UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS DINÁMICOS: TRANSITIVIDAD, ENTROPÍA TOPOLÓGICA Y CAOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

H É C T O R H O M E R O C A N A L E S F A R Í A S

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ
2017

Universidad Nacional
Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Canales
Farías
Héctor Homero
56 55 15 66
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
308612284

2. Datos del tutor
Dr
Sergio
Macías
Álvarez

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ernesto
Rosales
González

4. Datos del sinodal 2
Dra
Ana
Rechtman
Bulajich

5. Datos del sinodal 3
Dr
Héctor
Méndez
Lango

6. Datos del sinodal 4
Dr
Jefferson Edwin
King

Dávalos

7. Datos del trabajo escrito
Sistemas Dinámicos: Transitividad, entropía y caos
161 p.
2017

Índice general

Para Cecilia Félix Flores, in memoriam.

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo incansable y generoso de mi asesor Sergio Macías, quien no sólo hizo correcciones, sino que también me brindó tiempo para explicaciones en los temas que se me complicaron a lo largo de este trabajo. Quiero también expresar mi profundo agradecimiento a Pablo Rosell y Leonardo Espinosa, por su apoyo técnico con el programa Texmaker y sus certeras críticas.

Agradezco al Instituto de Matemáticas por la beca de lugar que me otorgó durante la realización de este trabajo.

A mis padres, quienes no sólo me han brindado su cariño y apoyo, sino que también han sido mi guía a lo largo de tantos años. Quienes han procurado mi bienestar y me han enseñado la mejor forma de vivir una vida plena. A ellos les debo la persona que soy ahora. A mi tía Beatriz, quien ha estado siempre a nuestro lado en los buenos y malos momentos y nos ha brindado su afecto incondicionalmente. A mis abuelitas, con sus incontables anécdotas y experiencias. A mi hermano, con quien he compartido tantos momentos.

A mis mejores amigos Juan, Noé y Alan con los que he vivido cosas buenas y malas y de los que he aprendido mucho. A mis amigos y compañeros de equipo "Hermandapoles" con quienes he compartido numerosas experiencias.

A mis amigos de la facultad, Ale, Jime, Vega, Erick y Hiroki con los que no sólo compartí clases, sino también momentos complicados y de gozo durante mis estudios, gracias por todo su apoyo.

Finalmente, a mi novia Gloria, quien me ha apoyado a lo largo de estos últimos dos años. Gracias por toda la ayuda que me diste para poder realizar este trabajo. Por creer en mí y brindarme todo el cariño que me has dado.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del tiempo diferentes culturas en diversos lugares del mundo se han propuesto la difícil tarea de poder dar una explicación certera a los movimientos que acontecen en nuestro universo. Un ejemplo claro de esto es el movimiento de los planetas en nuestro sistema solar, se han dado a la tarea de estudiar dichos movimientos y poder dar predicciones confiables a los mismos y, para lograr semejante proeza, han utilizado diferentes herramientas de diferentes áreas del conocimiento. Con el pasar de los años las técnicas empleadas para el estudio del movimiento han ido evolucionando, una de ellas son las matemáticas, dando lugar a los sistemas dinámicos, como la rama predilecta encargada en el estudio del movimiento. Viajaremos ahora a través de la historia para conocer un poco más sobre los orígenes de los sistemas dinámicos. Nuestro viaje comienza con un célebre personaje francés, nombrado como "El último universalista", por el matemático y escritor Eric Temple Bell [19], debido a su trascendencia por las diferentes ramas de la matemática y la física, nos referimos a Jules Henri Poincaré. Poincaré nació el 29 de Abril de 1854 en el suburbio de Cité Ducale, en Nancy, Francia. La teoría moderna de los sistemas dinámicos surge debido a su contribución con su trabajo en la mecánica celeste con el problema de los tres cuerpos (Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste [31]). Principalmente del artículo "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique" [30], con el cual ganó el premio de la competencia matemática propuesta por el rey Oscar II de Suecia y Noruega, como conmemoración de su sexagésimo cumpleaños.

En este trabajo Poincaré dejó las bases para el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales no lineales. En dicho trabajo describe la idea de movimientos periódicos y define variedades estables e inestables. Poincaré se dio cuenta que, ciertas ecuaciones diferenciales que describen sistemas mecánicos "simples" con dos o más grados de libertad, eran no integrables en el sentido clásico, debido a la presencia de órbitas homoclínicas y heteroclínicas. El discernió la importancia de estas órbitas para la estabilidad del movimiento en general.

Siguiendo el trabajo de Poincaré, George David Birkhoff (1844-1944) mostró que cerca de puntos homoclínicos de una función dos dimensional, existe una sucesión de puntos periódicos con periodos aproximándose a infinito. Mostró también que las funciones continuas de anillos con puntos de dos periodos distintos contienen conjuntos complejos que separan sus dominios de atracción. Esto le dio a Cartwright y Littlewood la llave para el estudio de la ecuación de Van der Pol.

Nuestro viaje continúa con dos personajes rusos Aleksandr Andronov (1901-1952) y Andrey Kolmogorov (1903-1987). Andronov sentó un sólido grupo de trabajo de dinámica en Rusia, él y Lev Pontryagin en su trabajo, introdujeron la idea principal de estabilidad estructural, ahora una noción fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos. El trabajo de Kolmogorov junto con otros rusos como Anosov, Arnold y Sinai floreció en los años cincuenta y sesenta la mayor parte en seminarios impartidos por Kolmogorov. Importantes trabajos se desarrollaron en la teoría ergódica usando las ideas de los K sistemas de Kolmogorov.

Por último concluimos nuestro viaje con el matemático norteamericano Stephen Smale (1930-), quién introdujo ideas y nociones topológicas para el estudio de los sistemas dinámicos, con la creación de la función herradura de Smale, como una función diferenciable con estabilidad estructural, y con una infinidad de puntos periódicos.

Este trabajo está basado en el artículo [24].

Capítulo 2

Conceptos de topología

En este capítulo, se darán todos los conceptos necesarios de topología general que nos ayudarán para poder desarrollar los conceptos y resultados que se desarrollarán a lo largo de este trabajo.

2.1. Definiciones básicas

La siguiente definición es lo que se conoce como espacio topológico.

2.1.1 Definición. *Sean X un conjunto distinto del vacío y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que la pareja $(X, \mathcal{U})$ es un* ***espacio topológico*** *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una colección de elementos de $\mathcal{U}$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha \in \mathcal{U}$.*

2. *Si $U_1, \ldots, U_n$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$, entonces*

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{U}.$$

3. *$\emptyset \in \mathcal{U}$ y $X \in \mathcal{U}$.*

2.1.2 Observación. *La familia $\mathcal{U}$ es llamada una* ***topología*** *para X y los elementos de $\mathcal{U}$ son llamados* ***conjuntos abiertos*** *de $(X, \mathcal{U})$.*

2.1.3 Definición. *Sean* $(X, \mathcal{U})$ *un espacio topológico y* $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. *Diremos que* $\mathcal{B}$ *es* ***una base*** *para* $\mathcal{U}$, *si para cada* $U \in \mathcal{U}$ *y cada* $x \in U$, *existe* $B \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B \subset U$.

2.1.4 Definición. *Sean* $(X, \mathcal{U})$ *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X. *Diremos que* A *es un* ***conjunto cerrado***, *si* $X \setminus A$ *es abierto.*

2.1.5 Definición. *Sean* $(X, \mathcal{U})$ *y* $(Y, \mathcal{V})$ *dos espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Diremos que* f *es una* ***función continua***, *si para cada* $V \in \mathcal{V}$, *se tiene que* $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

2.1.6 Proposición. *Sean* $(X, \mathcal{U})$ *y* $(Y, \mathcal{V})$ *dos espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Entonces* f *es continua si y sólo si para cada subconjunto cerrado* D *de* Y, *se tiene que* $f^{-1}(D)$ *es un subconjunto cerrado de* X.

Demostración. Supongamos que f es continua y sean D un conjunto cerrado de Y y $V = Y \setminus D$. Notemos que V es un conjunto abierto de Y, por la continuidad de f, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X. Observemos que $f^{-1}(D) = X \setminus f^{-1}(V)$ y, por tanto, $f^{-1}(D)$ es un conjunto cerrado de X.

Sea V un conjunto abierto de Y. Entonces $D = Y \setminus V$ es un conjunto cerrado de Y. Por hipótesis, $f^{-1}(D)$ es un conjunto cerrado de X. Pero $f^{-1}(D) = X \setminus f^{-1}(V)$. De donde, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X y, por lo tanto, f es continua. $\square$

2.1.7 Definición. *Sea* X *un espacio topológico, diremos que* X *es un espacio de* ***Hausdorff*** *si para cualesquiera dos puntos* $x, y \in X$, *existen dos abiertos* U *y* V *de* X *tales que* $x \in U$, $y \in V$ *y* $U \cap V = \emptyset$.

2.1.8 Definición. *Un* ***espacio métrico*** *es un par ordenado* (X, d), *que consiste de un conjunto no vacío* X *y una función* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *tal que para cualesquiera* $x, y, z \in X$, *la función* d *satisface las siguientes condiciones:*

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(la desigualdad del triángulo).*

La función d *es llamada una* ***métrica*** *de* X.

La idea de esta definición es tener una noción de poder medir de alguna forma la **distancia** entre cualesquiera dos puntos de un conjunto dotado de una métrica.

2.1.9 Ejemplo. *La recta real* $\mathbb{R}$ *con la distancia usual* $d(x,y) = |x-y|$ *es un espacio métrico.*

2.1.10 Ejemplo. *El espacio Euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *con la distancia usual:*

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \left(\sum_{m=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es un espacio métrico.

2.1.11 Definición. *Sean* (X,d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$*. Definimos la* ***bola abierta con centro en x y radio*** $\boldsymbol{\epsilon}$*, como el siguiente conjunto:*

$$V_\epsilon^d(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}.$$

Cuando no haya duda con la métrica con la que se esté trabajando, se denotará como $V_\epsilon(x)$*.*

2.1.12 Definición. *Sea* C *un subconjunto de un espacio topológico* X*. Diremos que* C *es un* ***cerrado*** *de* X *si su complemento es un conjunto abierto en* X*; es decir,* $X \setminus C$ *es un abierto del espacio topológico* X*.*

2.1.13 Definición. *Sean* X *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X*. Entonces la* ***cerradura*** *de* A*, denotada como* $Cl_X(A)$*, está definida como:*

$$Cl_X(A) = \bigcap\{C \mid A \subset C \text{ y } C \text{ es cerrado en } X\}.$$

Cuando no quede duda en qué espacio topológico X *se está trabajando, la cerradura de* A *se denotará como* $Cl(A)$*.*

2.1.14 Observación. *Notemos que la cerradura de un subconjunto* A *de un espacio topológico* X *es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a* A

2.1.15 Proposición. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Entonces* f *es continua si y sólo si para cada* $A \subset X$*, se tiene que* $f(Cl_X(A)) \subset Cl_Y(f(A))$*.*

Demostración. Supongamos que f es continua y sea $A \subset X$. Observemos lo siguiente:
$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(Cl_Y(f(A))).$$
Como f es continua, sabemos que $f^{-1}(Cl_Y(f(A)))$ es un cerrado de X que contiene a A. De donde, $Cl_X(A) \subset f^{-1}(Cl_Y(f(A)))$. Aplicando f obtenemos que:
$$f(Cl_X(A)) \subset f(f^{-1}(Cl_Y(f(A)))) \subset Cl_Y(f(A)).$$
Ahora supongamos que $f(Cl_X(A)) \subset Cl_Y(f(A))$, para cada subconjunto A de X. Sea B subconjunto cerrado de Y. Por hipótesis, sabemos que:
$$f(Cl_X(f^{-1}(B))) \subset Cl_Y(f(f^{-1}(B))) \subset Cl_Y(B) = B.$$
Aplicando f^{-1} a lo anterior, se obtiene:
$$Cl_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(f(Cl_X(f^{-1}(B)))) \subset f^{-1}(B).$$
Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es cerrado en X y f es continua. □

2.1.16 Definición. *Sean X un espacio topológico y $D \subset X$. Diremos que D es* ***denso*** *en X, si para todo subconjunto abierto U de X se tiene que, $D \cap U \neq \emptyset$.*

Un resultado que será de mucha utilidad es el siguiente:

2.1.17 Lema. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $x \in Cl(A)$ si y sólo si para cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $x \in Cl(A)$ y que existe un subconjunto U abierto de X tal que $x \in U$ y $A \cap U = \emptyset$. Como $A \cap U = \emptyset$, se tiene que $A \subset X \setminus U$. Como U es abierto, $X \setminus U$ es cerrado. Entonces:
$$A \subset Cl(A) \subset X \setminus U.$$
Esto implica que $x \notin Cl(A)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto si U es un abierto de X con $x \in U$ entonces $A \cap U \neq \emptyset$.

Ahora, para el regreso, supondremos que $x \notin Cl(A)$, esto es:
$$x \in X \setminus Cl(A) \subset X \setminus A.$$

Observemos que $X \setminus Cl(A)$ es abierto y que $(X \setminus Cl(A)) \cap A = \emptyset$. Con lo cual queda demostrado el lema. □

2.1.18 Observación. *El Lema 2.1.17 nos da una equivalencia para la definición de un conjunto denso; es decir, nos dice que si tenemos un subconjunto A de X, el cual es denso, entonces la cerradura de ese subconjunto es el espacio total; es decir, $Cl(A) = X$.*

2.1.19 Proposición. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y D un subconjunto no denso en X. Entonces $f^{-1}(D)$ es un subconjunto no denso en X.*

Demostración. Sea V un subconjunto no denso de X. Como V es no denso, existe un abierto W de X tal que $V \cap W = \emptyset$, de donde $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = \emptyset$. Observemos que $f^{-1}(W)$ es un abierto de X por la continuidad de f. En consecuencia, $f^{-1}(V)$ es un subconjunto no denso de X. $\square$

2.1.20 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que A es un conjunto* ***abierto y cerrado*** *si A es tanto abierto como cerrado en X.*

2.1.21 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto no vacío de X. Entonces $x \in X$ es un* ***punto de acumulación*** *de A si para todo abierto U de X, con $x \in U$, se tiene que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

2.1.22 Definición. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces el* ***interior*** *de A esta definido como:*

$$Int_X(A) = \{a \in A \mid \textit{existe un abierto } U \textit{ de } X \textit{ tal que } a \in U \subset A\},$$

o, equivalentemente, tenemos que

$$Int_X(A) = \bigcup \{U \subset A \mid U \textit{ es un abierto de } X\}.$$

Cuando no quede duda del espacio en el que se trabaja al interior de un conjunto A, se le denotará como $Int(A)$.

2.1.23 Definición. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, diremos que f es* ***abierta (o cerrada)*** *si para cualquier abierto (o cerrado) U de X, su imagen bajo f es un abierto (o cerrado) de Y.*

2.1.24 Definición. *Sean X un espacio topológico y A y B subconjuntos de X. Diremos que A y B están* ***separados*** *si $Cl(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap Cl(B) = \emptyset$.*

2.1.25 Definición. *Sean X un espacio topológico y U y V dos subconjuntos de X. Diremos que U y V* ***forman una separación de*** *X si $X = U \cup V$ y U y V están separados.*

2.1.26 Definición. *Un espacio topológico X es* ***disconexo*** *si existen dos subconjuntos U y V de X tales que forman una separación de X. Diremos que X es* ***conexo*** *si no es disconexo.*

2.1.27 Definición. *Sean X un espacio topológico y $C \subset X$. Diremos que C es una* ***componente*** *de X si C es conexo y para cada subconjunto conexo A de X tal que $C \subset A$ se tiene que $C = A$; es decir, C es un subconjunto conexo de X máximo con respecto a la inclusión.*

2.1.28 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Si A es conexo entonces $Cl(A)$ es conexa.*

Demostración. Supongamos que $Cl(A)$ no es conexa. Entonces existen dos conjuntos separados U y V de X tales que $Cl(U) \cap V = Cl(V) \cap U = \emptyset$ y $Cl(A) = U \cup V$. Observemos que como $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$. Entonces $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \emptyset$, ya que si no fuera así y $U \cap A = \emptyset$, esto implicaría que $A \subset V \cap A$, por lo que $Cl(A) \subset V$ y, por lo tanto, $U = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Análogamente, si $V \cap A = \emptyset$, se tendría que $V = \emptyset$, lo cual también es una contradicción y, por lo tanto, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \emptyset$. Notemos que esto no es posible, pues A es conexo. De donde, $Cl(A)$ es conexa. □

2.1.29 Observación. *De la Proposición 2.1.28 podemos concluir que las componentes son cerrados del espacio, ya que por dicha proposición, si A es una componente de un espacio topológico X, entonces $Cl(A)$ es conexa. Por definición de cerradura, sabemos que $A \subset Cl(A)$ y, por definición de componente, sabemos que si $A = Cl(A)$, de donde A es cerrado.*

2.1.30 Proposición. *Sea X un espacio topológico tal que tiene una cantidad finita de componentes, digamos $C_1, \ldots, C_n$, entonces C_i es un abierto de X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Para ver esto, como $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ de aquí podemos concluir que C_i es el complemento de $\displaystyle\bigcup_{j \neq i} C_j$ el cual es un cerrado de X, por lo tanto, C_i es abierto. □

2.1.31 Definición. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que X es **localmente conexo** en el punto x si para cualquier abierto U de X, con $x \in U$, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$.*

2.1.32 Proposición. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólamente si las componentes de los subconjuntos abiertos son abiertos de X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un abierto de X y C una componente de U. Veremos que C es un abierto de X.

Sea $x \in C$. Como X es localmente conexo y $x \in U$, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$. Observemos que $C \cap V \neq \emptyset$, así $C \cup V$ es un subconjunto conexo de U. Como C es una componente de U, tenemos que $V \subset C$ de donde $x \in Int(C)$ y, por lo tanto, C es abierto.

Ahora, supongamos que las componentes de los subconjuntos abiertos son abiertas. Sean $x \in X$ y un subconjunto abierto U de X, con $x \in U$. Entonces la componente V de U que contiene a x es abierta por hipótesis y $x \in V \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. □

2.1.33 Definición. *Sea X un conjunto y $B \subset X$. Diremos que una familia $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de B si $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Diremos que $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una **cubierta finita** si Λ es finito. Si X es un espacio topológico y cada C_λ es un subconjunto abierto, entonces $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una **cubierta abierta**.*

2.1.34 Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **compacto** si para cada cubierta abierta de X, podemos encontrar una subcubierta abierta finita.*

2.1.35 Definición. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos cerrados de X. Diremos que $\mathcal{C}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** si para cualquier subconjunto finito Γ de Λ se tiene que:*

$$\bigcap_{\lambda \in \Gamma} C_\lambda \neq \emptyset.$$

2.1.36 Teorema. *Un espacio X es compacto si y sólo si para cualquier familia $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos cerrados de X, con la propiedad de la intersección finita, se tiene que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y que $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $U_\lambda = X \setminus C_\lambda$. Notemos que $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$. Esto implica que $\bigcap_{j=1}^{n} C_{\lambda_j} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Supongamos que X no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de X la cual no tiene una subcubierta finita. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $C_\lambda = X \setminus U_\lambda$. Observemos que $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset$. □

2.1.37 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Diremos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\min\{m, n\} \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

2.1.38 Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X* ***converge*** *a un punto x de X, si para cada abierto U de X con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \subset U$.*

2.1.39 Definición. *Diremos que un espacio métrico X es* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy de elementos de X converge a un elemento de X.*

2.1.40 Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio* ***compacto por sucesiones****, si para cada sucesión de elementos de X tiene una subsucesión convergente.*

El siguiente lema nos ayudara a demostrar el Teorema 2.1.42. Su prueba puede ser consultada en la página 179 del libro de Munkers [29]

2.1.41 Lema. *Sea X un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si X es compacto por sucesiones.*

2.1.42 Teorema. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces X es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Por el Lema 2.1.41, X es compacto por sucesiones. De donde, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, la cual converge a un punto $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, como la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x, tenemos que existe N_1 tal que si $n_k \geq N_1$, implica que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, existe N_2 tal que si n, $n_k \geq N_2$, entonces $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Por lo que si $n \geq N$ tenemos lo siguiente:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

2.1.43 Teorema. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos densos y abiertos de X entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ es densa en X.*

Demostración. Sea U abierto de X. Veamos que $U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) \neq \emptyset$.

Como D_1 es un subconjunto abierto y denso de X tenemos que $U \cap D_1$ es abierto y distinto del vacío. Entonces existen x_1 y $0 < \epsilon_1 < 1$ tales que $Cl(V_{\epsilon_1}(x_1)) \subset U \cap D_1$.

Como D_2 es abierto y denso en X, resulta que $V_{\epsilon_1}(x_1) \cap D_2$ es abierto y no vacío, en consecuencia, existen x_2 y $0 < \epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tales que:

$$Cl(V_{\epsilon_2}(x_2)) \subset V_{\epsilon_1}(x_1) \cap D_2.$$

Procediendo de esta manera, obtenemos que $\{Cl(V_{\epsilon_n}(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X con $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diám}(Cl(V_{\epsilon_n}(x_n))) = 0$. Notemos que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, por lo que dicha sucesión converge a un punto x de X. Observemos que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Cl(V_{\epsilon_n}(x_n)) = \{x\}.$$

Por lo tanto, $x \in U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right)$. □

2.1.44 Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que un subconjunto A de X es **denso en ninguna parte** si $Int(Cl(A)) = \emptyset$.*

2.1.45 Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es de la **primera categoría** si X se puede escribir como la unión de una familia numerable de subconjuntos densos en ninguna parte. Diremos que X es de la **segunda categoría** si no es de la primera categoría.*

2.1.46 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que A es un **subconjunto** G_δ si A puede ser escrito como la intersección numerable de conjuntos abiertos de X.*

2.1.47 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que A es **perfecto** si A es cerrado y todo punto de A es un punto de acumulación de A.*

2.1.48 Definición. *Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ función continua y $A \subset X$. Decimos que A es **invariante** bajo f si $f(A) \subset A$. En el caso que se dé la igualdad, diremos que es **estrictamente invariante**.*

2.1.49 Definición. *A un espacio métrico, compacto y conexo X lo llamaremos un **continuo**.*

2.1.50 Definición. *Sean X un continuo y $A \subset X$. Diremos que A es un **subcontinuo** de X si A es compacto y conexo.*

2.1.51 Definición. *Sea X un conjunto. Una **partición** de X es una familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X tales que:*

1. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \neq \emptyset$.*
2. *Si λ y $\lambda' \in \Lambda$ y $\lambda \neq \lambda'$, entonces $X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \emptyset$.*
3. *$X = \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.*

2.1.52 Definición. *Sean X un conjunto y $\mathcal{G} = \{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición de X. Definimos al **conjunto cociente** como el conjunto cuyos elementos son los elementos de la partición. Lo denotaremos como $X/\mathcal{G}$.Definimos la **función cociente** $q : X \to X/\mathcal{G}$, para cada $x \in X$, $q(x) = G_\lambda$, donde G_λ es el único elemento de $\mathcal{G}$ que tiene a x.*

2.1.53 Definición. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{G}$ una partición de X. Definimos la **topología cociente** para $X/\mathcal{G}$ como la siguiente familia:*

$$\mathcal{U} = \{U \subset X/\mathcal{G} \mid q^{-1}(U) \ \text{ es un abierto de } X\}.$$

2.1.54 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos el **diámetro** de A como;*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_1) \mid a_1, a_2 \in A)\}.$$

2.1.55 Definición. *Sea (X, d) un espacio métrico y compacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Diremos que $\lambda > 0$ es un **número de Lebesgue** para $\mathcal{U}$, si para cualquier conjunto A de X con $\operatorname{diam}(A) < \lambda$, entonces se tiene que $A \subset U$ para alguna $U \in \mathcal{U}$.*

2.2. Espacios cubrientes

Hablaremos ahora de los espacios cubrientes, una teoría que nos será de gran ayuda cuando trabajemos funciones del círculo en el círculo. Las siguientes definiciones se encuentran en el libro de Macías [27].

2.2.1 Definición. *Sean X y Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo local** si para cada punto $x \in X$, existe un abierto U de X tal que $x \in U$, $f(U)$ es un abierto de Y y $f|_U : U \to f(U)$ es un homeomorfismo.*

2.2.2 Definición. *Sean X, Y y Z espacios métricos, $f : X \to Y$ y $g : Z \to Y$ dos funciones continuas. Una función $\tilde{g} : Z \to X$ es un **levantamiento de** g **relativo a** f si $f \circ \tilde{g} = g$. Donde tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

2.2.3 Definición. *Sea X un espacio métrico. Un **espacio cubriente** para X es una pareja $(\tilde{X}, \sigma)$, donde $\tilde{X}$ es un espacio métrico y $\sigma : \tilde{X} \to X$ es una función continua y suprayectiva, que cumplen con la siguiente propiedad: Para cada punto $x \in X$, existe un abierto U_x de X, al cual llamaremos **abierto uniformemente cubierto**, tal que $x \in U_x$, $\sigma^{-1}(U_x) = \cup_{\lambda \in \Lambda} V_{x_\lambda}$, donde V_{x_λ} es un abierto de $\tilde{X}$, $V_{x_\lambda} \cap V_{x_{\lambda'}} = \emptyset$ si $\lambda \neq \lambda'$ y, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\sigma|_{V_{x_\lambda}} : V_{x_\lambda} \to U_x$ es un homeomorfismo.*

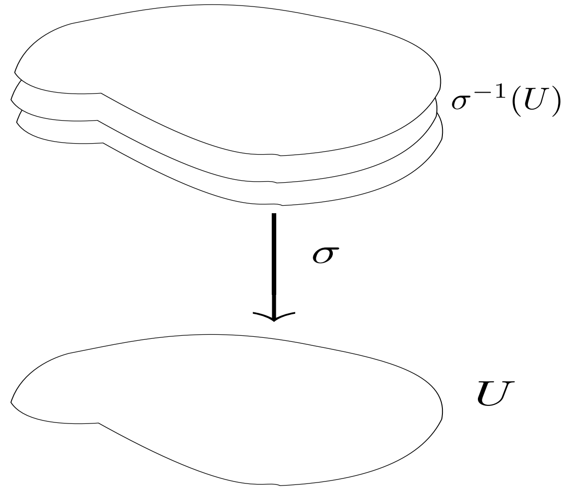

Figura 2.1: Espacio cubriente

Ahora daremos algunas proposiciones con los resultados de la teoría de los espacios cubrientes que nos ayudarán más adelante, sus demostraciones pueden verse en el libro de Munkers [29] y Alsedà et al [2], en las paginas 335-340 y 107-113, respectivamente.

2.2.4 Proposición. *Sea X un espacio métrico. Si $\sigma : \tilde{X} \to X$ es una función cubriente, entonces σ es abierta.*

Demostración. Sean W un abierto de $\tilde{X}$ distinto del vacío y $x \in \sigma(W)$, tomemos un abierto uniformemente cubierto U_x de X y sea la familia $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de abiertos como en la Definición 2.2.1; es decir, $\sigma^{-1}(U_x) = \cup_{\lambda \in \Lambda} V_{x_\lambda}$. Entonces existe un punto $y \in W$ tal que $\sigma(y) = x$. Sea V_β el elemento de la familia $\mathcal{V}$ que contiene a y. El conjunto $V_\beta \cap W$ es un abierto de $\tilde{X}$ y, por lo tanto, también es un abierto de V_β. Como $\sigma|_{V_\beta} : V_\beta \to U_x$ es un homeomorfismo, el conjunto $\sigma(V_\beta \cap W) \subset \sigma(W)$ es abierto en U_x y, por lo tanto, abierto en X. Por tanto, σ es abierta. $\square$

2.2.5 Observación. *De la Proposición 2.2.4 podemos ver que si $\sigma : \tilde{X} \to X$ es una función cubriente, entonces σ es un homeomorfismo local.*

2.2.6 Notación. *Podemos usar dos notaciones sobre el círculo $\mathbf{S}^1$. La multiplicativa, la cual representa a $\mathbf{S}^1$ como el círculo unitario del plano complejo:*

$$\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i \phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\},$$

donde $|z|$ representa la norma del número complejo. O bien la notación aditiva, donde $\mathbf{S}^1$ está representado como el grupo aditivo de los número reales cociente el subgrupo de los enteros; es decir, $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Usando la notación multiplicativa de $\mathbf{S}^1$, obtenemos la siguiente función cubriente.

Las demostraciones de las Proposiciones 1.1.7 y 1.1.8 pueden ser consultadas en el libro Munkers [29], en las páginas 337 y 338, respectivamente. Las pruebas de las Proposiciones 1.1.10, 1.1.11 y 1.1.14 pueden ser consultadas en el libro de Alsedà et al [2], en las páginas 108 y 113.

2.2.7 Proposición. *La función $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ dada por:*

$$\sigma(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x),$$

es una función cubriente.

2.2.8 Proposición. *Sea $\sigma : \tilde{X} \to X$ una función cubriente. Si A es un subespacio de X y $\tilde{A} = \sigma^{-1}(A)$, entonces la función $\sigma|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to A$ es una función cubriente.*

2.2.9 Notación. *Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para $x \in \mathbb{R}$ definimos el siguiente conjunto: $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$*

2.2.10 Proposición. *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ la función cubirente de $\mathbf{S}^1$ dada por la Proposición 2.2.7. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *La función $\tilde{\sigma} : (a, a+1) \to \mathbf{S}^1 \setminus \{\sigma(a)\}$, obtenida al restringir σ al intervalo $(a, a+1)$ es un homeomorfismo.*

2. *Sean B cualquier subconjunto de $\mathbf{S}^1 \setminus \{\sigma(a)\}$ y $A = [a, a+1] \cap \sigma^{-1}(B)$. Entonces $\sigma^{-1}(B)$ es la unión de los conjuntos $A + n$ con $n \in \mathbb{Z}$, los cuales son abiertos en $\sigma^{-1}(B)$. Y σ induce un homeomorfismo de $A + n$ en B.*

2.2.11 Proposición. *Cualquier función continua $f : [0, 1] \to \mathbf{S}^1$ tiene un único levantamiento en $[0, 1]$, salvo traslaciones por un entero. Y si $a_0 \in \mathbb{R}$ es fijo con $\sigma(a_0) = f(0)$, entonces existe un único levantamiento $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en $[0, 1]$ con $\tilde{f}(0) = a_0$.*

Consideremos ahora que tenemos una función continua $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$. Entonces, por la Proposición 2.2.11, $f \circ \sigma|_{[0,1]}$ tiene un levantamiento $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$. De donde tenemos el siguiente diagrama que conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\sigma|_{[0,1]}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbf{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbf{S}^1 \end{tikzcd}$$

Como $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$, entonces $\sigma(\tilde{f}(1)) = f(\sigma(1)) = f(\sigma(0)) = \sigma(\tilde{f}(0))$ y, por tanto, $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ es un entero. De donde tenemos la siguiente definición:

2.2.12 Definición. *Sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua, consideremos la función cubriente σ de $\mathbf{S}^1$ y $\tilde{f}$ un levantamiento de f como en el último diagrama. Entonces $\tilde{f}(a+1) - \tilde{f}(a)$ es un entero el cual llamaremos **el grado** de f y lo denotaremos como* $\deg(f)$.

Dado un levantamiento $\tilde{f}' : [0,1] \to \mathbb{R}$ de $f \circ \sigma|_{[0,1]}$ para una función $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ del círculo en sí mismo, por el Teorema de extensión de Tietze ([14, página 103]) podemos extenderla a una función $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbf{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbf{S}^1 \end{tikzcd}$$

2.2.13 Proposición. *Sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua. Consideremos la función cubriente σ de $\mathbf{S}^1$ y $\tilde{f}$ un levantamiento de f como en el último diagrama. Entonces $\tilde{f}(a+1) - \tilde{f}(a)$ es un entero, el cual es independiente de a y del levantamiento $\tilde{f}$ en* $[0,1]$.

Demostración. Como $\tilde{f}$ es un levantamiento de f tenemos que $f \circ \sigma = \sigma \circ \tilde{f}$, de donde $\sigma(\tilde{f}(a+1)) = f(\sigma(a+1)) = f(\sigma(a)) = \sigma(\tilde{f}(a))$. Por lo tanto, $\tilde{f}(a+1) - \tilde{f}(a) \in \mathbb{Z}$, por lo que también es independiente de a por continuidad. Si $\tilde{g}$ es otro levantamiento de f en $[0,1]$, por la Proposición 2.2.11, $\tilde{g}$ se obtiene al trasladar $\tilde{f}$ por un entero n. En consecuencia, $\tilde{g}(a+1) - \tilde{g}(a) = \tilde{f}(a+1) + n - (\tilde{f}(a) + n) = \tilde{f}(a+1) - \tilde{f}(a)$. $\square$

2.2.14 Proposición. *Sean* $f, g : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *funciones continuas. Entonces*

1. $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$,

2. $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$.

2.2.15 Observación. *Si en lugar de utilizar la notación multiplicativa de* $\mathbf{S}^1$ *utilizamos la notación aditiva, entonces la función cociente* $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *dada por* $x \mapsto x+\mathbb{Z}$ *funciona como función cubriente de* $\mathbf{S}^1$ *y podemos obtener un levantamiento* $\tilde{f}$ *como lo hicimos con* σ. *Además, observemos que si* $\tilde{f}$ *es un levantamiento de* f *y* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\tilde{f} + k$ *también es un levantamiento de* f.

Capítulo 3

Nociones Básicas.

3.1. Un Sistema Dinámico.

A lo largo de este capítulo, se darán las nociones básicas que nos ayudarán a definir los sistemas dinámicos discretos. Para después, poder abordar los conceptos y resultados más importantes que en este trabajo se desarrollaran. Una vez dicho lo anterior, comenzamos por la definición de sistema dinámico. Todas las siguientes definiciones pueden encontrarse para mayor detalle en [28] [27] [14].

3.1.1 Definición. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Para $m \in \mathbb{N}$, la* ***m-ésima iteración de*** *f se define como la composición de f consigo misma m veces y la denotaremos por f^m. Por ejemplo $f^2 = f \circ f$,$f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{m+1} = f \circ f^m$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id$. Donde id denota la función identidad $id(x) = x$.*

La siguiente definición es lo que podríamos considerar la idea de movimiento; es decir, es el objeto de estudio más importante de los sistemas dinámicos. La idea es la siguiente, dado un punto x en nuestro espacio métrico X, queremos estudiar su movimiento a través del mismo. Para lograr esto, nos fijamos en nuestro punto bajo las iteraciones de la función continua que definimos previamente.

3.1.2 Definición. *Sean X espacio métrico y $x \in X$. Definimos* ***la órbita de*** *x bajo f, como la sucesión:*

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

a dicha sucesión la denotaremos como $o(x, f)$; es decir;

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

La interpretación que le damos a la sucesión $o(x, f)$ será la siguiente: En el tiempo $n = 0$, un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $n = 1$, el objeto habrá cambiado a la posición $f(x)$; en el tiempo $n = 2$, el objeto habrá cambiado a la posición $f(f(x)) = f^2(x)$ y así sucesivamente.

$Tiempos:$	0	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
$Posiciones:$	x	$f(x)$	$f^2(x)$	$\ldots$	$f^n(x)$	$\ldots$

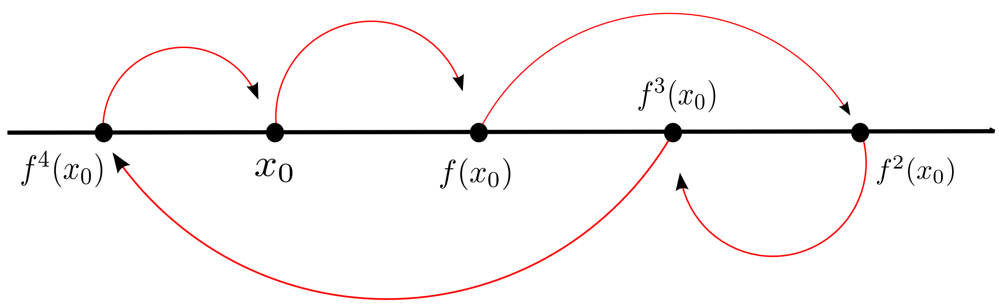

Figura 3.1: Primeros elementos de la órbita de x_0

El problema básico a estudiar es el siguiente: Dada la función $f : X \to X$, ¿qué podemos decir acerca de la órbita de cada punto $x \in X$? Por ejemplo: ¿La sucesión es convergente? Si lo es, ¿a dónde converge?. Si no lo es, ¿cuáles son sus puntos de acumulación?. Pero la cuestión más fundamental la podemos formular de la siguiente manera: si x y y son puntos cercanos ¿sus órbitas permanecen cercanas?.

Así nuestra meta es estudiar todas las posibles sucesiones de órbitas en nuestro espacio. De manera muy especial nos interesa su comportamiento cuando n tiende a infinito.

Desde este punto de vista la pareja (X, f) nos da un modelo matemático del movimiento. Con las definiciones anteriores, estamos listos para poder enunciar nuestra definición de sistema dinámico discreto.

3.1.3 Definición. *Un **sistema dinámico discreto** (X, f) estará compuesto por un espacio métrico X (espacio fase) y una función continua f del espacio métrico en sí mismo.*

Veamos ahora algunos ejemplos clásicos de sistemas dinámicos.

