UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LOS GRUPOS TOPOLÓGICOS Y EL NÚMERO DE NAGAMI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

DAVID JOHN PROGATSKY SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2017

1. Datos del alumno
Progatsky
Sandoval
David John
56 87 26 95
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310657095

2. Datos del tutor
Dr.
Fidel
Casarrubias
Segura

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Héctor
Méndez
Lango

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Reynaldo
Rojas
Hernández

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

7. Datos del trabajo escrito
Una breve introducción a los grupos topológicos y el número de Nagami
57 p
2017

Agradezco el apoyo de mis padres y familiares, Diana, Mario, y de Alex, Adrián, Quique y José Antonio.

Agradezco a Fidel Casarrubias, y la inspiración y ejemplo de los maestros Héctor Méndez Lango y Mónica Clapp.

Índice general

Introducción

La Topología y el Álgebra son dos áreas de las Matemáticas que entran en contacto de manera natural en el desarrollo reciente de diversas líneas investigativas, en particular en ciertas subáreas de la Topología General. Esto se debe a que, mientras la Topología trabaja con conjuntos infinitos y se dedica a formalizar ciertas nociones geométricas (como la conexidad, o la cerradura, que se puede entender como una generalización del concepto de límite del Cálculo Diferencial), el Álgebra estudia algoritmos y operaciones que son finitas y abstractas por naturaleza. Si bien estos dos enfoques matemáticos son distintos, entran en contacto gracias a que se complementan.

El contacto entre estas dos ramas se da de dos formas. En la primera, que se remonta al trabajo de Henri Poincaré, la Topología se beneficia de las estructuras algebraicas para clasificar y estudiar los espacios topológicos. Se trata de la Topología Algebraica. En la segunda, se combinan en iguales medidas las estructuras de espacio topológico y alguna noción de naturaleza algebraica, resultando en un espacio que es objeto de estudio de ambas ramas de las Matemáticas. Es parte de este segundo caso el estudio de los grupos topológicos. Un grupo topológico es un objeto que combina, en un solo conjunto subyaciente, las estructuras de grupo algebraico y de espacio topológico. La noción más ampliamente difundida del Álgebra Moderna es la de grupo algebraico; el estudio de los grupos topológicos constituye, de esta manera, uno de los objetos de principal interés en esta línea de trabajo.

El presente trabajo se aboca en dar una presentación breve de la clase de espacios de los grupos topológicos. Para cumplir este objetivo, hemos seleccionado algunos temas de interés que forman una unidad en sí misma. Se trata del teorema de Markov, las prenormas, las funciones cardinales y el número de Nagami. Ninguno de estos tópicos requiere mayor conocimiento de parte del lector que familiaridad con las nociones de espacio topológico y de grupo algebraico. Si el lector desea profundizar más aún sobre el estudio de los grupos topológicos, las dos obras de referencia son [2] y [6]. La primera se trata de una introducción bastante completa a una gama de temas estudiados desde la perspectiva de los grupos topológicos y algunas otras estructuras cercanas a ésta. Esta obra, debida a los matemáticos rusos A.V. Arhangel'skii y M.G. Tkachenko, pretende recopilar en un solo lugar los resultados principales de esta subárea de la Topología. Es consecuente que sea la referencia principal en un trabajo como el presente, cuya preocupación son los grupos topológicos.

En el primer capítulo del presente trabajo se da un repaso sobre las bases topológicas, algebraicas y de teoría de los conjuntos sobre las cuales se cimenta el resto del material. No se trata de una introducción a estas ramas de las matemáticas, pues se limita a presentar algunos resultados que se requerirán de manera explícita a lo largo de los restantes capítulos.

En el segundo capítulo se estudian las proposiciones básicas que se conocen para la clase de espacios de los grupos topológicos. Estos resultados son canónicos, y presentan las herramientas y técnicas principales que se usan al trabajar la estructura de grupo topológico.

En el tercer capítulo se introducen dos temas clásicos en la teoría de grupos topológicos. Se trata del teorema de Markov y las prenormas. Ambos temas tienen como consecuencia resultados que hablan acerca de los axiomas de separabilidad, y se complementan para establecer exactamente qué axiomas de separación son equivalentes en la clase de grupos topológicos. Además, en este tema se expone la demostración del teorema de Birkhoff-Kakutani, que habla sobre metrizabilidad y es una consecuencia directa del estudio de las prenormas en grupos topológicos.

En el cuarto capítulo se introduce la perspectiva de las funciones cardinales topológicas, abocada en este caso a la clase de los grupos topológicos. Este tema es de gran interés en la Topología General, y aquí se estudian, además de las funciones cardinales esenciales, otras tres funciones útiles para esta clase de espacios: el número de Nagami, el índice de estrechez y la celularidad. El número de Nagami permite generalizar a la clase de espacios topológicos Lindelöf-Σ. El último resultado que se expone, debido a V.V. Uspenskii, surge como corolario al trabajo previo en el capítulo, y habla de la celularidad de los grupos topológicos Lindelöf-Σ.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se da un breve repaso de algunas nociones de Teoría de Conjuntos, Álgebra y Topología. El lector que esté familiarizado con este material puede proceder directamente al segundo capítulo, aunque se recomienda leer las convenciones de notación que se usarán a lo largo del trabajo.

1.1. Teoría de conjuntos

Se supondrá que el lector está familiarizado con las definiciones del conjunto vacío, el producto cartesiano, las operaciones unión e intersección y la cardinalidad de conjuntos. El símbolo $\in$ representa pertenencia a un conjunto. Si X es un conjunto, la cardinalidad de X se denota $|X|$.

Cada vez que se tenga un conjunto X, Id_X denotará la función identidad, esto es: $Id_X : X \longrightarrow X$ con $Id_X(x) = x$.

Definición 1.1. Dado un conjunto X, se define su conjunto potencia, $\mathcal{P}(X)$, como sigue:

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\},$$

es decir, la familia de todos sus subconjutos.

A continuación definiremos a los números ordinales.

Definición 1.2. *Sea A un conjunto, y $\leq$ un subconjunto de $A \times A$. Si $a, b \in A$, abreviamos $(a, b) \in \leq$ como $a \leq b$. Decimos que $\leq$ es un orden total en A si se cumplen las siguientes propiedades.*

(1) $\forall a, b \in A \quad (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$,

(2) $\forall a, b, c \in A \quad (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$,

(3) $\forall a, b \in A \quad (a \leq b \vee b \leq a)$.

Si el conjunto $\leq$ solo cumple las primeras dos propiedades anteriores, se dice que es un orden parcial para A.

Si $\leq$ es un orden total para A, decimos que $\leq$ ordena totalmente a A. Si además se cumple que para todo subconjunto B de A existe $b_0 \in B$ con la propiedad de que

$\forall b \in B(b_0 \leq b)$, *decimos que* $\leq$ *es un buen orden para* A *y que* A *está bien ordenado por* $\leq$.

Definición 1.3. *Sea* A *un conjunto. Decimos que* A *es transitivo si cumple la siguiente propiedad:*
$\forall a \in A(b \in a \Rightarrow b \in A)$

Definición 1.4. *Decimos que un conjunto* A *es un número ordinal si cumple las siguientes dos propiedades.*

(1) A *es transitivo.*

(2) A *está bien ordenado por la relación de pertenencia,* $\in$.

Los números naturales se suelen construir en la teoría de conjuntos de la siguiente manera. Al 0 se le identifica con el conjunto vacío. Al 1 se le identifica con el conjunto cuyo único elemento es $\emptyset$, es decir $\{\emptyset\}$. Al 2 se le identifica con el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, es decir el conjunto que tiene como elementos al 0 y al 1. Se sigue de esta manera, identificando a un natural n con el conjunto que tiene como elementos a los naturales anteriores a él.

De igual manera se pueden construir recursivamente los números ordinales del siguiente modo. Se comienza con el conjunto $\emptyset$, que cumple la definición 1.4, y cada vez que se haya definido una cantidad cualquiera de ordinales, resultará que el conjunto cuyos elementos son todos los ordinales definidos anteriormente también es un ordinal. De esta manera se puede continuar tanto como se quiera, sin importar si se ha definido una serie infinita de ordinales anteriores.

A lo largo de este trabajo se denotará $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales sin el cero, y se denotará ω como $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Con las definiciones anteriores es clara la siguiente proposición.

Proposición 1.5. *Cada número* $n \in \omega$ *es un número ordinal. Además,* ω *es un número ordinal que no es un número natural.*

Además, también se puede demostrar fácilmente lo siguiente.

Proposición 1.6. *Sea* X *un conjunto de ordinales. Entonces* X *está bien ordenado por la relación de pertenencia.*

Si se desea encontrar una demostración de este resultado y mayor información acerca de los números ordinales, se refiere la obra [4], capítulo 9.

Al ordinal más pequeño (bajo la relación de pertenencia) que cumple ser no numerable se le denota ω_1.

A lo largo de la tesis si τ es un cardinal infinito, se identifica a τ con el ordinal más pequeño de cardinalidad τ. Además, el símbolo τ podrá denotar una topología, cuando así se indique.

1.2. Álgebra

Definición 1.7. Decimos que un conjunto G es un grupo algebraico, o grupo para abreviar, si está equipado con una operación $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que cumple:

(1) Para cada terna de puntos $x, y, z \in G$, se tiene que $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(2) existe $e \in G$ tal que, para cada $x \in G$ se cumple que $e \cdot x = x = x \cdot e$,

(3) para cada $x \in G$ existe $\overline{x} \in G$ tal que $x \cdot \overline{x} = e = \overline{x} \cdot x$.

Si además se cumple que, para cada par de puntos $x, y \in G$, $x \cdot y = y \cdot x$, decimos que G es un grupo abeliano.

El segundo inciso de los anteriores, se conoce como el axioma del neutro. Si G es un grupo, el elemento $e \in G$ que cumple dicho inciso se conoce como el neutro del grupo. Además, si $g \in G$, el elemento $\overline{g} \in G$ que otorga el tercer inciso se conoce como el inverso de g.

Cada vez que $(G, \cdot)$ sea un grupo definimos, para $a \in G$, las funciones $\rho_a, \lambda_a : G \longrightarrow G$ del siguiente modo: $\rho_a(x) = x \cdot a$, $\lambda_a(x) = a \cdot x$. A estas funciones se les llama acciones derechas e izquierdas, respectivamente, y se denotarán así cuando no haya confusión.

Cada vez que se tengan dos subconjuntos A, B de un grupo $(G, \cdot)$, definimos: $AB := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$. Si $b \in G$ abreviamos $Ab := A\{b\}, bA := \{b\}A$. También $A^2 = AA$.

Si no hay confusión, se abreviará $ab := a \cdot b$.

Si G es un grupo y $g \in G$, denotamos por g^{-1} al inverso de g. Denotamos por U^{-1} al conjunto $\{u^{-1} : u \in U\}$. Un subconjunto U de G se llama simétrico si $U^{-1} = U$.

Ejemplo 1.8. $\mathbb{R}$ es un grupo abeliano con la suma usual.

Efectivamente, los cuatro axiomas de la suma en los reales coinciden con la definición de grupo abeliano.

Definición 1.9. Sea $f : (G, \cdot) \longrightarrow (H, *)$ una función entre grupos algebraicos. Decimos que f es un homomorfismo de grupos si para cada par de puntos $x, y \in G$ se cumple que $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$.

Si $f : G \longrightarrow H$ es una función entre grupos que es biyectiva, homomorfismo de grupos y su inversa es homomorfismo de grupos, decimos que f es un isomorfismo de grupos.

Un subconjunto H de un grupo $(G, \cdot)$ es un subgrupo de G si es no vacío y se cumple que $\cdot[H \times H] \subset H$ y $Inv[H] \subset H$.

Un subgrupo H de G es algebraicamente normal en G si para cada $a \in G$ se cumple que $aHa^{-1} = H$.

1.3. Topología

Definición 1.10. Sea X un conjunto y τ un subconjunto de su conjunto potencia. Decimos que τ es una topología para X si cumple:

(1) $\emptyset \in \tau$,

(2) $X \in \tau$,

(3) Para cada familia η de elementos de τ, esto es $\eta \subset \tau$, se tiene que $\bigcup \eta \in \tau$,

(4) Para cada familia finita $\{A_i\}_{i \in j} \subset \tau$ con $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $\bigcap_{i \in j} A_i \in \tau$.

Un conjunto equipado con una topología se conoce como un espacio topológico. Además, los elementos de la topología se les llama conjuntos abiertos, o abiertos para abreviar. Si U es abierto de una topología en un conjunto X, decimos que $X \setminus U$ es un conjunto cerrado de X.

Si τ es la familia completa de subconjuntos de X, $\mathcal{P}(X)$, decimos que X es discreto y τ es la topología discreta.

Cada vez que X sea un espacio topológico, $\tau(X)$ denota la topología de X, y definimos para cada $x \in X$, $\tau(x, X) := \{U \in \tau(X) : x \in U\}$.

Definición 1.11. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathfrak{B}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathfrak{B}$ es una base para τ si cada elemento de $\mathfrak{B}$ es un elemento de τ y cada elemento de τ se puede expresar como la unión de una familia de elementos de $\mathfrak{B}$.

Proposición 1.12. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X es base para una topología en X si:*

(1) para cada $x \in X$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$,

(2) para cada $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ y para cada $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. Demostremos que $\tau = \{\bigcup \eta : \eta \subset \mathfrak{B}\}$ es una topología para X.

Por el inciso (1) de las hipótesis, se sigue que $X = \bigcup \mathfrak{B} \in \tau$.

Además, también se tiene que $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \tau$.

Sea $\{\eta_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de $\mathfrak{B}$. Entonces:

$$\bigcup_{i \in I} (\bigcup \eta_i) = \bigcup \eta,$$

donde $\eta = \bigcup_{i \in I} \eta_i$. Como $\eta \subset \mathfrak{B}$, se sigue que $\bigcup_{i \in I} (\bigcup \eta_i) \in \tau$.

Finalmente, para mostrar que τ es cerrada bajo intersecciones finitas basta probar que es cerrada bajo intersecciones de dos elementos. Sean $\eta_1, \eta_2 \subset \mathfrak{B}$. Si $\bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2 = \emptyset$, se concluye que $\bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2 \in \tau$ como se quiere. En otro caso, para cada $x \in \bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2$, existe $B_1 \in \eta_1$ tal que $x \in B_1$, y también existe $B_2 \in \eta_2$ tal que $x \in B_2$. Por la hipótesis (2), existe $B_x \in \mathfrak{B}$ que cumple que $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \subset \bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2$. Por tanto, se sigue que $\bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2 = \bigcup_{x \in \bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2} B_x$, de donde se concluye que $\bigcup \eta_1 \cap \bigcup \eta_2 \in \tau$.

Para concluir la demostración, observemos que $\mathfrak{B}$ es base para la topología τ. Es evidente que cada elemento de $\mathfrak{B}$ es un elemento de τ. Además, por definición de τ, sus elementos son uniones de elementos de $\mathfrak{B}$, por lo que se concluye lo que se quería demostrar. $\square$

Proposición 1.13. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $\sigma = \{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ es base para una topología para X. Esta topología se conoce como la topología inducida por la métrica.

Demostración. Sea $x \in X$. Entonces, es claro que $x \in B_1(x)$, pues $d(x, x) = 0 < 1$. Además $B_1(x) \in \sigma$.

Sean $B_1, B_2 \in \sigma$ y supongamos que existe $b \in U_1 \cap U_2$. Entonces existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, ambos mayores que 0, y puntos $x_1, x_2 \in X$ tales que $U_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1)$ y $U_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $\delta = min\{\varepsilon_1 - d(b, x_1), \varepsilon_2 - d(b, x_2)\}$. Como $b \in B_\delta(b)$ y $B_\delta(b) \in \sigma$, basta mostrar que $B_\delta(b) \subset U_1 \cap U_2$.

Si $y \in B_\delta(b)$ se sigue que $d(y, b) < \delta$. Entonces:

$$d(y, x_1) \leq d(y, b) + d(b, x_1) < \delta + d(b, x_1) \leq \varepsilon_1 - d(b, x_1) + d(b, x_1) = \varepsilon_1,$$

de donde $y \in B_{\varepsilon_1}(x_1) = U_1$. Por otro lado se tiene que:

$$d(y, x_2) \leq d(y, b) + d(b, x_2) < \delta + d(b, x_2) \leq \varepsilon_2 - d(b, x_2) + d(b, x_2) = \varepsilon_2,$$

por lo que $y \in B_{\varepsilon_1}(x_2) = U_2$. Hemos demostrado que $B_\delta(b) \subset U_1 \cap U_2$, por lo que la proposición 1.12 implica lo que queremos. $\square$

Ejemplo 1.14. $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es base para una topología en $\mathbb{R}$.

Es fácil verificar que la familia en consideración cumple las dos hipótesis de la proposición 1.12.

Definición 1.15. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función entre espacios topológicos. Decimos que f es continua si, para cada $U \in \sigma$, se cumple que $f^{-1}[U] \in \tau$.

Definición 1.16. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función entre espacios topológicos. Decimos que f es un homeomorfismo si es biyectiva, continua, y su función inversa es continua. Si X y Y son dos espacios topológicos tales que existe una función entre ellos que es un homeomorfismo decimos que X y Y son espacios homeomorfos.

Definición 1.17. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $x \in X$. Sea $\mathfrak{B}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathfrak{B}$ es una base local en x si cada elemento de $\mathfrak{B}$ es un abierto que tiene a x como elemento y para cada $U \in \tau$ que cumpla que $x \in U$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subset U$.

Proposición 1.18. *Las bases locales se preservan bajo homeomorfismos.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea $\mathfrak{C}$ una base local en $x \in X$, y veamos que $\mathfrak{B} = \{f[C] : C \in \mathfrak{C}\}$ es una base local en $y = f(x)$. Sea U abierto de Y tal que $y \in U$. Entonces $x \in f^{-1}[U]$, que es abierto de X. Por tanto existe $V \in \mathfrak{C}$ tal que $x \in V \subset f^{-1}[U]$. Por tanto $y \in f[V] \subset U$, con $F[V] \in \mathfrak{B}$. Finalmente, como f es un homeomorfismo, los elementos de $\mathfrak{B}$ son abiertos de Y que tienen a y como elemento. Se concluye que $\mathfrak{B}$ es base local en y. $\square$

Definición 1.19. Sean A un conjunto no vacío y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos. Conocemos el producto de conjuntos de la familia, $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, cuyos elementos se denotan $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Queremos darle una estructura de espacio topológico a dicho conjunto. Para cada $a \in A$ definimos $\pi_a : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \longrightarrow Xa$ como la proyección en la a-ésima coordenada, es decir, $\pi_a((x_\alpha)_{\alpha\in A}) = x_a$.

Definimos el siguiente subconjunto de la potencia de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$:

$$\sigma = \{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] : n \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, ..., n(\alpha_i \in A, U_i \in \tau(X_{\alpha_i}))\}.$$

No es difícil demostrar que σ es base para una topología en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Esta topología se conoce como la topología producto, o topología producto de Tychonoff.

En particular, si para cada $\alpha \in A$ se tiene que $X_\alpha = X$, con X un espacio topológico fijo, el producto de conjuntos de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no es otro que $\prod_{\alpha\in A} X$, que se denota X^A. Hemos indicado una manera de topologizar a este conjunto, el cual se suele identificar con el conjunto de todas las funciones de la forma $f : A \longrightarrow X$.

Definición 1.20. *Sean A un conjunto no vacío, X un espacio topológico y para cada $\alpha \in A$ $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ una función de X en un espacio topológico Y_α. La función $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha : X \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, conocida como el producto diagonal de la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, está dada por la regla de correspondencia $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$.*

Definición 1.21. *Sea $\{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de funciones entre conjuntos. Decimos que la familia separa puntos si para cualesquiera $x, y \in X$ con x distinto de y existe un $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.*

Proposición 1.22. *El producto diagonal de una familia de funciones $\{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cumple las siguientes afirmaciones:*

(1) La familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ separa puntos si y sólo si la función $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ es inyectiva.

(2) Si para cada $\alpha \in A$ la función f_α es continua, entonces la función $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ es continua, considerando a $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ con la topología producto.

Demostración. Para demostrar la primer implicación de la primer afirmación, supongamos que la función $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ no es inyectiva. Entonces existen dos puntos $x, y \in X$ distintos, y tales que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(y)$. Esto es: $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A} = (f_\alpha(y))_{\alpha\in A}$. Por tanto para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$. Esto es, la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no separa puntos.

Conversamente, supongamos que la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no separa puntos. Entonces existen $x, y \in X$ distintos tal que para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$. Es claro, entonces que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(y)$, por lo que se concluye que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ no es inyectiva.

Demostremos ahora la segunda afirmación. Denotaremos $F = \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$. Supongamos que para cada $\alpha \in A$ la función f_α es continua. Para cada $a \in A$, π_a denota la proyección de $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ en Y_a. Sea U un abierto básico de $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Esto es, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ y para cada $i \in \{1, ..., n\}$ un abierto $U_{\alpha_i} \in Y_{\alpha_i}$ tales que

$U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. Entonces:

$$\begin{aligned} F^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \in U\} &= \{x \in X : \forall i \in \{1, ..., n\}(f_{\alpha_i}(x) \in U_{\alpha_i})\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \tau(X) \end{aligned}$$

por lo que F es continua. □

Definición 1.23. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos:*

(1) La cerradura de A, $\overline{A}$, como el cerrado más pequeño (bajo la contención) que contiene a A;

(2) El interior de A, $int(A)$, como el abierto más grande (bajo la contención) contenido en A.

Además, decimos que A es denso en X si se cumple que $\overline{A} = X$.

