



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A LA ACCIÓN EFECTIVA DEL MODELO  
SIGMA ASOCIADO A LA CUERDA BOSÓNICA A UN LAZO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:  
RODOLFO ABRAHAM SÁNCHEZ ISIDRO

DIRECTOR DE TESIS:  
JOSÉ ANTONIO RAFAEL GARCÍA ZENTENO

Ciudad Universitaria, CD. MX.

2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Introducción a la Acción Efectiva del Modelo Sigma Asociado a  
la Cuerda Bosónica a un Lazo**

por

Rodolfo Abraham Sánchez Isidro

Tesis presentada para obtener el grado de

Licenciado en Física

en la

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

2017



*Dedicado a Don Rodolfo.*



# Agradecimientos

A las primeras personas que quiero y debo agradecer son a mi padre Rodolfo y a mi abuela Estela, ya que siempre me han brindado sin importar las circunstancias apoyo incondicional y confianza. Sin todo su amor, cariño y comprensión, este trabajo así como otros logros pasados, no hubieran sido posibles. Tengo que dar infinitas gracias a mi tutor Antonio García, pues sin todo su apoyo, ayuda y paciencia este trabajo no sería lo que es. Gracias por todo el tiempo invertido en discusiones, consejos y por la confianza que tuvo en mi para poder realizar este trabajo. A todos mis amigos cercanos, quiero agradecerles todas las experiencias buenas y malas, vividas y por vivir, ya que sin ellas no sería quien soy hoy, lo que sea que eso signifique. Gracias por todos los momentos recreativos ya que sin toda esa fructífera inversión de tiempo, no hubiera sido posible superar todos los momentos de tensión y estrés que se presentaron en este camino.

A todos los mencionados: Muchas gracias. Sin duda alguna soy una persona con mucha suerte por tenerlos cerca.





# Resumen

En este trabajo se presenta el cálculo de las funciones beta del modelo sigma en teoría de cuerdas, para obtener la acción efectiva a un lazo. Originalmente el objetivo era presentar las ideas de esta construcción en forma pedagógica y autocontenida. Pero la dificultad en el cálculo de la función beta del dilatón causó un cambio de planes. En lugar de presentar el cálculo de la función beta del dilatón explícitamente se recurrió a un argumento de consistencia interna usando las simetrías del modelo sigma y las simetrías espacio temporales de la acción efectiva. La clave de dicha relación se encuentra codificada en las llamadas identidades diferenciales de las funciones beta [3]. Estas identidades implican una relación entre las funciones beta y sus derivadas covariantes, que pueden mostrarse usando propiedades estrictamente cinemáticas (identidades de Bianchi). Basta con conocer sólo dos de las funciones beta para encontrar la tercera usando estas identidades. Un importante argumento de consistencia entre el álgebra de Virasoro asociada al modelo sigma y las ID implica que, si las funciones beta asociadas a la métrica y al campo antisimétrico de Kalb-Ramon son cero, entonces la función beta asociada al dilatón debe ser una constante. Este argumento fue usado inicialmente en [3] para mostrar que, las ID son compatibles con las simetrías del modelo sigma.

La condición básica de consistencia de la acción efectiva es que, la simetría conforme se preserve a nivel cuántico. Esto implica que las funciones beta mencionadas deben ser cero. Esta condición implica una relación entre los campos de fondo del modelo sigma y los campos dinámicos en el espacio-tiempo. Por tanto, las condiciones de que las funciones beta sean cero, puede ahora verse como las ecuaciones de movimiento de los campos en el espacio-tiempo.

Estas ecuaciones son fundamentales para entender en que sentido la teoría de cuerdas, im-

plica las ecuaciones de Einstein mas correcciones consistentes que propone la teoría de cuerdas.

Cabe entonces preguntarse si estas condiciones provienen de una acción. La respuesta es afirmativa y es la acción efectiva en el espacio-tiempo. Las simetrías de norma de esta acción, son consistentes con las simetrías de norma de las correspondientes ecuaciones de movimiento. Cuando se estudian las correspondientes identidades de Noether asociadas a estas simetrías de norma en el espacio-tiempo, se encuentra que estas identidades son precisamente las ID del modelo sigma identificando apropiadamente las funciones beta con las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva. De este modo las simetrías en la hoja mundo del modelo sigma, implican las simetrías de norma de la acción efectiva como simetrías emergentes. El espacio-tiempo dinámico es así un concepto emergente que proviene de la cuantización de la cuerda (el correspondiente modelo sigma).

En la primera parte se presentan las ideas básicas de la construcción de la teoría de cuerdas, siguiendo los textos [16], [8] y [12], esta parte del trabajo inicia con la motivación de la partícula relativista y sigue con el estudio clásico de la acción de Polyakov. Después, se estudia de manera general la teoría conforme de campos en dos dimensiones y finalmente se desarrolla el método de Faddeev-Popov para cuantizar la teoría y se discute la importancia de la carga central en dicha construcción. En la segunda parte, se presenta el cálculo de las funciones beta del modelo sigma. Esto está basado en gran parte en [3], [9], [15], y [14], sin embargo fueron de crucial ayuda para entender distintos conceptos, [1], [4], [5], [13], [6], [2] y [11]. En esta parte, se construyen las coordenadas normales de Riemann en el formalismo de primer orden (vielbein) de relatividad general. Para la parte final se presenta un concepto básico conocido como identidades de Noether [10], así como la acción efectiva de la teoría, sus ecuaciones de movimiento y su relación con las funciones beta. Finalmente, se muestra que las identidades diferenciales de las funciones beta son las identidades de Noether de la acción efectiva. Hasta donde sabemos esta interesante observación no ha sido reportada en la literatura sobre este apasionante tema y la presentamos como una pequeña contribución en la construcción formal y consistente de la acción efectiva a un lazo asociada al modelo sigma de la cuerda bosónica.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción a la Teoría Clásica de Cuerdas</b>	<b>1</b>
1.1. La partícula relativista . . . . .	1
1.2. Acción de Nambu-Goto . . . . .	3
1.3. La acción de Polyakov . . . . .	4
1.3.1. Simetrías de la acción . . . . .	5
1.3.1.1. Simetría de Weyl . . . . .	6
<b>2. Teoría Conforme de Campos en 2 Dimensiones</b>	<b>9</b>
2.1. Espacio plano . . . . .	10
2.2. Aspectos Clásicos . . . . .	11
2.2.1. El Tensor de Energía-Momento . . . . .	12
2.2.2. Corriente de Noether . . . . .	13
2.3. Aspectos Cuánticos . . . . .	14
2.3.1. Expansión de Producto de Operadores . . . . .	15
2.3.2. Identidades de Ward . . . . .	15
2.3.2.1. Identidades de Ward para Transformaciones Conformes . . . . .	17
2.3.3. Operadores Primarios . . . . .	18
2.3.4. Carga Central . . . . .	21

---

2.3.5. El Operador Schwarziano . . . . .	23
<b>3. Cuantización de la Teoría</b>	<b>25</b>
3.1. Anomalía Conforme . . . . .	25
3.2. Método de Faddeev-Popov . . . . .	27
3.2.1. Determinante de Faddeev-Popov . . . . .	28
3.3. Acción Fantasma . . . . .	30
3.3.1. Operadores Primarios y la Contribución Fantasma a la Carga Central . . . . .	32
<b>4. Funciones Beta</b>	<b>35</b>
4.1. Modelo Sigma . . . . .	36
4.2. Método de Expansión en Campos de Fondo . . . . .	38
4.2.1. Coordenadas Normales de Riemann . . . . .	38
4.2.2. Expansión de la Acción . . . . .	41
4.2.3. Los Vielbein . . . . .	44
4.3. Valor de Expectación del Tensor de Energía-Momento . . . . .	46
<b>5. Acción Efectiva e Identidades de Noether</b>	<b>53</b>
5.1. Acción Efectiva . . . . .	53
5.2. Identidades de Noether . . . . .	55
5.2.1. Identidades Diferenciales y las Identidades de Noether . . . . .	57
<b>Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>



# Capítulo 1

## Introducción a la Teoría Clásica de Cuerdas

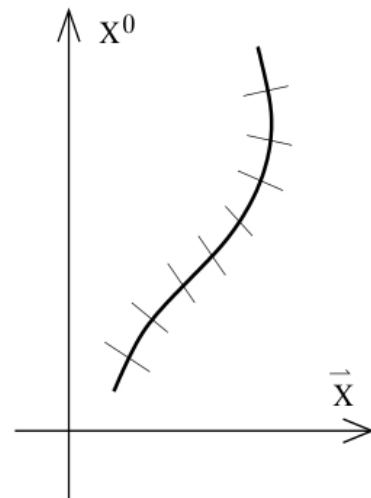
La teoría de cuerdas se construye en base de argumentos clásicos. La cuantización de esta se verá más adelante. La principal inspiración para la construcción de la acción de una cuerda es la acción de una partícula relativista. El estudio de sus características, es fundamental para escribir una acción adecuada para la cuerda.

### 1.1. La partícula relativista

La acción para una partícula relativista  $D$ -dimensional y en unidades naturales es,

$$S = m \int d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}, \quad (1-1)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski y  $\mu = 0, 1, 2, \dots, D - 1$ . Una propiedad importante de esta acción es que es manifiesta invariante de Poincaré. Además es invariante bajo reparametrizaciones, es decir, se puede cambiar el parámetro con el que se mide



el "tiempo" sobre la línea de mundo.

Esto es fácil de ver, si se tiene  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$  entonces,

$$d\tau = d\tilde{\tau} \left| \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \right|,$$

además, por la regla de la cadena,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}.$$

Sin embargo tenemos un problema con (1-1), la raíz cuadrada es un término que no se conoce como integrar desde el punto de vista de la integral de trayectoria. Este inconveniente se puede solucionar agregando un campo auxiliar, un *einbein*. Este ayudará a deshacerse de la raíz cuadrada, pero habrá un nuevo grado de libertad en la teoría correspondiente al campo auxiliar. La interpretación de este nuevo campo será muy útil para la construcción de la acción de la cuerda.

La acción (1-1) escrita en términos de un einbein, tendrá la forma,

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left( e^{-1}(\tau) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} - e(\tau) m^2 \right), \quad (1-2)$$

donde el punto es la derivada respecto al parámetro  $\tau$ .

El principal hecho que hay que notar, es que a pesar de que ahora habrá una ecuación de movimiento extra asociada a  $e(\tau)$ . Este queda totalmente definido y la ecuación para la  $x^\mu(\tau)$  coincide con la ecuación de movimiento que surge de (1-1).

Por otro lado  $e$  se puede pensar como un acoplamiento entre el encaje  $x$  y la línea de mundo. Para hacer la notación más sugestiva se puede escribir  $e(\tau) = \sqrt{g_{\tau\tau}}$ , es decir que el campo auxiliar se puede considerar como una métrica de fondo en la línea de mundo. De esta forma la acción (1-2) se puede escribir como,

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}} \left( g^{\tau\tau} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} + m^2 \right). \quad (1-3)$$

Se puede mostrar que (1-3) aún es invariante bajo reparametrizaciones. Además funcionará



para partículas de masa cero, algo que (1-1) no hace.

## 1.2. Acción de Nambu-Goto

La acción de Nambu-Goto es una propuesta a la acción de una cuerda. Esta acción se construye siguiendo los argumentos usado para construir (1-1), se quiere conservar invarianza de Poincaré y bajo difeomorfismos. En este caso se tiene una hoja de mundo y la superficie está parametrizada por dos parámetros  $\tau$  y  $\sigma$ . De ahora en adelante sólo se considerará una cuerda cerrada, por lo que hay que imponer condiciones de periodicidad.

$$\sigma \in [0, 2\pi],$$

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi),$$

generalmente se escribirá  $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$  y  $\alpha = 0, 1$ .

Otro ingrediente necesario es la métrica inducida  $\gamma_{\alpha\beta}$ , definida como,

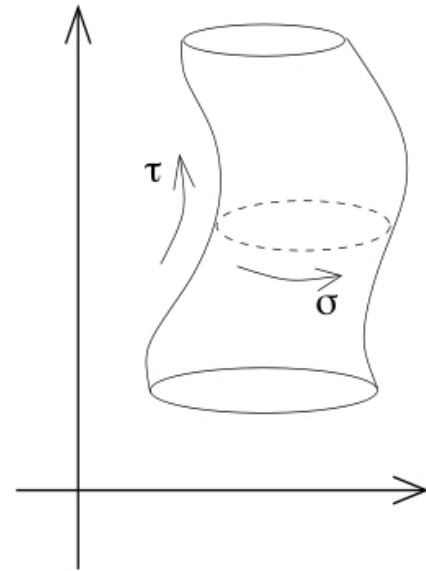
$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (1-4)$$

Con estos ingredientes se puede escribir entonces,

$$S_{N-G} = T \int d^2\xi \sqrt{\det\gamma}. \quad (1-5)$$

Esta acción es invariante bajo difeomorfismos e invariante de Poincaré. Además conserva una propiedad muy particular, el área de la hoja de mundo es invariante; así como en una partícula relativista el intervalo es invariante.

Por otro lado  $T$  se le llama tensión de la cuerda, pues por cuestión de unidades no se puede



poner una masa como en (1-1). Sin embargo, se suele escribir  $T$  como,

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'},$$

donde  $\alpha'$  es una constante en teoría de cuerdas.

Al igual que en (1-1), la acción de Nambu-Goto el mismo problema, hay una raíz cuadrada que desde el enfoque de la integral funcional, no se puede integrar. Pero al igual que en (1-1), se puede añadir un campo auxiliar a la teoría y deshacerse de la raíz cuadrada. La consecuencia de aplicar este método a la teoría de cuerdas es la acción de Polyakov que se estudiará en el siguiente capítulo.

### 1.3. La acción de Polyakov

En esta sección se estudiará en detalle la acción de Polyakov. Se examinarán sus principales simetrías; así como las ventajas que se obtienen de estas. Se mostrará cuales son sus ecuaciones de movimiento y finalmente se discutirá la utilidad e importancia de esta acción.

