



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO**  
**PRODUCIDO POR UN QUARK**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

**PRESENTA:**  
**MARÍA ANAYELI RAMÍREZ ORTIZ**

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL:  
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG  
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.





UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

# ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK

Tesis de Maestría presentada por María Anayeli Ramírez Ortiz

dentro del Programa de Maestría en Ciencias (Física)

Dirigida por Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Ciudad de México, Junio de 2017



*A mis sobrinos, hermanos y padres*



## Resumen

En este trabajo usamos la correspondencia AdS/CFT para calcular, en una teoría de norma fuertemente acoplada, la primera corrección de la entropía de entrelazamiento del campo gluónico producido por un quark estático e infinitamente pesado. La correspondencia AdS/CFT es un enunciado de equivalencia que relaciona teorías con y sin gravedad, nos da una nueva visión y nos permite realizar cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte para diversas teorías de campos. La cantidad de interés en este trabajo es la entropía de entrelazamiento, que cuantifica el grado en el que subsistemas están correlacionados cuánticamente. Con la correspondencia AdS/CFT, ésta cantidad es calculada mediante la prescripción de Ryu y Takayanagi. A partir de esta prescripción, Karch y Chang derivaron una fórmula simple y compacta para calcular la aportación a la entropía de entrelazamiento debida a una brana de prueba. Nosotros, en el presente trabajo, usamos la fórmula de Karch y Chang para calcular la entropía de entrelazamiento usando como prueba una cuerda fundamental, que corresponde a un quark en la teoría de norma. Para ello debemos considerar dos contribuciones, una de las cuales es un término de regularización. Ambos términos contribuyen importantemente, dando como resultado  $\delta S = \frac{\sqrt{\lambda}}{3}$ . Este resultado está de acuerdo con el reportado por Lewkowycz y Maldacena, obtenido mediante otras técnicas. Nuestro cálculo sirve entonces como una verificación del procedimiento propuesto por Karch y Chang, y también del método de Lewkowycz y Maldacena.





## Agradecimientos

El primer agradecimiento quiero hacerlo llegar a los principales impulsores de mis sueños y mis grandes maestros, mis sobrinos y mi hermano pequeño: Tiana, Tadeo (choncho), Sofía y Gabriel. Por el simple hecho de pensar en ellos, en su ingenuidad y en su autenticidad pude enfrentar cada obstáculo que me encontré. Mil gracias también a mis compañeros de juegos y de vida: Kathia y Tadeo, por sus consejos y su apoyo sentimental. Mis padres merecen una distinción especial, porque siempre creyeron en mi y siempre tuve de ellos una palabra de aliento. El amor de todos ustedes ha conseguido que yo haya logrado alcanzar esta meta.

Debo premiar a todos aquellos que hicieron mi día a día. Salomón Zacarías, porque siempre tienes las palabras necesarias para que yo me levante y porque académicamente también me apoyaste bastante, ¡mil gracias!. Las Sonorenses que fueron mis compañeras en este viaje llamado maestría: Mayra y Viridiana, porque amenizaron mucho estos años y porque siempre tienen algo que contar. A mi hermano adoptado David, que no acabaría de mencionar todo aquello por lo que tengo que agradecerle.

Mi más sincero agradecimiento a Alberto Güijosa ya que siempre tuvo la disposición de aclarar mis dudas y porque me mostró el mundo de la investigación. No solo me oriento en el ámbito académico también aprendí a ser paciente, perseverante, constante y disciplinada. Quiero agradecer a mi jurado, por sus valiosos comentarios: Dr. David Vergara, Dr. Román Linares, Dr. Leonardo Patiño y Dr. Antonio García Zenteno. Quiero hacer una mención especial al Dr. David Vergara y

al Dr. Miguel Socolovsky porque fueron parte de mi formación en la física teórica.

Por último y no menos importante quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México; con especial mención al Instituto de Ciencias Nucleares, porque fue para mí una casa en estos años. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo monetario, especialmente del proyecto 238734. Así mismo, agradezco la beca otorgada por el proyecto IN107115 del Programa de Apoyo de Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT), la cual me permitió finalizar la tesis.

Anayeli Ramírez

junio 2017

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>1. Cuerdas y la Correspondencia AdS/CFT</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de Cuerdas . . . . .	3
1.1.1. Teoría de Cuerdas IIB y su acción efectiva . . . . .	5
1.1.2. Branas . . . . .	7
1.2. Correspondencia AdS/CFT . . . . .	13
1.2.1. Quarks en la Correspondencia AdS/CFT . . . . .	19
<b>2. Entropía de Entrelazamiento Holográfica</b>	<b>23</b>
2.1. Operador de densidad, estados puros y mixtos . . . . .	25
2.2. Sistemas compuestos; operador de densidad reducida . . . . .	27
2.3. Entrelazamiento cuántico . . . . .	29
2.3.1. Algunas propiedades de la entropía de entrelazamiento . . . . .	31
2.4. Entropía de entrelazamiento en teorías cuánticas de campos . . . . .	33
2.5. Entropía de entrelazamiento holográfica . . . . .	36
<b>3. La doble integral de Karch y Chang</b>	<b>39</b>
3.1. Sistemas de branas de prueba . . . . .	41
3.2. El propagador del Gravitón . . . . .	43
3.3. La deducción de Karch y Chang . . . . .	46
3.3.1. El término de regularización . . . . .	48

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>4. Entrelazamiento del campo gluónico producido por un quark infinitamente masivo</b>	<b>51</b>
4.1. La perturbación debida a la cuerda . . . . .	54
4.2. Entrelazamiento desde la fórmula de Karch y Chang para un quark	59
4.2.1. El tensor de energía-momento mínimo . . . . .	60
4.2.2. La doble integral de Karch y Chang para la cuerda . . . . .	62
4.2.3. El término de regularización para la cuerda . . . . .	65
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

1.1. Una D3-brana separada del resto. La cuerda que se extiende entre ella y las $N$ D3-branas representa un quark en la representación fundamental del grupo de norma $U(N)$ . . . . .	19
1.2. Configuración del sistema de $N$ D3-branas para un quark en la representación fundamental. En la 3-brana negra tenemos una cuerda macroscópica extendida en la geometría. Después de tomar el límite de Maldacena obtenemos un quark con masa infinita, dual a la cuerda con un extremo en $z = 0$ y extendida hacia infinito. . . . .	20
2.1. Sistema de dos espines dividido en dos subsistemas $A$ y $B$ . . . . .	28
2.2. Variedad $\mathcal{V}$ para el cálculo de la entropía de entrelazamiento, donde hemos dividido la variedad en dos subvariedades, $A$ y $B$ , por medio de una superficie $\partial A$ . . . . .	34
2.3. Extensión de la superficie $\partial A$ en el bulto de AdS para la prescripción de Ryu y Takayanagi. . . . .	37

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

- 4.1. Del lado izquierdo, colocamos un quark en el origen de la teoría de campo y para calcular la entropía de entrelazamiento elegimos una superficie de entrelazamiento esférica alrededor del quark. Del lado derecho, dibujamos la configuración en el bulto, es decir, la cuerda atada en  $z = 0$ , la superficie de entrelazamiento y la superficie mínima asociada sin y con la perturbación debido a la cuerda,  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  respectivamente. Se muestra también el corte  $\epsilon$  sin la modificación debida a la cuerda y el corte  $\epsilon'$  elegido para tomar en cuenta la perturbación producida por la cuerda. . . . . 52
- 4.2. La parte A) es un esquema de la fórmula (3.23). Para realizar la resta necesitamos elegir un corte  $\epsilon$ , de tal manera que se cumpla  $\Gamma_\epsilon = \Gamma_{\epsilon'}$ . Podemos calcular el área desde el corte  $\epsilon$  en  $G'$  y restar el área entre los cortes  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ ; esto es lo que se muestra en la Figura B). Como resultado tenemos dos términos que corresponden a la doble integral de Karch y Chang,  $I_{KCh}$ , y el término de regularización,  $I_R$ , donde ambos términos se muestran esquemáticamente en la Figura C). . . . . 60
- 4.3. La integral (4.54) la realizamos expandiendo el integrando en series alrededor de  $z = 0$  e integrando cada término. Hacemos la integral a orden noventa y vemos que conforme la serie aumenta su valor se aproxima a  $\frac{\delta S}{\sqrt{\lambda}} \sim \frac{1}{2}$ . . . . . 64

# Cuerdas y la Correspondencia AdS/CFT

Dos de los pilares más importantes de la física, que surgieron a principios del siglo XX, son la Mecánica Cuántica y la Relatividad General. Aunque ha pasado casi un siglo desde que se establecieron sus bases, se siguen encontrando características propias de cada teoría. Así como también, fenómenos que necesitan una descripción conjunta de las dos teorías y que han sido grandes desafíos conceptuales para los físicos teóricos actuales.

La Relatividad General de Einstein, RG, funciona para describir las escalas más grandes del Universo, tales como las galaxias y las estrellas. Establece que todos los objetos deforman el espaciotiempo en menor o mayor medida, dependiendo de su energía. Esta curvatura es la noción que tenemos de la gravedad. El enunciado anterior es cuantificado en las ecuaciones de Einstein como sigue:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es puramente geometría y describe la curvatura; donde  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$  son respectivamente el escalar de Ricci, el tensor de Ricci y la métrica. El lado izquierdo corresponde al contenido material y se cuantifica con



## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

el tensor de energía-momento,  $T_{\mu\nu}$ . Mientras que la constante  $\kappa$  esta relacionada a la constante gravitacional de Newton por medio de  $\kappa^2 = 8\pi G$ . Ahora, si lo que buscamos es la descripción del mundo a escalas subatómicas, recurrimos a la MC, donde no sabemos con precisión el comportamiento de los cuerpos y hablamos de un comportamiento incierto.

La descripción conjunta de la MC y la RG podría darnos herramientas para explicar grandes interrogantes como los primeros instantes del universo, que presuntamente comenzó con una gran explosión. Si se logra una descripción unificada de ambas teorías, la naturaleza cuántica de la gravedad permitiría incluir a la gravedad en una teoría que unifique a las cuatro interacciones. Este hecho se ha buscado por años, ya que tres de las cuatro interacciones fundamentales (fuerza fuerte, fuerza débil y el electromagnetismo) se pueden describir en términos del lenguaje cuántico. La teoría que contiene a las tres interacciones es denominada Modelo Estándar.

Uno de los fuertes candidatos para obtener una gravedad cuántica consistente y una teoría que unifique las cuatro fuerzas fundamentales es la Teoría Cuerdas. Ésta surgió en los años 60's, al principio su finalidad era describir a los hadrones, pero después la Teoría de Cuerdas fue desplazada por QCD. La idea básica de Teoría de Cuerdas es que todas las partículas fundamentales son en realidad manifestaciones de otros objetos más elementales: cuerdas.