3.1.4 Ejemplo. *Consideremos la siguiente situación. Supongamos que estamos en un banco y depositamos 1000 pesos con un 10 % de interés. Ahora nos hacemos la siguiente pregunta: Si dejamos el dinero sin hacer ninguna transacción por n años, ¿Cuánto dinero tendremos en nuestra cuenta de banco al terminar este periodo de tiempo?. Para facilitar el ejemplo supondremos que el 10 % de interés es agregado a nuestra cuenta una vez al año al final del mismo. Este es uno de los ejemplos más simples de un **proceso de iteración** o **sistema dinámico**. Denotemos como A_n la cantidad de dinero que tenemos en nuestra cuenta de banco al final del enésimo año. Nuestro problema es determinar A_n, para algún número n de años. Sabemos que nuestro monto inicial es de 1000 pesos, es decir, $A_0 = 1000$. Después de un año le agregaremos el 10 % a esta cantidad para obtener nuestro nuevo balance, esto es:*

$$A_1 = A_0 + 0.1 \cdot A_0 = 1.1 \cdot A_0.$$

En nuestro caso $A_1 = 1100$ pesos. Al final del segundo año procederemos con la misma operación:

$$A_2 = A_1 + 0.1 \cdot A_1 = 1.1 \cdot A_1.$$

Por tanto $A_2 = 1210$. Procediendo de esta forma obtendremos en general que:

$$\begin{aligned} A_3 &= 1.1 \cdot A_2 \\ A_4 &= 1.1 \cdot A_3 \\ &\vdots \\ A_n &= 1.1 \cdot A_{n-1}. \end{aligned}$$

*En consecuencia, podemos determinar la cantidad A_n recursivamente, una vez conocido el balance del año anterior inmediato. La ecuación $A_n = 1.1 \cdot A_{n-1}$ es un ejemplo de una **ecuación diferencial de primer orden**. En estas ecuaciones, usamos la información del año previo (u otro intervalo fijo de tiempo), para determinar los datos actuales o presentes. Por lo que usamos después estos resultados para determinar la cantidad a futuro, en este caso el balance del siguiente año y así sucesivamente. Resolvimos la ecuación* *diferencial mediante el proceso de iteración. Dicho proceso fue multiplicar por la constante* 1.1*, es decir, si definimos la función* $f(x) = 1.1 \cdot x$*, entonces nuestros estados de cuenta o balances estarán determinados por aplicar repetidamente nuestra función* f*:*

$$\begin{aligned}
A_1 &= f(A_0), \\
A_2 &= f(A_1), \\
&\vdots \\
A_n &= f(A_{n-1}).
\end{aligned}$$

Observemos que podemos escribir $A_2 = f \circ f(A_0) = f^2(A_0)$ *y, como* $f(x) = 1.1 \cdot x$*, tenemos que:*

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= (1.1)^2 \cdot x, \\
f^3(x) &= (1.1)^3 \cdot x, \\
&\vdots \\
f^n(x) &= (1.1)^n \cdot x.
\end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar A_n*, dada* n *fija, lo único que hace falta es calcular* $(1.1)^n$ *y multiplicarlo por* A_0 *nuestro balance inicial.*

3.1.5 Ejemplo. *¿Cómo calculas exactamente* $\sqrt{5}$*? Sorprendentemente, el método más simple data de la época de los babilonios y consta de simplemente iterar una función. Supondremos que el cálculo de* $\sqrt{5}$ *es un valor inicial* x_0 *y que* x_0 *es positivo. Nuestra probabilidad de que* $x_0 \neq \sqrt{5}$ *es alta, así que, usaremos este valor supuesto para calcular un nuevo valor* x_1*. Procederemos de la siguiente manera: Si* $x_0 \neq \sqrt{5}$*, entonces tenemos los siguientes dos casos:*

1. *Si* $x_0 < \sqrt{5}$*, entonces*
$$\begin{aligned}
\sqrt{5} \cdot x_0 &< 5, \\
\sqrt{5} &< \tfrac{5}{x_0}.
\end{aligned}$$
   Para $x_0 \neq 0$*, por otro lado:*

2. *Si* $x_0 > \sqrt{5}$*, entonces*
$$\begin{aligned}
\sqrt{5} \cdot x_0 &> 5, \\
\sqrt{5} &> \tfrac{5}{x_0}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que $x_0 < \sqrt{5} < \frac{5}{x_0}$ *o* $\frac{5}{x_0} < \sqrt{5} < x_0$. *Si llamamos* x_1 *al promedio entre* x_0 *y* $\frac{5}{x_0}$*; es decir:*

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\Big(x_0 + \tfrac{5}{x_0}\Big)$$

el valor resultante estará entre x_0 *y* $\frac{5}{x_0}$ *y, con un poco de suerte, será una mejor aproximación de* $\sqrt{5}$. *Entonces utilizaremos este valor* x_1 *como nuestro siguiente valor supuesto para* $\sqrt{5}$. *Procediendo de la misma forma, obtenemos los siguientes promedios:*

$$\begin{gathered} x_2 = \tfrac{1}{2}\Big(x_1 + \tfrac{5}{x_1}\Big), \\ x_3 = \tfrac{1}{2}\Big(x_2 + \tfrac{5}{x_2}\Big), \\ \vdots \end{gathered}$$

Intuitivamente la sucesión de numeros $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ *debería converger a* $\sqrt{5}$. *Veamos cómo funciona esto en la práctica. Tomemos* $x_0 = 1$. *Como una suposición de alguna forma "boba", entonces tendremos:*

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & = & \frac{1}{2}\big(1+5\big) & = & 3, & & \\ x_2 & = & \frac{1}{2}\big(3+\frac{5}{3}\big) & = & \frac{7}{3} & = & 2.333\ldots, \\ x_3 & = & \frac{1}{2}\big(\frac{7}{3}+\frac{15}{7}\big) & = & \frac{47}{21} & = & 2.238095\ldots, \\ x_4 & = & 2.236068\ldots, & & & & \\ x_5 & = & 2.236067\ldots, & & & & \\ x_6 & = & 2.236067\ldots, & & & & \end{array}$$

Podemos observar que rápidamente la sucesión tiende a la respuesta correcta, es decir, a $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. *Claramente, para obtener otras raíces cuadradas, solamente necesitamos reemplazar el* 5 *por el numero que se desee en la fórmula.*

3.2. Puntos Fijos

3.2.1 Definición. *Sean* X *un espacio métrico,* $f : X \to X$ *una función continua. Decimos que* $x_0 \in X$ ***es un punto fijo de*** f *si* $f(x_0) = x_0$.

En este caso, la órbita de x_0 bajo f es una sucesión muy sencilla:

$$o(x_0, f) = \{x_0, x_0, \ldots\}.$$

Como, para cada n, se tiene que $f^n(x_0) = x_0$ entonces $o(x_0, f)$ tiende a x_0; es decir;

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_0.$$

3.3. Puntos fijos atractores

De aquí en adelante la distancia entre dos puntos de un espacio métrico X, digamos x y y, la representaremos como $d_X(x, y)$. Si no hay confusión acerca del espacio donde estemos trabajando, entonces sólo escribiremos $d(x, y)$.

3.3.1 Definición. *Sean X un espacio métrico, cuya métrica es d, y $f : X \to X$ una función suprayectiva. A un punto $x \in X$ lo llamaremos **punto fijo atractor** siempre que $f(x) = x$ y exista una vecindad U de x en X tal que $\lim_{n\to\infty} d(x, f^n(y)) = 0$ para cada $y \in U$.*

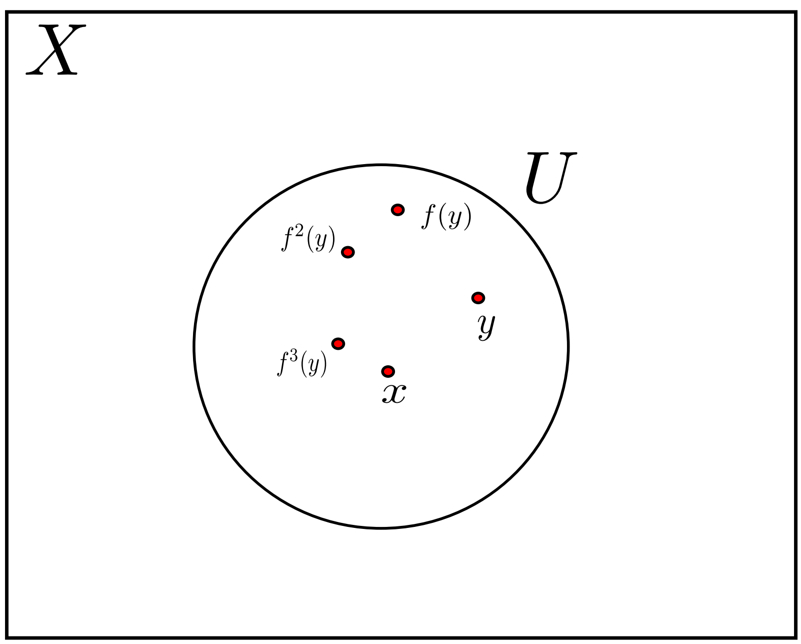

Figura 3.2: Punto fijo atractor x

De manera intuitiva, lo que nos dice esta definición es que si tenemos un punto fijo atractor x y nos fijamos en sus puntos vecinos, entonces al iterar la función en esos puntos vecinos convergerán a nuestro punto atractor x.

3.4. Puntos fijos repulsores

3.4.1 Definición. *Sean X un espacio métrico, cuya métrica es d, y $f : X \to X$ una función suprayectiva. A un punto $x \in X$ lo llamaremos* ***punto fijo repulsor*** *siempre que $f(x) = x$ y exista una vecindad U de x en X tal que para cada $y \in U \setminus \{x\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in X \setminus U$.*

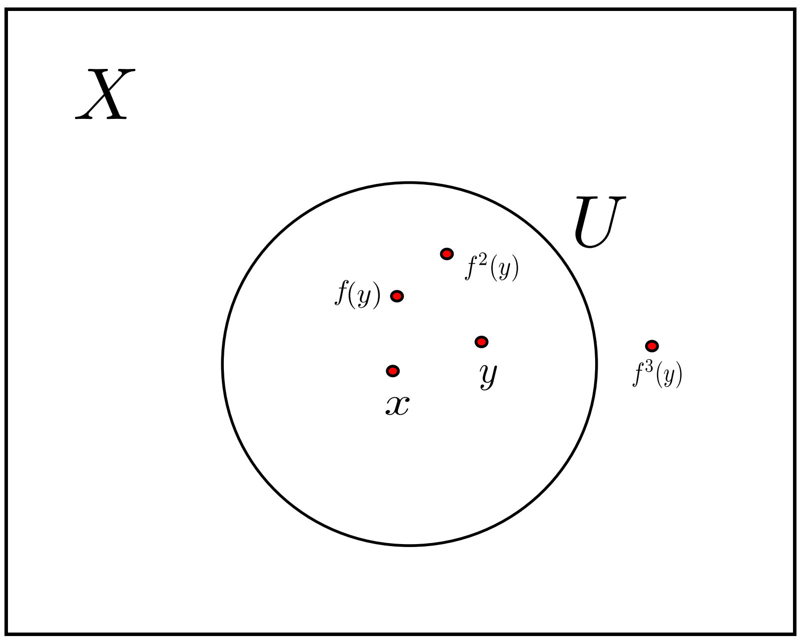

Figura 3.3: Punto fijo repulsor x

Lo que la definición anterior nos dice, es que en una vecindad de x los puntos cercanos a nuestro punto fijo repulsor x al iterar la función en ellos se irán alejando de él hasta el punto de salir de dicha vecindad.

3.4.2 Ejemplo. *Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $f(x) = x^2$. Observemos que $x_0 = 0$ es un punto fijo atractor bajo f y $x_1 = 1$ es un punto fijo repulsor bajo f. Ya que tomando cualquier punto $y < 1$ observamos que su órbita bajo f es una sucesión de números decrecientes que convergen a 0.*

3.5. Puntos periódicos

3.5.1 Definición. *Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un* ***punto periódico de*** *f, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que$f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos como $\operatorname{Per}(f)$. Si $x \in \operatorname{Per}(f)$, decimos que $o(x, f)$ es una* ***órbita periódica****. Sea $x_0 \in \operatorname{Per}(f)$. Decimos que x_0 tiene* ***periodo k*** *si:*

$$k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid f^n(x_0) = x_0\}$$

Si x_0 es un punto fijo de f, entonces $x_0 \in \operatorname{Per}(f)$ y x_0 tiene periodo 1. En algunas ocasiones, usaremos la siguiente notación. Dado $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Per}_n(f) = \{x \in \operatorname{Per}(f) \mid x \text{ es de periodo } n\}.$$

Así:

$$\operatorname{Per}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Per}_n(f).$$

3.5.2 Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$. Como la única solución a la ecuación $1 - x = x$ es $x_0 = \frac{1}{2}$, entonces f tiene un sólo punto fijo. Por otro lado, $f^2(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. De aquí se sigue que, todos los puntos distintos de $\frac{1}{2}$ son puntos periódicos de periodo 2 bajo f.*

3.5.3 Proposición. *Sean X un espació métrico, $f : X \to X$ función y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\operatorname{Per}(f) = \operatorname{Per}(f^n)$.*

Demostración. Sean $x \in \operatorname{Per}(f)$ y m el periodo de x; es decir, $f^m(x) = x$. Observemos que al aplicar f^m a la igualdad anterior obtenemos lo siguiente.

$$f^m(f^m(x)) = f^{2m}(x) = f^m(x) = x,$$

así, aplicando f^m, $n - 1$ veces, tenemos que $f^{nm}(x) = x$, de donde $x \in \operatorname{Per}(f^n)$.

Sean $x \in \operatorname{Per}(f^n)$ y m el periodo de x; es decir, $f^{nm}(x) = x$. Observemos que $x \in \operatorname{Per}(f)$. $\square$

3.6. Punto aislado

3.6.1 Definición. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que x es un **punto aislado** de X si el conjunto que contiene al punto es un conjunto abierto de X.*

Observemos que lo último nos dice que $\{x\}$ es un conjunto abierto en el espacio X, por lo que todo punto en un espacio con la topología discreta es un punto aislado. A continuación veremos ejemplos de espacios con puntos aislados.

3.6.2 Ejemplo. *Sea el espacio $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, cada uno de los $\frac{1}{n}$ son puntos aislados, pero el 0 no es un punto aislado, ya que hay otros puntos en X tan cercanos a 0 como queramos.*

3.6.3 Ejemplo. *En el espacio $X = \{0\} \cup [1, 2]$, el punto 0 es el único punto aislado de X.*

3.7. Puntos errantes y no errantes

3.7.1 Definición. *Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Llamaremos a x un **punto no errante** si para cualquier abierto U de X que contenga a x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no errantes de f lo denotaremos por $\Omega(f)$. Diremos que un punto es **errante** si no es un punto no errante.*

3.7.2 Proposición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces el conjunto de los puntos no errantes, $\Omega(f)$, es cerrado e invariante bajo f.*

Demostración. Veamos que $X \setminus \Omega(f)$ es abierto. Sea x un punto errante. Entonces existen un abierto U de X, con $x \in U$, y $N \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $n > N$, se tiene $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Tomemos un punto $y \in U$ distinto de x, esto es posible gracias a que $U \neq \{x\}$, ya que si no fuera así, eso significaría que x es un punto aislado y en consecuencia un punto no errante. Como X es un espacio métrico, podemos encontrar un abierto V de X tal que $y \in V \subset U$. Observemos que también se tiene que $f^n(V) \cap V = \emptyset$, por lo que y es un punto errante. De donde, $X \setminus \Omega(f)$ es abierto y, por lo tanto, $\Omega(f)$ es cerrado.

Veamos ahora que $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. Sea $x \in \Omega(f)$ y supongamos que $f(x) \notin \Omega(f)$. Entonces existe un conjunto abierto U tal que $f(x) \in U$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(U) \cap U = \emptyset$. El conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto y contiene al punto x. Como x es no errante, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(U) \cap f^m(f^{-1}(U)) \neq \emptyset$. Pero $f^m(f^{-1}(U)) = f^{m-1}(U)$, por lo que se tiene que:

$$\emptyset \neq f(f^{-1}(U) \cap f^m(f^{-1}(U))) \subset U \cap f^m(U).$$

Una contradicción al hecho que $U \cap f^n(U) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $f(x) \in \Omega(f)$. $\square$

3.8. El omega conjunto límite

Consideremos una función $f : X \to X$, con X un espacio métrico. Dado $x \in X$, nos gustaría saber hacia dónde se **dirige** la órbita de x. Con esta idea en mente, surge la definición del omega conjunto límite; es decir, el omega conjunto límite es el conjunto de puntos al que la órbita de un punto dado se **dirige**. Por ejemplo, si la órbita $o(x, f)$ es una sucesión convergente al punto x_0, entonces el omega conjunto límite de x es $\{x_0\}$.

Si $o(x, f)$ se dirige, en cierto sentido, a una órbita periódica, entonces el omega conjunto límite de x está formado por los puntos que visita dicha órbita periódica. Como la órbita $o(x, f)$ **tiende** al omega conjunto límite, entonces algunas de las características de este conjunto nos darán información sobre el comportamiento de los puntos $f^n(x)$ cuando n es muy grande. Con lo anterior pasemos a definir el omega conjunto límite.

3.8.1 Definición. *Sean X un espacio métrico y $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es **punto límite** de la órbita $o(x_0, f)$ si existe una sucesión de números naturales:*

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}, \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

tal que:

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

*La colección de todos los puntos límite de $o(x_0, f)$ es el **omega conjunto límite** de x_0 bajo f. A este conjunto lo denotaremos como $\omega(x_0, f)$. Así:*

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X \mid y \text{ es un punto límite de } o(x_0, f)\}.$$

Al conjunto de todos los puntos límite de todas las trayectorias de f lo denotaremos como $\Lambda(f)$. Cuando no haya duda de la función con la que se está trabajando simplemente se denotará como Λ. Entonces tenemos que $\Lambda = \bigcup\limits_{x \in X} \omega(x, f)$.

De la definición anterior se sigue de inmediato que si x_0 es un punto fijo bajo f, entonces $\omega(x_0, f) = \{x_0\}$

3.8.2 Ejemplo. *Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda dada por:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & si\ x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & si\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. *Si $x_0 = \frac{2}{5}$, entonces $\omega(x_0, T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$. Esto lo podemos ver ya que $o(x_0, T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$; es decir, x_0 es un punto de periodo dos y, por tanto, dada una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ tendremos dos opciones $T^{n_i}(x_0) = \frac{2}{5}$, si n_i es par, o $T^{n_i}(x_0) = \frac{4}{5}$, si n_i es impar, tomando las subsucesiones de nuestra sucesión original n_i, de números pares e impares n_{i_k} y n_{i_j} respectivamente, tenemos lo siguiente:*

$$\lim_{i_k \to \infty} T^{n_{i_k}}(x_0) = \left\{\tfrac{2}{5}\right\},$$

$$\lim_{i_j \to \infty} T^{n_{i_j}}(x_0) = \left\{\tfrac{4}{5}\right\}.$$

Por tanto, $\omega(x_0, T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Si $x_0 = (\frac{1}{2})^n$, entonces $\omega(x_0, T) = \{0\}$. Observemos primero que:

$$T(1) = 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Ahora si $x \leq \frac{1}{2}$ entonces $T^k(x) = 2^k \cdot x$, como la n es fija entonces tenemos que:

$$T^n(x_0) = 2^n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1,$$

de donde, $T^{n+1}(x_0) = 0$. Por lo que, dada una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$, tendremos que

$$\lim_{i \to \infty} T^{n_i}(x_0) = 0$$

y, por tanto, $\omega(x_0, T) = \{0\}$.

Ahora daremos algunas propiedades del conjunto omega límite.

3.8.3 Proposición. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces para toda $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ fijo y $x_0 \in X$. Tomemos $y_0 \in f(\omega(x_0, f^k))$. Entonces existen $z_0 \in \omega(x_0, f^k)$ tal que $f(z_0) = y_0$ y una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{i\to\infty} f^{kn_i}(x_0) = z_0$, por la continuidad de f, se tiene que:

$$f(\lim_{i\to\infty} f^{kn_i}(x_0)) = \lim_{i\to\infty} f^{kn_i}(f(x_0)) = f(z_0) = y_0.$$

De donde $y_0 \in \omega(f(x_0), f^k)$ y, por lo tanto, $f(\omega(x_0, f^k)) \subset \omega(f(x_0), f^k)$.

Ahora sea $y \in \omega(f(x_0), f^k)$. Entonces existe una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{i\to\infty} f^{kn_i}(f(x_0)) = y_0$. Observemos que de lo anterior tenemos que:

$$f(\lim_{i\to\infty} f^{kn_i}(x_0)) = \lim_{i\to\infty} f^{kn_i}(f(x_0)) = y_0,$$

esto gracias a que X es compacto y f es continua, de donde $y \in f(\omega(x_0, f^k))$. $\square$

3.8.4 Proposición. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces para toda $x \in X$, se tiene que:*

$$\omega(x, f) = \bigcup_{j=0}^{k-1} \omega(f^j(x), f^k).$$

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ fijo y $x_0 \in X$. Tomemos $y_0 \in \bigcup_{j=0}^{k-1} \omega(f^j(x_0), f^k)$. Entonces existe $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{i\to\infty} f^{kn_i+j}(x_0) = y_0$, nombremos $m_i = kn_i + j$ para cada i, de donde tenemos que:

$$\lim_{i\to\infty} f^{km_i}(x_0) = \lim_{i\to\infty} f^{kn_i+j}(x_0) = y_0,$$

lo que implica que $y_0 \in \omega(x_0, f)$ y, por lo tanto, $\bigcup_{j=0}^{k-1} \omega(f^j(x_0), f^k) \subset \omega(x_0, f)$.

Tomemos ahora $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Por definición, existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y_0$. Entonces para alguna j con $0 \leq j < k$, se tiene que $n_i \equiv j \pmod{k}$ para una infinidad de subíndices i, de donde tenemos que:

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = \lim_{i\to\infty} f^{kn_i - j}(f^j(x_0)) = y_0,$$

de donde $y_0 \in \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} \omega(f^j(x_0), f^k)$ y, por lo tanto, $\omega(x_0, f) \subset \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} \omega(f^j(x_0), f^k)$.

$\square$

3.8.5 Proposición. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Entonces $\omega(x, f) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Cl(\{f^k(x) \mid k \geq n\})$.*

Demostración. Sea $y \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Cl(\{f^k(x) \mid k \geq n\})$. Entonces en particular $y \in Cl(\{f^k(x) \mid k \geq 1\})$. De donde, existe una subsucesión $\{f^{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ que converge al punto y. Por lo tanto, $y \in \omega(x, f)$.

Sea $y \in \omega(x, f)$. De donde, existe una subsucesión $\{f^{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ que converge al punto y. Por tanto, $y \in Cl(\{f^k(x) \mid k \geq 1\})$. En consecuencia, $y \in Cl(\{f^k(x) \mid k \geq 1\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $y \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Cl(\{f^k(x) \mid k \geq n\})$. $\square$

Capítulo 4

Transitividad Topológica

La transitividad topológica es una característica global de los sistemas dinámicos. El concepto de transitividad topológica se remonta a George David Birkhoff, quién lo utilizo en los años veinte [7].

Como motivación para el concepto de transitividad topológica de un sistema dinámico discreto (X, f), podemos pensar en un sistema físico real, en el cual los estados no pueden ser dados o medidos de manera exacta, restringido a cierta incertidumbre. Así que, en lugar de puntos, uno debería estudiar "pequeños" subconjuntos abiertos del espacio fase y describir cómo se mueven en el espacio. Por ejemplo, si la minimalidad de (X, f) requiere que todo punto $x \in X$ visite cada conjunto abierto V de X; es decir, $f^n(x) \in V$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces tal vez uno desearía estudiar el siguiente concepto: todo subconjunto no vacío y abierto U de X visita cualquier subconjunto no vacío y abierto V de X en el siguiente sentido: $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Si el sistema (X, f) tiene esta propiedad, entonces lo llamaremos **topológicamente transitivo**. Intuitivamente, una función topológicamente transitiva f, tiene puntos los cuales en algún momento se irán moviendo de una vecindad arbitrariamente "pequeña" en otra, al iterarlos bajo f. Como consecuencia, el sistema dinámico no se puede descomponer en dos subsistemas (subconjuntos disjuntos con interior no vacío) los cuales no interactúan bajo f: es decir, son invariantes bajo nuestra función.

El concepto de "transitividad topológica" no ha sido unificado, algunos autores lo llaman "regionalmente transitiva", "topológicamente ergódica" o "topológicamente indescomponible o irreducible". Por otro lado, algunos autores trabajan la noción de topológicamente transitivo con definiciones que son diferentes o, en general, no equivalentes a la nuestra. Por ejemplo, f es llamada, algunas veces, topológicamente transitiva, si existe un punto $x \in X$ cuya órbita es densa en X. Más adelante veremos que, si X es compacto la definición antes mencionada es equivalente con la nuestra.

4.0.1 Notación. *A lo largo de este trabajo* ***Transitividad*** *significa* ***Transitividad topológica****.*

4.1. Definiciones equivalentes de transitividad topológica

Veremos ahora las dos definiciones más frecuentes y no equivalentes de transitividad topológica.

4.1.1 Definición. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ función continua, consideremos lo siguiente:*

1. *Para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

2. *Existe un punto $x_0 \in X$ tal que, la órbita de x_0 es densa en X.*

4.1.2 Definición. *Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ función continua y x_0 un punto en X tales que, la órbita de x_0 es densa en X. Entonces x_0 es llamado* ***punto transitivo*** *y denotaremos al conjunto de puntos transitivos de (X, f) como $tr(f)$. Los puntos que no sean transitivos los llamaremos* ***puntos intransitivos****, al conjunto de puntos intransitivos de (X, f) lo denotaremos como $intr(f)$.*

Adoptaremos la condición 1 de la Definición 3.1.1 como la definición de transitividad topológica, para abreviar, nos referiremos a ella como la condición (TT). La condición 2 de dicha definición es conocida como la condición de la órbita densa, para abreviar, nos referiremos a ella como la condición (OD). Observemos que algunos autores toman esta ultima condición como la definición de transitividad topológica. En general, las dos condiciones son independientes como veremos en los siguientes ejemplos.

4.1.3 Ejemplo. *Sean $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ dotado con la métrica usual de los Reales y $f : X \to X$ dada por, $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \in$*

$\{1, 2, \ldots\}$. *Claramente, f es continua. El punto $x_0 = 1$ es un punto transitivo para (X, f), para ver esto mostraremos que la cerradura de la órbita de x_0 bajo f es el espacio X. Observemos primero que $o(x_0, f) = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ es una sucesión de puntos que converge a 0 de donde $0 \in Cl_X(o(x_0, f))$ y, por tanto, $Cl_X(o(x_0, f)) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = X$.*

Ahora (X, f) no es topológicamente transitivo, ya que, tomando $U = \{\frac{1}{2}\}$ y $V = \{1\}$, tenemos que $f^n(U) \cap V = \emptyset$. Por tanto (OD) no implica (TT).

Antes de pasar al siguiente ejemplo, mostraremos algunos resultados de la teoría de los sistemas dinámicos que nos serán de mucha ayuda para entender por completo el ejemplo que expondremos. Todos estos resultados se pueden encontrar para mayor detalle en [28] en las páginas 12, 96 y 99.

4.1.4 Notación. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : A \to A$ una función continua y $[a, b] \subset A$ un intervalo. Por $f([a, b])$ nos referimos a la imagen de $[a, b]$ bajo f; esto es:*

$$f([a, b]) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in [a, b]\}.$$

4.1.5 Proposición. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : A \to A$ una función continua y $[a, b] \subset A$ un intervalo.*

1. *Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.*
2. *Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.*

Demostración.

1. Como $f([a, b]) \subset [a, b]$, se tiene que:

$$a \leq f(a) \quad y \quad f(b) \leq b.$$

Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por, $h(x) = f(x) - x$. La función h es continua en el intervalo $[a, b]$, además:

$$h(a) \geq 0 \quad y \quad h(b) \leq 0.$$

Por el Teorema del valor intermedio, existe $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$. En consecuencia, $f(c) = c$.

2. Como $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces existen α y β en el intervalo $[a, b]$ tales que, $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Observemos que $f(\alpha) \leq \alpha$ y $f(\beta) \leq \beta$.

Consideremos ahora, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por, $h(x) = f(x) - x$.

Tenemos que $h(\alpha) \leq 0$ y $h(\beta) \geq 0$, por el Teorema del valor intermedio, existe $c \in [\text{mín}\{\alpha, \beta\}, \text{máx}\{\alpha, \beta\}]$, tal que $h(c) = 0$. En consecuencia, $c \in [a, b]$ y $f(c) = c$.

$\square$

4.1.6 Definición. *Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función continua lineal por partes definida por:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1 - x), & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*A la función T se le conoce como la función **Tienda**.*

4.1.7 Proposición. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cada $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, la n-ésima iteración de la función tienda T^n restringida al intervalo $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$; es decir,*

$$T^n\big|_{\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]} : \left[\tfrac{m}{2^n}, \tfrac{m+1}{2^n}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo.

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. Veamos que la proposición es cierta para $n = 1$. En este caso, $m \in \{0, 1\}$. Si $m = 0$, es inmediato que $T : [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo, ya que en ese intervalo $T(x) = 2x$. Si $m = 1$, entonces $T : [\frac{1}{2}, 1] \to [0, 1]$ es también un homeomorfismo, ya que en ese intervalo $T(x) = 2 - 2x$.

Supongamos que es válido para $n = k$; así, para cada $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$, se tiene que:

$$T^k\big|_{\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]} : [\tfrac{m}{2^k}, \tfrac{m+1}{2^k}] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Sean $n = k + 1$ y $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$.

Observemos que si $m \leq 2^k - 1$, entonces:

$$[\tfrac{m}{2^{k+1}}, \tfrac{m+1}{2^{k+1}}] \subset [0, \tfrac{1}{2}],$$

y la función T^{k+1} se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left[\tfrac{m}{2^{k+1}}, \tfrac{m+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\tfrac{m}{2^k}, \tfrac{m+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos, la segunda de ellas por hipótesis de inducción. Por tanto:

$$T^{k+1}\big|_{\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\tfrac{m}{2^{k+1}}, \tfrac{m+1}{2^{k+1}}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo.

Notemos ahora que si $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$, entonces:

$$\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

y la función T^{k+1} se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1}-m-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-m}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Como $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} -2^k \geq -m &\geq 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - m - 1 &\geq 0, \\ 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - m - 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

y se sigue que la primera función es un homeomorfismo, así como la segunda función por hipótesis de inducción. Por tanto:

$$T^{k+1}\big|_{\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo. □

4.1.8 Proposición. *Sean T la función tienda y (a,b) con $a < b$, tal que $(a,b) \subset [0,1]$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a,b)) = [0,1]$.*

Demostración. Como $a < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Entonces existe un valor $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que

$$\left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right] \subset (a,b).$$

Por la Proposición 4.1.7, se sigue que $T^N((a,b)) = [0,1]$. □

4.1.9 Proposición. *El conjunto de los puntos periódicos de la función tienda,* $\mathrm{Per}(T)$*, es denso en* $[0,1]$.

Demostración. Sea $(a,b) \subset [0,1]$ con $a < b$, procediendo como en la Proposición 4.1.8, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tales que:

$$\left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right] \subset (a,b).$$

Como $T^N\Big(\left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right]\Big) = [0,1]$, podemos aplicar la Proposición 4.1.5 para encontrar un punto fijo de la función T^N en $\left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right]$.

Así, concluimos que existe:

$$x_0 \in \left[\tfrac{m}{2^N}, \tfrac{m+1}{2^N}\right] \subset (a, b)$$

tal que $T^N(x_0) = x_0$. En consecuencia, $\mathrm{Per}(T) \cap (a, b) \neq \emptyset$ y, por tanto, $\mathrm{Per}(T)$ es denso en $[0, 1]$. $\square$

4.1.10 Ejemplo. *Mostraremos ahora que (TT) tampoco implica (OD). Para esto, sean $I = [0, 1]$, la función tienda T, $\mathrm{Per}(T)$ el conjunto de todos los puntos periódicos de T y $f = T|_{\mathrm{Per}(T)}$. Entonces el sistema dinámico producido por la pareja $(\mathrm{Per}(T), f)$ no satisface la condición (OD), ya que $\mathrm{Per}(T)$ es infinito pues tiene órbitas de periodo 3, a saber:*

$$o(\tfrac{2}{9}, T) = \left\{\tfrac{2}{9}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{8}{9}, \tfrac{2}{9}, \dots\right\} \quad y \quad o(\tfrac{2}{7}, T) = \left\{\tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{6}{7}, \tfrac{2}{7}, \dots\right\}.$$

Y por el teorema de Sharkovskii [28], la función tienda tiene órbitas periódicas de todos los periodos; es decir, $\mathrm{Per}(T)$ es infinito y, por la Proposición 4.1.9, $\mathrm{Per}(T)$ es denso en I. Observemos también que la órbita de cualquier punto periódico es un conjutno finito y, por lo tanto, el sistema $(\mathrm{Per}(T), f)$ no satisface (OD). Notemos que, por la Proposición 4.1.8, la condición (TT) se cumple. Observemos que, en este caso, el conjunto de puntos intransitivos para f es el espacio total; es decir, $\mathrm{Per}(T)$.

Con los ejemplos anteriores hemos visto que las definiciones de transitividad topológica y órbita densa no son equivalentes, Sin embargo, bajo la suposición de algunas hipótesis para nuestro espacio fase (o en la función), las dos definiciones son equivalentes. Antes de pasar con el siguiente resultado daremos unas definiciones y dos lemas de topología que utilizaremos para su demostración.

4.1.11 Definición. *Sea X un espacio topológico. Entonces diremos que X es **segundo numerable** si su topología tiene una base numerable.*

4.1.12 Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **separable** si contiene un conjunto denso y numerable.*

4.1.13 Lema. *Sea X es un espacio métrico. Entonces X es separable si y sólo si X es segundo numerable.*

Demostración. Supongamos que X es separable. Entonces existe un subconjunto denso y numerable $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenido en X. Dada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{B}_n = \{V^d_{\frac{1}{k}}(x_n) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Llamemos $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Entonces $\mathcal{B}$ es una familia numerable de subconjuntos abiertos de X. Veremos ahora que es una base para la topología de X.

Sea U un abierto de X. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$. Como U es un abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon^d(x_m) \subset U$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$, de donde $V_{\frac{1}{k}}^d(x_m) \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base.

Supongamos ahora que X es segundo numerable. Sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base numerable para la topología de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in B_n$ y llamemos D al conjunto formado por dichos puntos. Notemos que D es un conjunto numerable, veamos que también es denso en X. Para esto, sea U un abierto distinto del vacío de X. Observemos que al ser $\mathcal{B}$ una base, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \subset U$ y, por lo tanto, $x_n \in U$. En conclusión, $D \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto, D es denso y X es separable. $\square$

4.1.14 Lema. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es segundo numerable.*

Demostración. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \{V_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X\}$. Cada una de las $\mathcal{A}_n$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subfamilia finita $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{A}_n$ que cubre a X.

Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Observemos que $\mathcal{B}$ es numerable al ser la unión numerable de conjuntos finitos. Veamos ahora que es una base para la topología de X.

Sean $x \in X$ y U un abierto de X con $x \in U$. Como X es métrico, existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(x) \subset U$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \epsilon$. Como $\mathcal{B}_N$ cubre a X, existe $y \in X$ con $x \in V_{\frac{1}{N}}(y)$. Si $z \in V_{\frac{1}{N}}(y)$, entonces se tiene que:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N} = \tfrac{2}{N} < \epsilon.$$

En consecuencia, $z \in V_\epsilon(x)$ y, por tanto, $V_{\frac{1}{N}}(y) \subset V_\epsilon(x) \subset U$. De donde, $\mathcal{B}$ es una base. $\square$

4.1.15 Lema. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ función continua. Si f es transitiva entonces para toda pareja de conjuntos abiertos y no vacíos de X digamos U y V, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Como f es transitiva existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(V) \cap U \neq \emptyset$. Observemos que la preimagen de una función continua se "porta" bien con las intersecciones, de donde:

$$f^{-1}(f^m(V) \cap U) = f^{-1}(f^m(V)) \cap f^{-1}(U) = f^{m-1}(V) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Procediendo de la misma forma m veces obtenemos que $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

4.1.16 Lema. *Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ función continua, suprayectiva y transitiva y U un abierto no vacío de X. Entonces:*

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$$

es un conjunto abierto y denso en X.

Demostración. Claramente V es un abierto. Ahora sea W un abierto de X. Notemos que:

$$V \cap W = \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)\Big) \cap W = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-n}(U) \cap W) \neq \emptyset$$

Esto pasa gracias a la propiedad distributiva de las uniones e intersecciones. Como f es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-m}(U) \cap W \neq \emptyset$ y, por tanto, se cumple lo requerido. $\square$

4.1.17 Teorema. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ función continua y suprayectiva. Si X no tiene puntos aislados, entonces la condición (OD) implica (TT). Si X es separable y de la segunda categoría, entonces la condición (TT) implica (OD).*

Demostración. Para la primera parte del teorema, observemos que X es perfecto, ya que no tiene puntos aislados. Ahora, existe $x_0 \in X$ tal que su órbita es densa en X. Sean U y V abiertos de X. Como $o(x_0, f)$ es densa, existen $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x_0) \in U$ y $f^n(x_0) \in V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \leq n$. Observemos que $f^n(x_0) \in f^{n-m}(U) \cap V$ y, por lo tanto, la condición (TT) se cumple.

