\forall x^* \in X^*$. Es claro que si $x^*, y^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $T(x^*+y^*) = \lim\limits_{m\to\infty}(x^*+y^*)(y_m) = \lim\limits_{m\to\infty} x^*(y_m) + \lim\limits_{m\to\infty} y^*(y_m) = T(x^*) + T(y^*)$ y $T(\alpha x^*) = \lim\limits_{m\to\infty}(\alpha x^*)(y_m) = \alpha \lim\limits_{m\to\infty} x^*(y_m) = \alpha T(x^*)$, por lo que T es una funcional lineal. Además, para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $|x^*(y_m)| \leq \|x^*\|\|y_m\| \leq \|x^*\|M$ $\forall m \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que $|T(x^*)| = \left|\lim\limits_{m\to\infty} x^*(y_m)\right| = \lim\limits_{m\to\infty} |x^*(y_m)| \leq \|x^*\|M$ para cada $x^* \in X^*$ y, por tanto, T es una funcional lineal y acotada. De esta manera, obtenemos que $T \in X^{**}$ y, como X es reflexivo, sabemos que existe $x \in X$ tal que $T = C(x)$. Consecuentemente, se obtiene que $\lim\limits_{m\to\infty} x^*(y_m) = T(x^*) = (C(x))(x^*) = x^*(x)$ para cualquier $x^* \in X^*$ y, por el Lema 2.2.7, podemos concluir que $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente a $x \in X$.

Finalmente, en el caso general en que X no necesariamente es separable, consideramos el subespacio cerrado $Y = \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$ de X. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable de X, por el Lema 3.1.2, sabemos que Y es un subespacio separable de X. Más aún, como Y es un subespacio cerrado de X y X es reflexivo, por el Teorema 2.1.20 tenemos que Y es reflexivo. Por tanto, Y es un espacio reflexivo y separable y claramente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es un sucesión acotada en Y. En consecuencia, por el caso probado anteriormente para espacios reflexivos separables, obtenemos que existen $y \in Y \subseteq X$ y una subsucesión $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es débilmente convergente a y. En consecuencia, se tiene que $\lim\limits_{m\to\infty} y^*(y_m) = y^*(y)$ $\forall y^* \in Y^*$. De lo anterior se obtiene que si $x^* \in X^*$, entonces $x^*|_Y \in Y^*$ y, por consiguiente, $\lim\limits_{m\to\infty} x^*(y_m) = \lim\limits_{m\to\infty} x^*|_Y(y_m) = x^*|_Y(y) = x^*(y)$. Por tanto, $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente a $y \in X$. □

En seguida, introduciremos un teorema, conocido como el Teorema de Helly, con el objetivo de probar un resultado que nos asegura la existencia de cierto tipo de funcionales lineales y acotadas en un espacio de Banach que no es reflexivo.

Teorema 3.1.4 (Helly)**.** *Sea X un espacio normado. Sean $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ un subconjunto finito no vacío de X^* y $\{c_1, \ldots, c_n\}$ un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{K}$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) Existe $x_0 \in X$ tal que $x_j^*(x_0) = c_j$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Existe un número real $M \geq 0$ tal que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $\mathbb{K}$ se cumple la desigualdad:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j \right| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^* \right\|.$$

Además, si existe un número real $M \geq 0$ que satisfaga b), entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in X$ tal que x_0 cumple a) y $\|x_0\| \leq M + \epsilon$.

Demostración. Sea X un espacio normado y sean $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ y $\{c_1, \ldots, c_n\}$ subconjuntos finitos no vacíos de X^* y de $\mathbb{K}$, respectivamente.
Primero supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $x_j^*(x_0) = c_j \; \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Entonces, $\|x_0\| \geq 0$ es un número real tal que:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^*(x_0) \right| = \left| \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^* \right) (x_0) \right| \leq \|x_0\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^* \right\|.$$

Por tanto, $M = \|x_0\| \geq 0$ satisface que $\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j \right| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^* \right\|$ para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
Conversamente, supongamos que existe un número real $M \geq 0$ que cumple la condición b) del teorema. Si $c_j = 0 \; \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $x_0 = 0$ claramente satisface que $x_j^*(x_0) = 0 = c_j \; \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\|x_0\| = 0 \leq M + \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$. Por tanto, supongamos que $c_i \neq 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, como $c_i \neq 0$, tenemos que $0 < |c_i| \leq M\|x_i^*\|$, por lo que $\|x_i^*\| \neq 0$ y, por consiguiente, $x_i^* \neq 0$. En primer lugar, consideremos el caso en que $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es linealmente independiente. Sea $T : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ la función dada por $T(x) = (x_1^*(x), \ldots, x_n^*(x)) \; \forall x \in X$. Como X y $\mathbb{K}^n$ son espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y x_j^* es una funcional lineal para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces es claro que T es un operador lineal. Si $n \geq 2$, por el Lema 2.3.2 sabemos que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\bigcap_{j \neq k} \mathcal{N}(x_j^*) \nsubseteq \mathcal{N}(x_k^*)$ pues, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que x_k^* no es combinación lineal de las demás funcionales lineales en el conjunto $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$. En consecuencia, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe $y_k \in X$ tal que $x_k^*(y_k) \neq 0$ y $x_j^*(y_k) = 0 \; \forall j \neq k$. Así, si definimos el vector $z_k = \frac{1}{x_k^*(y_k)} y_k \in X$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, obtenemos que $x_k^*(z_k) = \frac{1}{x_k^*(y_k)} x_k^*(y_k) = 1$ y $x_j^*(z_k) = \frac{1}{x_k^*(y_k)} x_j^*(y_k) = 0 \; \forall j \neq k$, por lo

que $T(z_k)$ es el vector en $\mathbb{K}^n$ cuya k-ésima entrada es igual a uno y todas sus demás entradas son iguales a cero. Consecuentemente, se obtiene que la base canónica de $\mathbb{K}^n$ está contenida en el rango de T, de donde se sigue que T es suprayectivo. Por otra parte, si $n = 1$, sabemos que $c_1 \neq 0$ y $x_1^* \neq 0$ y, por tanto, existe $u \in X$ tal que $x_1^*(u) \neq 0$. Luego, tomando $v = \frac{1}{x_1^*(u)} u \in X$, se tiene que $x_1^*(v) = \frac{1}{x_1^*(u)} x_1^*(u) = 1$ por lo que, nuevamente, la base canónica de $\mathbb{K}$ está contenida en el rango de T y, por consiguiente, T es suprayectivo. En cualquier caso, por la suprayectividad de T, sabemos que existe $y_0 \in X$ tal que $T(y_0) = (x_1^*(y_0), \ldots, x_n^*(y_0)) = (c_1, \ldots, c_n)$. Ahora, como $c_i \neq 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $x_i^*(y_0) = c_i \neq 0$ y, consecuentemente, $y_0 \notin \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*)$. Más aún, como x_j^* es una funcional lineal y acotada para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces, por el Corolario 1.3.11, se tiene que $\mathcal{N}(x_j^*)$ es un subespacio cerrado de X para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ y, por consiguiente, $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*)$ es un subespacio cerrado de X. De lo anterior y del Lema 2.1.9, se sigue que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$, $x^*(y) = 0 \ \forall y \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*)$ y $x^*(y_0) = \delta$, donde $\delta = \operatorname{ínf} \left\{ \|y - y_0\| : y \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*) \right\}$. Como $x^*(y) = 0 \ \forall y \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*)$, entonces $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*) \subseteq \mathcal{N}(x^*)$. En consecuencia, por el Lema 2.3.2, tenemos que x^* es combinación lineal de $x_1^*, \ldots, x_n^*$, por lo que existen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tales que $x^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^*$. Así, para cada $\epsilon > 0$, se tiene que:

$$\operatorname{ínf} \left\{ \|y - y_0\| : y \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*) \right\} = x^*(y_0) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^*(y_0) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_j \leq$$

$$M \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^* \right\| = M\|x^*\| = M < M + \epsilon.$$

De lo anterior obtenemos que, para cada $\epsilon > 0$, existe $z_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(x_j^*)$ tal que $\|z_0 - y_0\| \leq M + \epsilon$. En consecuencia, para cada $\epsilon > 0$, tenemos que el vector $x_0 = y_0 - z_0 \in X$ satisface que $x_j^*(x_0) = x_j^*(y_0) - x_j^*(z_0) = c_j - 0 = c_j$

$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\|x_0\| = \|y_0 - z_0\| = \|z_0 - y_0\| \leq M + \epsilon$.
Por otra parte, si el conjunto $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ no es linealmente independiente, como $c_i \neq 0$ y $x_i^* \neq 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, reordenando al conjunto $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ en caso de ser necesario, podemos suponer que $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$, con $m \in \{1, \ldots, n\}$, es un subconjunto linealmente independiente maximal de $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$. Luego, una prueba análoga a la que se hizo en el caso en que $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es linealmente independiente muestra que, dada $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $x_k^*(x_0) = c_k$ $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$ y $\|x_0\| \leq M + \epsilon$. Además, se tiene que $x_j^* \in \langle \{x_1^*, \ldots, x_m^*\} \rangle$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ por ser $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ un subconjunto linealmente independiente maximal de $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$. Consecuentemente, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existen $\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_m^{(j)} \in \mathbb{K}$, tales que $x_j^* = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(j)} x_k^*$. De esta manera, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se obtiene que:

$$0 \leq |x_j^*(x_0) - c_j| = \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(j)} x_k^*(x_0) - c_j \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(j)} c_k - c_j \right| \leq$$

$$M \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(j)} x_k^* - x_j^* \right\| = 0,$$

de donde se sigue que $|x_j^*(x_0) - c_j| = 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ o, equivalentemente, $x_j^*(x_0) = c_j$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, para cada $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $x_j^*(x_0) = c_j$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\|x_0\| \leq M + \epsilon$. □

Teorema 3.1.5. *Si un espacio de Banach X no es reflexivo, entonces para cada $\theta \in (0,1)$ existen sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $\|x_n^*\| = \|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $Re(x_n^*)(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(x_n^*)(x_j) = 0$ si $n > j$.*

Demostración. Sea X como en el enunciado del teorema. Sean $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**} y $\theta \in (0,1)$. Comenzaremos demostrando el teorema cuando X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Por tanto, supongamos que X es un espacio vectorial real. Notemos que $\mathcal{R}(C)$ es cerrado en X^{**}. En efecto, si $x^{**} \in \overline{\mathcal{R}(C)}$, entonces existe una sucesión $(C(x_n))_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{R}(C)$ tal que $C(x_n) \longrightarrow x^{**}$ Así, tenemos que $(C(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y como $\|x_n - x_m\| = \|C(x_n - x_m)\| = \|C(x_n) - C(x_m)\|$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, de lo anterior se obtiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ es una sucesión de Cauchy. Luego, como X es un espacio de Banach, obtenemos que existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Luego, como $\|C(x_n) - C(x)\| = \|C(x_n - x)\| = \|x_n - x\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a x implica la convergencia de la sucesión $(C(x_n))_{n=1}^{\infty}$ a $C(x)$

de donde se sigue que $x^{**} = C(x)$ y, por consiguiente, $x^{**} \in \mathcal{R}(C)$.
Por tanto, $\overline{\mathcal{R}(C)} \subseteq \mathcal{R}(C)$, de donde se obtiene que $\mathcal{R}(C) = \overline{\mathcal{R}(C)}$ y, en consecuencia, $\mathcal{R}(C)$ es cerrado en X^{**}. Como $\mathcal{R}(C)$ es un subespacio cerrado de X^{**}, podemos considerar el espacio cociente $X^{**}/\mathcal{R}(C)$. Más aún, como X no es reflexivo, sabemos que existe $y^{**} \in X^{**}$ tal que $y^{**} \notin \mathcal{R}(C)$. En consecuencia, obtenemos que $y^{**} + \mathcal{R}(C) \neq 0 + \mathcal{R}(C)$ y, por tanto, $\|y^{**} + \mathcal{R}(C)\| \neq 0$. Sea $\delta \in (\theta, 1)$ y sea $z^{**} = \frac{\delta}{\|y^{**}+\mathcal{R}(C)\|} y^{**} \in X^{**}$. Entonces:

$$\|z^{**} + \mathcal{R}(C)\| = \left\| \frac{\delta}{\|y^{**} + \mathcal{R}(C)\|} y^{**} + \mathcal{R}(C) \right\| =$$

$$\left\| \frac{\delta}{\|y^{**} + \mathcal{R}(C)\|} (y^{**} + \mathcal{R}(C)) \right\| = \frac{\delta}{\|y^{**} + \mathcal{R}(C)\|} \|y^{**} + \mathcal{R}(C)\| = \delta \in (\theta, 1).$$

Luego, como $1 - \|z^{**} + \mathcal{R}(C)\| > 0$, por el Lema 1.2.18, se obtiene que existe $u^{**} \in X^{**}$ tal que $z^{**} + \mathcal{R}(C) = u^{**} + \mathcal{R}(C)$ y $\|u^{**}\| < \|z^{**} + \mathcal{R}(C)\| + (1 - \|z^{**} + \mathcal{R}(C)\|) = 1$. Además, nuevamente por el Lema 1.2.18, se tiene que $\|u^{**}\| \geq \|u^{**} + \mathcal{R}(C)\| = \|z^{**} + \mathcal{R}(C)\| > \theta$. Así, obtenemos que $u^{**} \in X^{**}$ es tal que $\theta < \|u^{**} + \mathcal{R}(C)\| = \|z^{**} + \mathcal{R}(C)\| < 1$ y $\theta < \|u^{**}\| < 1$. Ahora, de manera inductiva construiremos sucesiones $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que:

$$\|y_n^*\| \leq 1 \text{ y } \|y_n\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N},\ y_n^*(y_j) = \theta \text{ si } n \leq j,$$

$$y_n^*(y_j) = 0 \text{ si } n > j \text{ y } u^{**}(y_n^*) = \theta \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Como $\theta < \|u^{**}\| = \sup\limits_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |u^{**}(x^*)|$, entonces existe $y^* \in X^*$ tal que $\|y^*\| \leq 1$ y $0 < \theta < |u^{**}(y^*)|$. De lo anterior, claramente se sigue que $u^{**}(y^*) \neq 0$. Sea $y_1^* = \frac{\theta}{u^{**}(y^*)} y^* \in X^*$. Observemos que como $u^{**}(y^*) \neq 0$, entonces $y^* \neq 0$ y, por consiguiente, $y_1^* = \frac{\theta}{u^{**}(y^*)} y^* \neq 0$. Más aún, $u^{**}(y_1^*) = u^{**}\left(\frac{\theta}{u^{**}(y^*)} y^*\right) = \frac{\theta}{u^{**}(y^*)} u^{**}(y^*) = \theta$ y $\|y_1^*\| = \left\| \frac{\theta}{u^{**}(y^*)} y^* \right\| = \frac{\theta}{|u^{**}(y^*)|} \|y^*\| \leq \frac{\theta}{|u^{**}(y^*)|} < 1$, pues $\|y^*\| \leq 1$ y $0 < \theta < |u^{**}(y^*)|$. En consecuencia, como $y_1^* \neq 0$ y $\theta < \|u^{**}\| < 1$, tenemos que $\theta = |u^{**}(y_1^*)| \leq \|u^{**}\| \|y_1^*\| < \|y_1^*\|$. Luego, de manera análoga a como construimos $y_1^* \in X^*$ tal que $\|y_1^*\| \leq 1$ y $u^{**}(y_1^*) = \theta$ a partir del hecho de que $\theta < \|u^{**}\|$, podemos construir $y_1 \in X$ tal que $\|y_1\| \leq 1$ y $y_1^*(y_1) = \theta$.
Ahora, supongamos que $y_1, \ldots, y_n \in X$ y $y_1^*, \ldots, y_n^* \in X^*$ han sido elegidos de modo que satisfagan las condiciones en (3.1) para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $0 < \theta < \|u^{**} + \mathcal{R}(C)\| < 1$, podemos considerar $M = \frac{\theta}{\|u^{**}+\mathcal{R}(C)\|}$, de modo

que $0 < M < 1$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Es claro que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j C(y_j) \in \mathcal{R}(C)$, por lo que:

$$M \left\| u^{**} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j C(y_j) \right\| \geq M \| u^{**} + \mathcal{R}(C) \| = \theta. \tag{3.2}$$

Sean $c_1 = \ldots = c_n = 0$ y $c_{n+1} = \theta$. Sean $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$. Claramente se tiene que $\left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j c_j \right| = |\beta_{n+1}|\theta$. Así, obtenemos que si $\beta_{n+1} = 0$, entonces se satisface que $\left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j c_j \right| = |\beta_{n+1}|\theta = 0 \leq M \left\| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j C(y_j) + \beta_{n+1} u^{**} \right\|$ y si $\beta_{n+1} \neq 0$, tomando $\alpha_j = \frac{\beta_j}{\beta_{n+1}}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ y sustituyendo en la desigualdad (3.2), obtenemos que:

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j c_j \right| = |\beta_{n+1}|\theta \leq |\beta_{n+1}| M \left\| u^{**} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_{n+1}} C(y_j) \right\| =$$

$$M \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j C(y_j) + \beta_{n+1} u^{**} \right\|.$$

De lo anterior se sigue que para cualesquiera escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ se satisface la desigualdad $\left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j c_j \right| \leq M \left\| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j C(y_j) + \beta_{n+1} u^{**} \right\|$. En consecuencia, como $0 < M < 1$, por el Teorema de Helly (Teorema 3.1.4), para $1 - M > 0$ sabemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| \leq M + (1 - M) = 1$, $(C(y_j))(x^*) = x^*(y_j) = 0 = c_j \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ y $u^{**}(x^*) = \theta = c_{n+1}$. Tomando $y^*_{n+1} = x^* \in X^*$, tenemos que $\|y^*_{n+1}\| \leq 1$, $y^*_{n+1}(y_j) = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ y $u^{**}(y^*_{n+1}) = \theta$. Por tanto, para completar el paso inductivo, basta hallar $y_{n+1} \in X$ tal que $\|y_{n+1}\| \leq 1$ y $y^*_j(y_{n+1}) = \theta \ \forall j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$. Entonces, como $u^{**}(y^*_j) = \theta$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, se tiene que:

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j \theta \right| = \left| \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j u^{**}(y^*_j) \right| = \left| u^{**} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j y^*_j \right) \right| \leq \|u^{**}\| \left\| \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j y^*_j \right\|.$$

Como $\|u^{**}\| < 1$, nuevamente por el Teorema de Helly, para $1 - \|u^{**}\| > 0$ se obtiene que existe $x \in X$ tal que $\|x\| \leq \|u^{**}\| + (1 - \|u^{**}\|) = 1$ y $y^*_j(x) = \theta$

$\forall j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Tomando $y_{n+1} = x$, tenemos que $\|y_{n+1}\| \leq 1$ y $y_j^*(y_{n+1}) = \theta$ $\forall j \in \{1, \ldots, n+1\}$. De esta manera, inductivamente, obtenemos sucesiones $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ que satisfacen las condiciones en (3.1). Además, como $y_n^*(y_n) = \theta \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, sabemos que $y_n^* \neq 0$ y $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n^* = \frac{1}{\|y_n^*\|} y_n^*$ y $x_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n$, entonces se cumple que $\|x_n^*\| = \|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^*(x_j) = \frac{1}{\|y_j\|} x_n^*(y_j) = \frac{1}{\|y_j\|\|y_n^*\|} y_n^*(y_j) = \frac{\theta}{\|y_j\|\|y_n^*\|} \geq \theta$ si $n \leq j$, pues $\|y_n^*\| \leq 1$ y $\|y_n\| \leq 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y $x_n^*(x_j) = \frac{1}{\|y_j\|} x_n^*(y_j) = \frac{y_n^*(y_j)}{\|y_j\|\|y_n^*\|} = 0$ si $n > j$.
Por otra parte, para el caso general en que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, consideramos el espacio normado X_r sobre $\mathbb{R}$ que se obtiene restringiendo el producto de vectores en X por escalares a $\mathbb{R} \times X$. Como X es un espacio de Banach, es claro que X_r es un espacio de Banach y debido a que X no es reflexivo, por el Lema 3.1.1, sabemos que X_r no es reflexivo. Luego, por el caso demostrado previamente para espacios normados reales, para cada $\theta \in (0, 1)$ se obtienen sucesiones $(z_n^*) \subseteq (X_r)^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X_r$ tales que $\|z_n^*\| = \|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n^*(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $z_n^*(x_j) = 0$ si $n > j$. Como $z_n^* \in (X_r)^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.3.22, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que existe $x_n^* \in X^*$ tal que $Re(x_n^*) = z_n^*$. Por tanto, aplicando nuevamente el Lema 1.3.22, podemos concluir que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ son sucesiones que satisfacen que $\|x_n^*\| = \|Re(x_n^*)\| = \|z_n^*\| = \|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $Re(x_n^*)(x_j) = z_n^*(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(x_n^*)(x_j) = z_n^*(x_j) = 0$ si $n > j$. □

Es bien sabido que en un espacio métrico toda familia de conjuntos compactos tiene la propiedad de la intersección finita. La caracterización de reflexividad que presentaremos a continuación afirma que, al igual que en un espacio métrico, en un espacio normado reflexivo podemos garantizar que ciertas familias de conjuntos tienen intersección no vacía.

Teorema 3.1.6. *Sea X un espacio normado. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *X es reflexivo.*

b) *Toda sucesión decreciente $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos de X satisface que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

Demostración. Sea X un espacio normado. A lo largo de esta prueba, dados $x \in X$ y un número real $r > 0$, $B[x, r]$ denotará la bola cerrada en X con centro en x y radio r.

Primero supongamos que X es reflexivo. Sea $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in C_n$. Como $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, tenemos que $x_n \in C_n \subseteq C_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, como C_1 es acotado, de lo anterior se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X. En consecuencia, por la reflexividad de X y por el Teorema 3.1.3, obtenemos que existen $x \in X$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Supongamos que $x \notin C_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Como C_m es cerrado y $x \notin C_m$, sabemos que $\inf\limits_{y \in C_m} \|x - y\| > 0$. Además, como C_m es convexo y no vacío, por el Teorema 1.5.10 se obtiene que existe $x^* \in X^*$ tal que $Re(x^*)(x) > \sup\limits_{y \in C_m} Re(x^*)(y)$. Notemos que $\lim\limits_{k \to \infty} x^*(x_{n_k}) = x^*(x)$, por ser $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ débilmente convergente a x y, por consiguiente, $\lim\limits_{k \to \infty} Re(x^*)(x_{n_k}) = Re(x^*)(x)$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $m < n_j$. Entonces, si $k \geq j$, se tiene que $m < n_j \leq n_k$ y, por ser $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ decreciente, podemos concluir que $x_{n_k} \in C_{n_k} \subseteq C_m$ $\forall k \geq j$. Así, tenemos que $\sup\limits_{y \in C_m} Re(x^*)(y) \geq Re(x^*)(x_{n_k})$ $\forall k \geq j$ y, por consiguiente, $\sup\limits_{y \in C_m} Re(x^*)(y) \geq \lim\limits_{k \to \infty} Re(x^*)(x_{n_k}) = Re(x^*)(x)$. Consecuentemente, se obtiene que $Re(x^*)(x) > \sup\limits_{y \in C_m} Re(x^*)(y) \geq Re(x^*)(x)$, lo cual claramente es una contradicción. Por tanto, $x \in C_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

Conversamente, supongamos que X cumple la condición b) del teorema. Veamos que X es un espacio de Banach. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n = \overline{co(\{y_j : j \geq n\})}$. Es claro que $D_n \neq \emptyset$ y que D_n es cerrado en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{y_j : j \geq n+1\} \subseteq \{y_j : j \geq n\} \subseteq co(\{y_j : j \geq n\})$, de donde claramente se sigue que $co(\{y_j : j \geq n+1\}) \subseteq co(\{y_j : j \geq n\})$ y, por tanto, $D_{n+1} \subseteq D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, como $co(\{y_j : j \geq n\}$ es convexo para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.2.20, tenemos que D_n es convexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y_m\| < 1$ para cualesquiera $n, m \geq N$. Así, se tiene que $\|y_n - y_N\| < 1$ $\forall n \geq N$ y, por consiguiente, $\{y_j : j \geq N\} \subseteq B[y_N, 1]$. Como $B[y_N, 1]$ es convexa (Lema 1.2.20), de lo anterior se obtiene que $co(\{y_j : j \geq N\}) \subseteq B[y_N, 1]$ y, en consecuencia, $D_N \subseteq \overline{B[y_N, 1]} = B[y_N, 1]$. Luego, como claramente $B[y_N, 1]$ es acotada y $D_n \subseteq D_N \subseteq B[y_N, 1]$ $\forall n \geq N$, obtenemos que D_n es acotado $\forall n \geq N$. De esta manera, tenemos que $(D_n)_{n=N}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de X no vacíos, cerrados, acotados y convexos. Por hipótesis, sabemos que $\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} D_n \neq \emptyset$. Además, como

$D_{n+1} \subseteq D_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, es claro que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} D_n \neq \emptyset$. Sea $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ y sea $\epsilon > 0$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, sabemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y_m\| < \frac{\epsilon}{3}$ para cualesquiera $n, m \geq M$. A partir de la desigualdad anterior, un argumento análogo al que nos permitió concluir que $D_{_N} \subseteq B\left[y_{_N}, 1\right]$ muestra que $D_{_M} \subseteq B\left[y_{_M}, \frac{\epsilon}{3}\right]$. Entonces, para cualquier $n \geq M$, tenemos que $\|y_n - y\| \leq \|y_n - y_{_M}\| + \|y_{_M} - y\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$, pues $y \in D_{_M} \subseteq B\left[y_{_M}, \frac{\epsilon}{3}\right]$. De lo anterior, se obtiene que $y_n \longrightarrow y$ y, en consecuencia, X es un espacio de Banach.