Definición 1.24. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es un espacio:

(1) T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $U \in \tau$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$;

(2) T_1 si para cada par de puntos $x, y \in X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ pero $x \notin V$, $y \notin U$;

(3) T_2, o *Hausdorff*, si para cada par puntos $x, y \in X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ pero $U \cap V = \emptyset$;

(4) *regular* si para cada conjunto cerrado C de X y cada $x \in X$ tal que $x \notin C$ existen $U, V \in \tau$ tales que $C \subset U$, $x \in V$ pero $U \cap V = \emptyset$;

(5) *completamente regular* si para cada conjunto cerrado C de X y cada $x \in X$ tal que $x \notin C$ existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f[C] \subset \{0\}$ y $f(x) = 1$.

(6) T_3, si es T_1 y regular;

(7) $T_{3\frac{1}{2}}$, o *de Tychonoff*, si es T_1 y completamente regular.

(8) *normal*, si para cada si para cada par de conjuntos cerrados y ajenos C, D de X existen $U, V \in \tau$ tales que $C \subset U$, $D \subset V$ pero $U \cap V = \emptyset$;

(9) T_4, si es T_1 y normal;

(10) *compacto*, si para cada familia γ de abiertos de X tales que $X = \bigcup \gamma$ existe una subfamilia finita $\delta \subset \gamma$ tal que $X = \bigcup \delta$;

(11) *localmente compacto*, si para cada punto $x \in X$ existe un abierto C de X con $x \in C$, y $\overline{C}$ un compacto y Hausdorff;

(12) *Lindelöf*, si para cada familia γ de abiertos de X tales que $X = \bigcup \gamma$ existe una subfamilia numerable $\delta \subset \gamma$ tal que $X = \bigcup \delta$;

(13) $\sigma - compacto$, si es unión de una cantidad numerable de compactos;

(14) *metrizable*, si existe un espacio métrico Y homeomorfo a X, considerando a Y con la topología inducida por la métrica;

(15) *segundo numerable*, si existe una base para τ de cardinalidad numerable;

(16) *primero numerable*, si existe una base local de cardinalidad numerable en cada punto de X;

(17) *disconexo*, si existen dos abiertos no vacíos $U, V \in \tau$ tales que $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$;

(18) *conexo*, si no es disconexo.

Definición 1.25. *Sea X un espacio de Tychonoff. Si existe una función $f : X \longrightarrow Y$ continua, donde Y es un espacio topológico compacto y Hausdorff, X es homeomorfo a $f(X)$ bajo f y $\overline{f(X)} = Y$, entonces decimos que Y es una compactificación de X y f es una función que compactifica a X. En el caso de que f sea la función que compactifica a X en Y, Y se denota fX.*

Definición 1.26. *Sean X un espacio Hausdorff y Y un espacio topológico. Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es perfecta si es cerrada, continua, y las preimágenes de puntos son compactos y cerrados en X.*

La prueba de las siguientes proposiciones que sigue se referencia en la obra de R. Engelking, [3], teoremas 3.3.9, 3.7.2, 3.7.16 y secciones 3.5 y 3.6.

Proposición 1.27. *Todo subespacio localmente compacto M de un espacio Hausdorff X es abierto en su cerradura.*

Proposición 1.28. *Sean X un espacio Hausdorff, y Y un espacio topológico. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función perfecta, entonces las preimágenes de compactos bajo f son compactos en X.*

Proposición 1.29. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función perfecta entre espacios de Tychonoff, entonces la extensión de f a $F : \beta X \longrightarrow \alpha Y$, donde βX es una compactificación de X y αY es una compactificación de Y, cumple $F(\beta X \setminus X) \subset \alpha Y \setminus Y$.*

Proposición 1.30. *Si X es un espacio de Tychonoff y $C(X)$ es la familia de todas las compactificaciones de X. Entonces, se obtiene:*

(1) La familia $C(X)$ forma un orden parcial con la siguiente relación: si $cX, dX \in C(X)$ con c, d las funciones respectivas que compactifican a X, decimos que $cX \leq dX$ si existe una función continua $f : dX \longrightarrow cX$ tal que $f \circ d = c$.

(2) Hay un elemento máximo bajo el orden $\leq$ en la familia $C(X)$. Este elemento se conoce como la compactificación de Stone-Cech y se denota βX.

(3) Toda función continua $f : X \longrightarrow Z$, donde Z es un espacio compacto, tiene una extensión continua $F : \beta X \longrightarrow Z$. Conversamente, si toda función continua $f : X \longrightarrow Z$ de X en un compacto Hausdorff tiene una extensión continua a una compactificación αX de X, $F : \alpha X \longrightarrow Z$, entonces αX es homeomorfo a βX, la compactifiación de Stone-Cech de X.

Capítulo 2

Grupos topológicos

En este capítulo introduciremos la noción de grupo topológico, la cual combina la estructura de espacio topológico y la de grupo algebraico. Asimismo, se estudiarán las propiedades principales que se conocen para este tipo de espacios.

La primera sección brinda las técnicas básicas que se utilizan en el área de estudio de los grupos topológicos. Entre éstas, es de especial atención el teorema 2.14, que brinda una axiomatización de los grupos topológicos en función de bases locales. Los resultados de esta primer sección son canónicos, y podrán ser usados a lo largo del presente trabajo sin hacer una referencia explícita.

En la segunda sección se estudiarán subconjuntos de grupos topológicos de diferentes tipos. La estructura de grupo topológico aúna técnicas algebraicas con técnicas topológicas, como puede observarse en esta sección, donde las proposiciones se refieren al resultado de operar algebraicamente algunos conjuntos típicos en el estudio de la topología, como son los abiertos, los cerrados y los compactos.

En la tercera sección se estudian los subgrupos de la clase de grupos topológicos, y en la cuarta sección se introduce y estudia la noción que se tiene de espacio cociente en la clase de espacios de los grupos topológicos.

2.1. Propiedades básicas de grupos topológicos

Definición 2.1. *Un grupo $(G, \cdot)$ es un grupo topológico si existe una topología τ para G con las siguientes propiedades:*

- *la operación de grupo $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ es continua, considerando a $G \times G$ con la topología producto,*
- *la función $Inv : G \longrightarrow G$ que a cada elemento de G le asocia su inverso bajo $\cdot$, es decir, $Inv(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$, es continua.*

Ejemplos 2.2. (1) Si G es un grupo algebraico, G equipado con la topología discreta es un grupo topológico. Asimismo, G equipado con la topología indiscreta ($\{G, \emptyset\}$) es un grupo topológico.

(2) $\mathbb{R}$ con la suma usual y la topología usual es un grupo topológico.

Demostración. Sabemos que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo, y que $\mathfrak{B} = \{(a, b) : a < b \ \ a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología usual de $\mathbb{R}$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $O \in \tau(x+y, \mathbb{R})$. Entonces existe un real $\varepsilon > 0$ tal que $(x+y-\varepsilon, x+y+\varepsilon) \subset O$. Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Definamos $U = (x-\delta, x+\delta)$ y $V = (y-\delta, y+\delta)$. Es claro que $U \in \tau(x, \mathbb{R})$ y $V \in \tau(y, \mathbb{R})$. Además, si $(z, w) \in U \times V$ se tiene que $z + w \in (x+y-\varepsilon, x+y+\varepsilon) \subset O$, por lo que $U \times V$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con $+(U \times V) \subset O$. Hemos demostrado que $+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Sea $Inv : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Inv(x) = -x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen $a < b$ se tiene que $Inv^{-1}[(a, b)] = (-b, -a)$ con $-b < -a$; esto es, preimágenes bajo Inv de elementos de $\mathfrak{B}$ son elementos de $\mathfrak{B}$. Se sigue que Inv es continua. $\square$

(3) $\mathbb{S}^1$, el círculo unitario en los complejos, es un grupo topológico con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{C}$ y la multiplicación de $\mathbb{C}$.

Lema 2.3. *Sea $(G, \cdot)$ un grupo con una topología τ. G es un grupo topológico si y sólo si la función $f : G \times G \longrightarrow G$ dada por $f((x, y)) = x \cdot y^{-1}$ es continua.*

Demostración. Sea $j : G \times G \longrightarrow G \times G$ dada por $j((x, y)) = (x, y^{-1})$. Observe que $j = Id_G \times Inv$, por lo que la continuidad de Inv implica la continuidad de j (ya que producto de funciones continuas es continua, y la identidad es continua en todo espacio topológico).

Para demostrar que la condición es necesaria, observemos que la función f definida en el enunciado del lema cumple que $f = \cdot \circ j$, por lo que es continua en virtud de que G es un grupo topológico y la composición de funciones continuas es continua.

Para demostrar que la condición es suficiente, definimos $h : G \longrightarrow G \times G$ por $h(x) = (e, x)$. Para demostrar la continuidad de la inversa basta ver, en virtud de que $Inv = f \circ h$, que h es continua. Para ello, sean A, B abiertos cualesquiera de la topología de G. Si $e \notin A$, entonces $h^{-1}[A \times B] = \emptyset$. Si $e \in A$, tenemos $h^{-1}[A \times B] = B$. Por tanto h es continua y podemos concluir que Inv es continua.

Para demostrar la continuidad de la operación de grupo, observemos primero que $\cdot = f \circ j$. De la hipótesis, la continuidad de Inv, y el hecho de que composición de funciones continuas es continua, se sigue la continuidad de $\cdot$. $\square$

Ejemplo 2.4. Si $n \in \mathbb{N}$, $GL(n, \mathbb{R})$, el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que son invertibles, es un grupo algebraico con la operación de producto de matrices. Consideremos en $GL(n, \mathbb{R})$ la siguiente métrica:

$$d((a_{ij}), (b_{ij})) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2}$$

donde $(a_{ij}), (b_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$. Con la topología inducida por la métrica d, las función $f : G \times G \longrightarrow G$ dada por $f((a_{ij}), (b_{ij})) = (a_{ij})(b_{ij})^{-1}$ es continua. De esta manera, el lema anterior implica que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico con la topología inducida por d.

Lema 2.5. *Sea $(G, \cdot)$ un grupo topológico, y $a \in G$. Las acciones ρ_a, λ_a son homeomorfismos.*

En consecuencia, si $\mathfrak{B}$ *es una base local en* e*, entonces* $\{Ua : U \in \mathfrak{B}\}$ *es una base local en* a *para cada* $a \in G$*. También* $\{aU : U \in \mathfrak{B}\}$ *es una base local en* a *para cada* $a \in G$*.*

Demostración. Comencemos demostrando que, dado $g \in G$, las acciones ρ_g, λ_g son continuas. Veremos sólo la demostración para ρ_g, ya que la demostración para λ_g es análoga. Sean $a \in G$ y O un abierto de G, tales que $ag \in O$. Por la continuidad de $\cdot$, existen abiertos U, V de G tales que $a \in U$, $g \in V$ y $UV \subset O$. Es claro que $\rho_g[U] = Ug \subset UV \subset O$ por lo que ρ_g es continua en $a \in G$. Podemos concluir que ρ_g es continua.

Ahora, dado $a \in G$, las acciones $\rho_a, \rho_{a^{-1}}, \lambda_a, \lambda_{a^{-1}}$ son continuas. Además, $\rho_a \circ \rho_{a^{-1}} = Id_G = \rho_{a^{-1}} \circ \rho_a$, y de igual modo $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = Id_G = \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a$, por lo que queda demostrada la afirmación de que ρ_a, λ_a son homeomorfismos.

Finalmente, la proposición 1.18 comprueba la segunda parte del lema. □

Observe que la demostración anterior sólo depende de la continuidad de la operación en G. Es decir, si tenemos $(G, \cdot)$ un grupo con una topología bajo la cual la operación de grupo es continua, G cumple las conclusiones del lema anterior.

Proposición 2.6. *Sean* G, H *grupos topológicos y* $f : G \longrightarrow H$ *un homomorfismo de grupos. Si* f *es continua en la identidad* e_G *de* G*, entonces* f *es continua en cada punto de* G*.*

Demostración. Sea $x \in G$. Sea $U \in \tau(H)$ tal que $y = f(x) \in U$. El conjunto Uy^{-1} es una vecindad abierta de e_H. Aplicando la continuidad de f en e_G, existe $V \in \tau_G$ tal que $e_G \in V$ y $f[V] \subset Uy^{-1}$. Es claro que Vx es una vecindad abierta de x en G.

Veamos que $f[Vx] \subset U$. Sea $v \in V$. Entonces $f(vx) = f(v)f(x) = f(v)y$. Como $f[V] \subset Uy^{-1}$, existe $u \in U$ tal que $f(v) = uy^{-1}$.

Por tanto $f(vx) = uy^{-1}y = u \in U$. Esto concluye la demostración de la continuidad de f en x. □

Definición 2.7. *Un espacio topológico* X *es homogéneo si para cada par de puntos* $x, y \in X$*, existe un homeomorfismo* $f : X \longrightarrow X$ *tal que* $f(x) = y$*.*

Lema 2.8. *Todo grupo topológico es homogéneo.*

Demostración. Sean G un grupo topológico y $x, y \in G$. Defina $z = x^{-1} \cdot y$. En vista del lema 2.5, ρ_z es un homeomorfismo. Además, es claro que $\rho_z(x) = y$. □

Lema 2.9. *Si* G *es un grupo topológico, entonces* G *tiene una base local en* e *que consiste de conjuntos abiertos y simétricos.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{U}$ es una base local en e. Sea $\gamma = \{U \cap U^{-1} : U \in \mathfrak{U}\}$. γ es una familia de abiertos, pues G es un grupo topológico. Además, $e = e^{-1}$ implica $e \in V$ para todo $V \in \gamma$.

Hemos visto que γ consiste de abiertos. Veamos que consiste de conjuntos simétricos. Sea $V \in \gamma$. Entonces existe $U \in \mathfrak{U}$ con $V = U \cap U^{-1}$. Veamos por doble contención que $V = V^{-1}$.

Sea $v \in V$. Entonces $v \in U^{-1}$. Esto es, existe $u \in U$ con $v = u^{-1}$. Observe que como $v \in U$ y $v^{-1} = u$, $u \in U^{-1}$. Eso implica $u \in U \cap U^{-1} = V$. Por tanto $v \in V^{-1}$.

Por otro lado, si $v \in V^{-1}$, existe $u \in U \cap U^{-1}$ con $v = u^{-1}$. Como $u \in U$, $v \in U^{-1}$. $u \in U^{-1}$ implica $v = u^{-1} \in U$. Por tanto $v \in V$. Hemos demostrado $V = V^{-1}$.

Sea O abierto de G tal que $e \in O$. Entonces existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $e \in U \subset O$. Si $V = U \cap U^{-1}$, obtenemos $V \in \gamma$, $e \in V \subset O$.

Hemos demostrado que γ es la base local deseada. $\square$

Lema 2.10. *Sea G un grupo topológico. Si V es una vecindad abierta y simétrica de la identidad, entonces $\overline{V} \subset V^2$.*

Demostración. Si $x \in \overline{V}$, entonces $Vx \cap V \neq \emptyset$, pues Vx es una vecindad abierta de x. De esto obtenemos que existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 = v_2 x$. Por tanto $x = v_2^{-1} v_1 \in V^{-1}V \subset V^2$. $\square$

Teorema 2.11. *Todo grupo topológico T_1 es un espacio regular.*

Demostración. Afirmamos que si U es una vecindad abierta de $e \in G$, entonces existe un abierto V de G tal que $e \in V \subset \overline{V} \subset U$. Efectivamente, si U es dicha vecindad, existe un abierto simétrico V' tal que $e \in V' \subset U$. Además, como la operación es continua y usando el lema 2.9, existe un abierto simétrico V tal que $e \in V^2 \subset V' \subset U$. Por el lema 2.10 se obtiene que $e \in V \subset \overline{V} \subset V^2 \subset U$.

Para demostrar la regularidad de G, sean $x \in G$ y C cerrado de G tales que $x \notin C$. Si $f : G \longrightarrow G$ es la acción izquierda $f(y) = x \cdot y$, entonces f es un homeomorfismo de G en G que cumple $f(e) = x$. Tenemos que $C' = f^{-1}[C]$ es un cerrado de G que no tiene a la identidad como elemento. Aplicando la afirmación del primer párrafo obtenemos que existe un abierto V de G tal que $e \in V \subset \overline{V} \subset G \setminus C'$.

Finalmente, obtenemos: $x \in f[V] \subset \overline{f[V]} \subset G \setminus C$, con $f[V]$ abierto, pues f es una función cerrada, biyectiva y abierta. Por lo tanto G es un espacio regular. $\square$

Proposición 2.12. *Si G es un grupo topológico T_0, entonces G es un espacio T_1.*

Demostración. Sea G un grupo topológico que cumple el axioma T_0. Sean $x, y \in G$ cualesquiera. Como G es T_0 existe un abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Supongamos sin perder generalidad que $x \in U$ y $y \notin U$. Por el lema 2.5, existe una vecindad abierta W del neutro tal que $Wx \subset U$. Entonces se sigue que $y \notin Wx$. Esto implica que $yx^{-1} \notin W$, es decir, $x \notin W^{-1}y$.Observe que $W^{-1}y$ es una vecindad abierta de y y Wx es una vecindad abierta de x. De hecho, Wx y $W^{-1}y$ cumplen el axioma de separación T_1 para los puntos x, y. Se sigue que G es un espacio T_1. $\square$

Corolario 2.13. *Si G es un grupo topológico, son equivalentes:*

(1) G es T_3,

(2) G es Haursdorff,

(3) G es T_1,

(4) G es T_0.

Demostración. La cadena de implicaciones (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (4) se cumple para la clase de espacios topológicos. Las dos proposiciones anteriores arrojan como resultado que si G es un grupo topológico T_0, entonces cumple el axioma T_3, concluyendo así la implicación que faltaba. $\square$

Como puede observarse, en el corolario anterior se muestra un resultado muy fuerte: todo grupo topológico T_0 es un espacio T_3. De hecho, si G es un grupo topológico T_0, G es un espacio de Tychonoff. Este último resultado será demostrado un poco más adelante. Por el corolario anterior, sabemos que todo grupo topológico discreto, el grupo aditivio de los números reales $\mathbb{R}$, y el grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$ son espacios T_3; y también sabemos que todo grupo topológico indiscreto con más de un punto no es un espacio T_0.

A cualquier grupo se le puede dar una topología muy natural para que con ella resulte ser un grupo topológico: la topología discreta. Sin embargo, nos gustaría crear un método no tan trivial para generar topologías en grupos algebraicos bajo las cuales los espacios resultantes sean grupos topológicos. Para ello observe que debido a que los grupos topológicos son espacios homogéneos, para describir a sus topologías basta fijarse en una base local de la identidad. Teniendo presente esto, es natural pensar que para generar una topología en un grupo (que lo convierta en un grupo topológico) bastará describir una colección de subconjuntos del grupo que tenga las propiedades suficientes para poder ser una base local de la identidad. Con este problema en mente es natural pensar en la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las mínimas condiciones que debe cumplir una colección de subconjuntos de un grupo para que genere un grupo topológico y que ella sea una base local de la identidad del grupo con esa topología?

Responder a esta pregunta implica axiomatizar de alguna forma a los grupos topológicos: encontrar dichas condiciones mínimas equivale a olvidarnos de las dos propiedades que definen a los grupos topológicos y dar en lugar de ellas una lista de propiedades que debe cumplir una base local.

El siguiente teorema brinda dicha axiomatización. De aquí en adelante, se referirá bajo el nombre de axiomas de grupo topológico a las seis propiedades abajo mencionadas.

Teorema 2.14. *Sea G un grupo topológico, y sea $\mathfrak{U}$ una base local en e, el neutro de G. Entonces se cumplen:*

(1) Para toda $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $V^2 \subset U$.

(2) Para toda $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$.

(3) Para toda $U \in \mathfrak{U}$ y para toda $x \in U$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $Vx \subset U$.

(4) Para toda $U \in \mathfrak{U}$ y para toda $x \in G$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$.

(5) Para todas $U, V \in \mathfrak{U}$ existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $W \subset U \cap V$.

(6) $\{e\} \subset \bigcap \mathfrak{U}$.

Por otro lado, si G es un grupo y $\mathfrak{U}$ es una familia de subconjuntos de G que satisfacen las seis condiciones anteriores, entonces la familia $\mathfrak{B} = \{Ua : a \in G, U \in \mathfrak{U}\}$ es una base para una topología en G, con la cual G es un grupo topológico y $\mathfrak{U}$ es una base local en e.

Si adicionalmente $\{e\} = \bigcap \mathfrak{U}$ entonces la topología generada por $\mathfrak{B}$ en G es una topología T_3.

Demostración. Para demostrar la primera parte, empecemos dando $U \in \mathfrak{U}$.

Para demostrar (1), empecemos observando que $e \cdot e = e \in U$, por lo que podemos usar la continuidad de la operación del grupo en (e, e): existen dos abiertos V_1, V_2 de G, tales que $V_1 V_2 \subset U$, con $e \in V_1 \cap V_2$. Como $V_1 \cap V_2$ es una vecindad abierta de e, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$. Por ello, tenemos que $V^2 \subset V_1 V_2 \subset U$, por lo que se concluye (1).

Para demostrar (2), por la continuidad de la inversa en $e^{-1} = e$, existe una vecindad abierta W de e tal que $W^{-1} \subset U$. Entonces existe un $V \in \mathfrak{U}$, con $V \subset W$. Con esto obtenemos que $V^{-1} \subset W^{-1} \subset U$.

Para demostrar (3), sea $x \in U$. Como ρ_x es un homeomorfismo, existe una vecindad abierta W de e tal que $Wx \subset U$. Entonces existe $V \in \mathfrak{U}$, con $V \subset W$. Es claro que $Vx \subset Wx \subset U$.