Si bien la Teoría de Cuerdas tiene metas más ambiciosas, como la búsqueda de una teoría unificadora, también se ha obtenido a partir de ésta herramientas más modestas. En 1997 Juan Maldacena propone una herramienta que hoy es conocida como la correspondencia AdS/CFT y que en los recientes años ha dado avances significativos, ya que amplía el panorama hacia diversos campos de la física teórica.

En lo que resta de este capítulo daremos una breve introducción a la Teoría de Cuerdas y a la correspondencia AdS/CFT. Resaltaremos los ingredientes más importantes de la Teoría de Cuerdas para dar una explicación de la correspondencia AdS/CFT.

## 1.1 Teoría de Cuerdas

La idea detrás de la Teoría de Cuerdas es considerar objetos extendidos en una dimensión como los objetos fundamentales, en vez de partículas puntuales. A estos objetos unidimensionales se les conoce como cuerdas.

De la misma manera que el movimiento de una partícula describe una línea de mundo en el espaciotiempo, las cuerdas barren una superficie  $(1 + 1)$ -dimensional en el espaciotiempo a la que denominamos hoja de mundo,  $\Sigma$ . Parametrizamos la hoja de mundo con las coordenadas escalares  $\tau$  y  $\sigma$ , que esencialmente corresponden al tiempo y la posición espacial a lo largo de la cuerda, respectivamente. Como estamos interesados en la trayectoria que dibuja la cuerda en el espaciotiempo, es conveniente introducir los campos  $X^M(\sigma, \tau)$ , que nos dan la receta para saber cómo está encajada la hoja de mundo en el espaciotiempo  $d$ -dimensional. Aquí  $M$  es un índice espaciotemporal,  $M = 0, \dots, d - 1$ .

La física de la cuerda no depende de como está parametrizada la hoja de mundo, sino de la inmersión de la hoja de mundo en el espaciotiempo. La acción invariante más simple, que describe la dinámica de la cuerda, es la acción de Nambu-Goto,

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\sigma d\tau \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta})},$$

donde  $g_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}X^M \partial_{\beta}X^N G_{MN}$ . (1.2)

Siendo  $g_{\alpha\beta}$  la métrica inducida en la hoja de mundo y  $G_{MN}$  la métrica del espaciotiempo. El coeficiente de la acción,  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ , es la tensión de la cuerda y está relacionado con la longitud característica de la Teoría de Cuerdas  $l_s$  (asociada con el tamaño característico de las cuerdas) por medio de  $\alpha' = l_s^2$ .

La hoja de mundo de una cuerda que se propaga de manera libre tiene diferente topología dependiendo de si es una cuerda cerrada o abierta. Para una cuerda cerrada tenemos una topología de un cilindro, mientras que para una cuerda abierta es la de una tira. En el caso de la cuerda cerrada, el encaje  $X^M$  es periódico en la coordenada  $\sigma$  sobre el cilindro. Para la cuerda abierta, imponemos condiciones de frontera (sobre los campos  $X^M$ ) en los puntos finales de la cuerda; estas condiciones pueden ser de Dirichlet o de Neumann, para cada uno de los extremos. El significado físico de las condiciones de frontera de Neumann es que no hay flujo de momento por los extremos de la cuerda, es decir los extremos son libres. Las

## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

condiciones de frontera de Dirichlet establecen que los extremos de la cuerda están fijos en el espaciotiempo y entonces hay un momento que fluye por ellos.

Las condiciones de Dirichlet no fueron consideradas por años, debido a que violan la invarianza de Poincaré, ocasionando que el momento de la cuerda no se conserve. Sin embargo, volvieron a ser tomadas en cuenta cuando se entendió que el momento que escapa por los extremos de la cuerda es absorbido por otros objetos dinámicos, conocidos como Branas de Dirichlet o D-Branas [1]. En la sección 1.1.2 daremos más detalles de las D-Branas.

La acción de Nambu-Goto no es una expresión sencilla si lo que se quiere es obtener las ecuaciones de movimiento o cuantizarla. Existe una manera clásicamente equivalente de describir la dinámica de la cuerda, utilizando la acción de Polyakov,

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\tau d\sigma \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^M \partial_{\beta} X^N G_{MN}, \quad (1.3)$$

donde  $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$  es una métrica intrínseca en la hoja de mundo, semejante a las métricas 2-dimensionales usadas en RG. La acción  $S_P$  es invariante bajo transformaciones de Poincaré ( $X^M \mapsto X'^M = \Lambda^M_N X^N + a^M$ , donde  $\Lambda^M_N$  y  $a^M$  son transformaciones de Lorentz y traslaciones del espaciotiempo, respectivamente), reparametrizaciones locales de la hoja de mundo ( $\sigma^{\alpha} \mapsto \sigma'^{\alpha} = f^{\alpha}(\sigma)$ ) y transformaciones de Weyl ( $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \mapsto e^{2\omega(\tau, \sigma)} h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ ).

El proceso de cuantización a partir de una teoría clásica no siempre es compatible con las simetrías presentes en la acción clásica. Por ejemplo, en el caso de la Teoría de Cuerdas las transformaciones de Weyl no dejan invariante la medida de integración, cuando esto sucede tenemos una anomalía en la teoría. Para ser específicos, la anomalía asociada con las transformaciones de Weyl se conoce como anomalía de Weyl o anomalía conforme. En la cuerda bosónica se puede demostrar que la anomalía de Weyl es proporcional a  $d - 26$ , lo que determina la dimensión crítica de la Teoría de Cuerdas bosónica, es decir la Teoría de Cuerdas sólo es consistente en un espaciotiempo de 26 dimensiones. Si incluimos fermiones en la teoría, se obtiene una dimensión crítica de 10 dimensiones.

En la versión supersimétrica de la Teoría de Cuerdas se tiene una teoría de campos supersimétrica en (1+1)-dimensiones con  $d$  supercampos, cada uno formado por una coordenada bosónica  $X^M$  y dos coordenadas fermiónicas  $\psi_{\pm}^M$  (los

supercompañeros de  $X^M$ ). Cuantizando la teoría, el espectro contiene un número finito de excitaciones con masa cero y un número infinito de excitaciones masivas, con masa  $m^2 = \frac{4}{\alpha'}(n - a)$ , donde  $n \in \mathbb{R}$  y  $a$  es una constante. Cada una de estas excitaciones representa a un tipo específico de partícula. Un punto a resaltar es que para los estados masivos la masa va como el inverso de  $l_s$ . Si esperamos que  $l_s$  sea del orden de la longitud de Planck ( $\sim 10^{-35}m$ ), entonces las excitaciones masivas de la Teoría de Cuerdas están fuera de lo que un acelerador puede obtener hoy en día. Es por esta razón que la información la obtenemos sólo de los estados con masa cero.

Los fermiones  $\psi_{\pm}^M$  en la hoja de mundo de la cuerda cerrada pueden ser periódicos (Ramond, R) o antiperiódicos (Neveu-Schwarz, NS),

$$\begin{aligned}\psi_+^M(\sigma + 2\pi, \tau) &= \psi_+^M(\sigma, \tau), \\ \psi_-^M(\sigma + 2\pi, \tau) &= -\psi_-^M(\sigma, \tau),\end{aligned}$$

respectivamente. Donde la condición de periodicidad puede ser elegida de manera independiente para cada quiralidad. Esto lleva a cuatro sectores diferentes de la teoría de cuerdas cerrada. Excitaciones en los sectores NS-NS y R-R son bosones espacio-temporales. Mientras excitaciones en los dos sectores mixtos R-NS y NS-R son fermiones espacio-temporales. Para la cuerda abierta, las condiciones de frontera acoplan entre sí a las dos quiralidades, obteniendo sólo dos sectores: el sector de NS con bosones y el sector de R con fermiones.

La supersimetría permite formular consistentemente cinco diferentes Teorías de Supercuerdas: Supercuerdas tipo IIA, Supercuerdas tipo IIB, Supercuerdas tipo I, Supercuerdas Heteróticas  $SO(32)$  y Supercuerdas Heteróticas  $E_8 \times E_8$ . Fue hasta los 90's cuando se descubrió que estas cinco teorías forman parte de una sola estructura subyacente, conocida como teoría M. Para los intereses de este trabajo sólo nos enfocaremos en la teoría tipo IIB, y en la siguiente sección daremos algunas de sus características.

### 1.1.1 Teoría de Cuerdas IIB y su acción efectiva

La Teoría de Cuerdas en la que estamos interesados es la teoría de Supercuerdas IIB. Incluye cuerdas cerradas propagándose en un espaciotiempo plano en  $d =$

## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

$9 + 1$  dimensiones, y el “II” es un número romano que representa el número de supersimetrías espaciotemporales de la teoría, es decir  $\mathcal{N} = 2$ . El “B” indica que la teoría es quirral, a diferencia de la “IIA” que es no quirral. Al considerar estados que incluyen D-branas dentro de la teoría también se deben considerar cuerdas abiertas.

Los estados masivos de esta teoría tienen masa  $m^2 = \frac{4n}{l_s^2}$ , entonces para energías  $E \ll \frac{1}{l_s}$  basta con considerar los estados con masa cero. Para el sector de NS-NS, los estados no masivos se asocian con el dilatón  $\phi(X^L)$ , el gravitón o métrica  $G_{MN}$  y el campo de Kalb-Ramond (también conocido como 2-forma Kalb-Ramond)  $B_{(2)}$ . En el sector de R-R, los modos de masa cero son: el axi3n o 0-forma  $C_{(0)}$ , una 2-forma  $C_{(2)}$  y una 4-forma  $C_{(4)}$ .

A lo largo de este trabajo, sólo utilizaremos la parte bosónica de la teoría, pero por completez mencionaremos el sector fermiónico, que corresponde a los sectores mixtos, R-NS y NS-R. En estos sectores se tienen dos espinores de Majorana-Weyl con la misma quiralidad, llamados dilatinos, que son los supercompañeros del dilatón. Se obtienen también dos supercompañeros del gravitón, llamados gravitinos, que corresponden a un vector por un espinor de Majorana-Weyl, con quiralidad contraria a los de los dilatinos.

Recordemos que para energías  $E \ll \frac{1}{l_s}$  estamos considerando el espectro no masivo, es decir sólo un número finito de campos. La acción a bajas energías que aproxima la dinámica de la Teoría de Cuerdas es una teoría conocida como supergravedad IIB. Dicha acción en el llamado marco de Einstein tiene la forma:

$$S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left[ R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\phi}H_{(3)}^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}F_{(1)}^2 - \frac{1}{2}e^{\phi}F_{(3)}^2 - \frac{1}{4}F_{(5)}^2 \right] - \frac{1}{4\kappa^2} \int C_{(4)} \wedge H_{(3)} \wedge F_{(3)}, \quad (1.4)$$

donde hemos escrito los campos de norma  $B_{(2)}$ ,  $C_{(0)}$ ,  $C_{(2)}$ ,  $C_{(4)}$  en términos de sus intensidades:  $H_{(3)} = dB_{(2)}$ ,  $F_{(1)} = dC_{(0)}$ ,  $F_{(3)} = dC_{(2)}$  y  $F_{(5)} = dC_{(4)}$ , respectivamente. Además de la acción (1.4) se impone la restricción de autodualidad de  $F_{(5)}$  a nivel de las ecuaciones de movimiento; estrictamente hablando, la dinámica de la teoría tipo IIB a bajas energías es gobernada por las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción más el requisito de autodualidad de  $F_{(5)}$ .