Supongamos que X no es reflexivo. Por el Teorema 3.1.5, para $\theta = \frac{1}{2} \in (0,1)$ se tienen que existen sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $\|x_n^*\| = \|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $Re(x_n^*)(x_j) \geq \frac{1}{2}$ si $n \leq j$ y $Re(x_n^*)(x_j) = 0$ si $n > j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n = \overline{co(\{x_j : j \geq n\})}$. Es claro que C_n es no vacío y cerrado en X para cada $n \in \mathbb{N}$. De manera análoga a como se vio que $D_{n+1} \subseteq D_n$ y que D_n es convexo para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se puede ver que $C_{n+1} \subseteq C_n$ y que C_n es convexo para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Más aún, como $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{x_j : j \geq n\} \subseteq B[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por la convexidad de $B[0,1]$ (Lema 1.2.20), obtenemos que $co(\{x_j : j \geq n\}) \subseteq B[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $C_n \subseteq \overline{B[0,1]} = B[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De lo anterior, se sigue que C_n es acotado para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, hemos probado que $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de X no vacíos, cerrados, acotados y convexos. Por hipótesis, se tiene que existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ (n fija). Como $x \in C_n = \overline{co(\{x_j : j \geq n\})}$, sabemos que existe una sucesión $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ en $co(\{x_j : j \geq n\})$ tal que $z_k \longrightarrow x$. Sea $k \in \mathbb{N}$ (k fija). Como $z_k \in co(\{x_j : j \geq n\})$, por el Lema 1.1.5, obtenemos que existen $m \in \mathbb{N}$, $w_1, \ldots, w_m \in \{x_j : j \geq n\}$ y números reales no negativos $t_1, \ldots, t_m$ tales que $z_k = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i w_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 1$. Así, como $Re(x_n^*)(x_j) \geq \frac{1}{2}$ si $n \leq j$ y $t_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos concluir que $Re(x_n^*)(z_k) = Re(x_n^*)\left(\sum\limits_{i=1}^{m} t_i w_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i Re(x_n^*)(w_i) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{m} t_i = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, $Re(x_n^*)(z_k) \geq \frac{1}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Además, como $z_k \longrightarrow x$, por el Corolario 1.3.11, podemos concluir que $x_n^*(z_k) \longrightarrow x_n^*(x)$ y, por consiguiente, $Re(x_n^*)(z_k) \longrightarrow Re(x_n^*)(x)$. De lo anterior se obtiene que $Re(x_n^*)(x) = \lim\limits_{k \to \infty} Re(x_n^*)(z_k) \geq \dfrac{1}{2}$, por lo que $Re(x_n^*)(x) \geq \frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, sea $\delta > 0$. Como $x \in C_1 = \overline{co(\{x_j : j \geq 1\})}$, se tiene que existe $z \in co(\{x_j : j \geq 1\})$ tal que $\|x - z\| < \delta$. Luego, nuevamente por el Lema 1.1.5, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen $l \in \mathbb{N}$ y números reales no negativos $s_1, \ldots, s_l$ tales que $z = \sum_{i=1}^{l} s_i x_i$ y $\sum_{i=1}^{l} s_i = 1$. Así, para cualquier $n \geq l + 1$ tenemos que $n > j$ $\forall j \in \{1, \ldots, l\}$ y, consecuentemente, $Re(x_n^*)(z) = Re(x_n^*)\left(\sum_{i=1}^{l} s_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{l} s_i Re(x_n^*)(x_i) = 0$. Como $\|Re(x_n^*)\| = \|x_n^*\| = 1$ para cualquier $n \geq l + 1$, de lo anterior se sigue que $|Re(x_n^*)(x)| = |Re(x_n^*)(x) - Re(x_n^*)(z)| = |Re(x_n^*)(x - z)| \leq \|Re(x_n^*)\|\|x - z\| = \|x - z\| < \delta$ para cualquier $n \geq l + 1$ y, por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} Re(x_n^*)(x) = 0$. De esta forma, obtenemos que $Re(x_n^*)(x) \geq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} Re(x_n^*)(x) = 0$, lo cual claramente es una contradicción. Por tanto, X es reflexivo. $\square$

3.2. Caracterización por medio de la compacidad débil de la bola unitaria

Recordando las definiciones de topología inducida (Definición 2.3.17) y homeomorfimso (Definición 2.3.18), cabe mencionar que es sencillo comprobar que si (A, τ_A) y (D, τ_D) son espacios topológicos y $C \subseteq B \subseteq A$, entonces C es un subcojunto compacto de A con respecto a la topología τ_A si y sólo si C es un subconjunto compacto de B con respecto a la topología inducida por la topología τ_A en B y que si $f : A \longrightarrow D$ es un homeomorfismo, entonces C es un subcojunto compacto de A con respecto a la topología τ_A si y sólo si $f(C)$ es un subconjunto compacto de D con respecto a la topología τ_D. Con base en lo anterior, podemos probar el siguiente lema:

Lema 3.2.1. *Sea X un espacio normado. Sean A un subconjunto de X y $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) A es débilmente compacto.

b) $C(A)$ es débil-compacto.*

c) A es acotado y $C(A)$ es débil-cerrado.*

Demostración. Sean X, A y $C : X \longrightarrow X^{**}$ como en el enunciado del lema. Por el Lema 2.3.19, sabemos que $C : X \longrightarrow \mathcal{R}(C)$ es un homeomorfismo si consideramos la topología débil de X y la topología inducida por la topología débil* de X^{**} en $\mathcal{R}(C)$. En consecuencia, tenemos que A es débilmente compacto si y sólo si $C(A)$ es débil*-compacto en $\mathcal{R}(C)$ y esto último sucede si y sólo si $C(A)$ es débil*-compacto en X^{**}. Por tanto, A es débilmente compacto si y sólo si $C(A)$ es débil*-compacto.

Por otra parte, si $C(A)$ es débil*-compacto, por el Lema 2.3.14, tenemos que $C(A)$ es débil*-cerrado. Además, como X^* es un espacio de Banach y $C(A)$ es un subconjunto débil*-compacto de X^{**}, por el Corolario 2.3.10, se obtiene que $C(A)$ es acotado. Luego, como $\|a\| = \|C(a)\|\ \forall a \in A$, de lo anterior claramente se sigue que A es acotado. Así, obtenemos que si $C(A)$ es débil*-compacto, entonces A es acotado y $C(A)$ es débil*-cerrado.

Conversamente, supongamos que A es acotado y $C(A)$ es débil*-cerrado. Como A es acotado y $\|a\| = \|C(a)\|\ \forall a \in A$, es claro que $C(A)$ es acotado. En consecuencia, como $C(A)$ es débil*-cerrado y acotado, por el Corolario 2.3.16 podemos concluir que $C(A)$ es débil*-compacto. Por tanto, $C(A)$ es débil*-compacto si y sólo si A es acotado y $C(A)$ es débil*-cerrado. $\square$

El lema anterior nos permite presentar otra caracterización importante de reflexividad en términos de compacidad débil.

Teorema 3.2.2. *Un espacio normado X es reflexivo si y sólo si la bola unitaria cerrada en X es débilmente compacta.*

Demostración. Sean X un espacio normado y $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Sean $B_X[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X y $B_{X^{**}}[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X^{**}.

Primero supongamos que X es reflexivo. Veamos que $C(B_X[0,1]) = B_{X^{**}}[0,1]$. Si $x \in B_X[0,1]$, entonces $\|C(x)\| = \|x\| \leq 1$, por lo que $C(x) \in B_{X^{**}}[0,1]$ y, por consiguiente, $C(B_X[0,1]) \subseteq B_{X^{**}}[0,1]$. Por otra parte, si $x^{**} \in B_{X^{**}}[0,1] \subseteq X^{**}$, sabemos que existe $x \in X$ tal que $x^{**} = C(x)$, por ser X reflexivo. De lo anterior, obtenemos que $\|x\| = \|C(x)\| = \|x^{**}\| \leq 1$, de donde se sigue que $x^{**} = C(x) \in C(B_X[0,1])$ y, en consecuencia, $B_{X^{**}}[0,1] \subseteq C(B_X[0,1])$. Por tanto, $C(B_X[0,1]) = B_{X^{**}}[0,1]$. Ahora, por el Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 2.3.15) se tiene que $C(B_X[0,1]) = B_{X^{**}}[0,1]$ es débil*-compacta. Consecuentemente, por el Lema 3.2.1, se obtiene que $B_X[0,1]$ es débilmente compacta.

Conversamente, supongamos que $B_X[0,1]$ es débilmente compacta. Nuevamente por el Lema 3.2.1, tenemos que $C(B_X[0,1])$ es débil*-cerrado. Luego, por el Corolario 2.3.23, obtenemos que $C(B_X[0,1]) = \overline{C(B_X[0,1])}^{w*} = B_{X^{**}}[0,1]$, donde

$\overline{C(B_X[0,1])}^{w*}$ es la cerradura débil* de $C(B_X[0,1])$. Sea $y^{**} \in X^{**}$. Si $y^{**} = 0$, entonces es claro que $y^{**} = 0 = C(0) \in \mathcal{R}(C)$. Por otra parte, si $y^{**} \neq 0$, entonces claramente $\frac{1}{\|y^{**}\|}y^{**} \in B_{X^{**}}[0,1] = C(B_X[0,1])$. De lo anterior, se obtiene que existe $x \in B_X[0,1]$ tal que $\frac{1}{\|y^{**}\|}y^{**} = C(x)$. Así, por la linealidad de C, podemos concluir que $y^{**} = \|y^{**}\|C(x) = C(\|y^{**}\|x)$ y, por consiguiente, $y^{**} \in \mathcal{R}(C)$. Por tanto, C es suprayectivo y, en consecuencia, X es reflexivo. $\square$

3.3. Caracterización por medio de funcionales que alcanzan su supremo

En seguida, probaremos que el recíproco del Teorema 3.1.5 es válido. Este resultado caracteriza a los espacios de Banach que no son reflexivos en términos de la existencia de cierto tipo de sucesiones en dichos espacios y en sus respectivos espacios duales.

Teorema 3.3.1. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *X no es reflexivo.*

b) *Para cada $\theta \in (0,1)$ existen sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $\|x_n^*\| = \|x_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $Re(x_n^*)(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(x_n^*)(x_j) = 0$ si $n > j$.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach.
Si X no es reflexivo, entonces el Teorema 3.1.5 nos asegura que se satisface la condición b) del teorema.
Conversamente, supongamos que la condición b) del teorema es válida. En particular, para $\theta = \frac{1}{2}$, sabemos que existen sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $\|x_n^*\| = \|x_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $Re(x_n^*)(x_j) \geq \frac{1}{2}$ si $n \leq j$ y $Re(x_n^*)(x_j) = 0$ si $n > j$. Luego, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el subconjunto C_n de X como $C_n = \overline{co(\{x_j : j \geq n\})}$, un argumento análogo al utilizado en la última parte de la demostración del Teorema 3.1.6 muestra que $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. En consecuencia, nuevamente por el Teorema 3.1.6, podemos concluir que X no es reflexivo. $\square$

Es importante mencionar que si A es un conjunto no vacío, entonces es fácil comprobar que $B = \{f : A \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ es acotada}\}$ es un espacio normado con norma $\|f\| = \sup\{|f(a)| : a \in A\}$. Con base en lo anterior y el Teorema 3.3.1, obtenemos el siguiente corolario que nos da otra condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach no sea reflexivo.

Corolario 3.3.2. *Sea X un espacio de Banach. Sean A un conjunto no vacío tal que $|X| \leq |A|$, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto infinito numerable de A y $B = \{f : A \longrightarrow \mathbb{K} : f$ es acotada$\}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *X no es reflexivo.*

b) *Dada $\theta \in (0,1)$, existe un operador lineal $T : X \longrightarrow B$ tal que $\|x\| = \|T(x)\|$ $\forall x \in X$ y, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in X$ tal que $|(T(x_j))(a)| \leq 1$ $\forall a \in A$, $Re(T(x_j))(a_n) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(T(x_j))(a_n) = 0$ si $n > j$.*

Demostración. Sean X, A, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y B como en el enunciado del corolario. Primero supongamos que X no es reflexivo. Sean $\theta \in (0,1)$ y $x_0^* \in X^*$ tal que $\|x_0^*\| = 1$. Como X es un espacio de Banach no reflexivo, por el Teorema 3.3.1 sabemos que existen sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $\|x_n^*\| = \|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $Re(x_n^*)(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(x_n^*)(x_j) = 0$ si $n > j$. Ahora, para cada $x \in X \setminus \{0\}$, sea $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$ (la existencia de dicha x^* para cada $x \in X \setminus \{0\}$ está garantizada por el Teorema 1.5.6). Notemos que, como X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $X \neq \{0\}$, entonces X es un conjunto infinito no numerable pues $\mathbb{K}$ es un conjunto infinito no numerable y, si $x_0 \in X$ es cualquier vector distinto de cero, entonces claramente la función $g : \mathbb{K} \longrightarrow X$ dada por $g(\alpha) = \alpha x_0$ es inyectiva, de donde se sigue que $|\mathbb{K}| \leq |X|$. Luego, como $|X| \leq |A|$, obtenemos que A es un conjunto infinito no numerable. Consecuentemente, al ser X y A conjuntos infinitos no numerables, tenemos que:

$$|X \setminus \{0\}| = |X| \leq |A| = |A \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}|,$$

por lo que existe una función inyectiva $h : X \setminus \{0\} \longrightarrow A \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En consecuencia, para cada $x \in X$ podemos definir la función $f_x : A \longrightarrow \mathbb{K}$ como $f_x(a_n) = x_n^*(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_x(h(z)) = z^*(x)$ $\forall z \in X \setminus \{0\}$ y $f_x(a) = x_0^*(x)$ $\forall a \in A \setminus (\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup h(X \setminus \{0\}))$. Sea $T : X \longrightarrow B$ la función dada por $T(x) = f_x$ $\forall x \in X$. Observemos que T está bien definida ya que si $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in X \setminus \{0\}$ y $a \in A \setminus (\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup h(X \setminus \{0\}))$, entonces:

$$|(T(x))(a_n)| = |f_x(a_n)| = |x_n^*(x)| \leq \|x_n^*\|\|x\| = \|x\|,$$

$$|(T(x))(h(z))| = |f_x(h(z))| = |z^*(x)| \leq \|z^*\|\|x\| = \|x\|,$$

y

$$|T(x))(a)| = |f_x(a)| = |x_0^*(x)| \leq \|x_0^*\|\|x\| = \|x\|.$$

De lo anterior se obtiene que si $x \in X$, entonces $|(T(x))(a)| \leq \|x\|$ $\forall a \in A$ y, por tanto, $T(x) \in B$. Además, si $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in X \setminus \{0\}$ y $a \in A \setminus (\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup h(X \setminus \{0\}))$, tenemos que:

$$(T(x+y))(a_n) = f_{x+y}(a_n) = x_n^*(x+y) =$$

$$x_n^*(x) + x_n^*(y) = (f_x + f_y)(a_n) = (T(x) + T(y))(a_n), \tag{3.3}$$

$$(T(x+y))(h(z)) = f_{x+y}(h(z)) = z^*(x+y) =$$

$$z^*(x) + z^*(y) = (f_x + f_y)(h(z)) = (T(x) + T(y))(h(z)), \tag{3.4}$$

$$(T(x+y))(a) = f_{x+y}(a) = x_0^*(x+y) =$$

$$x_0^*(x) + x_0^*(y) = (f_x + f_y)(a) = (T(x) + T(y))(a), \tag{3.5}$$

$$(T(\alpha x))(a_n) = f_{\alpha x}(a_n) = x_n^*(\alpha x) = \alpha x_n^*(x) =$$

$$(\alpha f_x)(a_n) = (\alpha T(x))(a_n), \tag{3.6}$$

$$(T(\alpha x))(h(z)) = f_{\alpha x}(h(z)) = z^*(\alpha x) = \alpha z^*(x) =$$

$$(\alpha f_x)(h(z)) = (\alpha T(x))(h(z)), \tag{3.7}$$

$$(T(\alpha x))(a) = f_{\alpha x}(a) = x_0^*(\alpha x) = \alpha x_0^*(x) =$$

$$(\alpha f_x)(a) = (\alpha T(x))(a). \tag{3.8}$$

De (3.3), (3.4) y (3.5) obtenemos que si $x, y \in X$, entonces $(T(x+y))(a) = (T(x) + T(y))(a)$ $\forall a \in A$ y de (3.6), (3.7) y (3.8) se sigue que si $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $(T(\alpha x))(a) = (\alpha T(x))(a)$ $\forall a \in A$. Consecuentemente, se tiene que $T(x+y) = T(x) + T(y)$ y $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ y, por consiguiente, T es un operador lineal. Por otra parte, como para cada $x \in X$ se satisface que $|(T(x))(a)| \leq \|x\|$ $\forall a \in A$, tenemos que $\|T(x)\| = \sup\{|(T(x))(a)| : a \in A\} \leq \|x\|$ para cada $x \in X$. Más aún, si $x \in X$ y $x = 0$, entonces es claro que $\|x\| = 0 \leq \|T(x)\|$ y si $x \in X$ y $x \neq 0$, se tiene que $\|x\| = |x^*(x)| = |f_x(h(x))| = |(T(x))(h(x))| \leq \|T(x)\|$. En consecuencia, obtenemos que $\|x\| = \|T(x)\|$ $\forall x \in X$. Finalmente, si $j \in \mathbb{N}$, entonces $x_j \in X$ cumple que $|(T(x_j))(a)| \leq \|T(x_j)\| = \|x_j\| = 1$ $\forall a \in A$, $Re(T(x_j))(a_n) = Re(x_n^*)(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(T(x_j))(a_n) = Re(x_n^*)(x_j) = 0$ si $n > j$.

Conversamente, supongamos que se satisface la condición b) del corolario. Sean $\theta \in (0,1)$ y $T : X \longrightarrow B$ un operador lineal tal que $\|x\| = \|T(x)\|$ $\forall x \in X$ y, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in X$ tal que $|(T(x_j))(a)| \leq 1$ $\forall a \in A$, $Re(T(x_j))(a_n) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $Re(T(x_j))(a_n) = 0$ si $n > j$. Notemos que $x_j \neq 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$, ya que, para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$0 < \theta \leq Re(T(x_j))(a_j) \leq |(T(x_j))(a_j)| \leq \|T(x_j)\| = \|x_j\|,$$

por lo que $\|x_j\| \neq 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, $x_j \neq 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Además, como para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $|(T(x_j))(a)| \leq 1$ $\forall a \in A$, entonces $\|x_j\| = \|T(x_j)\| \leq 1$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $x_j^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ la función dada por $x_j^*(x) = (T(x))(a_j)$ $\forall x \in X$. Como T es lineal, sabemos que si $j \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $x_j^*(x+y) = (T(x+y))(a_j) = (T(x)+T(y))(a_j) = x_j^*(x) + x_j^*(y)$ y $x_j^*(\alpha x) = (T(\alpha x))(a_j) = (\alpha T(x))(a_j) = \alpha x_j^*(x)$, de donde se obtiene que x_j^* es una funcional lineal para cada $j \in \mathbb{N}$. Más aún, para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x_j^*(x)| = |(T(x))(a_j)| \leq \|T(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in X$ y, por tanto, $x_j^* \in X^*$ y $\|x_j^*\| \leq 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Luego, como para cualquier $j \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|x_j^*(x_j)| = |(T(x_j))(a_j)| \geq Re(T(x_j))(a_j) \geq \theta > 0,$$

entonces $x_j^* \neq 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Así, si para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos $y_j \in X$ y $y_j^* \in X^*$ como $y_j = \frac{1}{\|x_j\|} x_j$ y $y_j^* = \frac{1}{\|x_j^*\|} x_j^*$, obtenemos que $(y_j)_{j=1}^\infty \subseteq X$ y $(y_j^*)_{j=1}^\infty \subseteq X^*$ son sucesiones tales que $\|y_j\| = \|y_j^*\| = 1$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $Re(y_k^*)(y_j) = Re\left(\frac{x_k^*(x_j)}{\|x_k^*\|\|x_j\|}\right) = \frac{Re(x_k^*)(x_j)}{\|x_k^*\|\|x_j\|} \geq Re(x_k^*)(x_j) = Re(T(x_j))(a_k) \geq \theta$ si $k \leq j$, pues $\|x_j^*\| \leq 1$ y $\|x_j\| \leq 1$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$, y $Re(y_k^*)(y_j) = Re\left(\frac{x_k^*(x_j)}{\|x_k^*\|\|x_j\|}\right) = \frac{Re(x_k^*)(x_j)}{\|x_k^*\|\|x_j\|} = \frac{Re(T(x_j))(a_k)}{\|x_k^*\|\|x_j\|} = 0$ si $k > j$. En consecuencia, por el Teorema 3.3.1, podemos concluir que X no es reflexivo. □

Ahora, con el fin de presentar una caracterización de reflexividad para espacios de Banach en términos de funcionales lineales y acotadas que alcanzan su supremo en la esfera unitaria de dichos espacios, definiremos cuándo es que una funcional lineal y acotada definida sobre un espacio normado X alcanza su supremo en un subconjunto de X.

Definición 3.3.3. Sean X un espacio normado, A un subconjunto de X y $x^* \in X^*$. Diremos que x_c^* *alcanza su supremo en* A si existe $x_0 \in A$ tal que $|x^*(x_0)| = \sup\limits_{x \in A} |x^*(x)|$.

En seguida, con base en la definición anterior, probaremos un lema que nos será de utilidad para demostrar los resultados que se presentarán más adelante en esta sección.

Lema 3.3.4. *Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{C}$ y $x^* \in X^*$. Entonces, x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X si y sólo existe $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$, $|x^*(y)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$ y $|Re(x^*)(y)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |Re(x^*)(x)|$.*

Demostración. Sean X un espacio normado complejo y $x^* \in X^*$.
En primer lugar, supongamos que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. Entonces, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ y $|x^*(u)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$. Un argumento análogo al utilizado en la demostración del inciso c) del Lema 1.3.22, muestra que existe $\alpha_u \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha_u| = 1$ y $x^*(\alpha_u u) = \alpha_u x^*(u) = |x^*(u)|$. Luego, como $x^*(\alpha_u u) = |x^*(u)| \in \mathbb{R}$ y $x^*(\alpha_u u) = |x^*(u)| \geq 0$, tenemos que $|Re(x^*)(\alpha_u u)| = Re(x^*)(\alpha_u u) = x^*(\alpha_u u) = |x^*(u)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$. Así, por el Lema 1.3.8 y el Lema 1.3.22, se obtiene que:

$$|Re(\alpha_u u)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)| = \|x^*\| = \|Re(x^*)\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |Re(x^*)(x)|.$$

Por tanto, $\alpha_u u \in X$ cumple que $\|\alpha_u u\| = |\alpha_u| \|u\| = 1$, $|x^*(\alpha_u u)| = |x^*(u)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$ y $|Re(x^*)(\alpha_u u)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |Re(x^*)(x)|$.
Conversamente, si suponemos que existe $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$, $|x^*(y)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$ y $|Re(x^*)(y)| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |Re(x^*)(x)|$, entonces es claro que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. □

A continuación, antes de obtener la caracterización de reflexividad para espacios de Banach previamente mencionada, demostraremos tres teoremas sobre espacios de Banach y funcionales lineales y acotadas que alcanzan su supremo en la esfera unitaria de dichos espacios. Cabe aclarar que en dichos teoremas se empleará la notación presentada en los Ejemplos 2.1.12 y 2.1.13 para los espacios de sucesiones c_0, ℓ_1 y ℓ_∞ y para las sucesiones e_n, donde $n \in \mathbb{N}$, además

de que se considerará a c_0 como un subespacio de ℓ_∞. Asimismo, en la prueba de estos resultados se utilizarán dos hechos sencillos de comprobar, a saber, que $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base de Schauder tanto de ℓ_1 como de c_0 y que si $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en cualquiera de estos dos espacios, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.
El teorema que enunciaremos en seguida nos garantiza que si X es un espacio de Banach que contiene a ℓ_1 como subespacio, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.

Teorema 3.3.5. *Sea X un espacio de Banach. Si ℓ_1 es un subespacio de X, entonces existen $y^* \in (\ell_1)^*$ y $x^* \in X^*$ tales que $x^*|_{\ell_1} = y^*$, $\|y^*\| = \|x^*\|$ y x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach que contiene a ℓ_1 como subespacio. Consideremos primero el caso en que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $u_k^* : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funcional lineal y acotada dada por $u_k^*(e_n) = 1$ si $k \leq n$ y $u_k^*(e_n) = -1$ si $k > n$, de modo que si $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$, entonces:

$$u_k^*(x) = u_k^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_k^*(e_n).$$

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que si $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$, entonces:

$$|u_k^*(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_k^*(e_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n u_k^*(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_1 = \|x\|_1,$$

de donde se sigue que $\|u_k^*\| \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como ℓ_1 es un subespacio de X y $u_k^* \in (\ell_1)^*$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados (Teorema 1.5.5), sabemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, u_k^* tiene una extensión $z_k^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que z_k^* es una funcional lineal y acotada y $\|z_k^*\| = \|u_k^*\|$. Ahora, sea $U = \{x \in X : \text{la sucesión } (z_k^*(x))_{k=1}^\infty \text{ converge en } \mathbb{R}\}$. Observemos que U es un subespacio de X, pues $z_k^*(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, por lo que claramente $0 \in U$, y si $x, y \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(z_k^*(x+y))_{k=1}^\infty = (z_k^*(x) + z_k^*(y))_{k=1}^\infty$ y $(z_k^*(\alpha x))_{k=1}^\infty = (\alpha z_k^*(x))_{k=1}^\infty$ convergen en $\mathbb{R}$, de donde se obtiene que $x + y \in U$ y $\alpha x \in U$. Sea $u^* : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $u^*(x) = \lim_{k\to\infty} z_k^*(x) \ \forall x \in U$. Es claro que u^* es una funcional lineal. Además, como $|z_k^*(x)| \leq \|z_k^*\|\|x\| = \|u_k^*\|\|x\| \leq \|x\|$ para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, tenemos que $|u^*(x)| = \lim_{k\to\infty} |z_k^*(x)| \leq \|x\|$ para cualquier $x \in X$. De lo anterior, obtenemos que u^* es una funcional lineal y acotada y que $\|u^*\| \leq 1$. Como

U es un subespacio de X y $u^* : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal y acotada, nuevamente por el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados, sabemos que u^* tiene una extensión $z^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que z^* es una funcional lineal y acotada y $\|u^*\| = \|z^*\|$. Consideremos la función $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$x^*(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(x)\right) - z^*(x) \ \forall x \in X.$$

Como z_k^* es una funcional lineal para cada $k \in \mathbb{N}$ y z^* es una funcional lineal, claramente se tiene que x^* es una funcional lineal. Más aún, para cada $x \in X$ se satisface que:

$$|x^*(x)| = \left|\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(x)\right) - z^*(x)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(x)\right| + |z^*(x)| \leq$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |z_k^*(x)|\right) + \|z^*\|\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|z_k^*\|\|x\|\right) + \|z^*\|\|x\| =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|u_k^*\|\|x\|\right) + \|u^*\|\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|x\|\right) + \|x\| = \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

En consecuencia, se obtiene que $x^* \in X^*$ y $\|x^*\| \leq 2$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $e_n \in \ell_1$ y, por tanto, $z_k^*(e_n) = u_k^*(e_n) = 1$ si $k \leq n$ y $z_k^*(e_n) = u_k^*(e_n) = -1$ si $k > n$. De lo anterior se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k^*(e_n) = -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente, $e_n \in U \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $z^*(e_n) = u^*(e_n) = \lim\limits_{k\to\infty} z_k^*(e_n) = -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, obtenemos que si $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$x^*(e_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(e_n)\right) - z^*(e_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} -2^{-k}\right) - (-1) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k}\right) + 1 = 2^{-1}\left(\frac{1-2^{-n}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 2^{-(n+1)}(2) + 1 =$$

$$1 - 2^{-n} - 2^{-n} + 1 = 2 - 2^{-(n-1)}.$$

Luego, como $\|e_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, de lo anterior podemos concluir que $\|x^*\| \geq |x^*(e_n)| \geq x^*(e_n) = 2 - 2^{-(n-1)} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, se tiene que $\|x^*\| \geq \lim\limits_{n\to\infty}(2 - 2^{-(n-1)}) = 2$ y, por consiguiente, $\|x^*\| = 2$. Sea $y^* = x^*|_{\ell_1}$. Entonces, claramente $y^* \in (\ell_1)^*$ y un argumento análogo al utilizado anteriormente muestra que $\|y^*\| = 2 = \|x^*\|$. Supongamos que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X, de modo que existe $v \in X$ tal que $\|v\| = 1$ y $|x^*(v)| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)| = \|x^*\| = 2$. Entonces $x^*(v) = 2$ o $x^*(v) = -2$ y, si $x^*(v) = -2$, tenemos que $-v \in X$ cumple que $\|-v\| = \|v\| = 1$ y $x^*(-v) = -x^*(v) = 2$. Por tanto, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ y $x^*(u) = 2$. Observemos que $|z^*(u)| \le \|z^*\|\|u\| = \|u^*\|\|u\| \le 1$ y $|z_k^*(u)| \le \|z_k^*\|\|u\| = \|u_k^*\|\|u\| \le 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $z_j^*(u) \ne 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Entonces, como $|z_j^*(u)| \le 1$, se tiene que $z_j^*(u) < 1$ y $z_k^*(u) \le |z_k^*(u)| \le 1$ para cada $k \ne j$, por lo que $2^{-j}z_j^*(u) < 2^{-j}$ y $2^{-k}z_k^*(u) \le 2^{-k}$ para cada $k \ne j$. Así, podemos concluir que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(u) = \sum_{k=1}^{j} 2^{-k} z_k^*(u) + \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(u) <$$

$$\sum_{k=1}^{j} 2^{-k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

De lo anterior, se obtiene que $2 = x^*(u) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(u)\right) - z^*(u) < 1 - z^*(u)$ y, en consecuencia, $z^*(u) < -1$, contradiciendo el hecho de que $|z^*(u)| \le 1$. Por tanto, $z_k^*(u) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego, tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k^*(u) = 1$, de donde se sigue que $u \in U$ y $z^*(u) = u^*(u) = \lim\limits_{k\to\infty} z_k^*(u) = 1$. De esta manera, obtenemos que $2 = x^*(u) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z_k^*(u)\right) - z^*(u) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$, lo cual claramente es una contradicción. En consecuencia, $y^* \in (\ell_1)^*$, $x^* \in X^*$, $x^*|_{\ell_1} = y^*$, $\|x^*\| = \|y^*\| = 2$ y x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.