Para demostrar (4), sea $x \in G$. Observamos que $f = \rho_x^{-1} \circ \lambda_x$ es un homeomorfismo, y $f(e) = e$. Por tanto existe una vecindad abierta W de e tal que $xWx^{-1} = f[W] \subset U$. Entonces existe $V \in \mathfrak{U}$, con $V \subset W$. Observe que $xVx^{-1} \subset xWx^{-1} \subset U$.

Para demostrar (5), sea $V \in \mathfrak{U}$. $U \cap V$ es una vecindad abierta de e, por lo que existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $W \subset U \cap V$.

Para demostrar (6), basta observar que x es un elemento de cada conjunto U, con $U \in \mathfrak{U}$.

A continuación demostraremos la segunda parte del teorema. Sean $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ las familias de subconjuntos que cumplen las hipótesis de la segunda parte del teorema.

Afirmación 1. $\mathfrak{B}$ es una base.

Veamos que $G \subset \bigcup \mathfrak{B}$. Sea $g \in G$. De (6) se sigue que existe $U \in \mathfrak{U}$, y cumple que $e \in U$. Por tanto, $g \in Ug \in \mathfrak{B}$.

Sean ahora $U', V' \in \mathfrak{U}$, $x, y, z \in G$, tales que $z \in U'x \cap V'y$. Entonces $zx^{-1} \in U'$, y $zy^{-1} \in V'$. Por (3), existen $U, V \in \mathfrak{U}$ tales que $Uzx^{-1} \subset U'$, $Vzy^{-1} \subset V'$. Por (5) existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $W \subset U \cap V$. Afirmamos que $Wz \subset U'x \cap V'y$. Sea $w \in W$. Entonces $w \in U \cap V$, por lo que $wz \in Uz \cap Vz \subset U'x \cap V'y$.

Por tanto, el conjunto $\tau = \{W \subset G : \forall x \in W \exists U \in \mathfrak{B}(x \in U \subset W)\}$ es una topología para G.

Afirmación 2. $\tau = \{W \subset G : \forall x \in W \exists U \in \mathfrak{U}(Ux \subset W)\}$.

Para demostrar la primera contención, sea $W \in \tau$. Sea $x \in W$. Entonces obtenemos $U \in \mathfrak{U}$, $y \in G$ tales que $x \in Uy \subset W$. Luego $xy^{-1} \in U$, y por (3) existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $Vxy^{-1} \subset U$. Se concluye que $Vx \subset Uy \subset W$.

Para demostrar la segunda contención, sean W un elemento de $\{W \subset G : \forall x \in W \exists U \in \mathfrak{U}(Ux \subset W)\}$ y $x \in W$. Entonces existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $Ux \subset W$. Observemos que por (6) $e \in U$, y por tanto $x \in Ux \subset W$. Hemos concluido, puesto que $Ux \in \mathfrak{B}$.

Afirmación 3. La operación de G es continua bajo la topología τ.

Sean $a, b \in G$ y $O \in \tau$ tales que $ab \in O$. Entonces existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $Wab \subset O$. Entonces, por (1), existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $U^2 \subset W$. Luego, por (4) existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $aVa^{-1} \subset U$. Entonces $U(aVa^{-1}) \subset U^2 \subset W$. Equivalentemente $UaVa^{-1} \subset W$, por lo que $UaV \subset Wa$ y entonces $UaVb \subset Wab \subset O$. Obsérvese que esto concluye la prueba, pues Ua es una vecindad abierta de a y Vb una vecindad abierta de b.

Afirmación 4. Si $V \in \tau$ y $b \in G$, $bV \in \tau$.

Supongamos $V \in \mathfrak{U}$. Sea $y \in bV$. Entonces $b^{-1}y \in V$. Por (3) existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $Wb^{-1}y \subset V$. Por (4), existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $b^{-1}Ub \subset W$, por lo que $b^{-1}Ubb^{-1}y \subset$

$Wb^{-1}y \subset V$. Esto es $b^{-1}Uy \subset V$, por lo que $Uy \subset bV$. Con lo anterior, se concluye la afirmación para básicos. De aquí se sigue fácilmente la demostración en general, pues si γ es una familia de básicos, se tiene $b\bigcup\gamma = \bigcup\{bg : g \in \gamma\}$.

Afirmación 5. La función Inv_G es continua.

Para demostrar la continuidad de Inv_G, basta ver que la imagen inversa de básicos es un abierto. Sean $x \in G$, $U \in \mathfrak{U}$. Es claro que $Inv^{-1}(Ux) = x^{-1}U^{-1}$. Por la afirmación 4, basta ver que $U^{-1} \in \tau$.

Sea $x \in U^{-1}$. Entonces $x^{-1} \in U$. Por (3), existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $Vx^{-1} \subset U$. Por (2) existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $W^{-1} \subset V$. Entonces $W^{-1}x^{-1} \subset Vx^{-1} \subset U$. Por tanto $xW \subset U^{-1}$, pues $W^{-1}x^{-1} = (xW)^{-1}$. De nuevo usando la afirmación 4, xW es un abierto, y de hecho es una vecindad abierta de x. Por tanto $U^{-1} \in \tau$.

Las afirmaciones anteriores permiten concluir que $(G, \cdot)$ equipado con la topología τ es un grupo topológico. No es difícil verificar ahora que la colección $\mathfrak{U}$ es una base local en e.

Finalmente, demostremos la última parte del teorema. Supongamos que se cumple que $\{e\} = \bigcap\mathfrak{U}$, y demostremos que la topología generada por $\mathfrak{B}$ es T_0. Esto basta para mostrar que G es T_3, en virtud del corolario 2.13.

Sean $x, y \in G$ distintos. Veamos que existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ pero $y \notin U$. Como G es homogéneo, existe un homeomorfismo f de G en G tal que $f(x) = e$. Nótese que $f(x) \neq f(y)$. Esto es $f(y) \notin \{e\}$. Como estamos suponiendo que $\{e\} = \bigcap\mathfrak{U}$, se sigue que existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $f(y) \notin V$. Como V es un abierto básico, se obtiene que $U = f^{-1}[V] \in \tau$, $x \in U$ y además $y \notin U$. Se concluye que la topología en cuestión cumple el axioma T_0. □

Ahora aplicaremos el teorema anterior de la siguiente manera: exhibiremos un grupo topológico no trivial brindando una familia de conjuntos que cumplan las seis condiciones del teorema.

Ejemplo 2.15. Sea $(\mathbb{Z}, +)$ el grupo aditivo de los números enteros, y sea $p \in \mathbb{N}$ un primo fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $U_n = p^n\mathbb{Z}$. Entonces la familia $\mathfrak{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumple las condiciones del teorema anterior, de donde se sigue que la familia $\gamma = \{U_n z : n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$ es base de una topología para $\mathbb{Z}$ bajo la cual $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo topológico.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$.

Observe que $U_n = p^n\mathbb{Z}$ consiste de los múltiplos de p^n en $\mathbb{Z}$. Es claro que:

$$\begin{aligned} U_n + U_n \subset U_n &\qquad \text{por lo que } \mathfrak{U} \text{ cumple (1) y (3),} \\ (U_n)^{-1} = U_n &\qquad \text{por lo que } \mathfrak{U} \text{ cumple (2),} \\ \mathbb{Z} \text{ es abeliano} &\qquad \text{por lo que } \mathfrak{U} \text{ cumple (4),} \\ 0 \in \mathbb{Z} &\qquad \text{por lo que } \mathfrak{U} \text{ cumple (6).} \end{aligned}$$

Por otro lado, si $n, m \in \mathbb{Z}$ y d es el mínimo común múltiplo de n y m, se cumple:

$$U_d \subset U_n \cap U_m \qquad \text{por lo que } \mathfrak{U} \text{ cumple (5).}$$

Hemos probado que la familia $\mathfrak{U}$ cumple las condiciones deseadas. □

Veamos ahora la noción de producto directo de grupos topológicos.

Teorema 2.16. *Supongamos que $\{G_i : i \in I\}$ es una familia de grupos topológicos, con e_i elemento neutro de G_i. Entonces $G = \prod_{i \in I} G_i$, considerado con la topología producto y la operación por coordenadas, es un grupo topológico con neutro $(e_i)_{i \in I}$. A este grupo se le llama el producto directo de grupos topológicos.*

Demostración. Las estructuras de grupo y espacio topológico se heredan de manera natural al producto usual con la operación por coordenadas y la topología producto. Veamos que la función $f : G \times G \longrightarrow G$ dada por $f(x, y) = xy^{-1}$ es continua. Para cada $i \in I$, se denotará por π_i a la función proyección en la i-ésima coordenada, $\pi_i : G \longrightarrow G_i$.

Sean $x, y \in G$, y sea O una vecindad abierta de xy^{-1} en G. Así, podemos encontrar índices $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe $W_i \in \tau(G_{\alpha_i})$ tales que $W = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[W_i]$ es un abierto básico de G que cumple $xy^{-1} \in W \subset O$.

Sea $i \in \{1, ..., n\}$. Aplicando el hecho de que cada espacio G_{α_i} es un grupo topológico, obtenemos $U_i, V_i \in \tau(G_{\alpha_i})$ tales que $\pi_{\alpha_i}(x) \in U_i$, $\pi_{\alpha_i}(y) \in V_i$ y $U_i V_i^{-1} \subset W_i$. Sean $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i]$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[V_i]$; observe que U y V son abiertos básicos de G. Además, por cómo están dados los U_i, V_i, tenemos que $x \in U$, $y \in V$.

Demostremos, para concluir, que $UV^{-1} \subset W$. Sean $u \in U$, $v \in V$. Entonces si $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene: $\pi_{\alpha_i}(u) \in U_i$, $\pi_{\alpha_i}(v) \in V_i$, por lo que $\pi_{\alpha_i}(u) \cdot \pi_{\alpha_i}(v)^{-1} \in W_i$. Esto es $\pi_{\alpha_i}(uv^{-1}) \in W_i$, por lo que $uv^{-1} \in W$. □

2.2. Conjuntos abiertos, cerrados y compactos

Lema 2.17. *Sea G un grupo topológico, $U \in \tau(G)$, $A \subset G$, y $\mathfrak{B}$ una base local en e. Se cumplen:*

(1) $UA, AU \in \tau(G)$.

(2) $\overline{A} = \bigcap \{UA : U \in \mathfrak{B}\}$.

(3) A simétrico implica $\overline{A}$ simétrico.

Demostración. Para demostrar (1), sea $x \in UA$. Entonces $x \in Ua$ para algún $a \in A$. Observe que $x \in Ua \subset UA$, y además Ua es abierto de G. Se sigue que $UA \in \tau(G)$. De manera similar, se obtiene $AU \in \tau(G)$.

Para demostrar la primera contención de (2), sea $U \in \mathfrak{B}$ y veamos que $\overline{A} \subset UA$. Sea $x \in \overline{A}$. Sea V una vecindad abierta y simétrica de e tal que $V \subset U$. Como Vx es una vecindad abierta de x, tenemos que $Vx \cap A \neq \emptyset$, esto es, existe $a \in Vx \cap A$. Entonces existe $v \in V$ tal que $a = vx$. Se tiene $x = v^{-1}a \in VA \subset UA$. Por la arbitrariedad con que se tomó U, $\overline{A} \subset \bigcap \{UA : U \in \mathfrak{B}\}$.

Para demostrar la segunda contención de (2), sea $x \in \bigcap \{UA : U \in \mathfrak{B}\}$. Sea U una vecindad abierta de x. Entonces Ux^{-1} es una vecindad abierta de e, por lo que existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subset Ux^{-1}$. Por axiomas de grupo topológico, existe $V \in \mathfrak{B}$ tal que $V^{-1} \subset B$. Por como se tomó a x, obtenemos $x \in VA$, esto es: existen $v \in V$, $a \in A$ tales que $x = va$. Se sigue que $a = v^{-1}x \in V^{-1}x \subset Bx \subset U$. Observe que $a \in A \cap U$, por lo que $A \cap U \neq \emptyset$ y $x \in \overline{A}$.

Para (3), supongamos que A es simétrico. Sea $x \in \overline{A}$, y veamos que $x^{-1} \in \overline{A}$. Observe que esto basta para concluir $\overline{A} = \overline{A}^{-1}$. Sea U una vecindad abierta de x^{-1}. Entonces U^{-1} es una vecindad abierta de x. Por tanto $U^{-1} \cap A \neq \emptyset$, esto es, existe $a \in U^{-1} \cap A$. De esto se sigue que $a^{-1} \in A$ (pues A es simétrico por hipótesis). También se tiene $a^{-1} \in U$. Por tanto $U \cap A \neq \emptyset$. □

Teorema 2.18. *Sea G un grupo topológico. Si E, F son subconjuntos compactos de G, y P es un subconjunto cerrado de G, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si $F \cap P = \emptyset$, entonces existe una vecindad abierta V de e tal que $FV \cap P = \emptyset$.

(2) FP es un subespacio cerrado de G.

(3) EF es compacto en G.

Demostración. (1). Supongamos $F \cap P = \emptyset$. Por tanto para cada $x \in F$, $\lambda_x(e) \in G \setminus P \in \tau(G)$. Usando la continuidad de λ_x, obtenemos V_x una vecindad abierta de e tal que $xV_x \subset G \setminus P$. También existen, para cada $x \in F$, vecindades abiertas de la identidad W_x, tales que $W_x^2 \subset V_x$.

Como $\{xW_x : x \in F\}$ es una cubierta abierta de F, existe $C \subset F$ finito tal que $F \subset \bigcup_{x\in C} xW_x$. Definamos $V = \bigcap_{x\in C} W_x$. Observe que V es una vecindad abierta de e. Veamos que este conjunto es el deseado.

Sea $y \in F$, y veamos que $yV \cap P = \emptyset$. Dado ese y, existe $x \in C$ tal que $y \in xW_x$. Obtenemos: $yV \subset xW_xV \subset xW_x^2 \subset xV_x \subset G \setminus P$.

Como y denota a cualquier elemento de F, obtenemos que $FV \cap P = \emptyset$, como se quería.

(2). Sea $x \notin FP$. Observe que $F^{-1}x \cap P \neq \emptyset$ implica $x \in FP$. Efectivamente si existen $f \in F$, $p \in P$ tales que $f^{-1}x = p$, se tiene $x = fp \in FP$. Por contrapositiva, obtenemos que $F^{-1}x \cap P = \emptyset$. Note que el primero de los intersecandos de esta igualdad es un compacto, por lo que podemos aplicar el inciso (1). Esto es: existe una vecindad abierta V de e tal que $F^{-1}xV \cap P = \emptyset$.

Veamos que esto implica que $xV \cap FP = \emptyset$. De nuevo, si $xV \cap FP \neq \emptyset$, entonces existen $v \in V$, $f \in F$ y $p \in P$ tales que $xv = fp$. Entonces $p = f^{-1}xv \in F^{-1}xV$, por lo que $F^{-1}x \cap P \neq \emptyset$. Aplicando contrapositiva, obtenemos lo que se desea.

En virtud de que xV es una vecindad abierta de x, se obtiene $x \notin \overline{FP}$. Concluimos que FP es cerrado.

(3). EF es la imagen bajo la operación de grupo del conjunto $E \times F$. El teorema de Tychonoff asegura que $E \times F$ es compacto como subespacio de $G \times G$. De ambos hechos se concluye lo que se pedía demostrar. □

2.3. Subgrupos

Proposición 2.19. *Sea G un grupo topológico, y H un subgrupo de G. Si H contiene un abierto no vacío de G, entonces H es un abierto.*

Demostración. Supongamos que U es un abierto no vacío de G tal que $U \subset H$. Entonces existe $u \in U$, y por tanto $V = Uu^{-1}$ tiene como elemento a la identidad. Por lema 2.5, V es un abierto de G, con $V \subset H$, pues H es un subgrupo.

Afirmación. $H = \bigcup\{Va : a \in H\}$.

Para demostrar la primera contención, sea $h \in H$. Por tanto $h = e \cdot h \in Vh \subset \bigcup\{Va : a \in H\}$. La otra contención se sigue de que H es cerrado bajo inversos y bajo la operación.

Hemos expresado a H como una unión de abiertos, por lo que es un abierto. □

Proposición 2.20. *Sean G un grupo topológico, y H un subgrupo abierto de G. Entonces H es un subespacio cerrado de G.*

Demostración. Consideremos la familia $\gamma = \{Ha : a \in G\}$. Mostremos que γ es una cubierta abierta de G.

Efectivamente, por el lema 2.5, si $a \in G$, Ha es un abierto de G. Además $G = \bigcup \gamma$ pues $e \in H$ implica que para $a \in G$ se tiene $a \in Ha$. Veamos ahora que γ consiste de conjuntos ajenos por pares.

Sean $a, b \in G$ tales que $Ha \cap Hb \neq \emptyset$. Veamos $Ha \subset Hb$. Como $a \in Ha \subset Hb$, existe $h \in H$ tal que $a = hb$. Si $ka \in Ha$ es cualquiera, se sigue que $ka = khb \in Hb$. Por tanto $Ha \subset Hb$. La contención $Hb \subset Ha$ es análoga.

Al ser γ una partición de abiertos, uno de los cuales es $H = He$, se sigue que H es cerrado (pues su complemento es unión de abiertos). □

Combinando las dos proposiciones anteriores, obtenemos:

Corolario 2.21. *Si H es un subgrupo de un grupo topológico G que contiene un abierto no vacío de G, entonces H tiene como subconjunto a la cuasi-componente del neutro de G. En particular, H es supraconjunto de la componente conexa del neutro.*

Demostración. Por 2.19, H es un abierto de G. Por 2.20, H es abierto y cerrado en G. Como $e \in H$, y $Q(e)$, la cuasi-componente de e con $Q(e) = \bigcap\{U \subset G : U \textit{ es abierto y cerrado}; e \in U\}$, se sigue que $Q(e) \subset H$. Además $C(e) \subset Q(e) \subset H$, donde $C(e)$ es la componente conexa de e. □

Para el teorema 2.23 requeriremos el siguiente lema.

Lema 2.22. *Sea X un espacio topológico regular. Si Y es un subespacio denso de X, $y \in Y$, entonces $\chi(y, Y) = \chi(y, X)$, donde $\chi(x, X) = min\{|\mathfrak{B}| : \mathfrak{B}$ es base local de x en $X\} + \aleph_0$.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Si $\mathfrak{B}$ es base local de y en X, con cardinalidad $\chi(y, X)$, es claro que $\mathfrak{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathfrak{B}\}$ es una base local de y en Y. Hemos probado $\chi(y, Y) \leq \chi(y, X)$.

Sea $\mathfrak{B}$ base de y en Y de cardinalidad $\chi(y, Y)$. Para cada $U \in \mathfrak{B}$ existe $V_U \in \tau(X)$ tal que $V_U \cap Y = U$. Observe que la densidad de Y nos asegura $\overline{V_U} = \overline{U}$. Sea $\gamma = \{V_U : U \in \mathfrak{B}\}$. Demostraremos que γ es base local de X en y. Sea O una vecindad de y en X. Como X es regular, existe una vecindad W de y en X tal que $\overline{W} \subset O$. Como $\mathfrak{B}$ es base de y en Y existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $U \subset W \cap Y$. Entonces $V_U \subset \overline{V_U} = \overline{U} \subset \overline{W} \subset O$, con $y \in V_U$. Hemos probado que γ es una base para y en X, por lo que se concluye que $\chi(y, X) \leq \chi(y, Y)$. □

Teorema 2.23. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Se cumplen:*

(1) $\overline{H}$ *es subgrupo de* G*,*

(2) $\overline{H}$ *es homogéneo y regular,*

(3) H *primero numerable implica* $\overline{H}$ *primero numerable,*

(4) H *localmente compacto implica* H *cerrado.*

Demostración. (1). En virtud del tercer inciso del lema 2.17, como H es cerrado bajo inversos, también lo es $\overline{H}$. Además como H es no vacío, $\overline{H}$ es no vacío. Sean $x, y \in \overline{H}$. Queremos ver que $xy \in \overline{H}$. Sea U una vecindad abierta de xy. Basta ver que $U \cap \overline{H} \neq \emptyset$ pues si eso sucede, existe $h \in U \cap \overline{H}$, y como U es una vecindad abierta de h, se tiene $H \cap U \neq \emptyset$.

Como $x^{-1}U$ es una vecindad abierta de y, existe $h \in x^{-1}U \cap H$. Entonces $xh \in U \cap xH$. Si logramos ver que $xh \in \overline{H}$ hemos concluido, pues se implicaría $xh \in U \cap \overline{H}$. Sea V una vecindad abierta de xh. Entonces Vh^{-1} es una vecindad abierta de x. Entonces existe $k \in Vh^{-1} \cap H$. Observe que $kh \in V \cap H$, por lo que $xh \in \overline{H}$.

(2). En virtud de que es un grupo topológico, por el inciso anterior.

(3). Supongamos que H es primero numerable. Observe que esto es equivalente a $\chi(h, H) \leq \aleph_0$ para cada $h \in H$. Además H es un subespacio denso de $\overline{H}$ y $\overline{H}$ es subgrupo de G por el inciso (1). Por el inciso anterior, $\overline{H}$ es homogéneo y regular. Con todo esto, podemos aplicar el lema anterior en el punto $e \in H$. Esto es, se cumple: $\chi(e, \overline{H}) \leq \aleph_0$. Como las bases locales se preservan bajo homeomorfismos, se concluye que $\overline{H}$ es primero numerable.

(4) $\overline{H}$ es un subgrupo de G, por inciso (1). H es un subespacio localmente compacto y denso en $\overline{H}$. Por la proposición 1.27, H es abierto en $\overline{H}$, con H subgrupo de $\overline{H}$. Como subgrupos abiertos son cerrados, H es un subespacio cerrado de $\overline{H}$, y por tanto $H = \overline{H}$. □

El corolario 2.21 llamó la atención a la componente conexa del neutro al hablar de subgrupos de un grupo topológico. Veamos que ésta resulta ser un subgrupo.