La acción de Polyakov está dada por,

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (1-6)$$

donde  $g \equiv \det g$  y  $g^{\alpha\beta}$  es una métrica de fondo en la hoja de mundo. A diferencia de la acción de Nambu-Goto, la acción de Polyakov no tienen ninguna raíz cuadrada, pues la raíz de  $g$  no causará ningún inconveniente al igual que en (1-3). Esta acción tiene manifiestas tres simetrías muy importantes; es Poincaré invariante, tiene invarianza bajo difeomorfismos y transformaciones de Weyl. La invarianza de Poincaré y bajo difeomorfismo es un requisito importante si se quiere que la teoría sea relativista, por otro lado la invarianza bajo transformaciones de Weyl será un ingrediente sumamente importante en la construcción de la teoría, dicha simetría se estudiará en detalle más adelante.

### 1.3.1. Simetrías de la acción

Como se mencionó, la acción de Polyakov es invariante de Poincaré; es decir que su forma no cambia bajo las transformaciones del grupo de Poincaré, dadas por,

$$X^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + c^\mu.$$

donde  $\Lambda^\mu{}_\nu$  es una transformación de Lorentz y  $c^\mu$  una constante.

La acción tiene invarianza bajo difeomorfismos, dicho de otra forma es invariante bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo. Esta simetría es una simetría de norma sobre la hoja de mundo de la cuerda. Lo que esto significa, es que es posible cambiar las coordenadas de la hoja de mundo, es decir,  $\xi^\alpha \longrightarrow \tilde{\xi}^\alpha(\xi)$ . Este cambio de coordenadas transforma también a los campos  $X^\mu$  y a la métrica  $g_{\alpha\beta}$  de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} X^\mu(\xi) &\longrightarrow \tilde{X}^\mu(\tilde{\xi}) = X^\mu(\xi), \\ g_{\alpha\beta}(\xi) &\longrightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}) = \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \tilde{\xi}^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \tilde{\xi}^\beta} g_{\gamma\delta}(\xi). \end{aligned}$$

es decir, como un campo escalar y un tensor de rango 2 respectivamente.

Muchas veces es útil escribir estas simetrías infinitesimalmente, es decir para una traslación de la forma,

$$\xi^\alpha \longrightarrow \tilde{\xi}^\alpha = \xi^\alpha - \epsilon^\alpha(\xi),$$

con  $\epsilon^\alpha$  pequeño. Entonces las variaciones inducidas en los campos y en la métrica son,

$$\delta X^\mu(\xi) = \epsilon^\alpha \partial_\alpha X^\mu,$$

$$\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha.$$

### 1.3.1.1. Simetría de Weyl

Como se mencionó, la invarianza de Weyl será fundamental para la construcción de la teoría. Esta simetría a diferencia de las anteriores, es una nueva simetría que surge al agregar la métrica de fondo sobre la hoja de mundo.

La simetría de Weyl, viene de un cambio de coordenadas,  $\xi^\alpha \rightarrow \tilde{\xi}^\alpha(\xi)$ , tal que no cambia al encaje y la métrica cambia de una forma especial. Es decir,

$$\begin{aligned} X^\mu(\xi) &\longrightarrow \tilde{X}^\mu(\tilde{\xi}) = X^\mu(\xi), \\ g_{\alpha\beta}(\xi) &\longrightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}) = \Omega^2(\xi)g_{\alpha\beta}(\xi). \end{aligned} \quad (1-7)$$

Se puede escribir  $\Omega^2(\xi) = e^{2\phi(\xi)}$ , infinitesimalmente para un  $\phi$  pequeño se tiene que,

$$\delta g_{\alpha\beta} = 2\phi(\xi)g_{\alpha\beta}(\phi).$$

Se conoce a  $\phi$  como factor conforme. La invarianza de Weyl es una simetría de norma, pues se tiene la libertad de escoger a la  $\phi$  sin cambiar la teoría. Una manera clara de verlo es calcular la ecuación de movimiento para  $g_{\alpha\beta}$ . Es decir la variación de la acción respecto a la métrica,

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \delta g^{\alpha\beta} \left( \sqrt{g} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu \right) \eta_{\mu\nu},$$

usando que,  $\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$ . Entonces,

$$\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Esto quiere decir que  $g_{\alpha\beta}$  debe ser,

$$g_{\alpha\beta} = 2\phi(\xi) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = 2\phi(\xi) \gamma_{\alpha\beta} \quad (1-8)$$

donde se escribe  $\phi$  como,

$$\phi = (g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1}.$$

Aquí es claro que la métrica  $g_{\alpha\beta}$ , no es la misma que la métrica inducida (1-4), estas difieren por un factor conforme. Sin embargo si se sustituye la expresión (1-8) en la ecuación de movimiento para los campos,

$$\partial_\alpha(\sqrt{g}g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0, \quad (1-9)$$

se pueden recuperar las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto. Más aún si se sustituye (1-8) en (1-6) se puede recuperar la acción de Nambu-Goto.

En el siguiente capítulo se estudiará en detalle todas las consecuencias de tener esta simetría en la teoría. Sin embargo lo importante es verlo desde el punto de vista de la teoría de campos, pues el objetivo es poder cuantizar la teoría. El estudio de una teoría de campos con esta simetría se llama *Teoría Conforme de Campos*.



## Capítulo 2

# Teoría Conforme de Campos en 2 Dimensiones

El propósito de este capítulo es exponer las ideas básicas de una teoría de campos conforme (CFT, por sus siglas en inglés) en 2 dimensiones. Estas teorías tienen diversas aplicaciones, sobre todo en física estadística. Para más información acerca de esto, así como teorías conformes en más de 2 dimensiones se puede consultar [8]. Sin embargo en este contexto es de interés, pues es una herramienta poderosa para el desarrollo de la teoría de cuerdas.

Una transformación conforme es un cambio de coordenadas, que cambia a la métrica como en (1-7). Una CFT es una teoría de campos que es invariante bajo estas transformaciones. Esto significa que a la teoría se escribe igual para cualquier escala.

La simetría de Weyl es una simetría de norma, por lo que se puede tomar una elección para la métrica. Si el campo de fondo  $g^{\alpha\beta}$  es fijo, la simetría conforme se puede pensar como una simetría global con su propia corriente conservada de Noether. En este capítulo se trabajará con un campo de fondo fijo, mayormente con una métrica plana.

## 2.1. Espacio plano

A pesar de que el interés es tener una métrica Minkowskiana en la hoja de mundo. Trabajar en una métrica euclidiana simplifica los cálculos, además que este proceso es análogo para una métrica de Minkowski.

El tratamiento se hace pasando al plano complejo con la transformación,

$$(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1, i\xi^0).$$

Así se pueden definir las siguientes coordenadas complejas,

$$z = \xi^1 + i\xi^2, \quad \bar{z} = \xi^1 - i\xi^2,$$

esto permite definir las llamadas derivadas holomórficas,

$$\partial_z \equiv \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2),$$

en términos del intervalo euclidiano se obtiene,

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 = dzd\bar{z},$$

esto es útil para definir la métrica en el espacio complejo,

$$g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}.$$

Con la teoría escrita en estas coordenadas, es claro ver quien es  $\Omega^2$  en (1-7). Pues si se aplica la transformación,

$$z \longrightarrow z' = f(z), \quad \bar{z} \longrightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}),$$



el cambio en el intervalo es de la siguiente forma,

$$ds^2 = dzd\bar{z} \longrightarrow \left| \frac{df}{dz} \right|^2 dzd\bar{z}.$$

Se pueden definir las coordenadas como de luz,

$$\xi^\pm = \xi^0 \pm \xi^1 \quad (2-1)$$

estas se comportarán de una forma muy parecida a las coordenadas complejas y tienen más significado físico. Además de que será sumamente útiles en uno de los desarrollos principales más adelante.

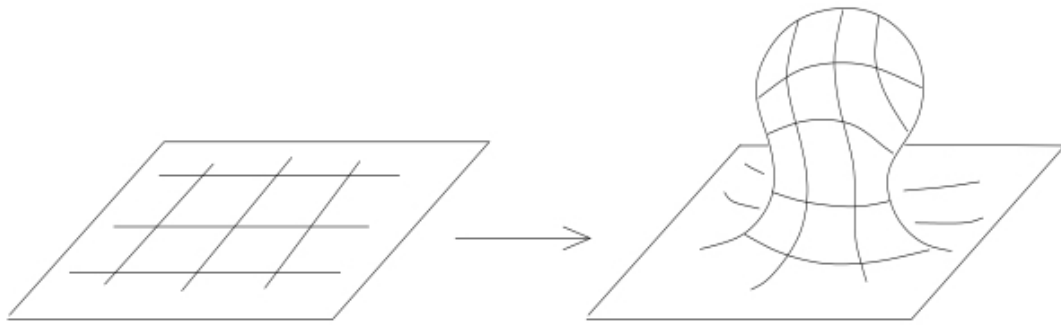


Figura 2-1: Ejemplo de una transformación conforme

## 2.2. Aspectos Clásicos

En esta sección se derivan algunos de los principales conceptos clásicos de una teoría conforme de campos, como las propiedades del tensor de energía momento y las corrientes de Noether conservadas.

### 2.2.1. El Tensor de Energía-Momento

Se define el tensor de energía-momento de la siguiente forma,

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}}. \quad (2-2)$$

Para una transformación conforme global, se tiene que la variación de la métrica es,

$$\delta g_{\alpha\beta} = \epsilon g_{\alpha\beta}, \quad (2-3)$$

con  $\epsilon$  una constante. Usando (2-2) se obtiene que la variación de la acción respecto a la métrica es,

$$0 = \delta S = \int d\xi \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \int d\xi \epsilon \sqrt{g} T^\alpha_\alpha.$$

Esto muestra el primero de los resultados importantes en la teoría. La traza del tensor de energía momento debe ser cero. Este resultado será de suma importancia cuando se quiera cuantizar la teoría.

$$T^\alpha_\alpha = 0 \quad (2-4)$$

Por otro lado, se tiene la variación de la métrica respecto a los difeomorfismos locales. Esta está dada por,

$$\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha. \quad (2-5)$$

Con el procedimiento anterior se obtiene,

$$0 = \delta S = \int d\xi \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = 2 \int d^2\xi \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \partial_\alpha \epsilon_\beta = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} T^{\alpha\beta} \partial_\alpha \epsilon_\beta,$$

e integrando por partes se tiene,

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (2-6)$$

En el caso con curvatura el resultado será,  $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ , con los símbolos de Christoffel definidos de la forma común.

Se puede probar, que para un campo escalar libre, con la acción

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \partial_\alpha X \partial^\alpha X,$$

el tensor de energía-momento se ve de la siguiente forma,

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left( \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\partial X)^2 \right).$$

Este debe satisfacer la condición de traza cero porque la teoría es conforme. En coordenadas complejas puede escribirse así,

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X \partial X, \quad \bar{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X \bar{\partial} X. \quad (2-7)$$

Este resultado será importante, más adelante para los cálculos en los que se enfoca este trabajo.

### 2.2.2. Corriente de Noether

El tensor de energía-momento proviene de la simetría bajo traslaciones. Estas son transformaciones conformes, pero no son las únicas. Esta sección está destinada a estudiar que sucede con otro tipo de transformaciones conformes, no sólo traslaciones.

Si se considera la siguiente transformación infinitesimal,

$$z' = z + \epsilon(z), \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}).$$

Estas transformaciones representan dilataciones y rotaciones. Entonces se puede calcular la variación de la acción,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^2\xi \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} T_{\alpha\beta} (\partial^\alpha \delta \xi^\beta), \\ \delta S &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} [T_{zz} \partial_{\bar{z}} \epsilon + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z \bar{\epsilon}]. \end{aligned} \quad (2-8)$$

Nótese que  $T_{z\bar{z}} = 0$  pues la traza del tensor de energía-momento de una teoría conforme es cero. Además, es importante ver que si  $\epsilon$  y  $\bar{\epsilon}$  son funciones holomorfa y antiholomorfa respectivamente, se obtiene de inmediato  $\delta S = 0$ . Para poder calcular la corriente conservada en (2-8), se puede emplear un pequeño truco. Esto consiste en pensar a  $z$  y  $\bar{z}$  como variables independientes y poder calcular las corrientes conservadas por separado. Entonces las variaciones son,

$$\delta z = \epsilon(z, \bar{z}), \quad \delta \bar{z} = 0.$$

se propone  $\epsilon(z, \bar{z}) = \epsilon(z)f(\bar{z})$  para alguna función antiholomorfa  $f$ . Lo que se obtiene de esto es,

$$J^z = 0, \quad J^{\bar{z}} = T_{zz}(z)\epsilon(z) \equiv T(z)\epsilon(z). \quad (2-9)$$

De igual manera, se puede hacer lo mismo para el caso,

$$\delta z = 0, \quad \delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(z, \bar{z}),$$

obteniendo un resultado análogo,

$$\bar{J}^{\bar{z}} = 0, \quad \bar{J}^z = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}) \equiv \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}). \quad (2-10)$$

Una razón por la que es importante el estudio de una teoría CFT, es que esta se puede estudiar desde un punto de vista cuántico. En el contexto de teoría de cuerdas, las herramientas de una CFT cuántica serán útiles para el proceso de cuantización de la teoría. La siguiente sección tiene el objetivo de estudiar las nociones básica de una CFT cuántica.

### 2.3. Aspectos Cuánticos

Esta sección está destinada al tratamiento cuántico de una CFT. La principal herramienta en este estudio serán las llamadas expansiones en producto de operadores (OPE, por sus siglas en inglés). Los OPE serán de gran utilidad para entender conceptos como los operadores primarios

y la carga central; que tiene suma importancia en la teoría.