Finalmente, si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, consideramos los espacios normados reales X_r y $(\ell_1)_r$ que se obtienen restringiendo el producto de vectores por escalares a $\mathbb{R} \times X$ y $\mathbb{R} \times \ell_1$, respectivamente. Entonces, como ℓ_1 es subespacio de X, es claro que X_r es un espacio de Banach que contiene a $(\ell_1)_r$ como subespacio. Luego, una prueba análoga a la realizada anteriormente muestra que existen $y^* \in ((\ell_1)_r)^*$ y $x^* \in (X_r)^*$ tales que $x^*|_{\ell_1} = y^*$, $\|y^*\| = \|x^*\|$ y x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X_r. Así, si definimos $v^* : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ como $v^*(y) = y^*(y) - iy^*(iy)$ $\forall y \in \ell_1$ y $w^* : X \longrightarrow \mathbb{C}$ como $w^*(x) = x^*(x) - ix^*(ix)$ $\forall x \in X$, el Lema 1.3.22 nos asegura que $v^* \in (\ell_1)^*$, $w^* \in X^*$ y $\|w^*\| = \|Re(w^*)\| = \|x^*\| = \|y^*\| = \|Re(v^*)\| = \|v^*\|$. Además, como

$x^*|_{\ell_1} = y^*$, claramente se tiene que $w^*|_{\ell_1} = v^*$. Más aún, w_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X pues, en caso contrario, por el Lema 3.3.4, obtendríamos que existe $u \in X_r$ tal que $\|u\| = 1$ y $|x^*(u)| = |Re(w^*)(u)| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |Re(w^*)(x)| = \sup\limits_{\substack{x\in X_r\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$, contradiciendo el hecho de que x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X_r. Por tanto, $v^* \in (\ell_1)^*$ y $w^* \in X^*$ satisfacen que $w^*|_{\ell_1} = v^*$, $\|w^*\| = \|v^*\|$ y w_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. $\square$

Ahora, presentaremos dos resultados acerca de espacios de Banach que contienen a c_0 como subespacio. En las demostraciones de estos dos teoremas se utilizará el hecho de que la función $T : (c_0)^* \longrightarrow \ell_1$ dada por $T(x^*) = (x^*(e_n))_{n=1}^\infty$ $\forall x^* \in (c_0)^*$ es un isomorfismo de espacios normados cuyo operador inverso es la función $T^{-1} : \ell_1 \longrightarrow (c_0)^*$ tal que, para cada $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$, $T^{-1}(x)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(T^{-1}(x))(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $\forall y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0$.

Teorema 3.3.6. *Si $y^* \in (c_0)^*$ y $x^* \in (\ell_\infty)^*$ satisfacen que $x^*|_{c_0} = y^*$ y $\|x^*\| = \|y^*\|$, entonces x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de ℓ_∞.*

Demostración. Sean $y^* \in (c_0)^*$ y $x^* \in (\ell_\infty)^*$ tales que $x^*|_{c_0} = y^*$ y $\|x^*\| = \|y^*\|$. Sea $T : (c_0)^* \longrightarrow \ell_1$ el isomorfismo dado por $T(w^*) = (w^*(e_n))_{n=1}^\infty$ $\forall w^* \in (c_0)^*$. Si $y^* = 0$, entonces $\|x^*\| = \|y^*\| = 0$, por lo que $x^* = 0$. Por tanto, la sucesión $v = (v_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ dada por $v_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ claramente satisface que $v \in \ell_\infty$, $\|v\|_\infty = 1$ y $|x^*(v)| = 0 = \sup\limits_{\substack{x\in \ell_\infty\\ \|x\|_\infty=1}} |x^*(x)|$. En consecuencia, tenemos que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de ℓ_∞. Por otra parte, si $y^* \neq 0$, entonces $\|x^*\| = \|y^*\| \neq 0$ y, por consiguiente, $x^* \neq 0$. Consideremos las funcionales lineales y acotadas $z^* = \frac{1}{\|y^*\|} y^* \in (c_0)^*$ y $u^* = \frac{1}{\|x^*\|} x^* \in (\ell_\infty)^*$. Como $x^*|_{c_0} = y^*$ y $\|x^*\| = \|y^*\|$, es claro que $u^*|_{c_0} = z^*$ y $\|u^*\| = \|z^*\| = 1$. Más aún, como T es un isomorfismo, se tiene que $T(z^*) = (z^*(e_n))_{n=1}^\infty$ es una sucesión de escalares tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z^*(e_n)| = \|(z^*(e_n))_{n=1}^\infty\|_1 = \|T(z^*)\|_1 = \|z^*\| = 1$$

y $z^*(x) = z^*\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n z^*(e_n)$ para cualquier $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. Ahora, sean $\operatorname{sign} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ la función dada por $\operatorname{sign}(0) = 0$ y $\operatorname{sign}(\alpha) = \frac{\overline{\alpha}}{\alpha}$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, y $u = (u_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ la sucesión definida como $u_n = \operatorname{sign}(z^*(e_n))$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ la sucesión dada por $u_n^{(k)} = \text{sign}(z^*(e_n))$ si $n \leq k$ y $u_n^{(k)} = 0$ si $n > k$. Claramente, tenemos que $|\text{sign}(\alpha)| \leq 1$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, de donde se sigue que $|u_n| = |\text{sign}(z^*(e_n))| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, consecuentemente, $u \in \ell_\infty$ y $\|u\|_\infty \leq 1$. Más aún, como $y^* \neq 0$, entonces $z^* = \frac{1}{\|y^*\|} y^* \neq 0$, por lo que $z^*(e_j) \neq 0$ para algún $j \in \mathbb{N}$ pues, en caso contrario, tendríamos que $z^*(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^*(e_n) = 0$ para cualquier $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Así, obtenemos que $|\text{sign}(z^*(e_j))| = \left|\frac{\overline{z^*(e_j)}}{z^*(e_j)}\right| = 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $\|u\|_\infty \geq |\text{sign}(z^*(e_j))| = 1$. De lo anterior, podemos concluir que $\|u\|_\infty = 1$. Ahora, notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $u^{(k)} \in c_0$,

$$\left|u_n^{(k)} - \frac{1}{2}u_n\right| = \left|\text{sign}(z^*(e_n)) - \frac{1}{2}\text{sign}(z^*(e_n))\right| =$$

$$\frac{1}{2}|\text{sign}(z^*(e_n)| = \frac{1}{2}|u_n| \text{ si } n \leq k,$$

y

$$\left|u_n^{(k)} - \frac{1}{2}u_n\right| = \left|-\frac{1}{2}\text{sign}(z^*(e_n))\right| =$$

$$\frac{1}{2}|\text{sign}(z^*(e_n)| = \frac{1}{2}|u_n| \text{ si } n > k.$$

De esta manera, se obtiene que $\|u^{(k)} - \frac{1}{2}u\|_\infty = \frac{1}{2}\|u\|_\infty = \frac{1}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, claramente tenemos que $\text{sign}(\alpha)\alpha = |\alpha|$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. Además, como $u^{(k)} \in c_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, sabemos que $u^*(u^{(k)}) = z^*(u^{(k)}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} z^*(e_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \text{sign}(z^*(e_n)) z^*(e_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|\right) - \frac{1}{2}|u^*(u)| = \left|\sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|\right| - \left|u^*\left(\frac{1}{2}u\right)\right| \leq$$

$$\left|\left(\sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|\right) - u^*\left(\frac{1}{2}u\right)\right| = \left|u^*(u^{(k)}) - u^*\left(\frac{1}{2}u\right)\right| =$$

$$\left|u^*\left(u^{(k)} - \frac{1}{2}u\right)\right| \leq \|u^*\| \left\|u^{(k)} - \frac{1}{2}u\right\|_\infty = \left\|u^{(k)} - \frac{1}{2}u\right\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Luego, como $\frac{1}{2} \geq \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|\right) - \frac{1}{2}|u^*(u)|$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}|u^*(u)| - \sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|$ para cada $k \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, $2\left(\sum_{n=1}^{k} |z^*(e_n)|\right) - 1 \leq |u^*(u)|$ para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, tenemos que $1 = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z^*(e_n)|\right) - 1 \leq |u^*(u)| \leq \|u^*\|\|u\|_\infty = 1$ y, por consiguiente, $|u^*(u)| = 1$. Finalmente, como $u^* = \frac{1}{\|x^*\|}x^*$, de lo anterior se obtiene que $\frac{1}{\|x^*\|}|x^*(u)| = |u^*(u)| = 1$ y, consecuentemente, $u \in \ell_\infty$ es tal que $\|u\|_\infty = 1$ y $|x^*(u)| = \|x^*\| = \sup_{\substack{x \in \ell_\infty \\ \|x\|_\infty = 1}} |x^*(x)|$. Por tanto, x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de ℓ_∞. $\square$

Teorema 3.3.7. *Sea X un espacio de Banach real que contiene a c_0 como subespacio. Supongamos que para cualquier $y^* \in (c_0)^*$ se satisface que si $x^* \in X^*$ es una extensión de y^* tal que $\|x^*\| = \|y^*\|$, entonces x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. Entonces, X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1.*

Demostración. Sean X como en el enunciado del teorema y $S : \ell_1 \longrightarrow (c_0)^*$ el operador lineal tal que, para cada $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$, $S(x)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(S(x))(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $\forall y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. Como c_0 es un subespacio de X y $S(e_n) \in (c_0)^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados (Teorema 1.5.5) sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S(e_n)$ tiene una extensión $x_n^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que x_n^* es una funcional lineal y acotada y $\|x_n^*\| = \|S(e_n)\|$. Sean A un conjunto tal que $|X| \leq |A|$ y $B = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$. Análogamente a como se hizo en la prueba del Corolario 3.3.2, se puede ver que A es un conjunto infinito no numerable. Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto infinito numerable de A. Entonces, un argumento análogo al que se utilizó en la demostración del Corolario 3.3.2 muestra que existe una función inyectiva $h : X \setminus \{0\} \longrightarrow A \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, sea $x_0^* \in X^*$ tal que $\|x_0^*\| = 1$ y, para cada $x \in X \setminus \{0\}$, sea $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$ (el Teorema 1.5.6 nos asegura la existencia de dicha x^* para cada $x \in X \setminus \{0\}$). Así, si para cada $x \in X$ definimos la función $f_x : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_x(a_n) = x_n^*(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_x(h(y)) = y^*(x)$ $\forall y \in X \setminus \{0\}$ y $f_x(a) = x_0^*(x)$ $\forall a \in A \setminus (\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup h(X \setminus \{0\}))$, y $T : X \longrightarrow B$ es la función dada por $T(x) = f_x$ $\forall x \in X$, una prueba completamente análoga a la que se realizó en la demostración del Corolario 3.3.2 nos permite concluir que T es un operador lineal tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in X$. Además, si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \subseteq X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_x(a_n) = x_n^*(x) = (S(e_n))(x) = x_n$, por lo que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (f_x(a_n))_{n=1}^{\infty}$.

Por otra parte, sean $\epsilon = (\epsilon_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\epsilon_n = 1$ o $\epsilon_n = -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $z^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $z^*(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x(a_n))\epsilon_n}{2^n}$ $\forall x \in X$. Entonces, para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$z^*(x+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_{x+y}(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((T(x+y))(a_n))\epsilon_n}{2^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((T(x)+T(y))(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x(a_n)+f_y(a_n))\epsilon_n}{2^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x(a_n))\epsilon_n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_y(a_n))\epsilon_n}{2^n} = z^*(x) + z^*(y),$$

y

$$z^*(\alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_{\alpha x}(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((T(\alpha x))(a_n))\epsilon_n}{2^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\alpha T(x))(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(f_x(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \alpha z^*(x).$$

De lo anterior, se sigue que z^* es una funcional lineal. Más aún, para cada $x \in X$, se tiene que $|f_x(a_n)| = |(T(x))(a_n)| \leq \|T(x)\| = \|x\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente:

$$|z^*(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x(a_n))\epsilon_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_x(a_n)||\epsilon_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x\|}{2^n} = \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|x\|,$$

para cada $x \in X$. De esta manera, podemos concluir que z^* es una funcional lineal y acotada y $\|z^*\| \leq 1$. Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $y^{(k)} = (y_n^{(k)})_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ la sucesión dada por $y_n^{(k)} = \epsilon_n$ si $n \leq k$ y $y_n^{(k)} = 0$ si $n > k$. Es claro que $y^{(k)} \in c_0 \subseteq X$ y $\|y^{(k)}\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |y_n^{(k)}| = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$ ya que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $|y_n^{(k)}| = |\epsilon_n| = 1$ si $n \leq k$ y $|y_n^{(k)}| = 0$ si $n > k$. Luego, como $y^{(k)} \in c_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, sabemos que $f_{y^{(k)}}(a_n) = y_n^{(k)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall k \in \mathbb{N}$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que:

$$z^*(y^{(k)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_{y^{(k)}}(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y_n^{(k)})\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{(\epsilon_n)^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}$$

Por tanto, se tiene que $\|z^*\| \geq |z^*(y^{(k)})| = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, de donde se obtiene que $\|z^*\| \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Consecuentemente, tenemos que $\|z^*\| = 1$. Además, el argumento utilizado anteriormente muestra que si $y^* = z^*|_{c_0}$, entonces $y^* \in (c_0)^*$ y $\|y^*\| = 1$. En consecuencia, $y^* \in (c_0)^*$ y $z^* \in X^*$ son tales que z^* es una extensión de y^* y $\|z^*\| = \|y^*\| = 1$. Por hipótesis, sabemos que z_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X, por lo que existe $v \in X$ tal que $\|v\| = 1$ y $|z^*(v)| = \displaystyle\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |z^*(x)| = \|z^*\| = 1$. De lo anterior, obtenemos que $z^*(v) = 1$ o $z^*(v) = -1$ y si $z^*(v) = -1$, entonces se tiene que $u = -v \in X$ satisface que $\|u\| = \|v\| = 1$ y $z^*(u) = -z^*(v) = 1$. Por tanto, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ y $z^*(u) = 1$. Veamos que $f_u(a_n) = \epsilon_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos, por el contrario, que $f_u(a_m) \neq \epsilon_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Observemos que $|f_u(a_n)| = |(T(u))(a_n)| \leq \|T(u)\| = \|u\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, $-1 \leq f_u(a_n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, obtenemos que si $\epsilon_n = 1$, entonces $(f_u(a_n))\epsilon_n \leq \epsilon_n = 1$ y, si $\epsilon_n = -1$, entonces $(f_u(a_n))\epsilon_n \leq -\epsilon_n = 1$. De esta manera, podemos concluir que $(f_u(a_n))\epsilon_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Más aún, como $f_u(a_m) \neq \epsilon_m$, sabemos que si $\epsilon_m = 1$, entonces $f_u(a_m) < 1$ y, por tanto, $(f_u(a_m))\epsilon_m < \epsilon_m = 1$ mientras que si $\epsilon_m = -1$, entonces $-1 < f_u(a_m)$, de donde se sigue que $(f_u(a_m))\epsilon_m < -\epsilon_m = 1$. De lo anterior, se obtiene que $(f_u(a_m))\epsilon_m < 1$ y $(f_u(a_n))\epsilon_n \leq 1$ $\forall n \neq m$. En consecuencia, tenemos que:

$$1 = z^*(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_u(a_n))\epsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{(f_u(a_n))\epsilon_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(f_u(a_n))\epsilon_n}{2^n} <$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

lo cual claramente es una contradicción. Por tanto, $f_u(a_n) = \epsilon_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, sean $\epsilon^{(j)} = (\epsilon_n^{(j)})_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ la sucesión cuyos términos forman bloques alternados de $1'$s y $-1'$s, comenzando por un bloque de $1'$s y con cada bloque formado por 2^j términos y $z_j^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $z_j^*(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x(a_n))\epsilon_n^{(j)}}{2^n}$ $\forall x \in X$. Entonces, el razonamiento anterior nos garantiza que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $u_j \in X$ tal que $\|u_j\| = 1$, $z_j^*(u_j) = 1$ y $f_{u_j}(a_n) = \epsilon_n^{(j)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que, para cualesquiera $j, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\epsilon_n^{(j)} = \epsilon_{n+2^{j+1}}^{(j)}$. En efecto, dada $j \in \mathbb{N}$, por definición de la sucesión $\epsilon^{(j)}$ tenemos que si $k, l, m \in \mathbb{N}$ son tales que $(k-1)2^j + 1 \leq l \leq k2^j$ y $k2^j + 1 \leq m \leq (k+1)2^j$, entonces $\epsilon_l^{(j)} = -\epsilon_m^{(j)}$. Así, dada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que existe un único número natural k tal que $(k-1)2^j + 1 \leq n \leq k2^j$, de donde se obtiene que $k2^j + 1 \leq n + 2^j \leq (k+1)2^j$ y $(k+1)2^j + 1 \leq n + 2^{j+1} \leq (k+2)2^j$ y, en consecuencia, $\epsilon_n^{(j)} = -\epsilon_{n+2^j}^{(j)} = -(-\epsilon_{n+2^{j+1}}^{(j)}) = \epsilon_{n+2^{j+1}}^{(j)}$. Por tanto, para cualesquiera $j, n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\epsilon_n^{(j)} = \epsilon_{n+2^{j+1}}^{(j)}$ y, a partir de este hecho, un sencillo argumento inductivo muestra que $\epsilon_n^{(j)} = \epsilon_{n+k2^{j+1}}^{(j)}$ para cualesquiera $n, j, k \in \mathbb{N}$. Ahora, veamos, por inducción sobre n, que si $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k < 2^{n+1} \text{ y } \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{u_j}(a_k) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|. \tag{3.9}$$

Para $n = 1$, tenemos que si $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1 \geq 0$, entonces $k = 1 \in \mathbb{N}$ es tal que $k < 2^2$ y $\alpha_1 f_{u_1}(a_1) = \alpha_1 \epsilon_1^{(1)} = \alpha_1 = |\alpha_1|$. Por otra parte, si $\alpha_1 < 0$ entonces $k = 3 \in \mathbb{N}$ es tal que $k < 2^2$ y $\alpha_1 f_{u_1}(a_3) = \alpha_1 \epsilon_3^{(1)} = -\alpha_1 = |\alpha_1|$.
Supongamos ahora que existe $k \in \mathbb{N}$ que satisface las condiciones en (3.9) para algún $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Entonces, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, por hipótesis, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < 2^{n+1}$ y $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{u_j}(a_k) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$.
Si $\alpha_{n+1} \geq 0$, entonces $k \in \mathbb{N}$ cumple que $k < 2^{n+1} < 2^{n+2}$ y, por consiguiente:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j f_{u_j}(a_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{u_j}(a_k) \right) + \alpha_{n+1} f_{u_{n+1}}(a_k) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \right) + \alpha_{n+1} \epsilon_k^{(n+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \right) + \alpha_{n+1} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \right) + |\alpha_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n+1} |\alpha_j|.$$

Si $\alpha_{n+1} < 0$, entonces $k + 2^{n+1} \in \mathbb{N}$ es tal que $2^{n+1} + 1 \leq k + 2^{n+1} < 2(2^{n+1}) = 2^{n+2}$ y, consecuentemente:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j f_{u_j}(a_{k+2^{n+1}}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{u_j}(a_{k+2^{n+1}}) \right) + \alpha_{n+1} f_{u_{n+1}}(a_{k+2^{n+1}}) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\epsilon_{k+2^{n+1}}^{(j)}\right)+\alpha_{n+1}\epsilon_{k+2^{n+1}}^{(n+1)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\epsilon_{k+2^{n-j}2^{j+1}}^{(j)}\right)-\alpha_{n+1}=$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\epsilon_{k}^{(j)}\right)+|\alpha_{n+1}|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\right)+|\alpha_{n+1}|=\sum_{j=1}^{n+1}|\alpha_j|.$$

Por tanto, existe un número natural que satisface las condiciones en (3.9) para $n+1$ y, por inducción matemática, podemos concluir que para cualquier $n\in\mathbb{N}$ existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $k<2^{n+1}$ y $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_{u_j}(a_k)=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$. Como consecuencia de lo anterior, obtenemos que $\{u_j : j\in\mathbb{N}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de X, ya que si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, con $n\in\mathbb{N}$, son tales que $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j=0$, entonces $T\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)=0$. Luego, si $k\in\mathbb{N}$ es tal que $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_{u_j}(a_k)=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$, obtenemos que:

$$0=\left(T\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)\right)(a_k)=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j T(u_j)\right)(a_k)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(T(u_j))(a_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_{u_j}(a_k)=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|,$$

de donde se sigue que $\alpha_j=0$ $\forall j\in\mathbb{N}$. Sean $Y=\langle\{u_j : j\in\mathbb{N}\}\rangle$ y $W:Y\longrightarrow\ell_1$ el operador lineal dado por $W(u_j)=e_j$ $\forall j\in\mathbb{N}$. Sea $z\in Y$. Entonces, existen $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tales que $z=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j$. Como $\|u_j\|=1$ $\forall j\in\mathbb{N}$, entonces tenemos que $\|z\|\leq\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\|u_j\|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$. Además, sabemos que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_{u_j}(a_k)=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$, por lo que:

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_{u_j}(a_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(T(u_j))(a_k)=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j T(u_j)\right)(a_k)=$$

$$\left(T\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)\right)(a_k) \leq \left|\left(T\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)\right)(a_k)\right| = |(T(z))(a_k)| \leq$$

$$\|T(z)\| = \|z\| \leq \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|.$$

Por tanto, $\|z\| = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$. Por otra parte, se tiene que:

$$\|W(z)\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j W(u_j)\right\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\right\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j| = \|z\|.$$

De esta manera, hemos probado que $\|z\| = \|W(z)\|_1$ $\forall z \in Y$ y, por consiguiente, W es un operador lineal y acotado. Como Y es un subespacio de X y ℓ_1 es un espacio de Banach, por el Teorema 1.3.15, se obtiene que W tiene una extensión $\widetilde{W} : \overline{Y} \longrightarrow \ell_1$ tal que $\widetilde{W}$ es un operador lineal y acotado y $\|\widetilde{W}\| = \|W\|$. Observemos que como Y es un subespacio de X, entonces $\overline{Y}$ es un subespacio de X, pues $0 \in Y \subseteq \overline{Y}$ y, si $x, y \in \overline{Y}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, de donde se obtiene que $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\alpha x_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en Y tales que $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ y $\alpha x_n \longrightarrow \alpha x$ y, por tanto, $x + y \in \overline{Y}$ y $\alpha x \in \overline{Y}$. Ahora, como $\|z\| = \|W(z)\|_1$ $\forall z \in Y$, por continuidad de la norma, tenemos que si $w \in \overline{Y}$ y $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y tal que $w_n \longrightarrow w$, entonces:

$$\left\|\widetilde{W}(w)\right\|_1 = \left\|\widetilde{W}\left(\lim_{n\to\infty} w_n\right)\right\|_1 = \left\|\lim_{n\to\infty}\widetilde{W}(w_n)\right\|_1 = \left\|\lim_{n\to\infty}W(w_n)\right\|_1 =$$

$$\lim_{n\to\infty}\|W(w_n)\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|w_n\| = \left\|\lim_{n\to\infty}w_n\right\| = \|w\|.$$

En consecuencia, se tiene que $\left\|\widetilde{W}(w)\right\|_1 = \|w\|$ $\forall w \in \overline{Y}$. De lo anterior, obtenemos que $\widetilde{W}$ es inyectivo ya que si $w_1, w_2 \in \overline{Y}$ son tales que $\widetilde{W}(w_1) = \widetilde{W}(w_2)$, entonces $0 = \left\|\widetilde{W}(w_1) - \widetilde{W}(w_2)\right\|_1 = \left\|\widetilde{W}(w_1 - w_2)\right\|_1 = \|w_1 - w_2\|$ y, por consiguiente, $w_1 - w_2 = 0$ o, equivalentemente, $w_1 = w_2$. Además, $\widetilde{W}$ es suprayectivo. En efecto, si $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, entonces la serie $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j u_j$ converge absolutamente, pues $\sum_{j=1}^{\infty}\|\beta_j u_j\| = \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j|\|u_j\| = \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j|$ es una serie convergente en $\mathbb{R}$. Como X es un espacio de Banach, por el Teorema 1.2.11, podemos concluir que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u_j$ es convergente en X y, claramente, se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u_j \in \overline{Y}$. Más aún, tenemos que $\widetilde{W}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \widetilde{W}(u_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j = (\beta_n)_{n=1}^{\infty} = \beta$. Consecuentemente, $\widetilde{W}$ es un operador lineal y biyectivo tal que $\left\|\widetilde{W}(w)\right\|_1 = \|w\|$ $\forall w \in \overline{Y}$, por lo que $\widetilde{W}$ es un isomorfismo de espacios normados. Por tanto, $\overline{Y}$ es un subespacio de X isomorfo a ℓ_1.

□

A continuación, demostraremos un lema que nos será de gran utilidad para probar el resultado que caracteriza la reflexividad de un espacio de Banach X en términos de funcionales lineales y acotadas que alcanzan su supremo en la esfera unitaria de X. Para este fin, necesitamos definir previamente el concepto de sucesión de elementos que no se traslapan de $co\left(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$, donde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en un espacio normado X.