Proposición 2.24. *Sea* G *un grupo topológico. Si* H *es la componente conexa de* e *en* G*, entonces* H *es un subgrupo conexo, cerrado y algebraicamente normal.*

Demostración. Veamos que H es subgrupo de G. Sea $h \in H$. Entonces existe un subespacio conexo C de G tal que $\{h, e\} \subset C$. Como Inv es continua, tenemos que C^{-1} es un conexo, que además cumple $\{e, h^{-1}\} \subset C^{-1} \subset H$, por lo que H es simétrico.

Sean $h, j \in H$. Entonces existen conexos $C, D \subset G$ tales que $\{h, e\} \subset C$ y $\{j, e\} \subset D$. Como ρ_j es un homeomorfismo, Cj es conexo. Además $\{hj, j\} \subset Cj$, por lo que si pedimos $C' = Cj \cup D$, obtenemos que C' es un conexo (los conjuntos Cj, D comparten a j como elemento). Observe que $\{e, hj\} \subset C'$, lo que implica que $hj \in H$.

El que H sea conexo y cerrado se sigue de que H es componente conexa. Para ver que H es algebraicamente normal, sea $a \in G$ y veamos que $aHa^{-1} = H$. Como λ_a es un homeomorfismo, tenemos que aH es conexo. Como $\rho_{a^{-1}}$ es un homeomorfismo, aHa^{-1} es conexo. Como $e \in aHa^{-1}$ y H es maximal con respecto a los conjuntos conexos que tienen a la identidad como elemento, obtenemos $aHa^{-1} \subset H$. De manera similar se muestra $a^{-1}Ha \subset H$, de donde se sigue que $H \subset aHa^{-1}$. □

Estamos en posición de dar un ejemplo de un grupo topológico que servirá para complementar dos resultados vistos anteriormente.

Ejemplo 2.25. Sean $\mathbb{Q}$ los racionales con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Es claro que $\mathbb{Q}$ son un subgrupo de $\mathbb{R}$ con la suma. Se sigue que $(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo topológico, pues la restricción de una función continua es continua.

$\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo, pues si $q \in \mathbb{Q}$ y ε es un irracional positivo, se tiene que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} = [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap \mathbb{Q}$, de donde la cuasi-componente de q en $\mathbb{Q}$ es $\{q\}$, y por tanto también su componente conexa. El teorema anterior implica que $\{0\}$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$. Éste es un subgrupo cerrado que no es un abierto, mostrando que la contrapositiva de 2.20 no es válida. También es contraejemplo para la contrapositiva de 2.21: no todo subgrupo de un grupo topológico que contenga a la cuasi-componente del neutro contiene un abierto no vacío.

2.4. Espacios cocientes

Dado un grupo G y un subgrupo H de G algebraicamente normal, se puede definir un grupo G/H, llamado grupo cociente, el cual consiste en las clases de equivalencia bajo la siguiente relación: a relacionado con b si y sólo si $ab^{-1} \in H$. La clase de equivalencia de un elemento $a \in G$ bajo esta relación se suele denotar Ha. En consecuencia, se tiene $G/H = \{Ha : a \in G\}$.

Si G es un grupo topológico y H un subgrupo algebraicamente normal de G, convendremos en la siguiente notación:

π denotará a la función cociente $\pi : G \longrightarrow G/H$, que asigna $\pi(a) = Ha$ para cada $a \in G$.

Si K es un subconjunto de G, $K^* = \{Hx : x \in K\}$.

Si $\mathfrak{B}$ es una base de $\tau(G)$, $\mathfrak{B}^* = \{B^* : B \in \mathfrak{B}\}$.

Teorema 2.26. *Si G es un grupo topológico, H un subgrupo algebraicamente normal y $\mathfrak{B}$ una base de $\tau(G)$, entonces $\mathfrak{B}^*$ es base para una topología en G/H y se cumple G/H con dicha topología es un grupo topológico. También se tiene que la función $\pi : G \longrightarrow G/H$ dada por $\pi(a) = Ha$, es abierta y continua. Además, si H es un subgrupo cerrado en G, se cumple que la topología en consideración hace a G/H un espacio T_3.*

Demostración. Veamos primero que $\mathfrak{B}^*$ es base para una topología en G/H. Sea $x \in G$. Entonces existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in U$. Por tanto $Hx \in U^*$, por lo que podemos concluir que $G/H \subset \bigcup \mathfrak{B}^*$.

Supongamos ahora que U^* y V^* son elementos de $\mathfrak{B}^*$, para $U, V \in \mathfrak{B}$, y se cumple que existe $x \in G$ tal que $Hx \in U^* \cap V^*$. Observe que $\bigcup U^* = HU$. Por tanto $x \in Hx \subset HU \cap HV$. Observe que $HU \cap HV$ es un abierto de G, en virtud del lema 2.17. Por ello, obtenemos que existe $W \in \tau(x, G)$ tal que $W \subset HU \cap HV$. Claramente $Hx \subset W^*$. Veamos que $W^* \subset U^* \cap V^*$. Si $w \in W$, existen $h_1, h_2 \in H$, $u \in U$, $v \in V$ tales que $w = h_1 u = w = h_2 v$. Es claro que de esto se sigue que $Hw = Hu = Hv$, por lo que $Hw \in U^* \cap V^*$. Hemos mostrado que $W^* \subset U^* \cap V^*$, por lo que se concluye que $\mathfrak{B}^*$ es una base.

Veamos que la función $f : G/H \times G/H \longrightarrow G/H$, dada por $f(Hx, Hy) = Hxy^{-1}$ es continua. Esta es una condición suficiente para concluir que G/H es un grupo topológico (véase lema 2.3). Sean $Hx, Hy \in G/H$, y sea $O \in \tau(G/H)$ tal que $Hxy^{-1} \in O$. Entonces existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $Hxy^{-1} \in U^* \subset O$, por lo que $xy^{-1} \in \bigcup U^* = HU$, que es un abierto de G.

Como G es un grupo topológico, existen $V, W \in \tau(G)$ tales que $x \in V$, $y \in W$, y se cumple $VW^{-1} \subset HU$. Veamos que V^* y W^* son los abiertos que buscamos. Como $x \in V$, se obtiene $Hx \in V^*$. De igual manera $Hy \in W^*$. Además, si $v \in V$ y $w \in W$, $vw^{-1} \in HU$, por lo que existen $h \in H$, $u \in U$ tales que $vw^{-1} = hu$. Por tanto $Hvw^{-1} = Hhu = Hu \in U^*$, por lo que se concluye $f[V^* \times W^*] \subset U^* \subset O$. Por tanto, f es continua.

La función π es abierta pues, si $U \in \tau(G)$, se tiene: $\pi[U] = U^* \in \tau(G/H)$.

Veamos la continuidad de la función π. Sea $x \in G$, y $O \in \tau(G/H)$ tal que $Hx \in O$. Entonces existe $U \in \tau(G)$ tal que $Hx \in U^* \subset O$. Entonces $x \in Hx \subset HU$, con éste último abierto, por lo que existe $V \in \tau(x, G)$ tal que $x \in V \subset HU$. Éste es el abierto que nos servirá. Si $v \in V$, entonces existen $h \in H$, $u \in U$ tales que $v = hu$. Se obtiene $Hv = Hhu = Hu \in U^* \subset O$. Por tanto $\pi[V] = V^* \subset O$, por lo que concluimos la continuidad deseada. Veamos ahora que H cerrado implica que la topología generada es T_3. Basta ver que esa topología es T_1. Sean $Ha \neq Hb$ elementos de G/H. Como G es regular, $a \notin Hb$ y Hb cerrado en virtud del teorema 2.18, existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $a \in U$ con $U \cap Hb = \emptyset$. De esto obtenemos $Ha \in U^*$ pero $Hb \notin U^*$. Por lo tanto, G/H es T_1.

□

Proposición 2.27. *Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo algebraicamente normal de G, se cumple que G/H es discreto si y sólo si H es abierto en G.*

Demostración. G/H discreto y $H = He$ implican $\{H\} \in \tau(G/H)$. Como la función π es continua $H = \pi^{-1}[H]$ es un abierto de G.

Para el converso, si H es un abierto de G, entonces Ha es abierto en G para cada $a \in G$. Pero además, como π es abierta en virtud del teorema anterior, dado $Ha \in G/H$, $Ha = \pi[Ha] \in \tau(G/H)$. □

Recordemos que se le llama función perfecta a una función entre espacios topológicos que es continua, cerrada y cuyas imágenes inversas de puntos son compactas.

Teorema 2.28. *Si G es un grupo topológico, y H es un subgrupo algebraicamente normal y compacto de G, entonces la función cociente $\pi : G \longrightarrow G/H$ es perfecta.*

Demostración. Veamos primero que π es cerrada. Sea P un cerrado de G. $HP = \{Hp : p \in P\}$, es decir, HP es unión de clases laterales bajo H. Esto es: $\pi^{-1}[\pi[P]] = HP$. Por el inciso (2) del teorema 2.18, HP es cerrado. Por propiedades de funciones cocientes (la topología cociente es la topología final bajo la función cociente), $\pi[P]$ es cerrado.

Veamos que las imágenes inversas de puntos son compactos. Sea $K \in G/H$. Entonces existe $a \in G$ tal que $\pi(a) = K$ (π es suprayectiva). Es claro que $\pi^{-1}(K) = \pi^{-1}(\pi(a)) = Ha$. En virtud de que ρ_a es un homeomorfismo, Ha es compacto en G. Esto demuestra que la imagen inversa del punto K es compacta. □

Un hecho conocido de funciones perfectas (preimágenes perfectas de compactos son compactos, proposición 1.28), nos arroja el siguiente corolario.

Corolario 2.29. *Si G es un grupo topológico y H un subgrupo algebraicamente normal y compacto de G tal que G/H es compacto, entonces G es compacto.*

A continuación se presenta el análogo del primer teorema de isomorfismo para grupos topológicos.

Teorema 2.30. *Si $f : G \longrightarrow K$ es un homomorfismo suprayectivo, continuo y abierto entre grupos topológicos, entonces $H = Nuc(f) = f^{-1}[\{e_K\}]$ es un subgrupo algebraicamente normal de G y $\varphi : G/H \longrightarrow K$ dada por $\varphi(Hx) = f(x)$ es un isomorfismo de grupos que es también un homeomorfismo.*

Demostración. La parte algebraica es un hecho conocido; es decir, de las hipótesis (y olvidando la topología en G y en K), se sigue que φ está bien definida y es un isomorfismo de grupos.

Recordemos que π denota la función cociente de G en G/H. Observe que $f = \varphi \circ \pi$. Para demostrar la continuidad de φ, sea U un abierto de K. $\pi[f^{-1}[U]]$ es un abierto de G/H pues π es una función abierta y f es una función continua. Veamos que $\pi[f^{-1}[U]] = \varphi^{-1}[U]$. Si $x \in f^{-1}[U]$, entonces $f(x) \in U$. Entonces $\varphi(\pi(x)) = f(x) \in U$, esto es, $\pi(x) \in \varphi^{-1}[U]$. Si $y \in G/H$ tal que $\varphi(y) \in U$, se tiene que existe $z \in G$ tal que $y = Hz$. Entonces $f(z) = \varphi(y) \in U$, por lo que $z \in f^{-1}[U]$. Además $\pi(z) = y$, de donde $y \in \pi[f^{-1}[U]]$.

Veamos que φ es abierta. Sea U un abierto de G/H. Entonces $\pi^{-1}[U] \in \tau(G)$. Como f es función abierta, tenemos que $f[\pi^{-1}[U]]$ es un abierto de K. Afirmamos: $\varphi[U] = f[\pi^{-1}[U]]$.

Si $u \in U$, existe $x \in G$ tal que $Hx = u$ pues π es una función suprayectiva. Entonces $\varphi(u) = \varphi(\pi(x)) = f(x) \in f[\pi^{-1}[U]]$, pues se cumple que $x \in \pi^{-1}[U]$. Si $v \in f[\pi^{-1}[U]]$, existe $x \in \pi^{-1}[U]$ tal que $f(x) = v$. Entonces $\pi(x) \in U$, con $\varphi(\pi(x)) = f(x) = v$. Por tanto $v \in \varphi[U]$.

Hemos probado que φ es una función biyectiva, continua y abierta. De aquí se sigue que φ es un homeomorfismo. $\square$

Capítulo 3

Los teoremas de Markov y de Birkhoff-Kakutani

En este capítulo enunciamos y demostramos dos resultados clásicos en la teoría de grupos topológicos. El primero de ellos, el teorema de A.A. Markov establece que todo espacio de Tychonoff es homeomorfo a un subespacio cerrado de un grupo topológico. La demostración original de Markov, realizada en 1945, utiliza técnicas de grupos topológicos libres. La demostración que exponemos en este capítulo utiliza técnicas básicas de la teoría de funciones $C_p(X)$ y fue diseñada por A.V. Arhangel'skii y M.G. Tkachenko en [2].

El teorema de Markov tiene muchas implicaciones relevantes. Entre otras, con este teorema se dio respuesta negativa a la conjetura de P.S. Alexandroff acerca de la posibilidad de que todo grupo topológico sea un espacio normal.

El segundo resultado clásico que exponemos en este capítulo es el teorema de G. Birkhoff y S. Kakutani. El teorema de Birkhoff-Kakutani es un buen ejemplo de la fortaleza de la noción de grupo topológico, ya que la estructura algebraica permite construir una métrica para el grupo partiendo de una base numerable. El teorema de Birkhoff-Kakutani demuestra que todo grupo topológico es metrizable si y sólo si es primero numerable y T_0.

3.1. El teorema de Markov

El teorema de Markov establece que todo espacio de Tychonoff es homeomorfo a un subespacio cerrado de un grupo topológico. Este teorema fue demostrado por A.A. Markov en 1945. Para ello, desarrolló su teoría de grupos topológicos libres; sin embargo, resulta más accesible demostrarlo haciendo uso de algunos hechos básicos de la teoría de los espacios $C_p(X)$.

Comencemos observando cómo es que el conjunto de las funciones de un espacio topológico X en un grupo topológico G forma un grupo topológico. Evidentemente, en virtud del teorema 2.16, la estructura de grupo topológico de G se hereda al producto $G^X = \Pi_{x \in X} G$, es decir, al producto topológico que consiste de tantas copias de G como elementos tiene X. Este producto se suele identificar con el espacio de funciones de X en G de la siguiente manera: a cada punto $(g_x)_{x \in X} \in G^X$ se le asocia la función $f : X \longrightarrow G$ dada por $f(x) = g_x$ para cada $x \in X$.

Definamos $C(X,G) := \{f \in G^X : f \text{ } es \text{ } continua\}$ y verifiquemos que $C(X,G)$ es subgrupo de G^X, con la operación por coordenadas.

En efecto: sean $f, g \in C(X,G)$. Sea $h : X \longrightarrow G$, dada por $h(x) = f(x)^{-1}$. Es claro que h es el inverso de f bajo la operación de $C(X,G)$, pues el neutro es la función constante e_G. Si $Inv : G \longrightarrow G$ es la función inversa en G, es claro que $h = Inv \circ f$. De ello se sigue la continuidad de h, esto es $h \in C(X,G)$. De esta forma, $C(X,G)$ es cerrado bajo la formación de inversos.

Veamos ahora que $fg : X \longrightarrow G$, dada por $fg(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua. Si definimos $j : G \longrightarrow G \times G$ como $j(x) = (x,x)$, es claro que j es continua y que $fg = \cdot \circ (f \times g) \circ j$. De ello se sigue que fg es continua, esto es $fg \in C(X,G)$. Luego, $C(X,G)$ es cerrado bajo la operación de G^X. Esto concluye la afirmación de que $C(X,G)$ es subgrupo de G^X.

Hemos dotado a $C(X,G)$ de una estructura de grupo. Observe que esta estructura conlleva una estructura de grupo topológico, considerando a $C(X,G)$ con la topología que hereda como subespacio de G^X. De hecho, es fácil observar que de la definición de grupo topológico se sigue que todo subgrupo de un grupo topológico es un grupo topológico con la topología de subespacio. Esta observación se sigue de que la restricción de funciones continuas es continua.

De esta manera, $C(X,G)$ acompañado de la topología producto y de la operación por coordenadas forma un grupo topológico. Al conjunto $C(X,G)$ con la estructura de grupo topológico se le denota $C_p(X,G)$. Abreviamos $C_p(X)$ cuando hablamos del grupo topológico $C_p(X,\mathbb{R})$.

Continuaremos denotando a X como un espacio topológico y G como un grupo topológico. Para el teorema de Markov, nos interesa una manera de encajar continuamente a X en un grupo topológico de la forma $C_p(Z,G)$, donde Z es un espacio topológico. Para ello introduciremos una función llamada mapeo reflexión. Para cada $Y \subset C_p(X,G)$ es posible hallar una función continua e inyectiva de X en $C_p(Y,G)$. Esta función es la que llamaremos mapeo reflexión (relativo a Y).

Para $x \in X$, un elemento cualquiera, definimos $\widehat{x} : C_p(X,G) \longrightarrow G$ dada por $\widehat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in C_p(X,G)$. Claramente, para cada $x \in X$, la función $\widehat{x}$ es continua, pues coincide con la restricción de $\pi_x : G^X \longrightarrow G$, la proyección en la coordenada respectiva a x, al subespacio $C_p(X,G)$. Observe que esto es equivalente a decir que $\widehat{x} \in C_p(C_p(X,G),G)$.

Si $Y \subset C_p(X,G)$, se tiene que $\widehat{x}(f)$ está definido para $f \in Y$ y $x \in X$. Definamos $\Psi_Y : X \longrightarrow C_p(Y,G)$, por la regla $\Psi_Y(x) = \widehat{x}|_Y$. Esta función se llama mapeo reflexión (relativo a Y). Note que Ψ_Y está bien definida, pues dado $x \in X$, se tiene que $\widehat{x} \in C_p(C_p(X,G),G)$, por lo que $\widehat{x}|_Y \in C_p(Y,G)$.

En las siguientes dos proposiciones demostraremos las propiedades básicas del mapeo reflexión que se mencionaron anteriormente, es decir, que es continuo e inyectivo.

Proposición 3.1. *Si X es un espacio topológico, G un grupo topológico, y $Y \subset C_p(X,G)$ es un subconjunto cualquiera, se tiene que el mapeo de reflexión Ψ_Y es continuo. Además, Ψ_Y es inyectivo si y sólo si Y separa puntos.*

Demostración. Sabemos que el producto diagonal de las funciones que pertenecen a Y, $\Phi : X \longrightarrow G^Y$ dado por $\Phi(x) = \Pi_{y\in Y} y(x)$, es continuo de acuerdo a la proposición

1.22. Démonos a la tarea de probar que Φ y Ψ_Y asocian el mismo elemento a cada $x \in X$. Como el dominio de ambas funciones es el mismo, esto implica que el contradominio de Φ se puede refinar a $C_p(Y, G)$, y también otorga la continuidad buscada.

Sea $x \in X$. Entonces $\Psi_Y(x) = \widehat{x}|_Y$. Sea $y \in Y$. Entonces $\Psi_Y(x)(y) = \widehat{x}(y) = y(x)$. A su vez $\Phi(x)(y) = \pi_Y(\Phi(x)) = y(x)$, donde π_Y es la proyección en la coordenada y. Por tanto $\Psi_Y(x) = \Phi(x)$, por lo que $\Psi_Y = \Phi$ y Ψ_Y es continua.

Hemos demostrado que Ψ_Y es un producto diagonal. El producto diagonal de una familia de funciones cumple que es inyectivo si y sólo si la familia separa puntos, de acuerdo a la proposición 1.22. $\square$

Con las técnicas de teoría de los espacios $C_p(X)$ es posible demostrar no solo que cada espacio de Tychonoff es homeomorfo a un subespacio cerrado de un grupo topológico, sino además que este grupo topológico es un subgrupo denso en un grupo topológico σ-compacto. Para esta segunda parte requeriremos el siguiente lema.

Lema 3.2. *Si G es un grupo topológico y H es un subespacio compacto de éste, entonces el subgrupo generado por H es σ-compacto.*

Demostración. Sean K el subgrupo generado por H y $C = H \cup H^{-1}$. El conjunto H^{-1} es compacto por la continuidad de Inv. Luego, C es compacto. Para cada $i \in \mathbb{N}$ denote con C^i al producto cartesiano de i veces C, y $f_i : G^i \longrightarrow G$ como $f(x_1, x_2, ..., x_i) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_i$. Claramente f_i es continua para cada natural i. Esto implica que $f_i[C^i]$ es compacto para cada natural i.

En virtud de que K consiste de los productos finitos de elementos de C, obtenemos que $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i[C^i]$. Por tanto, K es σ-compacto. $\square$

Estamos ya en posición de demostrar el teorema de Markov.

Teorema 3.3 (A.A. Markov). *Cada espacio de Tychonoff X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un grupo topológico, que es a su vez un subgrupo denso de un grupo topológico σ-compacto.*

Demostración. Sea F una compactificación Hausdorff de X (existe, puesto que X es un espacio de Tychonoff). Sea $\Psi = \Psi_{C_p(F)}$. Sabemos que $C_p(F)$ separa puntos, pues F es un espacio de Hausdorff y compacto. Por las proposición 1.22, $\Psi : F \longrightarrow C_p(C_p(F))$ es continua e inyectiva.

Observe que $C_p(C_p(F))$ es un espacio Hausdorff, pues es un subespacio de un producto de rectas reales. Como F es compacto, se tiene que F es homeomorfo a $B = \Psi[F]$. Además B es compacto en $C_p(C_p(F))$ y por tanto cerrado, y más aún $M = \Psi[X]$ es homeomorfo a X por propiedades de homeomorfismos (aquí X denota al subespacio de F homeomorfo a X).