La constante  $\kappa^2$  está dada por:

$$2\kappa^2 = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8.$$

donde  $l_s$  es la longitud de cuerdas y  $g_s$  la constante de acoplamiento de cuerdas, que determina la amplitud de probabilidad del proceso de dispersión. Esta constante no es un parámetro libre de la teoría, sino que está relacionada con el valor esperado en el vacío del campo del dilatón,

$$g_s = e^{\langle\phi\rangle}. \quad (1.5)$$

La acción efectiva completa de la teoría de cuerdas no es la expresión (1.4), ya que incluye una serie de correcciones con derivadas de orden superior. Sin embargo, estas correcciones por análisis dimensional aparecen con potencias cada vez más altas de  $l_s$  y por lo tanto se convierten despreciables a bajas energías.

Un punto que cabe resaltar, es que las soluciones a las ecuaciones de movimiento de supergravedad IIB son fondos, que representan distintos estados permitidos en la teoría de cuerdas IIB. En la siguiente subsección veremos uno de estos fondos.

### 1.1.2 Branas

Hasta ahora hemos hablado del espectro de las cuerdas cerradas y la acción efectiva a bajas energías de la Teoría de Cuerdas. El espectro no perturbativo de la Teoría de Cuerdas IIB incluye otros objetos conocidos como  $Dp$ -branas. Estos son objetos extendidos en  $p$ -dimensiones, cargados bajo los campos de R-R [2], cuyas excitaciones se describen a través de cuerdas abiertas, cuyos extremos terminan en la  $Dp$ -brana [1]. La  $Dp$ -brana traza un volumen de mundo  $(p + 1)$ -dimensional y los extremos de la cuerda abierta son libres de deslizarse a lo largo de las  $p + 1$  direcciones paralelas a la  $Dp$ -brana,  $X^\alpha$ , y se mantienen adheridos a la  $Dp$ -brana en las direcciones transversales,  $X^i$ . De esta manera, las  $X^\alpha$  obedecen condiciones de Neumann y las  $X^i$  condiciones de Dirichlet.

Las  $Dp$ -branas pueden ser analizadas desde dos puntos de vista diferentes: como hiperplanos dinámicos donde las cuerdas abiertas tienen sus extremos o como objetos muy masivos, y que por lo tanto curvan el espaciotiempo, es decir, corresponden a soluciones solitónicas en Teoría de Cuerdas.

Veamos primeramente a las  $Dp$ -branas como hiperplanos dinámicos. Desde este punto de vista, las cuerdas abiertas únicamente pueden existir en presencia de  $Dp$ -branas, y su tensión es la misma que la tensión de una cuerda cerrada,  $T = \frac{1}{2\pi l_s^2}$ , ya

## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

que sus puntos internos son idénticos; sólo los puntos finales de la cuerda abierta marcan la diferencia. Con esto en mente, podemos considerar a las cuerdas abiertas como filamentos de la misma D-brana que contiene los extremos de la cuerda. De esta manera, el espectro de la D-brana puede ser obtenido calculando el espectro cuántico de la cuerda abierta, dando lugar a una torre infinita de estados con masas proporcionales a  $\frac{1}{l_s}$ . Los campos sin masa del espectro son:  $9 - p$  campos escalares  $\Phi^i(X^\alpha)$  (uno por cada coordenada normal), un campo de norma  $A^\beta(X^\alpha)$ , y un campo espinorial  $\Psi(X^\alpha)$ .

Las interacciones de cuerdas abiertas se pueden obtener calculando amplitudes de dispersión, donde se obtiene que el proceso es controlado por la constante de interacción de cuerdas,  $g_s$ . A bajas energías existe una acción efectiva que contiene a las interacciones de los campos no masivos, y que se conoce como la acción (supersimetrizada) de Dirac-Born-Infeld. Al acoplar los modos de la D-brana con los campos de supergravedad, se obtiene una acción generalizada de Dirac-Born-Infeld:

$$S_{DBI} = -\tau_p \int d^{p+1}\sigma e^{-\phi} \sqrt{-\det(P[g]_{\alpha\beta} + P[B]_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})} + \tau_p \int d^{p+1}\sigma \sum_q P[C_{(q+1)}] \wedge e^{P[B]_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}}, \quad (1.6)$$

donde en la norma estática  $X^\alpha = \sigma^\alpha$  y  $X^i = 2\pi\alpha'\Phi^i$ .  $F_{\alpha\beta}$  es la intensidad de campo,  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , y  $P[g]_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^M}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^N}{\partial \xi^\beta} g_{MN}$  es la retracción del tensor al volumen de mundo de la Dp-brana.  $B_{\alpha\beta}$  y  $C_{(q+1)}$  son respectivamente el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond del sector de NS-NS y las  $(q+1)$ -formas del sector de R-R. El factor  $\tau_p$  es la tensión o energía por unidad de volumen de la Dp-brana,

$$\tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (1.7)$$

Para investigar la dinámica del campo de norma  $F_{\alpha\beta}$ , apagamos el campo de Kalb-Ramond y las p-formas de R-R, y consideramos también un dilatón constante. Expandiendo la acción de DBI y quedándonos con el orden no trivial más bajo en  $\alpha'$ :

$$S = -(2\pi\alpha')^2 \frac{\tau_p}{4g_s} \int d^{p+1}\sigma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Esta acción es Yang-Mills con grupo de norma  $U(1)$ , o en otras palabras, la acción de Maxwell. De la expresión (1.8) y (1.7) podemos leer la constante de acoplamiento de Yang-Mills,

$$g_{YM}^2 = \frac{g_s}{\tau_p (2\pi\alpha')^2} = g_s (2\pi)^{p-2} \alpha'^{\frac{p-3}{2}}. \quad (1.9)$$

Una propiedad importante de las D-branas se presenta cuando tenemos un sistema conformado por  $N$  D-branas coincidentes. Identificamos los puntos finales de la cuerda abierta por medio de dos índices  $[I, J]$ , que nos indican que el extremo inicial de la cuerda está en la D-brana número  $I$  y el extremo final de la cuerda está en la D-brana número  $J$ . Si consideramos que hay dos orientaciones para cada cuerda, tenemos entonces  $N^2$  tipos o sectores de cuerdas abiertas. Desde este punto de vista, el resultado de que cada D-brana tiene un campo de norma viviendo en su volumen de mundo se generaliza, y entonces se tiene un campo de norma por cada sector, es decir  $N^2$  campos de norma en total. Todos estos campos de norma interactúan y en el límite de bajas energías definen una teoría de Yang-Mills, pero ahora con grupo de norma  $U(N)$ . Una manera conveniente de escribir estos  $N^2$  campos es en una matriz de  $N \times N$  que escribiremos como  $A_{IJ}$ , donde  $I, J = 1, \dots, N$ , lo cual nos hace pensar que el grupo de norma es no abeliano.

Como las D-branas tienen masa, podemos esperar que curven el espaciotiempo y por lo tanto se les puede describir como soluciones (solitónicas) de las ecuaciones de movimiento de supergravedad [2]. Estas soluciones son generalizaciones extendidas de agujeros negros a los que se les denomina branas negras. Las branas negras (al igual que las D-branas) están cargadas bajo el campo R-R con  $p + 1$  índices [2].

En la sección 1.1.1 vimos que la acción efectiva a bajas energías es la acción de supergravedad IIB, expresión (1.4). En el marco de cuerdas la acción se puede reescribir de la siguiente manera:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left( e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{2}{(8-p)!} F_{p+2}^2 \right), \quad (1.10)$$

donde los campos restantes han sido puestos igual a cero.

Buscamos soluciones que sean extendidas en  $p$  dimensiones espaciales, esféricamente simétricas en las dimensiones restantes, localizadas en el origen y que



## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

sean una fuente del campo R-R  $p$ -dimensional. La métrica más general con estas simetrías tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = ds_{10-p}^2 + e^\alpha \sum_{i=1}^p dx^i dx^i. \quad (1.11)$$

$ds_{10-p}$  es una métrica esféricamente simétrica con signatura Lorentziana en  $10 - p$  dimensiones y  $x^i$  son  $p$  coordenadas Euclidianas.

Si obtenemos las ecuaciones de movimiento que provienen de la acción (1.10) y sustituimos en ellas la solución (1.11), se encuentra la siguiente familia de soluciones en el marco de cuerdas:

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}} dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i + \frac{f_-(\rho)^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} d\rho^2 + r^2 f_-(\rho)^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2, \quad (1.12)$$

con la  $p + 1$ -forma y el dilatón dados por,

$$C_{01\dots p} = g_s^{-1} (1 - f_-(\rho)^{-1}), \quad (1.13)$$

$$e^\phi = g_s f_-(\rho)^{\frac{p-3}{4}}. \quad (1.14)$$

Aquí hemos definido

$$f_\pm(\rho) = 1 - \left( \frac{r_\pm}{\rho} \right)^{7-p}. \quad (1.15)$$

Los parámetros  $r_+$  y  $r_-$  están relacionados con la masa por unidad de volumen,

$$M = \frac{1}{(7-p)(2\pi)^7 d_p l_s^8} ((8-p)r_+^{7-p} - r_-^{7-p}), \quad (1.16)$$

y con la carga Ramond-Ramond,

$$N = \frac{1}{d_p g_s l_s^{7-p}} (r_+ r_-)^{\frac{7-p}{2}}, \quad (1.17)$$

de la solución. Donde  $d_p$  es un factor numérico,

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right). \quad (1.18)$$

Un punto a resaltar es que no para todo valor de  $r_+$  y  $r_-$  la familia de soluciones representa una brana negra cargada. En [3] demuestran que hay una singularidad en  $r_-$  y un horizonte en  $r_+$ , siempre y cuando  $p \leq 6$ . De esta manera, solo soluciones que cumplen  $r_+ \geq r_-$  corresponden a una brana negra cargada, ya que la singularidad es cubierta por el horizonte. Con la condición  $r_+ \geq r_-$ , las ecuaciones (1.16) y (1.17) describen una cota:

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (1.19)$$

La cual se conoce como cota BPS, que también se puede deducir del álgebra de supersimetría. La desigualdad se satura para el valor  $r_+ = r_-$ , entonces la brana se llama extremal y decimos que tenemos una configuración BPS (que resulta preservar 16 de las 32 supersimetrías de la teoría IIB). La solución con masa más grande que el mínimo se conoce como una  $p$ -brana negra no extremal.