Definición 3.3.8. Sean X un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Una sucesión $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ es una *sucesión de elementos que no se traslapan de* $co(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ si existe una sucesión creciente de números naturales $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $y_k \in co\left(\left\{x_{n_k}, \ldots, x_{n_{k+1}-1}\right\}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Con el fin de facilitar la lectura en lo que resta de este trabajo, dados un espacio normado X y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X, diremos que $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ si $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos que no se traslapan de $co(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. A partir de la Definición 3.3.8 es fácil comprobar que si X es un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones en X tales que $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ y $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{y_k : k \in \mathbb{N}\})$, entonces $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. Este hecho será ampliamente utilizado en la demostración del siguiente lema:

Lema 3.3.9. *Sea X un espacio de Banach real. Si X no es reflexivo y $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $\beta_1 = 9$, entonces existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ que satisfacen las siguientes tres condiciones:*

i) $\|x_n\| = 1$ *y* $\|x_n^*\| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $x_n^*(x_j) > \frac{79}{80}$ *si* $n \leq j$ *y, para cada* $j \in \mathbb{N}$, *existe* $N_j \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n^*(x_j) = 0$ *si* $n > N_j$.

iii) Si para algún $m \in \mathbb{N}$ existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $x_m^*(z) \leq \frac{1}{4} + 2^{-m}$, entonces existe $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(y)\right) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(y) > 2^{-(m+2)}\beta_m + \left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(z)\right) - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(z).$$

Demostración. Sean X un espacio de Banach real y $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tales que X no es reflexivo y $\beta_1 = 9$. Como X no es reflexivo y $\frac{79}{80} \in (0,1)$, por el Teorema 3.3.1, sabemos que existen sucesiones $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ y $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ tales que $\|y_n\| = \|y_n^*\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n^*(y_j) > \frac{79}{80}$ si $n \leq j$ y $y_n^*(y_j) = 0$ si $n > j$. Supongamos que $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \subseteq X^*$ es una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Entonces, existe una sucesión creciente de números naturales $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_k^* \in co\left(\left\{y_{n_k}^*, \ldots, y_{n_{k+1}-1}^*\right\}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Lema 1.1.5, se obtiene que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen números reales no negativos $\alpha_{n_k}, \ldots, \alpha_{n_{k+1}-1}$ tales que:

$$\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i = 1 \text{ y } x_k^* = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i y_i^*. \tag{3.10}$$

En consecuencia, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que:

$$\|x_k^*\| \leq \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} |\alpha_i| \|y_i^*\| = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i = 1. \tag{3.11}$$

Ahora, consideremos la subsucesión $(y_{n_{k+1}})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces, se tiene que $\|y_{n_{k+1}}\| = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Además, si $k \leq j$, tenemos que $n_{k+1} \leq n_{j+1}$, por lo que $y_i^*(y_{n_{j+1}}) > \frac{79}{80}$ $\forall i \in \{n_k, \ldots, n_{k+1} - 1\}$. Así, como $\alpha_{n_k}, \ldots, \alpha_{n_{k+1}-1}$ son números reales no negativos y $\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i = 1$, se obtiene que:

$$x_k^*(y_{n_{j+1}}) = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i y_i^*(y_{n_{j+1}}) > \frac{79}{80}\left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i\right) = \frac{79}{80}.$$

Más aún, para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $N_j = j + 1 \in \mathbb{N}$ satisface que si $k > N_j$, entonces $n_k > n_{j+1}$ y, consecuentemente $y_i^*(y_{n_{j+1}}) = 0$ $\forall i \in \{n_k, \ldots, n_{k+1} - 1\}$

de donde se sigue que:

$$x_k^*(y_{n_{j+1}}) = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i y_i^*(y_{n_{j+1}}) = 0.$$

De esta manera, hemos probado que si $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$, entonces existe una subsucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(x_k^*)_{k=1}^{\infty} \subseteq X^*$ y $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ satisfacen las condiciones i) y ii) del lema. Por tanto, para concluir la demostración basta probar que existe una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ que satisface la condición iii) del lema. Procederemos inductivamnte para construir cada uno de los términos de dicha sucesión. En primer lugar, veamos que cualquier sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ satisface la condición iii) del lema para $m = 1$. Sea pues $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ y supongamos que $z \in X$ es tal que $\|z\| = 1$ y $x_1^*(z) \leq \frac{1}{4} + 2^{-1} = \frac{3}{4}$. Como $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$, sabemos que existe una sucesión creciente de números naturales $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_k^* \in co\left(\left\{y_{n_k}^*, \ldots, y_{n_{k+1}-1}^*\right\}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ de donde se sigue, nuevamente por el Lema 1.1.5, que para cada $k \in \mathbb{N}$ existen números reales no negativos $\alpha_{n_k}, \ldots, \alpha_{n_{k+1}-1}$ que satisfacen las igualdades en (3.10). Sea $j \in \mathbb{N}$. Como $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de números naturales, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > j$. Así, para cualquier $r \geq k$, se tiene que $n_r \geq n_k > j$ y, por consiguiente, $y_i^*(y_j) = 0$ $\forall i \in \left\{n_r, \ldots, n_{r+1} - 1\right\}$. En consecuencia, para cada $r \geq k$, obtenemos que:

$$x_r^*(y_j) = \sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} \alpha_i y_i^*(y_j) = 0.$$

De lo anterior podemos concluir que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^*(y_j) = 0$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Por otra parte, como $i < n_2$ $\forall i \in \{n_1, \ldots, n_2 - 1\}$, sabemos que $y_i^*(y_{n_2}) > \frac{79}{80}$ $\forall i \in \{n_1, \ldots, n_2 - 1\}$. Luego, como $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_2-1}$ son números reales no negativos y $\sum\limits_{i=n_1}^{n_2-1} \alpha_i = 1$, se obtiene que:

$$x_1^*(y_{n_2}) = \sum_{i=n_1}^{n_2-1} \alpha_i y_i^*(y_{n_2}) > \frac{79}{80}\left(\sum_{i=n_1}^{n_2-1} \alpha_i\right) = \frac{79}{80}.$$

De manera análoga a como se hizo para probar la desigualdad (3.11), se puede ver que $\|x_k^*\| \leq 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que $|x_k^*(z)| \leq \|x_k^*\|\|z\| \leq \|z\| = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, $-1 \leq x_k^*(z) \leq 1$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, tenemos que $-1 \leq \varliminf_{k\to\infty} x_k^*(z) \leq 1$ y, por tanto, $-\varliminf_{k\to\infty} x_k^*(z) \leq 1$. Así, como $\beta_1 > 0$ y $x_1^*(z) \leq \frac{3}{4}$, obtenemos que:

$$2^{-3}\beta_1 + \beta_1 x_1^*(z) - \varliminf_{k\to\infty} x_k^*(z) = \frac{1}{8}\beta_1 + \beta_1 x_1^*(z) - \varliminf_{k\to\infty} x_k^*(z) \leq$$

$$\frac{1}{8}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_1 + 1 = \frac{7}{8}\beta_1 + 1. \tag{3.12}$$

Ahora, como $\frac{80}{9} < 9 = \beta_1$, se tiene que $1 < \frac{9}{80}\beta_1 = \frac{79}{80}\beta_1 - \frac{7}{8}\beta_1$. De la desigualdad anterior y la desigualdad (3.12), se obtiene que:

$$2^{-3}\beta_1 + \beta_1 x_1^*(z) - \varliminf_{k\to\infty} x_k^*(z) \leq \frac{7}{8}\beta_1 + 1 < \frac{79}{80}\beta_1.$$

Finalmente, como $x_1^*(y_{n_2}) > \frac{79}{80}$ y $\varlimsup_{k\to\infty} x_k^*(y_{n_2}) = \lim_{k\to\infty} x_k^*(y_{n_2}) = 0$, podemos concluir que $y_{n_2} \in X$ cumple que $\|y_{n_2}\| = 1$ y:

$$2^{-3}\beta_1 + \beta_1 x_1^*(z) - \varliminf_{k\to\infty} x_k^*(z) < \frac{79}{80}\beta_1 < \beta_1 x_1^*(y_{n_2}) - \varlimsup_{k\to\infty} x_k^*(y_{n_2}).$$

Por tanto, cualquier sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ satisface la condición iii) del lema para $m = 1$.

Ahora, supongamos que para algún número natural k, la sucesión $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{k-1}^*, z_k^*, z_{k+1}^*, \ldots)$ ha sido elegida como una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ de manera que si $(x_k^*, x_{k+1}^*, \ldots)$ es cualquier sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$, entonces la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ satisface la condición iii) del lema para cualquier $m \leq k$. Sea

$$\theta_k = \operatorname*{ínf}_{(h_i^*)_{i=k}^\infty} \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_k h_k^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} h_i^*(x) \right] \tag{3.13}$$

donde $(h_i^*)_{i=k}^\infty$ denota una sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$. Sea $(u_i^*)_{i=k}^\infty$ una sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$ tal que

$$\sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_k u_k^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} u_i^*(x) \right] < \theta_k + 2^{-(k+3)}\beta_{k+1}.$$

Sea $x_k^* = u_k^*$. Notemos que si $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, entonces para cualquier $x \in X$, se tiene que:

$$\varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x) \geq \varliminf_{i\to\infty} u_i^*(x). \tag{3.14}$$

En efecto, si $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, entonces $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$. En consecuencia, sabemos que existe una sucesión creciente de números naturales $(p_i)_{i=k+1}^{\infty}$ tal que $w_i^* \in co\left(\left\{u_{p_i}^*, \ldots, u_{p_{i+1}-1}^*\right\}\right)$ $\forall i \geq k+1$. Luego, por el Lema 1.1.5, obtenemos que, para cada $i \geq k+1$, existen números reales no negativos $\psi_{p_i}, \ldots, \psi_{p_{i+1}-1}$ que satisfacen las igualdades:

$$\sum_{n=p_i}^{p_{i+1}-1} \psi_n = 1 \text{ y } w_i^* = \sum_{n=p_i}^{p_{i+1}-1} \psi_n u_n^*.$$

Sean $j \geq k+1$, $i \geq j$ y $x \in X$. Entonces, como $p_i \geq p_j \geq j$, tenemos que:

$$w_i^*(x) = \sum_{n=p_i}^{p_{i+1}-1} \psi_n u_n^*(x) \geq \inf_{l\geq j} u_l^*(x) \left(\sum_{n=p_i}^{p_{i+1}-1} \psi_n\right) = \inf_{l\geq j} u_l^*(x).$$

De lo anterior, se sigue que $\inf\limits_{l\geq j} w_l^*(x) \geq \inf\limits_{l\geq j} u_l^*(x)$ para cualquier $j \geq k+1$, de donde se obtiene que $\varliminf\limits_{i\to\infty} w_i^*(x) \geq \varliminf\limits_{i\to\infty} u_i^*(x)$. Así, obtenemos que si $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, entonces:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] \leq$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_k u_k^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} u_i^*(x)\right] < \theta_k + 2^{-(k+3)}\beta_{k+1}. \tag{3.15}$$

A continuación, probaremos que existe una sucesión $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ tal que $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$

es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y:

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \varliminf_{i \to \infty} w_i^*(x) \right] <$$

$$2^{-(k+3)} \beta_{k+1} + \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \varlimsup_{i \to \infty} w_i^*(x) \right] \quad (3.16)$$

donde $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$. Primero, consideremos el conjunto A de todos los elementos u^* de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ tales que $u^* = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_{k+i}^*$, con $n \in \mathbb{N}$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ números reales no negativos tales que $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$ y $\gamma_i \in \mathbb{Q}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Es claro que A es un conjunto numerable, por lo que podemos enumerar todos los elementos de A en una sucesión, digamos $(\varphi_i^*)_{i=1}^{\infty}$. Luego, definimos s_1 como:

$$s_1 = \sup_{(f_i^*)_{i=1}^{\infty}} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_{k+1} \varphi_1^*(x) - \varliminf_{i \to \infty} f_i^*(x) \right]$$

donde $(f_i^*)_{i=1}^{\infty}$ denota una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$. Sean $(g_i^*)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y $x_1 \in X$ tales que $\|x_1\| = 1$ y $s_1 - 2^{-(k+5)} \beta_{k+1} < \left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_1) \right) + \beta_{k+1} \varphi_1^*(x_1) - \varliminf_{i \to \infty} g_i^*(x_1)$. Sea $\left(\left(g_i^{(1)} \right)^* \right)_{i=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(g_i^*)_{i=1}^{\infty}$ tal que el límite $\lim_{i \to \infty} \left(g_i^{(1)} \right)^* (x_1)$ existe y es igual a $\varliminf_{i \to \infty} g_i^*(x_1)$. Ahora, para cada número natural j mayor o igual a 2, podemos proceder inductivamente para construir una sucesión $\left(\left(g_i^{(j)} \right)^* \right)_{i=1}^{\infty}$ y un elemento $x_j \in X$ con las siguientes propiedades:

(a) $\|x_j\| = 1$.

(b) $\left(\left(g_i^{(j)} \right)^* \right)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{ \left(g_i^{(j-1)} \right)^* : i \geq 2 \right\} \right)$.

(c) $s_j - 2^{-(k+5)} \beta_{k+1} < \left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_j) \right) + \beta_{k+1} \varphi_j^*(x_j) - \varliminf_{i \to \infty} \left(g_i^{(j)} \right)^* (x_j)$, con

s_j definido como:

$$s_j = \sup_{\left(\left(f_i^{(j)}\right)^*\right)_{i=1}^{\infty}} \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1}\varphi_j^*(x) - \varliminf_{i\to\infty}\left(f_i^{(j)}\right)^*(x)\right],$$

donde la sucesión $\left(\left(f_i^{(j)}\right)^*\right)_{i=1}^{\infty}$ denota una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(j-1)}\right)^* : i \geq 2\right\}\right)$.

(d) El límite $\lim_{i\to\infty}\left(g_i^{(j)}\right)^*(x_j)$ existe.

Así, para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos v_{k+j}^* como $v_{k+j}^* = \left(g_1^{(j)}\right)^*$. Observemos que, por construcción, claramente se tiene que $\left(\left(g_i^{(j)}\right)^*\right)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(1)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(1)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$. Para ver lo anterior, en primer lugar notemos que $v_{k+1}^* = \left(g_1^{(1)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_1^{(1)}\right)^*\right\}\right)$ y que si $(q_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de números naturales tal que:

$$\left(g_i^{(2)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{q_i}^{(1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{q_{i+1}-1}^{(1)}\right)^*\right\}\right) \ \forall i \in \mathbb{N},$$

entonces $v_{k+2}^* = \left(g_1^{(2)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{q_1}^{(1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{q_2-1}^{(1)}\right)^*\right\}\right)$, con $q_1 \geq 2 > 1$. Por otra parte, si $j \geq 2$ y $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ son sucesiones crecientes de números naturales para las cuales se satisface que:

$$\left(g_i^{(j)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{r_i}^{(j-1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{r_{i+1}-1}^{(j-1)}\right)^*\right\}\right) \ \forall i \in \mathbb{N},$$

y

$$\left(g_i^{(j+1)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{a_i}^{(j)}\right)^*, \ldots, \left(g_{a_{i+1}-1}^{(j)}\right)^*\right\}\right) \ \forall i \in \mathbb{N},$$

entonces obtenemos que:

$$v_{k+j}^* = \left(g_1^{(j)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{r_1}^{(j-1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{r_2-1}^{(j-1)}\right)^*\right\}\right),$$

y

$$v_{k+j+1}^* = \left(g_1^{(j+1)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{a_1}^{(j)}\right)^*, \ldots, \left(g_{a_2-1}^{(j)}\right)^*\right\}\right).$$

Asimismo, sabemos que $\left(g_{a_2-1}^{(j)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{r_{a_2-1}}^{(j-1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{r_{a_2}-1}^{(j-1)}\right)^*\right\}\right)$ y

$\left(g_{a_1}^{(j)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(g_{r_{a_1}}^{(j-1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{r_{a_1+1}-1}^{(j-1)}\right)^*\right\}\right)$, con $r_{a_1} \geq r_2 > r_2 - 1$, ya que $a_1 \geq 2$. De esta manera, se obtiene que:

$$v_{k+j}^* \in co\left(\left\{\left(g_{r_1}^{(j-1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{r_2-1}^{(j-1)}\right)^*\right\}\right),$$

y

$$v_{k+j+1}^* \in co\left(\left\{\left(g_{r_{a_1}}^{(j-1)}\right)^*, \ldots, \left(g_{r_{a_2}-1}^{(j-1)}\right)^*\right\}\right),$$

con $r_{a_1} > r_2 - 1$. Luego, como $\left(\left(g_i^{(j-1)}\right)^*\right)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(1)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$, de lo anterior se sigue que existen números naturales n, l, p, q que satisfacen que $n \leq l < p \leq q$,

$$v_{k+j}^* \in co\left(\left\{\left(g_n^{(1)}\right)^*, \ldots, \left(g_l^{(1)}\right)^*\right\}\right),$$

y

$$v_{k+j+1}^* \in co\left(\left\{\left(g_p^{(1)}\right)^*, \ldots, \left(g_q^{(1)}\right)^*\right\}\right).$$

Por tanto, $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(1)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$. En consecuencia, como $(g_i^*)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y $\left(\left(g_i^{(1)}\right)^*\right)_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(g_i^*)_{i=1}^{\infty}$, podemos concluir que $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$. Ahora, sean $j \in \mathbb{N}$, $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$ y $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$. Un argumento análogo al que se utilizó para ver que $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(1)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$, muestra que $(v_i^*)_{i=k+j}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(j)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$. Consecuentemente, se satisface la desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(y) + \beta_{k+1}\varphi_j^*(y) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(y) <$$

$$2^{-(k+5)}\beta_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_j) + \beta_{k+1}\varphi_j^*(x_j) - \lim_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^*(x_j), \tag{3.17}$$

pues, en caso contrario, como $(w_i^*)_{i=k+j}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(j-1)}\right)^* : i \geq 2\right\}\right)$, se tendría que:

$$s_j \geq \sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(y) + \beta_{k+1}\varphi_j^*(y) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(y) \geq$$

$$2^{-(k+5)}\beta_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_j) + \beta_{k+1}\varphi_j^*(x_j) - \lim_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j) =$$

$$2^{-(k+5)}\beta_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_j) + \beta_{k+1}\varphi_j^*(x_j) - \varliminf_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j)$$

lo cual contradice la condición (c) que satisfacen x_j y la sucesión $\left(\left(g_i^{(j)}\right)^*\right)_{i=1}^{\infty}$. Por otra parte, como $(w_i^*)_{i=k+j}^{\infty}$ y $(-w_i^*)_{i=k+j}^{\infty}$ son sucesiones de James de $co\left(\left\{\left(g_i^{(j)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$ y de $co\left(\left\{\left(-g_i^{(j)}\right)^* : i \in \mathbb{N}\right\}\right)$, respectivamente, de manera análoga a como se probó la desigualdad (3.14), se puede ver que:

$$\varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x_j) \geq \varliminf_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j) = \lim_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j),$$

y

$$\varliminf_{i\to\infty} -w_i^*(x_j) \geq \varliminf_{i\to\infty} \left(-g_i^{(j)}\right)^* (x_j) = \lim_{i\to\infty} \left(-g_i^{(j)}\right)^* (x_j),$$

de donde se sigue que:

$$\lim_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j) \leq \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x_j) \leq \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x_j) =$$

$$-\varliminf_{i\to\infty} -w_i^*(x_j) \leq -\lim_{i\to\infty} \left(-g_i^{(j)}\right)^* (x_j) = \lim_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j).$$

Por tanto, tenemos que:

$$\varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x_j) = \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x_j) = \lim_{i\to\infty} \left(g_i^{(j)}\right)^* (x_j). \tag{3.18}$$

Además, como $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ y, por consiguiente, $w_{k+1}^* \in co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|w_{k+1}^*(x) - \varphi_{j_0}^*(x)| < 2^{-(k+6)}$ si $x \in X$ satisface que $\|x\| \leq 1$. En efecto, supongamos que $w_{k+1}^* = \sum_{l=1}^{n} \delta_l u_l^*$, con $n \in \mathbb{N}$, $u_l^* \in \{u_i^* : i \geq k+1\}$ $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n$ números reales positivos tales que $\sum_{l=1}^{n} \delta_l = 1$ y que $x \in X$ cumple que $\|x\| \leq 1$. Si $n = 1$, entonces $\delta_1 = 1$ y $w_{k+1}^* = u_1^*$ por lo que claramente w_{k+1}^* pertenece al conjunto A de todos los elementos u^* de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ tales que $u^* = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i u_{k+i}^*$, con $r \in \mathbb{N}$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ números reales no negativos tales que $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i = 1$ y $\gamma_i \in \mathbb{Q}\ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Así, obtenemos que $w_{k+1}^* = \varphi_{j_0}^*$ para algún $j_0 \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia $|w_{k+1}^*(x) - \varphi_{j_0}^*(x)| = 0 < 2^{-(k+6)}$. Por otra parte, si $n \geq 2$, entonces para cada $l \in \{1, \ldots, n-1\}$, podemos considerar un número racional b_l tal que $0 < b_l < \delta_l$ y $|b_l - \delta_l| < \frac{2^{-(k+7)}}{n-1}$. Luego, si definimos b_n como $b_n = 1 - \left(\sum_{l=1}^{n-1} b_l\right)$, entonces se tiene que $b_n \in \mathbb{Q}$, $b_n \geq 1 - \left(\sum_{l=1}^{n-1} \delta_l\right) = \delta_n > 0$ y $\sum_{l=1}^{n} b_l = 1$, de donde se obtiene que $\sum_{l=1}^{n} b_l u_l^*$ pertenece al conjunto A y, consecuentemente, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{l=1}^{n} b_l u_l^* = \varphi_{j_0}^*$. Más aún, como por construcción se tiene que $(u_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \geq k+1\})$, análogamente a como se demostró la desigualdad (3.11), se puede ver que $\|u_i^*\| \leq 1\ \forall i \geq k+1$. De esta manera, se obtiene que:

$$|w_{k+1}^*(x) - \varphi_{j_0}^*(x)| = \left|\sum_{l=1}^{n} (\delta_l - b_l) u_l^*(x)\right| \leq$$

$$\sum_{l=1}^{n} |\delta_l - b_l| \|u_l^*\| \|x\| \leq \left(\sum_{l=1}^{n-1} |\delta_l - b_l|\right) + |\delta_n - b_n| =$$

$$\left(\sum_{l=1}^{n-1} |\delta_l - b_l|\right) + \left|1 - \left(\sum_{l=1}^{n-1} \delta_l\right) - 1 + \left(\sum_{l=1}^{n-1} b_l\right)\right| =$$

$$\left(\sum_{l=1}^{n-1} |\delta_l - b_l|\right) + \left|\sum_{l=1}^{n-1} (\delta_l - b_l)\right| \leq 2 \sum_{l=1}^{n-1} |\delta_l - b_l| < \frac{2(n-1)2^{-(k+7)}}{n-1} = 2^{-(k+6)}.$$

Por tanto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|w_{k+1}^*(x) - \varphi_{j_0}^*(x)| < 2^{-(k+6)} \text{ si } x \in X \text{ satisface que } \|x\| \leq 1. \tag{3.19}$$

Finalmente, supongamos que la desigualdad (3.16) es falsa. Entonces:

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \underline{\lim}_{i \to \infty} w_i^*(x)\right] >$$

$$2^{-(k+4)} \beta_{k+1} + \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \overline{\lim}_{i \to \infty} w_i^*(x)\right],$$

por lo que existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(u)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(u) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(u) >$$

$$2^{-(k+4)}\beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x)\right]. \quad (3.20)$$

De (3.17), (3.18), (3.19) y (3.20) obtenemos que:

$$2^{-(k+6)}\beta_{k+1} + 2^{-(k+5)}\beta_{k+1} + \left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_{j_0})\right) + \beta_{k+1}\varphi_{j_0}^*(x_{j_0}) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x_{j_0}) >$$

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(u)\right) + \beta_{k+1}\varphi_{j_0}^*(u) + 2^{-(k+6)}\beta_{k+1} - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(u) >$$

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(u)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(u) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(u) >$$

$$2^{-(k+4)}\beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x)\right]. \quad (3.21)$$

Además, nuevamente de (3.19), se obtiene que:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] \geq$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1}\varphi_{j_0}^*(x) - 2^{(-k+6)}\beta_{k+1} - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] =$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1}\varphi_{j_0}^*(x) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] - 2^{-(k+6)}\beta_{k+1}. \quad (3.22)$$

Más aún, como $2^{-(k+4)}\beta_{k+1} - 2^{-(k+6)}\beta_{k+1} - 2^{-(k+5)}\beta_{k+1} - 2^{-(k+6)}\beta_{k+1} = 2^{-(k+6)}\beta_{k+1}(4-1-2-1) = 0$, de (3.21) y (3.22) se sigue que:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x_{j_0})\right) + \beta_{k+1}\varphi_{j_0}^*(x_{j_0}) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(x_{j_0}) >$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1}\varphi_{j_0}^*(x) - \overline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x)\right],$$

lo cual es una contradicción pues $\|x_{j_0}\| = 1$. Así, podemos concluir que $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{u_i^* : i \geq k+1\})$ que satisface las desigualdades (3.15) y (3.16) si $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$. Ahora, supongamos que existen $v^* \in co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$ y una sucesión $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ tales que $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$ y:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1}v^*(x) - \underline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x)\right] <$$

$$\theta_k + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1}. \tag{3.23}$$

Sea $w^* = \frac{1}{\beta_k+\beta_{k+1}}(\beta_k x_k^* + \beta_{k+1}v^*)$. Reescribiendo la desigualdad (3.23), se tiene que:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(x)\right) + (\beta_k + \beta_{k+1})w^*(x) - \underline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x)\right] <$$

$$\theta_k + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1}. \tag{3.24}$$

Como $(u_i^*)_{i=k}^{\infty}$ y $(v_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ son sucesiones de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$ y de $co(\{z_i^* : i \geq k+1\})$, respectivamente, entonces $x_k^* = u_k^*$ y v^* pertenecen a $co(\{z_i^* : i \geq k\})$. En consecuencia, podemos suponer, sin pérdida generalidad, que existen $n \in \mathbb{N}$, números reales no negativos $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \phi_1, \ldots, \phi_n$ y $z_1^*, \ldots, z_n^* \in co(\{z_i^* : i \geq k\})$ tales que $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \epsilon_l = \sum_{l=1}^{n} \phi_l = 1$, $x_k^* = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \epsilon_l z_l^*$ y $v^* = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \phi_l z_l^*$. Entonces, tenemos que:

$$w^* = \frac{1}{\beta_k + \beta_{k+1}}(\beta_k x_k^* + \beta_{k+1}v^*) = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\beta_k\epsilon_l + \beta_{k+1}\phi_l}{\beta_k + \beta_{k+1}}\right) z_l^*,$$

con $\frac{\beta_k\epsilon_l+\beta_{k+1}\phi_l}{\beta_k+\beta_{k+1}} \geq 0$ $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$, $z_1^*, \ldots, z_n^* \in co(\{z_i^* : i \geq k\})$ y