Para la segunda parte del teorema, por hipótesis, tenemos que X es separable y de la segunda categoría y que la condición (TT) se cumple. Ahora, supongamos que f no tiene órbitas densas. Notemos que, por el Lema 4.1.13,

X es segundo numerable. Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de X. Para cada $x \in X$, existe algún $V_{n_x} \in \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f^k(x) \notin V_{n_x}$ para ninguna $k \geq 0$. Por el Lema 4.1.16:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V_{n_x})$$

es un abierto y denso de X. Sea A_{n_x} el complemento de esa unión. Entonces A_{n_x} es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte que contiene a x. Observemos que la familia $\{A_{n_x} \mid x \in X\}$ es numerable, ya que $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base numerable. Así, $X = \bigcup_{x \in X} A_{n_x}$, lo cual es una contradicción al hecho que X es de la segunda categoría. Por lo tanto, f tiene al menos una órbita densa. □

4.1.18 Teorema. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ función continua y suprayectiva. Entonces las condiciones (TT) y (OD) son equivalenetes.*

Demostración. Supongamos que la condición (OD) se cumple; es decir, existe $x_0 \in X$ tal que su órbita es densa en X. Sean U y V abiertos de X. Como $o(x_0, f)$ es densa, existen $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x_0) \in U$ y $f^n(x_0) \in V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \leq n$. Observemos que $f^n(x_0) \in f^{n-m}(U) \cap V$ y, por lo tanto, la condición (TT) se cumple.

Ahora supongamos que la condición (TT) se cumple. Veamos que cumple (OD).

Como X es un espacio métrico compacto, dada $k \in \mathbb{N}$, existen $x_{1k}, \ldots, x_{n_k k} \in X$ y las correspondientes bolas abiertas de radio $\frac{1}{k}$, centradas en dichos puntos, tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_k} V_{\frac{1}{k}}(x_{jk}).$$

Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ la colección formada por dichas bolas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_n)$. Por el Lema 4.1.16, cada A_n es un abierto y denso de X. Por el Teorema 2.1.42 y 2.1.43, tenemos que:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Sea $x_0 \in A$. Mostraremos que la órbita de x_0 es densa en X. Para esto, sean U un abierto de X, $y_0 \in U$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que $V_{\epsilon_0}(y_0) \subset U$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon_0}{2}$. Observemos que existe un elemento de $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ que tiene al punto y_0. Por tanto, existe $1 \leq j \leq n_k$ tal que:

$$y_0 \in V_{\frac{1}{k}}(x_{jk}) \subset V_{\epsilon_0}(y_0) \subset U.$$

Como $x_0 \in A$, $x_0 \in \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(V_{\frac{1}{k}}(x_{jk}))$. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) \in V_{\frac{1}{k}}(x_{jk}) \subset U$; es decir, la órbita de x_0 tiene un elemento en U y, por tanto, es densa. $\square$

4.1.19 Lema. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ función continua. Si f es transitiva entonces f es suprayectiva.*

Demostración. Supongamos que f no es suprayectiva. Entonces existe $y \in X$ tal que para cualquier otro punto $x \in X$ se tiene que $f(x) \neq y$. Notemos que, como X es compacto, $f(X)$ también es compacto y, por tanto, un subconjunto cerrado. De aquí, $X \setminus f(X)$ es un subconjunto abierto el cual contiene a y. Como X es métrico existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(y) \subset X \setminus f(X)$, de donde, para cualquier punto $z \in V_\epsilon(y)$, su preimagen bajo f es vacía; es decir, $f(x) \neq z$ para ninguna $x \in X$.

Ahora consideremos los siguientes conjuntos abiertos; $X \setminus \{y\}$ y $V_\epsilon(y)$. Entonces tenemos que:

$$f^n(X \setminus \{y\}) \cap V_\epsilon(y) = \emptyset \quad \text{para cada } \ n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, f no es transitiva. $\square$

A partir de este momento tendremos las siguientes convenciones:

La pareja (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua, la llamaremos **sistema dinámico**. Si, además, X no tiene puntos aislados, entonces a (X, f) lo llamaremos **sistema dinámico estándar** o para abreviar **(SDE)**.

El siguiente teorema es un poco largo pero nos dará las herramientas para tener equivalencias entre las definiciones de las condiciones (TT) y (OD).

4.1.20 Teorema. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es transitiva.*

2. *Para cualquier para de abiertos y no vacíos U y V de X, existe un entero no negativo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

3. *Para cualquier abierto no vacío U de X, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.*

4. *Para cualquier abierto no vacío U de X, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X.*

5. *Para cualquier par de abiertos y no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

6. *Para cualquier par de abiertos y no vacíos U y V de X, existe un entero no negativo n tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

7. *Para cualquier abierto no vacío U de X, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un abierto y denso de X.*

8. *Para cualquier abierto no vacío U de X, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un abierto y denso de X.*

9. *Si E es un subconjunto cerrado e invariante de X; es decir, $f(E) \subset E$, entonces $E = X$ o E es un subconjunto denso en ninguna parte de X.*

10. *Si U es un abierto de X y $f^{-1}(U) \subset U$, entonces $U = \emptyset$ o U es denso en X.*

11. *Existe un punto $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*

12. *Existe un subconjunto G_δ denso A de X tal que para cada $x \in A$, se tiene que $\omega(x, f) = X$.*

13. *El conjunto $tr(f)$ es un subconjunto G_δ denso de X.*

14. *La función f es suprayectiva y el conjunto $tr(f)$ es no vacío.*

15. *$\Omega(f) = X$ y el conjunto $tr(f)$ es no vacío.*

16. La condición (OD) se cumple.

Demostración. Tomemos (1) como valido y probemos (2). Sean U y V dos abiertos y distintos del vacío de X. Por (1), existe un entero positivo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia, existe un entero no negativo m con la misma propiedad y, por tanto, (2) es cierto.

Tomemos (1) como cierto y veamos que (3) también lo es. Sean U y V dos abiertos y distintos del vacío de X. Queremos ver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X. Observemos lo siguiente:

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)\Big) \cap V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^n(U) \cap V) \neq \emptyset.$$

Esto pasa gracias a la propiedad distributiva de las uniones e intersecciones. Como f es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y, por tanto, se cumple lo requerido.

Ahora, supongamos que se cumple (3) y demostremos que (1) se cumple. Sean U y V dos abiertos de X. Por hipótesis, sabemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)\Big) \cap V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^n(U) \cap V) \neq \emptyset.$$

Esto significa que existe al menos un entero positivo, m, tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. De donde, f es transitiva.

Supongamos como verdadero (2) y veamos que (4) también lo es. La demostración es similar a (1) implica (3).

Supongamos que se cumple (4) y verifiquemos que (2) también se cumple. La demostración es similar a (3) implica (1).

Dejemos que (5) sea cierto y demostremos (1). Sean U y V dos abiertos y distintos del vacío de X. Por hipótesis, existe un entero positivo n tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Notemos que la imagen de un conjunto distinto del vacío bajo una función continua es distinta del vacío. De donde, $f(f^{-n}(U) \cap V) \neq \emptyset$, aplicando f a lo anterior $n-1$ veces tenemos que $f^n(f^{-n}(U) \cap V) \neq \emptyset$. Ahora, notemos lo siguiente:

$$\emptyset \neq f^n(f^{-n}(U) \cap V) \subset U \cap f^n(V).$$

En consecuencia, $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$ y, por tanto, f es transitiva.

Por el Lema 4.1.15, se tiene que si (1) es verdadero entonces (5) se cumple.

Tomemos (5) como valido y probemos (6). Sean U y V dos abiertos y distintos del vacío de X. Por (5), existe un entero positivo n tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia, existe un entero no negativo m con la misma propiedad y, por tanto, (6) es cierto.

Tomemos (5) como cierto y veamos que (7) también lo es. Sean U y V dos abiertos y distintos del vacío de X. Queremos ver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X. Observemos lo siguiente:

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)\Big) \cap V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-n}(U) \cap V) \neq \emptyset.$$

Esto pasa gracias a la propiedad distributiva de las uniones e intersecciones. Como (5) se cumple, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ y, por tanto, es cierto lo requerido.

Ahora, supongamos que se cumple (7) y demostremos que (5) es válido. Sean U y V dos abiertos de X. Por hipótesis, sabemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)\Big) \cap V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-n}(U) \cap V) \neq \emptyset.$$

Esto significa que existe al menos un entero positivo m, tal que $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$. De donde, (5) es cierto.

Supongamos como verdadero (6) y veamos que (8) también lo es. La demostración es similar a (5) implica (7).

Supongamos que se cumple (8) y verifiquemos que (6) también se cumple. La demostración es similar a (7) implica (5).

Supongamos que (2) no se cumple y veamos que (6) tampoco. Por hipótesis, existen dos abiertos distintos del vacío U y V de X tales que para cada entero no negativo n, se tiene que $f^n(U) \cap V = \emptyset$. Aplicando n veces f^{-1} a la igualdad anterior, obtenemos lo siguiente:

$$f^{-n}(V) \cap U = f^{-n}(V) \cap f^{-n}(f^n(U)) = f^{-n}(f^n(U) \cap V) = \emptyset.$$

De donde, (6) no se cumple.

Tomemos (2) como válido y veamos que (6) también lo es. Sean U y V dos abiertos distintos del vacío de X. Por (2), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Aplicando n veces f^{-1} a la desigualdad anterior, obtenemos lo siguiente:

$$f^{-n}(V) \cap U = f^{-n}(V) \cap f^{-n}(f^n(U)) = f^{-n}(f^n(U) \cap V) \neq \emptyset.$$

De donde, (6) se cumple.

Supongamos que es cierto (6) y probemos (9). Sean E un subconjunto cerrado e invariante de X, $U = Int(E)$ y $V = X \setminus E$. Observemos que, tanto U como V son abiertos de X y que $f^{-n}(U) \cap V = \emptyset$ para cada entero no negativo n. Por lo tanto, si tanto U como V fueran distintos del vacío, entonces habría una contradicción a (6). En consecuencia, se tiene que alguno de los dos tiene que ser vacío y, de donde, podemos concluir que E es denso en ninguna parte si U es vacío o $E = X$ si V es vacío. Por lo tanto, (9) se cumple.

Dejemos que (9) sea cierto y mostremos (10). Sea U un abierto de X tal que $f^{-1}(U) \subset U$. Llamemos $E = X \setminus U$. E es un cerrado de X tal que $f(E) \subset E$. Si $U = \emptyset$, habremos acabado. Por lo que supondremos que U es distinto del vacío, lo que implica que $E \neq X$. Entonces, por (9), E es denso en ninguna parte y, en consecuencia, U es denso en X. Por lo que (10) se cumple.

Tomemos (10) como verdadero y demostremos (6). Sean U y V dos abiertos y distintos del vacío de X. Observemos que, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un abierto de X y que:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)\right) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(f^{-n}(U)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-(n+1)}(U) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U). \end{aligned}$$

Por (10), $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X. De donde, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia, existe algún entero no negativo m tal que $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ y, por tanto, (6) se cumple.

Supongamos que (11) es cierto. Probaremos que (2) también lo es. Para esto, sean $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$, U y V abiertos no vacíos de X.

Entonces $f^m(x) \in U$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y $f^n(x) \in V$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $m \leq n$, de donde $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ y, por tanto, se cumple (2).

Ahora, tomemos (2) como verdadero. Concluyamos que (13) también lo es. Un punto x en X es transitivo si y sólo si sus iteraciones bajo f, visitan todos los conjuntos abiertos de una base numerable $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ de X. Notemos también que, como X es compacto, entonces tenemos:

$$tr(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n).$$

Veamos que lo anterior es cierto. Sea $x \in tr(f)$. Esto implica que $o(x, f)$ es densa en X. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U_n$, con U_n miembro de nuestra base numerable $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$. De lo anterior, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in \displaystyle\bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n)$. De donde, $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n)$.

Ahora sea $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in \displaystyle\bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n)$ y, por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x) \in U_n$. Consecuentemente, $o(x, f)$ es densa en X. Por lo que $x \in tr(f)$. Por las equivalencias demostradas hasta el momento, tenemos que si se cumple (2), entonces (8) también se cumple. Por consiguiente, $\displaystyle\bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n)$ es denso en X. Por los Teoremas 2.1.42 y 2.1.43, $tr(f)$ es un subconjunto G_δ denso de X y (13) se cumple.

Supongamos que (13) se cumple y veamos que (12) también se cumple. Por hipótesis, sabemos que $tr(f)$ es un subconjunto G_δ denso de X. Sea $x \in tr(f)$. Veamos que $\omega(x, f) = X$. Sabemos que $\omega(x, f) \subset X$, por lo que falta ver la otra contención. Para esto, sea $y \in X$, por hipótesis, $Cl(o(x, f)) = X$. Por lo tanto, $y \in Cl(o(x, f))$, por el Lema 2.1.17, para cualquier subconjunto abierto U de X con $y \in U$ se tiene que $U \cap o(x, f) \neq \emptyset$. De donde, y es un punto de acumulación de $o(x, f)$ y, en consecuencia, $y \in \omega(x, f)$.

Tomemos como hipótesis (12) y demostremos (11). Por hipótesis, existe un subconjunto G_δ denso A de X tal que $\omega(x, f) = X$ para cada $x \in A$. Como A es un subconjunto G_δ denso de X, entonces dada $x \in A$ resulta que $\omega(x, f) = X$.

Supongamos que (13) es cierto y probemos que (14) se cumple. Como

$tr(f)$ es un conjunto G_δ denso, tenemos que $tr(f) \neq \emptyset$; es decir, existe $x \in X$ tal que $o(x, f)$ es densa en X; en otras palabras, la condición (DO) se cumple y, por el Teorema 4.1.18, f es transitiva. Por el Lema 4.1.19, f es suprayectiva y, por lo tanto, (14) se cumple.

Tomemos (1) como verdadero y verifiquemos que se cumple (14). Por (1), f es transitiva. Por el Lema 4.1.19, f es suprayectiva y, por el Teorema 4.1.18, existe $x \in X$ tal que $o(x, f)$ es densa en X. De donde, $tr(f) \neq \emptyset$.

Supongamos (14) y veamos que (1) también lo es. Por hipótesis, sabemos que f es suprayectiva y que $tr(f) \neq \emptyset$. Por el Teorema 4.1.18, f es transitiva.

Dejemos que (14) se cumpla y mostremos (15). Por hipótesis sabemos que $tr(f)$ es distinto del vacío, por lo que sólo falta mostrar que $\Omega(f) = X$. Por la Proposición 3.7.2, $\Omega(f)$ es un subconjunto cerrado de X tal que $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. Por las equivalencias demostradas hasta ahora, podemos suponer que (9) se cumple. De donde, concluimos que $\Omega(f) = X$. De esta manera, (15) se cumple.

Supongamos que (15) se cumple y verifiquemos que (16) es cierto. Entonces, por hipótesis, tenemos que $tr(f)$ es distinto del vacío, de donde la condición (OD) se cumple y, por lo tanto, (16) es cierto.

Finalmente, tomemos (16) como verdadero y corroboremos que (1) también lo es. Por el Teorema 4.1.18, como (OD) se cumple, por hipótesis, entonces f es transitiva. En consecuencia, (1) es verdadero. □

4.1.21 Teorema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ función continua y transitiva. Entonces X no tiene puntos aislados si y sólo si X es infinito.*

Demostración. Supongamos que X es infinito y que x_0 es un punto aislado de X. Como f es transitiva, existe $n > 0$ tal que:

$$f^n(\{x_0\}) \cap \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, x_0 es un punto periódico de f y, al ser periódico, su órbita es finita y consiste de puntos aislados de X. Además, $o(x_0, f)$ es un conjunto abierto de X por ser la unión de conjuntos abiertos y es cerrado también, por ser la unión finita de conjuntos cerrados. Ahora, por la parte 9 del Teorema 4.1.20, $o(x_0, f) = X$, lo cual es una contradicción al hecho que X es infinito.

Supongamos que X no tiene puntos aislados. Notemos que como X es métrico, X es un espacio de Hausdorff. Ahora, todo espacio de Hausdorff finito sólo puede tener puntos aislados. Por tanto, como X no tiene puntos aislados entonces X es infinito (Teorema 27.7 del libro de Munkers [29]). □

4.2. Transitividad y conjugación topológica

4.2.1 Definición. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos diremos que son* ***topológicamente conjugados****, si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para todo punto $x \in X$, se tiene que $h \circ f(x) = g \circ h(x)$.*

La condición de conjugación a veces se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Si h en lugar de ser un homemorfismo, es una función continua y suprayectiva, entonces diremos que X y Y son ***semiconjugados****, que Y es un* ***factor*** *de X y h será llamada* ***semiconjugación****.*

4.2.2 Observación. *Si (X, f) y (Y, g) son dos sistemas dinámicos conjugados, entonces las propiedades dinámicas de f son esencialmente iguales a las propiedades dinámicas de g.*

4.2.3 Proposición. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos conjugados. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, se tiene que:*

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)).$$

Demostración. La demostración se hará por inducción. Como f y g son conjugadas la afirmación es cierta para el caso $n = 1$; es decir, $h(f(x)) = g(h(x))$.

Supongamos válido para k, así, se cumple que $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$, para cada $x \in X$.

Veamos que cumple para $k + 1$. Observemos que:

$$h(f^{k+1}(x)) = h(f^k(f(x))) = g^k(h(f(x))) = g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)).$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$ y toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$. □

4.2.4 Proposición. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos conjugados. Entonces las funciones $g : Y \to Y$ y $f : X \to X$ son conjugadas bajo el homeomorfismo $h^{-1} : Y \to X$.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Entonces tenemos:

$$g(y) = g(h(h^{-1}(x))) = h(f(h^{-1}(x))).$$

Aplicando h^{-1} a los extremos de la expresión anterior obtenemos:

$$h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$$

□

4.2.5 Observación. *Si h es un homeomorfismo por las Proposiciones 4.2.3 y 4.2.4 se tiene que:*

$$f^n(x) = h^{-1}(g^n(h(x))) \text{ y } g^n(y) = h(f^n(h^{-1}(y))).$$

4.2.6 Proposición. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos conjugados. Entonces f es transitiva si y sólo si g es transitiva.*

Demostración. Basta con demostrar una implicación la otra es análoga. Sean U y V abiertos de Y. Observemos que, como h es un homeomorfismo, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos de X. Como f es transitiva en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Aplicando h a lo anterior obtenemos que:

$$h(f^n(h^{-1}(U))) \cap h(h^{-1}(V)) \neq \emptyset$$

y, por la Observación 4.2.5, tenemos que $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, g es transitiva en Y. □

4.2.7 Observación. *Si f y g son conjugadas, sabemos que existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que:*

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

Ahora, notemos que como h es continua y suprayectiva, tenemos que:

$$\{g(y)\} = h \circ f(h^{-1}(y))),$$

4.2.8 Proposición. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos semiconjugados. Entonces la transitividad de f implica la transitividad de g.*

Demostración. Por la Observación 4.2.7, la demostración de esta proposición es análoga a la de la Proposición 4.2.6. $\square$

4.2.9 Observación. *Si* (X, f) *y* (Y, g) *son dos sistemas dinámicos y* $h : X \to Y$ *es una función continua e inyectiva tal que:*

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

Entonces se tiene que:

$$f(x) = h^{-1}(g(h(x))),$$

de esto último podemos notar que si h *es continua e inyectiva, entonces ninguna de las implicaciones entre la transitividad de* f *y* g *son ciertas, pero si en lugar de pedir que* h *sea continua, pedimos que sea inyectiva y abierta, entonces la transitividad de* g *implica la transitividad de* f*, como veremos a continuación.*

4.2.10 Proposición. *Sean* (X, f) *y* (Y, g) *dos sistemas dinámicos. Si* h *es una función continua, inyectiva y abierta tal que* $h(f(x)) = g(h(x))$*, entonces la transtividad de* g *implica la transitividad de* f*.*

Demostración. Sean U y V abiertos de X. Como h es abierta, tenemos que $h(U)$ y $h(V)$ son abiertos de Y. Como g es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$g^n(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset.$$

Aplicando h^{-1}, tenemos lo siguiente:

$$h^{-1}(g^n(h(U))) \cap h^{-1}(h(V)) \neq \emptyset,$$

pero, por la Observación 4.2.9, tenemos que:

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, f es transitiva en X. $\square$

4.3. Ejemplos de sistemas dinámicos transitivos

4.3.1 Proposición. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Entonces* $tr(f) = X$ *si y sólo si* X *es cerrado e invariante bajo* f *y ningún conjunto propio de* X *cumple con dichas propiedades.*

Demostración. Supongamos que $tr(f) = X$. Sean K un subconjunto cerrado e invariante bajo f de X y $x \in K$. Al ser invariante tenemos que $f^n(K) \subset K$ para cada $n \geq 0$. Por tanto, $o(x, f) \subset K$. En consecuencia, $Cl(o(x, f)) \subset K$. Como x un punto transitivo, entonces $Cl(o(x, f)) = X$ y, por lo tanto, $K = X$. Consecuentemente, el único conjunto cerrado e invariante bajo f es X.

Supongamos que X es el único conjunto cerrado e invariante bajo f. Sea $x \in X$ y notemos que $Cl(o(x, f))$ es un subconjunto cerrado e invariante bajo f de X. De donde, $Cl(o(x, f)) = X$ y, en consecuencia, $x \in tr(f)$. Como x fue arbitrario, $tr(f) = X$. $\square$

4.3.2 Definición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que X es* ***minimal*** *si para cada $x \in X$, se tiene que x es un punto transitivo; es decir, $tr(f) = X$, o equivalentemente, si X es cerrado e invariante bajo f y ningún conjunto propio de X cumple con dichas propiedades.*

4.3.3 Observación. *Si un sistema dinámico (X, f) es minimal, entonces es transitivo. Esto, gracias a que la minimalidad cumple la condición (OD) y, ya probamos que es equivalente a la condición (TT) en espacios métricos compactos (4.1.20). Sin embargo, la otra implicación no es cierta. Como vimos Ejemplo 4.1.10 cumple (TT) pero no es minimal.*

4.3.4 Ejemplo. *Sean (X, f) cualquier sistema dinámico y $x_0 \in X$ un punto periódico de f. Definamos $g = f|_{o(x_0,f)}$. Entonces el sistema dinámico $(o(x_0, f), g)$ es transitivo. Ya que existen n, $m \in \mathbb{N}$, x y $y \in o(x_0, f)$ tales que $f^n(x_0) = x$, $f^m(x_0) = y$, pues $o(x_0, f)$ es un conjunto finito. Sabemos también que existen dos abiertos U y V de $o(x_0, f)$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m > n$ y notemos que $g^{m-n}(x) \in g^m(U) \cap V$, de donde g es transitiva. De donde satisface (TT) y (OD). Por lo tanto, las 16 condiciones del Teorema 4.1.20 también se cumplen. Observemos que $(o(x_0, f), g)$ también es minimal.*

La siguiente proposición nos será de ayuda para demostrar una parte del siguiente Ejemplo 4.3.6.

4.3.5 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces:*

$$Cl(X \setminus A) = X \setminus Int(A).$$

Demostración. Sea $x \in Cl(X \setminus A)$. Por el Lema 2.1.17, para cualquier conjunto abierto U de X se tiene que, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Por tanto, $x \notin Int(A)$, de donde, $x \in X \setminus Int(A)$.

Sea $x \in X \setminus Int(A)$. Entonces $x \notin Int(A)$, por lo que para cualquier conjunto abierto U de X, con $x \in U$, se tiene que $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ y, por el Lema 2.1.17, $x \in Cl(X \setminus A)$. □

4.3.6 Ejemplo. *Sean $\mathbf{S}^1$ el círculo unitario y $R_\alpha : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una rotación irracional; es decir, sea α un número irracional, entonces R_α está dada por:*

$$R_\alpha(x) = x + 2\pi\alpha,$$

si tomamos la notación aditiva de $\mathbf{S}^1$, o

$$R_\alpha(x) = e^{2\pi i\alpha}x,$$

si usamos la notación multiplicativa. Utilicemos la notación aditiva y veamos que el sistema $(\mathbf{S}^1, f)$ es transitivo.

Notemos primero que R_α no tiene puntos periódicos. Ya que si no fuera así, tendríamos que $R_\alpha^n(x) = x$, para alguna $x \in \mathbf{S}^1$. Entonces tendríamos que $x + n\alpha \equiv x \pmod{2\pi}$, o $n\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Por lo que $\alpha = \frac{m}{n}$, para alguna $m \in \mathbb{N}$. Contradiciendo el hecho que α es irracional. De donde, R_α no tiene puntos periódicos. Por lo que $R_\alpha^i(x) \neq R_a^jlpha(x)$, si $j \neq k$ y para cada $x \in \mathbf{S}^1$

Ahora tomemos $x \in \mathbf{S}^1$ y $\epsilon > 0$. Por lo visto en el párrafo anterior y como $\mathbf{S}^1$ es compacto, $o(x, f)$ tiene un punto de acumulación. De donde, existen $0 \leq m < n \leq \frac{1}{\epsilon}$ tales que $d(R_\alpha^n(x), R_\alpha^m(x)) < \epsilon$. Sea $k = n - m$, como R_α es una isometría (Definición 8.2.23) tenemos que:

$$d(R_\alpha^k(x), x) = d(R_\alpha^m(R_\alpha^k(x)), R_\alpha^m(x)) = d(R_\alpha^n(x), R_\alpha^m(x)) < \epsilon.$$

Por lo que R_α^k es una rotación por un angulo menor que ϵ. Entonces para cada $y \in \mathbf{S}^1$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $d(y, R_\alpha^{rk}(x)) < \epsilon$. Consecuentemente, $o(x, R_\alpha)$ es densa en $\mathbf{S}^1$.

Veamos ahora que el sistema es minimal. Sean $x \in \mathbf{S}^1$, $o(x, R_\alpha)$ y $A = Cl(o(x, R_\alpha))$. Supongamos que $o(x, R_\alpha)$ no es densa. Entonces $\mathbf{S}^1 \setminus A$ es un abierto distinto del vacío tal que $R_\alpha^{-1}(\mathbf{S}^1 \setminus A) \subset \mathbf{S}^1 \setminus A$. Por (10) del Teorema 4.1.20, $\mathbf{S}^1 \setminus A = \emptyset$ o $\mathbf{S}^1 \setminus A$ es denso en $\mathbf{S}^1$. Si pasa lo primero ya acabamos. Supongamos entonces que $\mathbf{S}^1 \setminus A$ es denso. Como $\mathbf{S}^1 \setminus A$ es denso, tenemos que $\mathbf{S}^1 = Cl(\mathbf{S}^1 \setminus A)$. Aplicando la Proposición 4.3.5 a $Cl(\mathbf{S}^1 \setminus A)$, obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{S}^1 = Cl(\mathbf{S}^1 \setminus A) = \mathbf{S}^1 \setminus Int(A).$$

Como $A \subset \mathbf{S}^1$, por lo anterior, $A \subset \mathbf{S}^1 \backslash Int(A)$, pero $Int(A) \subset A$. De donde, $Int(A) \subset \mathbf{S}^1 \backslash Int(A)$, lo cual es una contradicción y, por lo tanto, $\mathbf{S}^1 \backslash A = \emptyset$. De esta forma $o(x, R_\alpha)$ es densa y, en consecuencia, el sistema es minimal.

4.3.7 Ejemplo. *Sea $([0,1], T)$, donde $T : [0,1] \to [0,1]$ es la función tienda definida en el Ejemplo 3.8.2. Notemos que, por las Proposiciones 4.1.7 y 4.1.8, tenemos que si J es un subintervalo cerrado de $[0,1]$ que no contiene al $\frac{1}{2}$, entonces $T(J)$ es el doble de largo que J. Por lo tanto, $T^k(J)$ contiene al $\frac{1}{2}$, para alguna k. Así $T^{k+2}(J)$ es un intervalo cerrado que contiene al 0. Repitiendo el argumento, obtenemos que $T^n(J) = [0,1]$ para alguna n. Esta propiedad implica la transitividad. Sin embargo por la Proposición 3.1.9, $([0,1], T)$ no es minimal. En este caso, el conjunto de los puntos intransitivos es igual al conjunto de los puntos periódicos de la función T y, por la Proposición 4.1.9, es denso en $[0,1]$.*

4.3.8 Ejemplo. *Sea $g : [0,1] \to [0,1]$, definida como $g(x) = 4x(1-x)$. Entonces g es transitiva. Esto se sigue del hecho que g es topológicamente conjugada a la función tienda T, siendo $h(x) = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$ el homeomorfismo ([21] página 276). Veamos que efectivamente se cumple que:*

$$h \circ T(x) = g \circ h(x).$$

Si $x \leq \frac{1}{2}$ tenemos que:

$$h \circ T(x) = \operatorname{sen}^2(\tfrac{\pi 2x}{2}) = \operatorname{sen}^2(\pi x).$$

Si $x > \frac{1}{2}$ entonces:

$$h \circ T(x) = \operatorname{sen}^2(\tfrac{\pi(2-2x)}{2}) = \operatorname{sen}^2(\tfrac{2\pi(1-x)}{2}) = \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x) = \operatorname{sen}^2(\pi x),$$

por ser $\operatorname{sen}^2(x)$ una función par. Notemos ahora que:

$$\begin{aligned} g \circ h(x) &= (4\operatorname{sen}^2(\tfrac{\pi x}{2}))(1 - sen^2(\tfrac{\pi x}{2})) = (4\operatorname{sen}^2(\tfrac{\pi x}{2}))(\cos^2(\tfrac{\pi x}{2})) \\ &= \operatorname{sen}^2(\tfrac{\pi 2x}{2}) = \operatorname{sen}^2(\pi x), \end{aligned}$$

esto gracias a las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad y \quad \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

En cualquiera caso, se tiene que $h \circ T(x) = g \circ h(x)$ y, por tanto, g es conjugada a T.

4.3.9 Ejemplo. *Sea $\Sigma = \{s = (s_0, s_1, \ldots) \mid$ para cada $n \geq 0, s_n \in \{0,1\}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos. Definamos la distancia entre cualesquiera dos puntos de sigma de la siguiente manera: Sean $s = (s_0, s_1, \ldots)$ y $t = (t_0, t_1, \ldots)$ en Σ. Entonces la distancia entre s y t se define como:*

$$\rho(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Sea $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ la función corrimiento, dada por:

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots) = (s_1, s_2, s_3, \ldots).$$

Veamos que (Σ, σ) es transitivo. Sean $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ y $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ dos puntos de Σ y $\epsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Consideremos el punto $u = (t_0, t_1, \ldots, t_N, s_0, s_1, \ldots, s_N, 0, 0, \ldots)$.

Por como hemos definido el punto u, las siguientes desigualdades son inmediatas:

$$\rho(u,t) < \epsilon \quad \rho(\sigma^{N+1}(u), s) < \epsilon.$$

Tomando $U = V_\epsilon(s)$ y $V = V_\epsilon(t)$, se tiene que $\sigma^{N+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. De donde σ es transitiva en Σ.

Observemos que, como σ es transitiva, existe $t^* \in \Sigma$ tal que $o(t^*, \sigma)$ es densa en Σ. Para mostrar la existencia de dicho punto, observemos primero que dos puntos están cercanos si sus primeras coordenadas coinciden (y estarán más cercanos si el número de coordenadas en las que coinciden aumenta). Así, la idea es proponer dicho punto t^*, que al ir avanzando sobre su órbita, vaya pasando de manera ***cercana*** *a todos los puntos de Σ; es decir, la imagen de t^* bajo σ después de varias iteraciones tenga la propiedad de coincidir en las primeras coordenadas con todos los puntos.*

Esto es posible ya que, por cada $n \in \mathbb{N}$, hay 2^n bloques distintos de ceros y unos cuya longitud es n.

Entonces la construcción del punto t^* se hará al poner como coordenadas todos los bloques de ceros y unos de tamaño 1, luego de tamaño 2 y así sucesivamente. Por lo que el punto tiene la siguiente forma,

$$t^* = (0100011011000001\ldots).$$

(Σ, σ) no es minimal. Observemos que, dado un punto $s = (s_0, s_1, \ldots) \in \Sigma$, el punto $t_n = (s_0, \ldots, s_n, s_0, \ldots, s_n, \ldots)$ es un punto de periodo $n+1$. Notemos también que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a s. De hecho el conjunto de puntos periódicos de σ es denso en Σ.

Sean $s = (s_0, s_1, \ldots) \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Consideremos $t_N = (s_0, \ldots, s_N, s_0, \ldots, s_N, \ldots)$. Es inmediato que:

$$\sigma^{N+1}(t_N) = t_N, \text{ de donde } t_N \in \mathrm{Per}(\sigma).$$

Se tiene también que $\rho(s, t_N) < \epsilon$. De donde el conjunto de los puntos periódicos de la función corrimiento es denso en Σ.

4.3.10 Ejemplo. *Sean Σ el conjunto de todas las sucesiones de cero y unos definido en el Ejemplo 4.3.9 con su métrica ρ, $s = (s_0, s_1, \ldots)$ y $t = (t_0, t_1, \ldots)$ en Σ. Definimos la suma entre cualesquiera dos puntos de Σ como:*

$$s + t = (c_0, c_1, \ldots)$$

donde $c_i = s_i + t_i$ si $s_i + t_i < 2$ o $c_i = s_i + t_i - 2$ si $s_i + t_i \geq 2$ y llevamos un 1 a la suma de la siguiente entrada. Además, la suma tiene que empezar desde la primera entrada. Ahora consideremos $f : \Sigma \to \Sigma$ dada por:

$$f(s_0, s_1, \ldots) = \bar{1} + (s_0, s_1, \ldots),$$

donde $\bar{1} = (1, 0, 0, \ldots)$. Entonces f es transitiva en Σ, siendo $\bar{0} = (0, 0, \ldots)$ un punto transitivo.

Observemos que la la suma $s + \bar{1}$ es asociativa, en el sentido de que:

$$(s + \bar{1}) + \bar{1} = s + (\bar{1} + \bar{1}),$$

para cada s en Σ. Esto último nos permite , en particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, definir $n \cdot \bar{1}$ de modo natural como la suma de $\bar{1}$ consigo mismo n veces. Así, se tiene que:

$$2 \cdot \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} \;\; y \;\; 3 \cdot \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = 2 \cdot \bar{1} + \bar{1}.$$

Y en general:

$$(n+1)\cdot\bar{1} = \bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1} = n\cdot\bar{1}+\bar{1}.$$

Además, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f^n(s) = s + n\cdot\bar{1}$. Así, la órbita de un punto s en Σ consiste de todos los puntos en Σ que obtenemos al ir sumando los múltiplos de $\bar{1}$ a s. En particular, la órbita $\bar{0}$ es el conjunto de todos los múltiplos de $\bar{1}$. Notemos que los puntos de la órbita de $\bar{0}$ son simplemente los bloques de ceros y unos de tamaño 1, de tamaño 2, etc. Vistos como en la construcción del punto t^* del Ejemplo 4.3.9. De donde, su órbita es densa en Σ. Veamos esto último con unos ejemplos:

$$f(\bar{0}) = (1,0,0,\ldots)$$

$$f^2(\bar{0}) = f(1,0,0,\ldots) = (0,1,0,\ldots)$$

$$f^3(\bar{0}) = f(0,1,0,\ldots) = (1,1,0,\ldots)$$

$$f^4(\bar{0}) = f(1,1,0,\ldots) = (0,0,1,0,\ldots)$$

$$f^5(\bar{0}) = f(0,0,1,0,\ldots) = (1,0,1,0,\ldots)$$

$$f^6(\bar{0}) = f(1,0,1,0,\ldots) = (0,1,1,0,\ldots)$$

$$f^7(\bar{0}) = f(0,1,1,0,\ldots) = (1,1,1,0,\ldots).$$

Capítulo 5

Puntos transitivos e intransitivos

En este capítulo, se hablará sobre los puntos del espacio fase de nuestro sistema dinámico. Sobre los puntos que tienen órbitas densas y los que no; es decir, los puntos transitivos e intransitivos. Veremos cómo son estos conjuntos, cuando nuestro espacio fase a consideración es infinito, finito o, nuestro sistema dinámico es estándar. Finalmente, se hablará del concepto de topológicamente débil mezclador y su relación con el conjunto de los puntos transitivos.

5.1. Resultados básicos

En esta primera sección, presentaremos algunos resultados básicos. Como las propiedades que tienen los conjuntos de los puntos transitivos e intransitivos de un sistema dinámico. Como primer resultado tenemos la siguiente proposición.

5.1.1 Proposición. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si $f(x) \in tr(f)$ entonces $x \in tr(f)$.*

Demostración. Observemos primero que como $o(f(x), f) \subset o(x, f)$, entonces $Cl(o(f(x), f)) \subset Cl(o(x, f))$. Como $f(x) \in tr(f)$, se tiene que $Cl(o(f(x), f))$ $= X$. De donde, $X \subset Cl(o(x, f))$ y, por lo tanto, $Cl(o(x, f)) = X$. □

5.1.2 Observación. *Notemos que por la Proposición 5.1.1 tenemos que el siguiente resultado también es cierto:*

Si $x \in intr(f)$ entonces $f(x) \in intr(f)$.

Ahora, si (X, f) es un sistema dinámico estándar (SDE), entonces en lugar de tener implicaciones tenemos equivalencias; es decir, se tiene la siguiente proposición:

5.1.3 Proposición. *Sean (X, f) un sistema dinámico estándar y $x \in X$. Entonces $x \in tr(f)$ si y sólo si $f(x) \in tr(f)$.*

Demostración. Supongamos que $x \in tr(f)$. Sea U un subconjunto abierto y distinto del vacío de X. Entonces $o(x, f) \cap U \neq \emptyset$. Por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Así, $o(f(x), f) \cap U \neq \emptyset$ y, por tanto, $f(x) \in tr(f)$.