Sea H el subgrupo de $C_p(C_p(F))$ generado por M y sea P el subgrupo de $C_p(C_p(F))$ generado por B. En consecuencia, H es denso en P. Observe que P es un subgrupo σ-compacto, en virtud del lema anterior. Para probar lo que afirma el teorema, basta verificar que M es un subespacio cerrado de H, pues H es un grupo topológico, que además es subgrupo denso en P y M es homeomorfo a X.

Demostremos que $H \cap B = M$. Esto implica lo que queremos, ya que B es un subespacio cerrado de $C_p(C_p(F))$.

En primer lugar, es claro que $M \subset H \cap B$. Para demostrar la otra contención, supongamos para reducir al absurdo que existe $x \in H \cap B$ tal que $x \notin M$. Como $x \in H$, existen $n_1, ..., n_k$ enteros y $x_1, ..., x_k \in X$ distintos tales que $x = n_1\Psi(x_1) + ... + n_k\Psi(x_k)$. Además $x = \Psi(y)$ para algún $y \in F \setminus X$, pues $x \in B \setminus M$.

Si $f \in C_p(F)$, tenemos que $\Psi(y)(f) = n_1\Psi(x_1)(f) + ... + n_k\Psi(x_k)(f)$, esto es $f(y) = n_1 f(x_1) + ... + n_k f(x_k)$. Podemos escoger $f \in C_p(F)$ tal que $f(y) \neq 0$, de donde se deduce que alguno de los enteros $n_1, ..., n_k$ es distinto de cero. Supongamos que $n_1 \neq 0$, sin perder generalidad.

Como F es compacto y Hausdorff, es un espacio de Tychonoff. Entonces existe $f \in C_p(F)$ tal que $f(x_1) = 1$, y $f(x_i) = 0$ para $i \in \{2, 3, ..., k\}$, y que además cumple que $f(y) = 0$. (Para concluir esto, observe que se requiere que y sea distinto de x_1. Esto se deduce de que $y \notin X$). Hemos llegado a una contradicción, pues $0 = f(y) = n_1 f(x_1) + ... + n_k f(x_k) = n_1 \neq 0$. Por tanto $H \cap B \subset M$, por lo que $H \cap B = M$ y M es un subespacio cerrado de H. Esto concluye la demostración. $\square$

El lector observará que no se usó toda la generalidad de la definición del mapeo reflexión en la demostración del teorema de Markov. El mapeo reflexión, de la manera más general en que se definió, permite hablar de la teoría de la dualidad de Pontryagin-van Kampen, pues constituye un elemento central de ésta. Haremos un comentario acerca de esta dirección en la teoría de grupos topológicos.

Sean H y G grupos topológicos. Denotamos por $Hom_p(H, G)$ al subespacio de $C_p(H, G)$ que consiste de aquellas funciones continuas que son también homomorfismos (es decir, morfismos de grupos) de H en G.

Hagamos algunas observaciones acerca del mapeo reflexión $\Psi_{Hom_p(H,G)}$

Proposición 3.4. *Sean H, G grupos topológicos. Se cumplen:*

(1) El conjunto $Hom_p(H, G) = \{f \in C_p(H, G) : f$ es un homomorfismo $\}$ es un subespacio cerrado de $C_p(H, G)$.

(2) Si G es abeliano, entonces $Hom_p(H, G)$ es un subgrupo abeliano de $C_p(H, G)$.

(3) Si G es abeliano, entonces el mapeo reflexión $\Psi = \Psi_{Hom_p(H,G)}$ cumple $\Psi(H) \subset Hom_p(Hom_p(H, G))$ y además $\Psi : H \longrightarrow Hom_p(Hom_p(H, G))$ es un homomorfismo continuo.

Demostración. En esta demostración, usaremos la notación aditiva para la operación en G y la multiplicativa para la operación en H.

(1). Para cada $x, y \in H$ definimos $F(x, y) = \{f \in C_p(H, G) : f(xy^{-1}) = f(x) - f(y)\}$. Veamos que $F(x, y)$ es un cerrado de $C_p(H, G)$ para cualesquiera $x, y \in H$. Sea $f \notin F(x, y)$. Entonces, como G es T_2 existen $U \in \tau(f(xy^{-1}), G)$ y $V' \in \tau(f(x) - f(y), G)$ con $U \cap V' = \emptyset$. Por la continuidad de las operaciones de G, existen $V \in \tau(f(x), G)$ y $W \in \tau(f(y), G)$ tales que $V - W \subset V'$. Sea $z = xy^{-1}$. Es claro que si $O = \pi_z^{-1}[U] \cap \pi_x^{-1}[V] \cap \pi_y^{-1}[W] \cap C_p(H, G)$, entonces O es un abierto básico de $C_p(H, G)$ y $f \in O$. Demostremos que $O \cap F(x, y) = \emptyset$. Si $g \in O$ entonces $g(xy^{-1}) \in U$ y también $g(x) - g(y) \in V - W \subset V'$, por lo que $g(xy^{-1}) \neq g(x) - g(y)$. Se sigue que $g \notin F(x, y)$. Por lo tanto $F(x, y)$ es cerrado.

De la observación $Hom_p(H, G) = \bigcap_{x,y \in H} F(x, y)$, se sigue que $Hom_p(H, G)$ es un subespacio cerrado de $C_p(H, G)$.

(2). Supongamos ahora que G es abeliano. Sean $f, g \in Hom_p(H, G)$. Usaremos la notación aditiva para $C_p(H, G)$. Basta ver que $f + g \in Hom_p(H, G)$ y $-f \in Hom_p(H, G)$.

Si $a, b \in H$:

$$\begin{aligned}
(f+g)(ab) &= f(ab) + g(ab) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b) \\
&= f(a) + g(a) + f(b) + g(b) \\
&= (f+g)(a) + (f+g)(b) \\
(f+g)(-a) &= f(-a) + g(-a) = -f(a) - g(a) = -(f(a) + g(a)) \\
&= -(f+g)(a) \\
(-f)(ab) &= -f(ab) = -(f(a) + f(b)) = -f(a) - f(b) \\
&= (-f)(a) + (-f)(b) \\
(-f)(-a) &= -f(-a) = -(-(f(a)) = -((-f)(a))
\end{aligned}$$

Se concluye que $f + g \in Hom_p(H, G)$ y $-f \in Hom_p(H, G)$, esto es, $Hom_p(G, H)$ es un subgrupo abeliano de G.

(3). Continuemos suponiendo que G es abeliano. Del inciso anterior se sigue que $Hom_p(Hom_p(H, G), G)$ es un grupo topológico abeliano.

Sabemos que Ψ es continua, en virtud de resultados previos al teorema de Markov. Veamos que es un homomorfismo. Sean $a, b \in H$. Si $f \in Hom_p(H, G)$, se tiene que:

$$\Psi(ab)(f) = f(ab) = f(a) + f(b) = \Psi(a)(f) + \Psi(b)(f).$$

Se sigue que $\Psi(ab) = \Psi(a) + \Psi(b)$. Esto es, Ψ es un homomorfismo. $\square$

Una pregunta muy natural que surge en este contexto es saber cuándo el mapeo reflexión $\Psi_{Hom_p(H,G)}$ es un isomorfismo de grupos topológicos. Cuando G es el grupo topológico $\Pi = \mathbb{S}$, el círculo unitario en los números complejos con su operación usual y la topología heredada de $\mathbb{C}$, el teorema de Pontryagin-van Kampen establece que para todo grupo topológico localmente compacto H, el mapeo reflexión $\Psi_{Hom_p(H,G)}$ es un isomorfismo topológico. En particular, $Hom_p(Hom_p(H, \Pi), \Pi) \cong H$ para todo grupo topológico compacto H y todo grupo topológico discreto H.

La teoría de Pontryagin-van Kampen recibe el nombre de teoría de la dualidad como consecuencia de que estudia a los espacios $Hom_p(H, \Pi)$, con H un grupo topológico cualquiera. Este grupo topológico, el espacio de funciones de un grupo topológico H en el círculo unitario en los complejos, recibe el nombre de grupo dual de H, en reminiscencia de la noción de espacio dual en Álgebra Lineal. Bajo esta nomenclatura, el teorema de Pontryagin-van Kampen establece que todo grupo topológico localmente compacto es isomorfo a su doble dual. De nuevo, se advierte el notable paralelismo con un teorema para espacios vectoriales.

El lector interesado en conocer más acerca de este importante teorema puede consultar el capítulo 9 de la obra de A.V. Arhangel'skii y M.G. Tkachenko [2].

3.2. Un salto de axioma de separación

El objetivo de esta sección es demostrar que todo grupo topológico T_0 es un espacio de Tychonoff. Anteriormente hemos demostrado que todo grupo topológico T_0 es un espacio T_3. Se puede pensar que la estructura de un grupo topológico es lo suficientemente fuerte como para hacer saltar del axioma de separación T_0 hasta el axioma T_3. En esta sección se demostrará que el salto es más grande: hasta $T_{3\frac{1}{2}}$.

Definición 3.5. *Sea G un grupo. Decimos que $N : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una prenorma en G si tiene las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y \in G$:*
(PN 1) $N(e) = 0$,
(PN 2) $N(xy) \leq N(x) + N(y)$,
(PN 3) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Lema 3.6. *Si N es una prenorma en un grupo G, entonces N es una función no negativa, y el conjunto $Z = \{x \in G : N(x) = 0\}$ es un subgrupo de G.*

Demostración. Sea $x \in G$. Entonces

$$0 = N(e) = N(xx^{-1}) \leq N(x) + N(x^{-1}) = 2N(x)$$

de donde $0 \leq N(x)$. Se concluye que la función N es no negativa.

Por otro lado, sea $x \in Z$. Se tiene que $N(x^{-1}) = N(x) = 0$, por lo que $x^{-1} \in Z$.

Sean $x, y \in Z$. Se sigue que $0 \leq N(xy) \leq N(x) + N(y) = 0$, de donde $xy \in Z$. Ambas cosas conlcluyen que Z es un subgrupo de G. □

Lema 3.7. *Si $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, y G es un grupo, entonces $N : G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $N(x) = sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\}$ es una prenorma para G.*

Demostración. Primero observe que N está bien definida, pues f es una función acotada.

Por otro lado, es claro que $|f(ye) - f(y)| = 0$ para cada $y \in G$, por lo que $N(e) = 0$. Así, N tiene la propiedad *(PN 1)*.

Si $x, y, z \in G$ tenemos que por propiedades de los números reales se cumple:

$$|f(zxy) - f(z)| \leq |f(zxy) - f(zy)| + |f(zy) - f(z)|,$$

de donde

$$|f(zxy) - f(z)| \leq N(x) + N(y).$$

Luego $N(xy) \leq N(x) + N(y)$. De esta forma, N cumple *(PN 2)*.

Finalmente, sea $x \in G$. Si $y \in G$, se tiene que

$$|f(yx) - f(y)| \leq |f(yx) - f(yx^{-1})| + |f(yx^{-1}) - f(y)| \leq |f(yx^{-1}) - f(y)| \leq N(x^{-1}).$$

Por la arbitrariedad con que se tomó y, se sigue que $N(x) \leq N(x^{-1})$. Similarmente $N(x^{-1}) \leq N(x^{-1^{-1}}) = N(x)$. Se concluye que $N(x) = N(x^{-1})$. Es decir, N cumple *(PN 3)*.

Por lo tanto N es una prenorma para G. □

Proposición 3.8. *Sea* $\{U_n : n \in \omega\}$ *una sucesión de vecindades abiertas y simétricas de la identidad de un grupo topológico* G*, tales que* $U_{n+1}^2 \subset U_n$ *para cada* $n \in \omega$*. Entonces existe una prenorma* $N : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\{x \in G : N(x) < 1/2^n\} \subset U_n \subset \{x \in G : N(x) \leq 2/2^n\}$*; y esto implica en particular que* N *es continua.*

Demostración. El primer paso de esta demostración consiste en definir un abierto de G para cada real positivo y diádico. Un real positivo y diádico es un número real de la forma $m/2^n$ con $n \in \omega$ y $m \in \mathbb{N}$, es decir, un racional positivo cuyo denominador es una potencia de 2. Para cada real positivo y diádico r denotaremos el abierto que le corresponde como $V(r)$.

Comencemos definiendo $V(r) = \begin{cases} G, & \text{para cada real } r > 1 \\ U_0, & \text{si } r = 1. \end{cases}$

De esta manera, nos hace falta definir $V(r)$ para los reales diádicos que se hallan dentro del intervalo $(0, 1)$. Esto se llevará a cabo por medio de una recursión sobre el exponente del denominador.

Fijemos $n \in \omega$. Supongamos que se han definido $V(m/2^n)$, para cada $m = 1, 2, ..., 2^n$. Definamos $V(m/2^{n+1})$ del siguiente modo:

(1) $V(2m/2^{n+1}) = V(m/2^n)$, para cada $m = 1, 2, ..., 2^n$;

(2) $V(1/2^{n+1}) = U_{n+1}$; y finalmente

(3) $V((2m + 1)/2^{n+1}) = V(m/2^n) \cdot U_{n+1}$ *si* $m = 1, 2, ..., 2^n - 1$.

Observe que los conjuntos que se han definido hasta este punto se construyen recursivamente como producto de un número finito de elementos de $\{U_n : n \in \omega\}$, la sucesión de vecindades abiertas de la identidad que brindan las hipótesis. Esto implica que la familia $\{V(r) : r \text{ es real diádico y positivo}\}$ consiste de vecindades abiertas de la identidad.

Como segundo paso, veamos que la siguiente contención se cumple para cada $n \in \omega$ y $m \in \mathbb{N}$:

$$V(m/2^n) \cdot V(1/2^n) \subset V((m + 1)/2^n). \tag{p}$$

Claramente sucede para $m + 1 > 2^n$, pues en este caso el conjunto a la derecha de la contención es igual a G. Demostremos el otro caso usando inducción sobre n.

Si $n = 1$, el único posible valor para un natural m que cumpla $m + 1 \leq 2$ es $m = 1$. Por definición $V(1/2) = U_1$, y obtenemos $V(1/2) \cdot V(1/2) = U_1^2 \subset U_0 = V(1)$. De aquí se sigue que $V(1/2) \cdot V(1/2) \subset V(1)$; es decir, se cumple (p) para $n = 1$, $m = 1$. Esto establece el paso base de la inducción.

Supongamos que (p) se vale para $n \in \omega$, y verifiquemos (p) para $n + 1$. Sea m un natural fijo menor que 2^{n+1}. Si m es par, $m = 2k$ para algún $k = 1, 2, ..., 2^n - 1$. En este caso lo que se quiere es:

$$V(2k/2^{n+1}) \cdot V(1/2^{n+1}) \subset V((2k + 1)/2^{n+1}).$$

Esto es equivalente a:

$$V(k/2^n) \cdot U_{n+1} \subset V((2k + 1)/2^{n+1})$$

que es una contención que ya se conoce. Efectivamente: es la segunda contención de la igualdad que definió a $V((2k+1)/2^{n+1})$ (inciso (3)).

Si m es impar, se tiene que $0 < m = 2k+1 < 2^{n+1}$, para un natural k. Entonces:

$$\begin{aligned} V(m/2^{n+1}) \cdot V(1/2^{n+1}) &= V((2k+1)/2^{n+1}) \cdot U_{n+1} \\ &= V(k/2^n) \cdot U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset V(k/2^n) \cdot U_n. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la hipótesis de inducción tenemos:

$$\begin{aligned} V(k/2^n) \cdot U_n = V(k/2^n) \cdot V(1/2^n) \subset V((k+1)/2^n) &= V((2k+2)/2^{n+1}) \\ &= V((m+1)/2^{n+1}) \end{aligned}$$

por lo que se concluye (p) para m impar. Esto da por terminada la inducción, por lo que sabemos que (p) se cumple para cada $n \in \omega$ y cada $m \in \mathbb{N}$.

Definimos ahora una función f con dominio G y con valores reales por medio de la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = inf\{r > 0 : x \in V(r)\} \quad \text{para cada } x \in G.$$

Observe que f está bien definida, y que $f(x) \leq 1$ para cada $x \in G$. Efectivamente, si $x \in G$ se tiene que $x \in G = V(r)$ para cada diádico r mayor que 1, por lo que $f(x) \leq 1$. También es obvio que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in G$.

Usando el lema anterior, usando que f es una función acotada, la función $N : G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $N(x) = sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\}$ es una prenorma para G. Veamos que N cumple las condiciones de la proposición.

Observe que de la condición (p) se deduce que si r, s son reales positivos y diádicos, entonces $r < s$ implica $V(r) \subset V(s)$ (efectivamente, basta escribir a r y a s con el mismo denominador, la condición (p) se puede pensar intuitivamente como una cadena de contenciones para diádicos con el mismo denominador). Se sigue entonces la siguiente implicación para $x \in G$ y r real positivo y diádico:

$$f(x) < r \Longrightarrow x \in V(r). \tag{q}$$

También observe que $f(e) = 0$, pues cada $V(r)$ con $r > 0$ es una vecindad abierta de e.

Ya podemos probar fácilmente la primera contención que queremos que cumpla N. Sea $x \in G$ tal que $N(x) < 1/2^n$. Entonces

$$f(x) = |f(ex) - f(e)| \leq N(x) < 1/2^n,$$

por lo que, en virtud de (q), $x \in V(1/2^n) = U_n$.

Para demostrar que N cumple la segunda contención, sean $x \in V(1/2^n) = U_n$, y $y \in G$. Claramente $f(y) < k/2^n$, para k entero suficientemente grande; pero pidamos k como el más pequeño, es decir un natural tal que $(k-1)/2^n \leq f(y) < k/2^n$.

Por (q) se tiene que $y \in V(k/2^n)$. Como $x, x^{-1} \in V(1/2^n)$ se tiene que

$$yx, yx^{-1} \in V(k/2^n) \cdot V(1/2^n) \subset V((k+1)/2^n).$$

Por la definición de f se sigue que

$$f(yx) \leq (k+1)/2^n \quad \text{y} \quad f(yx^{-1}) \leq (k+1)/2^n.$$

Sabemos que $(k-1)/2^n \leq f(y)$, es decir $-f(y) \leq -(k-1)/2^n$. Sumando ésta a desigualdades anteriores obtenemos

$$f(yx) - f(y) \leq 2/2^n \quad \text{y} \quad f(yx^{-1}) - f(y) \leq 2/2^n.$$

Observamos que estas desigualdades no dependen de la elección de y. Sustituyamos en la segunda desigualdad a y por yx. Obtenemos $f(y) - f(yx) \leq 2/2^n$, por lo que $|f(yx) - f(y)| \leq 2/2^n$ para cada $y \in G$; esto es $N(x) \leq 2/2^n$.

Para terminar, verifiquemos que esta última contención implica la continuidad de N. Como G es un grupo topológico, basta ver la continuidad de N en el punto $e \in G$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $2/2^n < \varepsilon$. Observe que $U_n \subset \{x \in G : N(x) \leq 2/2^n\} \subset \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$, con U_n una vecindad abierta de e. De aquí se sigue la continuidad de N, lo que concluye la demostración. □

Teorema 3.9. *Todo grupo topológico T_0 es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sea G un grupo topológico T_0. Por el corolario 2.13 G es T_1, por lo que basta ver que G es completamente regular.

Si U es una vecindad abierta de e, se puede construir, usando los axiomas de grupo topológico, una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas y simétricas de e tales que $U_0 = U$, y que satisfacen las hipótesis de la proposición anterior. Se sigue que existe una prenorma continua N en G tal que $\{x \in G : N(x) < 1\} \subset U_0 = U$.

Observe que $N(e) = 0$ y $N(x) \geq 1$ si $x \in G \setminus U$. Como G es homogéneo, se concluye que G es un espacio de Tychonoff. □

Hemos demostrado en el teorema anterior que la estructura de grupo topológico convierte a un espacio T_0 en un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Este salto de axioma de separación es el más grande posible, como lo evidencía el siguiente corolario al Teorema de Markov.

Corolario 3.10. *Existe un grupo topológico que no es normal (y por tanto, tampoco T_4).*

Demostración. Tome X como un espacio topológico de Tychonoff que no sea normal (por ejemplo, el cuadrado de Sorgenfrey). Por el teorema de Markov, existe un grupo topológico G tal que X es un subespacio cerrado de G. Si G fuera normal, X sería normal, pues la normalidad es hereditaria en subespacios cerrados. Se sigue que G no puede ser normal. □

Esta es una respuesta negativa a la conjetura de P.S. Alexandroff, que preguntaba si todo grupo topológico es normal.

3.3. Metrizabilidad

Con las herramientas de prenormas desarrolladas en la sección anterior, hemos llegado a una posición desde la cual es posible demostrar otro teorema de gran interés en la teoría de grupos topológicos. Este teorema es otra evidencia de la fuerza que conlleva la estructura de grupo topológico, y se debe a G. Birkhoff y S. Kakutani.

Teorema 3.11 (**Birkhoff, Kakutani**). *Un grupo topológico G es metrizable si y sólo si es primero numerable y T_0.*

Demostración. Como todo espacio métrico es primero numerable y Hausdorff, la primera implicación es obvia.

Para demostrar la otra implicación, sea $\{W_n : n \in \omega\}$ una base local numerable de e en G. Podemos construir con los axiomas de grupo topológico una sucesión de vecindades abiertas de la identidad $\{U_n : n \in \omega\}$ tales que $U_n \subset W_n$ y $U_{n+1} \subset U_n$ para cada $n \in \omega$. Como $U_n \subset W_n$ obtenemos que $\{U_n : n \in \omega\}$ es base local en e.