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_k\epsilon_l + \beta_{k+1}\phi_l}{\beta_k + \beta_{k+1}} = \frac{\beta_k}{\beta_k + \beta_{k+1}}\left(\sum_{l=1}^{n} \epsilon_l\right) + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k + \beta_{k+1}}\left(\sum_{l=1}^{n} \phi_l\right) = 1.$$

Consecuentemente, $w^* \in co(\{z_i^* : i \geq k\})$. Luego, como $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k+1\})$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $(w^*, w_{k+1}^*, w_{k+2}^*, \ldots)$ es una sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$. Ahora, para cada $x \in X$, sea $S(x) = \left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_k w^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)$ y sea $s = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} S(x)$. Si $z \in X$ es tal que $\|z\| = 1$ y $s - 2^{-(k+2)}\beta_k < S(z)$, entonces $w^*(z) > \frac{1}{4} + 2^{-k}$ ya que, en caso contrario, tendríamos que $w^*(z) \leq \frac{1}{4} + 2^{-k}$ y, como la sucesión $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{k-1}^*, w^*, w_{k+1}^*, w_{k+2}^*, \ldots)$ satisface la condición iii) del lema para $m = k$ (por ser $(w^*, w_{k+1}^*, w_{k+2}^*, \ldots)$ una sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$), obtendríamos que existe $v \in X$ tal que $\|v\| = 1$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(v)\right) + \beta_k w^*(v) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(v) >$$

$$2^{-(k+2)}\beta_k + \left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(z)\right) + \beta_k w^*(z) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(z) = 2^{-(k+2)}\beta_k + S(z),$$

de donde se seguiría que

$$s \geq S(v) = \left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(v)\right) + \beta_k w^*(v) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(v) \geq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(v)\right) + \beta_k w^*(v) - \varlimsup_{i\to\infty} w_i^*(v) > 2^{-(k+2)}\beta_k + S(z),$$

contradiciendo el hecho de que $s - 2^{-(k+2)}\beta_k < S(z)$. En consecuencia, si $z \in X$ es tal que $\|z\| = 1$ y $s - 2^{-(k+2)}\beta_k < S(z)$, entonces $S(z) + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} < S(z) + \beta_{k+1} w^*(z)$. Sean $x_0 \in X$ y $z_0 \in X$ tales que $\|x_0\| = \|z_0\| = 1$ y $s - 2^{-(k+2)}\beta_k < S(z_0)$. Si $s - 2^{-(k+2)}\beta_k < S(x_0)$, entonces:

$$S(x_0) + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} < S(x_0) + \beta_{k+1} w^*(x_0) \leq$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n x_n^*(x)\right) + (\beta_k + \beta_{k+1}) w^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right].$$

Por otra parte, si $S(x_0) \leq s - 2^{-(k+2)}\beta_k < S(z_0)$, se obtiene que:

$$S(x_0) + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} < S(z_0) + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} < S(z_0) + \beta_{k+1}w^*(z_0) \leq$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1}\beta_n x_n^*(x)\right) + (\beta_k + \beta_{k+1})w^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right].$$

Así, podemos concluir que:

$$\left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} S(x) \leq$$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1}\beta_n x_n^*(x)\right) + (\beta_k + \beta_{k+1})w^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right].$$

De la desigualdad (3.24) y la desigualdad anterior se sigue que:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1}\beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_k w^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] <$$

$$\theta_k + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} - \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} = \theta_k. \tag{3.25}$$

Como $(w^*, w_{k+1}^*, w_{k+2}^*, \ldots)$ es una sucesión de James de $co(\{z_i^* : i \geq k\})$, la desigualdad obtenida en (3.25) contradice la definición para θ_k dada en (3.13). Por tanto, si $v^* \in co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$ y $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, tenemos que la desigualdad (3.23) es falsa. De lo anterior y la desigualdad (3.15), obtenemos que si $v^* \in co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$ y $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, entonces:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n x_n^*(x)\right) + \beta_{k+1} v^*(x) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] \geq$$

$$\theta_k + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k}\right)\beta_{k+1} = \theta_k + 2^{-(k+3)}\beta_{k+1} + \left(\frac{1}{4} + 2^{-k} - 2^{-(k+3)}\right)\beta_{k+1} >$$

$$\left(\frac{1}{4} + 2^{-k} - 2^{-(k+3)}\right)\beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n x_n^*(x)\right) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right]. \tag{3.26}$$

Luego, de las desigualdades (3.16) y (3.26), se obtiene que si $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, entonces:

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \overline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x) \right] >$$

$$-2^{-(k+3)}\beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(x) - \underline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x) \right] \geq$$

$$\left(\frac{1}{4} + 2^{-k} - 2^{-(k+3)} - 2^{-(k+3)} \right) \beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) - \underline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x) \right] =$$

$$\left(\frac{1}{4} + 2^{-k} - 2^{-(k+2)} \right) \beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) - \underline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x) \right]. \quad (3.27)$$

Consecuentemente, si $(w_i^*)_{i=k+1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$ y $z \in X$ es tal que $\|z\| = 1$ y $w_{k+1}^*(z) \leq \frac{1}{4} + 2^{-(k+1)}$, entonces $\left(\frac{1}{4} + 2^{-(k+1)}\right)\beta_{k+1} \geq \beta_{k+1} w_{k+1}^*(z)$. Además, de la desigualdad (3.27) se sigue que existe $w \in X$ tal que $\|w\| = 1$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(w) \right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(w) - \overline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(w) >$$

$$\left(\frac{1}{4} + 2^{-k} - 2^{-(k+2)} \right) \beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x) \right) - \underline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(x) \right]. \quad (3.28)$$

Más aún, como $2^{-k} - 2^{-(k+2)} = 2^{-(k+2)}(4-1) = 2^{-(k+2)}(1+2) = 2^{-(k+2)} + 2^{-(k+1)}$, tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{4} + 2^{-k} - 2^{-(k+2)} = 2^{-(k+2)} + \left(\frac{1}{4} + 2^{-(k+1)} \right). \quad (3.29)$$

Así, de (3.28) y (3.29), obtenemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(w) \right) + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(w) - \overline{\lim_{i\to\infty}}\, w_i^*(w) >$$

$$2^{-(k+2)}\beta_{k+1} + \left(\frac{1}{4} + 2^{-(k+1)}\right)\beta_{k+1} + \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(x)\right) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(x)\right] \geq$$

$$2^{-(k+3)}\beta_{k+1} + \beta_{k+1} w_{k+1}^*(z) + \left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n x_n^*(z)\right) - \varliminf_{i\to\infty} w_i^*(z).$$

Por tanto, la sucesión $(x_1^*, \ldots, x_k^*, v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots)$ es una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ tal que si $(x_{k+1}^*, x_{k+2}^*, \ldots)$ es una sucesión de James de $co(\{v_i^* : i \geq k+1\})$, entonces la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ cumple la condición iii) del lema para cualquier $m \leq k+1$. Continuando con este proceso, de manera inductiva podemos construir una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ tal que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de James de $co(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ que satisface la condición iii) del lema para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

□

Como ya vimos anteriormente en el Teorema 3.3.5, existen espacios de Banach X para los cuales no se satisface que toda funcional lineal y acotada con dominio X alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. El resultado que probaremos a continuación, conocido como el Teorema de James, nos garantiza que un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si toda funcional lineal y acotada con dominio X alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.

Teorema 3.3.10 (James)**.** *Si X es un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y sólo si para cualquier $x^* \in X^*$ se satisface que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach.
Primero, supongamos que X es reflexivo. Sean $C : X \longrightarrow X^{**}$ el mapeo canónico de X en X^{**} y $x^* \in X^*$. Si $x^* = 0$, entonces es claro que para cualquier $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ se cumple que $|x^*(u)| = 0 = \|x^*\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$, por lo que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. Por otra parte, si $x^* \neq 0$, por el Teorema 1.5.6, sabemos que existe una funcional lineal y acotada $u^{**} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\|u^{**}\| = 1$ y $u^{**}(x^*) = \|x^*\|$. Luego, como X es reflexivo y $u^{**} \in X^{**}$, obtenemos que existe $u \in X$ tal que $u^{**} = C(u)$. Además, como C es un isomorfismo, se tiene que $\|u\| = \|C(u)\| = \|u^{**}\| = 1$. En consecuencia, tenemos que $u \in X$ satisface que $\|u\| = 1$ y

$$|x^*(u)| = |(C(u))(x^*)| = |u^{**}(x^*)| = \|x^*\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|.$$

Por tanto, x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.

Conversamente, supongamos que X no es reflexivo. En primer lugar, consideremos el caso en que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sea $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\beta_1 = 9$ y $\beta_{n+1} < 2^{-(n+4)}\beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $\beta_1 = 9$ y X es un espacio de Banach real no reflexivo, sabemos que existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ que satisfacen las condiciones i), ii) y iii) del Lema 3.3.9. Sea $U = \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \text{ converge en } \mathbb{R}\}$. Claramente tenemos que si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ es tal que $\alpha_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Además, para cualquier número real r y cualesquiera sucesiones $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in U$ se tiene que $(\alpha_n + \gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in U$ y $(r\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in U$, de donde se sigue que U es un subespacio de ℓ_∞. Sea $u^* : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $u^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ $\forall (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n + \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n + \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} r\alpha_n = r \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ para cualesquiera $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in U$ y para cualquier $r \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que u^* es una funcional lineal. Sea $\rho : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $\rho((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ $\forall (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Observemos que como $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n + \gamma_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} \gamma_n$ y $\varlimsup\limits_{n\to\infty} s\alpha_n = s \varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ para cualesquiera $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ y para cualquier número real no negativo s, entonces ρ es una funcional sublineal. Además, claramente se cumple que $u^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \rho((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})$ para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Por tanto, U es un subespacio de ℓ_∞, $u^* : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal y $\rho : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional sublineal tal que $u^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) \leq \rho((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})$ para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach real (Teorema 1.5.3), obtenemos que u^* tiene una extensión $z^* : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que z^* es una funcional lineal y $z^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) \leq \rho((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})$ para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Más aún, para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ se tiene que $(-\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ y, por consiguiente:

$$-z^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = z^*((-\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) \leq \rho((-\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \varlimsup_{n\to\infty} -\alpha_n.$$

De lo anterior se sigue que, para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, se satisface la desigualdad:

$$\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n = -\varlimsup_{n\to\infty} -\alpha_n \leq z^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}).$$

En consecuencia, tenemos que $\varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leq z^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) \leq \rho((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Ahora, como para cualquier $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ se cumple que $-\|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq \alpha_n \leq \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, para cualquier

$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, se obtiene que:

$$-\|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq z^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty.$$

Así, podemos concluir que $|z^*((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})| \leq \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty \ \forall (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ y, por tanto, z^* es una funcional lineal y acotada tal que $\|z^*\| \leq 1$. Sea $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ tal que $\delta_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, es claro que $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \in U$ y que $\|(\delta_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = 1$, por lo que:

$$\|z^*\| \geq |z^*((\delta_n)_{n=1}^{\infty})| = |u^*((\delta_n)_{n=1}^{\infty})| = \left|\lim_{n\to\infty} \delta_n\right| = 1.$$

De esta manera, obtenemos que z^* es una funcional lineal y acotada tal que $\|z^*\| = 1$. Por otra parte, notemos que como la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ satisface que $\|x_n^*\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces, para cada $x \in X$, tenemos que $|x_n^*(x)| \leq \|x_n^*\|\|x\| \leq \|x\| \ \forall n \in \mathbb{N}$, de donde se obtiene que $(x_n^*(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ y $\|(x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq \|x\|$ para cada $x \in X$. Consecuentemente, podemos definir la función $y^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $y^*(x) = z^*((x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}) \ \forall x \in X$. Como z^* es una funcional lineal y x_n^* es una funcional lineal para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces es claro que y^* es una funcional lineal. Además, para cada $x \in X$, se tiene que $|y^*(x)| \leq \|z^*\|\|(x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \|(x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq \|x\|$. De lo anterior, obtenemos que $y^* \in X^*$ y que $\|y^*\| \leq 1$. Más aún, por definición de y^*, para cada $x \in X$ tenemos que:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n^*(x) \leq z^*((x_n^*(x))_{n=1}^{\infty}) = y^*(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x). \tag{3.30}$$

Ahora, observemos que como $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos y $\beta_{n+1} < 2^{-(n+4)}\beta_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 0$, por lo que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ es convergente. Así, podemos definir la función $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $x^*(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(x)\right) - y^*(x) \ \forall x \in X$. Como x_n^* es lineal para cada $n \in \mathbb{N}$ y y^* es lineal, entonces es claro que x^* es una funcional lineal. Además, como $\|x_n^*\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\|y^*\| \leq 1$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que:

$$|x^*(x)| = \left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(x)\right) - y^*(x)\right| \leq |y^*(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n x_n^*(x)| \leq$$

$$\|y^*\|\|x\| + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \|x_n^*\|\|x\| \leq \|x\| + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \|x\| = \|x\| \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\right).$$

Por tanto, x^* es una funcional lineal y acotada. Supongamos que existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $x_m^*(z) \leq \frac{1}{4} + 2^{-m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Lema 3.3.9, sabemos que existe $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(y)\right) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(y) >$$

$$2^{-(m+2)}\beta_m + \left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(z)\right) - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(z). \tag{3.31}$$

Veamos, por inducción sobre k, que

$$\beta_{m+k} < 2^{-(m+k+3)}\beta_m \tag{3.32}$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$, por hipótesis sabemos que:

$$\beta_{m+1} < 2^{-(m+4)}\beta_m = 2^{-(m+1+3)}\beta_m.$$

Luego, si suponemos que $\beta_{m+k} < 2^{-(m+k+3)}\beta_m$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\beta_{m+(k+1)} < 2^{-(m+k+4)}\beta_{m+k} < 2^{-(m+k+4)}2^{-(m+k+3)}\beta_m =$$

$$2^{-(m+k+1+3)}2^{-(m+k+3)}\beta_m < 2^{-(m+(k+1)+3)}\beta_m,$$

pues $2^{-(m+k+3)} < 1$. Por tanto, tenemos que $\beta_{m+k} < 2^{-(m+k+3)}\beta_m$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. De lo anterior, obtenemos que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se satisface que:

$$|\beta_{m+k} x_{m+k}^*(y)| \leq \beta_{m+k}\|x_{m+k}^*\|\|y\| \leq \beta_{m+k}\|y\| = \beta_{m+k} < 2^{-(m+k+3)}\beta_m,$$

y

$$|\beta_{m+k} x_{m+k}^*(z)| \leq \beta_{m+k}\|x_{m+k}^*\|\|z\| \leq \beta_{m+k}\|z\| = \beta_{m+k} < 2^{-(m+k+3)}\beta_m.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\beta_n x_n^*(y)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{m+k} x_{m+k}^*(y)| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(m+k+3)}\beta_m = 2^{-(m+3)}\beta_m \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-(m+3)}\beta_m, \tag{3.33}$$

y

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\beta_n x_n^*(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{m+k} x_{m+k}^*(z)| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(m+k+3)}\beta_m = 2^{-(m+3)}\beta_m \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-(m+3)}\beta_m. \tag{3.34}$$

De las desigualdades (3.33) y (3.34), se obtiene que:

$$-2^{-(m+3)}\beta_m \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y) \leq 2^{-(m+3)}\beta_m, \tag{3.35}$$

y

$$-2^{-(m+3)}\beta_m \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(z) \leq 2^{-(m+3)}\beta_m, \tag{3.36}$$

Así, de las desigualdades (3.31), (3.35) y (3.36), obtenemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y) \right) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(y) =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(y) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y) \right) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(y) >$$

$$2^{-(m+2)}\beta_m + \left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(z) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y) \right) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(z) \geq$$

$$2^{-(m+2)}\beta_m - 2^{-(m+3)}\beta_m + \left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(z) \right) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(z) =$$

$$2^{-(m+3)}\beta_m + \left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(z) \right) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(z) \geq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \beta_n x_n^*(z) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(z) \right) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(z) =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(z) \right) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(z).$$

De la desigualdad anterior y la desigualdad (3.30), se sigue que:

$$x^*(y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y)\right) - y^*(y) \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(y)\right) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(y) >$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(z)\right) - \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(z) \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(z)\right) - y^*(z) = x^*(z).$$

De esta manera, hemos probado que si $z \in X$ es tal que $\|z\| = 1$ y $x_m^*(z) \leq \frac{1}{4} + 2^{-m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces existe $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$ y $x^*(y) > x^*(z)$. Supongamos que x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria, de manera que existe $v \in X$ tal que $\|v\| = 1$ y $|x^*(v)| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$. Entonces $x^*(v) \geq 0$ o $x^*(v) < 0$ y, si $x^*(v) < 0$, tenemos que $-v \in X$ satisface que $\|-v\| = 1$, $x^*(-v) = -x^*(v) > 0$ y $|x^*(-v)| = |-x^*(v)| = |x^*(v)| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$. Por tanto, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$, $x^*(u) \geq 0$ y $|x^*(u)| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|$. Si $x_n^*(u) \leq \frac{1}{4} + 2^{-n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces tendríamos que existe $w \in X$ tal que $\|w\| = 1$ y $x^*(w) > x^*(u)$ y, por consiguiente:

$$|x^*(w)| \geq x^*(w) > x^*(u) = |x^*(u)| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |x^*(x)|,$$

lo cual claramente es una contradicción. En consecuencia, tenemos que $x_n^*(u) > \frac{1}{4} + 2^{-n} > \frac{1}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De lo anterior, se obtiene que $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(u) \geq \dfrac{1}{4}$, o equivalentemente:

$$-\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n^*(u) \leq -\frac{1}{4}. \tag{3.37}$$

Además, notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$|\beta_n x_n^*(u)| \leq \beta_n |x_n^*(u)| \leq \beta_n \|x_n^*\| \|u\| \leq \beta_n \|u\| = \beta_n.$$

De lo anterior, podemos concluir que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se satisface que:

$$-\beta_n \leq \beta_n x_n^*(u) \leq \beta_n. \tag{3.38}$$

Luego, de las desigualdades (3.30), (3.37) y (3.38), se sigue que:

$$x^*(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(u)\right) - y^*(u) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(u)\right) - \varliminf_{n\to\infty} x_n^*(u) \le$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(u)\right) - \frac{1}{4} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\right) - \frac{1}{4}. \tag{3.39}$$

Por otra parte, por el inciso ii) del Lema 3.3.9, sabemos que $x_n^*(x_j) > \frac{79}{80}$ si $n \le j$ y que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_n^*(x_j) = 0$ para cualquier $n > N_j$. Consecuentemente, para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x_j) = 0$ y, por tanto, $(x_n^*(x_j))_{n=1}^{\infty} \in U$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Así, para cada $j \in \mathbb{N}$, obtenemos que:

$$y^*(x_j) = z^*((x_n^*(x_j))_{n=1}^{\infty}) = u^*((x_n^*(x_j))_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x_j) = 0. \tag{3.40}$$

Más aún, como $\|x_j\| = 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$, de manera análoga a como se probó la desigualdad (3.38), se puede ver que, para cualesquiera $j, n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$-\beta_n \le \beta_n x_n^*(x_j) \le \beta_n. \tag{3.41}$$

En consecuencia, como para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\beta_n x_n^*(x_j) > \frac{79\beta_n}{80}$ si $n \le j$, de (3.40) y (3.41) se obtiene que, para cada $j \in \mathbb{N}$, se satisface la desigualdad:

$$x^*(u) = |x^*(u)| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |x^*(x)| \ge |x^*(x_j)| \ge x^*(x_j) =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(x_j)\right) - y^*(x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n^*(x_j) = \sum_{n=1}^{j} \beta_n x_n^*(x_j) + \sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(x_j) >$$

$$\frac{79}{80}\sum_{n=1}^{j} \beta_n + \sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n x_n^*(x_j) \ge \frac{79}{80}\sum_{n=1}^{j} \beta_n - \sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n.$$

Como $\lim\limits_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ y $\lim\limits_{j\to\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n = 0$, de lo anterior podemos concluir que:

$$x^*(u) \ge \frac{79}{80}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n. \tag{3.42}$$

Así, de las desigualdades (3.39) y (3.42) se sigue que:

$$\frac{79}{80}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \leq x^*(u) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\right) - \frac{1}{4},$$

de donde se obtiene que $\frac{1}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n - \frac{79}{80}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \frac{1}{80}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ o, equivalentemente, $20 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$. Por otra parte, un argumento inductivo análogo al que se realizó para probar la desigualdad (3.32) muestra que $\beta_n < 2^{-(n+3)}\beta_1$ para cualquier $n \geq 2$. En consecuencia, obtenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \beta_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\beta_n \leq \beta_1 + \sum_{n=2}^{\infty}2^{-(n+3)}\beta_1 = \beta_1 + \beta_1\sum_{n=5}^{\infty}2^{-n} =$$

$$\beta_1 + \beta_1 2^{-4} = 9 + \frac{9}{2^4} < 9 + 1 = 10.$$

Consecuentemente, tenemos que $20 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n < 10$, lo cual claramente es imposible. Por tanto, x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X.
Finalmente, para el caso general en el que X es un espacio vectorial complejo, consideramos el espacio normado real X_r que se obtiene al restringir el producto de vectores por escalares a $\mathbb{R} \times X$. Como X no es reflexivo, por el Lema 3.1.1, sabemos que X_r no es reflexivo. Luego, por el caso probado anteriormente, sabemos que existe $v^* \in (X_r)^*$ tal que v_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X_r. Ahora, por el Lema 1.3.22, obtenemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $Re(x^*) = v^*$. Si x_c^* alcanza su supremo en la esfera unitaria de X, entonces, por el Lema 3.3.4, se seguiría que existe $u \in X_r$ tal que $\|u\| = 1$ y

$$|v^*(u)| = |Re(x^*)(u)| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |Re(x^*)(x)| = \sup_{\substack{x\in X_r\\ \|x\|=1}} |v^*(x)|,$$

contradiciendo que v_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X_r. Por tanto, existe $x^* \in X^*$ tal que x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de X. □

Para concluir esta sección, con el fin de ilustrar la utilidad del Teorema de James, presentaremos un ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo y una funcional lineal y acotada que no alcanza su supremo en la esfera unitaria de dicho espacio. Cabe mencionar que en dicho ejemplo se utilizará la notación introducida en el Ejemplo 2.1.12 para las sucesiones e_n, donde $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.3.11. Considerando a c_0 como un subespacio de ℓ_∞, sea $x^* : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ la función dada por:

$$x^*((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n} \quad \forall (a_n)_{n=1}^\infty \in c_0.$$

Notemos que como c_0 es un subespacio cerrado de ℓ_∞ y ℓ_∞ es un espacio de Banach, entonces por el Teorema 1.2.8 tenemos que c_0 es un espacio de Banach. Además, como para cualesquiera $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que:

$$x^*((a_n)_{n=1}^\infty + (b_n)_{n=1}^\infty) = x^*((a_n + b_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n + b_n}{2^n} =$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n} + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{2^n} = x^*((a_n)_{n=1}^\infty) + x^*((b_n)_{n=1}^\infty),$$

y

$$x^*(\alpha(a_n)_{n=1}^\infty) = x^*((\alpha a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha a_n}{2^n} = \alpha \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n} = \alpha x^*((a_n)_{n=1}^\infty),$$

entonces x^* es una funcional lineal. Más aún, para cualquier $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ se satisface la desigualdad:

$$|x^*((a_n)_{n=1}^\infty)| = \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{2^n} \leq$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty}{2^n} = \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty.$$

De lo anterior se sigue que $x^* \in (c_0)^*$ y $\|x^*\| \leq 1$. Ahora, como para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\sum_{n=1}^k e_n$ es una sucesión cuyos primeros k términos son iguales a uno y cuyos demás términos son iguales a cero, entonces: para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\sum_{n=1}^k e_n \in c_0 \text{ y } \left\| \sum_{n=1}^k e_n \right\|_\infty = 1.$$

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ obtenemos que:

$$\|x^*\| \geq \left| x^* \left(\sum_{n=1}^{k} e_n \right) \right| = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}.$$

De la desigualdad anterior se obtiene que:

$$\|x^*\| \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Por tanto, x^* es una funcional lineal y acotada tal que:

$$\sup_{\substack{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \\ \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = 1}} |x^*((a_n)_{n=1}^{\infty})| = \|x^*\| = 1.$$

Veamos que x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de c_0. Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ es tal que $\|(u_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = 1$. Como $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, entonces sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq N$. De esta manera, obtenemos que:

$$|x^*((u_n)_{n=1}^{\infty})| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_n|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\|(u_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} <$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 =$$

$$\sup_{\substack{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \\ \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = 1}} |x^*((a_n)_{n=1}^{\infty})|.$$

Por tanto, x_c^* no alcanza su supremo en la esfera unitaria de c_0. En consecuencia, por el Teorema de James (Teorema 3.3.10) podemos concluir que c_0 no es reflexivo, obteniendo así una prueba alternativa de este hecho a la dada en el Ejemplo 2.1.13.

3.4. Teorema de compacidad débil de James

Para finalizar este capítulo, probaremos el Teorema de compacidad débil de James, el cual caracteriza a aquellos subconjuntos débilmente cerrados de un espacio de Banach que son, a su vez, débilmente compactos. Cabe destacar que dicho teorema es una versión más fuerte del Teorema de James presentado anteriormente.

En lo que resta de esta sección, dados un espacio normado real X y una sucesión acotada $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^*, denotaremos por $L(x_n^*)$ al conjunto de todas las funcionales lineales y acotadas $x^* \in X^*$ que satisfacen la desigualdad $x^*(x) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n^*(x)$ para cualquier $x \in X$, mientras que $V(x_n^*)$ denotará al conjunto de todas las sucesiones $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* tales que $y_n^* \in co(\{x_j^* : j \geq n\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Comenzaremos por enunciar un sencillo lema en el que se enlistan algunas propiedades básicas de los conjuntos $L(x_n^*)$ y $V(x_n^*)$ definidos anteriormente, con la finalidad de mostrar un resultado que será de gran utilidad para probar algunos de los teoremas que se presentarán más adelante en esta sección.

Lema 3.4.1. *Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X^*. Sea $M > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leq M$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

a) $L(x_n^*)$ y $V(x_n^*)$ son conjuntos no vacíos.

b) Para cualquier $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \in V(x_n^*)$ se cumple que $\|y_n^*\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $V(y_n^*) \subseteq V(x_n^*)$ y $L(y_n^*) \subseteq L(x_n^*)$.

c) Para cada $x^* \in L(x_n^*)$ se satisface que $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n^*(x) \leq x^*(x)$ $\forall x \in X$ y $\|x^*\| \leq M$.