La otra implicación está dada por la Proposición 5.1.1. □

5.1.4 Observación. *Una vez más, por la Proposición 5.1.3, tenemos lo siguiente:*

Si (X, f) es un sistema dinámico estándar y $f(x) \in intr(f)$ entonces $x \in intr(f)$.

Por las equivalencias del Teorema 4.1.20, tenemos lo siguiente:

5.1.5 Corolario. *Si nuestro sistema (X, f) es transitivo, entonces tenemos que el conjunto de los puntos transitivos $tr(f)$ es un conjunto G_δ denso.*

Demostración. Observemos que un punto es transitivo si y sólo si sus iteraciones bajo f visitan todos los conjuntos abiertos de una base numerable $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ de X. Notemos también que como X es compacto, ((2) implica (13) del Teorema 4.1.20) entonces tenemos:

$$tr(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n).$$

Pero, por el Teorema 4.1.20 resulta que $\bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(U_n)$ es un conjunto abierto y denso de X y, con esto, obtenemos lo deseado. □

Una consecuencia inmediata del Corolario 5.1.5 es, si (X, f) es un sistema transitivo y si $x_0 \in X$ es un punto aislado, entonces x_0 es un punto transitivo. De hecho el punto x_0 es periódico. Esto es ya que, como $\{x_0\}$ es un abierto de X y por ser f transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\{x_0\}) \cap \{x_0\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^n(x_0) = x_0$. Más aún $o(x_0, f) = X$. De esta manera, el Teorema 4.1.20 toma cierto valor cuando nuestro sistema dinámico es estándar.

5.2. Sistemas dinámicos finitos e infinitos

Es importante distinguir los dos casos, si el espacio fase X de nuestro sistema dinámico es finito o no. Algunas ocasiones es de gran utilidad también distinguir si X tiene puntos aislados o no, o equivalentemente, por el Teorema 4.1.21, cuando la función f es transitiva.

Primero consideremos un sistema dinámico (X, f) cuyo espacio fase X es finito. Si el sistema consiste de un sólo punto periódico, entonces el punto es transitivo y cualquier otro punto también es transitivo; es decir, el sistema es minimal.

Ahora, supongamos que X es infinito. El sistema puede no tener puntos transitivos. Pero el Ejemplo 4.1.3 que se utilizó para demostrar que (OD) no implica (TT), muestra que el sistema puede tener un único punto transitivo. Notemos que si el sistema tiene dos puntos transitivos, a y b, entonces es transitivo (y, por el Teorema 4.1.20, también el conjunto de los puntos transitivos es un conjunto G_δ denso). De donde, tenemos el siguiente resultado:

5.2.1 Teorema. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el sistema tiene dos puntos transitivos, a y b, entonces es transitivo.*

Demostración. Como vimos en el Teorema 4.1.17 si nuestro sistema dinámico es estándar basta con que el sistema tenga un punto transitivo para asegurar la transitividad de (X, f), por lo que consideraremos que X tiene un punto aislado x_0. Si tanto a como b son puntos aislados, entonces ambos $\{a\}$ y $\{b\}$ son abiertos y, como son puntos transitivos, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(a) = b$, también existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(b) = a$. De donde, tanto a como b pertenecen a la misma órbita, donde dicha órbita sólo es X. Por lo que nuestro sistema es transitivo. Entonces supongamos que a no es un punto aislado. Como a es un punto transitivo y f es una función continua, para alguna $n \in \mathbb{N}$ y algún abierto U que contenga al punto a, tenemos que $f^n(U) = \{x_0\}$. Como a es transitivo y U es un conjunto infinito existe $k > 0$ tal que $f^{n+k}(a) \in U$. Entonces $o(a, f)$ es finita, de donde $X = o(a, f)$, si a es periódico el sistema es transitivo, si no lo es, el punto b al ser diferente de a y perteneciendo a $o(a, f)$ no puede ser un punto transitivo, lo cual es una contradicción. En cualquier caso, el sistema es transitivo. □

5.3. Sistemas dinámicos estándares

Finalmente, supongamos que (X, f) no es un sistema dinámico arbitrario e infinito, pero sí uno estándar. Entonces los puntos transitivos se comportan como deseamos. Llamemos x a un punto transitivo en un sistema dinámico estándar, en este caso, $f^n(x)$ es un punto transitivo para cada $n \in \mathbb{N}$. Todos los puntos de la trayectoria de x son mutuamente diferentes, además, la trayectoria de x visita cualquier abierto de X infinitas veces. Recordemos también que si en un sistema dinámico estándar, existe un punto transitivo, entonces el sistema es transitivo, Teorema 4.1.17, de donde el conjunto de los puntos transitivos $tr(f)$ es un conjunto G_δ denso, equivalencia (13) del Teorema 4.1.20. Por lo que en un sistema dinámico estándar (X, f) tenemos las siguientes posibilidades:

1. $tr(f) = \emptyset$ e $intr(f) = X$, como en el Ejemplo 4.1.10,
2. $tr(f)$ es un conjunto G_δ denso y alguno de los dos siguientes casos:
    a) $intr(f) = \emptyset$; es decir, el sistema es minimal, como en el Ejemplo 4.3.6,
    b) $intr(f)$ es un conjunto denso, como en el Ejemplo 4.3.7.

El siguiente teorema demuestra que ninguna otra posibilidad existe. Pero antes daremos una proposición que nos será de ayuda en la demostración del teorema.

5.3.1 Proposición. *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia decreciente de subespacios compactos de un espacio de Hausdorff X. Si U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset U$ para cada $n \geq N$.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n = A_n \setminus U$. Entonces cada C_n es un cerrado y no vacío de A_1. Notemos que $C_{n+1} \subset C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De donde $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Como A_1 es compacto, por el Teorema 2.1.43, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, esto implica que,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus U) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \setminus U \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción y, por tanto, el resultado es cierto. $\square$

5.3.2 Teorema. *Sea (X, f) un sistema dinámico estándar. Entonces el conjunto $intr(f)$ sólo puede ser un conjunto vacío o ser un conjunto denso en X. Equivalentemente, si $tr(f)$ tiene interior no vacío entonces el sistema es minimal.*

Demostración. Supongamos que $Int(tr(f)) \neq \emptyset$. Esto automáticamente nos da la transitividad de nuestro sistema ya que es un sistema estándar, Teorema 4.1.17. Ahora, afirmamos que cualquier elemento de la preimagen de un punto transitivo y es un punto transitivo. Veamos que esto es cierto.

Sean $y \in tr(f)$ y $x \in f^{-1}(y)$. Sabemos que $f(x) = y$. Por demostrar que $Cl(o(x, f)) = X$. Observemos lo siguiente:

$$Cl(o(x, f)) = Cl(\{x\} \cup o(y, f)) = \{x\} \cup Cl(o(y, f)).$$

Como $Cl(o(y, f)) = X$, $x \in Cl(o(y, f))$ y, por lo tanto:

$$Cl(o(x, f)) = X,$$

de donde nuestra afirmación es verdadera.

Como la preimagen de puntos transitivos vuelve a ser un punto transitivo y, como la órbita de cualquier punto transitivo intersecta el conjunto $Int(tr(f))$, tenemos lo siguiente:

$$tr(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(Int(tr(f))).$$

Podemos notar que $tr(f)$ es un conjunto abierto y, al ser nuestro sistema transitivo, también denso. Entonces el conjunto $intr(f)$, al ser complemento del conjunto de los puntos transitivos, $tr(f)$, es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte. Más aún, por las Proposiciones 5.1.1 y 5.1.3, tenemos que los conjuntos $tr(f)$ y $intr(f)$ son totalmente invariantes; es decir, $f(tr(f)) = tr(f)$ y $f(intr(f)) = intr(f)$ (observemos que, por el Lema 4.1.19, f es suprayectiva).

Queremos ver que $intr(f) = \emptyset$. Supongamos que, al contrario, este no es el caso y tomemos una vecindad cerrada $U \neq X$ del conjunto $intr(f)$. Entonces $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = intr(f)$, ya que la órbita de cualquier punto en $U \setminus intr(f)$ intersecta el abierto $X \setminus U$.

Al ser f una función continua que sale de un espacio compacto y llega a un espacio de Haausdorff, f es una función cerrada. De donde, el conjunto $f(X \setminus Int(U))$ es compacto y disjunto al conjunto $intr(f)$. Por lo que podemos encontrar, en U, una vecindad cerrada V del conjunto $intr(f)$ con $f^{-1}(V) \subset U$. Esto último es cierto ya que, tomando $V \subset f^{-1}(U) \cap U$:

$f^{-1}(V) \subset f^{-2}(U) \cap f^{-1}(U) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = intr(f) \subset Int(U) \subset U$ y, por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$intr(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = intr(f)$.

Denotemos como $V_n = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-k}(V)$. Entonces $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados con $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = intr(f) \subset Int(V)$. Por la Proposición 5.3.1, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$V_m = f^{-1}(V) \cap f^{-2}(V) \cap \cdots \cap f^{-m}(V) \subset Int(V).$$

Ahora, definamos:

$$W = V \cap V_{m-1} = V \cap f^{-1}(V) \cap \cdots \cap f^{-(m-1)}(V).$$

Entonces $W \subset V$ y:

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(V) \cap f^{-2}(V) \cap \cdots \cap f^{-m}(V) = V_m = V \cap V_m \subset V \cap V_{m-1} = W.$$

Además, observemos que W es una vecindad cerrada de $intr(f)$. Como $W \subset V$, $X \setminus V \subset X \setminus W$ y, como $X \setminus V$ es abierto, tenemos que $Int(W) \neq \emptyset$. Como $\emptyset \neq intr(f) \subset Int(V) \cap Int(V_{m-1}) = Int(W)$, tenemos que $Int(W) \neq \emptyset$. Finalmente, la existencia de un conjunto W tal que $Int(X \setminus W) \neq \emptyset$ y $Int(W) \neq \emptyset$ contradice la transitividad de f, ya que la órbita de cualquier punto $x \in tr(f) \cap (X \setminus W)$ no pasa por el conjunto W. Por tanto, $intr(f) = \emptyset$. $\square$

5.4. Independencia de los puntos transitivos. Topológicamente débil mezclador

En esta última sección, veremos la relación que hay entre el conjunto de los puntos transitivos y el concepto de débil mezclador en espacios sin puntos aislados.

5.4.1 Definición. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico estándar y* $x, y \in tr(f)$. *Diremos que* x *y* y *son* ***independientes*** *si* (x, y) *es transitivo en el producto; es decir, en el sistema* $(X, f)^2 = (X \times X, f \times f)$, *donde* $f \times f$ *está definida por* $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$.

5.4.2 Definición. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico estándar. Diremos que* (X, f) *es* ***topológicamente débil mezclador*** *si en el sistema existen dos puntos transitivos independientes.*

5.4.3 Observación. *Mencionemos que si un sistema dinámico estándar* (X, f) *es topológicamente débil mezclador entonces es transitivo, ya que, como contiene al menos dos puntos transitivos independientes* x *y* y. *Por tanto, cumple la condición (OD) y, por el Teorema 4.1.18, también será transitivo. Más aún, como* (X, f) *es débilmente mezclador, por definición, el punto* (x, y) *es transitivo para el sistema producto* $(X, f)^2$ *y, como consecuencia inmediata del Teorema 4.1.18, el sistema producto* $(X, f)^2$ *también es transitivo.*

5.4.4 Definición. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico estándar y* $E \subset tr(f)$. *Diremos que* E *es un conjunto* ***independiente*** *para el sistema si para cualquier colección finita de puntos distintos* $x_1 \ldots x_n$ *en* E, *el punto* $(x_1, \ldots, x_n)$ *es transitivo en el sistema producto* $(X, f)^n$ *(cada* x_i *es transitivo en* (X, f)*).*

5.4.5 Definición. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico estándar y* $E \subset tr(f)$. *Diremos que* E *es* ***totalmente independiente*** *para* (X, f) *si para cualquier entero positivo* r, *el conjunto* E *es independiente para el sistema* (X, f^r) *(no confundir con el sistema producto* $(X, f)^r$*).*

5.4.6 Teorema. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico estándar y débilmente mezclador. Entonces para cualquier entero positivo* n, *se tiene que el sistema producto* $(X, f)^n$ *es transitivo.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de X y

$$\mathrm{N}(U, V) = \{n \in \mathbb{Z} \mid f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Por la Observación 5.4.3, X es transitivo y, por lo tanto, $\mathrm{N}(U, V) \neq \emptyset$. Veremos ahora que si U, V, W y C son abiertos de X entonces existen abiertos E y F tales que $\mathrm{N}(E, F) \subset \mathrm{N}(U, V) \cap \mathrm{N}(W, C)$. Esto último es consecuencia de ser débilmente mezclador pues, por la Observación 5.4.3, sabemos que $(X, f)^2$

es transitivo, de donde, existe un entero positivo k tal que $f^k(U \times V) \cap W \times C \neq \emptyset$. Esto es equivalente a decir que $f^{-k}(W \times C) \cap U \times V \neq \emptyset$, o $f^{-k}(W) \cap U \neq \emptyset$ y $f^{-k}(C) \cap V \neq \emptyset$. Nombremos $E = f^{-k}(W) \cap U$ y $F = f^{-k}(C) \cap V$. Tanto E como F son abiertos no vacíos de X. Si $n \in \mathrm{N}(E, F)$, entonces tenemos lo siguiente:

$$f^n(F) \cap E = f^n(f^{-k}(C) \cap V) \cap f^{-k}(W) \cap U \neq \emptyset,$$

de donde, tenemos que $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$ y $f^n(f^{-k}(C)) \cap f^{-k}(W) \neq \emptyset$. Lo que implica que $f^n(C) \cap W \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $\mathrm{N}(E, F) \subset \mathrm{N}(U, V) \cap \mathrm{N}(W, C)$.

Como consecuencia del párrafo anterior, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{N}(U_i, V_i) \neq \emptyset$, para cualquier colección finita de abiertos $U_1, \ldots, U_n$, $V_1, \ldots, V_n$. Por último, veamos que $\mathrm{N}(U_1 \times \cdots \times U_n, V_1 \times \cdots \times V_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{N}(U_i, V_i)$, lo que implicaría que el sistema producto $(X, f)^n$ es transitivo.

Para esto, sea $k \in \mathrm{N}(U_1 \times \cdots \times U_n, V_1 \times \cdots \times V_n)$. Esto significa que:

$$f^k(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap V_1 \times \cdots \times V_n \neq \emptyset.$$

Lo que es equivalente a decir que:

$$f^{-k}(V_1 \times \cdots \times V_n) \cap U_1 \times \cdots \times U_n \neq \emptyset,$$

o $f^{-k}(V_1) \cap U_1 \neq \emptyset$, $f^{-k}(V_2) \cap U_2 \neq \emptyset, \ldots, f^{-k}(V_n) \cap U_n \neq \emptyset$. En consecuencia, $k \in \mathrm{N}(U_i, V_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y, por tanto, $k \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{N}(U_i, V_i)$.

Ahora, sea $k \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{N}(U_i, V_i)$. Entonces $k \in \mathrm{N}(U_i, V_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. De donde, $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto significa que:

$$f^k(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap V_1 \times \cdots \times V_n \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $k \in \mathrm{N}(U_1 \times \cdots \times U_n, V_1 \times \cdots V_n)$. $\square$

Capítulo 6

Descomposiciones periódicas regulares para funciones transitivas

6.1. Transitividad de una función y sus iteraciones

El propósito de este capitulo es estudiar la trasitividad de las iteraciones de una función transitiva. Como a continuación veremos, si la iteración de una función es transitiva entonces la función es transitiva. Sin embargo, el regreso de esa afirmación no siempre es verdadero. A pesar de ello, buscaremos las herramientas necesarias para garantizar que el regreso también se cumpla.

6.1.1 Proposición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $n \in \mathbb{N}$ y f^n es transitiva entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos de X. Por hipótesis sabemos que f^n es transitiva de donde existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{nm}(U) \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia f es transitiva. $\square$

El problema es que el inverso de la Proposición 6.1.1 no siempre es verdadero. Como contra ejemplo, tomemos la función continua lineal por partes definida de la siguiente forma $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{4}) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ y $f(1) = 0$. En la siguiente figura podemos ver la gráfica de f:

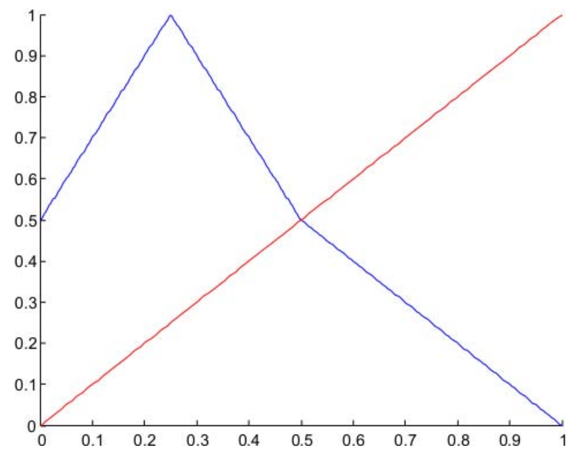

Figura 6.1: Gráfica de la función f

Entonces f es transitiva, ya que $\{\frac{1}{2}\}$ es un subconjunto cerrado e invariante de $[0, 1]$ el cual es denso en ninguna parte y, por el Teorema 4.1.20, f transitiva, pero f^2 no lo es. Siendo los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ invariantes para la función f^2, como podemos ver en la gráfica de f^2 mostrada en la siguiente figura:

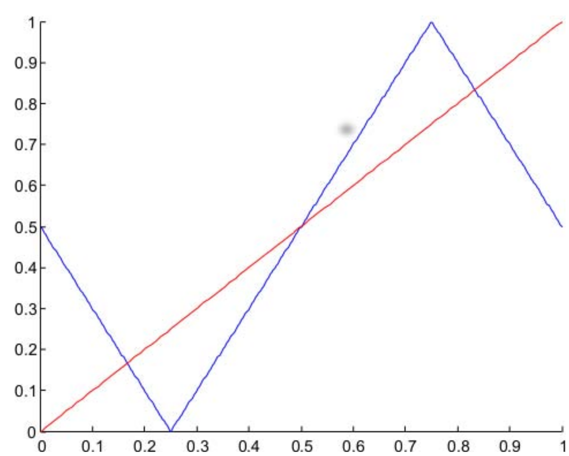

Figura 6.2: Gráfica de la función f^2

Observemos que f^2 restringida a cualquiera de estos dos intervalos es transitiva por un argumento en el párrafo anterior.

6.1.2 Proposición. *Sea $f : X \to X$ una función continua de un espacio métrico compacto en sí mismo. Si f^n es transitiva entonces f^{mn} es transitiva para cada $m \geq 1$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $m \geq 1$ tal que f^{mn} no es transitiva. De donde, existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que para cualquier entero positivo k, se tiene que:

$$f^{kmn}(U) \cap V = \emptyset.$$

En consecuencia, no existe ningún entero positivo l para el cual se cumpla que:

$$f^{ln}(U) \cap V \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción al hecho que f^n es transitiva. $\square$

6.2. Preliminares para las descomposiciones periódicas regulares

La idea de crear las descomposiciones periódicas regulares es dar condiciones para poder hablar de la transitividad de f^n, tomando como hipótesis que f es transitiva; es decir, poder probar el regreso de la Proposición 6.1.1.

6.2.1 Definición. *Sea $f : X \to X$ una función continua de un espacio métrico compacto en sí mismo. Diremos que f es **totalmente transitiva** si f^n es transitiva para cada $n \geq 1$.*

6.2.2 Proposición. *Sean $f : X \to X$ una función y A cualquier subconjunto de X. Entonces lo siguiente se cumple:*

1. *Si $f^n(A) \subset A$ entonces tanto $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(A)$ como $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^i(A)$ son conjuntos invariantes bajo f.*

2. *Si $f^{-n}(A) \subset A$ entonces tanto $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A)$ como $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A)$ son conjuntos invariantes bajo f^{-1}.*

Demostración. Sea A un subconjunto de X que cumple (1). Queremos demostrar que $f(\bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(A)) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(A)$ observemos que:

$$f(\bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(A)) = f(A \cup \cdots \cup f^{n-1}(A)) = (f(A) \cup \cdots \cup f^n(A)) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(A),$$

ya que, por hipótesis, $f^n(A) \subset A$.

Ahora probemos que $f(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^i(A)) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^i(A)$. Para esto, observemos que, al igual que en las uniones, tenemos lo siguiente:

$$f(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^i(A)) = f(A \cap \cdots \cap f^{n-1}(A)) \subset (f(A) \cap \cdots \cap f^n(A)) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^i(A),$$

ya que, por hipótesis, $f^n(A) \subset A$. En consiguiente, concluimos el resultado deseado. La demostración de la parte (2) se hace de manera similar a la anterior. □

Para poder discutir sobre las nociones de descomposiciones es preciso dar algunas definiciones antes.

6.2.3 Definición. *Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $\mathcal{D} = \{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ subconjuntos no vacíos de X tales que $f(D_i) \subset D_{i+1 \pmod{n}}$ para $0 \leq i < n-1$. Llamaremos a $\mathcal{D}$ una **órbita periódica de conjuntos**.*

6.2.4 Observación. *Con las hipótesis de la Definición 6.2.3, claramente, $\bigcup_{i=0}^{n-1} D_i$ es un conjunto invariante, cada D_i es invariante bajo f^n, además, $f^k(D_i) \subset D_{i+k \pmod{n}}$ para toda $k \geq 0$.*

6.2.5 Definición. *Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $\mathcal{D}$ una órbita periódica de conjuntos. Llamaremos a $\mathcal{D}$ una **descomposición periódica** si todos los D_i son cerrados de X, $D_i \cap D_j$ es denso en ninguna parte en X siempre que $i \neq j$ y, finalmente, $\bigcup_{i=0}^{n-1} D_i = X$. Al número de elementos de la descomposición le llamaremos **la longitud** de la descomposición.*

6.2.6 Observación. *Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $\mathcal{D}$ una descomposición periódica de X. La condición que D_i tenga intersecciones densas en ninguna parte es equivalente a decir que sus interiores son disjuntos. Pues al ser D_i y D_j cerrados, tenemos que $D_i \cap D_j$ es cerrado. De donde, tenemos que:*

$$\emptyset = Int(Cl(D_i \cap D_j)) = Int(D_i \cap D_j) = Int(D_i) \cap Int(D_j).$$

En el caso especial donde los D_i son mutuamente disjuntos, entonces cada D_i es un abierto y cerrado del espacio ya que el complemento de cada D_i es la unión finita de conjuntos cerrados. Claramente, $\{X\}$ siempre es una descomposición periódica, la llamaremos ***descomposición trivial****.*

6.2.7 Definición. *Sean X un espacio topológico y D un subconjunto cerrado de X. A D lo llamaremos un* ***cerrado regular*** *si es la cerradura de su interior.*

6.2.8 Proposición. *Si X es un espacio topológico entonces $Cl(U)$ es un conjunto cerrado regular para cada abierto U de X.*

Demostración. Sea U un abierto de X y llamemos $A = Cl(U)$. Veremos que $A = Cl(Int(A))$. Observemos primero que $U \subset A$, de donde $U = Int(U) \subset Int(A)$ y, por lo tanto, $A = Cl(U) \subset Cl(Int(A))$. Veamos ahora que se cumple la otra contención. Para esto, observemos que $Int(A) \subset A$, de donde $Cl(Int(A)) \subset Cl(A) = A$. Por lo tanto, $A = Cl(Int(A))$. □

6.2.9 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Si B es un cerrado regular en X y A es un cerrado regular en B entonces A es un cerrado regular en X.*

Demostración. Queremos ver que $Cl_X(Int_X(A)) = A$. Como A es cerrado en X, se tiene que $Cl_X(Int_X(A)) \subset A$. Veamos ahora la otra contención. Para esto, observemos que, como A es un cerrado regular en B, tenemos que $A = Cl_B(Int_B(A)) = Cl_X(Int_X(A)) \cap B$, de donde $A \subset Cl_X(Int_X(A))$. □

6.2.10 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $\{D_i\}_{i=1}^n$ una colección de conjuntos cerrados regulares. Entonces $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ es un conjunto cerrado regular.*

Demostración. Sea $U_i = Int(D_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la Definición 6.2.7, sabemos que $D_i = Cl(U_i)$ para cada i. Llamemos $V = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, notemos que V es un abierto de X. Ahora, observemos lo siguiente:

$$Cl(V) = Cl\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} Cl(U_i) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i = D.$$

Una vez más, por la Proposición 6.2.8, se tiene que D es un cerrado regular.

$\square$

6.2.11 Observación. *Los conjuntos abiertos y cerrados son conjuntos cerrados regulares. Sea U un conjunto abierto y cerrado. Notemos que, por ser abierto y cerrado, tenemos que: $Cl(U) = U$ y $Int(U) = U$ y, por lo tanto, $U = Cl(Int(U))$.*

6.2.12 Definición. *A una descomposición periódica la llamaremos* ***regular*** *si cada uno de los elementos de la descomposición son cerrados regulares.*

6.2.13 Observación. *Por la Observación 6.2.11, como todos los conjuntos abiertos y cerrados son conjuntos cerrados regulares, una descomposición periódica siempre será regular si $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Supongamos ahora que una función transitiva f admite una descomposición periódica regular $\mathcal{D}$ de longitud n. Como los elementos de $\mathcal{D}$ son invariantes bajo f^n y cada uno de ellos tiene interior no vacío, por (9) del Teorema 4.1.20, f^n no es transitiva. Por lo que una función que es totalmente transitiva no puede admitir una descomposición periódica regular.*

Para motivar la discusión sobre las descomposiciones periódicas regulares, consideremos la siguiente función lineal por partes, $g : [0,1] \to [0,1]$, definida de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]; \\ 2x - \frac{3}{2}, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

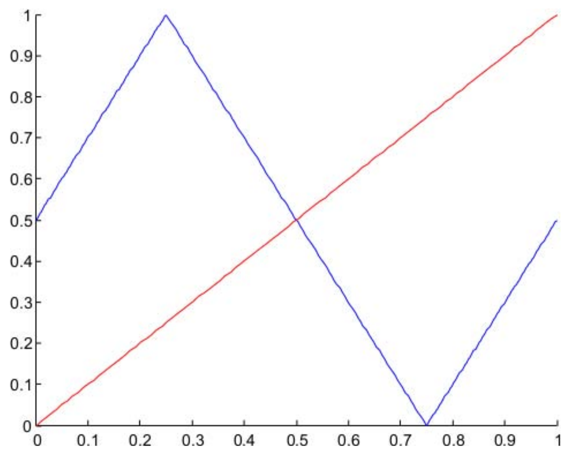

Figura 6.3: Gráfica de la función g

La gráfica de g se encuentra en la Figura 5.3. Notemos que $\mathcal{D} = \{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ es una descomposición periódica regular para g. Por lo que g^2 no puede ser transitiva en $[0, 1]$, por la Observación 6.2.13. Además, notemos que g^2 restringido a cualquiera de los dos elementos de $\mathcal{D}$ es una función tienda y, por la Proposición 7.1.18, del siguiente capitulo, $g^2|_{[0,\frac{1}{2}]}$ y $g^2|_{[\frac{1}{2},1]}$ son totalmente transitiva. La transitividad de g será establecida por el Teorema 6.2.15. Por la Proposición 6.1.2, podemos concluir que ninguna iteración par de la función g es transitiva en $[0, 1]$. Sin embargo, esto no significa que g tenga una descomposición periódica regular de longitud $2n$, para alguna $n \geq 2$. Las únicas descomposiciones para g resultan ser la trivial y la descomposición $\mathcal{D}$ discutida previamente. El siguiente lema contiene algunas propiedades básicas de las descomposiciones periódicas regulares.

6.2.14 Lema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua y transitiva. Si $\mathcal{D} = \{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ es una descomposición periódica regular para f entonces:*

1. $Cl(f^k(D_i)) = D_{i+k \ (\text{mód } n)}$ *para toda* $0 \leq i \leq n-1$ *y* $k \geq 1$;
2. $f^k(D_i) \subset D_i$ *si y sólo si* $k \equiv 0 \pmod{n}$;
3. $f^{-j}(Int(D_i)) \subset Int(D_{i-j \ (\text{mód } n)})$ *para* $0 \leq i \leq n-1$ *y* $j \geq 0$;
4. $D = \bigcup_{i \neq j} (D_i \cap D_j)$ *es un conjunto invariante y denso en ninguna parte en* X.

Demostración. 1. Por definición de descomposición periódica regular, sabemos que $D_{i+k \text{ (mód } n)}$ es cerrado y, como $f^k(D_i) \subset D_{i+k \text{ (mód } n)}$, tenemos que $Cl(f^k(D_i)) \subset Cl(D_{i+k \text{ (mód } n)}) = D_{i+k \text{ (mód } n)}$. Ahora, veamos que $D_{i+k \text{ (mód } n)} \subset Cl(f^k(D_i))$. Supongamos que $U = D_{i+k \text{ (mód } n)} \setminus Cl(f^k(D_i))$ es no vacío. Entonces U es un abierto en el conjunto cerrado regular $D_{i+k \text{ (mód } n)}$. De donde, $V = U \cap Int(D_{i+k \text{ (mód } n)})$ es un abierto de X. Pero D_i es el único elemento de $\mathcal{D}$ tal que $f^k(D_i) \subset Int(D_{i+k \text{ (mód } n)})$, por lo que $f^{-k}(V) = \emptyset$, lo cual es una contradicción al hecho que $f^k(X)$ es denso en X, Teorema 4.1.20. Todo fue por el hecho de suponer que $U = D_{i+k \text{ (mód } n)} \setminus Cl(f^k(D_i))$ es no vacío. Por lo que concluimos que $D_{i+k \text{ (mód } n)} \subset Cl(f^k(D_i))$.

2. Supongamos que $f^k(D_i) \subset D_i$. Sea $j \equiv i + k \pmod{n}$ con $j \neq i$. Como $f^k(D_i) \subset D_{i+k \text{ (mód } n)}$, por la Observación 6.2.4, se tiene que $f^k(D_i) \subset D_i \cap D_j$. Pero esto implicaría que $f^k(D_i)$ es denso en ninguna parte, lo cual es una contradicción ya que significaría que:

$$Int(Cl(f^k(D_i))) = \emptyset.$$

Por 1, sabemos que $Cl(f^k(D_i)) = D_{i+k \text{ (mód } n)}$ de donde diríamos que $Int(D_{i+k \text{ (mód } n)}) = \emptyset$. Por la Observación 6.2.13, sabemos que esto no es cierto, por lo tanto $j \equiv i + k \pmod{n}$ y $j = i$; es decir, $k \equiv 0 \pmod{n}$. La otra implicación es resultado inmediato de las siguientes dos contenciones que tenemos por definición: $f(D_i) \subset D_{i+1 \text{ (mód } n)}$ y $f^k(D_i) \subset D_{i+k \text{ (mód } n)}$. Ya que, como siempre pasa que $D_i \subset D_i$ y, por hipótesis, $k \equiv 0 \pmod{n}$. Tenemos que $f^k(D_i) \subset D_i$.

3. Supongamos que $i \geq j$. Si $f^{-j}(Int(D_i)) \cap D_k \neq \emptyset$, para alguna $k \not\equiv i - j \pmod{n}$, tendríamos algún punto de D_k que es llevado al $Int(D_i)$ bajo f^j. Pero $f^j(D_k) \cap Int(D_i) = \emptyset$, ya que $f^j(D_k) \neq D_i$. Por lo tanto, $f^{-j}(Int(D_i)) \cap D_k = \emptyset$ para toda $k \not\equiv i - j \pmod{n}$. De donde, $f^{-j}(Int(D_i)) \subset D_{i-j \text{ (mód } n)}$ y, como $f^{-j}(Int(D_i))$ es un abierto, $f^{-j}(Int(D_i)) \subset Int(D_{i-j \text{ (mód } n)})$. La prueba para $i < j$ es similar.

4. Es suficiente mostrar que D es invariante, por (9) del Teorema 4.1.20, sabríamos que es denso en ninguna parte. Si $i \not\equiv j \pmod{n}$, entonces $i + 1 \not\equiv j + 1 \pmod{n}$. Por lo tanto, $f(D) \subset \bigcup_{i \neq j} (f(D_i) \cap f(D_j)) \subset$

$$\bigcup_{i\neq j}(D_{i+1 \pmod n}\cap D_{j+1 \pmod n})\subset D.$$

$\square$

6.2.15 Teorema. *Sean X un espacio métrico compacto, $f:X\to X$ una función continua y $\mathcal{D}=\{D_0,\ldots,D_{n-1}\}$ una descomposición periódica regular para f. Entonces f es transitiva si y sólo si f^n es transitiva en cada uno de los D_i.*

Demostración. Supongamos que f es transitiva y sean U y V abiertos que intersectan a D_i. Como D_i es un cerrado regular, $Int(D_i)\cap U$ y $Int(D_i)\cap V$ son abiertos no vacíos de X. Por la transitividad de f, existe $k\geq 1$ tal que $f^k(Int(D_i)\cap U)\cap Int(D_i)\cap V\neq\emptyset$. De donde, $Int(D_i)\cap f^k(Int(D_i))\neq\emptyset$ y, por lo tanto, $Int(D_i)\cap f^{-k}(Int(D_i))\neq\emptyset$. Por la parte (3) del Lema 6.2.14, $f^{-k}(Int(D_i))\subset Int(D_{i-k \pmod n})$. Como los interiores de los elementos de $\mathcal{D}$ son ajenos, por la Observación 6.2.13, $i\equiv i-k \pmod n$, por consiguiente k es un múltiplo de n. Con esto último podemos concluir que f^n es transitiva en D_i.

Supongamos ahora que f^n es transitiva en cada D_i. Sean U y V abiertos no vacíos que intersectan a $Int(D_i)$ y $Int(D_j)$, respectivamente. Observemos que $W=f^{-k}(V\cap Int(D_j))$ es un abierto y no vacío de D_i, para alguna $0\leq k\leq n-1$. Por la transitividad de f^n en D_i existe una $m\geq 1$ tal que $f^{mn}(U)\cap W\neq\emptyset$. De donde, $f^{mn+k}(U)\cap V\neq\emptyset$ y, por tanto, f es transitiva en X. $\square$

6.2.16 Observación. *El pedir ser regular a la descomposición fue esencial para la prueba del Teorema 6.2.15, ya que, como podemos observar, $\mathcal{C}=\{[0,\frac{1}{2}]\cup\{1\},\{0\}\cup[\frac{1}{2},1]\}$ es una descomposición periódica de tamaño 2 para la función g discutida después de la Observación 6.2.13, pero g^2 no es transitiva en ninguno de los dos elementos de $\mathcal{C}$. Por otra parte, una función no transitiva puede admitir varias descomposiciones periódicas regulares de la misma longitud. Por ejemplo, la función del circulo unitario en sí mismo dada por una rotación por un ángulo π tiene a $[\theta,\theta+\pi],[\theta+\pi,\theta]$ como descomposición periódica regular de tamaño 2 para cada θ en el circulo unitario. La transitividad nos asegura unicidad de dicha descomposición.*

6.2.17 Teorema. *Sea X un espacio métrico y compacto. Una función $f:X\to X$ transitiva tiene a lo más una descomposición periódica regular de longitud n.*

Demostración. Sean $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{n-1}\}$ y $\mathcal{D} = \{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ dos descomposiciones periódicas regulares. Veamos que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. Por la Observación 6.2.13, tanto C_i como D_j tienen interior no vacío, por lo que $C_i \cap D_j$ tiene interior no vacío en X para algunas $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, lo que implica que $C_i \cap D_j$ es un cerrado con interior no vacío en C_i y D_j. Notemos que $f^n(C_i \cap D_j) \subset C_i \cap D_j$. Además, por el Teorema 6.2.15, f^n es transitiva tanto en C_i como en D_j. El inciso (9) del Teorema 4.1.20, nos dice que $C_i = C_i \cap D_j = D_j$. El Lema 6.2.14 parte (1), nos asegura que $C_{i+k \text{ (mód } n)} = Cl(f^k(C_i)) = Cl(f^k(D_j)) = D_{j+k \text{ (mód } n)}$ para $1 \leq k \leq n-1$. Por tanto, $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. □

6.2.18 Lema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, G es un subconjunto abierto de X con:*

$$G, f^{-1}(G), \ldots, f^{-(n-1)}(G),$$

disjuntos por pares y $f^{-n}(G) \subset G$ entonces:

$$\mathcal{C} = \{Cl(G), Cl(f^{-(n-1)}(G)), \ldots, Cl(f^{-1}(G))\}$$

es una descomposición periódica regular.