### 2.3.1. Expansión de Producto de Operadores

La definición de un operador en el contexto de CFT, es cualquier función que dependa de los campos que contiene la teoría. Por consecuencia los operadores dependen de las coordenadas que dependen los campos, es decir, son locales. La idea de un OPE, es escribir al producto de dos operadores como una serie de operadores con coeficientes. Es decir,

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle, \quad (2-11)$$

donde los bra-kets significan en valor de expectación en el vacío y se piensa que hay orden temporal implícito. Sin embargo esos valores de expectación, del lado izquierdo de la igualdad sólo dependen de los dos primeros operadores y del lado derecho sólo del primer operador. Por lo que generalmente se escribe,

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \mathcal{O}_k(w, \bar{w}). \quad (2-12)$$

El estudio de los OPE's tiene gran importancia en la teoría. Con los OPE's se pueden estudiar aspectos de la teoría como la carga central y se pueden definir los operadores primarios, que se estudiarán más adelante. Antes de eso es bueno notar que aspectos conocidos se pueden heredar después de la cuantización Uno de estos son las identidades de Ward.

### 2.3.2. Identidades de Ward

Las identidades de Ward son ecuaciones de operadores. Estas contienen la idea del teorema de Noether en una teoría cuántica de campos. El objetivo de esta sección es derivar las identidades Ward para una teoría conforme.

En el contexto de la integral funcional, las simetrías de la teoría se pueden escribir como variaciones,

$$X' = X + \epsilon \delta X$$

tales que mantienen la acción y la medida de la integral funcional invariantes, es decir,

$$S[X'] = S[X], \quad \mathcal{D}X' = \mathcal{D}X.$$

Una vez más se propone  $\epsilon \rightarrow \epsilon(\xi)$ , entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow \int \mathcal{D}X' \exp(-S[X']) = \int \mathcal{D}X \exp\left(-S[X] - \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) \\ &= \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right). \end{aligned}$$

Para tener una función de partición invariante se pide que,

$$\int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \left(\int d^2\xi \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) = 0,$$

esto proporciona una versión cuántica para el teorema de Noether,

$$\langle \partial_\alpha J^\alpha \rangle = 0. \quad (2-13)$$

Se puede usar este método para obtener resultados más fuertes. Se puede pensar en el valor de expectación con orden normal de  $n$  operadores,

$$\langle \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \mathcal{O}_n(\xi_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \mathcal{O}_n(\xi_n),$$

sin pérdida de generalidad, se puede considerar la variación,

$$\mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_1 + \epsilon \delta \mathcal{O}_1,$$

y de nuevo se propone  $\epsilon \rightarrow \epsilon(\xi)$ , entonces lo que se obtiene es,

$$\langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \longrightarrow \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) (\mathcal{O}_1 + \epsilon \delta \mathcal{O}) \dots \mathcal{O}_n,$$

obteniendo finalmente,

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon} d^2\xi \sqrt{g} \partial_{\alpha} \langle J^{\alpha}(\xi) \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \rangle. \quad (2-14)$$

Esta última es la llamada identidad de Ward. La integral del lado izquierdo de (2-14) es una integral sobre una región distinta de 0 al rededor de  $\mathcal{O}_1(\xi_1)$ .

### 2.3.2.1. Identidades de Ward para Transformaciones Conformes

La expresión (2-14) surge de principios variacionales. Esto significa que debe satisfacerse para cualquier simetría, en particular para la simetría conforme. A continuación se usará el teorema de Stokes para derivar las identidades de Ward para transformaciones conformes.

Si se toma  $\hat{n}^{\alpha}$  como un vector unitario normal a la frontera de la región  $\epsilon$ . Se puede aplicar el teorema de Stokes,

$$\int_{\epsilon} \partial_{\alpha} J^{\alpha} = \oint_{\partial\epsilon} J_{\alpha} \hat{n}^{\alpha} = \oint_{\partial\epsilon} (J_1 d\xi^2 - J_2 d\xi^1) = -i \oint_{\partial\epsilon} (J_z dz - J_{\bar{z}} d\bar{z}),$$

usando (2-14) se puede escribir,

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} dz \langle J_z(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \rangle - \frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} d\bar{z} \langle J_{\bar{z}}(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\xi_1) \dots \rangle$$

Como las corrientes conservadas son funciones holomorfas y antiholomorfas respectivamente, se puede aplicar el teorema del residuo,

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} dz J_z(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\xi_1) = -\text{Res}[J_z \mathcal{O}_1].$$

Obteniendo,

$$\delta \mathcal{O}_1(\xi_1) = -\text{Res}[J_z(z) \mathcal{O}_1(\xi_1)] = -\text{Res}[\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\xi_1)], \quad (2-15)$$

y un resultado análogo para la parte antiholomorfa,

$$\delta\mathcal{O}_1(\xi_1) = -\text{Res}[\bar{J}_{\bar{z}}(\bar{z})\mathcal{O}_1(\xi_1)] = -\text{Res}[\bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}_1(\xi_1)]. \quad (2-16)$$

De aquí se obtiene un resultado importante de la teoría. Si se puede calcular el OPE entre un operador y el tensor de energía-momento, entonces es posible conocer como transforma ese operador bajo transformaciones conformes.

### 2.3.3. Operadores Primarios

El estudio de los OPE's es útil para conocer como transforman los operadores, en particular, definir a los operadores primarios en función de sus OPE's con el tensor de energía momento, ayudará a caracterizar a los operadores según como estos transforman bajo transformaciones conformes.

Un operador primario se define como un operador el cual su OPE con el tensor de energía momento de ve así,

$$T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w}) = h\frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \text{términos no singulares} \quad (2-17)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w}) = \tilde{h}\frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}\mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \text{términos no singulares} \quad (2-18)$$

donde  $h$  y  $\tilde{h}$  son constantes y se llaman pesos conformes. Esta definición permite conocer como transforman estos operadores. La importancia de los operadores primarios es que transforman de una forma simple.

Si se consideran transformaciones de la forma  $\delta z = \epsilon(z)$ , se tiene que,

$$\delta\mathcal{O}(w, \bar{w}) = -\text{Res}[\epsilon(z)T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w})] = -\text{Res}\left[\epsilon(z)\left(h\frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \dots\right)\right].$$

Si se toman en cuenta sólo transformaciones conformes suaves. Entonces  $\epsilon(z)$  no puede tener



singularidades. De modo que se puede expandir en serie de Taylor,

$$\epsilon(z) = \epsilon(w) + \epsilon'(w)(z - w) + \dots$$

con esto se obtiene,

$$\delta\mathcal{O}(w, \bar{w}) = -h\epsilon'(w)\mathcal{O}(w, \bar{w}) - \epsilon(w)\partial\mathcal{O}(w, \bar{w}), \quad (2-19)$$

$\tilde{h}$  aparecerá en la expresión análoga para el caso,  $\delta\bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ .

Si finalmente se considera una transformación conforme finita, tal que,

$$z \longrightarrow \tilde{z}(z), \quad \bar{z} \longrightarrow \tilde{\bar{z}}(\bar{z}),$$

se tiene que los operadores primarios transforman de la siguiente forma,

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{z}, \tilde{\bar{z}}) = \left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial\tilde{\bar{z}}}{\partial\bar{z}}\right)^{-\tilde{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}). \quad (2-20)$$

Si se piensa en el caso de un campo escalar,

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \partial_\alpha X \partial^\alpha X,$$

con ecuación de movimiento  $\partial^2 X(\xi) = 0$ . Si se usa el hecho de que cualquier derivada funcional total en la integral de trayectoria se hace cero. Se puede obtener,

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X(\xi)} e^{-S} = - \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[ \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\xi) \right],$$

esto no es más que el teorema de Ehrenfest,

$$\langle \partial^2 X(\xi) \rangle = 0.$$

Con el mismo procedimiento se puede obtener,

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X(\xi)} [e^{-S} X(\xi')] = \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[ \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\xi) X(\xi') + \delta(\xi - \xi') \right],$$

entonces,

$$\langle \partial^2 X(\xi) X(\xi') \rangle = -2\pi\alpha' \delta(\xi - \xi'). \quad (2-21)$$

Usando que,

$$\partial^2 \ln(\xi - \xi')^2 = 4\pi\delta(\xi - \xi'),$$

se puede resolver (2-21). Obteniendo,

$$\langle X(\xi) X(\xi') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\xi - \xi')^2. \quad (2-22)$$

Al continuar insertando nuevos campos  $\mathcal{O}_i$ , con el procedimiento análogo se puede obtener el OPE,

$$X(\xi) X(\xi') = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\xi - \xi')^2 + \dots \quad (2-23)$$

sin embargo, es mejor considerar el campo  $\partial X$  o  $\bar{\partial} X$ , que tienen OPE's con una forma más agradable. Por otro lado, para resolver la ecuación de movimiento, se puede separar la solución en una solución izquierda y otra derecha. Haciendo lo anterior y considerando sólo la parte izquierda,

$$\partial X(z) \partial X(w) = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} + \text{términos no singulares.} \quad (2-24)$$

Con este resultado se puede probar que  $\partial X$  es un operador primario. Ahora hay que definir el tensor de energía-momento en el contexto cuántico. En la teoría clásica, se tienen las ecuaciones (2-7). En la teoría cuántica hay que tener cuidado, pues (2-7) están definidas en el mismo punto, lo que en el contexto cuántico puede causar divergencias.

En este caso se puede aplicar una idea equivalente a la cuantización canónica, donde se usa

el orden normal para asegurar que la energía del vacío será cero. Definiendo entonces,

$$T = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \partial X : \equiv -\frac{1}{\alpha'} \lim_{z \rightarrow w} (\partial X(z) \partial X(w) - \langle \partial X(z) \partial X(w) \rangle) \quad (2-25)$$

que por definición, satisface  $\langle T \rangle = 0$ .

Con estas herramientas se puede probar que,

$$T(z) \partial X(w) = \frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2 X(w)}{z-w} + \dots,$$

es decir, el operador  $\partial X$  tiene peso conforme  $h = 1$ .

Sin embargo,  $T(z)$  no será primario, pues su OPE con si mismo es,

$$T(z)T(w) = \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \quad (2-26)$$

Es decir que  $T$  tiene peso conforme  $h = 2$ , sin embargo no es un operador primario. Esto implica que, el tensor de energía-momento no transforma como (2-20). El hecho que  $T$  no sea primario, es una propiedad de las teorías conformes, por lo que debe estudiarse como tal. El estudio de esta propiedad llevará a la llamada *carga central* que se estudiará en a continuación.

### 2.3.4. Carga Central

El objetivo de esta sección es definir el concepto de carga central en una teoría de campos conforme. También se dará una interpretación física a esta y a los pesos conformes. Estas interpretaciones pretenden desarrollar una mejor intuición en la teoría que será útil más adelante.

Los pesos conformes proporcionan información acerca de como un operador transforma en la teoría conforme, es decir, bajo rotaciones y reescalamientos y están relacionados con conceptos familiares.

Los eigenvalores de los operadores de rotación son los valores  $s$  de espín, que en términos de los pesos conformes se ven así,

$$s = h - \tilde{h}.$$

Por otro lado la dimensión de escalamiento  $\Delta$  de un operador es,

$$\Delta = h + \tilde{h},$$

la dimensión de escalamiento no es más que la dimensión que usualmente se asocia a los campos y operadores por el análisis dimensional.

Esto permite tener una interpretación para el peso conforme de  $T$ , que es  $h = 2$ . Esto dice que  $T$  tiene espín  $s = 2$ , lo que es consistente pues es un 2-tensor simétrico. Esto sucede igualmente para  $\bar{T}$  con su peso conforme  $\tilde{h}$ .

Además esta interpretación restringe por análisis dimensional, qué términos pueden aparecer en el OPE del tensor de energía-momento con si mismo. Esto es porque se tiene una dimensión de escalamiento  $\Delta = 4$ . Entonces cualquier término en el OPE, sólo puede ser de la forma,

$$\frac{\mathcal{O}_n}{(z-w)^n},$$

tal que,  $\Delta[\mathcal{O}_n] = 4-n$ . Pero en una teoría conforme unitaria, no se pueden tener pesos conformes menores que cero [16]. Es necesario que la teoría sea unitaria para tener adecuados observables cuánticos. Entonces el máximo  $n$  que se puede tener en la expansión es  $n = 4$  y por cuestiones de simetría no se considera  $n = 3$ .

Por lo que se puede escribir,

$$T(z)T(w) = \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots,$$

y

$$\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) = \frac{\frac{\tilde{c}}{2}}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial \bar{T}(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots$$

donde  $c$  y  $\tilde{c}$  se llaman cargas centrales. Estas constantes son los parámetros más importantes para caracterizar una CFT. Al final de la sección pasada se vio que en la teoría de un campo escalar en dimensión  $D = 1$  se tiene que  $c = \tilde{c} = D$ , esta expresión se satisface también para  $D > 1$  [16]. Esto sugiere pensar que las cargas centrales están relacionadas con los grados de

libertad de la teoría.

### 2.3.5. El Operador Schwarziano

Como se mencionó anteriormente, los operadores primarios tienen la particularidad de transformar de forma simple. Sin embargo el tensor de energía-momento no es primario. Entonces hay que investigar como transforma  $T$ , pues esto tiene la información de que sucede con la energía después de una transformación conforme.