Demostración. Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X^*. Sea $M > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Como claramente se tiene que $x_n^* \in co(\{x_j^* : j \geq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in V(x_n^*)$ y, por tanto, $V(x_n^*)$ es no vacío. Por otra parte, sean $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y^* : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por $\rho(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n^*(x)$ $\forall x \in X$ y $y^*(0) = 0$. Es claro que y^* es una funcional lineal. Además, como x_n^* es una funcional lineal para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces para cualesquiera $x, y \in X$ y para cualquier número real no negativo α, tenemos que:

$$\rho(x+y) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(x+y) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^*(x) + x_n^*(y) \leq$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x) + \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x) = \rho(x) + \rho(y),$$

y

$$\rho(\alpha x) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(\alpha x) = \varlimsup_{n\to\infty} \alpha x_n^*(x) = \alpha \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x) = \alpha\rho(x).$$

De lo anterior, se sigue que ρ es una funcional sublineal. Así, tenemos que $\{0\}$ es un subespacio de X, ρ es una funcional sublineal y y^* es una funcional lineal tal que $y^*(0) = 0 = \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(0) = \rho(0)$. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach real (Teorema 1.5.3), sabemos que y^* tiene una extensión $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que x^* es lineal y $x^*(x) \leq \rho(x)$ $\forall x \in X$. En consecuencia, para cada $x \in X$ se tiene que $x^*(-x) \leq \rho(-x)$ y, por consiguiente:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n^*(x) = -\varlimsup_{n\to\infty} -x_n^*(x) = -\varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(-x) =$$

$$-\rho(-x) \leq -x^*(-x) = x^*(x) \leq \rho(x) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x). \tag{3.43}$$

Más aún, como para cada $x \in X$ tenemos que $|x_n^*(x)| \leq \|x_n^*\|\|x\| \leq M\|x\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, $-M\|x\| \leq x_n^*(x) \leq M\|x\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $x \in X$ se cumple que:

$$-M\|x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n^*(x) \leq x^*(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x) \leq M\|x\|. \tag{3.44}$$

De esta manera, obtenemos que $|x^*(x)| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$ y, consecuentemente, $x^* \in X^*$ y $x^*(x) \leq \rho(x) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x)$ $\forall x \in X$. Por tanto, $x^* \in L(x_n^*)$ y $L(x_n^*)$ es no vacío.

b) Sea $(y_n^*)_{n=1}^\infty \in V(x_n^*)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $y_n^* \in co(\{x_j^* : j \geq n\})$, por el Lema 1.1.5, sabemos que existen $m \in \mathbb{N}$, números reales no negativos $t_1, \ldots, t_m$ y $z_1^*, \ldots, z_m^* \in \{x_j^* : j \geq n\}$ tales que $y_n^* = \sum_{k=1}^m t_k z_k^*$ y $\sum_{k=1}^m t_k = 1$. Luego, como $\|z_k^*\| \leq M$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, entonces:

$$\|y_n^*\| \leq \sum_{k=1}^m t_k \|z_k^*\| \leq M \left(\sum_{k=1}^m t_k \right) = M. \tag{3.45}$$

Por tanto, $\|y_n^*\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si $x \in X$, $l \in \mathbb{N}$ y $n \geq l$, entonces:

$$y_n^*(x) = \sum_{k=1}^{m} t_k z_k^*(x) \leq \left(\sum_{k=1}^{m} t_k \right) \sup_{j \geq l} x_j^*(x) = \sup_{j \geq l} x_j^*(x), \tag{3.46}$$

pues $z_1^*, \ldots, z_m^* \in \{x_j^* : j \geq n\} \subseteq \{x_j^* : j \geq l\}$. De lo anterior, se obtiene que $\sup\limits_{j \geq l} y_j^*(x) \leq \sup\limits_{j \geq l} x_j^*(x)$ para cualesquiera $l \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ y, en consecuencia, $\overline{\lim\limits_{l \to \infty}}\, y_l^*(x) \leq \overline{\lim\limits_{l \to \infty}}\, x_l^*(x)$ para cada $x \in X$. Así, se tiene que si $x^* \in L(y_n^*)$, entonces para cada $x \in X$ se cumple que:

$$x^*(x) \leq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, y_n^*(x) \leq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n^*(x),$$

de donde se sigue que $x^* \in L(x_n^*)$ y, por tanto, $L(y_n^*) \subseteq L(x_n^*)$.
Ahora, sea $(u_n^*)_{n=1}^{\infty} \in V(y_n^*)$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $y_k^* \in co(\{x_j^* : j \geq n\})$ si $k \geq n$, entonces $\{y_j^* : j \geq n\} \subseteq co(\{x_j^* : j \geq n\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde se obtiene que:

$$u_n^* \in co(\{y_j^* : j \geq n\}) \subseteq co(\{x_j^* : j \geq n\}),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, tenemos que $(u_n^*)_{n=1}^{\infty} \in V(x_n^*)$ y, por consiguiente $V(y_n^*) \subseteq V(x_n^*)$.

c) Sea $x^* \in L(x_n^*)$. Como $x^*(x) \leq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n^*(x)$ $\forall x \in X$, entonces de manera análoga a como se probaron las desigualdades (3.43) y (3.44), se puede ver que $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n^*(x) \leq x^*(x) \leq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n^*(x)$ y $-M\|x\| \leq x^*(x) \leq M\|x\|$ para cualquier $x \in X$. Así, obtenemos que $|x^*(x)| \leq M\|x\|$ para cualquier $x \in X$, por lo que $\|x^*\| \leq M$. Por tanto, $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n^*(x) \leq x^*(x)$ $\forall x \in X$ y $\|x^*\| \leq M$.

□

Lema 3.4.2. *Sea X un espacio de Banach real. Sean $B_X[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X, A un subconjunto no vacío y balanceado de $B_X[0,1]$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X^* tal que $\|x_n^*\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\sup\{|(x^* - w^*)(x)| : x \in A\} \geq \theta$ para cualesquiera $x^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ y $w^* \in L(x_n^*)$. Entonces, existen $\alpha \in [\theta, 2]$ y una sucesión $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ tales que:*

i) $\|y_n^*\| \leq 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (y_n^* - w^*)(x)\right| : x \in A\right\} = \alpha$ *para cualquier* $w^* \in L(y_n^*)$.

iii) $\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{k} \beta_n (y_n^* - w^*)(x)\right| : x \in A\right\} < \alpha\left(1 - \theta \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n\right)$ *para cualesquiera* $k \in \mathbb{N}$ *y* $w^* \in L(y_n^*)$.

Demostración. Sean X, $B_X[0,1]$, A, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ como en el enunciado del lema. Sea $B_{X^*}[0,1]$ la bola unitaria cerrada en X^*. Supongamos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que:

$$\sup\{|(x^* - w^*)(x)| : x \in A\} \geq \theta$$

para cualesquiera $x^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ y $w^* \in L(x_n^*)$. Sea $\rho : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $\rho(x^*) = \sup_{x \in A} |x^*(x)|$ $\forall x^* \in X^*$. Como para cualesquiera $x^*, y^* \in X^*$ y $x \in A$ se tiene que $|(x^* + y^*)(x)| \leq |x^*(x)| + |y^*(x)| \leq \rho(x^*) + \rho(y^*)$, entonces es claro que $\rho(x^* + y^*) \leq \rho(x^*) + \rho(y^*)$ para cualesquiera $x^*, y^* \in X^*$. Además, como para cualesquiera $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que $\rho(x^*) = \sup_{x \in A} |x^*(x)| \geq 0$ y $\rho(\alpha x^*) = \sup_{x \in A} |\alpha x^*(x)| = \sup_{x \in A} |\alpha||x^*(x)| = |\alpha| \sup_{x \in A} |x^*(x)| = |\alpha|\rho(x^*)$, entonces ρ es una seminorma. Más aún, como $|x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\| \leq \|x^*\|$ para cada $x^* \in X^*$ y cada $x \in A$, entonces $\rho(x^*) \leq \|x^*\|$ $\forall x^* \in X^*$. Además, notemos que, dadas $x^*, y^* \in X^*$, se cumple que $\rho(x^*) \leq \rho(x^* - y^*) + \rho(y^*)$ o, equivalentemente, $\rho(x^*) - \rho(y^*) \leq \rho(x^* - y^*)$. Intercambiando los papeles de x^* y y^* en el argumento anterior, tenemos que $\rho(y^*) - \rho(x^*) \leq \rho(y^* - x^*) = \rho(-(x^* - y^*)) = \rho(x^* - y^*)$. Así, para cualesquiera $x^*, y^* \in X^*$, podemos concluir que:

$$-\rho(x^* - y^*) \leq \rho(x^*) - \rho(y^*) \leq \rho(x^* - y^*),$$

y, consecuentemente, $|\rho(x^*) - \rho(y^*)| \leq \rho(x^* - y^*)$ $\forall x^*, y^* \in X^*$. En consecuencia, si $y^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$, entonces para cualquier $x^* \in X^*$ tal que $\|x^* - y^*\| < \epsilon$, tenemos que:

$$|\rho(x^*) - \rho(y^*)| \leq \rho(x^* - y^*) \leq \|x^* - y^*\| < \epsilon.$$

Por tanto, ρ es una seminorma continua tal que $\rho(x^*) \leq \|x^*\|$ $\forall x^* \in X^*$. Sea $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ la sucesión dada por $\epsilon_n = \frac{1-\theta}{2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$, entonces $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos que converge a cero tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \epsilon_n}{\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k\right)} = \frac{1-\theta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \frac{1-\theta}{2} < 1-\theta.$$

Ahora, construiremos de manera inductiva una sucesión de escalares $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ y sucesiones $(y_j^*)_{j=1}^{\infty}$; $\left(\left(x_j^{(0)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(x_j^{(1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(x_j^{(2)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(x_j^{(3)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(x_j^{(4)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots$; $\left(\left(z_j^{(1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(z_j^{(2)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(z_j^{(3)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(z_j^{(4)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(z_j^{(5)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots$ en X^* tales que $\left(\left(x_j^{(0)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en $B_{X^*}[0,1]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(a) $y_n^* \in B_{X^*}[0,1]$;

(b) $\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ y $\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ son sucesiones en $B_{X^*}[0,1]$;

(c) $\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(n-1)}\right)^*\right)$;

(d) $\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$;

(e) $y_n^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(n-1)}\right)^* : j \geq n\right\}\right)$;

(f) $\theta \leq \alpha_n \leq 2$;

(g) $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ si $n \geq 2$.

Para comenzar la inducción sea $\left(\left(x_j^{(0)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ la sucesión dada por $\left(x_j^{(0)}\right)^* = x_j^*$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que si $m \geq 2$, entonces, para cada $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, α_n, y_n^*, y las sucesiones $\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ y $\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ se han elegido de tal manera que satisfagan las condiciones (a)-(g). En primer lugar, notemos que si $(v_j^*)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, entonces:

$$\|v_j^*\| \leq 1 \ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{3.47}$$

ya que si $m = 1$, entonces $\left\|\left(x_j^{(0)}\right)^*\right\| \leq 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$ y, si $m \geq 2$, por hipótesis inductiva, tenemos que $\left\|\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right\| \leq 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, se tiene que $\left\|\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right\| \leq 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$ y como $(v_j^*)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, por el Lema 3.4.1, obtenemos que $\|v_j^*\| \leq 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $y^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y cada $(v_j^*)_{j=1}^\infty \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, definimos el conjunto no vacío $S_m(y^*, (v_j^*))$ como:

$$S_m(y^*, (v_j^*)) = \left\{\rho\left(\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y^* - w^*\right) : w^* \in L(v_j^*)\right\}.$$

Sean $y_0^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y $(v_j^*)_{j=1}^\infty \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$. Como la desigualdad $\left\|\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right\| \leq 1$ es válida para cada $j \geq m$, de manera análoga a como se probó la desigualdad (3.45) en la demostración del Lema 3.4.1, se puede ver que $\|y_0^*\| \leq 1$. Asimismo, como $(v_j^*)_{j=1}^\infty \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, de la desigualdad (3.47) obtenemos que $\|v_j^*\| \leq 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$. De lo anterior y del Lema 3.1.4 se sigue que $L(v_j^*) \subseteq B_{X^*}[0,1]$. Además, si $m \geq 2$, por hipótesis inductiva tenemos que $y_n^* \in B_{X^*}[0,1]$ para cada $n \in \{1, \ldots m-1\}$. En consecuencia, para cada $w^* \in L(v_j^*)$ se obtiene que:

$$0 \leq \rho\left(\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_0^* - w^*\right) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n \rho(y_n^*) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) \rho(y_0^*) + \rho(w^*) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n \|y_n^*\| + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) \|y_0^*\| + \|w^*\| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n + \sum_{n=m}^{\infty} \beta_n + 1 =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\right) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Por tanto, para cada $y^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y cada sucesión $(v_j^*)_{j=1}^\infty \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, podemos definir $\gamma^{(m)}_{y^*, (v_j^*)_{j=1}^\infty}$ como

$$\gamma^{(m)}_{y^*, (v_j^*)_{j=1}^\infty} = \sup S_m(y^*, (v_j^*)),$$

de modo que $0 \leq \gamma^{(m)}_{y^*, (v_j^*)_{j=1}^\infty} \leq 2$ para cada $y^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y cada $(v_j^*)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$. Sea

$$\alpha_m = \inf_{y^*,(v_j^*)_{j=1}^{\infty}} \gamma^{(m)}_{y^*,(v_j^*)_{j=1}^{\infty}}, \tag{3.48}$$

donde y^* denota un elemento de $co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y $(v_j^*)_{j=1}^{\infty}$ denota un elemento de $V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$. Observemos que como $0 \leq \gamma^{(m)}_{y^*,(v_j^*)_{j=1}^{\infty}} \leq 2$ para cada $y^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y cada $(v_j^*)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, entonces $0 \leq \alpha_m \leq 2$. Por otra parte, notemos que si $m \geq 2$, entonces se satisface que:

$$V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right) \subseteq V\left(\left(x_j^{(m-2)}\right)^*\right). \tag{3.49}$$

En efecto, si $m \geq 2$, por hipótesis inductiva, tenemos que $\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(\left(z_j^{(m-1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ y $\left(\left(z_j^{(m-1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-2)}\right)^*\right)$, de donde se obtiene que $\left(x_j^{(m-1)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(x_k^{(m-2)}\right)^* : k \geq j\right\}\right)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente, $\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-2)}\right)^*\right)$. Consecuentemente, por el Lema 3.1.4, obtenemos que $V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right) \subseteq V\left(\left(x_j^{(m-2)}\right)^*\right)$. Más aún, si $m \geq 2$ y $x^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$, entonces:

$$\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n} y_{m-1}^* + \frac{\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n} x^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-2)}\right)^* : j \geq m-1\right\}\right). \tag{3.50}$$

Para ver lo anterior, notemos que de (3.49) se obtiene que si $m \geq 2$, entonces $\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right) \subseteq V\left(\left(x_j^{(m-2)}\right)^*\right)$, de donde se sigue que $\left(x_j^{(m-1)}\right)^* \in co\left(\left\{\left(x_k^{(m-2)}\right)^* : k \geq m-1\right\}\right)$ para cada $j \geq m$. Como $x^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$, de lo anterior obtenemos que x^* es un elemento de $co\left(\left\{\left(x_k^{(m-2)}\right)^* : k \geq m-1\right\}\right)$. Luego, como por hipótesis inductiva sabemos que $y_{m-1}^* \in co\left(\left\{\left(x_k^{(m-2)}\right)^* : k \geq m-1\right\}\right)$, $\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n} + \frac{\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n} = 1$ y $co\left(\left\{\left(x_k^{(m-2)}\right)^* : k \geq m-1\right\}\right)$ es convexo, entonces:

$$\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n} y_{m-1}^* + \frac{\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n} x^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-2)}\right)^* : j \geq m-1\right\}\right).$$

Ahora, si $m \geq 2$, de la definición de α_{m-1}, de (3.49) y (3.50), se obtiene que:

$$\alpha_{m-1} \leq \inf_{z^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} \gamma^{(m-1)}_{z^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty},$$

donde $(v_j^*)_{j=1}^\infty$ denota un elemento de $V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$ y z^* denota una funcional lineal y acotada de la forma $\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{n=m-1}^\infty \beta_n} y^*_{m-1} + \frac{\sum_{n=m}^\infty \beta_n}{\sum_{n=m-1}^\infty \beta_n} x^*$, con $x^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$. Además, notemos que para cada sucesión $(v_j^*)_{j=1}^\infty \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$ y cada funcional lineal y acotada z^* de la forma $\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{n=m-1}^\infty \beta_n} y^*_{m-1} + \frac{\sum_{n=m}^\infty \beta_n}{\sum_{n=m-1}^\infty \beta_n} x^*$, con $x^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$, tenemos que:

$$S_{m-1}(z^*,(v_j^*)) = \left\{\rho\left(\sum_{n=1}^{m-2}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m-1}^{\infty}\beta_n\right) z^* - w^*\right) : w^* \in L(v_j^*)\right\} =$$

$$\left\{\rho\left(\sum_{n=1}^{m-2}\beta_n y_n^* + \beta_{m-1}y^*_{m-1} + \left(\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n\right) x^* - w^*\right) : w^* \in L(v_j^*)\right\} =$$

$$\left\{\rho\left(\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n\right) x^* - w^*\right) : w^* \in L(v_j^*)\right\} = S_m(x^*,(v_j^*)).$$

De esta manera, obtenemos que:

$$\alpha_{m-1} \leq \inf_{z^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} \gamma^{(m-1)}_{z^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} = \inf_{z^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} \sup S_{m-1}(z^*,(v_j^*)) =$$

$$\inf_{x^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} \sup S_m(x^*,(v_j^*)) = \inf_{x^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} \gamma^{(m)}_{x^*,(v_j^*)_{j=1}^\infty} = \alpha_m,$$

donde $(v_j^*)_{j=1}^\infty$ denota un elemento de $V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$, x^* es un elemento de $co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y z^* denota una funcional lineal y acotada de la forma $\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{n=m-1}^\infty \beta_n} y^*_{m-1} + \frac{\sum_{n=m}^\infty \beta_n}{\sum_{n=m-1}^\infty \beta_n} x^*$. Así, podemos concluir que $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$ si $m \geq 2$. Por otra parte, notemos que $\theta \leq \alpha_1$ ya que si $u^* \in co\left(\left\{x_j^* : j \geq 1\right\}\right) = co\left(\left\{\left(x_j^{(0)}\right)^* : j \geq 1\right\}\right)$ y $(u_j^*)_{j=1}^\infty \in V\left(x_j^*\right) = V\left(\left(x_j^{(0)}\right)^*\right)$, entonces, por el Lema 3.1.4 sabemos que $L(u_j^*) \subseteq L(x_j^*)$. Luego, por hipótesis, para cada

$w \in L(u_j^*) \subseteq L(x_j^*)$ se tiene que:

$$\rho\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\right)u^* - w^*\right) = \rho(u^* - w^*) = \sup_{x\in A}|(u^* - w^*)(x)| \geq \theta.$$

De la desigualdad anterior, se sigue que:

$$\gamma^{(1)}_{u^*,(u_j^*)_{j=1}^{\infty}} = \sup S_1(u^*,(u_j^*)) =$$

$$\sup\left\{\rho\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\right)u^* - w^*\right) : w^* \in L(u_j^*)\right\} \geq \theta,$$

para cada $u^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(0)}\right)^* : j \geq 1\right\}\right)$ y cada sucesión $(u_j^*)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(0)}\right)^*\right)$. Consecuentemente, por la definición de α_1 dada en (3.48), tenemos que $\theta \leq \alpha_1 \leq 2$. Como $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$ si $m \geq 2$, de lo anterior se obtiene que $\theta \leq \alpha_m \leq 2$ si $m \geq 2$. Ahora, a partir de la definición de α_m, podemos elegir $y_m^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y $\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty} \in V\left(\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right)$ tales que:

$$\alpha_m \leq \sup\left\{\rho\left(\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n\right)y_m^* - w^*\right) : w^* \in L\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)\right\} <$$
$$\alpha_m(1+\epsilon_m). \tag{3.51}$$

Luego, podemos elegir $w_m^* \in L\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)$ que satisfaga la desigualdad:

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \rho\left(\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n\right)y_m^* - w_m^*\right).$$

En consecuencia, de la definición de ρ y la desigualdad anterior, se obtiene que existe $y_m \in A$ tal que:

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \left|\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n y_n^*(y_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n\right)y_m^*(y_m) - w_m^*(y_m)\right|.$$

Observemos que como A es balanceado, por el Lema 1.1.3 sabemos que $A = -A$. Consecuentemente, si la expresión $\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n y_n^*(y_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty}\beta_n\right)y_m^*(y_m) - w_m^*(y_m)$ es negativa, entonces tendríamos que $-y_m \in A$ cumpliría que la expresión

$\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(-y_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(-y_m) - w_m^*(-y_m)$ es no negativa y

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \left|\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(y_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(y_m) - w_m^*(y_m)\right| =$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(-y_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(-y_m) - w_m^*(-y_m)\right| =$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(-y_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(-y_m) - w_m^*(-y_m).$$

Por tanto, existe $x_m \in A$ tal que:

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(x_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(x_m) - w_m^*(x_m). \tag{3.52}$$

Sea $\left(\left(x_j^{(m)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que:

$$\lim_{j\to\infty} \left(x_j^{(m)}\right)^*(x_m) = \varliminf_{j\to\infty} \left(z_j^{(m)}\right)^*(x_m).$$

Como $\theta \leq \alpha_m \leq 2$, $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$ si $m \geq 2$ y $\left\|\left(x_j^{(m-1)}\right)^*\right\| \leq 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces de (3.47) claramente obtenemos que α_m, y_m^*, $\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ y $\left(\left(x_j^{(m)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ satisfacen las condiciones (a)-(g) para $m \in \mathbb{N}$, lo cual completa la construcción inductiva.
A continuación, veamos que:

$$L(y_j^*) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} L\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} L\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right). \tag{3.53}$$

Primero, observemos que como la sucesión $\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces claramente se tiene que $\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es un elemento de $V\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Lema 3.4.1, obtenemos que $L\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right) \subseteq L\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $\bigcap_{n=0}^{\infty} L\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right) \subseteq$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} L\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)$. Sean n un entero no negativo y $m > n$. Notemos que como $y_m^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(m-1)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que la sucesión $\left(\left(x_j^{(k)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(\left(z_j^{(k)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ y $\left(\left(z_j^{(k)}\right)^*\right)_{j=1}^{\infty}$ es un elemento de $V\left(\left(x_j^{(k-1)}\right)^*\right)$, entonces tenemos que $y_m^* \in co\left(\left\{\left(x_j^{(n)}\right)^* : j \geq m\right\}\right)$. En consecuencia, procediendo de manera análoga a como se hizo en la demostración del Lema 3.4.1 para probar la desigualdad (3.46), se puede ver que si $x \in X$, $l > n$ y $m \geq l$, entonces:

$$y_m^*(x) \leq \sup_{j \geq l} \left(x_j^{(n)}\right)^*(x),$$

y, consecuentemente, $\sup_{j \geq l} y_j^*(x) \leq \sup_{j \geq l} \left(x_j^{(n)}\right)^*(x)$. Así, se obtiene que:

$$\overline{\lim_{j \to \infty}}\, y_j^*(x) \leq \overline{\lim_{j \to \infty}} \left(x_j^{(n)}\right)^*(x),$$

para cualquier $x \in X$, de donde claramente se sigue que

$$L(y_j^*) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} L\left(\left(x_j^{(n)}\right)^*\right).$$

Ahora, sea $w^* \in L(y_j^*)$. Por (3.53) sabemos que $w^* \in L\left(\left(x_j^{(m)}\right)^*\right)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y, por tanto:

$$w^*(x_m) \leq \overline{\lim_{j \to \infty}} \left(x_j^{(m)}\right)^*(x_m) = \lim_{j \to \infty} \left(x_j^{(m)}\right)^*(x_m) = \underline{\lim_{j \to \infty}} \left(z_j^{(m)}\right)^*(x_m),$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $w_m^* \in L\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, de la desigualdad anterior y del Lema 3.4.1, podemos concluir que:

$$w^*(x_m) \leq \underline{\lim_{j \to \infty}} \left(z_j^{(m)}\right)^*(x_m) \leq w_m^*(x_m) \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.54}$$

Como $x_m \in A \ \forall m \in \mathbb{N}$, de (3.52) y (3.54) se obtiene que:

$$\alpha_m(1 - \epsilon_m) < \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(x_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(x_m) - w_m^*(x_m) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^*(x_m) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*(x_m) - w^*(x_m) \leq$$

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^* - w^*\right) \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Más aún, como $w^* \in L(y_j^*) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} L\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)$, de la desigualdad anterior y de (3.51) se sigue que:

$$\alpha_m(1-\epsilon_m) < \rho\left(\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^* - w^*\right) \leq$$

$$\sup\left\{\rho\left(\sum_{n=1}^{m-1} \beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^* - v^*\right) : v^* \in L\left(\left(z_j^{(m)}\right)^*\right)\right\} <$$

$$\alpha_m(1+\epsilon_m) \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.55}$$

Además, como $\sum_{n=1}^{m} \|\beta_n y_n^*\| \leq \sum_{n=1}^{m} \beta_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$ y $\left\|\left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^*\right\| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \beta_n$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n^*$ es absolutamente convergente y

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n\right) y_m^* = 0.$$

Como X es un espacio de Banach, por el Lema 1.2.11, obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n^*$ es convergente en X. Asimismo, como por construcción tenemos que $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares creciente y acotada superiormente y $\theta \leq \alpha_m \leq 2$ para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces dicha sucesión converge a un número en el intervalo $[\theta, 2]$. Sea $\alpha = \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \sup_{m\in\mathbb{N}} \alpha_m$. Como la sucesión $(\epsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ converge a cero y ρ es continua, tomando límite cuando m tiene a infinito en (3.55), podemos concluir que:

$$\alpha = \rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n^* - w^*\right) = \rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n^* - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\right) w^*\right) =$$

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (y_n^* - w^*)\right) = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (y_n^* - w^*)(x)\right| : x \in A\right\}.$$

En seguida, veremos, por inducción matemática, que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se satisface que:

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n(y_n^*-w^*)\right) < \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\beta_j\alpha_j(1+\epsilon_j)}{\sum_{n=j+1}^{\infty}\beta_n\sum_{n=j}^{\infty}\beta_n}\right). \tag{3.56}$$

Para $k = 1$, notemos que como $w^* \in L(y_j^*) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} L\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)$, entonces de (3.51) se sigue que:

$$\rho(y_1^*-w^*) = \rho\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\right)y_1^*-w^*\right) < \alpha_1(1+\epsilon_1),$$

y, consecuentemente, se tiene que:

$$\rho(\beta_1(y_1^*-w^*)) = \beta_1\rho(y_1^*-w^*) <$$

$$\beta_1\alpha_1(1+\epsilon_1) = \left(\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n\right)\left(\frac{\beta_1\alpha_1(1+\epsilon_1)}{\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n}\right).$$

Ahora, supongamos que la desigualdad (3.56) es válida para algún $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \{1, \ldots, k+1\}$, sea $z_n^* = y_n^* - w^*$. Entonces, tenemos que:

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{k+1}\beta_n(y_n^*-w^*)\right) = \rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n(y_n^*-w^*)+\beta_{k+1}(y_{k+1}^*-w^*)\right) =$$

$$\rho\left(\left(\frac{\beta_{k+1}+\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\right)\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^* + \frac{\beta_{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}z_{k+1}^*\right) =$$

$$\rho\left(\frac{\beta_{k+1}}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right)z_{k+1}^*\right) + \frac{\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^*\right)\right)$$

$$\leq \frac{\beta_{k+1}}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right)z_{k+1}^*\right) + \frac{\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^*\right).$$