Por la proposición 3.8, existe una prenorma continua N en G tal que

$$B_N(1/2^n) := \{x \in G : N(x) < 1/2^n\} \subset U_n$$

para cada $n \in \omega$. Se sigue que la familia de abiertos $\{B_N(1/2^n) : n \in \omega\}$ es una base local en e.

Definamos $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ como $d(x, y) = N(xy^{-1})$. Veamos que d es una métrica en G.

Claramente $d(x, x) = N(e) = 0$ para cada $x \in G$. Para el converso, sean $x, y \in G$ tales que $d(x, y) = 0$. Entonces $xy^{-1} \in B_N(1/2^n) \subset W_n$ para cada $n \in \omega$. En vista de que G es T_1 (corolario 2.13) se tiene que $\{e\} = \bigcap_{n\in\omega} W_n$, por lo que $xy^{-1} = e$. Esto es $x = y$.

Por otra parte como N es una prenorma, si $x, y \in G$ se tiene que $N(xy^{-1}) = N(yx^{-1})$, esto es $d(x, y) = d(y, x)$.

Para demostrar la desigualdad del triángulo, sean $x, y, z \in G$. Entonces:

$$d(x, z) = N(xz^{-1}) = N(xy^{-1}yz^{-1}) \leq N(xy^{-1}) + N(yz^{-1}) = d(x, y) + d(y, z).$$

Todo lo anterior permite concluir que d es una métrica para G. Note que d es invariante por la derecha; es decir, si $x, y, z \in G$ entonces $d(x, y) = d(xz, yz)$. De hecho:

$$d(x, y) = N(xy^{-1}) = N(xzz^{-1}y^{-1}) = d(xz, yz).$$

Demostraremos ahora que la métrica d genera a la topología de G. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in G$. Mostremos que $B_d(\varepsilon, x) = B_N(\varepsilon)x$, donde $B_d(\varepsilon, x) := \{y \in G : d(x, y) < \varepsilon\}$. Efectivamente, si $y \in B_d(\varepsilon, x)$, entonces $d(y, x) = d(x, y) < \varepsilon$. De ello se sigue que $N(yx^{-1}) < \varepsilon$, por lo que $yx^{-1} \in B_N(\varepsilon)$ y por tanto $y \in B_N(\varepsilon)x$. Por otro lado, si $y \in B_N(\varepsilon)$, entonces $N(y) < \varepsilon$. Esto es $d(y, e) < \varepsilon$; de donde se sigue $d(yx, x) < \varepsilon$. Por consiguiente $yx \in B_d(\varepsilon, x)$, y se concluye que $B_d(\varepsilon, x) = B_N(\varepsilon)x$.

Se sigue que $\{B_d(1/2^n, x) : n \in \omega\}$ es base local en cada $x \in G$. Esto implica que d genera la topología original de G, por lo que G es metrizable. $\square$

Capítulo 4

Funciones cardinales y el número de Nagami

Como último capítulo del presente trabajo, nos daremos a la tarea de estudiar las funciones cardinales topológicas en la clase de grupos topológicos.

Las funciones cardinales topológicas son una línea de estudio muy importante en la Topología General. Este tipo de funciones aplican técnicas conjuntistas a la Topología, área cuyo desarrollo partió de ideas que tuvieron su origen en la teoría de los conjuntos. Constituyen, de esta manera, una herramienta de gran alcance en la Topología general. Las funciones cardinales topológicas tienen una notable correspondencia con algunas de las propiedades más estudiadas en Topología, como son la numerabilidad, la compacidad y la propiedad de Lindelöf. No sorprenderá al lector, entonces, que en este trabajo analicemos esta línea de estudio en la clase de grupos topológicos.

En la primera sección se introducen las funciones cardinales básicas, y las proposiciones que se conocen para ellas en la clase de los grupos topológicos. En la segunda sección se presenta una función cardinal introducida por A.V. Arhangel'skii y conocida como el número de Nagami. Esta función permite hablar con mayor generalidad de una clase de espacios conocidos como espacios Lindelöf-Σ. Finalmente, en la tercera sección, introducimos una función cardinal, llamada celularidad, y demostramos una generalización de un teorema de V.V. Uspenskii. Este teorema relaciona el número de Nagami con la celularidad en la clase de grupos topológicos, y brinda como corolarios dos resultados. El primero, debido a V.V. Uspenskii, habla de la celularidad de los grupos topológicos que forman parte de la clase de espacios Lindelöf-Σ. El segundo, debido a M.G. Tkachenko, habla de la celularidad de grupos topológicos σ-compactos.

A lo largo de este capítulo, el símbolo τ denota un cardinal infinito.

4.1. Algunas funciones cardinales en grupos topológicos

Se le llama función cardinal topológica (o simplemente función cardinal) a una función f cuyo dominio es la clase de espacios topológicos (o una subclase de ella), cuyos valores son números cardinales, y que cumple la condición de que si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces $f(X) = f(Y)$. En este trabajo adoptaremos la convención usual de que el mínimo valor que asigna una función cardinal es $\aleph_0$ (excepto para el caso de la cardinalidad).

Comencemos definiendo las funciones cardinales más importantes.

Definición 4.1. Definimos, para X un espacio topológico, y $x \in X$:

- la cardinalidad de X, $|X|$,
- la densidad de X como $d(X) := min\{|D| : D\ es\ un\ subespacio\ denso\ en\ X\} + \aleph_0$,
- el peso de X como $w(X) := min\{|B| : B\ es\ una\ base\ para\ X\} + \aleph_0$,
- el carácter de X en x como $\chi(X, x) := min\{|B| : B\ es\ base\ local\ de\ X\ en\ x\}$,
- el carácter de X como $\chi(X) := sup\{\chi(X, x) : x \in X\} + \aleph_0$,
- el grado de dispersión de X como

$$\Delta(X) := min\{|U| : U\ es\ un\ abierto\ no\ vacio\ de\ X\} + \aleph_0, \text{ y}$$

- el número de Lindelöf de X como $l(X) := min\{\tau$: Toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad $\leq \tau\}$.

Decimos que una familia γ de subconjuntos de X es una red para X si todo abierto no vacío de X se puede expresar como unión de elementos de γ.

Por otro lado, decimos que un grupo topológico G es τ-estrecho si para cada vecindad abierta U de la identidad existe $K \subset G$ con $|K| \leq \tau$ y $KU = G$.

Utilizando estas dos nociones, introducimos ahora otras dos funciones cardinales.

Definición 4.2. Definimos, para X un espacio topológico:

- el peso de red de X como $nw(X) := min\{|K| : K \text{ es red para } X\} + \aleph_0$.

Definimos para G un grupo topológico:

- el índice de estrechez de G como $ib(X) := min\{\tau$: G es τ-estrecho$\}$.

Como el lector esperará, las relaciones entre los valores de estas funciones para espacios topológicos en general, o pertenecientes a una clase específica, son una fuente muy amplia de teoremas. El estudio de estas relaciones constituye la base de la que podría considerarse una subárea de la topología. Es irrevocable mencionar al matemático ruso A.V. Arhangel'skii, quien ha hecho numerosos aportes en este línea de estudio.

Algunas relaciones entre las funciones cardinales para un espacio topológico cualquiera son muy evidentes. Por ejemplo, el hecho de que el carácter en un punto sea menor o igual que el carácter está implícito en la definición del carácter de un espacio topológico. El siguiente lema brinda otras desigualdades sencillas de este tipo.

Lema 4.3. *Sea X un espacio topológico. Se tiene que:*

(1) $\chi(X) \leq w(X)$

(2) $d(X) \leq nw(X)$

(3) $l(X) \leq nw(X)$

(4) $nw(X) \leq w(X)$

(5) Si X es un grupo topológico entonces $ib(X) \leq l(X)$.

Demostración. Para demostrar (1), sea $\mathfrak{B}$ una base para X de cardinalidad $w(X)$ y sea $x \in X$ cualquiera. Entonces $\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathfrak{B} : x \in B\}$ es una base local en x. Además, como $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{B}$, se obtiene que $|\mathfrak{B}_x| \leq w(X)$. Por definición de $\chi(X, x)$, obtenemos: $\chi(X, x) \leq w(X)$. Por tanto, como x fue tomado de manera arbitraria, $\chi(X) \leq w(X)$.

Para demostrar (2), sea $\mathcal{P}$ una red para X tal que $|\mathcal{P}| = nw(X)$. Si $U \in \mathcal{P}$ tomemos $x_U \in U$ (podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\emptyset \notin \mathcal{P}$). Sea $\gamma = \{x_U : U \in \mathcal{P}\}$. Claramente γ es denso en X, por la definición de red. Además $d(X) \leq |\gamma| \leq |\mathcal{P}| = nw(X)$.

Para demostrar (3), sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X, y $\mathcal{P}$ una red para X con $|\mathcal{P}| \leq nw(X)$. Sea $\gamma = \{P \in \mathcal{P} : \exists U \in \mathcal{U}(P \subset U)\}$. Entonces se tiene que $|\gamma| \leq |\mathcal{P}|$. Para cada $P \in \gamma$, escojamos usando axioma de elección un elemento $U_P \in \mathcal{U}$ tal que $P \subset U_P$. Sea $\mathcal{V} = \{U_P : P \in \gamma\}$. Veamos que $\mathcal{V}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$. Si $x \in X$, existe $W \in \mathcal{U}$ con $x \in W$. Como $\mathcal{P}$ es red, existe $P \in \mathcal{P}$ con $x \in P \subset W$. Entonces $P \in \gamma$ y $x \in P \subset U_P \subset \bigcup \mathcal{V}$. Se concluye que $\mathcal{V}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$ con $|\mathcal{V}| \leq |\gamma| \leq nw(X)$. Luego, $l(X) \leq nw(X)$.

Para demostrar (4), basta observar que las bases son redes.

Para demostrar (5), sea U una vecindad abierta del neutro de X. Entonces $\{xU : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, por lo que existe $\gamma \subset X$ tal que $X = \{xU : x \in \gamma\} = \gamma U$ y $|\gamma| \leq l(X)$. Por la arbitrariedad con que se tomó U, X es $l(X)$-estrecho. Se sigue que $ib(X) \leq l(X)$. □

Como el tema central de este trabajo no son las funciones cardinales sino los grupos topológicos, continuaremos el cauce del último inciso del lema anterior demostrando las principales relaciones entre funciones cardinales que se conocen para la clase de grupos topológicos. Dos igualdades pueden considerarse canónicas en este respecto. Se incluyen a continuación, en los teoremas 4.4 y 4.7.

Teorema 4.4. *Si G es un grupo topológico, se tiene que $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$.*

Demostración. Del lema anterior se obtiene $ib(G) \cdot \chi(G) \leq w(G)$. Para demostrar la segunda desigualdad, sea $\tau = ib(G) \cdot \chi(G)$. Sea $\mathfrak{B}$ una base en el neutro del grupo que cumpla $|\mathfrak{B}| \leq \tau$. Como $ib(G) \leq \tau$, para cada $U \in \mathfrak{B}$ podemos encontrar $H_U \subset G$ con $H_U U = G$ y $|H_U| \leq \tau$.

Para cada $U \in \mathfrak{B}$ hemos demostrado que $B_U = \{xU : x \in H_U\}$ es una cubierta abierta para G. Tomemos γ la unión de dichas cubiertas abiertas, es decir $\gamma = \bigcup\{B_U : U \in \mathfrak{B}\}$. Claramente γ es una cubierta abierta. Además $|\gamma| \leq \tau$. Veamos que γ es base para $(G, \tau(G))$.

Sea $a \in G$, y O una vecindad abierta de a. Entonces existen $U, V \in \mathfrak{B}$ tales que $aU \subset O$ y $V^{-1}V \subset U$. Como $H_V V = G$, existe $x \in H_V$ tal que $a \in xV$. Se sigue que $x \in aV^{-1}$, por lo que $xV \subset aV^{-1}V \subset aU \subset O$. Esto es $xV \in \gamma$ es el conjunto intermedio entre a y O que buscábamos. Se concluye que γ es base para G, y por tanto $w(G) \leq \tau = ib(G) \cdot \chi(G)$. Esta desigualdad da por terminada la demostración. $\square$

A continuación demostraremos dos lemas que nos servirán para el teorema 4.7.

Lema 4.5. *Sea G un grupo topológico. Si D es un subespacio denso de G y U es una vecindad abierta de la identidad, entonces $G = DU$.*

Demostración. Es claro que $DU \subset G$. Sea $g \in G$ y veamos que $g \in DU$. Como $gU^{-1} \in \tau(G)$ es no vacío, tenemos por la densidad de D que existe $d \in D \cap gU^{-1}$. Esto es, existe $u \in U$ tal que $gu^{-1} = d$. Por tanto $g = du \in DU$. Se concluye que $G \subset DU$. $\square$

Lema 4.6. *Sea G un grupo topológico, y $\mathfrak{B}$ una base local para el neutro del grupo. Si pasa que para cada $B \in \mathfrak{B}$, existe un suconjunto $D_B \subset G$ con la propiedad de que $G = D_B B$, entonces se obtiene que $\gamma = \{xB : x \in D_B, B \in \mathfrak{B}\}$ es una base para la topología de G.*

Demostración. Sean $x \in G$, y $U \in \tau(x, G)$. Hallemos un elemento de γ que sea intermedio entre $\{x\}$ y U bajo la contención.

Conocemos que $x^{-1}U$ es una vecindad abierta de la identidad, por lo que existe $V \in \mathfrak{B}$ tal que $V \subset x^{-1}U$. Entonces $xV \subset U$. Sea W una vecindad abierta y simétrica del neutro tal que $W^2 \subset V$, y sea $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subset W$. Por hipótesis, existe un subconjunto D_B tal que $G = D_B B$. Entonces existe $y \in D_B$ tal que $x \in yB$. Observe que esto último implica que $y \in xB^{-1}$.

Se concluye que $x \in yB \subset xB^{-1}B \subset xW^{-1}W \subset xV \subset U$. Por tanto el elemento $yB \in \gamma$ es intermedio entre $\{x\}$ y U, y de esto se sigue que γ es una base para la topología de G. $\square$

Teorema 4.7. *Si G es un grupo topológico, entonces $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$.*

Demostración. Del lema 4.3 y propiedades de cardinales se sigue que $d(G) \cdot \chi(G) \leq w(G)$. Para demostrar la segunda desigualdad, sea D un subconjunto denso de G con cardinalidad $d(G)$, y sea $\mathfrak{B}$ una base local para G tal que su cardinalidad es $\chi(G)$ (observe que esto último es posible en virud de que G es homogéneo).

Por el lema 4.5, $G = DB$ para cada $B \in \mathfrak{B}$. Por el lema 4.6, la familia $\gamma = \{xB : x \in D, B \in \mathfrak{B}\}$ es una base para G. Observe que hay una biyección entre γ y $D \times \mathfrak{B}$, de hecho, la que define a γ: a cada pareja $(x, B) \in D \times \mathfrak{B}$ corresponde un elemento de γ. Esto implica que la cardinalidad de γ es $d(G) \cdot \chi(G)$. Luego, $w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G)$. $\square$

Concluimos esta sección con otros dos resultados importantes en el estudio de las funciones cardinales para la clase de grupos topológicos.

Proposición 4.8. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G algebraicamente normal. Entonces se cumplen:*

(1) $w(G/H) \leq w(G)$.

(2) $\chi(G/H) \leq \chi(G)$.

Demostración. Supongamos que $\pi : G \longrightarrow G/H$ es la función cociente asociada a G/H. Entonces, si $\mathfrak{B}$ es una base para G, se tiene que $\{\pi[B] : B \in \mathfrak{B}\}$ es una base para G/H (véase teorema 2.26). De aquí se sigue que $w(G/H) \leq w(G)$.

Verifiquemos que si $\mathfrak{B}$ es una base local para G en el punto $g \in G$, entonces $\{\pi[B] : B \in \mathfrak{B}\}$ es una base local para G/H en el punto Hg. Tenemos que, para cada $B \in \mathfrak{B}$, $B^* = \pi[B]$ es una vecindad abierta de Hg. Además, si W es una vecindad abierta de Hg, entonces existe una vecindad abierta U de g con $U^* \subset W$. Se sigue que $Hg \in \pi[U] \subset W$, por lo que $\{\pi[B] : B \in \mathfrak{B}\}$ es una base local para G/H en Hg. Se concluye que $\chi(G/H) \leq \chi(G)$. $\square$

Teorema 4.9. *Sea G un grupo topológico tal que $d(G) < |G|$. Entonces se tiene que $\Delta(G) = |G|$.*

Demostración. Observe que G es infinito, pues $d(G)$ es al menos $\aleph_0$. Como G es un abierto en su topología, se sigue que $\Delta(G) \leq |G|$. Para demostrar la segunda desigualdad, procederemos construyendo tantos subespacios densos de G como elementos de G. Además requerimos que estos subespacios sean ajenos a pares.

Afirmación. Si E es un subgrupo denso de G y $f \in G \setminus E$, entonces fE es denso en G con $|fE| \leq |E|$ y fE es ajeno a E.

En efecto, Supongamos que E es un subgrupo denso de G y que $f \in G \setminus E$. Para demostrar que fE es denso en G, sea $U \in \tau(G)$. Entonces $f^{-1}U \in \tau(G)$, por lo que existe $e \in E \cap f^{-1}U$. Observe que esto implica que $fe \in U$. Por tanto $U \cap fE \neq \emptyset$; de aquí se sigue que fE es denso. La desigualdad $|fE| \leq |E|$ es obvia, pues la función $\varphi : E \longrightarrow fE$, dada por $\varphi(e) = fe$ es suprayectiva. Para demostrar que fE es ajeno a E, supongamos que existen $f \in F$, $e, x \in E$ tales que $fe = x$. Entonces $f = xe^{-1} \in E$ al ser E un subgrupo, lo cual contradice que $f \notin E$. $\boxtimes$

Sea D_0 un subconjunto denso de G tal que $|D_0| = d(G)$. Sea H_1 el subgrupo generado por D_0. Sabemos que $|H_1| = |D_0| = d(G)$, pues H_1 consiste de combinaciones finitas de productos de elementos de D_0 o sus inversos. Por hipótesis, $|H_1| \neq |G|$, por lo que H_1 es subconjunto propio de G. Esto es, existe $d_1 \in G \setminus H_1$. Por la afirmación ya demostrada, $D_1 = d_1 H_1$ es un subconjunto denso de G tal que $|D_1| \leq d(G)$, y que además cumple que $D_1 \cap H_1 = \emptyset$, por lo que $D_1 \cap D_0 = \emptyset$.

De hecho, este proceso lo podemos hacer repetidas veces: si δ es un cardinal finito o infinito que cumple $\delta \leq |G|$ y tal que hemos definido, para cada cardinal $i < \delta$, D_i denso de G con $|D_i| \leq d(G)$, y $\{D_i : i < \delta\}$ es una familia de subconjuntos ajenos por pares, se tiene que:

$$|\bigcup_{i=0}^{i<\delta} D_i| \leq \sum_{i=0}^{i<\delta} |D_i| < |G|,$$

pues $\sum_{i=0}^{i<\delta} |D_i|$ es una suma de una cantidad menor que δ cardinales menores que $|G|$.

Si definimos H_δ como el subgrupo generado por $\bigcup_{i=0}^{i<\delta} D_i$, obtenemos que $|H_\delta| = |\bigcup_{i=0}^{i<\delta} D_i| < |G|$, por lo que H_δ es un subgrupo propio y denso de G. De aquí, si

$d_\delta \in G \setminus H_\delta$, basta definir $D_\delta = d_\delta H_\delta$. Se tendrá entonces que D_δ es un denso ajeno a H_δ, y por tanto ajeno a cada D_i anterior.

De este modo, hemos asegurado la existencia de al menos $|G|$ subespacios densos y ajenos a pares. Mostremos que esto es suficiente para concluir la segunda desigualdad que afirma el teorema. Sea $U \in \tau(G)$. Entonces, para cada denso de los construidos, U debe tener un punto distinto de cada uno de ellos, pues interseca a cada uno, y éstos son diferentes a pares. Se sigue que $|G| \leq |U|$. Por tanto $|G| \leq \Delta(G)$. Esta desigualdad da por terminada la demostración. □

4.2. El número de Nagami

En 1969, K. Nagami introdujo y estudió en [5] la noción de espacio Σ. En esta clase de espacios topológicos, llama especial atención la subclase de aquellos espacios que además de ser Σ, en el sentido de Nagami, son Lindelöf. Estos espacios se conocen como espacios Lindelöf-Σ. Esta clase es notable porque tiene como elementos a los espacios segundo numerables, a los espacios σ-compactos y a los espacios con peso de red numerable, además de ser cerrada bajo imágenes continuas, subespacios cerrados y productos numerables.

El número de Nagami es una función cardinal definida para la clase de espacios de Tychonoff. Fue introducida por A.V. Arhangel'skii en 1982 en [1], y permitió generalizar el trabajo que habían desarrollado V.V. Uspenskii, M.G. Tkachenko y A.V. Arhangel'skii sobre los espacios Lindelöf-Σ. Los espacios Lindelöf-Σ, en el sentido de Nagami, son aquellos que tienen número de Nagami numerable.

En este trabajo se estudiarán los grupos topológicos que son Lindelöf-Σ, pero la definición de esa clase de espacios será a partir de la definición del número de Nagami, que permite mayor generalidad. Los espacios Lindelöf-Σ se definirán aquí como aquellos espacios con número de Nagami numerable.

En lo que resta del presente trabajo, todos los grupos topológicos en consideración cumplirán el axioma de separación T_0, es decir, serán espacios de Tychonoff en virtud del teorema 3.9.

Definición 4.10. Sean $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X y Y un subconjunto de X. Decimos que $\mathcal{F}$ separa a Y de $X \setminus Y$ si para cualesquiera par de puntos $y \in Y$, $x \in X \setminus Y$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $y \in F$ pero $x \notin F$.