Existe una manera más conveniente de escribir la métrica (1.12) a partir de un cambio de coordenadas, que coloca el horizonte en el origen,

$$r^{7-p} \equiv \rho^{7-p} - r_+^{7-p}, \quad (1.20)$$

con la coordenada  $r^a = r\theta^a$  para  $a = 1, \dots, 9-p$ , donde  $\theta^a$  cumple  $\sum_a (\theta^a)^2 = 1$ . Por lo tanto, la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left( -dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} \sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a \quad (1.21)$$

y la  $p+1$ -forma y el dilatón,

$$C_{01\dots p} = g_s^{-1} (1 - H(r)^{-1}), \quad (1.22)$$

$$e^\phi = g_s H(r)^{\frac{3-p}{4}}, \quad (1.23)$$

siendo

$$H(r) = 1 + \frac{r_+^{7-p}}{r^{7-p}} \quad (1.24)$$

$$\text{y} \quad r_+^{7-p} = d_p g_s N l_s^{7-p}. \quad (1.25)$$

En la siguiente sección estos temas serán enriquecidos. Hablaremos del caso especial  $p = 3$ , donde los cálculos se simplifican de manera considerable. Hasta

## **1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT**

---

ahora hemos dado un (muy) breve resumen de la Teoría de Cuerdas, presentando los resultados más relevantes que utilizaremos para el transcurso de este trabajo. Sobre todo, nos apoyaremos en estas ideas para explorar la correspondencia AdS/CFT, tema que será punto central en la siguiente sección.

## 1.2 Correspondencia AdS/CFT

Las cinco Teorías de Supercuerdas que existían hasta antes de los 90's se pueden entender como una sola estructura (teoría M) a partir de dualidades. Aquí estamos hablando de dualidades en Teorías de Cuerdas; pero el concepto es mucho más amplio. Definimos una dualidad como dos descripciones aparentemente distintas de un sistema físico, que resultan ser completamente equivalentes. Existen varios tipos de dualidades, acá nos enfocaremos en una muy novedosa en los recientes años: la Correspondencia AdS/CFT.

En 1997 Juan Maldacena descubrió un enunciado muy particular que relaciona una teoría cuántica de campos en un espaciotiempo plano con una Teoría de Cuerdas [4]. El argumento de Maldacena, en términos muy generales, establece que una colección de  $N$  D3-branas admite una doble descripción y en un cierto límite estas descripciones son equivalentes. Una de estas descripciones es en términos de cuerdas abiertas, aquí tenemos D3-branas que actúan como hipersuperficies donde las cuerdas abiertas pueden terminar. La descripción a bajas energías de este sistema está dada por la teoría de Super Yang-Mills en  $3 + 1$  dimensiones, con  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías y grupo de norma  $SU(N)$ . Este mismo sistema puede ser descrito alternativamente como un objeto solitónico: una 3-brana negra. Este objeto es una solución a las ecuaciones de movimiento de supergravedad IIB, dando como resultado a bajas energías una Teoría de Cuerdas tipo IIB en un fondo  $AdS_5 \times S^5$ .

Para describir la deducción de Maldacena en un poco más de detalle, estudiaremos un sistema de  $N$  D3-branas sobre un fondo plano en diez dimensiones. Las D3-branas resultan de interés especial, ya que su volumen de mundo presenta invariancia de Poincaré en  $3 + 1$  dimensiones, por lo tanto sus excitaciones podrían ser comparadas a teorías de norma que conocemos del mundo real.

En la descripción de cuerdas abiertas, comenzamos con una teoría de supercuerdas tipo IIB en un espacio de Minkowski  $(9 + 1)$ -dimensional, en el cual colocamos una pila de  $N$  D3-branas en las direcciones  $x^0, x^1, x^2$  y  $x^3$ . En este fondo, la Teoría de Cuerdas perturbativa incluye cuerdas abiertas que son excitaciones de los hiperplanos  $(3 + 1)$ -dimensionales y cuerdas cerradas que corresponden a las excitaciones del espaciotiempo plano.

## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

Si consideramos el sistema de  $N$  D3-branas a bajas energías,  $E \ll l_s^{-1}$  (que también puede ser visto como  $l_s \rightarrow 0$  manteniendo  $E$  fija), sólo los modos con masa cero del espectro de las cuerdas son tomados en cuenta. Por lo tanto, la acción efectiva que incluye dichos modos se puede resumir como:

$$S = S_{cerradas} + S_{abiertas} + S_{interacción}, \quad (1.26)$$

donde  $S_{cerradas}$  y  $S_{abiertas}$  corresponden a los modos de cuerdas cerradas y abiertas, respectivamente. El término  $S_{interacción}$  incluye la interacción entre cuerdas abiertas y cerradas.

En [3], Gubser, Maldacena y colaboradores demostraron que al tomar el límite de bajas energías el término de las interacciones se vuelve despreciable y por lo tanto el sistema se desacopla en dos sectores: supergravedad en  $9 + 1$  dimensiones y las excitaciones de las D3-branas.

La forma explícita de  $S_{cerradas}$  es la acción de supergravedad tipo IIB, (1.4), que se vuelve libre en el límite de bajas energías. La acción  $S_{abierta}$  la obtenemos a partir de las excitaciones de las  $N$  D3-branas. En el caso de una sola D3-brana los modos más bajos son descritos por campos no masivos e inducen una teoría de norma  $U(1)$  en su volumen de mundo  $(3 + 1)$ -dimensional.

Ahora, consideremos  $N$  D3-branas paralelas y coincidentes. En este sistema las excitaciones incluyen cuerdas abiertas que conectan a cada D3-brana consigo misma y aquellas que se extienden entre las distintas D3-branas, considerando sus dos posibles orientaciones. Todos los modos serían no masivos, ya que las cuerdas pueden tener longitud arbitrariamente pequeña, de esta manera inducirían una teoría de norma  $U(N)$ . Sin embargo es conveniente separar el grupo como:

$$U(N) = SU(N) \times U(1),$$

donde  $U(1)$  codifica los grados de libertad asociados al centro de masa de la pila de  $N$  D3-branas y se desacoplan de los grados de libertad internos del sistema. Por lo tanto el factor  $U(1)$  puede ser ignorado y sólo considerar sus excitaciones relativas, es decir  $SU(N)$ .

En la sección 1.1.2 encontramos que para una  $Dp$ -brana la dinámica del campo  $F_{\alpha\beta}$  es dada por la expresión (1.8), generalizando esta idea a  $N$  D3-branas coincidentes tenemos que considerar que los escalares y campos de norma son  $\phi^i = \phi^{ic} T_c$

y  $A_\alpha = A_\alpha^c T_c$ . Debemos también asegurar invarianza de norma en la acción, para ello trazamos sobre el grupo de norma. Si tomamos el límite a ultra bajas energías ( $\alpha' \rightarrow 0$ ) de la acción resultante, encontramos que la acción efectiva de  $N$  D3-branas es la acción de Super-Yang-Mills con  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías en  $3 + 1$  dimensiones. De la misma manera que en (1.9), podemos identificar la constante de acoplamiento,

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s. \quad (1.27)$$

para  $p = 3$ .

La teoría de Super-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  en  $3 + 1$  dimensiones tiene el siguiente contenido de campos: un vector  $A_\alpha$ , seis campos escalares,  $\phi^i$ , y cuatro fermiones de Weyl,  $\lambda_\alpha^i, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^i$ . El Lagrangiano de SYM  $\mathcal{N} = 4$  tiene dos parámetros libres,  $\theta_{YM}$  y  $g_{YM}$ , y su forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} = Tr \left\{ -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2g_{YM}^2} + \frac{\theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_i D_\mu\phi^i D^\mu\phi^i + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,j} [\phi^i, \phi^j]^2 \right. \\ \left. - \sum_a i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a + \sum_{a,b,i} g_{YM} C_i^{ab} \lambda_a [\phi^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} g_{YM} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [\phi^i, \bar{\lambda}^b] \right\}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde  $C_i^{ab}$  y  $\bar{C}_{iab}$  son coeficientes relacionados con las matrices de Dirac.

El Lagrangiano (1.28) es invariante de escala y de Poincaré, que junto con las llamadas transformaciones conformes especiales forman la invariancia conforme con grupo de simetría  $SO(4, 2) \sim SU(2, 2)$ . Si incluimos  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías para cerrar el álgebra, se requieren nuevos generadores fermiónicos y bosónicos; los primeros conocidos como supercargas conformes y los segundos como cargas  $R$ . Estos últimos forman el grupo  $SU(4) \sim SO(6)$ . Por lo tanto tenemos un supergrupo de simetría  $SU(2, 2|4)$ , conocido como simetría superconforme.

El sistema de  $N$  D3-branas puede ser descrito como un objeto solitónico: una 3-brana negra, tal cual se menciona en la sección 1.1.2. Este objeto solitónico es una solución a las ecuaciones de movimiento clásicas de supergravedad IIB, es masivo, cargado y fuente de los campos de supergravedad IIB. Por lo tanto también es un fondo válido de la Teoría de Cuerdas IIB, donde las cuerdas cerradas se propagan.

## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

La expresión general de la  $p$ -brana negra (para cualquier  $p$ ) es dada por la solución (1.21). El argumento de Maldacena se enfoca en describir la pila de D3-branas, por lo que haremos el análisis de la sección 1.1.2 con  $p = 3$ . Entonces la solución (1.21) toma la siguiente forma:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) + \sqrt{H(r)} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (1.29)$$

$$\text{con } H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4} \quad \text{y} \quad L^4 = 4\pi g_s N l_s^4 \quad (1.30)$$

obtenidas de las expresiones (1.24). Aparte de la métrica, la solución se caracteriza por un dilatón constante relacionado con la constante de acoplamiento de cuerdas, expresión (1.5). Se tiene también un axi3n constante y  $N$  unidades de flujo  $F_5$ .

En este fondo  $L$  es la única longitud de escala característica, y el fondo tiene dos regiones importantes. Cuando  $r \gg L$ , la función  $H(r) \sim 1$ , esto implica un espaciotiempo de Minkowski  $(9 + 1)$ -dimensional. La segunda regi3n es  $r \ll L$ , que corresponde a la garganta con radio de curvatura  $L$ , que en principio parece singular en el límite cercano al horizonte, donde  $H(r) \sim \frac{L^4}{r^4}$  y la métrica (1.29) toma la siguiente forma,

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) + \frac{L^2}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (1.31)$$

Con un cambio de variable  $z = \frac{L^2}{r}$  podemos reescribir la métrica,

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + L^2 d\Omega_5^2, \quad (1.32)$$

que resulta ser el producto directo entre un espacio de Anti de-Sitter en cinco dimensiones (escrito en coordenadas de Poincaré) y una cinco esfera. Ambas componentes presentan el mismo radio de curvatura  $L$ .