Demostración. Como $f^{-i}(G)$ son abiertos y disjuntos, para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, por la Proposición 6.2.8, se tiene que $Cl(f^i(G))$ es un cerrado regular. Como f es continua, por la Proposición 2.1.15, se tiene que $f(Cl(f^{-i}(G))) \subset Cl(f(f^{-i}(G))) \subset Cl(f^{-(i-1)}(G))$ para $0 \leq i \leq n-1$. Como $f^{-n}(G) \subset G$, por la Proposición 6.2.2, sabemos que $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} Cl(f^{-i}(G))$ es un conjunto cerrado, invariante y con interior distinto del vacío. Como f es transitiva, por la parte (9) del Teorema 4.1.20, podemos concluir que $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} Cl(f^{-i}(G)) = X$. Por lo tanto,$\mathcal{C}$ es una descomposición periódica regular de X. □

6.2.19 Lema. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función transitiva y G_0 un subconjunto de X distinto del vacío, no denso e invariante bajo f^{-n}. Para cada $1 \leq m \leq n-1$, primo relativo de n, existe un abierto no vacío $G \subset G_0$ tal que $f^{-n}(G) \subset G$ y $f^{-m}(G) \cap G = \emptyset$.*

Demostración. Notemos que, por la Proposición 2.1.19, el conjunto $U = \displaystyle\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(G_0)$ es abierto y no denso, ya que es la intersección finita de conjuntos abiertos y no densos. Por la Proposición 6.2.2, U es invariante bajo f^{-1}. Como f es transitiva, por la parte (10) del Teorema 4.1.20, concluimos que $U = \emptyset$, ya que la preimagen de un conjunto no denso bajo una función continua es no denso. Para $0 \leq r \leq n-1$, tenemos que $jm = qn + r$ para algunas $q \geq 0$ y $0 \leq j \leq n-1$. Por lo que tenemos lo siguiente:

$$f^{-jm}(G_0) = f^{-(r+qn)}(G_0) = f^{-r}(f^{-qn}(G_0)) \subset f^{-r}(G_0),$$

la última contención se debe al hecho que $f^{-n}(G_0) \subset G_0$. Por lo que $\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-jm}(G_0) \subset U = \emptyset$. Observemos que $\{j \geq 0 \mid \bigcap_{i=0}^{j} f^{-im}(G_0) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$, ya que 0 pertenece a ese conjunto. De donde, podemos notar que:

$$k = \text{máx}\{j \geq 0 \mid \bigcap_{i=0}^{j} f^{-im}(G_0) \neq \emptyset\} \leq n-1$$

y, por lo tanto, $G = \bigcap_{i=0}^{k} f^{-im}(G_0)$ es subconjunto abierto y no vacío de G_0. Como $f^{-n}(G_0) \subset G_0$, se tiene lo siguiente:

$$f^{-n}(G) = \bigcap_{i=0}^{k} f^{-im}(f^{-n}(G_0)) \subset \bigcap_{i=0}^{k} f^{-im}(G_0) = G$$

y, por ser k el máximo en cumplir la propiedad dicha, se tiene que:

$$f^{-m}(G) \cap G = \left[\bigcap_{i=1}^{k+1} f^{-im}(G_0)\right] \cap \left[\bigcap_{i=0}^{k} f^{-im}(G_0)\right] = \bigcap_{i=0}^{k+1} f^{-im}(G_0) = \emptyset.$$

$\square$

El siguiente lema es una generalización del Lema 6.2.19, el cual nos abrirá paso para la prueba de la existencia de una descomposición periódica regular para una función transitiva f con una iteración prima no transitiva.

6.2.20 Lema. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función transitiva, n un número natural y G_0 un subconjunto abierto de X no vacío, no denso e invariante bajo f^{-n}. Entonces existe un subconjunto abierto y no vacío G de G_0 tal que $f^{-n}(G) \subset G$ y $f^{-m}(G) \cap G = \emptyset$, para cada $m \leq n-1$ con m y n primos relativos.*

Demostración. Del Lema 6.2.19 sabemos que existe un subconjunto abierto y no vacío G_1 de G_0 con $f^{-n}(G_1) \subset G_1$ y $G_1 \cap f^{-1}(G_1) = \emptyset$. Sea:

$$\{m \leq n-1 \mid \operatorname{mcd}(m,n) = 1\} = \{1, m_1, \ldots, m_k\}.$$

Supongamos que hemos construido una sucesión de conjuntos abiertos y no vacíos $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_j$ tales que $f^{-n}(G_i) \subset G_i$ y $G_i \cap f^{-m_i}(G_i) = \emptyset$ para $i \leq j < k$. El Lema 6.2.19 nos permite tomar un subconjunto abierto y no vacío G_{j+1} de G_j, el cual satisface que $G_{j+1} \cap f^{-m_{j+1}}(G_{j+1}) = \emptyset$ y $f^{-n}(G_{j+1}) \subset G_{j+1}$. Podemos extender la construcción anterior por inducción a la sucesión $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k$. Tomando $G = G_k$, tenemos que $G \subset G_0$, G es un abierto y distinto del vacío. Además, por la construcción que se hizo de G_k, notemos que $f^{-n}(G_k) \subset G_k$ y $f^{-m_i}(G_k) \cap G_k = \emptyset$, para cada $i \in \{1, m_1, \ldots, m_k\}$. En consecuencia, $f^m(G) \cap G = \emptyset$, para cada $m \leq n-1$ primo relativo a n. □

6.2.21 Teorema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función transitiva tal que f^p es no transitiva, con p un número primo. Entonces f admite una descomposición periódica regular de longitud p.*

Demostración. Por el la parte (10) del Teorema 4.1.20, al no ser transitiva f^p, existe un subconjunto abierto, no vacío y no denso H de X tal que $f^{-p}(H) \subset H$. Como cada $1 \leq m \leq p-1$ es primo relativo de p, el Lema 6.2.20 nos asegura la existencia de un subconjunto abierto y no vacío G de H tal que $f^{-p}(G) \subset G$ y $G \cap f^{-m}(G) = \emptyset$ para cada $1 \leq m \leq p-1$. Como es para cada m, en particular, se tiene que $G \cap f^{-(k-j)}(G) = \emptyset$, para $1 \leq j < k \leq p-1$. Aplicando f^{-j} a lo anterior se obtiene que:

$$\emptyset = f^{-j}(G \cap f^{-(k-j)}(G)) = f^{-j}(G) \cap f^{-k}(G),$$

de donde $G, f^{-1}(G), \ldots, f^{-(p-1)}(G)$ son disjuntos por pares. Por lo tanto, por el Lema 6.2.18, sus cerraduras forman una descomposición periódica regular. □

Los siguientes dos lemas nos darán pauta para la prueba de que si f es transitiva pero f^n no es transitiva, con n no primo, entonces f^p es no transitiva para algún factor primo p de n. Los lemas cubren dos posibilidades. El casos donde n es el producto de dos primos iguales y el caso cuando son distintos. Al ser un poco confusa la prueba en la que se tratan los dos casos al mismo tiempo, se ha optado por tomar los casos por separado.

6.2.22 Lema. *Si X es un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ es una función transitiva con f^{p^2} no transitiva, donde p es un número primo, entonces f^p es no transitiva.*

Demostración. Por la parte (10) del Teorema 4.1.20, al ser f^{p^2} no transitiva existe un subconjunto abierto, no vacío y no denso G_0 de X, con $f^{-p^2}(G_0) \subset G_0$. Por el Lema 6.2.20, existe un abierto no vacío $G \subset G_0$ tal que $f^{-p^2}(G) \subset G$ y $f^{-m}(G) \cap G = \emptyset$ para cada $1 \leq m \leq p^2 - 1$ con m primo relativo de p^2. La Proposición 6.2.2 nos muestra que el conjunto abierto y no vacío $V = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^{-ip}(G)$ es invariante bajo f^{-p}. Mostremos que V es no denso al exhibir que $f^{-1}(G) \cap V = \emptyset$. Ya vimos que $f^{-1}(G) \cap G = \emptyset$. Como cada $ip-1$ es primo relativo con p^2, se tiene que $G \cap f^{-(ip-1)}(G) = \emptyset$. De donde, aplicando f^{-1} a lo anterior, se obtiene que $\emptyset = f^{-1}(G \cap f^{-(ip-1)}(G)) = f^{-1}(G) \cap f^{-ip}(G)$ para $0 \leq i \leq p-1$ y, por lo tanto, $f^{-1}(G) \cap V = \emptyset$ como se deseaba. Por lo tanto, f^p es no transitiva. $\square$

6.2.23 Lema. *Sean p y q números primos, X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función transitiva, con f^{pq} no transitiva. Entonces f^p es no transitiva o f^q es no transitiva.*

Demostración. Supongamos que f^p es transitiva y veamos que f^q no lo es. Como en la demostración del Lema 6.2.22, la parte (10) del Teorema 4.1.20 y el Lema 6.2.20 nos dicen que existe un subconjunto abierto, no vacío y no denso G de X tal que $f^{-pq}(G) \subset G$ y $f^{-m}(G) \cap G = \emptyset$ para cada $1 \leq m \leq pq - 1$, con m y pq primos relativos. Como j y q son primos relativos, con $1 \leq j \leq q - 1$, y $(f^p)^{-q}(G) = f^{-pq}(G) \subset G$, podemos aplicar el Lema 6.2.20, usando la transitividad de f^p, de donde existe un subconjunto abierto y no vacío H de G tal que $(f^p)^{-q}(H) = f^{-pq}(H) \subset H$ y $(f^p)^{-j}(H) \cap H = f^{-jp}(H) \cap H = \emptyset$, con $1 \leq j \leq q - 1$. La Proposición 6.2.2 nos dice que el conjunto abierto y no vacío $W = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^{-iq}(H)$ es invariante bajo f^q.

Mostremos ahora que W es no denso al exhibir que $f^{-1}(H) \cap W = \emptyset$. Como $H \subset G$, tenemos que $f^{-1}(H) \cap H = \emptyset$ y $H \cap f^{-(iq-1)}(H) = \emptyset$ si $iq - 1$ y pq son primos relativos. Si $iq - 1$ y pq no son primos relativos, entonces $iq - 1 = jp$, para alguna $1 \leq j \leq q - 1$, de donde $H \cap f^{-(iq-1)}(H) = H \cap f^{-jp}(H) = \emptyset$, por como se construyó H. De donde se puede deducir que $\emptyset = f^{-1}(H \cap f^{-(iq-1)}(H)) = f^{-1}(H) \cap f^{-iq}(H)$, para $1 \leq j \leq q - 1$ y, por lo tanto, $f^{-1}(H) \cap W = \emptyset$ como se deseaba. En consecuencia W no es denso y, por lo tanto, f^q es no transitiva. $\square$

Para la demostración del siguiente teorema haremos uso del Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual nos dice que para todo número entero positivo n, existe una representación única como producto de números primos.

6.2.24 Teorema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función transitiva con f^n no transitiva, para algún número natural n que no es primo. Entonces f^p es no transitiva para algún número primo p que divide a n.*

Demostración. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, podemos escribir a n como un producto de números primos; es decir, $n = p_1 p_2 \cdots p_k$. Procederemos por inducción sobre k. Si $k = 2$ por los Lemas 6.2.22 y 6.2.23, obtenemos el resultado deseado. Supongamos ahora que el resultado es válido para $m \leq k$ y con $m \geq 2$. Como $m - 1 \geq 1$, podemos poner $f^{p_1 p_2 \cdots p_{m+1}} = (f^{p_1 p_2 \cdots p_{m-1}})^{p_m p_{m+1}}$. Si $g = f^{p_1 p_2 \cdots p_{m-1}}$ es no transitiva, entonces f^{p_i} es no transitiva para alguna $i \leq m - 1$, por hipótesis de inducción. Si g es transitiva, aplicando el Lema 6.2.22 o el Lema 6.2.23 a g obtenemos que $g^{p_m} = f^{p_1 p_2 \cdots p_{m-1} p_m}$ es no transitiva o $g^{p_{m+1}} = f^{p_1 p_2 \cdots p_{m-1} p_{m+1}}$ es no transitiva. En cualquiera de los dos casos, la hipótesis de inducción nos muestra que f^{p_i} es no transitiva para alguna $i \leq m + 1$. $\square$

6.2.25 Corolario. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función transitiva y $n > 1$. Si f^n es no transitiva entonces f admite una descomposición periódica regular de longitud un divisor de n.*

Demostración. Para la prueba de este corolario se tienen que considerar dos casos:

1. Si n es un número primo, entonces, por el Teorema 6.2.21, f admite una descomposición periódica regular de longitud n.

2. Si n no es un número primo, el Teorema 6.2.24 nos dice que existe un número primo p que divide a n tal que f^p es no transitiva. Aplicando el Teorema 6.2.21 a f^p, sabemos que f admite una descomposición periódica regular de longitud p.

$\square$

Existen diferentes circunstancias en donde la existencia de una descomposición periódica regular es mucho más fácil de demostrar. Consideremos la más simple de estas circunstancias. Recordemos que una componente es un subconjunto conexo maximal de X, Definición 2.1.27. La familia de las componentes forman una partición de nuestro espacio X, son cerradas por la Observación 2.1.29 y pueden ser o no abiertos del espacio. Por la Observación 2.1.29, si X tiene una cantidad finita de componentes entonces éstas son abiertos y cerrados del espacio y, por lo tanto, cerrados regulares. Además, cada componente debe ser llevada a otra componente bajo una función continua (transitiva) $f : X \to X$.

6.2.26 Teorema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función transitiva. Si X tiene una componente con interior no vacío, entonces tiene una cantidad finita de componentes y ellas forman una descomposición periódica regular. Por lo que si X tiene una cantidad finita de componentes, entonces ellas forman una descomposición periódica regular.*

Demostración. Sea C una componente de X con interior no vacío. Por la transitividad de f existe $k \geq 1$ tal que $f^k(C) \cap C \neq \emptyset$. Podemos suponer que k es el mínimo con respecto a esa propiedad. Notemos que $f^i(C)$ debe estar contenida en alguna componente D_i de X, para cada $0 \leq i \leq k-1$, y $f^k(C)$ debe de estar contenido en $D_0 = C$. No puede suceder que $D_i = D_j$, para $0 \leq i < j \leq k-1$, ya que esto sería una contradicción a la minimalidad de k. De donde los D_i son permutados periódicamente bajo f. Por lo que $D = \bigcup_{i=0}^{k-1} D_i$ es un conjunto cerrado, por ser unión finita de cerrados y, por la Proposición 6.2.2, un subconjunto invariante de X el cual tiene interior no vacío ya que contiene al interior de C. Por la parte (9) del Teorema 4.1.20, podemos concluir que $D = X$. Ahora, por la Observación 2.1.29, se sigue que cada D_i es un abierto y cerrado del espacio y, por lo tanto, son cerrados regulares. De donde, se tiene que los D_i forman una descomposición periódica regular de X. □

Capítulo 7

Transitividad y Periodicidad densa en dimensión uno

7.1. Transitividad y Periodicidad densa en el intervalo

Denotemos al intervalo $[0,1]$ como I. Cuando hablemos sobre intervalos siempre nos referiremos a intervalos no degenerados. Recordemos que denotamos al conjunto de los puntos periódicos de una función $f : X \to X$ de un espacio métrico y compacto en sí mismo como $\mathrm{Per}(f)$.

7.1.1 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, entonces diremos que f tiene* ***periodicidad densa****.*

Periodicidad densa no implica transitividad, como contra ejemplo tomemos X un espacio con más de un punto y $f : X \to X$ la función identidad. Incluso en algunos espacios la implicación inversa tampoco es cierta. Como contraejemplo, tomemos como espacio fase X a la circunferencia, y sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una rotación irracional, como en el Ejemplo 4.3.6.

Sharkovskii probó que si $f : I \to I$ es transitiva, donde $I = [0,1]$, entonces f tiene periodicidad densa [37]. Este resultado también será cierto para la circunferencia. Pero antes de pasar a la prueba de esos teoremas, daremos algunos resultados que nos facilitarán su demostración.

7.1.2 Proposición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces cualquier punto periódico pertenece a $\Omega(f)$.*

Demostración. Sean $x \in \mathrm{Per}(f)$ y U un abierto de X que contenga a x. Como $x \in \mathrm{Per}(f)$, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) = x$, de donde $x \in f^n(U) \cap U$ y, por lo tanto, $x \in \Omega(f)$. $\square$

La prueba de la Proposición 7.1.3 se puede consultar en la página 77 del libro de Block y Coppel [8]. Esta proposición nos ayudará en la prueba de la Proposición 7.1.4 que es fundamental para la demostración del Teorema 7.1.5.

7.1.3 Proposición. *Sean (I, f) un sistema dinámico y J un subintervalo abierto de I que no contiene puntos periódicos de f. Si $x \in J$ es no errante, entonces J no contiene ningún otro punto de la órbita de x.*

7.1.4 Proposición. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Entonces $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \Omega(f|_{\Omega(f)})$.*

Demostración. De la Proposición 7.1.2 podemos concluir que $Cl(\mathrm{Per}(f)) \subset \Omega(f|_{\Omega(f)})$. Veamos ahora la otra contención.

Sean $y \in \Omega(f|_{\Omega(f)})$ y U cualquier abierto conteniendo a y. Entonces $U \cap f^m(U) \neq \emptyset$, para alguna $m \geq 0$. Por la Proposición 7.1.3, U debe contener un punto periódico y, por lo tanto, $\Omega(f|_{\Omega(f)}) \subset Cl(\mathrm{Per}(f))$. $\square$

7.1.5 Teorema. *Sea (I, f) un sistema dinámico con f transitiva. Entonces $Cl(\mathrm{Per}(f)) = I$; es decir, el conjunto de los puntos periódicos de f es denso en I.*

Demostración. Por la Proposición 7.1.4, sabemos que $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \Omega(f|_{\Omega(f)})$. Como f es transitiva por el Teorema 4.1.20 inciso (15), se tiene que $\Omega(f|_{\Omega(f)}) = I$. $\square$

El Teorema 7.1.5 puede ser generalizado, pero antes de eso necesitaremos algunas definiciones y una proposición.

7.1.6 Definición. *Un conjunto R es una* ***relación*** *si todo elemento de R es un par ordenado; es decir, si para cada $z \in R$, existen x y y tales que $z = (x, y)$. Si $R \subset A \times B$, diremos que R es una relación entre A y B y, si $R \subset A \times A$, diremos, simplemente, que R es una relación en A.*

7.1.7 Definición. *Sean S un conjunto y R una relación en S. R es llamada* ***reflexiva*** *en S, si para cada $a \in S$, se tiene que a está relacionado consigo mismo.*

7.1.8 Definición. *Sean S un conjunto y R una relación en S. R es llamada* ***transitiva*** *en S, siempre que para cada a, b y $c \in S$, si a está relacionado con b y b está relacionado con c entonces a está relacionado con c.*

7.1.9 Definición. *Sea S un conjunto. Una relación R en S es* ***antisimétrica*** *siempre que para cada a y $b \in S$, si a está relacionado con b y b está relacionado con a entonces $a = b$.*

7.1.10 Definición. *Una relación R en un conjunto S que es reflexiva, antisimétrica y transitiva se le llamará un* ***orden parcial*** *en S. A la pareja (S, R) se le llamará* ***conjunto ordenado****.*

7.1.11 Definición. *Sean S un espacio vectorial sobre los reales y $A \subset S$. Diremos que A es* ***convexo*** *(en S) si y sólo si para cualesquiera x y $y \in A$ se tiene que:*

$$\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

7.1.12 Definición. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Definimos el* ***casco convexo*** *de A como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A y lo denotaremos como $\mathrm{C}(A)$. Observemos que $\mathrm{C}(A)$ es el conjunto convexo más chico que contiene a A.*

7.1.13 Definición. *Sea X un espacio topológico conexo. Diremos que X tiene un* ***intervalo de disconexión*** *si existe un abierto J de X homeomorfo a un intervalo abierto de la recta real, tal que para cada $x \in J$, $X \setminus \{x\}$ tiene exactamente dos componentes.*

7.1.14 Observación. *De la Definición 7.1.13 podemos observar que cualquier subconjunto abierto y conexo de J también es un intervalo de disconexión.*

7.1.15 Definición. *Sean X un espacio topológico conexo y J un intervalo de disconexión. Supongamos que J está dotado con un orden lineal $\leq$. Dados $x \in J$ y $y \in X$ con $x \neq y$, diremos que $x < y$ ($x > y$ respectivamente) si y sólamente si existe $z \in J$ tal que $x < z$ ($x > z$ respectivamente) y tanto y como z pertenecen a la misma componente de $X \setminus \{x\}$.*

7.1.16 Proposición. *Sean X un espacio topológico conexo, J un intervalo de disconexión y $f : X \to X$ una función continua. Si existen $x, y \in J$ y n y $m \geq 1$ tales que $f^n(x), f^m(y) \in J$, $f^n(x) < x$ y $f^m(y) > y$. Entonces f tiene un punto periódico en $\mathrm{C}(\{x, y, f^n(x), f^m(y)\})$.*

Demostración. Supongamos primero que existe $k > 1$ tal que $f^{kn}(x) > f^n(x)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que k es el más pequeño que cumple dicha propiedad. Fijemos $j = (k-1)n$. Entonces $f^j(x) \leq f^n(x) < x$ y $f^j(f^n(x)) = f^{kn}(x) > x$. Como el interior de $\mathrm{C}(\{x, f^n(x)\})$ es un intervalo de disconexión y f es continua, f^j tiene un punto fijo entre x y $f^n(x)$. Por lo tanto, f tiene un punto periódico en J. Análogamente, si existe $l > 1$ tal que $f^{lm}(y) < f^m(y)$, habremos acabado.

Ahora supongamos que $f^{kn}(x) \leq f^n(x)$ y $f^{km}(y) \geq f^m(y)$ para cada $k \geq 1$. En particular, tenemos que $f^{mn}(x) \leq f^n(x) < x$ y $f^{mn}(y) \geq f^m(y) > y$. Por lo tanto, por la continuidad de f, f^{mn} tiene un punto fijo entre x y y. Esto completa la prueba. $\square$

7.1.17 Teorema. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continia y transitiva. Si X es conexo y tiene un intervalo de disconexión entonces* $\mathrm{Per}(f)$ *es denso en X.*

Demostración. Sean K un intervalo de disconexión en X y U un abierto de X. Como f es transitiva, existe un entero positivo k tal que $f^k(K) \cap U \neq \emptyset$. De donde, $f^{-k}(U) \cap K$ es un subconjunto no vacío y abierto de K. Sean J un subintervalo abierto de $f^{-k}(U) \cap K$ y a, b, c y $d \in J$ tales que $a < b < c < d$. Por la transitividad de f, existen x y $y \in (b, c)$ y n y $m \geq 1$ tales que $a < f^n(x) < b$ y $c < f^m(y) < d$. Por la Proposición 7.1.16, existe un punto periódico z de f en J. De donde el punto periódico $f^k(z)$ está en U. Por lo tanto, $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X. $\square$

Existen dos ejemplos típicos de funciones transitivas en el intervalo I. Uno de ellos es la función tienda, definida en el Ejemplo 3.8.2. El otro ejemplo es una función continua lineal por partes como se definió en el contraejemplo de la Sección 5.1. Definida de la siguiente forma $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{4}) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ y $f(1) = 0$. En la siguiente figura podemos ver la gráfica de f:

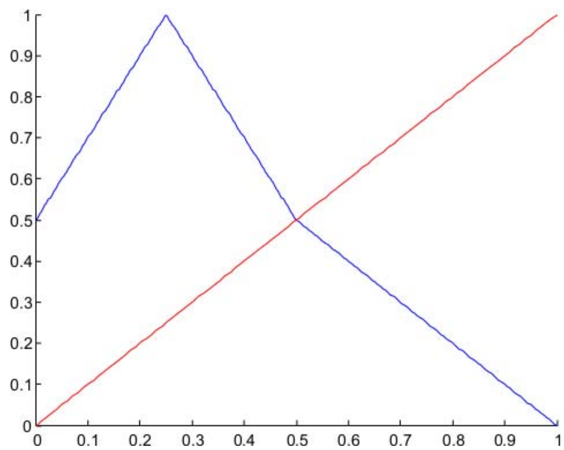

Figura 7.1: Gráfica de la función f

Notemos el siguiente resultado de la función tienda:

7.1.18 Proposición. *Sea T la función tienda. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$, T^n es transitiva.*

Demostración. Notemos que el punto $\frac{2}{9}$ es un punto periódico de periodo 3 para T siendo su órbita la siguiente: $o(\frac{2}{9}, T) = \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9} \ldots\}$. Por el Ejemplo 4.3.7, T es transitiva. Finalmente, por el Teorema 7.1.30, T es transitiva para cada $n > 0$. $\square$

Como consecuencia de la Proposición 7.1.18 podemos concluir que T^2 es transitiva, lo que nos lleva a nuestra siguiente definición:

7.1.19 Definición. *A una función $f : I \to I$ tal que, f^2 es transitiva la llamaremos* ***bitransitiva****.*

7.1.20 Observación. *Por la Proposición 6.1.1, si f es bitransitiva entonces f también es transitiva.*

Antes de pasar al siguiente teorema, daremos un resultado que necesitaremos para su demostración.

7.1.21 Proposición. *Sean A un intervalo y $f : A \to A$ una función continua. Si A es compacto entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Como A es un intervalo compacto, tenemos que A es de la forma $[a, b]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a < b$. Además, tenemos que:

$$f(a) - a \geq f(b) - b$$

y, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in A$ tal que $f(c) = c$. $\square$

7.1.22 Teorema. *Si $f : I \to I$ es una función transitiva entonces f^n es transitiva para cada $n \geq 3$.*

Demostración. Supongamos que no es cierto y sea $n \geq 3$ el entero más pequeño para el cual f^n no es transitiva. Por el Corolario 6.2.25, existe una descomposición periódica regular de longitud m, donde m es un divisor de n. Notemos que $m = n$, ya que si no sería una contradicción a la minimalidad de n. Sea $\mathcal{D} = \{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ dicha descomposición. Por la Proposición 7.1.21, f tiene al menos un punto fijo p. Como $I = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} D_i$, se tiene que $p \in D_i$ para alguna $0 \leq i \leq n-1$. Tomemos, la componente L de D_i que contiene a p. Como p es un punto fijo, se tiene que:

$$p \in L \cap f(L) \cap \cdots \cap f^{n-1}(L).$$

Como $n \geq 3$, tenemos que:

$$Int(f^i(L) \cap f^j(L)) \neq \emptyset \text{ para algunas } 0 \leq i, j \leq n-1.$$

Lo cual es una contradicción, pues al ser L una componente de D_i y $\mathcal{D}$ una descomposición periódica regular, la intersección de los interiores de las imágenes de L bajo f deben de ser vacías, Definición 6.2.6. $\square$

El siguiente teorema muestra que ninguna otra posibilidad existe.

7.1.23 Teorema. *Sea (I, f) un sistema dinámico transitivo. Entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *f es bitransitiva.*

2. *Existe $c \in I \setminus \{0, 1\}$ tal que $f([0, c]) = [c, 1]$, $f([c, 1]) = [0, c]$ y tanto $f^2|_{[0,c]}$ como $f^2|_{[c,1]}$ son transitivas.*

Demostración. Si f es bitransitiva habremos terminado. Supongamos que f no es bitransitiva. Entonces, por el Corolario 6.2.25, existe una descomposición periódica regular de longitud 2. Sea $\mathcal{D} = \{D_0, D_1\}$ dicha descomposición. De donde, existe $c \in I \setminus \{0,1\}$ tal que $D_0 = [0,c]$ y $D_1 = [c,1]$. Por ser $\mathcal{D}$ una descomposición periódica regular, se cumplen las propiedades deseadas; es decir, $f([0,c]) = [c,1]$, $f([c,1]) = [0,c]$ y tanto $f^2|_{[0,c]}$ como $f^2|_{[c,1]}$ son transitivas. $\square$

7.1.24 Definición. *Sean P y Q dos conjuntos, donde cada conjunto está dotado de un orden parcial "$\leq$" y $f : P \to Q$. Diremos que f es **monótona**, siempre que $x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$, o bien $x \leq y$ implica que $f(y) \leq f(x)$.*

7.1.25 Definición. *Sea $f : I \to I$ una función continua. Diremos que f es **monótona por partes** si existen puntos $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ tales que f restringida al intervalo $[a_{k-1}, a_k]$ es monótona para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

7.1.26 Definición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que f es **topológicamente mezcladora** si para cualquier par de abiertos U y V de X, no vacíos, existe un entero positivo N tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para toda $n > N$.*

7.1.27 Observación. *Notemos que si f es topológicamente mezcladora entonces f es transitiva, el inverso no es siempre cierto, como contra ejemplo tenemos el Ejemplo 4.3.6.*

7.1.28 Proposición. *Sea (X, f) un sistema dinámico con f^n topológicamente mezcladora. Entonces f es topológicamente mezcladora.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos no vacíos de X. Como f^n es topólogicamente mezcladora, existe N tal que $f^{nk}(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k > N$. De donde, tomando $M = n \cdot (N+1)$, tenemos que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $m > M$. Por lo tanto, f es topólogicamente mezcladora. $\square$

La siguiente proposición nos será de ayuda en la demostración de Teorema 7.1.30. Su prueba puede ser consultada en la página 29 del libro de Mendez y King [28].

7.1.29 Proposición. *Sean I el intervalo unitario, $f : I \to I$ una función continua, $[a,b]$ y $[c,d]$ dos subintervalos de I. Si $[c,d] \subset f([a,b])$, entonces existe un subintervalo $[e,f]$ de $[a,b]$ tal que $f([e,f]) = [c,d]$.*

7.1.30 Teorema. *Sea (I, f) un sistema dinámico transitivo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es bitransitiva;*

2. *f^n es transitiva para toda $n > 0$;*

3. *f es transitiva y tiene un punto periódico de periodo impar mayor que 1;*

4. *f es topológicamente mezcladora;*

5. *Para cada subintervalo abierto $J \subset I$ y cada subintervalo cerrado H de I que no contiene a los puntos extremos de I, existe un entero positivo N tal que $H \subset f^n(J)$ para toda $n > N$.*

Más aún, si f es monótona por partes, entonces el siguiente enunciado es equivalente a los anteriores:

6. *Para cada subintervalo $J \subset I$, existe un entero positivo n tal que:*

$$f^n(J) = I.$$

Demostración. Supongamos que se cumple (2); i.e, f^n es transitiva para cada $n > 0$. En particular, se satisface para $n = 2$. Por lo tanto, f es bitransitiva y (1) es cierto.

Supongamos que se cumple (1) y demostremos que se satisface (2). Como f es bitransitiva, por la Proposición 6.1.1, f es transitiva y, por el Teorema 7.1.22, tenemos que f^n es transitiva para cada $n \geq 3$. De donde f^n es transitiva para cada $n > 0$ y, por lo tanto, (2) es valido.

Supongamos que f^2 es transitiva, veamos que (5) se satisface. Sea J un intervalo abierto de I. Entonces por la Proposición 6.1.1, f es transitiva y, por el Teorema 7.1.5, $Cl(\mathrm{Per}(f)) = I$. De donde, J contiene un punto periódico p de f. Supongamos que k es el periodo de p y llamemos $g = f^k$. Entonces $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(J)$ es un intervalo, ya que p es un punto fijo de g. Por otro lado, como f^2 es transitiva, por el Teorema 7.1.22, g es transitiva. Por la parte (4) del Teorema 4.1.20, tenemos que K es denso en I. De donde, se sigue que $Cl(K) = I$.

Ahora, mostraremos que si x es un punto periódico de f tal que $o(x, f) \subset (0,1)$, entonces existe un entero positivo N tal que $o(x, f) \subset f^n(J)$, para cada $n \geq N$. Para esto, supongamos que x es periódico para f de periodo t y que $o(x, f) \subset (0,1)$. Sean x_1 y x_2 el más grande y el más pequeño de los elementos de la órbita de x, respectivamente. Como $(0,1) \subset K$, existe un entero positivo r tal que $[x_1, x_2] \subset g^r(J)$. Nombremos $h = g^r$ y notemos que $h^t(x_1) = x_1$ y $h^t(x_2) = x_2$. De donde, se sigue que $o(x, f) \subset [x_1, x_2] \subset h^t(J)$. En consecuencia, para $N = t \cdot r \cdot k$, se tiene que $o(x, f) \subset f^N(J)$. Por tanto, si $n \geq N$, entonces $o(x, f) \subset f^n(J)$.

Ahora, supongamos que c y $d \in (0,1)$ con $c < d$. Sean a y b dos puntos periódicos tales que $[c, d] \subset [a, b]$ y $o(a, f) \cup o(b, f) \subset (0,1)$. Entonces, por lo que hicimos en el párrafo anterior, existen enteros positivos N_1 y N_2 tales que $o(a, f) \subset f^{N_1}(J)$ y $o(b, f) \subset f^{N_2}(J)$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Por lo tanto, si $n \geq N$, se tiene que $[c, d] \subset [a, b] \subset f^n(J)$.

Supongamos que se cumple (5) y veamos que f es bitransitiva. Sean J un subintervalo abierto de I, c y $d \in (0,1)$, con $c < d$, $H = [c, d]$ y N es un número entero positivo tal que si $n > N$ entonces $H \subset f^n(J)$. Como podemos tomar a n par, tenemos que $n = 2m$ con m un entero positivo. Notemos que, como $H \subset f^n(J)$, $f^{2m}(J) \cap Int(H) \neq \emptyset$. De donde, se sigue que f^2 es transitiva y, por tanto, (1) es cierto.

Supongamos que se cumple (3), mostraremos (1). Como f es transitiva, si f no fuera bitransitiva entonces se cumpliría la condición (2) del Teorema 7.1.23, lo que implicaría que f no tiene puntos periódicos de periodo impar mayores que 1. Lo cual es una contradicción, por lo tanto, f es bitransitiva y se cumple (1).

Supongamos que se cumple (1) y veamos que se cumple (3). Como f es bitransitiva, por la Proposición 6.1.1, f es transitiva. Veamos ahora que tiene un punto periódico de periodo impar mayor que 1. Sean J y K subintervalos cerrados y disjuntos de $(0,1)$. Como (1) se cumple por (5), sabemos que existe un entero positivo N tal que:

$$J \cup K \subset f^n(Int(J) \cap Int(K)) \subset f^n(Int(J)) \cap f^n(Int(K)) \subset f^n(J) \cap f^n(K),$$

siempre que $n > N$. Sea $p > 2N + 2$, con p un número primo impar, y llamemos $r = \frac{(p-1)}{2}$ y $s = \frac{(p+1)}{2}$. Entonces $r > N$, $s > N$ y $r + s = p$. Como $K \subset f^r(J)$, por la Proposición 7.1.29, existe un subintervalo J_1 de J tal que $f^r(J_1) = K$. Entonces $J_1 \subset f^s(K) = f^{s+r}(J_1) = f^p(J_1)$. Por lo que existe $x \in J_1$ tal que $f^p(x) = x$, definición de punto fijo. Como $x \in J_1$, $f^r(x) \in K$

y $J \cup K \neq \emptyset$ se sigue que $f(x) \neq x$. Como p es un primo, tenemos que el periodo de x es p. Por tanto, podemos concluir que se satisface la condición (3).

Supongamos que se cumple la condición (5) y veamos que la condición (4) también es cierta. Sean U un subintervalo abierto de I y V un subintervalo cerrado de I. Por la condición (5), existe un entero positivo N tal que $V \subset f^n(U)$ para toda $n > N$. De donde, tenemos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $n > N$. Al ser V un subintervalo cerrado de I, tenemos que $Int(V) \neq \emptyset$ y, como $Int(V) \subset V$, se tiene que f es topológicamente mezcladora y la condición (4) se cumple.

Supongamos (4) y veamos que se cumple (2). Sean U y V dos abiertos de I. Como f es topológicamente mezcladora, sabemos que existe un entero positivo N tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. En particular, si $Nn \geq N$ $f^{nN}(U) \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia, resulta que f^n es transitiva para cada $n > 0$ y, por lo tanto, la condición (2) se cumple.

Supongamos que f es monótona por partes y que f^2 es transitiva. Veamos que también se cumple (6). Supongamos primero que existe un subintervalo cerrado K contenido en el $Int(I)$ tal que $f^2(K) = I$. Si J es un subintervalo abierto de I, por la equivalencia de las condiciones (1) y (5) ya demostradas, tenemos que $K \subset f^n(J)$, para algún número entero positivo n. De donde, $f^{n+2}(J) = I$ y la condición (6) se cumple. Por lo que supondremos que $f^2(K) \neq I$ para ningún subintervalo cerrado K contenido en el $Int(I)$.

Como f es bitransitiva, por el Lema 6.1.1, f es transitiva y, por el Lema 4.1.19, f es suprayectiva y, por lo tanto, $f(K) \neq I$, para ningún subintervalo cerrado K contenido en el $(0,1)$. Por lo que $f^{-1}(0) \subset \{0,1\}$ o $f^{-1}(1) \subset \{0,1\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que pasa lo primero. Afirmamos que $f^{-2}(0) = \{0\}$. Como esta afirmación es cierta si $f^{-1}(0) = \{0\}$, supondremos que $f^{-1}(0) \neq \{0\}$. Entonces $f(1) = 0$. Más aún, si $f^{-1}(1) = \{0\}$, se sigue que $f^{-2}(0) = \{0\}$, de donde la afirmación es cierta. Veamos que $f^{-1}(1) = \{0\}$. Para esto, supongamos por el contrario que para alguna $c \in (0,1)$ se tiene que $f^{-1}(1) = \{c\}$. Entonces $f(d) = c$ para alguna $d \in (c,1)$. Si dejamos que $K = [c,d]$, se tendría que $f^2(K) = I$. Lo cual es una contradicción pues supusimos que $f^2(K) \neq I$. De donde, $f^{-1}(1) = \{0\}$.