Si X es un espacio de Tychonoff, y βX es su compactificación de Stone-Cech, definimos la siguiente función cardinal, conocida como el número de Nagami de X:

$$Nag(X) = min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ es familia de cerrados de } \beta X \text{ que separa a } X \text{ de } \beta X\} + \aleph_0.$$

Si un espacio de Tychonoff X cumple $Nag(X) \leq \aleph_0$, X recibe el nombre de espacio Lindelöf-Σ.

Proposición 4.11. *Las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier espacio de Tychonoff X y cualquier número cardinal τ:*

(1) $Nag(X) \leq \tau$.

(2) Existe una compactificación Hausdorff bX de X y una familia $\mathcal{F}$ de cerrados de bX tal que $\mathcal{F}$ separa a X de $bX \setminus X$, con $|\mathcal{F}| \leq \tau$.

(3) Para toda compactificación Hausdorff bX de X existe una familia $\mathcal{F}$ de cerrados de bX tal que $\mathcal{F}$ separa a X de $bX \setminus X$, con $|\mathcal{F}| \leq \tau$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (1) son obvias. Para demostrar (2) $\Rightarrow$ (1), sea bX una compactificación Hausdorff de X tal que existe una familia $\mathcal{F}$ de cerrados de bX que cumple que $\mathcal{F}$ separa a X de $bX \setminus X$, con $|\mathcal{F}| \leq \tau$.

Por propiedades de la compactificación βX de X, la función identidad id_X puede extenderse a una función continua $f : \beta X \longrightarrow bX$. Observe que $\gamma = \{f^{-1}[K] : K \in \mathcal{F}\}$ es una familia de cerrados de βX. Además la correspondencia de $\mathcal{F}$ en γ que a cada $K \in \mathcal{F}$ manda a $f^{-1}[K]$ es suprayectiva, por lo que $|\gamma| \leq |\mathcal{F}| \leq \tau$. Veamos que γ separa a X de $\beta X \setminus X$.

Sean $x \in X$ y $y \in \beta X \setminus X$. Como id_X es una función perfecta su extensión satisface $f[\beta X \setminus X] \subset bX \setminus X$ (proposición 1.29). Por tanto $f(y) \in bX \setminus X$. Luego, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F$ y $f(y) \notin F$. Sea $K = f^{-1}[F]$. Entonces $y \notin K$ con $x \in K$. Por tanto γ separa a X de $\beta X \setminus X$.

Para demostrar (1) $\Rightarrow$ (3), sea $\mathcal{P}$ una familia de cerrados de βX que separa a X de $\beta X \setminus X$ y tal que $|\mathcal{P}| \leq \tau$. Podemos suponer que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Sea $f : \beta X \longrightarrow bX$ la extensión de id_X, donde bX es una compactificación Hausdorff de X cualquiera.

Sea $\mathcal{F} = \{f[P] : P \in \mathcal{P}\}$. Sabemos que f es perfecta, por lo que $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados de bX. Veamos que $\mathcal{F}$ separa a X de $bX \setminus X$.

Sean $x \in X$ y $y \in bX \setminus X$. Se tiene que $K = f^{-1}(y)$ es un compacto ajeno a X. Como la familia $\mathcal{P}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, también lo es $\mathcal{P}_x = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}$. Entonces $U = \beta X \setminus K$ es una vecindad abierta de $\bigcap \mathcal{P}_x$, por lo que existe una subfamilia finita η de $\mathcal{P}_x$ tal que $\bigcap \eta \subset U$. Observe que $\bigcap \eta \in \mathcal{P}_x$, $x \in \bigcap \eta$ y $\bigcap \eta \cap K = \emptyset$. Esto implica que $F = f(\bigcap \eta)$ cumple que $x \in F$ pero $y \notin F$, con $F \in \mathcal{F}$. Con esto se concluye que $\mathcal{F}$ separa a X de $\beta X \setminus X$. Finalmente, se tiene que $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{P}| \leq \tau$, como se quería. $\square$

Ejemplo 4.12. *Los espacios de Tychonoff compactos son espacios Lindelöf-Σ.* Efectivamente, si X es un espacio de Tychonoff compacto la familia de cerrados $\{\emptyset\}$ separa a X de $\beta X \setminus X = \emptyset$ por vacuidad.

Proposición 4.13. *Sea K un subespacio cerrado de un espacio de Tychonoff X. Entonces $Nag(K) \leq Nag(X)$; en particular, la clase de espacios Lindelöf-Σ es hereditaria bajo subespacios cerrados.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados de βX que separa a X de $\beta X \setminus X$ y tal que $|\mathcal{F}| = Nag(X)$. Llamemos bK a la cerradura de K en βX. Entonces bK es una compactificación Hausdorff de K. Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea C_F la cerradura de $F \cap K$ en βX. Entonces $C_F \subset bK$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Veamos que la familia $\gamma = \{C_F : F \in \mathcal{F}\}$ separa a K de $bK \setminus K$.

Como K es un subespacio cerrado de X, obtenemos que $bK \cap X = K$. De aquí se sigue que $bK \setminus K \subset \beta X \setminus X$. Si damos $k \in K$ y $y \in bK \setminus K$, tenemos que $k \in X$ y $y \in \beta X \setminus X$. Por tanto existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $k \in F$ pero $y \notin F$. Como F es un subespacio cerrado de βX y C_F es la cerradura en βX de un subconjunto de F, tenemos que $C_F \subset F$. Como $y \notin F$, se sigue que $y \notin C_F$.

Por tanto $Nag(K) \leq |\gamma| \leq |\mathcal{F}| = Nag(X)$, lo que concluye la demostración. $\square$

Teorema 4.14. *Todo espacio de Tychonoff X cumple que $l(X) \leq Nag(X) \leq nw(X)$.*

Demostración. Veamos la segunda desigualdad. Sea γ una red para X con $|\gamma| = nw(X)$. Para cada $K \in \gamma$, sea C_K la cerradura de K en βX. Sea $\delta = \{C_K : K \in \gamma\}$. Veamos que δ separa a X de $\beta X \setminus X$. Esto basta, pues es una familia de cerrados de βX, con $|\delta| \leq |\gamma| = nw(X)$.

Sean $x \in X$, $y \in \beta X \setminus X$. Como x y y son puntos distintos y βX es normal, existen $U \in \tau(x, \beta X)$, $V \in \tau(y, \beta X)$ ajenos. Como γ es red existe $K \in \gamma$ con $x \in K \subset U$, y además $K \subset C_K$. Como $U \cap V = \emptyset$, se tiene $V \cap K = \emptyset$, por lo que $y \notin \overline{K} = C_K$. Se sigue que δ separa a X de $\beta X \setminus X$. Se concluye que $Nag(X) \leq |\delta| \leq nw(X)$.

Para demostrar la primera desigualdad, sea γ una familia de cerrados de βX que separa a X de $\beta X \setminus X$, y tal que $|\gamma| = Nag(X)$. Podemos suponer que γ es cerrado bajo intersecciones finitas. Sea δ una familia de abiertos tales que cubren a X. Podemos suponer que los elementos de δ son abiertos de βX, pues hay una inmersión de X en su compactificación de Stone-Cech. Sea $\Delta = \{g \in \gamma : g$ puede ser cubierto con una cantidad finita de elementos de $\delta\}$. Veamos que $X \subset \bigcup \Delta$.

Sea $x \in X$. Definimos $P(x) = \bigcap \{g \in \gamma : x \in g\}$. Al ser intersección de cerrados en βX, $P(x)$ es un compacto. Además, con la definición de que γ separa a X de $\beta X \setminus X$ se deduce que $P(x) \subset X$. Por tanto, existe una familia finita de abiertos $a(x) \subset \delta$ tal que $P(x) \subset \bigcup a(x)$. Como βX es compacto, existe una cantidad finita $g_1, ..., g_n \in P(x)$ tal que $\bigcap_{i=1}^n g_i \subset \bigcup a(x)$. Como γ es cerrado bajo intersecciones finitas, $\bigcap_{i=1}^n g_i \in \gamma$. Observe que esto implica que $x \in \bigcap_{i=1}^n g_i \in \Delta$, por lo que Δ sí cubre a X como se quería.

Para cada $d \in \Delta$ tomemos μ_d una familia finita de abiertos de δ tales que $d \subset \bigcup \mu_d$. Sea $\kappa = \bigcup \{\mu_d : d \in \Delta\}$. Entonces $X \subset \bigcup \Delta \subset \bigcup \kappa$. Observe que $|\kappa| \leq |\gamma| \cdot \aleph_0 = Nag(X)$. Por tanto $l(X) \leq |\kappa| \leq Nag(X)$. □

Observe que el teorema anterior arroja como corolario que la clase de los espacios Lindelöf-Σ son Lindelöf. Verificaremos a continuación algunos de los comentarios que se hicieron al respecto de la clase de espacios Lindelöf-Σ en la introducción a esta sección, pero con la mayor generalidad que permite el número de Nagami.

Corolario 4.15. *Todo espacio X de Tychonoff satisface $Nag(X) \leq w(X)$. En particular, todo espacio regular segundo numerable es un espacio Lindelöf-Σ.*

Demostración. $nw(X) \leq w(X)$, según el lema 4.3. Del teorema anterior se sigue que $Nag(X) \leq w(X)$. Los espacios regulares y segundo numerables son normales, en particular ellos son espacios de Tychonoff. Supongamos ahora que X es un espacio segundo numerable. Entonces $w(X) = \aleph_0$, por lo que la desigualdad anterior muestra que X es Lindelöf-Σ. □

Teorema 4.16. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios de Tychonoff. Entonces $Nag(Y) \leq Nag(X)$. En particular, la clase de espacios Lindelöf-Σ es cerrada bajo imágenes de funciones continuas y suprayectivas.*

Demostración. Sea $g : \beta X \longrightarrow \beta Y$ una extensión continua de f. Observe que g es cerrada, por ser definida en un compacto y cuyo rango es un espacio de Hausdorff.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados de βX tales que separan a X de $\beta X \setminus X$, con $|\delta| = Nag(X)$. Podemos suponer que $\mathcal{F}$ es una familia cerrada bajo intersecciones finitas. Sea $\mathcal{G} = \{g[F] : F \in \mathcal{F}\}$. Verifiquemos que $\mathcal{G}$, familia de cerrados, separa a Y de $\beta Y \setminus Y$. Esto basta para concluir la desigualdad deseada pues implica $Nag(Y) = |\mathcal{G}| \leq |\mathcal{F}| = Nag(X)$.

Sean $y \in Y$, $z \in \beta Y \setminus Y$. Sea $K = g^{-1}(z)$. Entonces K es un cerrado de βX y por tanto compacto. Además $K \cap X = \emptyset$ pues $g[X] \subset Y$. Sea $x \in X$ con $g(x) = y$. Sea $\mathcal{F}(x) = \{F \in \mathcal{F} : x \in F\}$. La familia $\mathcal{F}(x)$ es cerrada bajo intersecciones finitas y además es una familia de cerrados. Note que $\bigcap \mathcal{F} \subset X$. Como $U = \beta X \setminus K$ es un abierto de βX que contiene a X (y por tanto también a $\bigcap \mathcal{F}$) y βX es compacto, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset U$. Esto es, $F \cap K = \emptyset$. Por tanto $g[F]$ es un elemento de $\mathcal{G}$ con $z \notin g[F]$ pero $y \in g[F]$. Hemos concluido lo que se quería demostrar. □

Teorema 4.17. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función perfecta y suprayectiva entre espacios de Tychonoff, entonces $Nag(X) = Nag(Y)$.*

Demostración. Basta demostrar, en virtud del resultado anterior, la desigualdad $Nag(X) \leq Nag(Y)$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados de βY tales que separan a Y de $\beta Y \setminus Y$ con $|\delta| = Nag(X)$, y sea $g : \beta X \longrightarrow \beta Y$ la extensión continua de f. Consideremos la familia $\mathcal{G} = \{g^{-1}[C] : C \in \mathcal{F}\}$. Veamos que $\mathcal{G}$ separa a X de $\beta X \setminus X$.

Sean $x \in X$ y $y \in \beta X \setminus X$. Como f es perfecta, se tiene que $g[\beta X \setminus X] \subset \beta Y \setminus Y$, por lo que $g(y) \notin Y$. Como $g(x) = f(x) \in Y$, existe $F \in \mathcal{F}$ con $g(x) \in F$ pero $g(y) \notin F$. Por tanto, $x \in g^{-1}[F]$, pero $y \notin g^{-1}[F]$ y $g^{-1}[F] \in \mathcal{G}$. Con lo anterior se concluye lo que se pedía demostrar. □

Corolario 4.18. *Sea X un espacio de Tychonoff tal que $w(X) \leq \tau$ y sea K un espacio compacto. Entonces $Nag(Y) \leq \tau$ para cada subespacio cerrado Y del producto $X \times K$.*

Demostración. Sea $\pi : X \times K \longrightarrow X$ la proyección en la primera coordenada. Como K es compacto, π es una función perfecta. Por los teoremas 4.17, 4.14 y 4.3, obtenemos que:

$$Nag(X \times K) = Nag(X) \leq nw(X) \leq w(X) \leq \tau.$$

Por tanto, si Y es un subespacio cerrado de $X \times K$ se tiene que $Nag(Y) \leq \tau$. □

Proposición 4.19. *Sea γ una familia de subespacios de un espacio de Tychonoff X tal que:*

(1) para cada $P \in \gamma$, se tiene que $Nag(P) \leq \tau$,

(2) $|\gamma| \leq \tau$.

Entonces el subespacio $Y = \bigcup \gamma$ de X cumple que $Nag(Y) \leq \tau$. Por consiguiente, la clase de espacios Lindelöf-Σ es cerrada bajo uniones numerables.

Demostración. Supongamos que $\gamma = \{P_i : i \in I\}$, con $|I| \leq \tau$. Sea $S = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times P_i)$ la suma topológica de los espacios $\{i\}\times P_i$. Sea $f : S \longrightarrow Y$ la función $f(i,x) = x$. Note que si $U \subset V$ es un abierto en Y, entonces $f^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times (U \cap P_i))$, que es un abierto en S. Luego, f es una función continua.

Por la proposición 4.16, basta ver que $Nag(S) \leq \tau$. De ahora en adelante identificaremos a $\{i\} \times P_i$ con P_i (para cada $i \in I$). De esta forma estaremos suponiendo que los espacios P_i son ajenos dos a dos. Sea βS la compactificación de Stone-Cech de S. Sea K_i la cerradura de P_i en βS para cada $i \in I$. Es claro que toda función de P_i en un compacto se puede extender a K_i, pasando por la extensión a βS. Por propiedades de la compactificación de Stone-Cech, existe un homeomorfismo entre K_i y βP_i. Para cada $i \in I$, sea F_i una familia de cerrados de βS tal que separan a P_i de $K_i \setminus P_i$, con $|F_i| = \tau$ (recuerde que $Nag(P_i) \leq \tau$ para cada $i \in I$). Sea $F = \{K_i : i \in I\} \cup \bigcup\{F_i : i \in I\}$. Observe que F es una familia de cerrados de βS. Veamos que F separa a S de $\beta S \setminus S$.

Sean $x \in S$ y $y \in \beta S \setminus S$. Entonces, por como está dado S existe $i \in I$ tal que $x \in P_i$. Si $y \notin K_i$, hemos acabado pues $x \in K_i$. De otra manera, si $y \in K_i$, como $y \notin S$ se tiene $y \notin P_i$, por lo que existe $H \in F_i$ con $x \in H$ pero $y \notin H$. Observe que $H \in F$. Se concluye que F separa a S de $\beta S \setminus S$. Se sigue que $Nag(Y) \leq Nag(S) \leq |F| \leq \tau$. □

Corolario 4.20. *La clase de espacios Lindelöf-Σ contiene a la clase de espacios σ-compactos.*

Proposición 4.21. *Sea γ una familia de subespacios de un espacio de Tychonoff X tal que:*

(1) para cada $P \in \gamma$, se tiene que $Nag(P) \leq \tau$,

(2) $|\gamma| \leq \tau$.

Entonces $\Pi = \prod \gamma$, el producto de los elementos de γ, cumple $Nag(\Pi) \leq \tau$. En particular, la clase de espacios Lindelöf-Σ es cerrada bajo productos numerables.

Demostración. Supongamos que $\gamma = \{X_i : i \in I\}$, donde $|I| \leq \tau$. Sea βX_i la compactificación de Stone-Cech correspondiente a X_i para $i \in I$. Sea $K = \prod_{i\in I} \beta X_i$. Sea F_i una familia de cerrados de βX_i que separa a X_i de $\beta X_i \setminus X_i$ y tal que $|F_i| = \tau$, para cada $i \in I$. Sea $F = \{\pi_i^{-1}[C] : i \in I, C \in F_i\}$, donde $\pi_i : K \longrightarrow \beta X_i$ es la proyección al i-ésimo factor. Observe que $|F| \leq \tau$. K es una compactificación de Π y F es una familia de cerrados de K, por lo que basta ver que F separa a Π de $K \setminus \Pi$.

Sean $x \in \Pi$, y $y \in K \setminus \Pi$. Entonces existe $i \in I$ tal que $\pi_i(y) \notin X_i$. Como $\pi_i(y) \in \beta X_i$ y $\pi_i(x) \in X_i$, existe $C \in F_i$ tal que $\pi_i(x) \in C$ pero $\pi_i(y) \notin C$. Observe que $\pi_i^{-1}[C] \in F$ con $x \in \pi_i^{-1}[C]$, $y \notin \pi_i^{-1}[C]$. Como $\pi_i^{-1}[C] \in F$, se sigue que F separa a Π de $K \setminus \Pi$. Esto concluye la demostración. □

Proposición 4.22. *Un grupo topológico G generado algebraicamente por un subespacio de Tychonoff X cumple que $Nag(G) \leq Nag(X)$. En particular, la clase de espacios Lindelöf-Σ es cerrada bajo el operador algebraico $< \cdot >$.*

Demostración. Sea $Z = X \cup X^{-1} \cup \{e\}$. Por la proposición 4.19 y debido a que X^{-1} es imagen continua de X, $Nag(Y) \leq Nag(X)$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : Z^n \longrightarrow G$ como $f_n(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$. Como G es un grupo topológico y la restricción de una función continua es continua, se tiene que f_n es continua. Por tanto, por las proposiciones 4.16 y 4.21, obtenemos que $Nag(f_n[Z^n]) \leq Nag(X)$. Como $G = \bigcup\{f_n[Z^n] : n \in \mathbb{N}\}$, se sigue de 4.19 que $Nag(G) \leq Nag(X)$. □

4.3. Caracterizaciones del número de Nagami

A continuación demostraremos dos caracterizaciones de la clase de espacios X que satisfacen $Nag(X) \leq \tau$. Ambas serán necesarias para nuestros propósitos.

Teorema 4.23. *Un espacio de Tychonoff X satisface $Nag(X) \leq \tau$ si y sólo si existe un espacio de Tychonoff M con $w(M) \leq \tau$ y un espacio K compacto y Hausdorff tal que X es la imagen continua de un subespacio cerrado de $M \times K$.*

Demostración. La segunda implicación se sigue del corolario 4.18, y del teorema 4.16.

Para demostrar la primera implicación, sea X un espacio de Tychonoff con $Nag(X) \leq \tau$.

Caso 1: X es un espacio compacto.

En este caso podemos tomar $M = \mathbb{R}$ con su topología usual. Note que X es imagen continua de $\mathbb{R} \times X$ bajo la proyección al segundo factor.

Caso 2: X no es un espacio compacto.

Sea γ una familia de cerrados de βX que separan a X de $\beta X \setminus X$, con $|\gamma| \leq \tau$. Recordemos que τ denota también al ordinal cuyos elementos son los ordinales anteriores. Consideremos a τ con la topología discreta y τ^τ con la topología producto. Es claro que $w(\tau^\tau) \leq \tau$, pues la base canónica de τ^τ es $\{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[S_i] : n \in \mathbb{N}, S_i \in [\tau]^1, \forall j = 1, ..., n(\alpha_j \in \tau)\}$, que tiene cardinalidad $\leq \tau$.

Supongamos que $\gamma = \{P_\alpha : \alpha \in \tau\}$. Sea $M = \{\varphi \in \tau^\tau : \bigcap_{\alpha\in\tau} P_{\varphi(\alpha)} \subset X\}$. Como M es un subespacio de τ^τ, se tiene $w(M) \leq w(\tau^\tau) \leq \tau$. Sea $K = \beta X$. Como τ es de Tychonoff, y K es compacto y Hausdorff, M y K son buenos candidatos para la afirmación del teorema. Veamos que X es imagen continua de:

$$Y = \{(\varphi, x) \in M \times K : x \in \bigcap_{\alpha\in\tau} P_{\varphi(\alpha)})\},$$

y que Y es un subespacio cerrado de $M \times K$.

Sea $(\varphi, x) \in (M \times K) \setminus Y$. Entonces existe $\alpha \in \tau$ con $x \notin P_{\varphi(\alpha)}$. Sea $U = \pi_\alpha^{-1}[\{\varphi(\alpha)\}]$. Como τ es discreto, U es un abierto básico de τ^τ. Por como se definió a γ, tenemos que $V = K \setminus P_{\varphi(\alpha)}$ es abierto de K. Veamos que $(\varphi, x) \in U \times V \subset (M \times K) \setminus Y$. Claramente $\varphi \in U$ y $x \in V$. Si $(\psi, y) \in U \times V$, entonces $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ y $y \notin P_{\varphi(\alpha)} = P_{\psi(\alpha)}$, de donde $(\psi, y) \notin Y$. Por tanto Y es un subespacio cerrado de $M \times K$.