Las excitaciones de la 3-brana negra corresponden a cuerdas cerradas propagándose en el espacio asintóticamente Minkowski en diez dimensiones y cuerdas cerradas propagándose en la regi3n cercana al horizonte. En el límite de bajas energías ambos tipos de cuerdas se desacoplan. Para ver esto consideremos una excitación de cuerda con energía  $E_r$  a una posición radial fija  $r$ . La relación entre la

energía de esa misma excitación pero medida por un observador en infinito  $E_\infty$  es:

$$\begin{aligned} E_\infty &= \sqrt{-g_{00}} E_r \\ &= \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-\frac{1}{4}} E_r. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Esto quiere decir que si aproximamos la excitación de la cuerda a la posición  $r = 0$ , el observador en infinito verá cada vez energías más pequeñas, independientemente de que  $E_r$  sea grande. Entonces el observador en infinito verá dos modos diferentes a bajas energías: los modos de supergravedad que se propagan en Minkowski (9 + 1)-dimensional y las excitaciones en la garganta con geometría  $AdS_5 \times S^5$ .

Hemos descrito un sistema físico (una pila de  $N$  D3-branas) desde dos puntos de vista. En ambas perspectivas encontramos dos teorías efectivas que se desacoplan en el límite de bajas energías. Visto como las excitaciones de cuerdas abiertas, el sistema se desacopla en supergravedad IIB en el espaciotiempo plano (9 + 1)-dimensional y una segunda teoría Super-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  en 3 + 1 dimensiones. La pila de  $N$  D3-branas vista como un objeto solitónico se desacopla, en el límite de bajas energías, en supergravedad IIB en el espaciotiempo plano (9 + 1)-dimensional y supergravedad IIB en una geometría  $AdS_5 \times S^5$ . Notemos que supergravedad IIB en Minkowski (9 + 1)-dimensional está presente en ambas descripciones, dándonos a entender que las otras dos teorías se pueden identificar. Por lo tanto la conjetura de Maldacena establece que:

***La teoría de SYM  $\mathcal{N} = 4$  en 3 + 1 dimensiones con grupo de norma  $SU(N)$  es dual a la Teoría de Cuerdas IIB en  $AdS_5 \times S^5$ .***

Por último en esta sección, vamos a analizar las simetrías de ambas descripciones, esto nos dará una primera vista de que el enunciado anterior es correcto. Ya se había mencionado que la teoría de SYM  $\mathcal{N} = 4$  tiene un supergrupo de simetría  $SU(2, 2|4)$ , conocido como simetría superconforme, que incluye el grupo conforme en cuatro dimensiones,  $SO(4, 2)$ , y el grupo de simetría R,  $SU(4) \sim SO(6)$ . Por otro lado, a nivel de la geometría de  $AdS_5 \times S^5$  la teoría es invariante bajo el grupo de isometrías de  $AdS_5$  y de  $S^5$ , los cuales están dados por  $SO(4, 2)$  y  $SO(6)$ , respectivamente. Además, si tomamos en cuenta la parte fermiónica, el grupo completo de isometrías se extiende a  $SU(2, 2|4)$ . Las simetrías están en concordancia



## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT

---

en ambas descripciones, ésta es apenas una manera de verificar que la conjetura es correcta.

Aunque la dualidad estuviera estrictamente comprobada, no sería útil si no supiéramos cómo relacionar las cantidades físicamente interesantes entre las dos partes. En busca de establecer la correspondencia entre estas cantidades, ha habido gran esfuerzo por encontrar nuevas entradas a lo que se llama el diccionario de la Correspondencia AdS/CFT.

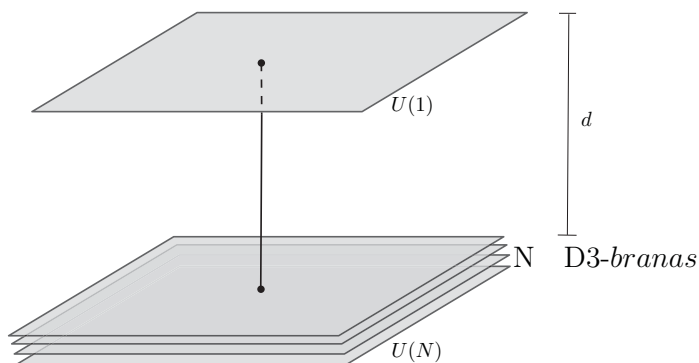
Uno de los puntos más relevantes son los operadores invariantes de norma de la teoría de campo. Estos operadores están en correspondencia uno a uno con los campos de la teoría en el espacio curvado [5, 6]. Ejemplo de ello es el dilatón que corresponde al operador  $\mathcal{O} \sim Tr[F_{\mu\nu}^2]$ . Un ejemplo más conocido es la métrica en el espacio curvo, dual al tensor de energía-momento de la teoría de campo.

Otra de las entradas relevantes de este diccionario, propuesta por Gubser, Klebanov y Polyakov [6] y de manera independiente por Witten [5], es la identificación de la función generatriz de funciones de correlación en la teoría de campo con la función de partición de la teoría de cuerdas con condiciones de frontera  $\phi = \phi_0$  en  $z = 0$ ,

$$\mathcal{Z}_{\text{cuerdas}}[\phi_0] = \left\langle e^{-\int d^4x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \right\rangle_{\text{CFT}}. \quad (1.34)$$

En la dualidad también está presente otro fenómeno conocido como conexión UV-IR [7]. Establece que el movimiento en la dirección radial  $r$  en (1.31) corresponde a moverse en la escala energética de la teoría de norma dual. Esto puede ser visto como sigue: altas energías (es decir el UV) en la teoría de norma se asocia con valores de  $r$  grandes (IR) y bajas energías en la teoría de norma (IR) corresponde a valores pequeños de  $r$ , es decir cerca del horizonte.

Existen otras entradas del diccionario, acá sólo mencionamos (muy someramente) las más relevantes y las que se dieron en los años subsecuentes a 1997, que fue cuando Maldacena estableció la conjetura. Sin embargo, casi 10 años después se encontró otra herramienta que ha dado todavía más argumentos a favor de la correspondencia: la entropía de entrelazamiento. Dedicaremos todo el capítulo 2 a esta cantidad. Por lo pronto, en la siguiente subsección regresaremos a la pila de  $N$  D3-branas para introducir un quark en la teoría de norma.



**Figura 1.1:** Una D3-brana separada del resto. La cuerda que se extiende entre ella y las  $N$  D3-branas representa un quark en la representación fundamental del grupo de norma  $U(N)$ .

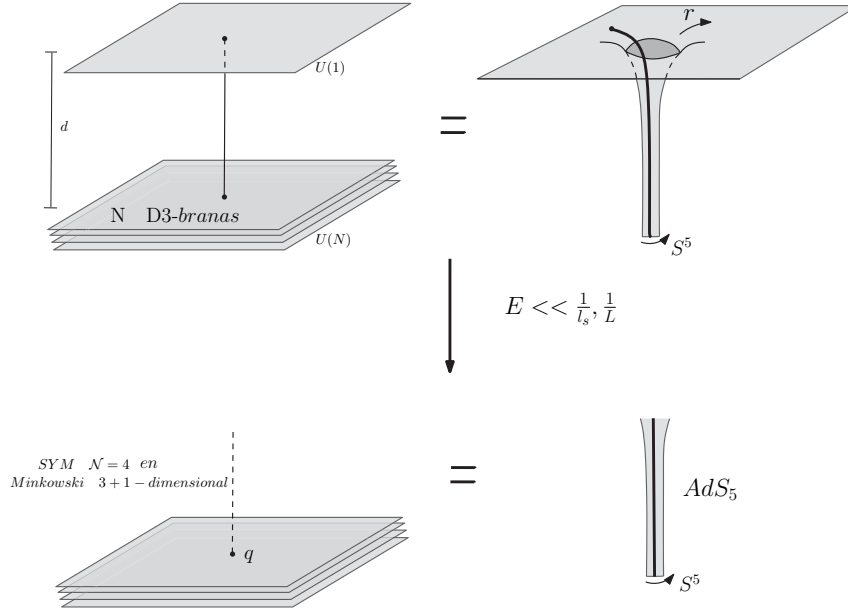
### 1.2.1 Quarks en la Correspondencia AdS/CFT

En la sección anterior mencionamos el enunciado de la conjetura de Maldacena y los primeros argumentos para verificar que funciona. En este trabajo nos interesa describir un quark en este formalismo, con la intención de acercarnos a una teoría “más real” como QCD.

Anteriormente ya se dijo que al situar  $N$  D-branas en un mismo punto conseguimos un grupo de norma  $U(N)$ . En este caso, las cuerdas que tienen atados sus extremos en dos diferentes D-branas son cuerdas sin masa, debido a que no hay separación física entre las D-branas. Este sistema da como resultado campos de norma  $A_{ab}$ .

Una manera de explorar la dinámica de cualquier teoría de norma es acoplar ésta a cargas externas y ver como responden los campos. Para el sistema de la pila de  $N$  D3-branas coincidentes, que forma una teoría no Abelian, es común elegir las fuentes de color en la representación fundamental de  $U(N)$ , es decir quarks. Para obtener un objeto que transforme en la representación fundamental de  $U(N)$ , regresaremos a la pila de  $N$  D3-branas antes de tomar el límite de Maldacena. Comencemos con  $N + 1$  D3-branas de las cuales separamos una, tal y como se muestra en la Figura 1.1, que corresponde a romper el grupo  $U(N + 1) = U(N) \times U(1)$ .

## 1. CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA ADS/CFT



**Figura 1.2:** Configuración del sistema de  $N$  D3-branas para un quark en la representación fundamental. En la 3-brana negra tenemos una cuerda macroscópica extendida en la geometría. Después de tomar el límite de Maldacena obtenemos un quark con masa infinita, dual a la cuerda con un extremo en  $z = 0$  y extendida hacia infinito.

A este nivel, hay cuerdas abiertas que tienen sus extremos en la pila de D3-branas coincidentes, y sus excitaciones nos dan, igual que antes, la teoría de SYM  $\mathcal{N} = 4$ . Además, hay cuerdas que tienen uno de los extremos en la pila de D3-branas y el otro extremo en la D-brana que esta localiza a una distancia  $d$ . Estas cuerdas son masivas y tienen  $masa = tensión\ de\ la\ cuerda \times separación\ de\ la\ D3-brana$ . El campo asociado a esta cuerda es un campo en la representación fundamental con  $N$  entradas, que describe a un quark de masa

$$m = \frac{d}{2\pi\alpha'}. \quad (1.35)$$

Para conseguir un quark de masa infinita (una carga externa, fuente del campo gluónico) se necesita  $\frac{d}{\alpha'} \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, pasando a la descripción de gravedad, para introducir un quark de masa infinita es necesario tomar una cuerda macroscópica en la geometría de la 3-brana negra, que se extiende desde  $z = 0$  hasta  $z = \infty$ .