Sea T el conjunto de puntos en el interior de I, los cuales son puntos extremos de los intervalos maximales en los que f^2 es monótona (página 158 [8]). T es distinto del vacío ya que f es monótona, por hipótesis, y finito por la Definición de función monótona por partes (7.1.25). Llamemos t al elemento más pequeño de T. Entonces f^2 no tiene puntos fijos en $(0,t)$, ya que si p fuera un punto fijo de f^2, como f^2 es monótona en el intervalo $[0,p]$, tendríamos que $f^2([0,p]) = [0,p]$, una contradicción a latransitividad de f^2. También afirmamos que $f^2(x) > x$, para cada $x \in (0,t)$, ya que, si no fuera así y $f^2(x) \leq x$ para alguna $x \in (0,t)$, entonces $[0,x]$ sería invariante bajo f^2 lo cual nos llevaría a una contradicción a la transitividad de f^2. Por lo tanto, f^2 no tiene puntos fijos en $(0,t)$ y $f^2(x) > x$ para cada $x \in (0,t)$. Sea s el mínimo de los valores de $f^2(x)$ con $x \in [t,1]$. Como $f^2([t,1])$ no está contenido en $[t,1]$, ya que si lo estuviera, habría una contradicción a la transitividad de f^2 y, como $f^{-2}(0) = \{0\}$, tenemos que $0 < s < t$. Como $f^2(x) > x$, para toda $x \in (0,t)$, se sigue que $f^2([s,1]) \subset [s,1]$, lo cual una vez más es una contradicción a la transitividad de f^2. En consecuencia, podemos concluir que la condición (6) se cumple.

Supongamos que la condición (6) es cierta y veamos que la condición (4) se cumple. Sean U y V dos abiertos de I. Por la condición (6), sabemos que existe un entero positivo N tal que $f^N(U) = I$. De aquí, se sigue que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $n > N$. Por lo tanto, la condición (4) se cumple. $\square$

Para concluir con esta sección, daremos una definición y unos resultados que nos serán de gran utilidad en la siguiente sección.

7.1.31 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Diremos que x es **recurrente** si para cada abierto U de X, con $x \in U$, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in U$. Al conjunto de los puntos recurrentes de f lo denotaremos como $\mathrm{R}(f)$.*

7.1.32 Observación. *De la Definición 7.1.31 podemos notar que si un punto x es recurrente entonces existe una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{i \to \infty} f^{n_i}(x) = x$; es decir, si x es recurrente entonces $x \in \omega(x,f)$.*

7.1.33 Proposición. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces $\mathrm{R}(f) = \mathrm{R}(f^n)$ para cada $n \geq 1$.*

Demostración. Sean n fija, $x \in \mathrm{R}(f^n)$ y U un abierto de X con $x \in U$. Por definición, existe $m \geq 1$ tal que $f^{nm}(x) \in U$. De donde, $x \in \mathrm{R}(f)$.

Ahora, supongamos que $x \in \mathrm{R}(f)$. Por la Observación 7.1.32, $x \in \omega(x,f)$ y, por la Proposición 3.8.4, $x \in \omega(f^j(x), f^n)$ para alguna $0 \leq j < m$. De donde, se sigue que $\omega(x, f^n) \subset \omega(f^j(x), f^n)$. Usando la Proposición 3.8.3, obtenemos sucesivamente lo siguiente:

$$\omega(f^j(x), f^n) \subset \omega(f^{2j}(x), f^n),$$

$$\vdots$$

$$\omega(f^{(n-1)j}(x), f^n) \subset \omega(f^{nj}(x), f^n) = \omega(x, f^n).$$

La última igualdad se da ya que $x \in \omega(x, f)$. De donde, tenemos que $\omega(x, f^n) = \omega(f^j(x), f^n)$ y, por lo tanto, $x \in \omega(x, f^n)$ y, por la Observación 7.1.32, $x \in \mathrm{R}(f^n)$. □

La prueba de la siguiente proposición se puede encontrar en la página 316 del artículo de Coven y Hedlund [15]

7.1.34 Proposición. *Sea $f : I \to I$ una función continua entonces se tiene que:*

$$Cl(\mathrm{Per}(f)) = Cl(\mathrm{R}(f)).$$

7.2. Transitividad y Periodicidad densa en el círculo

Observemos que el círculo unitario $\mathbf{S}^1$ es conexo pero no tiene intervalos de disconexión, ver Definición 7.1.13. Una vez más, la transitividad de una función no implica necesariamente periodicidad densa. Para tener esta propiedad en el círculo, basta pedir, además de la transitividad, que $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$, como veremos en el siguiente teorema. Pero antes de pasar a ello, daremos algunas definiciones y resultados que nos facilitarán su demostración.

7.2.1 Definición. *Sean I y J subintervalos cerrados de $\mathbf{S}^1$ y $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua. Diremos que I* ***f-cubre*** *a J, si existe un intervalo cerrado $K \subset I$ tal que $f(K) = J$.*

7.2.2 Definición. *Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que f* ***tiene una herradura de Smale****, si existen dos subcontinuos disjuntos X_0 y X_1 de X y n un entero positivo tales que $X_0 \cup X_1 \subset f^n(X_0)$ y $X_0 \cup X_1 \subset f^n(X_1)$.*

7.2.3 Ejemplo. *Toda función turbulenta (Definición 8.3.2) tiene una herradura de Smale. Como ejemplo, la función Tienda T (Definición 4.1.6) tomando a $X_0 = [0, \frac{1}{2}]$ y a $X_1 = [\frac{1}{2}, 1]$.*

La demostración de la siguiente Proposición se encuentra en el artículo de Bae y Yang [4] en la página 153.

7.2.4 Proposición. *Sean $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua, $(\mathbb{R}, \sigma)$ el espacio cubriente de $\mathbf{S}^1$, donde σ es la función de la Proposición 2.2.7, y $\tilde{f}$ un levantamiento de f. Si $\deg(f) = 0$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $\sigma(\mathrm{R}(\tilde{f})) = \mathrm{R}(f)$
2. $\sigma(\Omega(\tilde{f})) = \Omega(f)$
3. $\sigma(\mathrm{Per}(\tilde{f})) = \mathrm{Per}(f)$

7.2.5 Proposición. *Sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua con $\deg(f) = 0$. Entonces $Cl(\mathrm{Per}(f)) = Cl(\mathrm{R}(f))$.*

Demostración. Sean $(\sigma, \mathbb{R})$ el espacio cubriente de $\mathbf{S}^1$ y $\tilde{f}$ un levantamiento de f. Por la Proposición 7.2.4, $\sigma(Cl(\mathrm{Per}(\tilde{f}))) = Cl(\mathrm{Per}(f))$ y $\sigma(Cl(\mathrm{R}(\tilde{f}))) = Cl(\mathrm{R}(f))$. Por la Proposición 7.1.34, tenemos que $Cl(\mathrm{Per}(\tilde{f})) = Cl(\mathrm{R}(\tilde{f}))$. De donde, $Cl(\mathrm{Per}(f)) = Cl(\mathrm{R}(f))$. □

Ahora, dotemos al círculo $\mathbf{S}^1$ con el siguiente orden.

7.2.6 Definición. *Sean $\mathbf{S}^1$ el círculo unitario y a y $b \in \mathbf{S}^1$. Daremos a $\mathbf{S}^1$ el orden "$\leq$" de la siguiente manera: Diremos que $a \leq b$, si $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ con $\alpha \leq \beta$ (bajo el orden de los reales), donde el ángulo α (β), es el que se forma, en sentido contrario a las manecillas del reloj, entre la recta que une al punto a (b) con el origen y la recta que une al punto $(1, 0)$ con el origen. Como se muestra en la siguiente figura.*

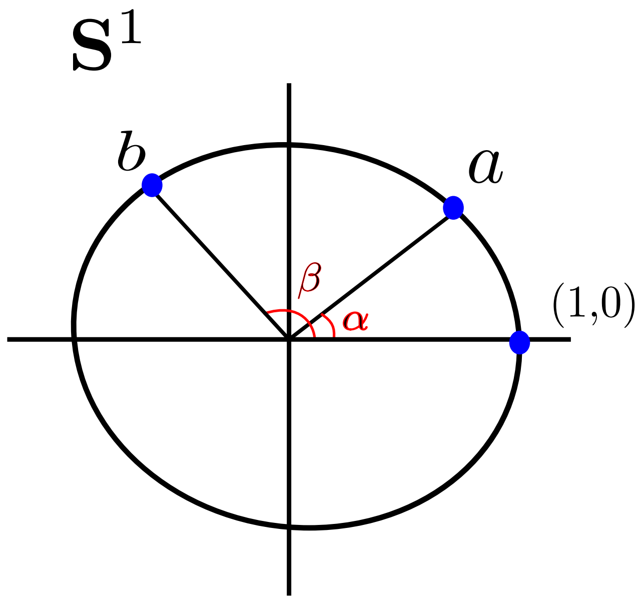

Figura 7.2: Orden "$\leq$" en $\mathbf{S}^1$

La prueba del Teorema 7.2.7 se pueden encontrar en el artículo de Bae y Yang [4] en las páginas 155 y 156.

7.2.7 Teorema. *Sea* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Si* $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$*, entonces* $Cl(\mathrm{Per}(f)) = Cl(\mathrm{R}(f))$*.*

La siguiente proposición nos será de gran ayuda para la demostración del Teorema 7.2.10 y sus prueba se pueden encontrar como el Teorema C en el artículo de Block et al [10].

7.2.8 Proposición. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Si el conjunto de los puntos periódicos* $\mathrm{Per}(f)$ *es cerrado y distinto del vacío, entonces* $\Omega(f) \subset \mathrm{Per}(f)$*.*

7.2.9 Corolario. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Si el conjunto de los puntos periódicos* $\mathrm{Per}(f)$ *es cerrado y distinto del vacío, entonces* $\Omega(f) = \mathrm{Per}(f)$*.*

Demostración. Por la Proposición 7.1.2, sabemos que $\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f)$. Ahora, por la Proposición 7.2.8, tenemos que $\Omega(f) \subset \mathrm{Per}(f)$. De donde, $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f)$. $\square$

7.2.10 Teorema. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Si* f *es transitiva y* $\mathrm{Per}(f)$ *es cerrado y distinto del vacío, entonces* $\mathrm{Per}(f)$ *es denso en* $\mathbf{S}^1$*.*

Demostración. Mostraremos que $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \mathbf{S}^1$ ya que, por la Observación 2.1.18, tendremos que $\mathrm{Per}(f)$ es denso en $\mathbf{S}^1$. Por el Corolario 7.2.9, $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f)$. Como $\mathrm{Per}(f)$ es cerrado, se tiene que $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \mathrm{Per}(f)$. En consecuencia, $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \Omega(f)$. Finalmente, por el Teorema 4.1.20, como f es transitiva, se tiene que $\Omega(f) = \mathbf{S}^1$ y, por lo tanto, $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \mathbf{S}^1$. $\square$

Antes de pasar al siguiente resultado daremos algunas definiciones y proposiciones para poder citar el Teorema de Clasificación de Poincaré.

7.2.11 Definición. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *una función continua. Diremos que* f ***preserva orientación*** *siempre que para cualesquiera* $x, y \in [0,1]$*, con* $x < y$*, se tiene que* $f(x) < f(y)$*, donde "* $<$ *" representa el orden usual de* $[0,1]$*. Observemos que es pedir que la función sea monótona. De la misma manera podemos extender esta definición para una función* $g : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *de la siguiente forma:* g *preserva orientación si existe un levantamiento* $\tilde{g}$ *tal que es monótono y* $\tilde{g}(x+1) = \tilde{g}(x) + 1$*.*

El siguiente resultado nos abrirá camino para poder definir el número de rotación de una función $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$. Su demostración puede consultarse en la página 387 del libro de Katok y Hasselblatt [23].

7.2.12 Proposición. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario,* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua tal que* f *preserva orientación y* $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un levantamiento de* f*. Para cada* $a \in \mathbb{R}$ *definimos:*

$$\tau(\tilde{f}) = \lim_{n \to \infty} \tfrac{1}{n}(\tilde{f}^n(a) - a).$$

Entonces este límite existe para cada $a \in \mathbb{R}$ *y es independiente de* a*. Más aún,* $\tau(\tilde{f})$ *difiere por un entero para dos levantamientos diferentes; es decir, si* $\tilde{f}_1$ *y* $\tilde{f}_2$ *son dos levantamientos de* f*, entonces* $\tau(\tilde{f}_1) - \tau(\tilde{f}_2) = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \in \mathbb{Z}$ *y si* f *tiene puntos periódicos, entonces* $\tau(\tilde{f})$ *es racional.*

7.2.13 Definición. *Definimos el* ***número de rotación*** *de* f *como* $\tau(f) = \pi(\tau(\tilde{f}))$*, donde* π *es la función cociente de la Observación 2.2.15.*

La siguiente proposición es de suma importancia para la demostración del Teorema 7.2.16. La prueba se puede consultar en la página 389 del libro de Katok y Hasselblatt [23].

7.2.14 Proposición. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua tal que* f *preserva orientación. Entonces* $\tau(f)$ *es racional si y sólo si* $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$.

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Clasificación de Poincaré, su demostración se puede encontrar en la página 397 del libro de Katok y Hasselblatt [23], el cual nos da la mitad de la demostración del siguiente resultado.

7.2.15 Teorema. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua tal que* $\tau(f)$ *es irracional. Si* f *es transitiva, entonces* f *es topológicamente conjugada a una rotación* $R_{\tau(f)}$*; es decir, a una rotación por un ángulo irracional.*

7.2.16 Teorema. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Entonces* f *es transitiva y* $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$ *si y sólamente si* f *es topológicamente conjugada a una rotación irracional.*

Demostración. Supongamos que f es transitiva y que $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$. Por la Proposición 6.2.15, $\tau(f)$ es irracional. Por el Teorema de Clasificación de Poincaré (Teorema 6.2.16), tenemos que f es topológicamente conjugada a una rotación irracional R_α.

Supongamos ahora que f es topológicamente conjugada a una rotación irracional R_α. En el Ejemplo 4.3.6 vimos que R_α es transitiva y minimal. Por la Proposición 4.2.6, sabemos que f es transitiva, al ser topológicamente conjugada con R_α. Ahora, por la Proposición 4.2.3, si f tuviera un punto periódico, R_α también tendría un punto periódico, lo cual es una contradicción a la minimalidad de R_α. De donde, $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$. $\square$

El Teorema 7.1.22 tiene un análogo para funciones del círculo en el círculo como a continuación enunciaremos.

7.2.17 Teorema. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Si* f *es transitiva y tiene al menos un punto fijo entonces* f^n *es transitiva para cada* $n \geq 3$.

Demostración. La demostración es exactamente la misma que la del Teorema 7.1.22 $\square$

También, para el círculo tenemos un análogo del Teorema 7.1.30. Pero, antes de pasar a su demostración, daremos algunos resultados que nos serán de utilidad.

7.2.18 Proposición. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua. Si* f *tiene puntos periódicos,* $\mathrm{Per}(f)$ *es cerrado y* f^n *es transitiva para cada* $n > 0$*, entonces para cada intervalo* $J \subset \mathbf{S}^1$*:*

$$\mathbf{S}^1 \setminus \{z\} \subset \bigcup_{m \geq 0} Int(f^m(J)).$$

Si $\bigcup_{m \geq 0} Int(f^m(J)) = \mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$*, entonces* z *es un punto fijo de* f*.*

Demostración. Llamemos $L = \bigcup_{m \geq 0} Int(f^m(J))$. Para ver que L no cubre a lo más en un punto, es suficiente probar que para cada $x \neq y$, la unión contiene a alguno de los dos.

Supondremos que $x, y \notin Int(J)$, ya que, si no fuera así, no habría nada que probar. Sea K el intervalo abierto de $\mathbf{S}^1$ tal que tiene como puntos extremos a x y a y y es disjunto de $Int(J)$. Por el Teorema 7.2.10, sabemos que el conjunto de puntos periódicos de f es denso en $\mathbf{S}^1$. Por lo que existe un punto periódico $p \in Int(J)$. Sea n el periodo de p. Como f^n es transitiva, por hipótesis, existe un entero positivo k tal que $f^{kn}(Int(J)) \cap K \neq \emptyset$. Por lo que $f^{kn}(J)$ es un intervalo el cual contiene a p e intersecta a K. Como $K \not\subseteq f^{kn}(Int(J))$, ya que, si no fuera así, habría una contradicción con el hecho que f es transitiva para cada $m > 0$, por hipótesis. Por lo anterior, se sigue que $Int(f^{kn}(J))$ contiene a x o contiene a y.

Supongamos ahora que $L = \bigcup_{m \geq 0} Int(f^m(J))$ no cubre a z. Si z no es un punto fijo de f, entonces existe un abierto K tal que $z \in K$ y $f^{-1}(K) \cap K = \emptyset$. Como $L = \mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$, es un intervalo homeomorfo a $(0, 1)$.

Sea M un intervalo abierto de $(0, 1)$. Entonces por hipótesis, f es transitiva y $Cl(\mathrm{Per}(f)) = \mathbf{S}^1$. De donde, M contiene un punto periódico p de f. Supongamos que k es el periodo de p y llamemos $g = f^k$. Entonces $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(M)$ es un intervalo, ya que p es un punto fijo de g. Por otro lado, como f^2 es transitiva, por el Teorema 7.2.17, g es transitiva. Por la parte (4) del Teorema 4.1.20, tenemos que C es denso en $\mathbf{S}^1$. De donde, se sigue que $Cl(C) = \mathbf{S}^1$.

Ahora, mostraremos que si x es un punto periódico de f tal que $o(x, f) \subset (0, 1)$, entonces existe un entero positivo N tal que $o(x, f) \subset f^n(M)$, para cada $n \geq N$. Para esto, supongamos que x es periódico para f de periodo t y que $o(x, f) \subset (0, 1)$. Sean x_1 y x_2 el más grande y el más pequeño de los elementos de la órbita de x, respectivamente. Como $(0, 1) \subset C$, existe un entero positivo r tal que $[x_1, x_2] \subset g^r(M)$. Nombremos $h = g^r$ y notemos que $h^t(x_1) = x_1$ y $h^t(x_2) = x_2$. De donde, se sigue que $o(x, f) \subset [x_1, x_2] \subset h^t(M)$. En consecuencia, para $N = t \cdot r \cdot k$, se tiene que $o(x, f) \subset f^N(M)$. Por tanto, si $n \geq N$, entonces $o(x, f) \subset f^n(M)$.

Ahora, supongamos que c y $d \in (0, 1)$ con $c < d$. Sean a y b dos puntos periódicos tales que $[c, d] \subset [a, b]$ y $o(a, f) \cup o(b, f) \subset (0, 1)$. Entonces, por lo que hicimos en el párrafo anterior, existen enteros positivos N_1 y N_2 tales que $o(a, f) \subset f^{N_1}(M)$ y $o(b, f) \subset f^{N_2}(M)$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Por lo tanto, si $n \geq N$, se tiene que $[c, d] \subset [a, b] \subset f^n(M)$.

De donde, existe un entero positivo N tal que $\mathbf{S}^1 \setminus K \subset f^n(J)$ para cada $n \geq N$. Como $f^{-1}(K) \subset \mathbf{S}^1 \setminus K$, aplicando f, tenemos que $K \subset f(\mathbf{S}^1 \setminus K)$ y, como $\mathbf{S}^1 \setminus K \subset f^n(J)$, $K \subset f(\mathbf{S}^1 \setminus K) \subset f^{n+1}(J)$. De donde, $f^{n+1}(J)$ contiene tanto a K como a $\mathbf{S}^1 \setminus K$. Por lo tanto, $f^{N+1}(J) = \mathbf{S}^1$ lo cual es una contradicción. Por tanto, z es un punto fijo de f. $\square$

El Teorema 7.2.21 se debe al artículo de Block, Coven y Mulvey [10] y se encuentra en la página 529, el cual nos será de gran ayuda en la demostración del Teorema 7.2.25. Su prueba se omitirá en este trabajo pues sale de los alcances del mismo. Antes de pasar al teorema, daremos algunas definiciones.

7.2.19 Definición. *Sean $\mathbf{S}^1$ el círculo unitario, $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua y $p \in \mathbf{S}^1$ un punto fijo de f. Definimos la **variedad inestable** de p como el siguiente conjunto:*

$$\mathbf{W}(p, f) = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{m \geq 0} f^m((p - \epsilon, p + \epsilon)).$$

Por lo que $x \in \mathbf{W}(p, f)$ si y sólamente si $x = f^{m_k}(y_k)$ para alguna sucesión de puntos $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a p y alguna sucesión números de enteros positivos $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$.

7.2.20 Definición. *Sean $\mathbf{S}^1$ el círculo unitario y $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua. A un punto y lo llamaremos **homoclínico** si existe un punto z, $z \neq y$, tal que $f^n(z) = z$, para alguna $n > 0$, $y \in \mathbf{W}(z, f^n)$ y $f^{kn}(y) = z$, para alguna $k > 0$.*

7.2.21 Teorema. *Sean $\mathbf{S}^1$ el círculo unitario y $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. f tiene una herradura de Smale;

2. f tiene un punto no errante homoclínico;

3. f tiene un punto no periódico, no errante y con órbita finita;

4. f tiene dos puntos periódicos cuyos periodos son n y m, donde n y m son los periodos más chicos del conjunto de periodos de f con $n < m$ y m/n no es una potencia de dos.

Antes de pasar al Teorema 7.2.25, haremos una observación concerniente al levantamiento de una función del círculo en sí mismo, cuando dicha función es monótona por partes.

7.2.22 Observación. *Sean $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua y monótona por partes, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ la función cubriente de la Proposición 2.2.7. Llamemos σ' a $\sigma|_{[0,1]}$. Como vimos en la Sección 1.1, de espacios cubrientes, por la Proposición 2.2.11, $f \circ \sigma|_{[0,1]}$ tiene un levantamiento $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal forma que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbf{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbf{S}^1 \end{tikzcd}$$

Ahora, como nuestra función f es monótona por partes, de la Definición 7.1.25, sabemos que $\mathbf{S}^1$ tiene una partición finita en intervalos de tal forma que f es monótona en cada uno de los subintervalos. Sea $p = (1, 0)$ el punto en $\mathbf{S}^1$ tal que $(\sigma')^{-1}(p) = \{0, 1\}$. Notemos que el intervalo $J = \mathbf{S}^1 \setminus \{p\}$ es un intervalo abierto de $\mathbf{S}^1$ homeomorfo a $(0, 1)$. Además, tenemos que $\sigma^{-1}(J)$ es un intervalo homeomorfo a $(0, 1)$ el cual está contenido en $\mathbb{R}$. Como la función cubriente σ es un homeomorfismo local, Observación 2.2.5, la partición que tenemos en J se preserva bajo $\sigma^{-1}(J)$. Por tanto, $\sigma^{-1}(J)$ tiene una partición. Procediendo de la misma forma, podemos tomar la partición del rango de nuestra función f el cual podremos levantar a un intervalo $\sigma^{-1}(J')$ homeomorfo a $(0, 1)$ el cual está contenido en $\mathbb{R}$, donde J' es el intervalo que queda al quitarle el punto p al rango de f. Tomando un refinamiento adecuado de las particiones obtenidas, podemos hacer que nuestro levantamiento $\tilde{f}$ sea una función monótona por partes. Veamos en un dibujo lo que hemos hecho hasta ahora (Figura 6.3).

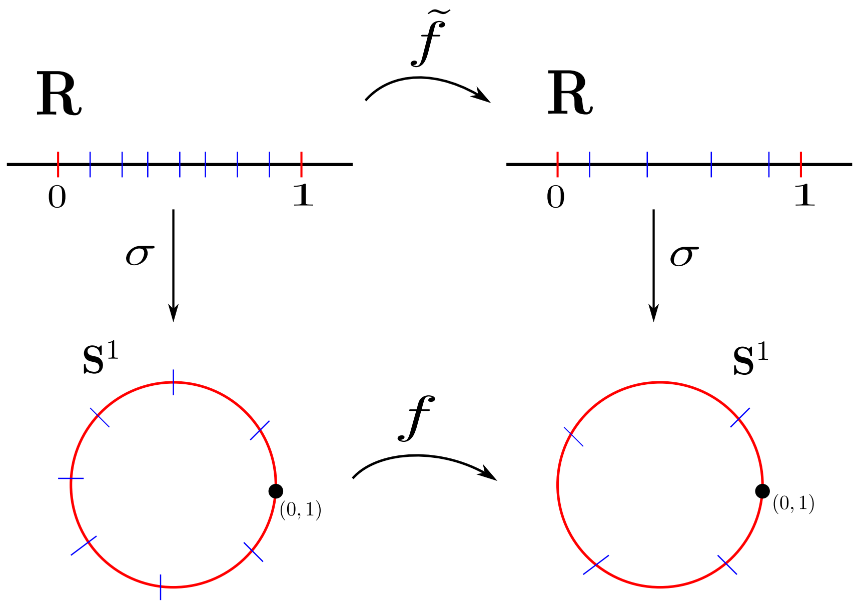

Figura 7.3: Levantamiento de una función monótona por partes

Los siguientes enunciados nos será de gran ayuda en la demostración del Teorema 7.2.25. La prueba del primero puede consultarse en la página 339 del libro de Alsedà et al. [2].

7.2.23 Proposición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es topológicamente mezcladora, entonces f es totalmente transitiva.*

7.2.24 Lema. *Sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua. Si f es transitiva y $\mathrm{Per}(f)$ es cerrado, entonces para cada subconjunto conexo C de $\mathbf{S}^1$, con $Int(C) \neq \emptyset$, se tiene que $X = Cl\left(\bigcup_{n\geq 0} f^n(C)\right)$ tiene una cantidad finita de componentes. Cada una de estas componentes tiene interior distinto del vacío y son permutadas por f.*

Demostración. Observemos primero que X es un conjunto cerrado e invariante bajo f. Como $Int(C) \neq \emptyset$, se tiene que $Int(X) \neq \emptyset$ y, por la parte (9) del Teorema 4.1.20, $X = \mathbf{S}^1$. Ahora, como C es una componente de $\mathbf{S}^1$ con interior no vacío, por el Teorema 6.2.26, $\mathbf{S}^1$ tiene una cantidad finita de componentes las cuales forman una descomposición periódica regular. En consecuencia, X tiene una cantidad finita de componentes las cuales tienen interior distinto del vacío y son permutadas por f (Definición 6.2.5). $\square$

7.2.25 Teorema. *Sean* $\mathbf{S}^1$ *el círculo unitario y* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ *una función continua tal que* $\mathrm{Per}(f)$ *es cerrado. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Existe un número entero positivo* m *tal que* f^m *es transitiva, tiene un punto fijo y un punto periódico de periodo impar mayor que* 1*;*
2. *Existe un número entero positivo* m *tal que* f^{2m} *es transitiva y* f^m *tiene un punto fijo;*
3. f^n *es transitiva para cada* $n > 0$ *y* f *tiene puntos periódicos;*
4. f *es topológicamente mezcladora;*

Más aún, si f *es monótona por partes, entonces el siguiente enunciado es equivalente a los anteriores.*

5. *Para cada subintervalo* $J \subset \mathbf{S}^1$*, existe un número entero positivo* n *tal que* $f^n(J) = \mathbf{S}^1$*.*

Demostración. Supongamos (1) y veamos que se cumple (2). Por el Teorema 7.2.17, basta suponer que $m = 1$ y probar que f^2 es transitiva. Supongamos que f^2 no es transitiva. Por el Corolario 6.2.25, existe una descomposición periódica regular de longitud 2 de $\mathbf{S}^1$. Sea $\mathcal{D} = \{D_0, D_1\}$ dicha descomposición. Por la definición de una descomposición periódica regular, sabemos lo siguiente: $\mathbf{S}^1 = D_0 \cup D_1$, $Int(D_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0,1\}$, $Int(D_0 \cap D_1) = Int(D_0) \cap Int(D_1) = \emptyset$ y, por último, $f(D_0) = D_1$ y $f(D_1) = D_0$. Sea L una componente de D_0 con $Int(L) \neq \emptyset$ y llamemos $X = Cl(\bigcup\limits_{n\geq 0} f^{2n}(L))$. Por la Proposición 7.2.24, X tiene una cantidad finita de componentes, cada una de estas componentes es un intervalo cerrado y son permutadas por f^2. Por tanto $X \cup f(X) = \mathbf{S}^1$ y f permuta cíclicamente las componentes de X y $f(X)$, ya que si no fuera así, f no sería transitiva, lo cual sería una contradicción.

Supongamos que X tiene k componentes. Entonces $f(X)$ también tiene k componentes. Las componentes de X y de $f(X)$ son alternadas alrededor del círculo. Sea p el punto periódico de periodo impar n, con $n > 1$. Como $Int(X \cap f(X)) = \emptyset$ y $f^2(X) = X$, se sigue que $p \in X \cap f(X)$. Como f permuta cíclicamente las componentes de X y de $f(X)$, f^{2k} lleva a cada una de las dos componentes que contienen a p en sí mismas, por tanto, $f^{2k}(p) = p$.

De donde, $2k$ es un múltiplo de n, como n es impar, se tiene que k es un múltiplo de n. Por otro lado, f^{2n} lleva esas mismas dos componentes en sí mismas y, por un argumento similar al anterior, $2n$ es un múltiplo de $2k$; es decir, n es un múltiplo de k. En consecuencia $n = k$. Entonces los dos puntos extremos en $X \cap f(X)$ adyacentes a p (uno de cada lado de p) ambos tendrían periodo $2k$. Lo cual es una contradicción, ya que $X \cap f(X)$ es invariante y contiene exactamente $2k$ puntos.

Supongamos que se cumple (2) y probemos que (3) es verdadero. Por hipótesis, sabemos que existe un entero positivo m tal que f^{2m} es transitiva y que f^m tiene un punto fijo. De donde f tiene un punto periódico. Como f^{2m}, por la Proposición 6.1.1, f^2 y f son transitivas. Por el Teorema 7.2.17, f^n es transitiva para cada $n \geq 3$. De donde, f^n es transitiva para cada $n > 0$.

Supongamos ahora que f^n es transitiva para cada $n > 0$ y f tiene puntos periódicos; es decir, se cumple (3), veremos que se satisface (4). Si además, suponemos que f es monotona por partes, veremos que se cumple (5) también. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. De la Sección 1.1, de espacios cubrientes, de la explicación después de la Proposición 2.2.11, se sigue que f^n tiene un levantamiento $\tilde{f} : [0,1] \to [0,1]$. Por lo que, para cada $k > 0$, f^{kn} se levanta a $\tilde{f}^k : [0,1] \to [0,1]$. Como las órbitas densas se levantan a órbitas densas (página 8 [16]), $\tilde{f}^k$ es transitiva para cada $k > 0$. Por el Teorema 7.1.30, $\tilde{f}$ es topológicamente mezcladora, por lo que f^n también lo es. Por la Proposición 7.1.28, f es topológicamente mezcladora (página 8 [16]). Si, además, suponemos que f es monótona por partes, entonces $\tilde{f}$ también será monótona por partes, como se vio en la Observación 7.2.22. Una vez más, por el Teorema 7.1.30, la condición (5) se cumple para $\tilde{f}$, por lo que la condición (5) se cumple para f^n y, por lo tanto, también se cumple para f.

Supongamos que f es topológicamente mezcladora y veamos que (1) también se cumple. Basta probar que f tiene un punto no periódico, no errante cuya órbita es finita. Así, por el Teorema 7.2.21, f tiene dos puntos periódicos, cuyos periodos son n y m, donde n y m son los periodos más chicos del conjunto de periodos de f, con $n < m$ y m/n no es una potencia de dos. Por lo tanto, existe una k tal que f^{kn} tiene un punto fijo y un punto periódico de periodo impar mayor que uno.

Por el Teorema 7.2.16, si f no tuviera puntos periódicos sería topológicamente conjugada a una rotación por un ángulo irracional. Por lo que no sería topológicamente mezcladora, lo cual es una contradicción. De donde, f tiene puntos periódicos. Por el Teorema 7.2.10, $\mathrm{Per}(f)$ es denso en $\mathbf{S}^1$. Así, todo punto es no errante. Sean p un punto con periodo mayor que uno y $J \subset \mathbf{S}^1$

un intervalo. A p lo podemos tomar de esa forma ya que si todos los puntos periódicos fueran fijos, entonces f sería la identidad. Ahora, supongamos que $J \cap o(p, f) = \emptyset$. Por la Proposición 7.2.23, f es totalmente transitiva y, por la Proposición 7.2.18, $\bigcup_{k \geq 0} Int(f^k(J))$ no cubre a lo más un punto, el cual es un punto fijo de f. La unión anterior debe contener a p. Por lo que J contiene el punto no periódico, no errante y con órbita finita como se deseaba.

Supongamos que la condición (5) es cierta y veamos que la condición (4) se cumple. Sean U y V dos abiertos de $\mathbf{S}^1$. Por la condición (5), sabemos que existe un entero positivo N tal que $f^N(U) = \mathbf{S}^1$. De aquí, se sigue que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $n > N$. Por lo tanto, la condición (4) se cumple. $\square$

La Proposición 7.2.26 nos será de ayuda para probar algunos resultados que usaremos más adelante. Su demostración se puede encontrar en la página 119 del libro de Alsedà, Llibre y Misiurewicz [2].

7.2.26 Proposición. *Sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función continua de grado d. Entonces f tiene al menos $|1 - d|$ puntos fijos.*

7.2.27 Proposición. *Sea $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ una función transitiva con* $\deg(f) = -1$. *Entonces alguno de los siguientes enunciados se cumple:*

1. *f^s es transitiva para cada $s \geq 1$;*

2. *Existen subintervalos no degenerados y cerrados J y K de $\mathbf{S}^1$ tales que $J \cup K = \mathbf{S}^1$, $J \cap K = \{y, z\}$ con y y z puntos fijos de f, $f(J) = K$ y $f(K) = J$. Más aún, $f^2|_J$ y $f^2|_K$ son transitivas.*

Demostración. Como $\deg(f) = -1$, por la Proposición 7.2.26, f tiene al menos 2 puntos fijos. De la Proposición 6.1.2 y el Teorema 7.2.17, tenemos que (1) se cumple o f^2 es no transitiva. Ahora si f^2 no es transitiva, por el Corolario 6.2.25 y el Teorema 6.2.15, podemos ver que (2) se cumple. $\square$

Capítulo 8

Entropía topológica

Adler, Konheim y McAndrew en [1] introdujeron la entropía como un invariante de conjugación topológico, utilizando de manera esencial el concepto de cubierta abierta. Para cada función continua $f : X \to X$, con X un espacio topológico compacto, un número real no negativo o ∞ es asignado, el cual provee una medida numérica para la complejidad de la dinámica de la función.

Después Bowen en [12] dio una definición equivalente de entropía, para funciones uniformemente continuas de espacios métricos, no necesariamente compactos, en sí mismos. En la primera sección de este capítulo, daremos la definición original de entropía topológica de Adler, Konheim y McAndrew y, en la sección dos daremos la definición de Bowen y veremos cómo ambas definiciones son equivalentes en espacios métricos compactos.

8.1. Definición de entropía usando cubiertas abiertas

En esta sección los espacios en los que trabajaremos X, Y, etc, son espacios métricos y compactos. Las letras griegas α, β, γ y η representarán cubiertas abiertas de los espacios métricos y compactos y todas las funciones con las que trabajaremos serán continuas. Recordemos ahora la definición de cubierta abierta.

8.1.1 Definición. *Sea X un conjunto y $B \subset X$. Diremos que una familia de subconjuntos $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de X es una* ***cubierta*** *de B, si $B \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$. Diremos* *que $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una* ***cubierta finita*** *si Λ es finito. Si X es un espacio topológico y cada C_λ es un subconjunto abierto de X, entonces $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una* ***cubierta abierta****.*

8.1.2 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto y α y β dos cubiertas abiertas de X. Definimos:*

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha \;\; y \;\; B \in \beta\}.$$

Observemos que $\alpha \vee \beta$ también es una cubierta abierta de X.

De la definición anterior se sigue de manera inmediata las siguientes propiedades:

1. $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$
2. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$. Denotaremos a esta cubierta como $\alpha \vee \beta \vee \gamma$.

8.1.3 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto y α y β dos cubiertas abiertas de X. Diremos que β es un* ***refinamiento*** *de α, denotado como $\alpha < \beta$, si para cada $B \in \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$.*

Veamos ahora algunas propiedades básicas del operador "$\vee$" que son necesarias para definir la entropía.

8.1.4 Proposición. *Sean X un espacio métrico y compacto y α, β, γ y η cuatro cubiertas abiertas de X. Entonces*

1. $\alpha < (\alpha \vee \beta)$ *y* $\beta < (\alpha \vee \beta)$,

2. $\alpha < (\alpha \vee \alpha)$ *y* $(\alpha \vee \alpha) < \alpha$,

3. Si $\alpha < \beta$, *entonces* $(\alpha \vee \beta) < \beta$,

4. Si $\alpha < \beta$ *y* $\gamma < \eta$, *entonces* $(\alpha \vee \gamma) < (\beta \vee \eta)$.

Demostración. 1. Se sigue de la definición del operador "$\vee$" y del hecho que para cualesquiera dos conjuntos A y B, se tiene que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.

2. Se sigue del hecho que $\alpha \vee \alpha = \alpha$, ya que $A \cap A = A$ y que $A \subset A$; es decir, $\alpha < \alpha$.

3. Observemos que, como β es un refinamiento de α, para cada $B \in \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$. De donde, $A \cap B = A$. En consecuencia, $\alpha \vee \beta = \alpha$ y, como $\alpha < \beta$, por hipótesis, se tiene que $\alpha = \alpha \vee \beta < \beta$.

4. Se sigue del hecho que para cualesquiera A, B, C y D conjuntos con $A \subset C$ y $B \subset D$, se tiene que $A \cap B \subset C \cap D$.

$\square$

Como nuestro espacio X es compacto, para cualquier cubierta abierta α, se tiene que α tiene al menos una subcubierta finita.