Sea $\pi : M \times K \longrightarrow K$ la proyección al segundo factor. Veamos por doble contención que $\pi[Y] = X$.

Si $(\varphi, x) \in Y$, entonces $x \in \bigcap_{\alpha\in\tau} P_{\varphi(\alpha)} \subset X$, por las definiciones de Y y de M. Luego, $\pi(\varphi, x) = x \in X$. Así $\pi[Y] \subset X$.

Sea $x \in X$ cualquier elemento. Como X no es compacto, existe $z \in K \setminus X$. Debido a que γ separa puntos de X de $K \setminus X$, existe $\beta \in \tau$ tal que $x \in P_\beta$. Definimos $\varphi \in \tau^\tau$ como sigue:

$$\varphi(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} \beta & \text{si } x \notin P_\alpha \\ \alpha & \text{si } x \in P_\alpha \end{array} \right. .$$

Es claro que $x \in P_{\varphi(\alpha)}$ para cada $\alpha \in \tau$. Además, como γ separa a X de $K \setminus X$, se tiene que $\bigcap_{\alpha\in\tau} P_{\varphi(\alpha)} \subset X$. Por tanto $\varphi \in M$ y $(\varphi, x) \in Y$. Como $\pi(\varphi, x) = x$ se concluye que $X \subset \pi[Y]$.

Se concluye que $\pi[Y] = X$. Esto da por terminada la demostración, en vista de que X es imagen continua y suprayectiva de un subespacio cerrado de $M \times K$. $\square$

Definición 4.24. *Un espacio de Tychonoff X se llama Lindelöf-p si existe una función perfecta y suprayectiva de X en un espacio regular segundo numerable.*

Teorema 4.25. *Un espacio de Tychonoff X cumple que $Nag(X) \leq \tau$ si y sólo si existen espacios de Tychonoff N, Z con $w(N) \leq \tau$ y funciones suprayectivas $f : Z \longrightarrow N$, $g : Z \longrightarrow X$, con f perfecta y g continua. En particular X es Lindelöf-Σ si y sólo si es imagen continua de un espacio Lindelöf-p.*

Demostración. Para demostrar la primera implicación, supongamos que $Nag(X) \leq \tau$. Por el teorema anterior, existe un espacio de Tychonoff M con $w(M) \leq \tau$, un compacto K y un subespacio cerrado Z de $M \times K$ tal que X es imagen continua de Z. Supongamos que X es imagen continua de Z bajo g. Sea π la proyección en la primera coordenada de $M \times K$. Sea f la restricción de π al subespacio Z. Como π es perfecta, y Z cerrado, f es perfecta. Si N es la imagen de Z bajo f, N es de Tychonoff con peso a lo más τ. Además f es perfecta y suprayectiva y g es continua y suprayectiva, por lo que se cumplen las hipótesis del consecuente del teorema.

Para demostrar la segunda implicación, sean N, Z como afirma el teorema. Entonces, por las propiedades establecidas del número de Nagami, obtenemos:

$Nag(X) \leq Nag(Z) = Nag(N) \leq w(N) \leq \tau$. $\square$

Oberve que los espacios Lindelöf-p son Lindelöf. Efectivamente, al ser imagen continua de sí mismos, el teorema anterior afirma que son espacios Lindelöf-Σ. Además, los espacios Lindelöf-Σ son Lindelöf por la primera desigualdad que brinda el teorema 4.14.

4.4. El teorema de Uspenskii

Para finalizar este trabajo, nos daremos a la tarea de demostrar el teorema de Uspenskii. Este es un teorema de interés en el área de grupos topológicos y se refiere a la noción de celularidad, que es una función cardinal que no hemos definido.

Definición 4.26. *Sea X es un espacio topológico.*

(1) Definimos la celularidad de X, denotada $c(X)$, como el mínimo cardinal infinito τ tal que cada familia de abiertos no vacíos ajenos a pares tiene cardinalidad $\leq \tau$.

(2) *Un conjunto* $A \subset X$ *se conoce como conjunto* G_τ *si existe una familia* γ *de abiertos de* X *con* $A = \bigcap \gamma$ *y* $|\gamma| \leq \tau$*.*

(3) *Decimos que* X *es* τ*-celular si cada familia* γ *de conjuntos* G_τ *cumple que tiene una subfamilia* η *que cumple* $\overline{\bigcup \eta} = \overline{\bigcup \gamma}$ *y* $|\eta| \leq \tau$*.*

Proposición 4.27. *Si* X *es un espacio topológico* τ*-celular, entonces* $c(X) \leq \tau$*.*

Demostración. Supongamos que γ es una familia de abiertos no vacíos de X ajenos a pares. Como γ es una familia de conjuntos G_τ, y G es τ-celular, existe $\eta \subset \gamma$ que cumple $\overline{\bigcup \eta} = \overline{\bigcup \gamma}$ y $|\eta| \leq \tau$.

Supongamos que $\gamma \neq \eta$ para llegar a una contradicción. Entonces existe $U \in \gamma \backslash \eta$. Como $U \neq \emptyset$, existe $u \in U$. Como $u \in U \subset \overline{\bigcup \gamma} = \overline{\bigcup \eta}$ y U es una vecindad abierta de u, tenemos que existe $w \in U \cap \bigcup \eta$. Luego, existe $W \in \eta$ con $w \in W$. Por tanto, se tiene $U \cap W \neq \emptyset$, lo cual es contradictorio, pues γ es una familia de abiertos ajenos a pares. Por lo tanto $\gamma = \eta$, y de esto se sigue que $|\gamma| \leq \tau$.

Por lo tanto $c(X) \leq \tau$. □

El teorema de Uspenskii afirma que todo grupo topológico Lindelöf-Σ tiene celularidad numerable. Demostraremos algo un poco más general, en el contexto del número de Nagami: si un grupo topológico G cumple que $Nag(G) \leq \tau$, entonces G es τ-celular. Comencemos el trabajo previo para llegar a este resultado.

Lema 4.28. *Si* X *es un espacio topológico con* $nw(X) \leq \tau$*, entonces para cada subespacio* $A \subset X$ *existe* $B \subset A$ *con* $A \subset \overline{B}$ *y* $|B| \leq \tau$*.*

Demostración. Sean X, τ y A como en las hipótesis. Sea γ' una red para X con $|\gamma'| \leq \tau$. Definimos $\gamma = \{g \in \gamma' : \exists a \in A(a \in g)\}$. Se tiene $|\gamma| \leq |\gamma'| \leq \tau$. Para cada $g \in \gamma$ fijemos un punto $a_g \in A$ tal que $a_g \in g$. Definamos $B = \{a_g : g \in \gamma\}$. Claramente $|B| \leq |\gamma| \leq \tau$. Resta ver que $A \subset \overline{B}$.

Sean $a \in A$ y $U \in \tau(a, X)$. Como γ' es red, existe $g \in \gamma'$ tal que $a \in g \subset U$. Observe que $g \in \gamma$, y $a_g \in B$. Por tanto, como $a_g \in g$, $U \cap B \neq \emptyset$. Por la elección de U se sigue que $a \in \overline{B}$. □

Definición 4.29. *Sea* X *un espacio topológico. Decimos que un subconjunto* A *de* X *es un conjunto co-cero si existe una función* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tal que* $X \setminus A = f^{-1}(0)$*.*

Lema 4.30. *Si* X *es un espacio de Tychonoff, los conjuntos co-cero de* X *forman una base para* $\tau(X)$*.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $U \in \tau(x, X)$. Entonces existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = 1$ y $X \setminus U \subset f^{-1}(0)$. Sea $C = X \setminus f^{-1}(0)$. Claramente C es un conjunto co-cero, y $x \in C$. Además $X \setminus U \subset f^{-1}(0)$ implica $C \subset U$. □

Para un cardinal infinito τ, denotamos por τ^+ el ordinal más pequeño tal que $|\tau| < |\tau^+|$. Recordemos que el ordinal más pequeño de cardinalidad κ se identifica con κ, así que τ^+ es también un cardinal infinito.

Si X es un espacio topológico, la diagonal de X es el subespacio $\{(x, x) : x \in X\}$ de X^2.

Lema 4.31. *Sean X un espacio de Tychonoff, $\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\} \subset X$, $\{U_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ una sucesión de vecindades abiertas de la diagonal en X^2, y $\{\varphi_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ una sucesión de funciones continuas de X en espacios de Tychonoff con peso de red $\leq \tau$. Entonces:*

(1) Si X es preimagen perfecta de un espacio con peso $\leq \tau$, entonces existen $\alpha, \beta < \tau^+$ con $\alpha < \beta$ y $x \in X$ tales que $(x, x_\alpha) \in U_\beta$ y $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\beta)$.

(2) Si $Nag(X) \leq \tau$, entonces existen $\alpha, \beta < \tau^+$ con $\alpha < \beta$ y $x \in X$ tales que $(x, x_\alpha) \in U_\beta$ y $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\beta)$.

Demostración. (1) Sea Z un espacio topológico con $w(Z) \leq \tau$ y $\varphi : X \longrightarrow Z$ una función suprayectiva y perfecta. Para cada $\alpha < \tau^+$ definamos $f_\alpha : X \longrightarrow Z \times \prod_{\beta<\alpha} X_\beta$ como el producto diagonal de $\{\varphi\} \cup \{\varphi_\beta : \beta < \alpha\}$, donde X_β es la imagen de X bajo φ_β.

El peso de red se hereda bajo subespacios y es productivo y menor o igual que el peso, por lo que $nw(f_\alpha[X]) \leq \tau$. Sea $P = \{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}$, y para $\alpha < \tau^+$, sea $P_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Por el lema 4.28, para cada $\alpha < \tau^+$ existe un subconjunto de $f_\alpha[P]$ denso en $f_\alpha[P]$ de cardinalidad $\leq \tau$. Podemos suponer que dicho subconjunto es de la forma $f_\alpha[P_{\alpha'}]$ con $\alpha < \alpha' < \tau^+$, pues agregar puntos no altera lo que queremos. Definamos una sucesión $\{\beta_n : n \in \omega\}$ en τ^+ como sigue: $\beta_0 = 0$, y para $n \in \omega$, $\beta_{n+1} = (\beta_n)'$. Sea β el límite de esta sucesión. Como τ^+ es no numerable, se tiene que $\beta < \tau^+$. Además $f_\beta[P_\beta]$ en denso en $f_\beta[P]$.

Como φ es perfecta, f_α es perfecta para cada $\alpha < \tau^+$. En particular f_β es cerrada. Esto implica que $\overline{f_\beta[P_\beta]} \subset f_\beta[\overline{P_\beta}]$. Como $f_\beta(x_\beta) \in f_\beta[P] \subset \overline{f_\beta[P_\beta]}$ existe $x \in \overline{P_\beta}$ con $f_\beta(x) = f_\beta(x_\beta)$. De aquí se sigue que $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\beta)$ para cada $\alpha < \beta$.

El conjunto U_β es una vecindad abierta de (x, x), por lo que existen $U, V \in \tau(x, X)$ con $U \times V \subset U_\beta$. Como $x \in \overline{P_\beta}$ y $V \in \tau(x, X)$, se tiene que $P_\beta \cap V \neq \emptyset$, es decir, existe $\alpha < \beta$ con $x_\alpha \in V$. Por tanto $(x, x_\alpha) \in U_\beta$. Note que α también cumple que $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\beta)$, por lo que hemos concluido (1).

(2) Si $Nag(X) \leq \tau$, podemos aplicar el teorema 4.25 para asegurar que existe un espacio Y que es preimagen suprayectiva y perfecta de un espacio con peso $\leq \tau$; y, también, que existe una función $f : Y \longrightarrow X$ continua y suprayectiva. Tomemos, usando el axioma de elección, $\{y_\alpha \in f^{-1}(x_\alpha) : \alpha < \tau^+\}$, $\{(f \times f)^{-1}[U_\alpha] : \alpha < \tau^+\}$ y $\{\varphi_\alpha \circ f : \alpha < \tau^+\}$. Observe que la primera familia es una sucesión de puntos de Y; la segunda, una sucesión de vecindades abiertas de la diagonal en Y^2; y la tercera, una sucesión de funciones continuas de Y en espacios de Tychonoff con peso de red $\leq \tau$.

Por el inciso anterior, existen $\alpha < \beta < \tau^+$, $y \in Y$ tales que $(y, y_\alpha) \in (f \times f)^{-1}[U_\beta]$ y $\varphi_\alpha(f(y)) = \varphi_\alpha(f(y_\beta)) = \varphi_\alpha(x_\beta)$. De esto se sigue que $(f(y), x_\alpha) \in U_\beta$. Denotar $x = f(y)$ concluye la demostración. □

Lema 4.32. *Sea X un espacio de Tychonoff con $l(X) \leq \tau$. Para cada subconjunto K de X^2 de tipo G_τ tal que la diagonal de X^2 es subconjunto de K existe una función continua $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^\tau$ tal que para $x, y \in X$, se cumple la siguiente implicación: $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow (x, y) \in K$.*

Demostración. Sea $\{O_\alpha : \alpha < \tau\}$ una familia de abiertos de X^2 tal que su intersección es K. Para cada $x \in X$ y $\alpha < \tau$, escojamos un conjunto co-cero $U_\alpha(x)$ tal que

$x \in U_\alpha(x)$ y $U_\alpha(x) \times U_\alpha(x) \subset O_\alpha$ (el conjunto $U_\alpha(x)$ existe pues X es un espacio de Tychonoff y existe una vecindad abierta U de x tal que $U \times U \subset O_\alpha$, donde se puede aplicar el lema 4.30).

Como $l(X) \leq \tau$, para cada $\alpha < \tau$ existe $Y_\alpha \subset X$ tal que $|Y_\alpha| \leq \tau$ y $X = \bigcup\{U_\alpha(x) : x \in Y_\alpha\}$. Para cada $\alpha < \tau$ y $x \in Y_\alpha$ tomemos $f_{\alpha,x} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $X \setminus U_\alpha(x) = f_{\alpha,x}^{-1}(0)$. Note que la familia $\{f_{\alpha,x} : \alpha < \tau, x \in Y_\alpha\}$ tiene cardinalidad a lo más τ. Por tanto el producto diagonal de dicha familia, φ, es una función continua de X en $\mathbb{R}^\tau$. Veamos que φ es la función continua deseada.

Sean $x, y \in X$ con $\varphi(x) = \varphi(y)$. Sea $\alpha < \tau$. Entonces, existe $a \in Y_\alpha$ tal que $x \in U_\alpha(a)$. Esto implica que $f_{\alpha,a}(x) \neq 0$. Como $\varphi(x) = \varphi(y)$, se obtiene que $f_{\alpha,a}(x) = f_{\alpha,a}(y) \neq 0$, por lo que $y \in U_\alpha(a)$. Se sigue que $(x, y) \in U_\alpha(a) \times U_\alpha(a) \subset O_\alpha$. Como α fue tomado de manera arbitraria, $(a, b) \in \bigcap_{\alpha<\tau} O_\alpha = K$. □

Lema 4.33. *Si X es un espacio topológico que no es τ-celular, entonces existen una familia $\{F_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ de subconjuntos no vacíos de X de tipo G_τ, y una familia $\{O_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ de abiertos de X tales que $F_\alpha \subset O_\alpha$ y $F_\alpha \cap O_\beta = \emptyset$ para cada $\alpha < \beta < \tau^+$.*

Demostración. Si X no es τ-celular, existe una familia γ de subconjuntos de X de tipo G_τ tal que para todo $\eta \subset \gamma$ si $|\eta| \leq \tau$ se tiene que $\overline{\bigcup \eta} \neq \overline{\bigcup \gamma}$. Si $\eta \subset \gamma$, entonces $\bigcup \eta \subset \bigcup \gamma$ por lo que $|\eta| \leq \tau$ implica $\overline{\bigcup \gamma} \nsubseteq \overline{\bigcup \eta}$.

Sean $H_0 = F_0 \in \gamma \setminus \{\emptyset\}$, y $O_0 = X$. Sea $\delta < \tau^+$ y supongamos que para cada $\beta < \delta$ hemos fijado $H_\beta \in \gamma$, definido $F_\beta \subset H_\beta$ de tipo G_τ, y definido O_β abierto de X, tales que $F_\alpha \subset O_\alpha$ y $F_\alpha \cap O_\beta = \emptyset$ para cada $\alpha < \beta$. Como $\bigcup\{F_\beta : \beta < \delta\} \subset \bigcup\{H_\beta : \beta < \delta\}$ y $\{H_\beta : \beta < \delta\}$ es una subfamilia de γ con cardinalidad $\delta < \tau^+$ se tiene que $\overline{\bigcup \gamma} \nsubseteq \overline{\bigcup\{F_\beta : \beta < \delta\}}$. Esto es, existe $x \in \overline{\bigcup \gamma} \setminus \overline{\bigcup\{F_\beta : \beta < \delta\}}$. Como $x \notin \overline{\bigcup\{F_\beta : \beta < \delta\}}$, existe $U \in \tau(x, X)$ con $U \cap \bigcup\{F_\beta : \beta < \delta\} = \emptyset$. Como $x \in \overline{\bigcup \gamma}$, existe $h \in \gamma$ tal que $U \cap h \neq \emptyset$.

Definamos $F_\delta = U \cap g$, $H_\delta = h$ y $O_\delta = U$. Observe que F_δ es subconjunto de G_δ de tipo G_τ, $F_\delta \subset O_\delta$ y como $U \cap \bigcup\{F_\beta : \beta < \delta\} = \emptyset$ se sigue que para $\beta < \delta$ se cumple $F_\beta \cap O_\delta = \emptyset$. Observe ahora que se han definido familias $\{F_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ y $\{O_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ que cumplen el lema. □

Teorema 4.34. *Todo grupo topológico G con $Nag(G) \leq \tau$ es τ-celular.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico que cumple que su número de Nagami es $\leq \tau$ pero que no es τ-celular. Por el lema 4.33, existe una familia $\{F_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ de subconjuntos no vacíos de G de tipo G_τ, y una familia $\{O_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ de conjuntos abiertos de G tales que $F_\alpha \subset O_\alpha$ y $F_\alpha \cap O_\beta = \emptyset$ para cada $\alpha < \beta < \tau^+$. Fijemos, para cada $\alpha < \tau^+$ un punto $x_\alpha \in F_\alpha$.

Como G es un grupo topológico la función $f : G^3 \longrightarrow G$ dada por $f(x, y, z) = xy^{-1}z$ es continua. Como la restricción de una función continua es continua y para cada $g \in G$ fijo hay un homeomorfismo natural h_g entre G^2 y $G^2 \times \{g\}$, para cada $\alpha < \tau^+$ el conjunto $U_\alpha = \{(x, y) \in G^2 : f(x, y, x_\alpha) \in O_\alpha\} = h_{x_\alpha}[f|_{G^2\times\{x_\alpha\}}^{-1}[O_\alpha]]$ es un abierto de G^2. Observe que si $\alpha < \tau^+$, U_α contiene a la diagonal de G pues $f(x, x, x_\alpha) = x_\alpha \in O_\alpha$ para cada $x \in G$. De manera análoga y usando el hecho de que la preimagen continua de conjuntos G_τ es un conjunto G_τ, tenemos que para cada $\alpha < \tau^+$ el conjunto $K_\alpha = \{(x, y) \in G^2 : f(x_\alpha, x, y) \in F_\alpha\}$ es de tipo G_τ en G^2 y contiene a la diagonal de G.

Aplicando el lema 4.32, para cada $\alpha < \tau^+$ existe una función continua $\varphi_\alpha : G \longrightarrow \mathbb{R}^\tau$ tal que para cada par de puntos $x, y \in G$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ implica $(x, y) \in K_\alpha$. Aplicando el lema 4.31 a las familias $\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}$, $\{U_\alpha : \alpha < \tau^+\}$, $\{\varphi_\alpha : \alpha < \tau^+\}$, existen $\alpha < \beta < \tau^+$ y $x \in G$ tales que $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\beta)$ y $(x_\alpha, x) \in U_\beta$. Entonces $(x, x_\beta) \in K_\alpha$. Por las definiciones de los conjuntos K_α y U_β se sigue que $x_\alpha x^{-1} x_\beta = f(x_\alpha, x, x_\beta) \in F_\alpha \cap O_\beta$. Esto es una contradicción, por lo que se concluye que G es τ-celular. $\square$

Finalmente, la fuerza del número de Nagami arroja como corolario, en el caso numerable, el siguiente resultado de Uspenskii. El teorema de Uspenskii es, a su vez, una generalización de un resultado anterior, debido a M. Tkachenko. Este último teorema lo anexamos como corolario al teorema de Uspenskii y sirve como epílogo de la obra. Se trata de un teorema de gran importancia en el estudio del comportamiento de las funciones cardinales en grupos topológicos.

Corolario 4.35 (Uspenskii)**.** *Todo grupo topológico Lindelöf-Σ tiene celularidad numerable.*

Corolario 4.36 (Tkachenko)**.** *Todo grupo topológico σ-compacto tiene celularidad numerable.*

Bibliografía

[1] Arhangel'skii, A.V. *Factorization theorems and function spaces: Stability and monolicithity*, Soviet Math. Dokl. 26, pp. 177–181, 1982.

[2] Arhangel'skii A.V., Tkachenko, M.G. *Topological groups and related structures.* Atlantis studies in Mathematics, Vol. 1, Atlantis press/World Scientific, Paris-Amsterdam, 2008.

[3] Engelking, R. *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann-Verlag. 1989.

[4] Hérnandez, F. *Teoría de Conjuntos. Una introducción*, Aportaciones Matemáticas, UNAM, México D.F., 2011.

[5] Nagami, K. Σ-*spaces*, Fund. Math. 61, pp. 169–192, 1969.

[6] Tkachenko, M.G., Villegas Silva, L.M., Hernández García, C., Rendón Gómez, O.J. *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F. 1997.