Al igual que en el caso de un operador primario, se calcula primero su variación,

$$\delta T(w) = -\text{Res}[\epsilon(z)T(z)T(w)] = -\text{Res} \left[ \epsilon(z) \left( \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \right) \right]$$

Al igual que antes se puede expandir  $\epsilon$  en serie de Taylor,

$$\epsilon(z) = \epsilon(w) + \epsilon'(w)(z-w) + \frac{1}{2}\epsilon''(w)(z-w)^2 + \frac{1}{6}\epsilon'''(w)(z-w)^3 + \dots,$$

entonces,

$$\delta T(w) = -\epsilon(w)\partial T(w) - 2\epsilon'(w)T(w) - \frac{c}{12}\epsilon'''(w).$$

Así, para una transformación finita  $z \rightarrow \tilde{z}(z)$ , se tiene que,

$$\tilde{T}(\tilde{z}) = \left( \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^{-2} \left[ T(z) - \frac{c}{12}S(z, \tilde{z}) \right], \quad (2-27)$$

donde  $S(z, \tilde{z})$  es conocido como el operador Schwarziano, definido como,

$$S(z, \tilde{z}) = \left( \frac{\partial^3 \tilde{z}}{\partial z^3} \right) \left( \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^{-1} - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial z^2} \right)^2 \left( \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^{-2}. \quad (2-28)$$



## Capítulo 3

# Cuantización de la Teoría

Este capítulo se enfoca en el método de cuantización usado en la teoría de cuerdas. Se muestran las principales complicaciones del proceso y la manera de solucionarlas. El principal problema que surge en la teoría cuántica, es que el valor esperado de la traza del tensor de energía-momento no necesariamente es cero.

### 3.1. Anomalía Conforme

Como se vio al inicio del capítulo anterior, en la teoría clásica conforme la traza del tensor de energía-momento es cero. Sin embargo no todas las simetrías clásicas se heredan a la teoría cuántica. Estas rupturas de simetría se les conoce como anomalías y la teoría conforme es una de ellas, pues el valor esperado del tensor de energía-momento no será cero. A este problema se le llama anomalía de Weyl ó anomalía conforme. A continuación se muestra como es que se deduce dicha anomalía.

Primero hay que usar la ecuación de conservación (2-6).

$$\partial T_{z\bar{z}} = -\bar{\partial} T_{zz},$$

entonces su OPE será,

$$\partial_z T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \partial_w T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) = \bar{\partial}_{\bar{z}} T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \bar{\partial}_{\bar{w}} T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) = \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \left[ \frac{c/2}{(z-w)^4} + \dots \right].$$

El lado derecho de la igualdad, a pesar de ser una derivada antiholomorfica sobre algo holomorfico, no necesariamente es cero, pues hay una divergencia en  $z = w$ . Con el método análogo a como se calculó el propagador del campo escalar libre (2-22). Se obtiene que,

$$T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) = \frac{c\pi}{6} \partial_z \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta(z-w, \bar{z}-\bar{w}). \quad (3-1)$$

Esto muestra que el OPE anterior es cero excepto cuando  $z \rightarrow w$ . Ahora se muestra como este término de contacto causa la anomalía de Weyl.

Primero se asume que  $\langle T_\alpha^\alpha \rangle = 0$  en un espacio plano. Ahora hay que considerar un espacio parecido al espacio plano. Entonces se considera el cambio infinitesimal de  $\langle T_\alpha^\alpha \rangle$  después de una traslación infinitesimal de la métrica  $\delta_{\alpha\beta}$ . Usando la definición del tensor de energía momento (2-2), se tiene que,

$$\delta \langle T_\alpha^\alpha(\xi) \rangle = \delta \int \mathcal{D}X e^{-S} T_\alpha^\alpha = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}X e^{-S} \left( T_\alpha^\alpha(\xi) \int d^2\xi' \sqrt{g} \delta g^{\beta\gamma} T_{\beta\gamma}(\xi') \right).$$

Si se restringe las transformaciones a transformaciones de Weyl, la variación de la métrica es  $\delta g^{\alpha\beta} = -2\omega \delta^{\alpha\beta}$ , obteniendo así,

$$\delta \langle T_\alpha^\alpha(\xi) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int \mathcal{D}X e^{-S} \left( T_\alpha^\alpha(\xi) \int d^2\xi' \omega(\xi') T_\beta^\beta(\xi') \right). \quad (3-2)$$

Utilizando (3-1) y el sistema de coordenadas complejas,

$$T_\alpha^\alpha(\xi) T_\beta^\beta(\xi) = -\frac{c\pi}{3} \partial \delta(\xi - \xi'),$$



sustituyendo este resultado en (3-2), se tiene,

$$\delta\langle T_\alpha^\alpha \rangle = \frac{c}{6}\partial^2\omega.$$

Por último es necesario usar un resultado de geometría diferencial. Si se tiene que la métrica 2-dimensional es de la forma  $g_{\alpha\beta} = e^{2\omega}\delta_{\alpha\beta}$ , el escalar de Ricci es  $R = -2e^{-2\omega}\partial^2\omega$ . Además al considerar  $\omega \ll 1$ , si puede aproximar  $e^{-2\omega} \approx 1$ . Por tanto el resultado final es,

$$\langle T_\alpha^\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R. \quad (3-3)$$

Evidentemente hay una anomalía en la teoría, pues la simetría conforme se rompe al no ser cero el valor de expectación de la traza de  $T$ . Sin embargo, se podría tener  $R = 0$  y eso resolvería el problema, pero la teoría no sería suficientemente general, pues sólo se consideraría espacios Ricci-planos. Otra opción es hacer  $c = 0$ , pero como se discutió en el capítulo anterior,  $c$  está relacionado con los grados de libertad de la teoría, precisamente está relacionado con las dimensiones de la teoría. Si se tuviera  $c = 0$ , se tendría una teoría en cero dimensiones, es decir una teoría trivial. Por estas razones es que la manera para solucionar la anomalía de Weyl, se debe usar un método conocido como el método de cuantización de Fadeev-Popov.

## 3.2. Método de Faddeev-Popov

Ante de empezar con el método de Faddeev-Popov, hay que notar una particularidad de la integral funcional con la acción de Polyakov. Como se mencionó en capítulos anteriores, la métrica sobre la hoja de mundo se consideró fija, sin embargo para ser general debe considerarse que existe libertad de norma para escoger esta métrica. Entonces la integral funcional debe tomar en cuenta esta información,

$$Z = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}X e^{-S_{Pol}[X,g]}.$$

Por esto hay que normalizar la función de partición. La forma de hacerlo es dividir en entre

el volumen del grupo de norma, el cual contiene la información de como cambia  $g$ . Entonces la función de partición se ve así,

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X e^{-S_{Pol}[X,g]}. \quad (3-4)$$

Como se verá más adelante, este volumen realmente no interesará para el tratamiento de la teoría.

### 3.2.1. Determinante de Faddeev-Popov

Hay dos simetrías de norma en la teoría, bajo difeomorfismos y transformaciones de Weyl. Se denotará ambas por  $\zeta$ , es decir la métrica cambia bajo una transformación de norma de la siguiente forma,

$$g_{\alpha\beta}(\xi) \longrightarrow g_{\alpha\beta}^{\zeta}(\xi') = e^{2\omega(\xi)} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \xi'^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial \xi'^{\beta}} g_{\gamma\delta}(\xi)$$

En dos dimensiones estas simetrías de norma permiten escribir localmente a la métrica de la forma que se quiera. Se le llama métrica fiducial a la métrica que se usa como referencia, llamase  $\hat{g}$ .

El objetivo es integral sobre las métricas que sean físicamente no equivalentes. Para hacer esto se puede iniciar integrando sobre la órbita de norma de  $\hat{g}$ . Entonces para alguna transformación  $\zeta$ , la métrica  $\hat{g}$  coincidirá con  $g$ . Con inspiración en el resultado de cálculo,

$$\int dx \delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(0)|},$$

se define entonces,

$$\int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^{\zeta}) = \Delta_{FP}^{-1}[g] \quad (3-5)$$

donde  $\Delta_{FP}[g]$  es el determinante de Faddeev-Popov.

Se pueden probar propiedades del determinante de Faddeev-Popov. Un lema que será útil

para el desarrollo del método dice que,  $\Delta_{FP}[g]$  es un invariante de norma, es decir,

$$\Delta_{FP}[g] = \Delta_{FP}[g^\zeta].$$

La prueba del lema es esta,

$$\Delta_{FP}^{-1}[g^\zeta] = \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g^\zeta - g^{\zeta'}) = \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g - g^{\zeta^{-1}\zeta'}) = \int \mathcal{D}\zeta'' \delta(g - g^{\zeta''}) = \Delta_{FP}^{-1}[g],$$

donde se usó que la medida de la integral es invariante bajo acciones derechas e izquierdas, es decir,  $\mathcal{D}\zeta = \mathcal{D}(\zeta'\zeta) = \mathcal{D}(\zeta'\zeta)$ .

El método de Faddeev-Popov consiste en implementar la definición del determinante  $\Delta_{FP}[g]$  en la integral funcional para deshacerse de la integral sobre las geometrías. El primer paso es escribir 1 de esta forma,

$$1 = \Delta_{FP}[g] \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Z[\hat{g}] &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \mathcal{D}g \Delta_{FP}[g] \delta(g - \hat{g}^\zeta) e^{-S_{Pol}[X,g]} \\ &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}^\zeta] e^{-S_{Pol}[X,\hat{g}^\zeta]} \\ &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S[X,\hat{g}]}, \end{aligned}$$

donde en la última línea se usó que la acción es un invariante de norma y el lema anterior.

Pero ahora nada depende de la transformación de norma  $\zeta$ , por lo que la integral sobre  $\zeta$  no es más que el volumen del grupo de norma. Obteniendo finalmente,

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_{Pol}[X,\hat{g}]}. \quad (3-6)$$

Se logró simplificar la expresión para la integral funcional, sin embargo, ahora se tiene una función de partición que depende del determinante de Faddeev-Popov.

El objetivo ahora es calcular el determinante de Faddeev-Popov. La manera de hacerlo es considerar las transformaciones de norma que está muy cerca de la identidad. Es decir que el argumento de la delta de Dirac en la definición (3-5) será,

$$\hat{g} - \hat{g}^\zeta = \delta\hat{g}_{\alpha\beta} = 2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha.$$

Insertando esta expresión en la definición (3-5), se tiene que,

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}v \delta(2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha),$$

ahora escribiendo la delta de Dirac como una transformada de Fourier,

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp\left(2\pi i \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} [2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha]\right),$$

donde  $\beta^{\alpha\beta}$  es un 2-tensor antisimétrico sobre la hoja de mundo.

Haciendo la integral sobre  $\omega$ , se tiene,

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp\left(4\pi i \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta\right).$$

Los campos  $v$  y  $\beta$  serán los responsable de que sea posible deshacerse de la anomalía de Weyl.

### 3.3. Acción Fantasma

En la sección anterior se llegó a una expresión para  $\Delta_{FP}^{-1}$ , sin embargo lo necesario es calcular inverso. Hay que remplazar las variables de integración que conmutan por campos que anticonmutan. Es decir,

$$\beta_{\alpha\beta} \longrightarrow b_{\alpha\beta}, \quad v^\alpha \longrightarrow c^\alpha,$$

donde  $b$  y  $c$  son campos Grassmann valuados. Estos campos son conocidos como fantasmas, en el mismo sentido que en electrodinámica cuántica. Esto da una expresión final al determinante de Faddeev-Popov,

$$\Delta_{FP}[g] = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c \exp[iS_{fan}]$$

donde se define,

$$S_{fan} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{g} b_{\alpha\beta} \nabla^\alpha c^\beta \quad (3-7)$$

entonces se tiene que,

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp(-S_{Pol}[X, \hat{g}] - S_{fan}[b, c, \hat{g}]).$$

El rol de estos fantasmas en la teoría de cuerdas es eliminar los grados de libertad no físicos debido a la libertad de norma. Esta es la razón por la cual los fantasmas ayudarán a deshacerse de la anomalía de Weyl.

Antes de mostrar como es que estos fantasmas resuelven la anomalía de Weyl, primero hay que hacer algunas manipulaciones en la acción fantasma (3-7). Si se trabaja en la norma,

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\omega} \delta_{\alpha\beta},$$

lo que se obtiene al cambiar a coordenadas complejas es,

$$S_{fan} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \nabla_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z c^{\bar{z}}),$$

esto gracias a que  $b_{\alpha\beta}$  es sin traza. La expresión se puede simplificar aún más, ya que la los símbolos de Christoffel se anulan por las propiedades que tiene la diagonal de la métrica compleja. Obteniendo así,

$$S_{fan} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z c^{\bar{z}}).$$

Hay que notar que la acción no depende de  $\omega$ , esto hace que sea invariante de Weyl. Se define,

$$\begin{aligned} b &= b_{zz}, & \bar{b} &= b_{\bar{z}\bar{z}}, \\ c &= c^z, & \bar{c} &= c^{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Así la acción se ve como,

$$S_{fan} = \int \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}),$$

con ecuaciones de movimiento,

$$\bar{\partial}b = \partial\bar{b} = \bar{\partial}c = \partial\bar{c} = 0,$$

es claro que  $b$  y  $c$  son campos holomórficos mientras que  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  son antiholomórficos.

Usando la definición del tensor de energía-momento (2-2). Se puede calcular que el tensor de energía-momento para la acción fantasma es,

$$T = 2(\partial c)b + c\partial b, \quad \bar{T} = 2(\bar{\partial}\bar{c})\bar{b} + \bar{c}\bar{\partial}\bar{b}.$$

Ahora el objetivo es poder saber como contribuyen estos campos fantasmas a la carga central de la teoría y saber cuales son los operadores primarios. Con esta información se podrá deshacer la anomalía de Weyl.

### 3.3.1. Operadores Primarios y la Contribución Fantasma a la Carga Central

Al igual que en el caso de un campo escalar, se usarán técnicas de la integral funcional para poder calcular el propagador de la teoría fantasma. Así como antes se trabajará con la parte holomórfica, pues es análogo a la parte antiholomórfica.