Como $w^* \in L(y_j^*) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} L\left(\left(z_j^{(n)}\right)^*\right)$, entonces de (3.51), la desigualdad anterior y la igualdad

$$\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right)z_{k+1}^* =$$

$$\sum_{n=1}^{k}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right) y_{k+1}^* - \sum_{n=1}^{k}\beta_n w^* - \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right) w^* =$$

$$\sum_{n=1}^{k}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right) y_{k+1}^* - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\right) w^* =$$

$$\sum_{n=1}^{k}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right) y_{k+1}^* - w^*,$$

se obtiene que:

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{k+1}\beta_n(y_n^* - w^*)\right) \leq$$

$$\frac{\beta_{k+1}}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right) z_{k+1}^*\right) + \frac{\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^*\right) =$$

$$\frac{\beta_{k+1}}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n y_n^* + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right) y_{k+1}^* - w^*\right) + \frac{\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^*\right)$$

$$< \frac{\beta_{k+1}}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\alpha_{k+1}(1+\epsilon_{k+1}) + \frac{\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n z_n^*\right)$$

$$= \left(\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n\right)\left(\frac{\beta_{k+1}\alpha_{k+1}(1+\epsilon_{k+1})}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n \sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n} + \frac{\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n(y_n^* - w^*)\right)}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\right).$$

Por hipótesis de inducción, podemos concluir que:

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{k+1}\beta_n(y_n^* - w^*)\right) <$$

$$\left(\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n\right)\left(\frac{\beta_{k+1}\alpha_{k+1}(1+\epsilon_{k+1})}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n \sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n} + \frac{\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\beta_n(y_n^* - w^*)\right)}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n}\right) <$$

$$\left(\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n\right)\left(\frac{\beta_{k+1}\alpha_{k+1}(1+\epsilon_{k+1})}{\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n \sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n} + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\beta_j\alpha_j(1+\epsilon_j)}{\sum_{n=j+1}^{\infty}\beta_n \sum_{n=j}^{\infty}\beta_n}\right)\right) =$$

$$\left(\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n\right)\sum_{j=1}^{k+1}\left(\frac{\beta_j\alpha_j(1+\epsilon_j)}{\sum_{n=j+1}^{\infty}\beta_n \sum_{n=j}^{\infty}\beta_n}\right).$$

Por tanto, la desigualdad (3.56) es válida para $k+1$ y, por inducción matemática, podemos concluir que dicha desigualdad es válida para cualquier $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, como $\alpha_k \leq \alpha$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \epsilon_n}{\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k\right)} < 1-\theta$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{k} \beta_n (y_n^* - w^*)(x) \right| : x \in A \right\} = \rho \left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n (y_n^* - w^*) \right) <$$

$$\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right) \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\beta_j \alpha_j (1+\epsilon_j)}{\sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n \sum_{n=j}^{\infty} \beta_n} \right) \leq$$

$$\alpha \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right) \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\beta_j (1+\epsilon_j)}{\sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n \sum_{n=j}^{\infty} \beta_n} \right) <$$

$$\alpha \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right) \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\beta_j}{\sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n \sum_{n=j}^{\infty} \beta_n} \right) + (1-\theta) \right) =$$

$$\alpha \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right) \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_n} - \frac{1}{\sum_{n=j}^{\infty} \beta_n} \right) + (1-\theta) \right) =$$

$$\alpha \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right) \left(\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n} - \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n} + (1-\theta) \right) =$$

$$\alpha \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right) \left(\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n} - 1 + (1-\theta) \right) =$$

$$\alpha \left(1 - \theta \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \right).$$

Por tanto, $\alpha \in [\theta, 2]$ y $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ satisfacen las condiciones i), ii) y iii) del lema. □

El siguiente resultado es una sencilla consecuencia del Teorema de Eberlein-Šmulian:

Lema 3.4.3. *Sea A un subconjunto de un espacio normado X. Entonces, A es débilmente compacto si y sólo si $A \cap Y$ es débilmente compacto para cualquier subespacio cerrado y separable Y de X.*

Demostración. Sean X un espacio normado y A un subconjunto de X.
Primero, supongamos que A es débilmente compacto. Sea Y un subespacio ce-

rrado y separable de X. Notemos que X con la topología débil es un espacio de Hausdorff ya que si $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$, por el Corolario 1.5.7 sabemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x-y) \neq 0$ o, equivalentemente, $x^*(x) \neq x^*(y)$. Como $x^*(x)$ y $x^*(y)$ son elementos distintos del campo escalar $\mathbb{K}$, entonces es sencillo comprobar que existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{K}$ tales que $x^*(x) \in U$, $x^*(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Así, se obtiene que $(x^*)^{-1}(U)$ y $(x^*)^{-1}(V)$ son débilmente abiertos, por ser elementos de la subbase estándar de la topología débil de X, y además $x \in (x^*)^{-1}(U)$, $y \in (x^*)^{-1}(V)$ y $(x^*)^{-1}(U) \cap (x^*)^{-1}(V) = (x^*)^{-1}(U \cap V) = \emptyset$. En consecuencia, como X con la topología débil es un espacio de Hausdorff y A es débilmente compacto, por el Teorema 2.3.13, sabemos que A es débilmente cerrado. Más aún, como Y es un subespacio cerrado de X, del Corolario 2.2.14 se obtiene que Y es débilmente cerrado. De lo anterior se sigue que A es un subconjunto débilmente compacto de X que contiene al conjunto débilmente cerrado $A \cap Y$, por lo que $A \cap Y$ es débilmente compacto.
Conversamente, supongamos que $A \cap Y$ es débilmente compacto para cualquier subespacio cerrado y separable Y de X. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A y $Z = \overline{\langle \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle}$. Como $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable de X, por el Lema 3.1.2 sabemos que Z es un subespacio separable de X. Luego, por hipótesis sabemos que $A \cap Z$ es débilmente compacto y claramente $a_n \in A \cap Z \ \forall n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, por el Teorema de Eberlein-Šmulian (Teorema 2.3.25), obtenemos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión, digamos $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, que converge débilmente a un elemento de $A \cap Z \subseteq A$. Por tanto, toda sucesión de elementos de A contiene una subsucesión que converge débilmente a un elemento de A. Nuevamente por el Teorema de Eberlein-Šmulian, de lo anterior se obtiene que A es débilmente compacto. $\square$

En seguida, enunciaremos un teorema que nos asegura la existencia de cierto tipo de funcionales lineales y acotadas que se relacionan con un subconjunto A no vacío, separable y débilmente cerrado de la bola unitaria cerrada de un espacio de Banach real siempre y cuando dicho conjunto A no sea débilmente compacto.

Teorema 3.4.4. *Sean X un espacio de Banach real y A un subconjunto no vacío, separable y débilmente cerrado de X tal que $\|x\| \leq 1 \ \forall x \in A$. Si A no es débilmente compacto, entonces existen $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ tales que $\|x_n^*\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) = 0$ para cada $x \in A$ y $\sup\limits_{x\in A} |x^*(x)| \geq \theta$ para cualquier $x^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$.*

Demostración. Sean X y A como en el enunciado del lema. Supongamos que A no es débilmente compacto. Sea Y el subespacio de X dado por $Y = \overline{\langle A \rangle}$. Como $\|x\| \leq 1$ $\forall x \in A$, entonces podemos definir la función $\| \cdot \|_{A} : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\|y^*\|_{A} = \sup\limits_{x \in A} |y^*(x)|$ para cada $y^* \in Y^*$. Veamos que $\| \cdot \|_{A}$ define una norma sobre Y^*. Como $|y^*(x)| \geq 0$ para cualesquiera $y^* \in Y^*$ y $x \in A$, entonces $\|y^*\|_{A} \geq 0$ para cada $y^* \in Y^*$. Además, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $y^* \in Y^*$, claramente tenemos que $\|\alpha y^*\|_{A} = \sup\limits_{x \in A} |\alpha y^*(x)| = \sup\limits_{x \in A} |\alpha||y^*(x)| = |\alpha| \sup\limits_{x \in A} |y^*(x)| = |\alpha| \|y^*\|_{A}$. Asimismo, como:

$$|(y_1^* + y_2^*)(x)| \leq |y_1^*(x)| + |y_2^*(x)| \leq \|y_1^*\|_{A} + \|y_2^*\|_{A},$$

para cualesquiera $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ y $x \in A$, entonces $\|y_1^* + y_2^*\|_{A} \leq \|y_1^*\|_{A} + \|y_2^*\|_{A}$ para cualesquiera $y_1^*, y_2^* \in Y^*$. Más aún, si $y^* = 0$, entonces es claro que $\|y^*\|_{A} = \sup\limits_{x \in A} |y^*(x)| = 0$. Por otra parte, si $\|y^*\|_{A} = 0$, entonces $|y^*(x)| = 0$ para cada $x \in A$ y, en consecuencia, $y^*(x) = 0$ para cada $x \in A$. Luego, por la linealidad de y^*, obtenemos que $y^*(u) = 0$ para cualquier $u \in \langle A \rangle$. De lo anterior y de la continuidad de y^*, se sigue que si $y \in Y$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\langle A \rangle$ tal que $u_n \to y$, entonces $y^*(u_n) \to y^*(y)$ y $y^*(u_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $y^*(y) = 0$. Consecuentemente, se tiene que $y^*(y) = 0$ $\forall y \in Y$ y, por consiguiente, $y^* = 0$. Así, podemos concluir que $y^* = 0$ si y sólo si $\|y^*\|_{A} = 0$ y, por tanto, $\| \cdot \|_{A}$ define una norma sobre Y^*. En lo que resta de esta prueba, denotaremos por Z al espacio normado $(Y^*, \| \cdot \|_{A})$. Sea $f : A \longrightarrow Z^*$ la función tal que, para cada $x \in A$, $f(x)$ es la funcional lineal y acotada dada por $(f(x))(y^*) = y^*(x)$ $\forall y^* \in Z$. Notemos que f está bien definida ya que si $x \in A$, entonces tenemos que $|(f(x))(y^*)| = |y^*(x)| \leq \|y^*\|_{A}$ $\forall y^* \in Z$, de donde se sigue que $f(x) \in Z^*$ y $\|f(x)\|_{Z^*} \leq 1$ para cada $x \in A$, donde $\| \cdot \|_{Z^*}$ denota la norma usual en el espacio dual Z^*. Además, tenemos que f es inyectiva. En efecto, si $x, y \in A \subseteq Y$ son tales que $x \neq y$, por el Corolario 1.5.7 sabemos que existe $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(x-y) \neq 0$ o, equivalentemente, $(f(x))(y^*) = y^*(x) \neq y^*(y) = (f(y))(y^*)$ y, por tanto, $f(x) \neq f(y)$. Luego, como f es inyectiva, entonces es claro que $f : A \longrightarrow f(A)$ es biyectiva. Veamos que $f : A \longrightarrow f(A)$ es un homeomorfismo si consideramos la topología inducida por la topología débil de X en A y la topología inducida por la topología débil* de Z^* en $f(A)$. Sean $\tau_{w(A)}$ la topología inducida por la topología débil de X en A y $\tau_{w*(f(A))}$ la topología inducida por la topología débil* de Z^* en $f(A)$. Sea $U \in \tau_{w*(f(A))}$. Como $U \in \tau_{w*(f(A))}$, sabemos que existe $V \in \sigma(Z^*, Z)$ tal que $U = f(A) \cap V$, por lo que $f^{-1}(U) = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(V) =$

$A \cap f^{-1}(V)$. Sea $x \in f^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(V)$. Entonces, $x \in A$ y $f(x) \in V$ y, como $V \in \sigma(Z^*, Z)$, por el Lema 2.3.5 obtenemos que existe un subconjunto finito no vacío E de Z tal que:

$$B(f(x), E) = \{z^* \in Z^* : |(z^* - f(x))(y^*) < 1 \ \forall y^* \in E\} \subseteq V.$$

Supongamos que $E = \{g_1^*, \ldots, g_m^*\}$, con $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.5.5, se tiene que, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe $h_j^* \in X^*$ tal que h_j^* es una extensión de g_j^* y $\|h_j^*\| = \|g_j^*\|$. Sean $F = \{h_j^* : j \in \{1, \ldots, m\}\}$ y

$$B(x, F) = \{w \in X : |x^*(w - x)| < 1 \ \forall x^* \in F\}.$$

Como F es un subconjunto finito no vacío de X^*, por el Lema 2.2.5 sabemos que $B(x, F) \in \sigma(X, X^*)$ y, en consecuencia $A \cap B(x, F) \in \tau_{w(A)}$. Además, es claro que $x \in A \cap B(x, F)$ y si $w \in A \cap B(x, F)$, entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que:

$$|(f(w) - f(x))(g_j^*)| = |g_j^*(w) - g_j^*(x)| = |h_j^*(w) - h_j^*(x)| = |h_j^*(w - x)| < 1.$$

De lo anterior, se sigue que $f(w) \in B(f(x), E) \subseteq V$ y, por consiguiente, $w \in A \cap f^{-1}(V)$. Así, se obtiene que $x \in A \cap B(x, F) \subseteq A \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U)$, con $A \cap B(x, F) \in \tau_{w(A)}$. Por tanto, $f^{-1}(U) \in \tau_{w(A)}$ y, consecuentemente, f es continua. Ahora, sea $W \in \tau_{w(A)}$ y sea $B \in \sigma(X, X^*)$ tal que $W = A \cap B$. Sea $z^* \in f(W) = f(A \cap B)$. Entonces, existe $a \in A \cap B = W$ tal que $z^* = f(a)$. Como $a \in B$ y $B \in \sigma(X, X^*)$, por el Lema 2.2.5 sabemos que existe un subconjunto finito no vacío G de X^*, digamos $G = \{v_1^*, \ldots, v_l^*\}$, con $l \in \mathbb{N}$, tal que

$$B(a, G) = \{w \in X : |v^*(w - a)| < 1 \ \forall v^* \in G\} \subseteq B.$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, sea $w_j^* = v_j^*|_Y \in Z$. Sean $H = \{w_j^* : j \in \{1, \ldots l\}\}$ y $B(f(a), H) = \{w^* \in Z^* : |(w^* - f(a))(y^*)| < 1 \ \forall y^* \in H\}$. Como H es un subconjunto finito no vacío de Z, por el Lema 2.3.5, se tiene que $B(f(a), H)$ es débil*-abierto en Z^* y, en consecuencia, $f(A) \cap B(f(a), H) \in \tau_{w*(f(A))}$. Más aún, es claro que $z^* = f(a) \in f(A) \cap B(f(a), H)$ y si $f(w) \in f(A) \cap B(f(a), H)$, con $w \in A$, entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, tenemos que:

$$|v_j^*(w - a)| = |v_j^*(w) - v_j^*(a)| = |w_j^*(w) - w_j^*(a)| =$$

$$|(f(w))(w_j^*) - (f(a))(w_j^*)| = |(f(w) - f(a))(w_j^*)| < 1.$$

Así, obtenemos que $w \in B(a, G) \subseteq B$ y, por tanto, $f(w) \in f(A \cap B) = f(W)$. Consecuentemente, se tiene que $z^* = f(a) \in f(A) \cap B(f(a), H) \subseteq f(W)$, con $f(A) \cap B(f(a), H) \in \tau_{w*(f(A))}$ y, por consiguiente, $f(W) \in \tau_{w*(f(A))}$. De lo anterior, podemos concluir que f^{-1} es continua y, por tanto, $f : A \longrightarrow f(A)$ es un homeomorfismo considerando la topología $\tau_{w(A)}$ sobre A y la topología $\tau_{w*(f(A))}$ sobre $f(A)$. Ahora, como A no es débilmente compacto, entonces $f(A)$ no es compacto con respecto a la topología $\tau_{w*(f(A))}$, pues A no es compacto con respecto a la topología $\tau_{w(A)}$. Luego, como $f(A)$ no es compacto respecto a la topología $\tau_{w*(f(A))}$, entonces $f(A)$ no es débil*-compacto. Además, como $\|f(x)\|_{Z^*} \leq 1$ para cada $x \in A$, entonces $f(A) \subseteq B_{Z^*}[0,1]$, donde $B_{Z^*}[0,1]$ es la bola unitaria cerrada en Z^*. Así, como el Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 2.3.15) nos asegura que $B_{Z^*}[0,1]$ es débil*-compacta, $f(A) \subseteq B_{Z^*}[0,1]$ y $f(A)$ no es débil*-compacto, entonces podemos concluir que $f(A)$ no es débil*-cerrado. Sea $z_0^* \in \overline{f(A)}^{w*} \setminus f(A)$, donde $\overline{f(A)}^{w*}$ denota la cerradura débil* de $f(A)$. Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $z_0^*(y^*) = y^*(y)$ $\forall y^* \in Z$. Observemos que $y \notin A$ pues, en caso contrario, se tendría que $z_0^*(y^*) = y^*(y) = (f(y))(y^*)$ $\forall y^* \in Z$ y, por tanto, $z_0^* = f(y) \in f(A)$, contradiciendo la elección de z_0^*. Además, si $D \in \sigma(X, X^*)$ y $y \in D$, por el Lema 2.2.5, obtenemos que existe un subconjunto finito no vacío I de X^*, digamos $I = \{a_1^*, \ldots, a_r^*\}$, con $r \in \mathbb{N}$, tal que

$$B(y, I) = \{w \in X : |x^*(w - y)| < 1 \ \forall x^* \in I\} \subseteq D.$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, sea $b_j^* = a_j^*|_Y \in Z$. Sean $J = \{b_j^* : j \in \{1, \ldots, m\}\}$ y $B(z_0^*, J) = \{z^* \in Z^* : |(z^* - z_0^*)(y^*)| < 1 \ \forall y^* \in J\}$. Como J es un subconjunto finito no vacío de Z, por el Lema 2.3.5 tenemos que $B(z_0^*, J) \in \sigma(Z^*, Z)$ y claramente $z_0^* \in B(z_0^*, J)$. Luego, como $z_0^* \in \overline{f(A)}^{w*}$, entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) \in f(A) \cap B(z_0^*, J)$. Así, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, se obtiene que:

$$|a_j^*(a - y)| = |a_j^*(a) - a_j^*(y)| = |b_j^*(a) - b_j^*(y)| =$$

$$|(f(a))(b_j^*) - z_0^*(b_j^*)| = |(f(a) - z_0^*)(b_j^*)| < 1.$$

De lo anterior, se sigue que $a \in B(y, I) \subseteq D$ y, por consiguiente, $a \in A \cap D$. En consecuencia, tenemos que $y \in \overline{A}^w$ y $y \notin A$, lo cual contradice el hecho de que A es débilmente cerrado. Por tanto, no existe $y \in Y$ tal que $z_0^*(y^*) = y^*(y)$ $\forall y^* \in Z$. En particular, obtenemos que $z_0^* \neq 0$, pues, en caso contrario, se tendría que $z_0^*(y^*) = 0 = y^*(0)$ $\forall y^* \in Z$, con $0 \in Y$. Consecuentemente, tenemos que $\|z_0^*\|_{Z^*} > 0$. Por otra parte, notemos que si $y^* \in Y^*$ es tal que $\|y^*\| \leq 1$, entonces $\|y^*\|_{A} \leq 1$ pues $|y^*(x)| \leq \|y^*\|\|x\| \leq 1$ para cada $x \in A$. En consecuencia, si $y^* \in Y^*$ y $y^* \neq 0$, entonces $\frac{1}{\|y^*\|}y^*$ es una funcional lineal y acotada con norma igual a 1 en Y^* y, por consiguiente:

$$\left|\frac{1}{\|y^*\|}z_0^*\left(y^*\right)\right| = \left|z_0^*\left(\frac{1}{\|y^*\|}y^*\right)\right| \leq \|z_0^*\|_{Z^*}\left\|\frac{1}{\|y^*\|}y^*\right\|_{A} \leq \|z_0^*\|_{Z^*}.$$

De lo anterior, podemos concluir que $|z_0^*(y^*)| \leq \|z_0^*\|_{Z^*}\|y^*\|$ si $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ y como $z_0^*(0) = 0$, es claro que la desigualdad anterior también es válida para $y^* = 0$. De esta manera, tenemos que $|z_0^*(y^*)| \leq \|z_0^*\|_{Z^*}\|y^*\|$ $\forall y^* \in Y^*$ y, por tanto, $z_0^* \in Y^{**}$ y $\|z_0^*\|_{Y^{**}} \leq \|z_0^*\|_{Z^*}$, donde $\|\cdot\|_{Y^{**}}$ denota la norma usual en el espacio doble dual Y^{**}. Sea $C_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ el mapeo canónico de Y en Y^{**}. Como X es un espacio de Banach y $Y = \overline{\langle A\rangle}$ es un subespacio cerrado de X, por el Teorema 1.2.8 sabemos que Y es un espacio de Banach. Luego, como Y es completo, de manera análoga a como se probó en la demostración del Teorema 3.1.5 que el rango del mapeo canónico de un espacio de Banach en su espacio doble dual es cerrado en el espacio doble dual de dicho espacio, se puede ver que $\mathcal{R}(C_Y)$ es cerrado en Y^{**}, por lo que podemos considerar el espacio cociente $Y^{**}/\mathcal{R}(C_Y)$. Ahora, como no existe $y \in Y$ tal que $z_0^*(y^*) = y^*(y) = ((C_Y)(y))(y^*)$ $\forall y^* \in Y^*$, entonces $z_0^* \in Y^{**} \setminus \mathcal{R}(C_Y)$. Consecuentemente, se tiene que $z_0^* + \mathcal{R}(C_Y) \neq 0 + \mathcal{R}(C_Y)$ y, por consiguiente, $\|z_0^* + \mathcal{R}(C_Y)\| > 0$. Sean $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de A y $\delta = \frac{\|z_0^*+\mathcal{R}(C_Y)\|}{2}$, de modo que $0 < \delta < \|z_0^* + \mathcal{R}(C_Y)\|$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $c_1 = \ldots = c_n = 0$ y $c_{n+1} = \delta$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Si $\alpha_{n+1} = 0$, entonces es claro que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k c_k\right| = |\alpha_{n+1}c_{n+1}| = |\alpha_{n+1}|\delta = 0 \leq$$

$$\frac{\delta}{\|z_0^* + \mathcal{R}(C_Y)\|}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k C_Y(a_k) + \alpha_{n+1}z_0^*\right\|.$$

Por otra parte, si $\alpha_{n+1} \neq 0$, entonces:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k c_k\right| \|z_0^* + \mathcal{R}(C_Y)\| = |\alpha_{n+1}c_{n+1}|\|z_0^* + \mathcal{R}(C_Y)\| = \delta|\alpha_{n+1}|\|z_0^* + \mathcal{R}(C_Y)\| \leq$$

$$\delta|\alpha_{n+1}|\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}}C_{Y}(a_k)+z_0^*\right\| = \delta\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k C_{Y}(a_k)+\alpha_{n+1}z_0^*\right\|$$

De lo anterior, se sigue que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k c_k\right| \leq \frac{\delta}{\|z_0^* + \mathcal{R}(C_{Y})\|}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k C_{Y}(a_k)+\alpha_{n+1}z_0^*\right\|.$$

Luego, por el Teorema de Helly (Teorema 3.1.4), para $\epsilon = \frac{\|z_0^*+\mathcal{R}(C_{Y})\|-\delta}{2\|z_0^*+\mathcal{R}(C_{Y})\|} > 0$, se obtiene que existe $y_n^* \in Y^*$ tal que $z_0^*(y_n^*) = \delta = c_{n+1}$, $y_n^*(a_k) = (C_{Y}(a_k))(y_n^*) = 0 = c_n$ para cada $k \leq n$ y

$$\|y_n^*\| \leq \frac{\delta}{\|z_0^* + \mathcal{R}(C_{Y})\|} + \frac{\|z_0^* + \mathcal{R}(C_{Y})\| - \delta}{2\|z_0^* + \mathcal{R}(C_{Y})\|} =$$

$$\frac{\delta + \|z_0^* + \mathcal{R}(C_{Y})\|}{2\|z_0^* + \mathcal{R}(C_{Y})\|} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Nuevamente por el Teorema 1.5.5 sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n^* \in X^*$ tal que x_n^* es una extensión de y_n^* y $\|x_n^*\| = \|y_n^*\| < 1$. Sean $x \in A$ y $\gamma > 0$. Como $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en A, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - a_{N}\| < \gamma$. Así, si $n \geq N$, se tiene que $x_n^*(a_{N}) = y_n^*(a_{N}) = 0$ y, en consecuencia, obtenemos que:

$$|x_n^*(x)| = |x_n^*(x) - x_n^*(a_{N})| = |x_n^*(x - a_{N})| \leq \|x_n^*\|\|x - a_{N}\| \leq \|x - a_{N}\| < \gamma.$$

De esta manera, podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) = 0$ para cada $x \in A$. Asimismo, si $x^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ y $y^* = x^*|_{Y} \in Y^*$, entonces, por el Lema 1.1.5, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen $M \in \mathbb{N}$ y números reales no negativos $t_1, \dots t_{M}$ tales que $x^* = \sum_{k=1}^{M} t_k x_k^*$ y $\sum_{k=1}^{M} t_k = 1$. Como $x_n^*|_{Y} = y_n^*$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, de lo anterior se sigue que:

$$y^* = x^*|_{Y} = \sum_{k=1}^{M} t_k x_k^*|_{Y} = \sum_{k=1}^{M} t_k y_k^*.$$

Así, se obtiene que:

$$z_0^*(y^*) = z_0^*\left(\sum_{k=1}^{M} t_k y_k^*\right) = \sum_{k=1}^{M} t_k z_0^*(y_k^*) = \delta\left(\sum_{k=1}^{M} t_k\right) = \delta.$$

De la igualdad anterior, podemos concluir que:

$$\delta = z_0^*(y^*) \leq |z_0^*(y^*)| \leq \|z_0^*\|_{Z^*} \|y^*\|_A =$$

$$\|z_0^*\|_{Z^*} \sup_{x\in A} |y^*(x)| = \|z_0^*\|_{Z^*} \sup_{x\in A} |x^*(x)|. \tag{3.57}$$

Sea $\theta = \frac{\delta}{\|z_0^*\|_{Z^*}}$. Como $\|y_1^*\| < 1$, $\|z_0^*\|_{Z^*} > 0$ y $\|z_0^*\|_{Y^{**}} \leq \|z_0^*\|_{Z^*}$, entonces:

$$0 < \delta = z_0^*(y_1^*) \leq |z_0^*(y_1^*)| \leq \|z_0^*\|_{Y^{**}} \|y_1^*\| \leq \|z_0^*\|_{Z^*} \|y_1^*\| < \|z_0^*\|_{Z^*},$$

por lo que $\theta \in (0,1)$. Más aún, de (3.57) se sigue que $\sup_{x\in A} |x^*(x)| \geq \theta$ para cualquier $x^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Consecuentemente, $\theta \in (0,1)$ y la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subseteq X^*$ satisfacen el enunciado del lema. □

Ahora, con base en el Teorema 3.4.4, podemos probar el teorema que enunciaremos a continuación, el cual nos garantiza que si A es un subconjunto no vacío, débilmente cerrado y balanceado de la bola unitaria cerrada de un espacio de Banach real y A no es débilmente compacto, entonces existe una funcional lineal y acotada que no alcanza su supremo en A