## 1.2 Correspondencia AdS/CFT

---

Si ahora tomamos el límite de Maldacena, el quark aislado con masa  $m \rightarrow \infty$  corresponde a una cuerda macroscópica que se extiende en toda la geometría de  $AdS_5 \times S^5$ , es decir tiene sus puntos finales en  $z = 0$  y  $z \rightarrow \infty$ . La Figura 1.2 muestra un dibujo esquemático del sistema.

Ya expresamos un quark en el lenguaje de la Correspondencia AdS/CFT. En el presente trabajo estamos interesados en calcular la Entropía de Entrelazamiento, y dedicaremos todo el siguiente capítulo a este tema.



# Entropía de Entrelazamiento Holográfica

La mecánica cuántica tiene sus orígenes con las aportaciones de Planck a la radiación de cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico explicado por Einstein en 1905. A pesar de más de un siglo de estos descubrimientos, la mecánica cuántica sigue dando pie a investigaciones sobre sus características propias, que en el caso clásico no se presentan. Tal es el caso del entrelazamiento cuántico, fenómeno al que le dedicaremos toda esta sección.

Los primeros en hablar de este concepto fueron A. Einstein, B. Podolsky y Nathan Rosen en 1935 [8] y poco después por Erwin Schrödinger en [9, 10]. Hoy en día su relevancia está en pleno apogeo como parte de la teoría de información cuántica. Recientemente, se entiende que algunos fenómenos en teorías cuánticas de campos y sistemas de espines tienen relación directa con propiedades del entrelazamiento de su estado fundamental. Por mencionar algunos ejemplos: orden topológico [11], confinamiento [12], transiciones de fase cuánticas [13], entre otros.

Un avance importante en el entrelazamiento de teorías de campos se ha dado con la correspondencia AdS/CFT. La prescripción de Ryu-Takayanagi, [14], usa herramientas holográficas para calcular la entropía de entrelazamiento de teorías

## 2. ENTROPIA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRAFICA

---

de campos (entenderemos con más detalle la propuesta de Ryu-Takayanagi en la sección 2.5).

En esta sección damos una breve introducción al entrelazamiento cuántico, entropía de entrelazamiento, entropía de entrelazamiento en QFT's<sup>1</sup> y por último la prescripción de Ryu-Takayanagi.

---

<sup>1</sup>Utilizaremos la abreviación del Inglés QFT's para hacer referencia a Teorías Cuánticas de Campos.

## 2.1 Operador de densidad, estados puros y mixtos

En mecánica cuántica, el estado de un sistema lo representamos por un vector  $|\Psi\rangle$  en un espacio de Hilbert  $H$ . Existe otra formulación alternativa conocida como el operador de densidad o matriz de densidad<sup>1</sup>; matemáticamente esta formulación es equivalente al enfoque de vectores de estado. Sin embargo, nos permite describir de una manera sencilla otros escenarios presentes en la mecánica cuántica, por ejemplo sistemas cuyo estado no está completamente determinado.

Cuando se tiene información incompleta acerca de un sistema, generalmente recurrimos al concepto de probabilidad. Interpretamos la información incompleta de la siguiente manera: el sistema cuántico puede estar en el estado  $|\psi_1\rangle$  con probabilidad  $p_1$ , o en el estado  $|\psi_2\rangle$  con probabilidad  $p_2$ , etc. Entonces las  $p_k$  cumplen

$$\sum_k p_k = 1. \quad (2.1)$$

Llamamos a  $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$  un ensamble de estados cuánticos y consideramos que los diferentes estados  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  son ortogonales. Así, el sistema se puede representar por el operador de densidad,

$$\rho \equiv \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (2.2)$$

Ahora nos conviene especificar qué tanto sabemos del sistema cuántico. Cuando el estado del sistema es perfectamente conocido, se dice que el estado es puro (es decir, todas las probabilidades  $p_k$  son cero excepto una). El operador de densidad en este caso es el proyector sobre el estado,

$$\rho \equiv |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.3)$$

La matriz de densidad anterior cumple la siguiente propiedad:

$$\rho^2 = |\psi\rangle \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \langle \psi| = \rho, \quad (2.4)$$

y si trazamos sobre la relación (2.4) obtenemos:

$$\text{Tr}(\rho^2) = \langle \psi | \psi \rangle = \text{Tr}(\rho) = 1. \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Utilizaremos los términos operador de densidad y matriz de densidad de manera intercambiable.



## 2. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA

---

En contraparte, un sistema cuántico está en un estado mixto si sólo tenemos información parcial del sistema. En términos del operador de densidad, (2.2), significa que más de un valor de  $p_k$  es diferente de cero, y por lo tanto todas estas probabilidades son menores a la unidad. De aquí se desprende  $\text{Tr}\{\rho^2\} < 1$ . En general, para cualquier operador hermítico definido positivo de traza uno (como es el caso de la matriz de densidad), se cumple  $\text{Tr}\{\rho^2\} \leq 1$ . En resumen, la igualdad en esta relación es para los estados puros y todos aquellos que cumplen,

$$\text{Tr}\{\rho^2\} < 1 \quad (2.6)$$

son estados mixtos.

En este formalismo, el promedio de la medición de una magnitud física,  $\mathcal{O}$ , se obtiene haciendo el producto de los valores de expectación en cada estado, multiplicado por la probabilidad de cada estado,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &= \sum_k p_k \langle \psi_k | \mathcal{O} | \psi_k \rangle \\ &= \text{Tr} \left( \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \mathcal{O} \right) \\ &= \text{Tr} (\rho \mathcal{O}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.2 Sistemas compuestos; operador de densidad reducida

Una de las aplicaciones más importantes del operador de densidad es para describir subsistemas de un sistema cuántico compuesto. En el caso de dos subsistemas  $A$  y  $B$ , los elementos del espacio se pueden escribir como

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.8)$$

o como superposiciones de vectores de esta forma, donde  $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ . Para este tipo de sistemas, el operador de densidad definido como (2.2) tiene información de los dos subsistemas, y los coeficientes  $p_k$  corresponden a las probabilidades sobre el espacio total,  $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ .

A partir del operador de densidad del sistema total ( $\rho_{AB}$ ) se puede obtener información sobre uno de los subsistemas (por ejemplo  $\rho_A$ ), trazando sobre los grados de libertad del otro subsistema (el subsistema  $B$ ). Se define entonces el operador de densidad reducido,

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (2.9)$$

donde  $\text{Tr}_B$  es un mapeo de operadores conocido como traza parcial sobre  $B$ , definido como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) &= |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) \\ &= |a_1\rangle\langle a_2| \langle b_2|b_1\rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

siendo  $|a_1\rangle$ ,  $|a_2\rangle$  y  $|b_1\rangle$ ,  $|b_2\rangle$  vectores en los espacios de estados  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Para ejemplificar lo que se dijo anteriormente, consideremos un sistema de dos espines como el mostrado en la Figura 2.1. Si tomamos el estado puro,

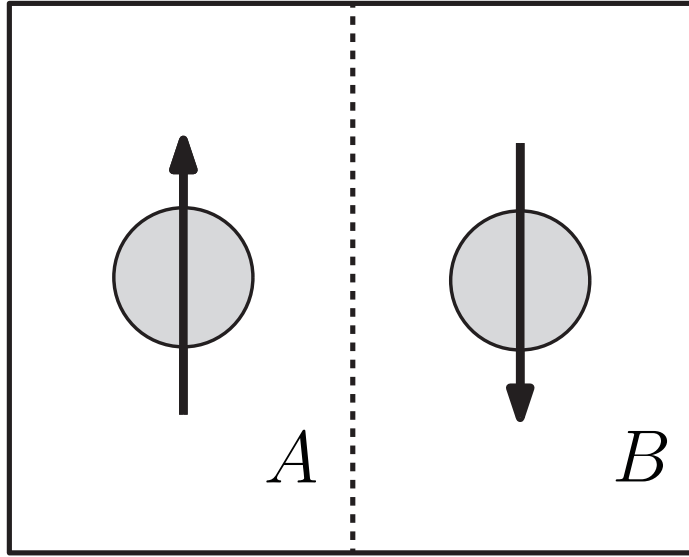
$$|\phi\rangle = \frac{|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.11)$$

tenemos el operador de densidad

$$\rho = \frac{|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|}{2}. \quad (2.12)$$

## 2. ENTROPIA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA

---



**Figura 2.1:** Sistema de dos espines dividido en dos subsistemas  $A$  y  $B$ .

Trazando sobre el segundo espín se obtiene,

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{\text{Tr}_B (|\downarrow\downarrow\rangle \langle\downarrow\downarrow|) + \text{Tr}_B (|\uparrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\downarrow|) + \text{Tr}_B (|\downarrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\uparrow|) + \text{Tr}_B (|\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow|)}{2} \\ &= \frac{|\downarrow\rangle \langle\downarrow| + |\uparrow\rangle \langle\uparrow|}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

El estado total de los dos espines es conocido completamente; sin embargo, el estado del primer espín es un estado mixto, debido a que  $\text{Tr}(\rho_A^2) = \frac{1}{2} < 1$ . Es un estado del que no tenemos el máximo conocimiento. Esta propiedad donde el estado del sistema total es conocido (estado puro) pero el estado de uno de los subsistemas no lo es (estado mixto), es una característica del fenómeno conocido como entrelazamiento cuántico. En la siguiente sección daremos una explicación detallada de este fenómeno.

## 2.3 Entrelazamiento cuántico

En esta sección vamos a definir una propiedad de la mecánica cuántica, la cual no tiene un equivalente clásico: el entrelazamiento cuántico. Supongamos que tenemos un sistema cuántico compuesto por dos o más subsistemas, donde el sistema total no se puede describir como el producto directo de los subsistemas. Así, los subsistemas compartirán información desde el inicio, y si medimos una de las propiedades de alguno de los subsistemas, se puede tener un comportamiento coordinado con los demás subsistemas. A esta característica se le denomina entrelazamiento. Por ejemplo, preparemos un sistema de dos espines (como el mostrado en la Figura 2.1) coordinados de manera que el estado total es de espín cero; si al medir uno de ellos resulta espín arriba, en automático, y sin importar a que distancia se encuentre uno del otro, el segundo espín será espín abajo. Esta clase de acción a distancia en sus inicios trajo controversia, ya que parece implicar una interacción acausal.

No hemos dado ninguna definición formal del entrelazamiento; sin embargo, para un sistema puro y bipartido,  $|\psi\rangle$ , decimos que está entrelazado si  $|\psi\rangle \neq |a\rangle \otimes |b\rangle$ . Cuando la descomposición anterior existe, se dice que el estado es separable.

Una manera de revisar si el estado es separable es con la descomposición de Schmidt: supongamos nuevamente  $|\psi\rangle$  un sistema puro y bipartido; existen bases ortonormales  $|a_i\rangle$  y  $|b_i\rangle$  para cada subsistema  $A$  y  $B$ , respectivamente. De esta manera, podemos escribir al estado como

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle |b_i\rangle, \quad (2.14)$$

donde  $\alpha_i$  son números reales no negativos que satisfacen  $\sum_i \alpha_i^2 = 1$  y son conocidos como coeficientes de Schmidt.