Se tiene que,

$$0 = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c \frac{\delta}{\delta b(\xi)} [e^{-S_{fan}} b(\xi')] = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c e^{-S_{fan}} \left[ -\frac{1}{2\pi} \bar{\partial}c(\xi)b(\xi') + \delta(\xi - \xi') \right]$$

entonces,

$$\bar{\partial}c(\xi)b(\xi') = 2\pi\delta(\xi - \xi'),$$

y en el caso donde la derivada variacional es respecto a  $c(\xi)$  se tiene el resultado análogo,

$$\bar{\partial}b(\xi)c(\xi') = 2\pi\delta(\xi - \xi').$$

Estas ecuaciones se pueden resolver usando la identidad  $\bar{\partial}(1/z) = 2\pi\delta(z)$ , lo que se obtiene son los OPE's para  $b$  y  $c$ ,

$$b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + \dots,$$

$$c(w)b(z) = \frac{1}{w-z} + \dots$$

Con estos OPE's se puede calcular si  $b$  y  $c$  son operadores primarios usando el tensor de energía-momento

$$T(z) = 2 : \partial c(z)b(z) : + : c(z)\partial b(z) :$$

Se puede probar que,

$$T(z)c(w) = -\frac{c(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial c(w)}{z-w} + \dots,$$

$$T(z)b(w) = \frac{2b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(w)}{z-w} + \dots,$$

es decir,  $b$  y  $c$  son primarios con pesos conformes  $h = 2$  y  $h = -1$  respectivamente. Finalmente también se puede calcular la carga central de la teoría fantasma. Haciendo el OPE entre el

tensor de energía-momento con si mismo se obtiene,

$$T(z)T(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

Este es probablemente uno de los resultados más importantes de la teoría. El resultado anterior dice que para los fantasmas  $c = -26$ . Como se mencionó anteriormente, si se tenía carga central nula se podía deshacer la anomalía de Weyl, sin embargo tener carga central nula era no tener ningún grado de libertad en la teoría, por tanto ningún campo. Con este resultado es claro que sí se puede tener carga central nula sin deshacerse de los campos. La configuración más sencilla será agregar 26 campos escalares, pues como se vio anteriormente, cada campo escalar contribuye a la carga central con  $c = 1$ . Por lo que la teoría de cuerdas se necesita escribir en 26 dimensiones y a esto se le llama dimensión crítica.

El siguiente paso es escribir nuevos términos a la acción de Polyakov para tener una teoría suficientemente general.



## Capítulo 4

# Funciones Beta

La escala de energía es el orden de la energía que tienen las partículas en la teoría. En particular, las constantes de acoplamiento pueden cambiar si se considera objetos muy energéticos. Más aún, no se puede asegurar que la teoría que se tenga sea válida a todas las escalas de energía, por lo que se tiene que formular una acción efectiva, es decir una acción que describe la dinámica de la teoría a cierta escala energética. El objetivo de este capítulo es derivar las funciones beta del grupo de renormalización de la teoría. Las funciones beta son funciones que dependen de las constantes de acoplamiento de la teoría y dicen cuanto cambian estas respecto a la escala de energía. Es decir,

$$\beta^\alpha = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu},$$

donde  $\alpha$  es una constante de acoplo y  $\mu$  la escala de energía.

En el caso de una teoría conforme, en particular en la teoría de cuerdas, las funciones beta están íntimamente relacionadas con el tensor de energía-momento. Lo que no debería ser tan sorprendente, pues por un lado, lo que se necesita es hacer cero la traza del tensor de energía-momento y por otro lado, la teoría por ser conforme es invariante de escala, es decir las funciones beta deberían ser cero también.

La pregunta en este punto es, ¿cuáles son las constante de acoplamiento de la teoría? En las siguientes secciones se discutirá esta pregunta y se verá cuál es la relación de la acción efectiva

de la teoría, la gravedad de Einstein y las funciones beta.

## 4.1. Modelo Sigma

Para construir la acción más general, se debe pensar en todos los términos que son compatibles con la acción. Estos deberán ser invariantes bajo todas las simetrías de la acción.

El primer término que se puede considerar en la acción de Polyakov es término con un 2-tensor antisimétrico, pues nada restringe a la teoría a que exista una parte antisimétrica. Entonces el término se verá como

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta},$$

donde  $\epsilon$  es el tensor de Levi-Civita. Esta acción también se mantendrá invariante bajo reparametrizaciones y transformaciones de Weyl. El campo  $B$  se conoce como campo de Kalb-Ramon el cual se discute con más profundidad en [16], [3], [7], [11] y [9].

El campo  $B$  debería pensarse como el análogo al potencial vectorial del electromagnetismo. En ese mismo sentido la acción también es invariante bajo transformaciones de norma análogas a las de  $U(1)$  y escoger un  $B$  tiene cierta ambigüedad,

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu,$$

así como en electromagnetismo se puede construir un tensor invariante de norma usando la derivada exterior. Aquí se puede construir también un tensor de intensidad de campo haciendo  $H = dB$ , este se verá como,

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}.$$

Por otro lado existe un término más que es posible agregar a la acción. Este término es un

campo escalar acoplado con la hoja de mundo y se le conoce como dilatón.

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{-g} R^{(2)} \Phi(X),$$

donde se denota como  $R^{(2)}$  al escalar de Ricci de la hoja de mundo.

Hay dos aspectos importantes que mencionar acerca del dilatón y su acción. El primero es que explícitamente no es del mismo orden en  $\alpha'$  que G y B, esto causará que el dilatón sea más difícil de manejar, pues en el sentido de una serie perturbativa en  $\alpha'$ , las contribuciones del dilatón tendrán diferente orden que las de G y B.

Por otro lado, el aspecto probablemente más preocupante es que en general rompe invarianza bajo transformaciones de Weyl. Sin embargo, el hecho de que este rompa invarianza de Weyl será la manera de contrarrestar la anomalía de Weyl. Así que no es una locura incluirlo en la acción, a pesar de que rompa una simetría de la que se ha mencionado su importancia durante todo el trabajo. La acción que se escribe usando la acción de Polyakov y los términos previamente discutidos se llama *Modelo Sigma*.

Al inicio del capítulo se mencionó que las funciones beta del grupo de renormalización deberían ser cero pues la teoría es conforme en la hoja de mundo. Desde el punto de vista de esta, los campos G, B y  $\Phi$  son las constantes de acoplamiento, por lo que las funciones beta serán las asociadas a estos campos.

Sin embargo las funciones beta serán series perturbativas, para esto es útil hacer también una serie perturbativa en la acción. El parámetro en la serie, como se mencionó antes será  $\alpha'$ . Además, como este tratamiento está en un espacio-tiempo curvo, habrá que considerar toda la maquinaria de geometría diferencial que esto conlleva. Para esto existe un método que facilitará la expansión y el cálculo de las funciones beta. Este método se conoce como *Método de Campo de Fondo* o BFM por sus siglas en inglés.

## 4.2. Método de Expansión en Campos de Fondo

Para este método es necesario tener claro como funciona la acción clásica, en el sentido de una funcional, es decir, la acción es valuada en funciones y da como resultado un escalar. Estas funciones son trayectorias  $X^\mu(\xi)$  y existe una trayectoria que minimiza la acción  $X_0^\mu(\xi)$ . En ese sentido se puede considerar la trayectoria que minimiza más alguna perturbación que se puede considerar como fluctuaciones cuánticas. Para ser fluctuaciones se necesita que sean pequeñas, para eso es necesario una constante pequeña y el único parámetro libre que se tiene es  $\alpha'$ , entonces se hace,

$$X^\mu(\xi) = X_0^\mu(\xi) + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\xi),$$

y se expande al rededor de  $\alpha'$ .

Sin embargo, el campo  $Y^\mu$  que se considerará el campo cuántico quedará definido como la diferencia de 2 vectores. Al estar en un espacio con curvatura, este no será invariante de Lorentz, por lo que se necesita escribir a la teoría en función de otro campo que sí lo sea. La herramienta para poder definir este campo viene de la geometría diferencial y se basa en escribir al sistema en unas coordenadas que se llaman *Coordenadas Normales de Riemann*, esto dará una definición natural de un campo invariante de Lorentz.

### 4.2.1. Coordenadas Normales de Riemann

Aunque el desarrollo de las coordenadas normales de Riemann puede ser planteado de una manera más formal desde el punto de vista matemático, en este trabajo se tratará de explicar este método de la manera más sencilla posible. Este se puede estudiar con mayor precisión en [3], [9] y [15].

Lo primero que hay que hacer es pensar en un espacio donde cada punto es una trayectoria, el espacio  $\{X^\mu\}$ , se puede pensar en las geodésicas que unen puntos en ese espacio. Entonces se puede considerar una geodésica  $\lambda(t)$  que une los puntos  $X_0^\mu$  con  $X_0^\mu(\xi) + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\xi)$ , es decir,

$$\lambda^\mu(0) = X_0^\mu,$$

$$\lambda^\mu(1) = X_0^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu,$$

entonces se puede definir,

$$\eta^\mu = \dot{\lambda}^\mu(0),$$

donde el punto es la derivada respecto al parámetro afín.

La geodésica  $\lambda(t)$  debe satisfacer la ecuación de la geodésica,

$$\ddot{\lambda}^\mu(t) + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{\lambda}^\nu(t) \dot{\lambda}^\sigma(t) = 0,$$

entonces, se puede expandir  $\lambda(t)$  en una serie de Taylor al rededor de 0 y usar la ecuación de la geodésica para llegar a,

$$\lambda^\mu(t) = X_0^\mu + \eta^\mu t - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \eta^\nu \eta^\sigma t^2 + \dots \quad (4-1)$$

Se definen las coordenadas normales de Riemann evaluando (4-1) en  $t = 1$ . Estas son el conjunto de coordenadas  $\eta^\mu$  definidas en una vecindad de  $X_0^\mu$ . Es así como se puede escribir el campo cuántico  $Y^\mu$  que no es invariante de Lorentz, en función de un campo que sí lo es,

$$\pi^\mu \equiv \sqrt{\alpha'} Y^\mu = \eta^\mu - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \eta^\nu \eta^\sigma + \dots \quad (4-2)$$

Si se hubiera iniciado con las coordenadas normales de Riemann, en ecuación (4-2) sólo estaría el primer término del lado derecho. Esto quiere decir que en las coordenadas normales de Riemann, todos los símbolos de Christoffel son cero, entonces también sus derivadas covariantes lo serán.

Si se denota a los símbolos de Christoffel en las coordenadas normales de Riemann como  $\bar{\Gamma}$ , entonces el tensor de Riemann en coordenadas normales se verá como,

$$\bar{R}^\mu_{\nu\sigma\lambda} = \partial_\sigma \bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \bar{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma}, \quad (4-3)$$

y usando que los símbolos de Christoffel con barra son cero y la ecuación (4-3), se puede mostrar que,

$$\partial_\nu \bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu = \frac{1}{3}(\bar{R}^\nu_{\sigma\nu\lambda} + \bar{R}^\mu_{\lambda\nu\sigma}). \quad (4-4)$$

Por otro lado se pueden escribir la serie de Taylor para un tensor de  $n$  índices en coordenadas normales de Riemann,

$$\bar{T}_{\mu_1 \dots \mu_n}(X_0 + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \bar{T}_{\mu_1 \dots \mu_n}(X_0)) \eta^{\nu_1} \dots \eta^{\nu_n},$$

entonces, cambiando las derivadas parciales por derivadas covariantes y usando (4-4), se tiene que para un 2-tensor,

$$T_{\mu\nu}(X_0 + \eta) = T_{\mu\nu}(X_0) + \eta^\lambda \nabla_\lambda T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \nabla_\lambda \nabla_\sigma T_{\mu\nu}(X_0) - \frac{1}{3} R^\rho_{\lambda\mu\sigma} T_{\rho\nu} - \frac{1}{3} R^\rho_{\lambda\nu\sigma} T_{\mu\rho}(X_0) \right) \eta^\lambda \eta^\sigma, \quad (4-5)$$

esta vez se omitieron las barras, pues toda la expresión es covariante, entonces debe cumplirse para cualquier sistema de coordenadas. Lo que se acaba de encontrar es una presentación covariante del teorema de Taylor.

Sin embargo, se necesita una expansión en  $\alpha'$  y en los resultados anteriores parece que no esta. Se mencionó que la definición (4-2) en coordenadas normales de Riemann se satisface con sólo el primer término del lado derecho. Entonces (4-5) se puede escribir como,

$$T_{\mu\nu}(X_0 + \sqrt{\alpha'} Y) = T_{\mu\nu}(X_0) + \sqrt{\alpha'} Y^\lambda \nabla_\lambda T_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2} \left( \nabla_\lambda \nabla_\sigma T_{\mu\nu}(X_0) - \frac{1}{3} R^\rho_{\lambda\mu\sigma} T_{\rho\nu} - \frac{1}{3} R^\rho_{\lambda\nu\sigma} T_{\mu\rho}(X_0) \right) Y^\lambda Y^\sigma, \quad (4-6)$$

esto aunque pudiera parecer redundante, no lo es, lo que esto quiere decir es que la elección para la fluctuación  $Y$ , puede simplificar los cálculos si escoge  $Y$  en coordenadas de Riemann.

### 4.2.2. Expansión de la Acción

Ahora hay que expandir la acción usando las herramientas desarrolladas. Esto se puede primero hacer considerando cada término de la acción por separado, es decir, expandiendo la acción de Polyakov, Kalb-Ramon y finalmente la del dilatón.

En la acción de Polyakov (1-6), hay dos términos por expandir,  $G$  y el término que es una derivada del encaje. Expandir al campo  $G$  no presenta ningún inconveniente, pues el segundo término de (4-6), es la primera derivada covariante y esta es cero cuando se aplica a la métrica. Por lo que queda,

$$G_{\mu\nu}(X_0 + \sqrt{\alpha'}Y) = G_{\mu\nu}(X_0) + \frac{\alpha'}{3}R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0)Y^\lambda Y^\sigma. \quad (4-7)$$

Para poder expandir el término de la derivada, se toma la derivada de ambos lados de (4-2) y se obtiene,

$$\partial_\alpha(X_0^\mu + \sqrt{\alpha'}Y^\mu) = \partial_\alpha X_0^\mu + \sqrt{\alpha'}\nabla_\alpha Y^\mu + \frac{1}{3}R^\mu{}_{\lambda\sigma\nu}(X_0)\partial_\alpha X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma, \quad (4-8)$$

donde se define  $\nabla_\alpha Y^\mu \equiv \partial_\alpha Y^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\partial_\alpha X_0^\lambda Y^\sigma$  [1]. El cálculo a detalle se puede ver en [15].