8.1.5 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto y α una cubierta abierta de X. Si β es una subcubierta finita de α, entonces $|\beta|$ denotará la* ***cardinalidad*** *de β.*

8.1.6 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto y α una cubierta abierta de X, definimos $\mathrm{N}\big(\alpha\big)$ como:*

$$\mathrm{N}\big(\alpha\big) = \text{mín}\{|\beta| \mid \beta \textit{ es subcubierta finita de } \alpha\}.$$

Observemos que, para cualquier cubierta abierta α de X, $\mathrm{N}\big(\alpha\big) \geq 1$. En el siguiente enunciado daremos algunas propiedades básicas de $\mathrm{N}\big(\alpha\big)$.

8.1.7 Proposición. *Sea X un espacio métrico y compacto. Dadas dos cubiertas abiertas α y β de X, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $\alpha < \beta$, $\mathrm{N}\big(\alpha\big) \leq \mathrm{N}\big(\beta\big)$,*

2. *Si $\alpha < \beta$, $\mathrm{N}\big(\alpha \vee \beta\big) = \mathrm{N}\big(\beta\big)$,*

3. *$\mathrm{N}\big(\alpha \vee \alpha\big) = \mathrm{N}\big(\alpha\big)$,*

4. *Si α y β son de cardinalidad finita, entonces $|\alpha \vee \beta| \leq |\alpha||\beta|$,*

5. *$\mathrm{N}\big(\alpha \vee \beta\big) \leq \mathrm{N}\big(\alpha\big)\,\mathrm{N}\big(\beta\big)$*

Demostración. 1. Sea $\{B_1, \ldots, B_{\mathrm{N}(\beta)}\}$ una subcubierta de β de cardinalidad mínima. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\big(\beta\big)\}$, existe $A_i \in \alpha$ tal que $B_i \subset A_i$. Por lo que $\{A_1, \ldots, A_{\mathrm{N}(\beta)}\}$ cubre a X y es una subcubierta finita de α. De donde, $\mathrm{N}\big(\alpha\big) \leq \mathrm{N}\big(\beta\big)$

2. Por (1) de la Proposición 8.1.4 sabemos que $\beta < (\alpha \vee \beta)$. Por (1), se tiene que $\mathrm{N}\left(\beta\right) \leq \mathrm{N}\left(\alpha \vee \beta\right)$. Veamos ahora la otra desigualdad. Por (3) de la Proposición 8.1.4, se tiene que $(\alpha \vee \beta) < \beta$ y, por (1), tenemos que $\mathrm{N}\left((\alpha \vee \beta)\right) \leq \mathrm{N}\left(\beta\right)$. Por lo tanto, $\mathrm{N}\left((\alpha \vee \beta)\right) = \mathrm{N}\left(\beta\right)$.

3. Por (2) de la Proposición 8.1.4 tenemos que $\alpha < (\alpha \vee \alpha)$ y que $(\alpha \vee \alpha) < \alpha$. Aplicando (1), obtenemos las siguientes desigualdades: $\mathrm{N}\left(\alpha\right) \leq \mathrm{N}\left((\alpha \vee \alpha)\right)$ y $\mathrm{N}\left((\alpha \vee \alpha)\right) \leq \mathrm{N}\left(\alpha\right)$. De donde, $\mathrm{N}\left((\alpha \vee \alpha)\right) = \mathrm{N}\left(\alpha\right)$.

4. Supongamos que $|\alpha| = n$ y $|\beta| = m$. Entonces:

$$\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\} \;\text{ y }\; \beta = \{B_1, \ldots, B_m\}.$$

Sabemos que $\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, por lo que tenemos la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccc} A_1 \cap B_1 & \ldots & A_1 \cap B_m \\ \vdots & & \vdots \\ A_n \cap B_1 & \ldots & A_n \cap B_m. \end{array}$$

De donde, $|\alpha \vee \beta| \leq |\alpha||\beta|$.

5. Sean γ y η subcubiertas de α y β, respectivamente, tales que $|\gamma| = \mathrm{N}\left(\alpha\right)$ y $|\eta| = \mathrm{N}\left(\beta\right)$. Entonces $\gamma \vee \eta$ es una cubierta abierta de X tal que:

$$|\gamma \vee \eta| \leq |\gamma||\eta| = \mathrm{N}\left(\alpha\right)\mathrm{N}\left(\beta\right).$$

Como $\gamma \vee \eta$ es una subcubierta de $\alpha \vee \beta$ se tiene que:

$$\mathrm{N}\left(\alpha \vee \beta\right) \leq \mathrm{N}\left(\alpha\right)\mathrm{N}\left(\beta\right).$$

$\square$

8.1.8 Definición. *Sean X y Y espacios métricos y compactos, $f : X \to Y$ una función continua y α una cubierta abierta de Y. Definimos:*

$$f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \alpha\}.$$

Dada $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$f^{-n}(\alpha) = \{f^{-n}(A) \mid A \in \alpha\}.$$

Donde, $f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A) = \{x \in X \mid f^n(x) \in A\}$. Definimos $f^{-0}(\alpha) = \alpha$.

8.1.9 Observación. *Sean X y Y espacios métricos y compactos, $f : X \to Y$ una función continua y α una cubierta abierta de Y. Observemos que $f^{-1}(\alpha)$ también es una cubierta abierta de X, por la continuidad de f. Si α y β son dos cubiertas abiertas de Y tales que $\alpha < \beta$, entonces $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$, de aquí se sigue también que $f^{-n}(\alpha) < f^{-n}(\beta)$. También tenemos la siguiente igualdad $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$. Esto gracias a que las intersecciones se preservan bajo la preimagen de una función. De aquí, también obtenemos que $f^{-n}(\alpha \vee \beta) = f^{-n}(\alpha) \vee f^{-n}(\beta)$.*

8.1.10 Proposición. *Sean X y Y espacios métricos y compactos, $f : X \to Y$ una función continua y α una cubierta abierta de Y. Entonces $\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right) \leq \mathrm{N}\left(\alpha\right)$. Si, además, f es suprayectiva, entonces $\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right) = \mathrm{N}\left(\alpha\right)$.*

Demostración. Sea γ una subcubierta de α tal que $|\gamma| = \mathrm{N}\left(\alpha\right)$, digamos que:

$$\gamma = \{A_1, \ldots, A_{\mathrm{N}(\alpha)}\}.$$

Entonces $Y = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}\left(\alpha\right)} A_i$.

Para cada $x \in X$, existe $1 \leq i \leq \mathrm{N}\left(\alpha\right)$ tal que $f(x) \in A_i$. Por lo tanto, $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}\left(\alpha\right)} f^{-1}(A_i)$. Como $f^{-1}(\gamma) = \{f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_{\mathrm{N}(\alpha)})\}$ es una subcubierta abierta de $f^{-1}(\alpha)$ con $\mathrm{N}\left(\alpha\right)$ elementos, $\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right) \leq \mathrm{N}\left(\alpha\right)$.

Supongamos ahora que f es suprayectiva. Procediendo de manera análoga, tenemos que, si $\{f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_{\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right)})\}$ es una subcubierta abierta de cardinalidad mínima de $f^{-1}(\alpha)$, entonces $\{A_1, \ldots, A_{\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right)}\}$ es una cubierta abierta de Y. Ya que, por ser f suprayectiva, $Y = f(X) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right)} A_i$ y, así, $\mathrm{N}\left(\alpha\right) \leq \mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right)$. Por lo tanto, $\mathrm{N}\left(f^{-1}(\alpha)\right) = \mathrm{N}\left(\alpha\right)$. $\square$

Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua y α una cubierta abierta de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la cubierta abierta:

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

A partir de la pareja $f : X \to X$ y α, obtenemos una sucesión de cubiertas:

$$\alpha, \alpha \vee f^{-1}(\alpha), \ldots, \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha), \ldots$$

Observemos que cada una de ellas refina a la otra; es decir:

$$\alpha < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) < \cdots < \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) < \cdots$$

Así, obtenemos la siguiente sucesión de números naturales:

$$\mathrm{N}\big(\alpha\big) \leq \mathrm{N}\big(\alpha \vee f^{-1}(\alpha)\big) \leq \cdots \leq \mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big) \leq \cdots$$

Notemos que, una vez que fijamos la pareja f y α, el valor de $\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)$ sólo depende de n. La idea es poder discernir qué tan simple o complicado es el sistema dinámico generado por $f : X \to X$, a través del estudio de la rapidez del crecimiento de la sucesión $\big\{\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)\big\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito.

Intuitivamente una función sencilla $f : X \to X$, que mueve muy poco a los puntos de X, estará relacionada con un crecimiento *lento* o polinomial (con respecto a la variable n) del valor $\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)$. Una función con dinámica más complicada movería tanto a los puntos de X que el crecimiento sería exponencial.

Para describir esta diferencia entre crecimiento polinomial y exponencial, calcularemos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)).$$

Observemos que si el crecimiento con respecto a la variable n es polinomial de grado m, para alguna $m \in \mathbb{N}$ (o está acotado superiormente por un polinomio en n), entonces obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}\ln(n) = 0.$$

Si el crecimiento es exponencial sobre n, entonces pasa lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(e^{an}) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n} = a,$$

para alguna a con valor positivo. Por lo tanto, si el crecimiento es polinomial, el límite es cero, en cambio, si crece exponencialmente el límite es positivo.

Antes de pasar a ver la existencia de dicho límite, daremos algunas definiciones y resultados que nos serán de gran ayuda en su demostración.

8.1.11 Proposición. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua, α una cubierta abierta de X y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\ln\Big(\mathrm{N}\Big(\bigvee_{i=0}^{(n+m)-1} f^{-i}(\alpha)\Big)\Big) \leq \ln\Big(\mathrm{N}\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\Big)\Big) + \ln\Big(\mathrm{N}\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}(\alpha)\Big)\Big).$$

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y α una cubierta abierta de X. Entonces:

$$\ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\alpha)\big)\big) =$$

$$= \ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\alpha)\big)\big) =$$

$$= \ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha))\big)\big).$$

Por (5) de la Proposición 8.1.7, tenemos que lo anterior es menor igual a:

$$\ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha)\big)\,\mathrm{N}\big(f^{-m}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha))\big)\big) =$$

$$= \ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha)\big)\big) + \ln\big(\mathrm{N}\big(f^{-m}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha))\big)\big).$$

Ahora, por la Proposición 8.1.10, tenemos que la última suma es menor igual a:

$$\ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha)\big)\big) + \ln\big(\mathrm{N}\big(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\big)\big),$$

con lo que concluimos la demostración. □

8.1.12 Definición. *Dada una sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $\mathbb{R}$*, definimos sus límites superior e inferior, denotados como* $\text{lím}\sup(a_n)$ *y* $\text{lím}\inf(a_n)$*, respectivamente, de la siguiente manera:*

- *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no está acotada superiormente, entonces* $\text{lím}\sup(a_n) = \infty$*.*
- *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no está acotada inferiormente, entonces* $\text{lím}\inf(a_n) = -\infty$*.*
- *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *está acotada, entonces:*

$$\text{lím}\sup(a_n) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid \textit{existe } \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N},\ \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = y\},$$

y

$$\text{lím}\inf(a_n) = \text{ínf}\{y \in \mathbb{R} \mid \textit{existe } \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N},\ \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = y\}.$$

De la Definición 8.1.12 se sigue que $\text{lím}\inf(a_n) \leq \text{lím}\sup(a_n)$ y que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0,\ a_0 \in \mathbb{R},$$

si y sólo si $\text{lím}\sup(a_n) = \text{lím}\inf(a_n) = a_0$.

8.1.13 Proposición. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *que cumple las siguientes condiciones:*

- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $a_n \geq 0$*, y*
- *Para cada* $n, m \in \mathbb{N}$*, se tiene que* $a_{n+m} \leq a_n + a_m$*.*

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ *existe. Además,* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \text{ínf}\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$*.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ un número fijo. Para cada $n > m$, podemos escribir $n = mq + r$, donde $1 \leq q$ y $0 \leq r < m$. Entonces se tiene que:

$$a_n = a_{mq+r} \leq a_{qm} + a_r \leq qa_m + a_r.$$

Observemos que, para cada $n > m$, tenemos que:

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n}a_m + \frac{a_r}{n}.$$

Como $n = qm + r$, $\frac{n-r}{m} = q$, y $\frac{q}{n} = \frac{n-r}{nm}$. De aquí se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} = \frac{1}{m},$$

y, así:

$$\lim_{n\to\infty} \big(\frac{q}{n}a_m + \frac{a_r}{n}\big) = \frac{a_m}{m},$$

ya que a_r sólo toma una cantidad finita de valores: $a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\limsup \big(\frac{a_n}{n}\big) \leq \frac{a_m}{m}.$$

por lo que tenemos que:

$$\limsup \big(\frac{a_n}{n}\big) \leq c = \inf\{\tfrac{a_m}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Por otro lado, como para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $c \leq \frac{a_n}{n}$, resulta que:

$$c \leq \liminf \big(\frac{a_n}{n}\big).$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = c$. □

8.1.14 Proposición. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua y α una cubierta abierta de X. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big))$$

existe.

Demostración. Fijemos $a_n = \ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big))$. Por la Proposición 8.1.13, basta mostrar que $a_{n+k} \leq a_n + a_k$ para $k, n \geq 1$. Entonces tenemos que:

$$a_{n+k} = \ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n+k-1} f^{-i}(\alpha)\big)).$$

Por la Proposición 8.1.11, tenemos que lo anterior es menor igual a:

$$\ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)) + \ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}(\alpha)\big)) = a_n + a_k.$$

Con lo que concluimos que el límite existe. □

8.1.15 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua y α una cubierta abierta de X. Definimos la **entropía** de f **con respecto a la cubierta abierta** α como:*

$$\operatorname{ent}(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)).$$

8.1.16 Observación. *1. $\operatorname{ent}(f, \alpha) \geq 0$ ya que $\mathrm{N}\big(\alpha\big) \geq 1$.*

2. Si $\alpha < \beta$, entonces $\operatorname{ent}(f, \alpha) \leq \operatorname{ent}(f, \beta)$. Esto se sigue del hecho que si $\alpha < \beta$, entonces $\displaystyle\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) < \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta)$ y, por (1) de la Proposición 8.1.7, $\operatorname{ent}(f, \alpha) \leq \operatorname{ent}(f, \beta)$.

8.1.17 Definición. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua y α una cubierta abierta de X. Definimos la **entropía topológica** de f como:*

$$\operatorname{ent}(f) = \sup\{\operatorname{ent}(f, \alpha) \mid \alpha \textit{ es una cubierta abierta de } X\}.$$

8.1.18 Observación. *De la definición de $\operatorname{ent}(f)$ el supremo se puede tomar sobre todas las cubiertas abiertas finitas de X. Esto se sigue por (2) de la Observación 8.1.16.*

Ahora veremos algunas propiedades importantes de la entropía topológica.

8.1.19 Proposición. *Sean X un espacio métrico y compacto, $f : X \to X$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\operatorname{ent}(f^k) = k \operatorname{ent}(f).$$

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ según las hipótesis. Tomemos α una cubierta abierta de X y sea β la cubierta abierta de X dada por:

$$\beta = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-k+1}(\alpha).$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{ent}(f^k, \beta) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln\big(\mathrm{N}\big(\beta \vee (f^k)^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee (f^k)^{-n+1}(\beta)\big)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln\big(\mathrm{N}\big(\beta \vee f^{-k}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-nk+k}(\beta)\big)\big), \end{aligned}$$

sustituyendo β por $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-k+1}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ent}(f^k, \beta) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-k+1}(\alpha) \vee \right. \\ &\quad \left. \vee f^{-k}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{k}{nk} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\big) \\ &= k \operatorname{ent}(f, \alpha). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho que:

$$\left\{ \tfrac{1}{nk} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\big) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una subsucesión de:

$$\left\{ \tfrac{1}{n} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\right)\big) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Tenemos entonces que $\operatorname{ent}(f^k) \geq \operatorname{ent}(f^k, \beta) = k \operatorname{ent}(f, \alpha)$, para cada cubierta abierta α de X.

Por lo tanto, si $\operatorname{ent}(f) = \infty$, entonces $\operatorname{ent}(f^k) = \infty$ y, si $\operatorname{ent}(f)$ es finita, entonces $\operatorname{ent}(f^k) \geq k \operatorname{ent}(f)$.

Por otro lado, como:

$$\alpha \vee f^{-k}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+k}(\alpha) < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha),$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee f^{-k}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+k}(\alpha)\right)\big) \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\big). \end{aligned}$$

Así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \ln \big(\mathrm{N} \left(\alpha \vee f^{-k}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+k}(\alpha)\right)\big) \leq \operatorname{ent}(f, \alpha).$$

Por lo que, para cada cubierta abierta α, se tiene que:

$$\frac{1}{k} \operatorname{ent}(f^k, \alpha) \leq \operatorname{ent}(f, \alpha) \leq \operatorname{ent}(f).$$

De aquí, se sigue que $\operatorname{ent}(f^k) \leq k \operatorname{ent}(f)$. Por lo tanto, $\operatorname{ent}(f^k) = k \operatorname{ent}(f)$. $\square$

8.1.20 Proposición. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos semiconjugados. Entonces* $\operatorname{ent}(f) \geq \operatorname{ent}(g)$.

Demostración. Sea α una cubierta abierta de Y. Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ent}(g,\alpha) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\big)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\big(\mathrm{N}\big(h^{-1}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\big)\big)\big) \quad \text{(por la Proposición 8.1.10)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\big(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} h^{-1}(g^{-i}(\alpha))\big)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\big(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(h^{-1}(\alpha))\big)\big) \quad = \operatorname{ent}(f,h^{-1}(\alpha)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{ent}(g)\leq\operatorname{ent}(f)$ □

8.1.21 Proposición. *Sean X y Y espacios métricos y compactos, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones continuas. Si f y g son topológicamente conjugadas, entonces* $\operatorname{ent}(f) = \operatorname{ent}(g)$.

Demostración. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$. Como f y g son conjugadas por h, g y f son conjugadas por h^{-1}. De la Proposición 8.1.20, se sigue que $\operatorname{ent}(f) \leq \operatorname{ent}(g)$ y $\operatorname{ent}(g) \leq \operatorname{ent}(f)$. Por lo que, $\operatorname{ent}(f) = \operatorname{ent}(g)$. □

También tenemos el siguiente resultado.

8.1.22 Proposición. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Entonces* $\operatorname{ent}(f) = \operatorname{ent}(f^{-1})$.

Demostración. Sea α una cubierta abierta de X. Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ent}(f,\alpha) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\big(\mathrm{N}\big(f^{n-1}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big)\big)\big) \quad \text{(por la Proposición 8.1.10)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln\big(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{i}(\alpha)\big)\big) \quad = \operatorname{ent}(f^{-1},\alpha).
\end{aligned}$$

□

8.1.23 Definición. *Sean J un intervalo y $\mathcal{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subintervalos de J. Diremos que la familia $\mathcal{D}$ forma una* ***partición*** *de J, si son mutuamente disjuntos y su unión es J.*

Daremos una definición para intervalos que es análoga a la Definición 7.2.1, que dimos para el círculo.

8.1.24 Definición. *Sean J un intervalo, $f : J \to J$ una función continua y J_1 y J_2 dos subintervalos de J. Diremos que J_1* ***f-cubre*** *a J_2 si $J_2 \subset f(J_1)$.*

Ahora daremos la Definición 7.2.2 para un intervalo cerrado $I = [a, b]$.

8.1.25 Definición. *Sean $L = [a, b]$ un intervalo cerrado, $f : L \to L$ una función continua y $s \geq 2$. Entonces una* ***s-herradura de Smale*** *para f es un subintervalo cerrado $J \subset L$ y una partición $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_r\}$, donde s elementos de $\mathcal{J}$ son intervalos abiertos, digamos $J_{i_1}, \ldots, J_{i_s}$, tales que $Cl(J_{i_k})$ f-cubre a J, para cada $k \in \{1, \ldots, s\}$. La cual denotaremos como $(J, \mathcal{J})$.*

La siguiente proposición nos dará una cota inferior de la entropía de una función cuando el espacio fase contiene una herradura de Smale.

La prueba de la siguiente proposición se puede consultar en la página 196 del libro de Block y Coppel [8] (en este libro la herradura de smale se denota como función turbulenta) o, en la página 205 del libro de Alsedà et al. [2].

8.1.26 Proposición. *Sean $L = [a, b]$ un intervalo cerrado, $f : L \to L$ una función continua. Si f tiene una s-herradura de Smale, entonces* $\mathrm{ent}(f) \geq \ln(s)$.

8.2. Definición de entropía usando la métrica del espacio

En esta sección mantendremos la notación que hemos llevado, (X, d) representará un espacio métrico, no necesariamente compacto. El trabajo en esta sección dependerá de la métrica d de nuestro espacio X.

Aquí, daremos una definición de entropía topológica usando conjuntos separadores y generadores. Esta definición fue dada por Bowen [12].

8.2.1 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Definimos la* ***bola abierta*** *de radio épsilon centrada en el punto x, con respecto a la métrica d, como:*

$$V_\epsilon^d(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\},$$

cuando no haya duda de la métrica con la que se está trabajando, simplemente escribiremos $V_\epsilon(x)$. La bola cerrada la definiremos como:

$$B_\epsilon^d(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

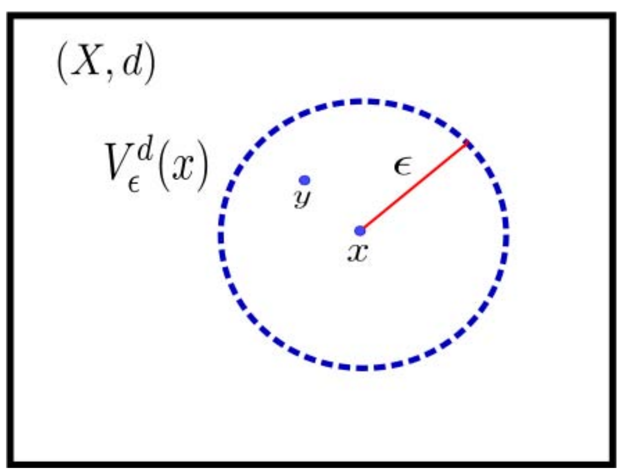

Figura 8.1: Bola abierta de radio épsilon centrada en x

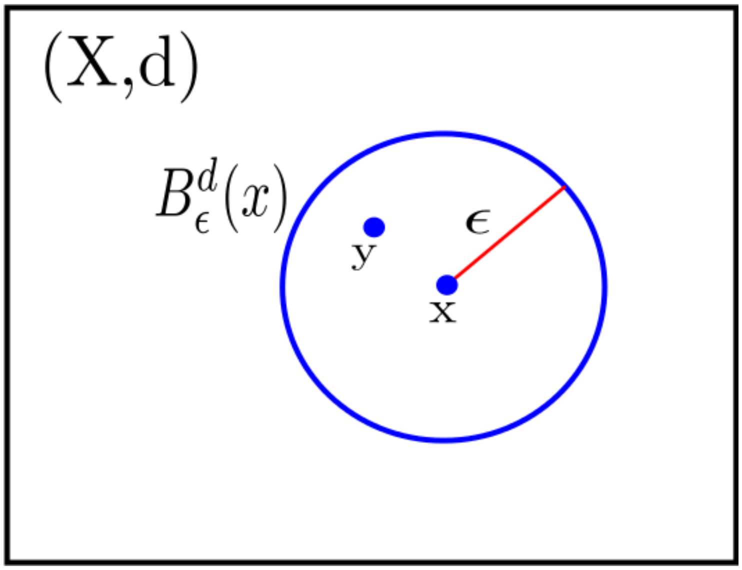

Figura 8.2: Bola cerrada de radio épsilon centrada en x

8.2.2 Definición. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Diremos que f es una función* ***uniformemente continua****, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de X tales que $d(x_1, x_2) < \delta$, se tiene que $d(f(x_1), f(x_1)) < \epsilon$.*

8.2.3 Definición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Al* ***espacio de todas las funciones uniformemente continuas*** *del espacio métrico X en sí mismo lo denotaremos como* UC(X).

Un resultado de funciones uniformemente continuas que nos será de gran utilidad es el siguiente:

8.2.4 Proposición. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es compacto entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como f es continua, entonces para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x, x_1) < \delta_x$ entonces $d'(f(x), f(x_1)) < \frac{\epsilon}{2}$. Observemos que $\{V^d_{\delta_x}(x) \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, como X es compacto, existe un número de lebesgue $\lambda > 0$ para esa cubierta.

Sean x y $x' \in X$ tales que $d(x, x') < \lambda$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $x, x' \in V^d_{\delta_x}(x_0)$. De donde, tenemos lo siguiente:

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f(x_0)) + d'(f(x_0), f(x')) < \epsilon.$$

□

A lo largo de esta sección trabajaremos con funciones uniformemente continuas.

8.2.5 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f \in \mathrm{UC}(X)$. Dada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir una nueva métrica en X de la siguiente forma:*

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\}.$$

8.2.6 Proposición. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f \in \mathrm{UC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ y x y $y \in X$. Entonces d_n es una métrica.*

Demostración. Veamos que se cumplen los cuatro enunciados de la Definición 2.1.8. Primero que $d_n \geq 0$. Para esto, supongamos que $d_n(x, y) = 0$. Esto implica que $\max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} = 0$. Entonces para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, se tiene que $d(f^i(x), f^i(y))) = 0$. De donde, $f^i(x) = f^i(y)$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y, por tanto, $x = y$. En conclusión, el primer enunciado de la Definición 2.1.8 se cumple.

Supongamos ahora que $x = y$ y veamos que $d_n(x, y) = 0$. Como $x = y$, se tiene que

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(x))\}.$$

Como d es una métrica, entonces para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $d(f^i(x), f^i(x)) = 0$. De donde, $\max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(x))\} = 0$ y, por lo tanto: $d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} = 0$.

Observemos que al ser d una métrica tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d_n(x, y) &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(y), f^i(x))\} = d_n(y, x). \end{aligned}$$

Por último, veamos que la desigualdad del triángulo se cumple. Para esto, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(f^i(x), f^i(y)) &\leq d(f^i(x), f^i(z)) + d(f^i(z), f^i(y)) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(y), f^i(z))\} + \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(z), f^i(y))\} \\ &= d_n(x, z) + d_n(z, y). \end{aligned}$$

Por tanto, $d_n(x,z) + d_n(z,y)$ es una cota superior para $\{d(f^i(x), f^i(y)) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$. Consecuentemente tenemos que:

$$d_n(x,y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} \leq d_n(x,z) + d_n(z,y).$$

$\square$

Estamos interesados en un concepto de entropía el cual pueda medir la complejidad del sistema dinámico, interpretado como la cantidad de información trasmitida en el sistema por unidad de tiempo. El estado inicial lleva información completa sobre la evolución del sistema, pero para el observador no es posible interpretarla de manera inmediata. Al no tener fija una manera particular de medir la información, queremos usar la métrica del espacio (o, de forma más general, usando la topología del espacio) para poder describir la cantidad de información sobre el estado inicial adquirida por el observador. Una interpretación razonable, sería la habilidad del observador para distinguir entre los puntos del espacio. La más sencilla está basada en la métrica y en un número positivo ϵ: dos puntos son "indistinguibles"si la distancia entre ellos es menor que ϵ. Otra forma de hacer esto es mediante cubiertas abiertas del espacio, como se vio en la sección anterior. Un conjunto de puntos no pueden ser distinguibles si pertenecen a un mismo miembro de la cubierta abierta. Con esto en mente, definiremos una cantidad que contará órbitas indistinguibles.

8.2.7 Definición. *Sean (X,d) un espacio métrico, $f \in \mathrm{UC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de X. Diremos que un subconjunto F de X es un (n,ϵ)-**conjunto generador** para K, con respecto a f, si para cada $x \in K$, existe $y \in F$ tal que $d_n(x,y) < \epsilon$; es decir:*

$$K \subset \bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(V_\epsilon(f^i(y))).$$

8.2.8 Definición. *Sean (X,d) un espacio métrico, $f \in \mathrm{UC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de X. Entonces $\mathrm{r}_n(\epsilon, K)$ denotará la cardinalidad más pequeña de un conjunto (n,ϵ)-generador para K con respecto a f.(Si es necesario especificar f, entonces escribiremos $\mathrm{r}_n(\epsilon, K, f)$).*

8.2.9 Observación. *Notemos que $\mathrm{r}_n(\epsilon, K) < \infty$ ya que la compacidad de K implica que la cubierta abierta $\left\{\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(V_\epsilon(f^i(x))) \mid x \in K\right\}$, tiene una subcubierta finita.*

8.2.10 Definición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $f \in \mathrm{UC}(X)$, $\epsilon > 0$ *y* K *un subconjunto compacto de* X. *Sea:*

$$\mathrm{r}(\epsilon, K, f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln(\mathrm{r}_n(\epsilon, K)).$$

Cuando queramos especificar la métrica con la que se está trabajando escribiremos $\mathrm{r}(\epsilon, K, f, d)$.

8.2.11 Definición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $f \in \mathrm{UC}(X)$, $\epsilon > 0$ *y* K *un subconjunto compacto de* X. *Definimos la* ***entropía*** *de* f *con respecto a* K *como:*

$$\mathrm{ent}(f, K) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{r}(\epsilon, K, f).$$

Definimos la ***entropía topológica*** *como:*

$$\mathrm{ent}(f) = \sup\{\mathrm{ent}(f, K) \mid K \textit{ es un subconjunto compacto de } X\}.$$

Cuando queramos hacer notar la dependencia de la métrica d *escribiremos* $\mathrm{ent}_d(f)$

Antes de pasar a lo siguiente, daremos una definición equivalente pero dual a la definición dada para los conjuntos generadores. En esta definición usaremos la idea de conjuntos separadores.

8.2.12 Definición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $f \in \mathrm{UC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ *y* K *un subconjunto compacto de* X. *Diremos que un subconjunto* E *de* K *es un* (n, ϵ)-***conjunto seprador****, con respecto a* f, *si para cualesquiera* $x, y \in E$ *con* $x \neq y$, *resulta que* $d_n(x, y) > \epsilon$*; esto es, para* $x \in E$, *el conjunto* $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_\epsilon(f^i(x)))$ *no contiene otro punto de* E.

8.2.13 Definición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $f \in \mathrm{UC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ *y* K *un subconjunto compacto de* X. *Entonces* $\mathrm{s}_n(\epsilon, K)$ *denotará la cardinalidad más grande de un subconjunto* (n, ϵ)*-separador de* K*, con respecto a* f. *Este máximo existe ya que* K *es compacto y totalmente acotado (Si es necesario especificar* f*, entonces escribiremos* $\mathrm{s}_n(\epsilon, K, f)$*).*

8.2.14 Lema. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $f \in \mathrm{UC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ *y* K *un subconjunto compacto de* X. *Entonces las siguientes desigualdades de se cumplen:*

$$\mathrm{r}_n(\epsilon, K) \leq \mathrm{s}_n(\epsilon, K) \leq \mathrm{r}_n(\tfrac{\epsilon}{2}, K).$$

Por lo que $\mathrm{s}_n(\epsilon, K) < \infty$.

Demostración. Si E es un subconjunto (n,ϵ)-separador de K de cardinalidad máxima, entonces E es un conjunto (n,ϵ)-generador para K. Ya que si no fuera así, existiría un punto z en K cuya distancia bajo la métrica d_n a cualquier punto de E sería mayor o igual que ϵ. El conjunto $E \cup \{z\}$ sería un conjunto (n,ϵ)-separador lo cual es una contradicción a la maximilidad de E. De donde, $\mathrm{r}_n(\epsilon, K) \leq \mathrm{s}_n(\epsilon, K)$.

Para ver la otra desigualdad, sean F un subconjunto $(n, \frac{\epsilon}{2})$-generador para K y E un conjunto (n,ϵ)-separador de K de máxima cardinalidad. Tomemos $x \in E$, entonces existe $y \in F$ tal que $d_n(x,y) \leq \frac{\epsilon}{2}$. La función $\phi : E \to F$ que manda x en y es una función inyectiva. Ya que si no fuera así, existirían s y $t \in E$ con $s \neq t$ tales que $\phi(s) = \phi(t) = m$, con $m \in F$. De donde, tendríamos que $d_n(s,t) \leq d_n(s,m) + d_n(m,t)\epsilon$ lo cual es una contradicción al hecho que E es un conjunto (n,ϵ)-separador. Así, al ser ϕ es inyectiva, se tiene que $|E| \leq |F|$. Por consiguiente, $\mathrm{s}_n(\epsilon, K) \leq \mathrm{r}_n(\frac{\epsilon}{2}, K)$. □

8.2.15 Definición. *Sean (X,d) un espacio métrico, $f \in \mathrm{UC}(X)$, $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de X. Sea:*

$$\mathrm{s}(\epsilon, K, f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mathrm{s}_n(\epsilon, K)).$$

Cuando queramos especificar la métrica con la que se está trabajando escribiremos $\mathrm{s}(\epsilon, K, f, d)$.

8.2.16 Definición. *Sean (X,d) un espacio métrico, $f \in \mathrm{UC}(X)$, $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de X. Definimos la **entropía** de f con respecto a K como:*

$$\mathrm{ent}(f, K) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{s}(\epsilon, K, f).$$

*Definimos la **entropía topológica** como:*

$$\mathrm{ent}(f) = \sup\{\mathrm{ent}(f, K) \mid K \textit{ es un subconjunto compacto de } X\}.$$

Cuando queramos hacer notar la dependencia de la métrica d escribiremos $\mathrm{ent}_d(f)$.

De la desigualdad en el Lema 8.2.14, se sigue que:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{s}(\epsilon, K, f) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{r}(\epsilon, K, f).$$

Por lo tanto, es posible definir la entropía topológica ya sea mediante conjuntos generadores o usando conjuntos separadores. Ahora consideraremos el caso en el que nuestro espacio métrico (X, d) también es compacto y veamos que las definiciones de entropía topológica que hemos dado en esta sección y en la Sección 7.1 son equivalentes.

Por el momento denotaremos a la entropía definida de esta sección como $\mathrm{ent}_d(f)$ y a la entropía de la Sección 7.1 como $\mathrm{ent}(f)$.

8.2.17 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico y α una cubierta de X. Definimos la **malla** de la cubierta α como;*

$$\mathrm{malla}(\alpha) = \sup\{\mathrm{diam}(A) \mid A \in \alpha\}.$$

8.2.18 Observación. *Si α y γ son dos cubiertas abiertas de un espacio métrico (X, d) y $\mathrm{malla}(\alpha) < \lambda$, con $\lambda > 0$ un número de Lebesgue para γ, entonces $\gamma < \alpha$.*

8.2.19 Proposición. *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X con $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{malla}(\alpha_n) = 0$. Si $\mathrm{ent}(f) < \infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ent}(f, \alpha_n)$ existe y es igual a $\mathrm{ent}(f)$ y, si $\mathrm{ent}(f) = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ent}(f, \alpha_n) = \infty$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathrm{ent}(f) < \infty$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos una cubierta abierta γ de X de tal forma que $\mathrm{ent}(f, \gamma) > \mathrm{ent}(f) - \epsilon$. Sea λ un número de Lebesgue para γ. Tomemos N de tal forma que si $n \geq N$, entonces $\mathrm{malla}(\alpha_n) < \lambda$. Por la Observación 8.2.18, tenemos que $\gamma < \alpha_n$. Por (1) de la Proposición 8.1.7, $\mathrm{ent}(f, \gamma) \leq \mathrm{ent}(f, \alpha_n)$ cuando $n \geq N$. Por lo que si $n \geq N$, entonces $\mathrm{ent}(f) - \epsilon < \mathrm{ent}(f, \alpha_n) \leq \mathrm{ent}(f)$. De donde, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ent}(f, \alpha_n) = \mathrm{ent}(f)$.

Si $\mathrm{ent}(f) = \infty$ y $\epsilon > 0$, tomamos una cubierta abierta γ de X tal que $\mathrm{ent}(f, \gamma) > \epsilon$, procediendo de manera análoga al párrafo anterior se puede mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ent}(f, \alpha_n) = \infty$. $\square$

8.2.20 Proposición. *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua.*

1. *Si α es una cubierta abierta de X con número de Lebesgue λ, entonces*

$$\mathrm{N}\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\Big) \leq \mathrm{r}_n(\tfrac{\lambda}{2}, X) \leq \mathrm{s}_n(\tfrac{\lambda}{2}, X).$$

2. *Si* $\epsilon > 0$ *y* γ *es una cubierta abierta de* X *tal que* $\mathrm{malla}(\gamma) \leq \epsilon$*, entonces*

$$\mathrm{r}_n(\epsilon, X) \leq \mathrm{s}_n(\epsilon, X) \leq \mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\gamma)\big).$$

Demostración. Del Lema 8.2.14, $\mathrm{r}_n(\epsilon, X) \leq \mathrm{s}_n(\epsilon, X)$, para cada $\epsilon > 0$.