El número de valores no cero de  $\alpha_i$  es llamado el número de Schmidt para el estado  $|\psi\rangle$ . Si el número de Schmidt de  $|\psi\rangle$  es uno, el estado asociado es separable y no hay entrelazamiento. Este número es una cantidad muy importante, ya que cuantifica la cantidad de entrelazamiento entre los sistemas  $A$  y  $B$ .

Existen otras formas de medir qué tan entrelazado está un sistema. Una de ellas

## 2. ENTROPIA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRAFICA

---

es con la entropía de von Neumann,

$$S = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_k \lambda_k \log(\lambda_k), \quad (2.15)$$

donde  $\lambda_k$  son los valores propios de la matriz de densidad. Si lo que buscamos es obtener la entropía de entrelazamiento del subsistema  $A$ , la entropía de von Neumann de la matriz de densidad reducida (2.9) es

$$S_A = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A). \quad (2.16)$$

En la sección 2.1 revisamos los conceptos de estado puro y estado mixto, concluimos que un estado puro cumple (2.4) y un estado mixto cumple (2.6). En la sección anterior también vimos un ejemplo donde la matriz de densidad (2.13) describe a un estado mixto (del que no tenemos el máximo conocimiento). Así pues, el subsistema  $A$  comparte información con el subsistema  $B$  y se dice que ambos subsistemas están entrelazados. Caso contrario, si tuviéramos que  $\rho_A$  describe a un estado puro (el cual es conocido completamente), es decir no comparte información con  $B$  decimos que  $A$  y  $B$  no presentan entrelazamiento. De esta manera, con la entropía de von Neumann podemos diferenciar un estado puro de uno mixto; esta función tiene la propiedad de que es cero si el estado es puro y por lo dicho anteriormente no hay entrelazamiento en el sistema. Para un estado mixto (en el cual hay información compartida: entrelazamiento) la función de von Neumann es diferente de cero y arroja la cantidad de entrelazamiento.

Como ejemplo, calculemos la entropía de von Neumann del operador de densidad (2.13). Si se usa la base:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la matriz de densidad (2.13) toma la siguiente forma,

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\log\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \log(2), \end{aligned}$$

concluimos entonces que el sistema de espines está entrelazado y su información sincronizada.

Un punto importante es que la entropía de von Neumann es definida en términos de trazas; en particular, el cálculo de  $\text{Tr}[\log \rho]$  para algunos sistemas cuánticos se vuelve complicado. De esta manera, es conveniente definir otro conjunto de entropías llamadas entropías de Rényi [15],

$$S_A^{(q)} = \frac{1}{1-q} \log \text{Tr}_A(\rho_A^q), \quad (2.17)$$

donde en principio  $q \in \mathbb{Z}_+$  pero algunas veces es más conveniente hacer la continuación analítica a  $q \in \mathbb{R}$ . Notemos que en el límite cuando  $q \rightarrow 1$  las entropías de Rényi convergen a (2.15),

$$S_A = \lim_{q \rightarrow 1} S_A^{(q)}. \quad (2.18)$$

### 2.3.1 Algunas propiedades de la entropía de entrelazamiento

La entropía de entrelazamiento tiene las siguientes propiedades:

- La entropía es no negativa. Es cero si y sólo si el estado descrito por la matriz de densidad reducida es puro.
- En un espacio de Hilbert en  $d$  dimensiones el valor de la entropía es a lo más  $\log d$ .
- En un sistema puro compuesto por los subsistemas  $A$  y  $B$  se cumple:

$$S(A) = S(B). \quad (2.19)$$

## 2. ENTROPIA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRAFICA

---

- En un sistema cuántico compuesto por los subsistemas  $A$  y  $B$ , la entropía total para los dos subsistemas satisface:

$$S(A, B) \leq S(A) + S(B). \quad (2.20)$$

Esta propiedad es conocida como subaditividad [16]. La igualdad en la expresión (2.20) se presenta cuando el subsistema  $A$  no está correlacionado con el subsistema  $B$ .

- En un sistema compuesto por tres subsistemas podemos extender la propiedad anterior para los subsistemas  $A$ ,  $B$  y  $C$ ,

$$S(A, B, C) + S(B) \leq S(A, B) + S(B, C). \quad (2.21)$$

El nombre se generaliza a subaditividad fuerte [17].

## 2.4 Entropía de entrelazamiento en teorías cuánticas de campos

Hasta ahora hemos visto la definición de entropía de entrelazamiento referida a sistemas de la mecánica cuántica, donde el espacio de Hilbert de una región finita es de dimensión finita. Ahora definiremos la entropía de entrelazamiento en una teoría cuántica de campos; para ello, tomamos una variedad espacial  $\mathcal{V}$  a tiempo fijo y el espacio es dividido en dos regiones  $A$  y  $B$  por una superficie a la que llamamos superficie de entrelazamiento,  $\partial A$ , como se ve en la Figura 2.2.

La extensión a la teoría cuántica de campos se da a partir del operador densidad asociado al estado que consideremos. Por ejemplo, si tomamos el estado de vacío,  $|0\rangle$ , y calculamos la entropía de la región  $A$ , entonces definimos la matriz de densidad reducida asociada a  $A$  como:  $\rho_A = \text{Tr}_B |0\rangle \langle 0|$ , donde estamos trazando sobre los infinitos grados de libertad de  $B$ . Una vez que obtenemos la matriz de densidad reducida tendremos que escribir el operador  $\log \rho_A$  y después calcular  $S_A$ . Esto es complicado ya que tenemos que tomar el logaritmo de un operador continuo. Es más útil describir el operador de densidad desde la perspectiva de la integral funcional. Primero construimos una integral de camino que calcule los elementos de  $\rho_A$ , después obtenemos la entropía de Rényi, (2.17), usando el truco de réplica. Nos ahorraremos los detalles de este método porque sale de nuestros propósitos para este trabajo, pero se puede ver en [13].

Incluso en el estado del vacío trabajamos con cantidades divergentes, debido a que en una QFT continua hay fluctuaciones del estado de vacío en la superficie de entrelazamiento  $\partial A$ . Para hacer frente a esto, imponemos un corte o regulador ultravioleta,  $\epsilon$ . Este corte sirve para regularizar el entrelazamiento a distancias cortas, entre los grados de libertad dentro y fuera de la superficie de entrelazamiento.

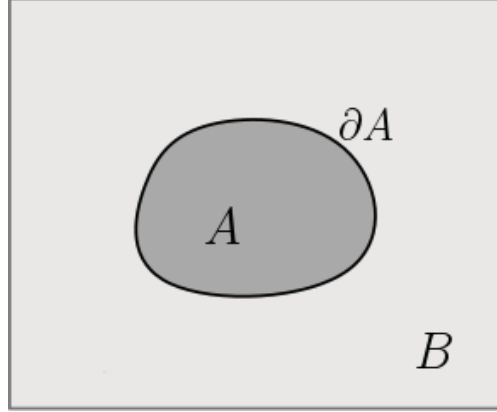
Los términos divergentes dependen de la teoría y de la forma de  $A$  (de la geometría extrínseca e intrínseca de la superficie  $\partial A$ ) y admiten una expansión, [18, 19],

$$S_A = \begin{cases} a_{d-2} \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_{d-4} \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-4} + \dots + a_1 \left(\frac{l}{\epsilon}\right) + (-1)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{S}_A + \mathcal{O}(\epsilon), & d \text{ impar} \\ a_{d-2} \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-2} + a_{d-4} \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-4} + \dots + (-1)^{\frac{d-2}{2}} \tilde{S}_A \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^0), & d \text{ par} \end{cases} \quad (2.22)$$



## 2. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA

---



**Figura 2.2:** Variedad  $\mathcal{V}$  para el cálculo de la entropía de entrelazamiento, donde hemos dividido la variedad en dos subvariedades,  $A$  y  $B$ , por medio de una superficie  $\partial A$ .

donde  $l$  es el tamaño de la región  $A$ .  $a_i$  son coeficientes locales y tienen un carácter geométrico: dependen de parámetros que caracterizan la geometría de la frontera  $\partial A$ . El término  $\tilde{S}_A$  es un coeficiente que depende de la teoría, además se le considera un término universal en el sentido de que no depende de ambigüedades en la elección del regulador. La diferencia entre pares e impares es el término  $1/\epsilon^0$  que debería de estar en dimensiones pares, el cual es sustituido por una divergencia logarítmica.

Un punto importante es que el principal término divergente de (2.22) es proporcional a la potencia  $d - 2$  del tamaño de  $A$ , lo que se conoce como ley de área [20, 21],

$$S_A \sim \frac{\text{Área}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}} + \dots \quad (2.23)$$

Una interpretación de este hecho es que si el estado inicial es puro entonces  $S_A = S_B$ , por lo tanto la entropía no podrá depender del volumen de la región, sino que deberá depender de cantidades que compartan las dos regiones, como lo es el área.

De los primeros resultados que se conocen para entropía de entrelazamiento es el de una teoría conforme (1 + 1)-dimensional. Este tipo de teorías son invariantes de escala y las únicas escalas presentes en el problema son  $\epsilon$  y  $l$ . Desde la expresión

## 2.4 Entropía de entrelazamiento en teorías cuánticas de campos

---

(2.22) sólo la divergencia logarítmica aparece y no hay una ley de área,

$$S_A(l) = \tilde{S}_A \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right), \quad (2.24)$$

donde  $\tilde{S}_A$  es un tercio de la carga central de Virasoro de la teoría,  $\tilde{S}_A = \frac{c}{3}$ . Acá,  $c$  contiene información del número de grados de libertad de la CFT (1 + 1)-dimensional. El resultado (2.24) se puede reproducir con herramientas de la Correspondencia AdS/CFT, específicamente con la propuesta de Ryu y Takayanagi, tema que veremos con detenimiento en la siguiente sección.

## 2. ENTROPIA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA

---

### 2.5 Entropía de entrelazamiento holográfica

En las secciones anteriores calculamos la entropía de entrelazamiento por medio de las expresiones (2.16) y (2.17), cuyos métodos son complicados. Usando herramientas de la correspondencia AdS/CFT, en 2006 Ryu y Takayanagi (RT) establecieron una prescripción para el cálculo de la entropía de entrelazamiento [14, 19]. Ellos obtuvieron una expresión para la entropía de entrelazamiento de una CFT (estática e independiente del tiempo), usando únicamente las características geométricas del bulto. La prescripción de RT fue generalizada por Hubeny, Rangamani y Takayanagi a estados generales que incluyen dependencia en el tiempo [22].

Para calcular la entropía de entrelazamiento desde la Correspondencia AdS/CFT, tomamos un espacio AdS  $(d+1)$ -dimensional (con curvatura  $L$  y constante de Newton  $G_N^{(d+1)}$ ) cuyo dual es una CFT en  $d$  dimensiones; decimos que la CFT vive en la frontera de AdS.