Finalmente, manteniendo todo a orden lineal en  $\alpha'$  la acción de Polyakov se ve como,

$$\begin{aligned} S_{Pol}[X_0 + \sqrt{\alpha'}Y] &= S_{Pol}[X_0] \\ &+ \frac{\alpha'}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{-g}g^{\alpha\beta} \left( G_{\mu\nu}(X_0)\nabla_\alpha Y^\mu \nabla_\beta Y^\nu + R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0)\partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma \right), \end{aligned} \quad (4-9)$$

sin embargo, no se ha escrito el término que es de orden  $\sqrt{\alpha'}$ , este se considera proporcional a la primera derivada variacional de la acción, que está evaluada en  $X_0$  que es una solución clásica, por lo que debe ser cero. Por otro lado, el primer término ya sólo es un número, que para cuestiones de la integral funcional no será inconveniente y es posible no considerarlo para simplificar los cálculos.

Este resultado tiene gran importancia, pues se puede considerar que el término que incluye

a la métrica del espacio tiempo es un término cinético y el que es proporcional al tensor de Riemann es una interacción del campo cuántico con el campo clásico. Además que escrito de esta manera, las cosas se ven como una teoría de campos común y se pueden usar todas las herramientas ya conocidas en esta área.

Ahora, se procederá a expandir la acción del dilatón, para terminar con la acción de Kalb-Ramon que es la más compleja de trabajar por cuestiones que se discutirán un poco más adelante. El dilatón, al ser un campo escalar y que su acción no contiene derivadas del encaje, será sencillo expandir esta a orden  $\alpha'$ . Obteniendo entonces,

$$S_D[X + \sqrt{\alpha'}Y] = S_D[X_0] + \frac{\alpha'}{8\pi} \int d^2\xi \sqrt{-g} R^{(2)} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi(X_0) Y^\mu Y^\nu, \quad (4-10)$$

donde el término de orden  $\sqrt{\alpha'}$  no se consideró por las razones mencionada antes con la acción de Polyakov.

Ahora, lo que falta es hacer la expansión de la acción de Kalb-Ramon. Como se mencionó antes, B tiene cierta ambigüedad y no es invariante de norma. Esto significa que si se quiere no romper la simetría de norma, la expansión de la acción deberá de estar en términos de H, el tensor invariante de norma. Es aquí donde está lo engorroso del término de Kalb-Ramon, pues habrá que asegurarse que todo quede en función de H.

Primero, se puede hacer la expansión de B usando (4-6), en este caso la primera derivada covariante ya no necesariamente es cero como en el caso de G,

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(X_0 + \sqrt{\alpha'}Y) &= B_{\mu\nu}(X_0) + \sqrt{\alpha'} Y^\lambda \nabla_\lambda B_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\alpha'}{2} \left( \nabla_\lambda \nabla_\sigma B_{\mu\nu}(X_0) - \frac{1}{3} R^\rho_{\lambda\mu\rho} B_{\rho\nu} - \frac{1}{3} R^\rho_{\lambda\nu\sigma} B_{\mu\rho}(X_0) \right) Y^\lambda Y^\sigma, \end{aligned} \quad (4-11)$$



De igual manera, usando (4-8), la acción de Kalb-Ramon queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} S_{KR}[X_0 + \sqrt{\alpha'}Y] &= S_{KR}[X_0] \\ &+ \frac{\alpha'}{4\pi} \int d^2\xi \epsilon^{\alpha\beta} \left( B_{\mu\nu}(X_0) \nabla_\alpha Y^\mu \nabla_\beta Y^\nu + 2\nabla_\lambda B_{\mu\nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \nabla_\beta Y^\nu Y^\lambda \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (\nabla_\lambda \nabla_\sigma B_{\mu\nu}(X_0) - 2B_{\rho\mu}(X_0) R^\rho_{\lambda\sigma\nu}) \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma \right), \end{aligned}$$

sin embargo, esto no es suficiente. Como se mencionó antes, hay que escribir todo en términos de H.

Ahora, si se integra por partes el primer término de la expresión anterior, se puede usar la regla de la cadena para probar que, el integrando queda,

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{2} \nabla_\lambda \nabla_\sigma B_{\mu\nu} \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma - B_{\rho\mu} R^\rho_{\lambda\sigma\nu} \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma \right. \\ \left. H_{\lambda\mu\nu} Y^\nu \partial_\alpha X_0^\lambda \nabla_\beta Y^\mu - (\nabla_\mu B_{\lambda\nu} + \nabla_\nu B_{\lambda\mu}) Y^\nu \partial_\beta X_0^\lambda \nabla_\alpha Y^\mu - B_{\mu\nu} Y^\mu \nabla_\alpha \nabla_\beta Y^\nu \right], \end{aligned}$$

lo que hay que usar ahora es que se satisface,

$$\epsilon^{\alpha\beta} [\nabla_\lambda \nabla_\sigma B_{\mu\nu} + \nabla_\lambda \nabla_\mu B_{\nu\sigma}] \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma = \epsilon^{\alpha\beta} \nabla_\lambda H_{\sigma\mu\nu} \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\lambda Y^\sigma,$$

y el conmutador,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\lambda] B_{\nu\sigma} = R^\sigma_{\nu\lambda\mu} B_{\sigma\rho} + R^\sigma_{\rho\lambda\mu} B_{\nu\sigma},$$

además la primera identidad de Bianchi para el tensor de Riemann.

Con estos ingredientes es posible obtener,

$$\begin{aligned} S_{KR}[X_0 + \sqrt{\alpha'}Y] &= S_{KR}[X_0] + \frac{\alpha'}{4\pi} \int d^2\xi \epsilon^{\alpha\beta} \left( H_{\mu\sigma\lambda}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \nabla_\beta Y^\sigma Y^\lambda \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \nabla_\sigma H_{\mu\nu\lambda}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\sigma Y^\lambda \right), \end{aligned} \quad (4-12)$$

por último, como se mencionó anteriormente, los términos de la acción evaluada en  $X_0$ , son sólo constantes que no serán relevantes en la integral funcional. Por lo que finalmente se pueden

omitir y trabajar con la acción,

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = & \frac{\alpha'}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{-g} \left[ g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(X_0) \nabla_\alpha Y^\mu \nabla_\beta Y^\nu + \left( g^{\alpha\beta} R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2} \nabla_\sigma H_{\mu\nu\lambda}(X_0) \right) \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu Y^\sigma Y^\lambda + \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} H_{\mu\sigma\lambda}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \nabla_\beta Y^\sigma Y^\lambda \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} R^{(2)} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi(X_0) Y^\mu Y^\nu \right], \quad (4-13)
\end{aligned}$$

donde el superíndice 2 es sólo para denotar que es una acción cuadrática respecto al campo cuántico.

Esta es la acción con la que se podrán calcular las funciones beta del grupo de renormalización. Es aquí donde se nota la verdadera ventaja del BFM, pues ahora la teoría luce como una teoría de campo cuántico perturbativa. Sin embargo hay un último problema antes de calcular las funciones beta, esta acción está en un espacio curvo. Habrá que recurrir a una herramienta bien conocida en la relatividad general, los vielbein. Estos permiten en una vecindad suficientemente pequeña, realizar los cálculos como si fuera un espacio plano. Así será posible, utilizar herramienta de la teoría cuántica de campos en espacio plano para un campo escalar.

### 4.2.3. Los Vielbein

El objetivo ahora, será utilizar los vielbein para poder calcular el valor de expectación del tensor de energía-momento de la teoría. Los vielbien son vectores que conectan la información del espacio localmente plano, con la información del espacio globalmente curvo. Estos están definidos así [3],

$$e_\mu^i(X_0) e_\nu^j(X_0) \eta_{ij} = G_{\mu\nu}(X_0) \quad (4-14)$$

donde  $\eta_{ij}$  es la métrica de Minkowski. Estos vectores permiten escribir localmente, objetos en el espacio curvo en coordenadas planas. Esto se hace de la siguiente manera,

$$Y^i = e_\mu^i(X_0) Y^\mu. \quad (4-15)$$

Con esta herramienta en mano, se puede escribir ahora la expansión (4-13) en términos de

índices planos,

$$G_{\mu\nu}(X_0)\nabla_\alpha Y^\mu\nabla_\beta Y^\nu = e_\mu^i(X_0)e_\nu^j(X_0)\eta_{ij}\nabla_\alpha Y^\mu\nabla_\beta Y^\nu = \eta_{ij}\nabla_\alpha(Y)^i\nabla_\beta(Y)^j,$$

las derivadas covariantes resultantes están definidas en términos de la conexión de espín, tema en el cual no se abundará en este trabajo. Sin embargo, no debe haber preocupación alguna, pues el BFM es mantiene la teoría manifiestamente covariante en términos de  $X_0$ . Por lo que se puede considerar sólo,

$$\partial_\alpha Y^i\partial_\beta Y^j = \nabla_\alpha(Y)^i\nabla_\beta(Y)^j.$$

Para los siguientes términos,

$$\begin{aligned} & \left( g^{\alpha\beta}R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0) + \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\frac{1}{2}\nabla_\sigma H_{\mu\nu\lambda}(X_0) \right) \partial_\alpha X_0^\mu\partial_\beta X_0^\nu Y^\sigma Y^\lambda \\ &= \left( g^{\alpha\beta}R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0) + \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\frac{1}{2}\nabla_\sigma H_{\mu\nu\lambda}(X_0) \right) \partial_\alpha X_0^\mu\partial_\beta X_0^\nu e_j^\sigma(X_0)Y^j e_i^\lambda(X_0)Y^i \\ &= \left( g^{\alpha\beta}R_{\mu ij\nu}(X_0) + \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\frac{1}{2}\nabla_i H_{\mu\nu j}(X_0) \right) \partial_\alpha X_0^\mu\partial_\beta X_0^\nu Y^i Y^j, \end{aligned}$$

también,

$$H_{\mu\sigma\lambda}(X_0)\partial_\alpha X_0^\mu\nabla_\beta Y^\sigma Y^\lambda = H_{\mu ij}(X_0)\partial_\alpha X_0^\mu\nabla_\beta Y^i Y^j,$$

y finalmente para la parte del dilatón,

$$R^{(2)}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi(X_0)Y^\mu Y^\nu = R^{(2)}\nabla_i\nabla_j\Phi(X_0)Y^i Y^j$$

Con este desarrollo se puede proceder al cálculo de las funciones beta de renormalización. Estas estarán codificadas en el valor de expectación de la traza del tensor de energía momento. Esto se discutirá en la siguiente sección.

### 4.3. Valor de Expectación del Tensor de Energía-Momento

El procedimiento a seguir es calcular el valor de expectación de la traza del tensor de energía-momento como en [3]. El argumento para justificar esto yace en el hecho de que la teoría es conforme. Eso implica invarianza bajo reescalamientos. Como se mencionó antes, las funciones beta miden el cambio de las constantes de acoplamiento respecto a la escala de energía, al ser la teoría invariante bajo reescalamientos, estas deben de ser cero. Por otro lado, como se vio en el capítulo 3, existe una anomalía, la anomalía de Weyl, esto hace que el valor de expectación del tensor de energía-momento sea en general distinto de cero. Una manera de curar la anomalía es exigir que el valor de expectación de la traza del tensor de energía momento sea cero y esto es equivalente a exigirle a las funciones beta ser cero. Esta es la razón por la cuál calcular este valor de expectación es equivalente a calcular estas funciones. En particular, las funciones beta serán coeficientes de el valor de expectación de la traza del tensor de energía momento [13].

Como se vio en el capítulo (2), existe una ecuación de conservación (2-6). Esta se puede escribir en la teoría cuántica agregando valores de expectación. En coordenadas complejas se verá como,

$$\nabla^{\bar{z}} \langle T_{\bar{z}z} \rangle + \nabla^z \langle T_{zz} \rangle = 0, \quad (4-16)$$

el primer término sin la derivada covariante es la traza. El método será calcular el segundo y así poder saber como se ve la traza. Para esto se usarán diagramas de Feynman asociados a las perturbaciones de (4-13).