Teorema 3.4.5. *Sean X un espacio de Banach real y A un subconjunto no vacío, balanceado y débilmente cerrado de X tal que $\|x\| \leq 1$ $\forall x \in A$. Si A no es débilmente compacto, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que x_c^* no alcanza su supremo en A.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach real y A un subconjunto no vacío, balanceado y débilmente cerrado de X tal que $\|x\| \leq 1$ para cada $x \in A$. Supongamos que A no es débilmente compacto. Por el Lema 3.4.3, obtenemos que existe un subespacio cerrado Y de X tal que Y es separable y $A \cap Y$ no es débilmente compacto. Sea $A_0 = A \cap Y$. Como A_0 no es débilmente compacto, entonces $A_0 \neq \emptyset$. Además, tenemos que A_0 es separable por ser un subconjunto no vacío del subespacio separable Y de X y claramente se satisface que $\|x\| \leq 1$ para cualquier $x \in A_0 \subseteq A$. Más aún, como Y es un subespacio cerrado de X, por el Corolario 2.2.14, sabemos que Y es débilmente cerrado. En consecuencia, como Y y A son débilmente cerrados, se tiene que $A_0 = A \cap Y$ es débilmente cerrado. Así, hemos probado que A_0 es un subconjunto no vacío, separable y débilmente cerrado de X tal que $\|x\| \leq 1$ para cada $x \in A_0$. Como X es un espacio de Banach real y A_0 no es débilmente compacto, de lo anterior y del Teorema 3.4.4, se obtiene que existen $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subseteq X^*$ tales que $\|x_n^*\| \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) = 0$ para cada $x \in A_0$ y $\sup\limits_{x\in A_0} |x^*(x)| \geq \theta$ para cualquier $x^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Ahora, sea $\delta = \frac{\theta^2}{4}$, de modo que $0 < \delta < \frac{\theta^2}{2} < 1$. Sea $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales positivos dada por $\beta_n = \frac{2-\delta}{\delta}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que como $0 < \delta < 1$, entonces es claro que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ converge en $\mathbb{R}$. Además, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\delta}{\delta}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n = \frac{2-\delta}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n = \frac{2^{-1}\delta(2-\delta)}{\delta(1-\frac{\delta}{2})} = \frac{\delta(1-\frac{\delta}{2})}{\delta(1-\frac{\delta}{2})} = 1.$$

Sean $w^* \in L(x_n^*)$ y $y^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Como $w^* \in L(x_n^*)$, por el Lema 3.4.1 sabemos que para cualquier $x \in A_0$ se satisface que:

$$0 = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = \varliminf_{n\to\infty} x_n^*(x) \leq w^*(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 0.$$

De lo anterior, se sigue que $w^*(x) = 0\ \forall x \in A_0$. Luego, como $A_0 \subseteq A$ y $w^*(x) = 0\ \forall x \in A_0$, se tiene que:

$$\sup_{x\in A} |(y^* - w^*)(x)| \geq \sup_{x\in A_0} |(y^* - w^*)(x)| = \sup_{x\in A_0} |y^*(x)| \geq \theta.$$

De esta manera, se obtiene que A es un subconjunto no vacío y balanceado de X tal que $\|x\| \leq 1$ para cada $x \in A$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$, $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ es una sucesión tal que $\|x_n^*\| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in (0,1)$ satisface que $\sup\{|(y^* - w^*)(x)| : x \in A\} \geq \theta$ para cualesquiera $y^* \in co(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ y $w^* \in L(x_n^*)$. En consecuencia, por el Lema 3.4.2, obtenemos que existen $\alpha \in [\theta, 2]$ y una sucesión $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ que cumplen las condiciones i), ii) y iii) de dicho Lema. Sean $v^* \in L(y_n^*)$ y $z^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $z^*(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n(y_n^* - v^*)(x)\ \forall x \in X$. Como v^* es una funcional lineal y y_n^* es una funcional lineal para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces es claro que z^* es una funcional lineal. Asimismo, como el Lema 3.4.1 nos asegura que $\|v^*\| \leq 1$, pues $v^* \in L(y_n^*)$ y $\|y_n^*\| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que:

$$|z^*(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n(y_n^* - v^*)(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \|y_n^* - v^*\| \|x\| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\|y_n^*\| + \|v^*\|)\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n 2\|x\| = 2\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 2\|x\|.$$

Así, podemos concluir que $z^* \in X^*$. Veamos que z^* no alcanza su supremo en A. Sea $a \in A$. Como $v^* \in L(y_n^*)$, por el Lema 3.4.1 sabemos que $\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n^*(a) \leq v^*(a)$. De lo anterior, se obtiene que:

$$\inf_{n\geq 2} y_n^*(a) - v^*(a) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n^*(a) - v^*(a) \leq 0 < \theta^2 - 2\delta.$$

De la desigualdad anterior, obtenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_{k+1}^*(a) - v^*(a) < \theta^2 - 2\delta$. Además, como $\theta \leq \alpha$, tenemos que $y_{k+1}^*(a) - v^*(a) < \theta^2 - 2\delta \leq \alpha\theta - 2\delta$. Luego, como $\|y_n^*\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|v^*\| \leq 1$ y la sucesión $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición iii) del Lema 3.4.2, entonces se tiene que:

$$z^*(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(y_n^* - v^*)(a) =$$

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \beta_n(y_n^* - v^*)(a) + \sum_{n=1}^{k} \beta_n(y_n^* - v^*)(a) + \beta_{k+1}(y_{k+1}^* - v^*)(a) <$$

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \beta_n(y_n^* - v^*)(a) + \sum_{n=1}^{k} \beta_n(y_n^* - v^*)(a) + \beta_{k+1}(\alpha\theta - 2\delta) \leq$$

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \beta_n(\|y_n^*\| + \|v^*\|)\|a\| + \beta_{k+1}(\alpha\theta - 2\delta) + \sup_{x\in A} \left| \sum_{n=1}^{k} \beta_n(y_n^* - v^*)(x) \right| \leq$$

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} 2\beta_n\|a\| + \beta_{k+1}(\alpha\theta - 2\delta) + \sup_{x\in A} \left| \sum_{n=1}^{k} \beta_n(y_n^* - v^*)(x) \right| \leq$$

$$2\sum_{n=k+2}^{\infty} \beta_n + \beta_{k+1}(\alpha\theta - 2\delta) + \sup_{x\in A} \left| \sum_{n=1}^{k} \beta_n(y_n^* - v^*)(x) \right| <$$

$$2\sum_{n=k+2}^{\infty} \beta_n + \beta_{k+1}(\alpha\theta - 2\delta) + \alpha\left(1 - \theta\sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n\right). \tag{3.58}$$

Ahora, como

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2-\delta}{\delta}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2-\delta}{\delta}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n\left(\frac{\delta}{2}\right) =$$

$$\frac{\delta}{2}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2-\delta}{\delta}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n}=\frac{\delta}{2}\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n<\delta\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n,$$

de la desigualdad (3.58) y del hecho de que $0<\theta^2-2\delta\leq\alpha\theta-2\delta$, se sigue que:

$$z^*(a)<\alpha\left(1-\theta\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right)+\beta_{k+1}(\alpha\theta-2\delta)+2\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n<$$

$$\alpha\left(1-\theta\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n\right)+\beta_{k+1}(\alpha\theta-2\delta)+2\delta\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n=$$

$$\alpha+\beta_{k+1}(\alpha\theta-2\delta)-(\alpha\theta-2\delta)\sum_{n=k+1}^{\infty}\beta_n=\alpha-(\alpha\theta-2\delta)\sum_{n=k+2}^{\infty}\beta_n<$$

$$\alpha=\sup_{x\in A}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(y_n^*-v^*)(x)\right|=\sup_{x\in A}|z^*(x)|,$$

donde la igualdad $\alpha=\sup_{x\in A}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(y_n^*-v^*)(x)\right|$ se obtiene de la condición ii) del Lema 3.4.2 que satisface la sucesión $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, tenemos que $z^*(a)<\sup_{x\in A}|z^*(x)|$ para cualquier $a\in A$. Además, como A es balanceado, por el Lema 1.1.3, sabemos que $A=-A$. Consecuentemente, obtenemos que si $a\in A$, entonces $-a\in -A=A$ y, por consiguiente, $z^*(a)<\sup_{x\in A}|z^*(x)|$ y $-z^*(a)=z^*(-a)<\sup_{x\in A}|z^*(x)|$, de donde se sigue que $|z^*(a)|<\sup_{x\in A}|z^*(x)|$. Por tanto, para cualquier $a\in A$ se tiene que:

$$|z^*(a)|<\sup_{x\in A}|z^*(x)|,$$

y, en consecuencia, z_c^* no alcanza su supremo en A. □

Finalmente, como consecuencia del Teorema 3.4.5, podemos enunciar y probar el Teorema de Compacidad débil de James.

Teorema 3.4.6 (Compacidad débil de James)**.** *Sean X un espacio de Banach. Si A es un subconjunto no vacío y débilmente cerrado de X, entonces A es débilmente compacto si y sólo si para cualquier $x^*\in X^*$ se satisface que x_c^* alcanza su supremo en A.*

Demostración. Sean X y A como en el enunciado del teorema.
En primer lugar, supongamos que A es débilmente compacto. Sean $x^*\in X^*$

y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A tal que $\lim_{n\to\infty} |x^*(a_n)| = \sup_{x\in A} |x^*(x)|$. Como A es débilmente compacto, por el Teorema de Eberlein-Šmulian (Teorema 2.3.25), sabemos que existen $a \in A$ y una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, digamos $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, tales que $a_{n_k} \xrightarrow{w} a$. Luego, por el Teorema 2.2.7, de lo anterior obtenemos que $\lim_{k\to\infty} x^*(a_{n_k}) = x^*(a)$ y, por consiguiente, $\lim_{k\to\infty} |x^*(a_{n_k})| = |x^*(a)|$. Además, como $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces tenemos que $a \in A$ satisface la igualdad:

$$\sup_{x\in A} |x^*(a)| = \lim_{k\to\infty} |x^*(a_{n_k})| = |x^*(a)|.$$

Por tanto, x_c^* alcanza su supremo en A.
Conversamente, supongamos que para cualquier $x^* \in X^*$ se cumple que x_c^* alcanza su supremo en A. Comenzaremos por considerar el caso en que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Supongamos pues que X es un espacio de Banach real. Notemos que si U es un subconjunto débilmente abierto de X, entonces tU también es un subconjunto débilmente abierto de X para cualquier $t \neq 0$. En efecto, si $U \in \sigma(X, X^*)$, t es un escalar distinto de cero y $x \in tU$, entonces se tiene que $\frac{1}{t}x \in U$. En consecuencia, por el Lema 2.2.5, sabemos que existe un subconjunto finito no vacío F de X^*, digamos $F = \{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$, con $k \in \mathbb{N}$, tal que:

$$B\left(\frac{1}{t}x, F\right) = \left\{y \in X : \left|x^*\left(y - \frac{1}{t}x\right)\right| < 1 \ \forall x^* \in F\right\} \subseteq U.$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea $B_{|t|}(x, x_j^*) = \{y \in X : \left|x_j^*\,(y - x)\right| < |t|\}$. Observemos que, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos que:

$$B_{|t|}(x, x_j^*) = (x_j^*)^{-1}(B(x_j^*(x), |t|)),$$

donde $B(x_j^*(x), |t|)$ denota la bola abierta en $\mathbb{R}$ con centro $x_j^*(x)$ y radio $|t|$. De lo anterior obtenemos que, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $B_{|t|}(x, x_j^*)$ es un elemento de la subbase estándar de la topología débil de X y, por consiguiente, $B_{|t|}(x, x_j^*) \in \sigma(X, X^*)\ \forall j \in \{1, \ldots, k\}$. Así, se obtiene que $\bigcap_{j=1}^{k} B_{|t|}(x, x_j^*)$ es débilmente abierto y si $y \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{|t|}(x, x_j^*)$, entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que:

$$\left| x_j^* \left(\frac{1}{t} y - \frac{1}{t} x \right) \right| = \left| \frac{1}{t} x_j^* \left(y - x \right) \right| = \left| \frac{1}{t} \right| |x_j^*(y-x)| < \frac{1}{|t|} |t| = 1.$$

De esta manera, podemos concluir que $\frac{1}{t} y \in B\left(\frac{1}{t}x, F\right) \subseteq U$ y, por tanto, $y \in tU$ si $y \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{|t|}(x, x_j^*)$. Como claramente se tiene que $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{|t|}(x, x_j^*)$, entonces tenemos que:

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{|t|}(x, x_j^*) \subseteq tU,$$

con $\bigcap_{j=1}^{k} B_{|t|}(x, x_j^*)$ débilmente abierto. Por tanto, si $U \in \sigma(X, X^*)$ y t es cualquier escalar distinto de cero, entonces $tU \in \sigma(X, X^*)$. Por otra parte, notemos que si $x^* \in X^*$, entonces, por hipótesis, sabemos que existe $a \in A$ tal que $\sup_{x \in A} |x^*(x)| = |x^*(a)| < \infty$. En consecuencia, tenemos que $x^*(A)$ es un subconjunto acotado de escalares para cada $x^* \in X^*$ de donde se sigue, por el Corolario 2.2.11, que A es acotado. Sean $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para cada $x \in A$ y $A_0 = \frac{1}{M} A$. Es claro que A_0 es un subconjunto no vacío de X y que $\|z\| \leq 1$ para cada $z \in A_0$. Además, tenemos que A_0 es débilmente cerrado, ya que si $\overline{A}^w$ y $\overline{A_0}^w$ denotan la cerradura débil de A y la cerradura débil de A_0, respectivamente, y $x \in \overline{A_0}^w$, entonces para cualquier subconjunto débilmente abierto V de X tal que $Mx \in V$, se tiene que $x \in \frac{1}{M} V$ y $\frac{1}{M} V \in \sigma(X, X^*)$. Luego, como $x \in \overline{A_0}^w$, se obtiene que existe $y \in \frac{1}{M} V \cap A_0 = \frac{1}{M} V \cap \frac{1}{M} A$, de donde claramente se sigue que $My \in V \cap A$. Así, obtenemos que $Mx \in \overline{A}^w = A$ y, por tanto, $x \in A_0$ Consecuentemente, se tiene que $\overline{A_0}^w \subseteq A_0$ y, por consiguiente, A_0 es débilmente cerrado. Ahora, para cada $x^* \in X^*$ sean $\alpha_{x^*} = \sup_{x \in A_0} |x^*(x)|$ y $D_{x^*} = \{y \in X : |x^*(y)| \leq \alpha_{x^*}\} = (x^*)^{-1}(B[0, \alpha_{x^*}])$, donde $B[0, \alpha_{x^*}]$ denota la bola cerrada en $\mathbb{R}$ y radio α_{x^*}. Sea $D = \bigcap_{x^* \in X^*} D_{x^*}$. Como cada $x^* \in X^*$ es continua con respecto a la topología débil de X y $B[0, \alpha_{x^*}]$ es cerrada en $\mathbb{R}$ para cada $x^* \in X^*$, entonces D_{x^*} es débilmente cerrado para cada $x^* \in X^*$, de donde se obtiene que D es débilmente cerrado. Además, es claro que $A_0 \subseteq D_{x^*}$ para cada $x^* \in X^*$, por lo que $A_0 \subseteq D$ y, en consecuencia, D es no vacío. Más aún, tenemos que D_{x^*} es balanceado para cada $x^* \in X^*$, ya que si $x^* \in X^*$ y $y \in \alpha D_{x^*}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, entonces existe $z \in D_{x^*}$ tal que $y = \alpha z$ y, por tanto:

$$|x^*(y)| = |x^*(\alpha z)| = |\alpha x^*(z)| = |\alpha||x^*(z)| \leq |x^*(z)| \leq \alpha_{x^*}.$$

De lo anterior, se obtiene que $\alpha D_{x^*} \subseteq D_{x^*}$ y, consecuentemente, D_{x^*} es balanceado para cada $x^* \in X^*$. Luego, como D_{x^*} es balanceado para cada $x^* \in X^*$, entonces el Lema 1.1.3 nos permite concluir que D es balanceado. Asimismo, como $\|z\| \leq 1$ para cualquier $z \in A_0$, entonces, para cada $x^* \in X^*$ se tiene que:

$$\alpha_{x^*} = \sup_{x \in A_0} |x^*(x)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x^*(x)| = \|x^*\|. \tag{3.59}$$

Ahora, si existiera $y \in D$ tal que $\|y\| > 1$, del Corolario 1.5.7 se obtendría que:

$$\|y\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ x^* \neq 0}} \frac{|x^*(y)|}{\|x^*\|} > 1,$$

y, por tanto, existiría $x_0^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $\frac{|x_0^*(y)|}{\|x_0^*\|} > 1$. Como $y \in D$, de la desigualdad (3.59) y la desigualdad anterior, se seguiría que:

$$\|x_0^*\| < |x_0^*(y)| \leq \alpha_{x_0^*} \leq \|x_0^*\|,$$

lo cual claramente es una contradicción. Por tanto, si $y \in D$, entonces $\|y\| \leq 1$. Veamos que toda funcional lineal y acotada en el espacio dual X^* alcanza su supremo en D. Sea $y^* \in X^*$. Por hipótesis, sabemos que existe $a \in A$ tal que $|y^*(a)| = \sup_{x \in A} |y^*(x)|$. Sea $u = \frac{1}{M} a \in A_0 \subseteq D$. Entonces, por la linealidad de y^*, tenemos que:

$$|y^*(u)| = \frac{1}{M}|y^*(a)| = \frac{1}{M} \sup_{x \in A} |y^*(x)| = \sup_{x \in A} \frac{1}{M}|y^*(x)| =$$

$$\sup_{x \in A} \left| y^* \left(\frac{1}{M} x \right) \right| = \sup_{z \in A_0} |y^*(z)| = \alpha_{y^*}.$$

Ahora, como $A_0 \subseteq D$, se tiene que $|y^*(u)| = \sup_{z \in A_0} |y^*(z)| \leq \sup_{y \in D} |y^*(y)|$. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en D tal que $\lim_{n \to \infty} |y^*(y_n)| = \sup_{y \in D} |y^*(y)|$. Como $y_n \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $|y^*(y_n)| \leq \alpha_{y^*} = |y^*(u)|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que:

$$\sup_{y \in D} |y^*(y)| = \lim_{n \to \infty} |y^*(y_n)| \leq |y^*(u)|.$$

Así, obtenemos que $u \in D$ satisface la igualdad $|y^*(u)| = \sup_{y \in D} |y^*(y)|$ y, en consecuencia, y_c^* alcanza su supremo en D. Por tanto, D es un subconjunto no vacío, débilmente cerrado y balanceado de X tal que $\|y\| \leq 1$ para cada $y \in D$ y para cualquier $y^* \in X^*$ se cumple que y_c^* alcanza su supremo en D. Luego, por el Teorema 3.4.5, se obtiene que D es débilmente compacto. Además, como $A_0 \subseteq D$ y A_0 es débilmente cerrado, de lo anterior se sigue que A_0 es débilmente compacto. En consecuencia, si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \sigma(X, X^*)$ es una cubierta débilmente abierta de A, entonces claramente se tiene que $\left\{\frac{1}{M} U_i\right\}_{i \in I}$ es una cubierta débilmente abierta de A_0. De la compacidad débil de A_0 obtenemos que existe un subconjunto finito J de I tal que $\left\{\frac{1}{M} U_j\right\}_{j \in J}$ es una cubierta débilmente abierta de A_0 y, por consiguiente, $\{U_j\}_{j \in J}$ es una cubierta débilmente abierta de A. Por tanto, A es débilmente compacto.

Por otra parte, si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, entonces consideramos el espacio de Banach real X_r que se obtiene al restringir el producto de vectores por escalares a $\mathbb{R} \times X$. Notemos que la topología débil de X y la topología débil de X_r coinciden. En efecto, ya que si $y^* \in (X_r)^*$, por el Lema 1.3.22 sabemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $Re(x^*) = y^*$. Como x^* es continua con respecto a la topología $\sigma(X, X^*)$ y $|y^*(x)| = |Re(x^*)(x)| \leq |x^*(x)|$ para cualquier $x \in X$, entonces es sencillo ver que y^* es continua con respecto a la topología $\sigma(X, X^*)$. Por tanto, para cualquier $y^* \in (X_r)^*$ se tiene que y^* es continua con respecto a la topología débil de X y, por el Lema 2.2.1, podemos concluir que $\sigma(X_r, (X_r)^*) \subseteq \sigma(X, X^*)$. Además, si $z^* \in X^*$, nuevamente por el Lema 1.3.22, tenemos que $Re(z^*) \in (X_r)^*$. Más aún, si $v^* : X_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por $v^*(x) = Re(z^*)(ix)\ \forall x \in X$, entonces es claro que v^* es lineal y $|v^*(x)| = |Re(z^*)(ix)| \leq |z^*(ix)| \leq \|z^*\| \|ix\| = \|z^*\| \|x\|$ para cualquier $x \in X$, por lo que $v^* \in (X_r)^*$. Luego, como el Lema 1.3.22 nos asegura que $z^*(x) = Re(z^*)(x) - iRe(z^*)(ix) = Re(z^*)(x) - iv^*(x)\ \forall x \in X$ y $Re(z^*)$ y v^* son continuas con respecto a la topología $\sigma(X_r, (X_r)^*)$, es sencillo comprobar que z^* es continua con respecto a la topología $\sigma(X_r, (X_r)^*)$. Así, tenemos que para cualquier $z^* \in X^*$ se cumple que z^* es continua con respecto a la topología débil de X_r de donde se obtiene, por el Lema 2.2.1, que $\sigma(X, X^*) \subseteq \sigma(X_r, (X_r)^*)$. Ahora, como A es débilmente cerrado en X, entonces A también es débilmente cerrado en X_r. Siguiendo con la notación introducida anteriormente para los conjuntos A_0 y D, de manera análoga a como se hizo en la prueba del teorema para el caso de un espacio de Banach real, se puede ver que A_0 es débilmente cerrado en X_r, $A_0 \subseteq D$, D es un subconjunto no vacío, débilmente cerrado y balanceado de X_r tal que $\|y\| \leq 1$ para cada $y \in D$ y que para cualquier $y^* \in X^*$ existe $u \in D$ tal que $|y^*(u)| = \sup_{y \in D} |y^*(y)|$. Sea $u^* \in (X_r)^*$. Por el Lema 1.3.22, sabemos que existe $w^* \in X^*$ tal que $Re(w^*) = u^*$. Sea $v \in D$ tal que $|w^*(v)| = \sup_{y \in D} |w^*(y)|$. Análogamente a como se hizo en la prueba del inciso c) del Lema 1.3.22, podemos ver que existe $\alpha_v \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha_v| = 1$ y $w^*(\alpha_v v) = |w^*(v)| = \sup_{y \in D} |w^*(y)|$. Observemos que como D es balanceado y $|\alpha_v| = 1$, entonces $\alpha_v v \in \alpha_v D \subseteq D$. Más aún, como $|Re(w^*)(x)| \leq |w^*(x)|$ $\forall x \in X$ y $w^*(\alpha_v v) = |w^*(v)|$ es un número real no negativo, entonces se tiene que:

$$\sup_{y \in D} |u^*(y)| = \sup_{y \in D} |Re(w^*)(y)| \leq \sup_{y \in D} |w^*(y)| = |w^*(v)| =$$

$$w^*(\alpha_v v) = |Re(w^*)(\alpha_v v)| = |u^*(\alpha_v v)| \leq \sup_{y \in D} |u^*(y)|.$$

De lo anterior se obtiene que para cada $u^* \in (X_r)^*$ existe $w \in D$ tal que $|u^*(w)| = \sup_{y \in D} |u^*(y)|$. Por tanto, D es un subconjunto no vacío. débilmente cerrado y balanceado de X_r tal que $\|y\| \leq 1$ para cualquier $y \in D$ y para cualquier $u^* \in (X_r)^*$ se satisface que u_c^* alcanza su supremo en D. Por el Teorema 3.4.5, obtenemos que D es débilmente compacto en X_r y, en consecuencia, D es débilmente compacto en X. A partir de lo anterior, para concluir que A es débilmente compacto podemos proceder de manera análoga a como se hizo en la prueba del teorema para el caso de un espacio de Banach real. $\square$

Es importante notar que el Teorema de compacidad débil de James es, en efecto, una versión más fuerte del Teorema de James presentado en la sección 3.3. Para ver lo anterior, observemos que si X es un espacio normado, entonces el Teorema 2.2.13 nos asegura que la bola unitaria cerrada en X es un subconjunto débilmente cerrado de X, ya que la bola unitaria cerrada en X es un subconjunto convexo y cerrado en X. Así, aplicando el Teorema de compacidad débil de James a la bola unitaria cerrada de un espacio de Banach y el Teorema 3.2.2, obtenemos la caracterización de reflexividad para un espacio de Banach enunciada en el Teorema de James.

Bibliografía

[1] Béla Bollobás. *Linear Analysis: An Introductory Course.* Cambridge University Press, 1999.

[2] Stefan Cobzas. Antiproximinal sets in Banach spaces. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 40:43–52, 1999.

[3] Robert C. James. Reflexivity and the supremum of linear functionals. *Annals of Mathematics*, 66:159–169, 1957.

[4] Robert C. James. Characterizations of reflexivity. *Studia Matehematica*, 23:205–216, 1964.

[5] Robert C. James. Weak compactness and reflexivity. *Israel Journal of Mathematics*, 2:101–119, 1964.

[6] Robert C. James. Weakly compact sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 113:129–140, 1964.

[7] Robert C. James. Reflexivity and the sup of linear functionals. *Israel Journal of Mathematics*, 13:289–300, 1972.

[8] Victor Klee. Some characterizations of reflexivity. *Revista de Ciencias (Lima)*, 52:15–23, 1950.

[9] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[10] Stanislaw Mazur. Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p). *Studia Mathematica*, 4:128–133, 1933.

[11] Robert E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, 1998.

[12] James R. Munkres. *Topología.* Pearson Educación, 2002.

[13] John D. Pryce. Weak compactness in locally convex spaces. *Proceedings of American Mathematical Society*, 17:148–155, 1966.

[14] Stephen Simons. Maximax, minimax, and antimax theorems and a result of R.C. James. *Pacific Journal of Mathematics*, 40:709–718, 1972.

[15] Bernardo Cascales, Jaime Orihuela y Antonio Pérez. One side James' compactness theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 445:1267–1283, 2015.

[16] Angus E. Taylor y David C. Lay. *Intoduction to Functional Analysis*. Robert E. Krieger Publishing Company, 1986.

[17] Leonid V. Kantorovich y Gleb P. Akilov. *Functional Analysis*. Pergamon Press, 1982.

[18] Bernardo Cascales, Ondřej F.K. Kalenda y Jiří Spurný. A quantitative vesrion of James' weak compactness theorem. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 55:369–386, 2012.

[19] Jaime Orihuela y Manuel Ruiz Galán. A coercive James' weak compactness theorem and nonlinear variational problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75:598–611, 2012.

[20] Mario D. Acosta, Julio Becerra Guerrero y Manuel Ruiz Galán. James type results for polynomials and symmetric linear forms. *Arkiv för Matematik*, 42:1–11, 2004.

[21] Daniel Azagra y Robert Deville. James' theorem fails for starlike bodies. *Journal of Functional Analysis*, 180:328–346, 2001.