1. Sea F un conjunto $(n, \frac{\lambda}{2})$-generador para X, de cardinalidad $\mathrm{r}_n(\frac{\lambda}{2}, X)$. Entonces:

$$X = \bigcup_{x \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_{\frac{\lambda}{2}}(f^i(x)))$$

y, como para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $B_{\frac{\lambda}{2}}(f^i(x))$ está contenido en algún miembro de la cubierta abierta α, resulta que:

$$\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\big) \leq \mathrm{r}_n(\tfrac{\lambda}{2}, X).$$

2. Sea E un conjunto (n, ϵ)-separador de X, de cardinalidad $\mathrm{s}_n(\epsilon, X)$. Como ningún miembro de la cubierta abierta $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\gamma)$ puede contener dos elementos de E, obtenemos que:

$$\mathrm{s}_n(\epsilon, X) \leq \mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\gamma)\big).$$

□

8.2.21 Corolario. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y compacto y* $f : X \to X$ *una función continua. Tomemos* $\epsilon > 0$ *y sean* $\alpha_\epsilon = \{V_{2\epsilon}(x) \mid x \in X\}$ *y* $\gamma_\epsilon = \{V_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \mid x \in X\}$*. Entonces:*

$$\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha_\epsilon)\big) \leq \mathrm{r}_n(\epsilon, X) \leq \mathrm{s}_n(\epsilon, X) \leq \mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\gamma_\epsilon)\big).$$

Demostración. Notemos que 2ϵ es un número de Lebesgue para α_ϵ y que $\mathrm{malla}(\gamma_\epsilon) \leq \epsilon$. Entonces haciendo uso de la Proposición 8.2.20, obtenemos las desigualdades deseadas. □

8.2.22 Teorema. *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces* $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}_d(f)$.

Demostración. Si $\epsilon > 0$, α_ϵ y γ_ϵ son como en el Corolario 8.2.21, entonces

$$\mathrm{ent}(f, \alpha_\epsilon) \leq \mathrm{r}(\epsilon, X, f) \leq \mathrm{s}(\epsilon, X, f) \leq \mathrm{ent}(f, \gamma_\epsilon).$$

Si ponemos $\epsilon = \frac{1}{n}$ y hacemos que n tienda a infinito, por la Proposición 8.2.19, $\mathrm{ent}(f, \alpha_\epsilon)$ y $\mathrm{ent}(f, \gamma_\epsilon)$ convergen a $\mathrm{ent}(f)$ y tanto $\mathrm{r}(\epsilon, X, f)$ como $\mathrm{s}(\epsilon, X, f)$ convergen a $\mathrm{ent}_d(f)$. De donde, tenemos que:

$$\mathrm{ent}(f) \leq \mathrm{ent}_d(f) \quad \text{y} \quad \mathrm{ent}_d(f) \leq \mathrm{ent}(f).$$

Por tanto, $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}_d(f)$. □

8.2.23 Definición. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Diremos que f es una* ***isometría****, si para cualesquiera x y $x' \in X$ se tiene que $d(x, x') = d'(f(x), f(x'))$*

8.2.24 Proposición. *Sean (X, d) un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una isometría. Entonces* $\mathrm{ent}_d(f) = 0$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de X. Como f es una ismotría, tenemos que $d(x, y) = d(f^n(x), f^n(y))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que, tanto $\mathrm{r}_n(\epsilon, K)$ como $\mathrm{s}_n(\epsilon, K)$ no cambian con respecto a n. Entonces tenemos que

$$\mathrm{ent}_d(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln(\mathrm{s}_n(\epsilon, K)) = 0.$$

□

8.3. Propiedades de la entropía

La pregunta ¿Si la entropía de f es positiva entonces f es transitiva? no tiene mucho sentido. De hecho, la transitividad es una característica global del espacio. Como ya hemos visto, una función cuyo espacio fase tiene dos subconjuntos invariantes A y B con interiores distintos del vacío, no puede ser transitiva. Sin embargo el que una función tenga entropía positiva puede ser gracias a la siguiente proposición:

8.3.1 Proposición. *Sean* (X, d) *espacio métrico y compacto,* $f : X \to X$ *una función continua y* Y *un subconjunto cerrado de* X *e invariante de* f*. Entonces* $\operatorname{ent}(f) \geq \operatorname{ent}(f|_Y)$*.*

Demostración. Sea α una cubierta abierta de Y. Para cada $A \in \alpha$, existe un abierto V de X tal que $A = V \cap Y$. Los conjuntos V junto con el abierto $X \setminus Y$ forman una cubierta abierta $\tilde{\alpha}$ de X. Si $g = f|_Y$ y n es un número entero positivo, entonces:

$$\ln\big(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\big)\big) \leq \ln\big(\mathrm{N}\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\tilde{\alpha})\big)\big).$$

De donde, $\operatorname{ent}(g, \alpha) \leq \operatorname{ent}(f, \tilde{\alpha}) \leq \operatorname{ent}(f)$. Como la cubierta abierta α fue tomada arbitrariamente, tenemos que $\operatorname{ent}(f) \geq \operatorname{ent}(g)$. $\square$

Por otro lado, la pregunta ¿Transitividad implicará entropía positiva? es más complicada. Más aún, si la respuesta es afirmativa, una pregunta natural por hacerse es: ¿Cúal sería la mejor cota inferior para la entropía de una función transitiva en el espacio a consideración?.

Existen espacios, en el los cuales las funciones transitivas pueden tener entropía igual a cero. Además de los ejemplos triviales de espacios finitos, ejemplos clásicos existen como en el círculo $\mathbf{S}^1$, por ejemplo, las rotaciones por un ángulo irracional, Ejemplo 4.3.6, tiene entropía igual a cero. Esto gracias a la Proposición 8.2.24. Pero en algunos espacios este no es el caso. El siguiente teorema es un resultado conocido de este tipo. Pero antes de pasar a ello, daremos algunos resultados que nos serán de utilidad.

8.3.2 Definición. *Sean* $I = [0, 1]$ *y* $f : I \to I$ *una función continua. Diremos que* f *es* ***turbulenta****, si existen subintervalos compactos* J *y* K *de* I*, con a lo más un punto en común, tales que* $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$*. Diremos que* f *es* ***estrictamente turbulenta****, si* J *y* K *son disjuntos.*

8.3.3 Lema. *Si* $f : I \to I$ *es (estrictamente) turbulenta, entonces* f^n *es (estrictamente) turbulenta.*

Demostración. Supondremos que f es turbulenta, la demostración para ver que también se cumple cuando f es estrictamente turbulenta es análoga. Existen subintervalos compactos J y K de I tales que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$. De aquí, que $J \subset f(J)$. Aplicando f^{n-1} a lo anterior obtenemos que $J \subset f^n(J)$. De la primera contención también podemos observar que $J \subset f(K)$.

Aplicando f^{n-1} a lo anterior, obtenemos que $f^{n-1}(J) \subset f^n(K)$ y, como $J \subset f^{n-1}(J)$, $J \subset f^n(K)$. Por lo tanto, $J \subset f^n(J) \cap f^n(K)$. De manera análoga, podemos ver que $K \subset f^n(J) \cap f^n(K)$. Por lo tanto, $J \cup K \subset f^n(J) \cap f^n(K)$. De donde, f^n es turbulenta. □

Las demostraciones de los Lemas 8.3.4 y 8.3.5 se pueden consultar en el libro de Block y Coppel [8] en las páginas 26 y 33. El Lema 8.3.6 se puede encontrar como el Lema 3.3 en el artículo de Block y Coven [9].

8.3.4 Lema. *Sea $f : I \to I$ función continua. Si f tiene un punto periódico de periodo impar $n > 1$, entonces f^2 es estrictamente turbulenta.*

8.3.5 Lema. *Sean $f : I \to I$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si n no es una potencia de 2, entonces lo siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f tiene un punto periódico de periodo n,*
2. *f^n es estrictamente turbulenta*
3. *f^n es turbulenta.*

8.3.6 Lema. *Sea $f : I \to I$ una función transitiva. Si f no es turbulenta, entonces f tiene un único punto fijo y este punto fijo no es un punto extremo.*

8.3.7 Teorema. *Sean $I = [0, 1]$ y $f : I \to I$ una función transitiva. Entonces f^2 es turbulenta.*

Demostración. Sea $f : I \to I$ nuestra función transitiva. Por el Teorema 7.1.23, tenemos dos casos:

Caso 1 f es bitransitiva. Entonces por (3) del Teorema 7.1.30, f tiene un punto periódico impar $n > 1$. Por el Lema 8.3.4, f^2 es estrictamente turbulenta y, por lo tanto, turbulenta.

Caso 2 Existen dos subintervalos cerrados J y K de I tales que $I = J \cup K$, $J \cap K = \{z\}$, donde z es el único punto fijo de f, $f(J) = K$, $f(K) = J$ y, tanto $f^2|_J$ como $f^2|_K$ son transitivas. Entonces, por el Lema 8.3.6, tanto $f^2|_J$ como $f^2|_K$ son turbulentas. De donde, existen dos subintervalos compactos M y N de J tales que:

$$M \cup N \subset f^2(M) \cap f^2(N).$$

En particular, M y N son subintervalos de I y, por lo tanto, f^2 es turbulenta.

$\square$

8.3.8 Teorema. *Sean $I = [0,1]$ y $f : I \to I$ una función transitiva. Entonces f^2 tiene una 2-herradura de Smale y, por lo tanto,* $\operatorname{ent}(f) \geq \frac{1}{2}\ln(2)$.

Demostración. Como f es transitiva, por el Teorema 8.3.7, f^2 es turbulenta. De donde, existen dos subintervalos compactos J y K de I tales que $J \cup K \subset f^2(J) \cap f^2(K)$. Si nombramos $L = J \cup K$ y $\mathcal{D} = \{J,\ K\}$, entonces $(L, \mathcal{D})$ es una 2-herradura de Smale para f^2. L es un subintervalo de I ya que por definición de función turbulenta tanto J como K son subintervalos compactos con, posiblemente, un punto en común . Por la Proposición 8.1.26, $\operatorname{ent}(f^2) \geq \ln(2)$. Por la Proposición 8.1.19, $\operatorname{ent}(f^2) = 2\operatorname{ent}(f)$, por lo tanto tenemos que

$$\operatorname{ent}(f) \geq \frac{1}{2}\ln(2).$$

$\square$

8.3.9 Corolario. *Si $f : I \to I$ es transitiva entonces* $\operatorname{ent}(f) > 0$.

8.3.10 Teorema. *Sea $f : I \to I$ una función transitiva con al menos dos puntos fijos. Entonces f tiene una 2-herradura de Smale y, por lo tanto,* $\operatorname{ent}(f) \geq \ln(2)$.

Demostración. Sea $f : I \to I$ una función transitiva. Por hipótesis, sabemos que f tiene al menos dos puntos fijos. Por el Lema 8.3.5, f es turbulenta. Como en la demostración del Teorema 8.3.8, f tiene una 2-herradura de Smale. Por la Proposición 8.1.26, tenemos que:

$$\operatorname{ent}(f) \geq \ln(2).$$

$\square$

El siguiente teorema nos mostrará que una función monótona por partes y transitiva del intervalo siempre será conjugada a una “mejor” función, con la misma entropía. Pero antes de eso, daremos algunos resultados de utilidad.

8.3.11 Definición. *Sea $f : I \to I$ una función monótona por partes. Diremos que f es* ***lineal por partes*** *(con pendiente constante β), si todas las partes en las que f es monótona son lineales con pendiente constante β.*

8.3.12 Proposición. *Sean $f : I \to I$ transitiva, $g : I \to I$ una función continua y $h : I \to I$ una semiconjugación no decreciente entre f y g. Entonces h es un homeomorfismo. En consecuencia, f es topológicamente conjugada a g vía h.*

Demostración. Supongamos que h no es un homeomorfismo. Como h es supreyectiva, h no es inyectiva. Por lo que existe $y \in I$ tal que $h^{-1}(y)$ consta de más de un punto. h es una función continua y no decreciente, por lo que $h^{-1}(y)$ es un subintervalo cerrado propio de I. Como f es transitiva y por el Teorema 4.1.20 parte (16), existe $x \in I$ tal que $o(x, f)$ es densa en I. En particular, $o(x, f) \cap h^{-1}(y) \neq \emptyset$. De donde, existen $n \geq 0$ y $k > 0$ tales que $f^n(x), f^{n+k}(x) \in h^{-1}(y)$. Observemos que:

$$g^k(y) = g^k \circ h(f^n(x)) = h \circ f^k(f^n(x)) = h(f^{k+n}(x)) = y$$

De esta forma tenemos que y es un punto periódico de g. Por lo que existe un abierto U de I tal que $g^m(y) \notin U$, para ninguna $m \geq 0$. El conjunto $h^{-1}(U)$ es abierto y no vacío. Por la transitividad de f, existe $m \geq 0$ tal que $f^{n+m}(x) \in h^{-1}(U)$. Esto implica que:

$$g^m(y) = g^m \circ h(f^n(x)) = h \circ f^m(f^n(x)) = h(f^{m+n}(x)) \in U,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, h es inyectiva y, en consecuencia, un homeomorfismo. □

8.3.13 Definición. *Sean $\phi : I \to \mathbb{R}$ una función y $\{x_i\}_{i=0}^{s}$ una sucesión finita de elementos de I. Definimos la **variación** de ϕ como:*

$$\mathrm{Var}(\phi) = \sup\left\{ \sum_{i=0}^{s-1} |\phi(x_i) - \phi(x_{i+1})| \;\middle|\; x_0 < x_1 < \cdots < x_s \in I \right\}.$$

8.3.14 Definición. *Sea J un intervalo. Denotaremos la **longitud** de J como* $\mathrm{long}(J)$.

Las demostraciones de los Lemas 8.3.15 y 8.3.16 se pueden consultar en el libro de Alsedà, Llibre y Misiurewicz [2], en las páginas 217 y 256, respectivamente.

8.3.15 Lema. *Sea $f : I \to I$ una función monótona por partes con pendiente constante β. Entonces* $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{máx}(0, \ln(\beta))$.

8.3.16 Lema. *Sea $f : I \to I$ una función continua y monótona por partes con* $\text{ent}(f) > 0$*. Entonces f es semiconjugada a una función continua monótona por partes $g : I \to I$ con pendiente constante β por medio de una función no decreciente.*

8.3.17 Teorema. *Sea $f : I \to I$ una función monótona por partes y transitiva. Entonces f es topológicamente conjugada a una función lineal por partes de pendiente constante $\beta = e^{\text{ent}(f)}$.*

Demostración. Como f es transitiva, por el Teorema 8.3.8, $\text{ent}(f) > 0$. Por el Lema 8.3.16, f es semiconjugada a una función lineal por partes $g : I \to I$ con pendiente constante β. Por la Proposición 8.3.12, f es topológicamente conjugada a g.

Por el Lema 8.3.15, $\text{ent}(g) = \text{máx}(0, \ln(\beta))$. Como f es topológicamente conjugada a g. Por la proposición 8.1.21, $\text{ent}(g) = \text{ent}(f) > 0$. Por lo que $\text{ent}(f) = \text{ent}(g) = \ln(\beta)$. De donde, $\beta = e^{\text{ent}(f)}$. □

Antes de pasar al último teorema de esta sección, daremos una proposición, la cual nos será de gran ayuda para la demostración de dicho resultado. La prueba de la mencionada proposición está basada en el libro de Alsedà, Llibre y Misiurewickz [2].

8.3.18 Proposición. *Sean X espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces* $\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{\Omega(f)})$.

Demostración. Sean α una cubierta abierta de X, $n \in \mathbb{N}$ y β_n una subcubierta abierta de cardinalidad mínima de $\Omega(f)$, tomada de $\alpha^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)$. El conjunto $K = X \setminus \bigcup_{B \in \beta_n} B$ es compacto y consiste de puntos errantes. Por lo que podemos cubrir a K con una cantidad finita de subconjuntos con puntos errantes (subconjuntos de X, no necesariamente de K), y cada uno de estos subconjuntos está contenido en algún elemento de α^n. Estos subconjuntos, junto con todos los elementos de β_n, forman una subcubierta abierta, γ_n, de X la cual refina a α^n; es decir, $\alpha^n < \gamma_n$.

Cada elemento de $(\gamma_n)_{f^n}^k = \bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-ni}(\gamma_n)$ es de la forma $\bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-ni}(G_i)$, con $G_i \in \gamma_n$. Como estos elementos no son vacíos, si $G_i = G_j$ para alguna $i < j$, entonces $f^{n(j-i)}(G_i)$ intersecta a $G_i = G_j$, por lo que G_i no puede ser errante y, por lo tanto, $G_i \in \beta_n$. Calculemos ahora el número de elementos de $(\gamma)^k_{f^n}$. Si el número de indices i, para los cuales G_i es errante, es j, entonces $0 \leq j \leq m$, donde $m = |\gamma_n \setminus \beta_n|$. Existen $\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ posibles formas de escoger un j-ésimo elemento subconjunto de $\gamma_n \setminus \beta_n$ y estos conjuntos pueden aparecer como combinación de varios conjuntos G_i. De hecho, en $k \cdot (k-1) \cdots (k-j+1) = \frac{k!}{(k-j)!}$ formas. Para el resto de los conjuntos G_i, tenemos la elección de cualquiera de los elementos de β_n. Por consecuencia, el número de elementos de $(\gamma_n)^k_{f^n}$ no puede ser más grande que:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot \frac{k!}{(k-j)!} \cdot |\beta_n|^{k-j}. \tag{8.1}$$

Como $\frac{k!}{(k-j)!} \leq k^j \leq k^m$ y $\binom{m}{j} \leq m!$, (8.1) no puede ser más grande que $(m+1)! \cdot k^m \cdot |\beta_n|^k$. Por lo que se tiene lo siguiente:

$$\operatorname{ent}(f^n, \gamma_n) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln((m+1)! \cdot k^m \cdot |\beta_n|^k) = \ln(|\beta_n|).$$

Por (2) de la Observación 8.1.16 y la Proposición 8.1.19, resulta que:

$$\begin{aligned} \operatorname{ent}(f, \alpha) &= \tfrac{1}{n} \operatorname{ent}(f^n, \alpha^n) \leq \tfrac{1}{n} \operatorname{ent}(f^n, \gamma_n) \\ &\leq \tfrac{1}{n} \ln(|\beta_n|) = \tfrac{1}{n} \ln(\mathrm{N}\left((\alpha|_{\Omega(f)})^n\right)), \end{aligned}$$

donde $\alpha|_{\Omega(f)} = \{A \cap \Omega(f) \mid A \in \alpha\}$. Tomando el límite obtenemos que:

$$\operatorname{ent}(f, \alpha) \leq \operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)}, \alpha|_{\Omega(f)}) \leq \operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)}).$$

Como α fue arbitraria, tenemos que $\operatorname{ent}(f) \leq \operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)})$.

Como $\Omega(f)$ es un subconjunto cerrado e invariante bajo f de X, por la Proposición 8.3.1, tenemos que $\operatorname{ent}(f) \geq \operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)})$. Por lo tanto, $\operatorname{ent}(f) = \operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)})$. $\square$

8.3.19 Definición. *Sean X espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Diremos que f es de **entropía minimal**, si el único subconjunto Y de X no vacío, cerrado e invariante bajo f tal que* $\operatorname{ent}(f|_Y) = \operatorname{ent}(f)$ *es $Y = X$.*

8.3.20 Observación. *Por (9) del Teorema 4.1.20, sabemos que en una función minimal f, el único subconjunto no vacío, cerrado, invariante bajo f y con interior distinto del vacío es el total, por lo que toda función minimal es de entropía minimal.*

8.3.21 Teorema. *Sea X un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es de entropía minimal, entonces es topológicamente transitiva.*

Demostración. Sean $f : X \to X$ función de entropía minimal y $\Omega(f)$ el conjunto de los puntos no errantes. Por la Proposición 3.7.2, sabemos que $\Omega(f)$ es cerrado e invariante bajo f. Por la Proposición 8.3.18, $\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{\Omega(f)})$. Como f es de entropía minimal, $\Omega(f) = X$. $\square$

Capítulo 9

Caos y transitividad

El término caos para una función fue usado por primera vez por Li y Yorke en [26], aunque sin dar una definición formal. Actualmente, existen diferentes definiciones de lo que significa que una función sea caótica. Algunas de ellas sólo trabajan con ciertos espacios fase. Se podría decir que hay tantas definiciones de caos como autores. A pesar de ello, detrás de las definiciones de caos se encuentra la idea de comportamiento impredecible de las órbitas de todos los puntos, varios puntos o, al menos, un punto, cuando la posición del punto, cuya órbita es considerada, está dada con cierto error, usualmente a este fenómeno se le conoce como sensibilidad en la dependencia a las condiciones iniciales.

Usualmente la transitividad topológica es parte de la definición de caos, o transitividad implica o es implicada por el caos (al menos en algunos espacios). Por lo que, en este trabajo, mencionaremos diferentes tipos de caos y su conexión con la transitividad. Con esto, se pretende mostrar la importancia de seguir investigando la transitividad.

9.1. Caos en el intervalo y la clasificación de Sharkovskii

Block y Coppel en su libro [8], definen la noción de función caótica para funciones del Intervalo en sí mismo de la siguiente manera:

9.1.1 Definición. *Sea $f : I \to I$. Diremos que f es* ***caótica*** *en el sentido de Block y Coppel si alguna de las condiciones del Lema 8.3.5 y, por lo tanto,* *todas se cumplen.*

Después, Block y Coppel dan dos caracterizaciones de funciones caóticas del intervalo en sí mismo, la primera es la Proposición 9.1.2 y la segunda la Proposición 9.1.3, sus demostraciones pueden ser consultadas en el libro [8] en las páginas 124 y 218, respectivamente.

9.1.2 Proposición. *Sea $f : I \to I$ una función continua. Entonces f es caótica en el sentido de Block y Coppel si y sólamente si para alguna $x \in I$, $\omega(x, f)$ contiene propiamente una órbita periódica.*

9.1.3 Proposición. *Una función continua $f : I \to I$ es caótica si y sólo si tiene entropía topológica positiva.*

Algunos autores llaman a una función $f : I \to I$ **caótica**, si tiene una órbita periódica cuyo periodo no es una potencia de dos. Por ejemplo, ver [8] página 33. De hecho, en el intervalo esta condición es equivalente a que la función f tenga entropía topológica positva, ver la Proposición 9.1.3. La siguiente definición está ligada al orden que Sharkovskii dio para $\mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
3 &\succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots \succ 4\cdot 3 \succ 4\cdot 5 \succ 4\cdot 7 \succ \cdots \succ \\
&\succ 2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \cdots \succ 2^\infty \succ \cdots \succ 2^n \succ \cdots \succ 4 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}
$$

Donde 2^∞ es el número par más grande. Usaremos también el símbolo $\succeq$ en la forma usual. Si $t \in \mathbb{N}$ definimos $S(t) = \{m \in \mathbb{N} \mid t \succeq m\}$. A $S(2^\infty)$ le asignaremos el conjunto $\{1, 2, 4, \ldots, 2^m, \ldots\}$. Sea $f : I \to I$. Entonces $P(f)$ será el **conjunto de periodos** de los puntos periódicos de f.

A continuación, enunciaremos el famoso Teorema de Sharkovskii, aunque la demostración original del teorema está en Ruso y se puede consultar en los artículos de Sharkovskii [35] y [36]. Sin embargo, existen versiones recientes del mismo, consultar por ejemplo [28] o [18].

9.1.4 Teorema. *Para cada función $f : I \to I$, existe $t \in \mathbb{N}$ con $P(f) = S(t)$. Por otro lado, para cada $t \in \mathbb{N}$, existe una función $f : I \to I$ con $P(f) = S(t)$.*

Antes de pasar a la discusión de la conexión entre la transitividad de una función del intervalo en sí mismo, el orden de Sharkovskii y la propiedad de ser caótico, daremos un resultado que nos será de ayuda, su demostración se puede encontrar en el libro de Block y Coppel [8] en la página 26.

9.1.5 Lema. *Sea $f : I \to I$ función. Si f es turbulenta, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos.*

Si $P(f) = S(t)$, entonces diremos f es de **tipo** t. Cuando hablemos del tipo de una función, lo consideraremos ordenado bajo el orden de Sharkovskii. Con lo anterior, podemos ver que una función del intervalo en sí mismo es caótica si es de tipo mayor que 2^∞.

Si f es bitransitiva, entonces es de tipo un número impar $2r+1$, con $r > 0$, ver Teorema 7.1.30. Si f es transitiva pero no bitransitiva, entonces el tipo de f^2 es un número impar $2s + 1$, con $s > 0$, Teorema 7.1.23. Por lo que el tipo de f es $2 \cdot (2s+1)$, con $s > 0$. Para nuestra sorpresa, podemos afirmar que en este caso $s = 1$. Esto se sigue del hecho que si f es transitiva, entonces, por Teorema 8.3.7, f^2 es turbulenta, lo que implica que tiene una 2-herradura de Smale, Definición 8.1.25. Por el Lema 9.1.5, f^2 tiene un punto periódico de periodo 3. Por lo tanto, si f es transitiva, entonces tiene un punto periódico de periodo 6 (esta última afirmación fue probada por Block y Coven en [9] y se encuentra como el Corolario 3.5).

En vista del Corolario 8.3.9 y la Proposición 9.1.3, todas las funciones transitivas del intervalo en sí mismo son caóticas en el sentido considerado en esta sección, sin embargo no todas las funciones caóticas son transitivas.

9.2. Caos en el sentido de Li y Yorke

La definición de caos de Li-Yorke fue establecida en base a su artículo [26] de 1975. Despúes, en 1986 Janková y Smítal, en su artículo [22], darían definiciones equivalentes para el caos de Li-Yorke. Finalmente, en 1989 Kuchta y Smítal, en su artículo [25], darían una caracterización del caos con conjuntos revueltos, que a continuación enunciamos.

9.2.1 Definición. *Diremos que una función $f : I \to I$ es **caótica** en el sentido de Li-Yorke si y sólamente si existen dos puntos $x, y \in I$ tales que:*

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \ \ y \ \ \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0.$$

*Al conjunto $\{x, y\}$ se le llamará un conjunto **revuelto** dos puntual.*

Si f es transitiva entonces es caótica en el sentido de Li-Yorke, aunque el regreso no es cierto, ya que el caos en el sentido de Li-Yorke permite que la función f pueda ser constante en el intervalo.

En 1987 Bruckner y Thakyin, en su artículo [13], probaron que, bajo la hipótesis del continuo, una función $f : I \to I$ es bitransitiva si y sólamente si existe un subconjunto no numerable el cual es extremadamente revuelto; esto es, un conjunto no numerable S tal que para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in S$, se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \text{ y } \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 1.$$

9.3. Caos en el sentido de Ruelle y Takens (Auslander y Yorke)

9.3.1 Definición. *Sean (X, f) un sistema dinámico, d la métrica de X, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Diremos que f es* ***Lyapunov ϵ-inestable*** *en el punto x, si para cualquier abierto U de X, con $x \in U$, existen $y \in U$ y $n \geq 0$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$.*

9.3.2 Definición. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Llamaremos a la función f* ***inestable en el punto*** *x (o el mismo punto será llamado* ***inestable****), si existe $\epsilon > 0$ tal que f es Lyapunov ϵ-inestable en x.*

Para mayor información, con respecto a esta Definición 9.3.2, se pueden consultar por ejemplo, [3], [20] y [32].

En 1971, Ruelle y Takens, en su artículo [33] (según Auslander y Yorke en [3]), definen caos para un sistema dinámico (X, f) de la siguiente manera:

9.3.3 Definición. *Sea (X, f) un sistema dinámico con f suprayectiva. Diremos que f es* ***caótica****, si existe $x_0 \in X$ cuya órbita sea densa y para cualquier punto $x \in X$ se tiene que f es inestable en x.*

Observemos que si todos los puntos de X son inestables, entonces X no tiene puntos aislados. Por lo tanto, el caos en un sistema dinámico estándar, está definido como ser topológicamente transitivo e inestable puntualmente. Notemos, además, que si un sistema dinámico estándar tiene la propiedad de ser inestable puntualmente, puede llegar a pasar que no exista $\epsilon > 0$ tal que ninguno de los puntos sean ϵ-inestables para dicha ϵ. Pero si, además, el sistema tiene una órbita densa (es decir, es transitivo), entonces la inestabilidad puntual (de hecho, la inestabilidad de un punto con órbita densa) implica la inestabilidad puntual uniforme; es decir, la existencia de una $\epsilon > 0$ en común para la cual todos los puntos sean $\epsilon-$inestables.

Por supuesto, en general, no existe una conexión entre la transitividad y la inestabilidad puntual. Sin embargo, en el intervalo la transitividad implica la inestabilidad puntual, pero el regreso no es cierto, aún cuando se tiene la inestabilidad puntual uniforme como hipótesis, pagina 359 del artículo de Barge y Martin [6] .

9.4. Caos en el sentido de Devaney

La definición más reciente que se tiene de caos es la de Robert. L. Devaney. Quien, en 1989, con la publicación de su libro “Introduction to chaotic dynamical systems” [18] define caos. Esta definición de caos, la cual veremos en breve, se volvió un tanto famosa. Por un lado, por la redundancia de la definición, la cual se encontraría tiempo más tarde y, por el otro, fuera del ámbito matemático, la sensibilidad a las condiciones iniciales, una de las tres propiedades que Devaney pide a una función para ser caótica, se volvería famosa gracias a la cinematografía con la producción de la película “El efecto mariposa”. Pasemos ahora con la definición de caos de Devaney, para mayor detalle del trabajo de Deavaney, se puede consultar [18].

9.4.1 Definición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que f es **sensible a las condiciones iniciales en** X,o f tiene **sensibilidad a las condiciones iniciales**, si existe $\epsilon_0 > 0$, fijo, tal que para cada $x \in X$ y para cada vecindad abierta U de x, existen $y \in U$ y $n \geq 0$ tales que:*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0.$$

*Al número ϵ_0 se el llamará **constante de sensibilidad**. Observemos que tener sensibilidad a las condiciones iniciales es pedir la existencia de una $\epsilon > 0$ tal que f sea Lyapunov ϵ-inestable en cada punto de X. Notemos que la constante de sensibilidad ϵ es la misma para todos los puntos del espacio. En conclusión, tener sensibilidad a las condiciones iniciales es igual a pedir que haya inestabilidad puntual uniforme.*

9.4.2 Definición. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Diremos que el sistema (X, f) es **caótico**, o que f es **caótica**, si se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *f es topológicamente transitiva,*
2. *el conjunto de los puntos periódicos de f, $\mathrm{Per}(f)$, es denso en X,*
3. *f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.*

La redundancia de la Definición 9.4.2, de la que se habló al principio de esta sección se debe al siguiente teorema. Para una prueba alterna consultar el artículo de Silverman [34]:

9.4.3 Teorema. *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X no es finito. Si f es transitiva y $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, entonces f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.*

Demostración. Primero observemos que existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $x \in X$, existe un punto periódico $q \in X$ tal que $d(x, o(q, f)) \geq \frac{\delta_0}{2}$. En efecto, sean q_1 y q_2 dos puntos periódicos arbitrarios cuyas órbitas $o(q_1, f)$ y $o(q_2, f)$, respectivamente, son disjuntas. Sea δ_0 la distancia entre $o(q_1, f)$ y $o(q_2, f)$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, cada punto $x \in X$ dista al menos $\frac{\delta_0}{2}$ de alguna de estas dos órbitas. Para ver esto, supongamos que $d(x, o(q_1, f)) < \frac{\delta_0}{2}$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, se tiene que:

$$d(x, o(q_2, f)) \geq d(o(q_1, f), o(q_2, f)) - d(x, o(q_1, f)) \geq \delta_0 - \frac{\delta_0}{2} = \frac{\delta_0}{2}.$$

Ahora, veremos que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, con constante de sensibilidad $\delta = \frac{\delta_0}{8}$.

Sean $x \in X$ un punto arbitrario y N una vecindad de x. Como $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, existe un punto periódico p en $U = N \cap V_\delta(x)$, donde $V_\delta(x)$ es la bola abierta de radio δ con centro en x. Sea n el periodo de p, por lo mostrado en el primer párrafo, existe un punto periódico $q \in X$ cuya órbita, $o(q, f)$, dista por lo menos 4δ de x. Tomemos:

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(V_\delta(f^i(q))).$$

Notemos que V es un abierto de X, no vacío, pues $q \in V$. Por la transitividad de f, existen $y \in U$ y $k \geq 0$ tales que $f^k(y) \in V$. Tomemos j la parte entera de $\frac{k}{n} + 1$. Entonces tenemos que $1 \leq nj - k \leq n$. Por construcción, tenemos lo siguiente:

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subset V_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Como n es el periodo de p, $f^{nj}(p) = p$. Por la desigualdad del triángulo, resulta que:

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \geq \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x). \end{aligned}$$

Consecuentemente, como $p \in V_\delta(x)$ y $f^{nj}(y) \in V_\delta(f^{nj-k}(q))$, tenemos que:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Por lo tanto, usando la desigualdad del triángulo una vez más, se tiene que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$, o $d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$. Para ver esto, supongamos que no es cierto; es decir, que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) < \delta$ y que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) < \delta$. Entonces observemos lo siguiente:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) \leq \delta + \delta = 2\delta,$$

lo cual es una contradicción. Por lo que:

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta, \quad \text{o} \quad d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta.$$

En cualquiera de los dos casos, hemos encontrado un punto en la vecindad N cuya nj-ésima iteración dista más que δ de $f^{nj}(x)$. $\square$

Bibliografía

[1] Adler, Roy, Konheim G. Alan. y McAndrew, M. Harry, *Topological entropy*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114, 2: 309-319, 1965.

[2] Alsedà, Lluís, Llibre, Jaume y Misiurewicz, Michal, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, World Scientific Publishing Co., Inc. 1993,

[3] Auslander, Joseph y Yorke, James. A, *Interval maps, factors of maps, and chaos*, Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 32, 2: 177-188, Mathematical Institute, Tohoku University, 1980.

[4] Bae, Jong. Sook y Yang, Seung. Kab, *P=R for maps of the circle*, Bull. Korean Math. Soc, 24: 151-157, 1987.

[5] Banks, J., Brooks, J., Davis, G., y Stace, P., *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, 99: 332-334, 1992.

[6] Barge, Marcy y Martin, Joe, *Chaos, periodicity, and snakelike continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 289, 1: 355-365, 1985.

[7] Birkhoff, George David, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., 9, 1927.

[8] Block, Louis y Coppel, William, *Dynamics in one dimension*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[9] Block, Louis y Coven, Ethan. M., *Topological conjugacy and transitivity for a class of piecewise monotone maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc., 300, 1: 297-306, 1987.

[10] Block, Louis, Coven, Ethan, Mulvey, Irene, y Nitecki, Zbigniew, *Homoclinic and non-wandering points for maps of the circle*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 3, 04: 521-532, 1983.

[11] Block, Louis, Guckenheimer, John, Misiurewicz, Michal y Young, L. Sang, *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps*, Global theory of dynamical systems, 18-34, Springer, 1980.

[12] Bowen, Rufus, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 153: 401-414, 1971.

[13] Bruckner, A. M, y Hu, Thakyin, *On scrambled sets for chaotic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 301, 1: 289-297, 1987.

[14] Christenson, C. O. and Voxman, W. L., *Aspects of topology*, BCS Associates, 1998.

[15] Coven, Ethan M., y Hedlund, GA, $\bar{P} = \bar{R}$ *for maps of the interval*, Proc. Amer. Math. Soc., 79, 2: 316-318, 1980.

[16] Coven, Ethan M., y Mulvey, Irene, *Transitivity and the centre for maps of the circle*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 6, 01: 1-8, Cambridge Univ. Press, 1986.

[17] Denker, Manfred, Grillenberger, Christian y Sigmund, Karl, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 577, Springer-Verlag, Berlin, Hidelberg, New York, 70, 1975.

[18] Devaney, Robert. L, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd edition, Addison-Wesley Reading, 1989.

[19] Ginoux, Jean-Marc y Gerini, Christian, *Henri Poincaré: A Biography Through the Daily Papers*, World Scientific, 2013.

[20] Guckenheimer, John, *Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps*, Comm. Math. Phys., 70, 2: 133-160, Springer 1979.

[21] Haaser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A., *Introduction to analysis*, Ginn, 1959.

[22] Janková, Katarına y Smítal, J., *A characterization of chaos*, Bull. Aust. Math. Soc., 34, 02: 283-292, Cambridge Univ Press, 1986.

[23] Katok, Anatole y Hasselblatt, Boris, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.

[24] Kolyada, Sergiĭ and Snoha, Lúbomír, *Some aspects of topological transitivity — a survey*, European Conference on Iteration Theory ECIT, 3-35: 334, Grazer Math. Ber., 1997.

[25] Kuchta, M. y Smıtal, J., *Two point scrambled set implies chaos*, 87: 427-430 Proc. Europ. Conf. on Iteration Theory, Spain, 1987.

[26] Li, Tien-Yien y Yorke, James A., *Period three implies chaos*, Amer. Math. Month., 82, 10: 985-992, JSTOR, 1975.

[27] Macías, Sergio, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 82, Chapman & Haul/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[28] Méndez, Héctor y King, Jefferson, *Sistemas dinámicos discretos*, Las Prensas de Ciencias, 2014.

[29] Munkers, R. James, *Topology, A First Course*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[30] Poincaré, Henri, *Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta mathematica, 13, 1: A3-A270, Springer 1890.

[31] Poincaré, Henri y Magini, R., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Il Nuovo Cimento, 10, 1: 128-130, Springer, 1899.

[32] Preston, Chris, *Iterates of Maps on an Interval*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 999, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[33] Ruelle, David y Takens, Floris, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys., 20, 3: 167-192, Springer 1971.

[34] Silverman, Stephen, *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain J. Math., 22, 1: 353-375, 1992.

[35] Sharkovskii, A. N., *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Math. Zh., 16: 61-71, 1964.

[36] Sharkovskii, A. N., *On cycles and the structure of a continuous mapping*, Ukrain. Math. Zh., 17: 104-111, 1965.

[37] Sharkovskii, A. N., *Non-wandering points and the centre of a continuous mapping of the line into itself*, Dopovidi Ukrain. Acad. Sci., 7: 865-868, 1964.

Índice alfabético