Lo primero que hay que hacer, es pasar al espacio de momentos para deshacerse de las derivadas covariantes, también se usarán las coordenadas del cono de luz (2-1). Haciendo que la ecuación de conservación tome la siguiente forma,

$$q_+ \langle T_{-+} \rangle + q_- \langle T_{++} \rangle = 0 \quad (4-17)$$

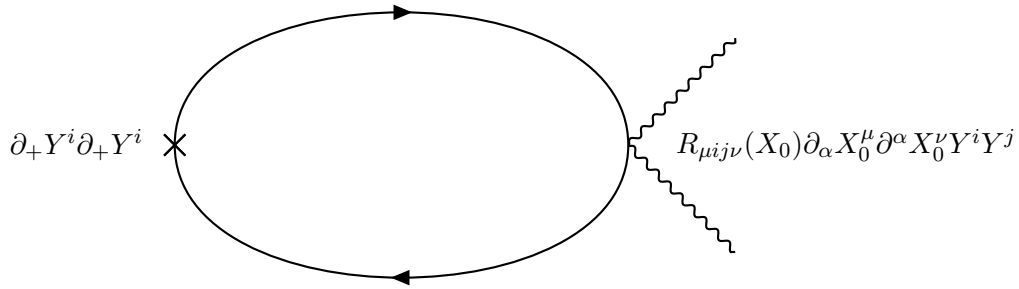
La forma de calcular esta contribución, es con la integral funcional,

$$\langle T_{++} \rangle = \int \mathcal{D}Y e^{S[X_0] + S^{(2)}} T_{++} \approx \int \mathcal{D}Y e^{S[X_0]} (1 + S^{(2)}) T_{++},$$

donde se usó que  $S^{(2)}$  es de orden  $\alpha' \ll 1$ , por lo que se puede expandir la exponencial. Ahora, recordando cómo se ve el tensor de energía momento en coordenadas complejas (2-7), se obtiene que el primer término será sólo el propagador libre del campo,

$$-\partial_+ Y^i(x) \partial_+ Y^j(y) = -\partial_+ \partial_+ D(x-y) = -i \partial_+ \partial_+ \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\delta^{ij} e^{ip(x-y)}}{p^2} = i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\delta^{ij} p_+^2 e^{ip(x-y)}}{p^2}.$$

donde, se considera  $x$  y  $y$  como puntos sobre la hoja de mundo, con coordenadas  $+$  y  $-$ . Además, hay más términos que pueden ser pensados como perturbaciones. Para el primer término, el que es proporcional al tensor de Riemann, el diagrama a resolver es,



y la contribución a calcular es,

$$\begin{aligned} \langle T_{++} \rangle &= \int \mathcal{D}Y e^{S[X_0]} S^{(2)} T_{++} = -\langle \alpha' R_{\mu i j \nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu Y^i(x) Y^j(x) \partial_+ Y^i(y) \partial_+ Y^i(y) \rangle \\ &= -\alpha' R_{\mu i j \nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu \langle Y^i(x) Y^j(x) \partial_+ Y^i(y) \partial_+ Y^i(y) \rangle \\ &= -\alpha' R_{\mu i j \nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu \partial_+ D(x-y) \partial_+ D^{ij}(x-y), \end{aligned}$$

para pasar al espacio de momentos y poder utilizar (4-17), se usará el teorema de convolución para la transformada de Fourier, pues los propagadores se pueden pensar como la transformada

inversa de,

$$\frac{i}{p^2 + m^2},$$

en este caso sin masa. Se puede definir la convolución como,

$$f(p) * g(p') = h(q) = \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} f(l) g(l - q),$$

entonces, usando el teorema de convolución

$$\begin{aligned} \langle T_{++} \rangle &= -\alpha' \delta^i j R_{\mu i j \nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_+ e^{ip(x-y)}}{p^2} \int \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \frac{p'_+ e^{ip'(y-x)}}{p'^2} \\ &= -\alpha' \delta^i j R_{\mu i j \nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} f(p) e^{ip(x-y)} \int \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} g(p') e^{ip'(y-x)} \\ &= -\alpha' \delta^i j R_{\mu i j \nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} h(q) e^{iq(x-y)}, \end{aligned}$$

es decir la transformada inversa de la convolución. Por lo que, si se quiere pasar al espacio de momentos, sólo se necesita poner h.

$$\langle T_{++} \rangle = \alpha' R_{\mu\nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \frac{l_+(l+q)_+}{l^2(l+q)^2},$$

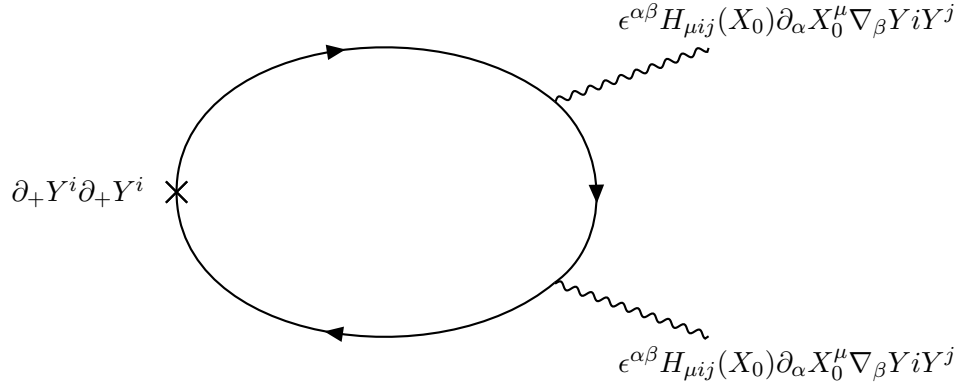
donde se tomó  $q \rightarrow -q$  para ser consistente con el flujo de momento, además se contrajo de manera adecuada el tensor de Riemann. Aunque la integral final pareciera divergente, es posible resolverla usando las formulas de regularización dimensional [14]. Dando como resultado,

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_+(q+p)_+}{p^2(p+q)^2} = -\frac{1}{4} \frac{q_+}{q_-}$$

Ahora, sólo es cuestión de utilizar (4-17) para encontrar la contribución a la traza, donde se obtiene,

$$\langle T_{++} \rangle = \frac{1}{4} \alpha' R_{\mu\nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu.$$

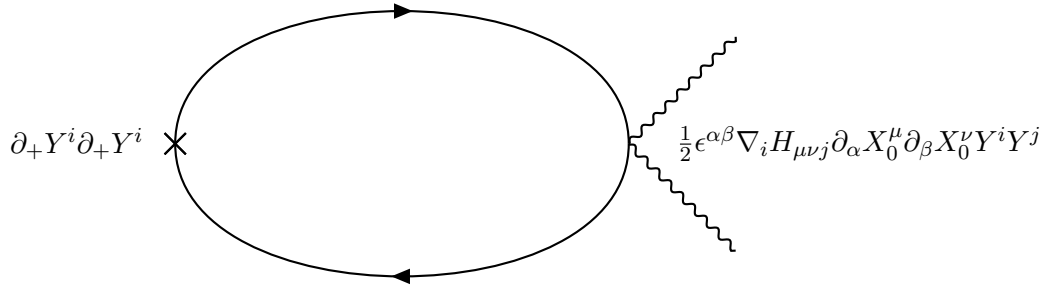
Con el proceso análogo, se pueden calcular las contribuciones que vienen de H, tomando en cuenta los siguientes diagramas.



Obtiendo,

$$\langle T_{++} \rangle = -\frac{\alpha'}{16} H_{\mu\lambda\sigma}(X_0) H_\nu{}^{\lambda\sigma}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial^\alpha X_0^\nu.$$

Y finalmente, H tiene un diagrama igual al de G,



con la contribución,

$$\langle T_{++} \rangle = \frac{1}{8} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu}(X_0) \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu \epsilon^{\alpha\beta}$$

Entonces, hasta este momento, las contribuciones han dado,

$$\langle T_{++} \rangle = \frac{1}{4} \alpha' \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\mu\lambda\sigma} H_\nu{}^{\lambda\sigma} \right] \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu g^{\alpha\beta} + \frac{1}{8} \alpha' \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} \partial_\alpha X_0^\mu \partial_\beta X_0^\nu \epsilon^{\alpha\beta}$$

donde se puede identificar quienes será las funciones beta.

Sin embargo, aún no se ha mencionado al dilatón. Aunque anteriormente el dilatón no presentó dificultad alguna en el desarrollo. Es en este punto cuando las cosas empiezan a complicarse, pues como se mencionó antes, el dilatón no tiene el mismo orden en  $\alpha'$  que los otros

campos. Es por eso que se maneja de forma distinta.

Para conocer las contribuciones que el dilatón tiene hacia las funciones beta asociadas a G y B, se plantea la forma que debe tener su tensor de energía-momento sabiendo que es un campo escalar,

$$T_{\alpha\beta}^D = (\partial_\alpha\partial_\beta - \delta_{\alpha\beta}\square)\Phi(X),$$

en coordenadas de cono de luz, la delta se elimina y se tiene,

$$T_{-+}^D = \square_\xi \Phi(X(\xi))$$

Esta es la contribución del dilatón a la traza del tensor de energía-momento. Evidentemente es distinto de cero y no es nada sorprendente pues este no es invariante de Weyl, sin embargo para eso fue agregado a la teoría, el dilatón fue agregado para curar las anomalías de G y B. Por la diferencia de orden que tienen estos, los procesos a orden árbol del dilatón, están al mismo orden que los cálculos a un lazo anteriores. Es por eso que para ver como este contribuye a un lazo a las funciones betas de G y B basta calcular la traza clásica. Para eso hay que escribir esta en función de campo de fondo,

$$\square_\xi\Phi(X_0) = \partial^\alpha\partial_\alpha\Phi(X_0) = \partial^\alpha(\partial_\mu\Phi(X_0)\partial_\alpha X_0^\mu) = \partial_\nu\partial_\mu\Phi(X_0)\partial^\alpha X_0^\nu\partial_\alpha X_0^\mu + \square X_0^\mu\partial_\mu\Phi(X_0).$$

La expresión resultante aún no es completamente covariante por el operador de D'Alembert, que está en coordenadas de la hoja de mundo. Pero afortunadamente no es difícil calcular las ecuaciones de movimiento de  $X_0$  y estas incluyen dicho operador. Entonces,

$$\square X_0^\mu = -\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu\partial_\alpha X_0^\lambda\partial^\alpha X_0^\sigma - \frac{1}{2}\nabla^\lambda\Phi(X_0)H_{\lambda\mu\nu}(X_0)\partial_\alpha X_0^\lambda\partial_\beta X_0^\nu\epsilon^{\alpha\beta},$$

si se sustituye esta ecuación en la anterior, la expresión resultante tiene muy buen aspecto,

$$\square_\xi\Phi(X_0) = \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi(X_0)\partial_\alpha X_0^\mu\partial^\alpha X_0^\nu - \frac{1}{2}\nabla^\lambda\Phi(X_0)H_{\lambda\mu\nu}\partial_\alpha X_0^\mu\partial_\beta X_0^\nu\epsilon^{\alpha\beta}$$



Esta última expresión, no sólo es completamente covariante, tiene términos similares a los que tiene la traza del tensor de energía momento. Es de esta forma que esta expresión se puede sumar a las contribuciones y termina de formar las funciones beta de G y B. Además por cuestiones de unidades, debe estar multiplicado por algo de orden  $\alpha'$ , sin perdida de generalidad puede ser  $2\alpha'$ . Finalmente se obtiene que,

$$\begin{aligned} \langle T_{++} \rangle &= \frac{1}{4}\alpha' \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}H_{\mu\lambda\sigma}H_{\nu}{}^{\lambda\sigma} + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi \right] \partial_{\alpha}X_0^{\mu}\partial_{\beta}X_0^{\nu}g^{\alpha\beta} \\ &+ \frac{1}{8}\alpha' \left[ \nabla^{\lambda}H_{\lambda\mu\nu} - 2\nabla^{\lambda}\Phi H_{\lambda\mu\nu} \right] \partial_{\alpha}X_0^{\mu}\partial_{\beta}X_0^{\nu}\epsilon^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

con

$$\beta_{\mu\nu}^G = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}H_{\mu\lambda\sigma}H_{\nu}{}^{\lambda\sigma} + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi \quad (4-18)$$

$$\beta_{\mu\nu}^B = -\frac{1}{2}\nabla^{\lambda}H_{\lambda\mu\nu} + \nabla^{\lambda}\Phi H_{\lambda\mu\nu} \quad (4-19)$$

Ahora sólo falta calcular la función beta asociada al dilatón. Para esta habrá que usar una técnica completamente diferente, pero muy útil. La razón de esto vuelve a ser la diferencia de orden que tiene el dilatón respecto a los otros campos. Esto causará que el dilatón reciba contribuciones de orden más altos para G y B, es decir, cálculos de más lazos. El problema de esto, es lo laborioso que se vuelve calcular diagramas a más de un lazo. Para resolver esto existen identidades llamadas *Identidades Diferenciales* [6], [7]. Estas identidades, fijan de cierta manera a la teoría para poder curar las anomalías que viene de una simetría de norma, justo como la simetría de Weyl. Las identidades diferenciales en este caso son,

$$\nabla^{\mu}\beta_{\mu\nu}^B - 2\nabla^{\mu}\Phi\beta_{\mu\nu}^B = 0 \quad (4-20)$$

$$-2\nabla^{\mu}\beta_{\mu\lambda}^G + \nabla_{\lambda}\beta_{\mu}{}^{\mu}{}^G + 4\nabla^{\mu}\Phi\beta_{\mu\lambda}^G + H_{\lambda}{}^{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}^B - 4\nabla_{\lambda}\beta^{\Phi} = 0 \quad (4-21)$$

en particular, la segunda identidad será de gigantesca ayuda para obtener la función beta del dilatón, pues evitará que sea necesario realizar cálculos muy laboriosos usando sólo las funciones beta que ya fueron calculadas.

Para poder encontrar exitosamente la función beta asociada al dilatón usando la identidad de consistencia (4-21), hay que utilizar las identidades de Bianchi [7], [15], [9],

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}R, \quad H^{\lambda\sigma} \nabla_\mu H_{\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{6}\nabla_\nu H^2,$$

además, hay que tener en cuenta el siguiente conmutador,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}V^\sigma.$$

donde  $V^\rho$  es un vector arbitrario.

Usando esto se obtiene que,

$$\beta^\Phi = (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}\nabla^2\Phi - \frac{1}{24}H^2, \quad (4-22)$$

es importante notar que a esta función beta le hace falta un término que depende de la dimensión y la contribución de los fantasmas a la carga central. Pero este término desaparece una vez que las cosas están en dimensión crítica. Es por esa razón que en este trabajo no se calculó, pues todos estos cálculos están considerados en dimensión crítica. Sin embargo, si se quisiera trabajar una teoría de cuerdas fuera de la dimensión crítica, debe considerarse.

El cálculo de las funciones beta formalmente viene del método de renormalización. Existen muchos trabajos en los que estas funciones son calculadas así, [3], [5], [9], [7], [15]. Otra forma de realizar este cálculo es escribir todos los términos de orden  $\alpha'$  con coeficientes que pueden contener las funciones beta. Después, basándose en las simetrías que estas deben de satisfacer, se pueden fijar dichos coeficientes y obtener las funciones beta. Este procedimiento se puede ver en [2].

Finalmente, fijando (4-18), (4-19) y (4-22) a cero, la teoría debe curarse de la anomalía.

## Capítulo 5

# Acción Efectiva e Identidades de Noether

En este último capítulo se reflexiona acerca del significado de la acción efectiva, sus ecuaciones de movimiento y su relación con el modelo sigma y las funciones beta. También se muestra una particularidad de estas acompañadas de las identidades diferenciales, introduciendo las llamadas identidades de Noether.

### 5.1. Acción Efectiva

Como se mencionó, hacer las funciones beta cero cura a la teoría de la anomalía de Weyl. Por otro lado, hacer estas funciones cero da como resultado un conjunto de ecuaciones de movimiento para los campos  $G$ ,  $B$  y  $\Phi$ . Si se tienen un conjunto de ecuaciones de movimiento, entonces estas deberían de venir de una acción efectiva. De modo que la pregunta a seguir es, ¿cuál es esa acción efectiva?

A pesar de no ser tan sencillo plantear la acción efectiva, esta es muy conocida en la literatura, pues es de las principales razones por las que la teoría de cuerdas tuvo gran impacto. La

acción efectiva es esta,

$$S = \int d^{26}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left( R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}H^2 \right), \quad (5-1)$$

calculando sus ecuaciones de movimiento se obtiene,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R &= \frac{1}{4} \left[ H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}G_{\mu\nu}H^2 \right] + 2G_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - 2G_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2 - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi, \\ \frac{1}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} &= \nabla^\lambda\Phi H_{\lambda\mu\nu}, \\ \frac{1}{12}H^2 &= R + 4\nabla^2\Phi - 4(\nabla\Phi)^2, \end{aligned}$$

notando que las primeras son las ecuaciones de campo de Einstein, donde el tensor de materia se define como,

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[ H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}G_{\mu\nu}H^2 \right] + 2G_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - 2G_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2 - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi \quad (5-2)$$

que es covariante y de divergencia cero.

Además se puede ver que en términos de las funciones beta, deben de verse así,

$$\frac{\delta S}{\delta G_{\mu\nu}} = \beta^{G\ \mu\nu} + 2G^{\mu\nu}(\beta^\Phi - \frac{1}{4}\beta_\mu^G{}^\mu), \quad (5-3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta B_{\mu\nu}} = \beta^{B\ \mu\nu}, \quad (5-4)$$

$$\frac{\delta S}{\delta\Phi} = -8(\beta^\Phi - \frac{1}{4}\beta_\mu^G{}^\mu). \quad (5-5)$$

esto muestra que es equivalente hacer la funciones beta cero y que se satisfagan las ecuaciones de movimiento.

Este resultado es sumamente importante, pues afirma que si se exige que la teoría sea consistente, es decir no anómala, entonces se satisfacen las ecuaciones de Einstein. Por otro lado, es claro que la gravedad de Einstein es entonces un límite a bajas energías de la teoría

de cuerdas. Más aún, se podría seguir calculando la anomalía a más lazos y todos los términos serían correcciones a estas ecuaciones, en particular correcciones a la gravedad de Einstein. Por otro lado, es incierto si la teoría sigue siendo finita para arbitrarios lazos, aunque existen trabajos en los cuales se calculan distintos números de lazos, no existe ninguna prueba acerca de la validez de la teoría de cuerdas a un número arbitrario de lazos.

Hay que notar que todo el tratamiento en este trabajo ha sido bosónico. Sin importar eso, este resultado se puede generalizar cuando se implemente supersimetría y la cuerda también tiene contribución fermiónica. A pesar de que en este trabajo no se haya abundado en dichos temas, este es un punto de partida en muchas direcciones y es una de las razones más importantes por las que la teoría de cuerdas tuvo éxito. Sin embargo aún hay mucho camino por explorar.

Por último hay que hacer una observación acerca de las simetrías de la acción. Inicialmente el modelo sigma tenía tres simetrías de norma, dos de ellas eran sobre la hoja de mundo, la simetría de Weyl y bajo difeomorfismos. Sin embargo, en la acción efectiva ya no hay hoja de mundo. Entonces queda preguntarse que sucede con estas dos simetrías. Las simetrías en la hoja de mundo son traducidas como redefiniciones de campos, pues cambios de coordenadas en la hoja de mundo eran transformaciones para los campos. Las redefiniciones de campos no son más que difeomorfismos en el espacio-tiempo, esto significa que la acción efectiva tiene invarianza bajo difeomorfismos del espacio-tiempo. Es decir, el espacio-tiempo dinámico es un concepto emergente que proviene de la cuantización de la cuerda.

## 5.2. Identidades de Noether

Las identidades de Noether son expresiones para las relaciones entre las ecuaciones de movimiento que se cumplen hasta cuando la variación de la acción no es cero.

Si  $\delta_\epsilon y^i$  es una simetría de norma, entonces la invarianza de norma de la acción se puede escribir como,

$$\delta_\epsilon S = \frac{\delta S}{\delta y^i} \delta_\epsilon y^i = \frac{\delta S}{\delta y^i} R_\alpha^i \epsilon^\alpha = 0$$

donde  $R$  es en general un operador diferencial y  $\epsilon$  una función arbitraria. Como esto se satisface

para cualquier función  $\epsilon$ , entonces se debe satisfacer siempre que,

$$\frac{\delta S}{\delta y^i} R_\alpha^i = 0.$$

Estas son las identidades de Noether y suelen ser muy útiles cuando se trata de entender como transforman los campos respecto a alguna simetría de norma [10]. Un muy claro ejemplo de una identidad de Noether está en el electromagnetismo.

En electromagnetismo se tiene que la divergencia del tensor de intensidad de campo es cero, es decir,

$$\frac{\delta S}{\delta A^\nu} = \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0,$$

esta es la ecuación de movimiento. Sin embargo se puede escribir,

$$\partial^\nu \frac{\delta S}{\delta A^\nu} = \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0,$$

esto es una identidad aunque la variación no sea cero, es decir, aunque las ecuaciones de movimiento no se satisfagan. Si se multiplica por una función arbitraria escalar  $\epsilon$ , entonces,

$$\epsilon \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0,$$

utilizando esta identidad se puede deducir la transformación de norma.

Se integra por partes para dejar a la ecuación de movimiento sin derivar, la derivada total no será relevante, pues se piensa que todo esto siempre está dentro de la acción. Entonces,

$$\partial^\nu \epsilon (\partial^\mu F_{\mu\nu}) = 0.$$

La información que se obtiene de aquí es la transformación de norma. En electromagnetismo la libertad de norma bajo permite sumar cualquier derivada de un escalar al potencial vectorial,

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon.$$

### 5.2.1. Identidades Diferenciales y las Identidades de Noether

Como se mencionó, las identidades de Noether son útiles cuando se trata de simetrías de norma, como en este caso. La acción efectiva tiene dos simetrías de norma, bajo difeomorfismo y la simetría de norma análoga a  $U(1)$  del electromagnetismo. Las identidades de Noether deberían aparecer de alguna forma. Como las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en términos de las funciones beta, las identidades de Noether coincidirán con las identidades diferenciales cuando se escriban en términos de las ecuaciones de movimiento.

Para poder mostrar esto, se considera como se escriben las ecuaciones de movimiento, (5-3), (5-4) y (5-5), en términos de las funciones beta. Si se está pensando que las ecuaciones de movimiento no se satisfacen, estas deben de traer también el término  $\sqrt{-G}e^{-2\Phi}$ , pues no se exige que las variaciones sean cero. Entonces, se puede escribir combinando (5-3) y (5-5),

$$\begin{aligned}\beta_{\mu\nu}^G &= \frac{1}{\sqrt{-G}}e^{2\Phi} \frac{\delta S}{\delta G^{\mu\nu}} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{-G}}e^{2\Phi} G_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta \Phi}. \\ \frac{1}{\sqrt{-G}}e^{2\Phi} \frac{\delta S}{\delta B_{\mu\nu}} &= \beta^B{}^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{\sqrt{-G}}e^{2\Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} &= -8(\beta^\Phi - \frac{1}{4}\beta_\mu^G{}^\mu).\end{aligned}$$

Por otro lado, hay que considerar las identidades diferenciales, escribiendo (4-21) de una manera más sugestiva, se ven como,

$$\begin{aligned}\nabla^\mu \beta_{\mu\nu}^B - 2\nabla^\mu \Phi \beta_{\mu\nu}^B &= 0, \\ -2\nabla^\mu \beta_{\mu\lambda}^G + 4\nabla^\mu \Phi \beta_{\mu\lambda}^G + H_\lambda{}^{\mu\nu} \beta_{\mu\nu}^B - 4\nabla_\lambda \left( \beta^\Phi - \frac{1}{4}\beta_\mu^G{}^\mu \right) &= 0,\end{aligned}$$

se pueden sustituir las funciones beta, para dejar todo en términos de las ecuaciones de movimiento,

$$\nabla^\mu \frac{\delta S}{\delta B^{\mu\nu}} = 0, \quad (5-6)$$

$$-2\nabla^\mu \frac{\delta S}{\delta G^{\mu\lambda}} + H_\lambda{}^{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta B^{\mu\nu}} + \nabla_\lambda \Phi \frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0. \quad (5-7)$$

Estas ecuaciones tiene la forma de identidades de Noether, pues se satisfacen aunque las variaciones de la acción no sean cero. Si se multiplica la primera por un vector  $C^\nu$  y la segunda por  $V^\lambda$ , lo que se obtiene, integrando por partes los términos necesarios,

$$\nabla_{[\mu} C_{\nu]} \frac{\delta S}{\delta B_{\mu\nu}} = 0, \quad (5-8)$$

$$2\nabla^{[\mu} V^{\lambda]} \frac{\delta S}{\delta G_{\mu\lambda}} + V^\lambda H_\lambda^{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta B^{\mu\nu}} + V^\lambda \nabla_\lambda \Phi \frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0. \quad (5-9)$$

Entonces podemos identificar las variaciones de los campos con los coeficientes de las ecuaciones de movimiento, es decir,

$$\delta B_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} C_{\nu]},$$

que es la variación respecto a transformaciones de  $U(1)$  y de la segunda ecuación,

$$\delta G_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} V_{\lambda]}$$

$$\delta B_{\mu\nu} = V^\lambda H_{\lambda\mu\nu} = V^\lambda (\nabla_\lambda B_{\mu\nu} + \nabla_\mu B_{\nu\lambda} + \nabla_\nu B_{\lambda\mu})$$

$$\delta \Phi = V^\lambda \nabla_\lambda \Phi$$

que son las variaciones respecto a los difeomorfismos.

Esto finalmente prueba que las identidades diferenciales son en este caso lo mismo que las identidades de Noether simplemente que, las primeras están escritas en términos de las funciones beta y las segundas respecto a las ecuaciones de movimiento. Esto sucede ya que en este caso las ecuaciones de movimiento son una combinación de las funciones beta que en general para un teoría no conforme, no será así. En este caso es posible relacionar las funciones beta con las ecuaciones de movimiento y entonces relacionar las identidades diferenciales con las identidades de Noether.



# Conclusiones

En este trabajo se estudió la construcción clásica y cuántica de la teoría de cuerdas bosónica. Estudiando la acción de Polyakov a nivel clásico, la teoría conforme de campos y el método de cuantización Faddeev-Popov. Se hizo el cálculo explícito de las funciones beta del grupo de renormalización a un lazo del modelo sigma y se mostró cómo emerge la gravedad de Einstein en la teoría de cuerdas. Además se estudió la acción efectiva a bajas energías que definen estas funciones beta. Finalmente se mostró que las identidades de Noether asociadas a las simetrías de norma de la acción efectiva, son las identidades diferenciales que satisfacen las funciones beta del modelo sigma. Esta observación no está reportada en la literatura sobre este tema y se presentó como una pequeña contribución de este trabajo.



# Bibliografía

- [1] Luis Alvarez-Gaume, Daniel Z Freedman, and Sunil Mukhi. The background field method and the ultraviolet structure of the supersymmetric nonlinear  $\sigma$ -model. *Annals of Physics*, 134(1):85–109, 1981.
- [2] Lukas Barth. Non-linear  $\sigma$  model renormalisation group flow. [https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~walcher/teaching/sose16/geo\\_phys/NLSMFRGFlow.pdf](https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~walcher/teaching/sose16/geo_phys/NLSMFRGFlow.pdf).
- [3] Curt Callan and Lárus Thorlacius. Sigma models and string theory. In *Particles, strings and supernovae*. 1988.
- [4] Curtis G Callan, D Friedan, EJ Martinec, and MJ Perry. Strings in background fields. *Nuclear Physics B*, 262(4):593–609, 1985.
- [5] Curtis G Callan, Igor R Klebanov, and MJ Perry. String theory effective actions. *Nuclear Physics B*, 278(1):78–90, 1986.
- [6] G Curci and G Paffuti. Consistency between the string background field equation of motion and the vanishing of the conformal anomaly. *Nuclear Physics B*, 286:399–408, 1987.
- [7] SP De Alwis. Strings in background fields:  $\beta$  functions and vertex operators. *Physical Review D*, 34(12):3760, 1986.
- [8] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, 1997.

- 
- [9] Stefan Förste. Strings, branes and extra dimensions. *Fortschritte der Physik*, 50(3-4):221–403, 2002.
- [10] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1992.
- [11] Sunil Mukhi. The geometric background-field method, renormalization and the wess-zumino term in non-linear  $\sigma$ -models. *Nuclear Physics B*, 264:640–652, 1986.
- [12] J. Polchinski. *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1998.
- [13] Joseph Polchinski. Scale and conformal invariance in quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 303(2):226–236, 1988.
- [14] P. Ramond. *Field Theory*. Frontiers in Physics. Westview Press, 1997.
- [15] RC Rashkov. Low energy limit of string theory. In *Gravity, Astrophysics, And Strings-Second Advanced Research Workshop, Kitten, Bulgaria*, 2004.
- [16] David Tong. String theory. *arXiv preprint arXiv:0908.0333*, page 8, 2009.