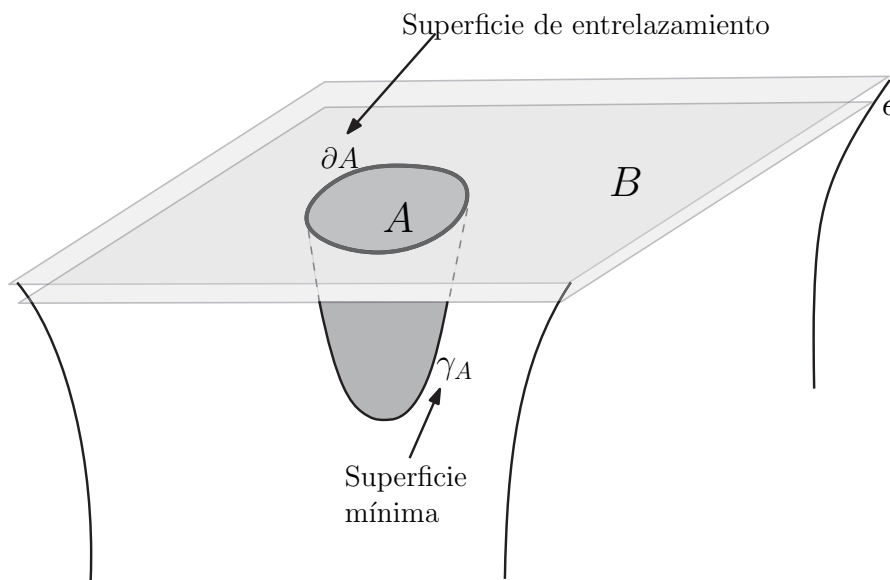
En la CFT tomamos una variedad espacial  $\mathcal{V}$  a tiempo  $t = t_0$ , esta variedad la dividimos en dos regiones  $A$  y  $B$ , de tal manera que  $\mathcal{V} = A \cup B$ . La superficie que separa estas dos regiones la llamamos superficie de entrelazamiento,  $\partial A$ . Ver la Figura 2.3. Para describir al vacío de la CFT, en el dual gravitacional consideramos el espaciotiempo de AdS con la métrica de Poincaré, dada por el primer término de la expresión (1.32),

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (2.25)$$

En estas coordenadas la CFT vive en  $z \rightarrow 0$  y es cubierta por las coordenadas  $x_0$  y  $x_i$ .

Ahora buscamos extender la variedad  $\mathcal{V}$ , las dos regiones de entrelazamiento y la superficie de entrelazamiento al espaciotiempo del bulto. La extensión de la variedad  $\mathcal{V}$  es a través de una variedad Euclidiana  $\mathcal{M}$ , que corresponde a un hiperboloide  $d$ -dimensional. La superficie de entrelazamiento  $\partial A$  la extendemos con una superficie  $\gamma_A$ , de tal manera que  $\partial\gamma_A = \partial A$ , como se muestra en la Figura 2.3. Cabe mencionar que existen infinitas elecciones para  $\gamma_A$ ; la prescripción de RT establece que de todas ellas se elige la superficie con área mínima. En resumen, la

## 2.5 Entropía de entrelazamiento holográfica



**Figura 2.3:** Extensión de la superficie  $\partial A$  en el bulto de AdS para la prescripción de Ryu y Takayanagi.

extensión de  $\partial A$  al bulto es una superficie de co-dimensión 2 cuya área es mínima. Es así como RT en [14, 19] proponen la siguiente fórmula:

$$S_A = \frac{\text{Área}(\gamma_A)}{4G_N^{(d+1)}}. \quad (2.26)$$

La fórmula holográfica satisface las propiedades básicas de la entropía de entrelazamiento descritas en 2.3.1. Por ejemplo, la igualdad (2.19) se puede ver desde que la frontera de la región  $A$  es la misma de la región complemento,  $B$ . Por lo tanto la superficie mínima  $\gamma_A$  es la misma que  $\gamma_B$  y así  $S_A = S_B$ . La subaditividad fuerte (2.21) fue demostrada en el contexto holográfico en [23] con argumentos geométricos sencillos.

En [14, 19] también se obtiene la expresión de la entropía de entrelazamiento para una CFT  $(1 + 1)$ -dimensional, (2.24), a partir de la fórmula holográfica (2.26). De acuerdo con la correspondencia AdS/CFT, las teorías gravitacionales en  $\text{AdS}_3$  con radio de curvatura  $L$  son duales a CFT's  $(1 + 1)$ -dimensionales con carga central,

## 2. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA

---

[24],

$$c = \frac{3L}{2G_N^{(3)}}. \quad (2.27)$$

En este contexto y aplicando la fórmula holográfica (2.26) se obtiene

$$S_A = \frac{2L}{4G_N^{(3)}} \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right) \quad (2.28)$$

$$= \frac{c}{3} \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right). \quad (2.29)$$

Claramente este resultado está de acuerdo con el resultado que mostramos en la expresión (2.24), obtenido sin herramientas de la correspondencia.

# La doble integral de Karch y Chang

En el capítulo anterior estudiamos la entropía de entrelazamiento y mencionamos lo complicado que puede resultar obtener esta cantidad en teorías de campo. Ryu y Takayanagi, con la correspondencia holográfica, proponen la prescripción (2.26) para calcular esta cantidad con herramientas geométricas del fondo gravitacional. Mediante una versión simplificada de la prescripción de RT, Karch y Chang deducen en [25] una fórmula simple y compacta para obtener la entropía de entrelazamiento en el caso donde se introducen branas de prueba [26]. Los sistemas de branas de prueba consisten en agregar cuerdas, D-branas u otro tipo de objetos extendidos en la solución de supergravedad después de haber tomado el límite cercano al horizonte. Al hacer esto modificamos la correspondencia AdS/CFT que habíamos descrito en la sección 1, ya que estamos considerando fuentes externas para el campo gluónico, agregando un nuevo sector a la teoría de campos. Un ejemplo común es el uso de D-branas de prueba para agregar grados de libertad que transforman en la representación fundamental, además de los grados de libertad que desde un principio se tienen en la representación adjunta del grupo de norma. En la teoría de campo, resulta útil tener grados de libertad en la representación fundamental para describir teorías de campo cuánticas más parecidas a QCD, ya que

### 3. LA DOBLE INTEGRAL DE KARCH Y CHANG

---

los campos de quarks en QCD transforman justamente en la representación fundamental. En la siguiente sección daremos una breve introducción a las branas de prueba para continuar con el cálculo de la perturbación provocada por las pruebas que se introducen en el bulto y finalmente estudiaremos la formula que Karch y Chang deducen a partir de la prescripción de RT.

### 3.1 Sistemas de branas de prueba

En esta sección consideraremos sistemas donde cuerdas, branas u otros objetos extendidos son colocados en la solución de supergravedad después de haber tomado el límite cercano al horizonte. Estos sistemas fueron originalmente propuestos [27] y después fueron retomados en [26].

De manera general, en el lado gravitacional la acción que describe el sistema de supergravedad IIB más las branas de prueba es,

$$S = S_{IIB} + S_{prueba}, \quad (3.1)$$

donde  $S_{IIB}$  es la acción (1.4) y  $S_{prueba}$  es la acción del objeto que estamos tratando como prueba. Por ejemplo, si tenemos como prueba a una  $Dp$ -brana la acción a considerar es la de Dirac-Born-Infeld, (1.6); en el caso de una cuerda fundamental la acción será la de Nambu-Goto, (1.2). En este trabajo nuestra prueba será una cuerda fundamental y nos enfocaremos en ella en el siguiente capítulo.

La presencia de  $S_{prueba}$  da lugar a términos fuente en las ecuaciones de movimiento de supergravedad IIB y a esto se le llama una retroacción de las branas en la geometría. En general es difícil encontrar soluciones de supergravedad del sistema combinado, para los campos del bulto y las funciones de encaje de la brana. Por esa razón, las branas son frecuentemente tratadas en la aproximación de prueba, que corresponde a resolver el encaje de la brana en un fondo gravitacional fijo, este fondo es solución a las ecuaciones de movimiento en el bulto.

Delante de la acción de supergravedad IIB, (1.4), y de la acción  $S_{prueba}$  tenemos como prefactores:  $\frac{L^{d-1}}{16\pi G_N}$  y  $L^{p+1}\tau_p$ , respectivamente (donde  $p$  es el número de dimensiones espaciales de la brana), y exigimos que se cumpla

$$\frac{L^{d-1}}{16\pi G_N} \gg L^{p+1}\tau_p \gg 1. \quad (3.2)$$

El que los dos prefactores sean grandes nos asegura que podemos tratar ambas contribuciones de manera clásica. La combinación de ambos factores nos da un parámetro pequeño y sin dimensiones,

$$t_0 = 16\pi\tau_p G_N L^{p-d+2} \ll 1, \quad (3.3)$$



### 3. LA DOBLE INTEGRAL DE KARCH Y CHANG

---

que controla la intensidad con la que el tensor de esfuerzos de la brana de prueba es una fuente del lado derecho de las ecuaciones de Einstein. El parámetro (3.3) nos establece la intensidad de la retroacción de la brana en la geometría de fondo y en consecuencia la retroacción puede ser calculada en una expansión en  $t_0$ . La condición (3.3) es por lo tanto la que establece que las branas son de prueba.

La jerarquía de escalas, (3.2), se puede presentar en particular para una cuerda fundamental, F1. En este caso  $p = 1$  y tenemos  $\tau_p L^2 \sim \sqrt{\lambda}$ , donde  $\lambda$  es la constante de acoplamiento de 't Hooft en la teoría de norma dual. La cuerda fundamental es lo que consideraremos como nuestra prueba en este trabajo. En el capítulo 4.2 veremos la retroacción en la teoría de fondo debido a la cuerda F1 y con ella calcularemos la contribución a la entropía de entrelazamiento a primer orden en  $t_0$ .

## 3.2 El propagador del Gravitón

En esta sección, por completez, daremos una introducción al propagador del gravitón [28]. La construcción del propagador del gravitón es a través de un ansatz que establece al propagador como una combinación lineal de bitensores, los cuales separan las partes invariantes de norma de las dependientes de norma. Veremos que, naturalmente, solo nos interesara la parte invariante de norma.

Trabajaremos con la continuación Euclideana de AdS en coordenadas de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu). \quad (3.4)$$

Las funciones invariantes en AdS son expresadas en términos de la distancia cordal,

$$u = \frac{(x - x')^2}{2zz'} = \frac{(z - z')^2 + \delta_{\mu\nu} (x - x')^\mu (x - x')^\nu}{2zz'}. \quad (3.5)$$

La acción gravitacional en un espacio Euclideano en  $d + 1$  dimensiones, con constante cosmológica  $\Lambda$  y una acción de materia es:

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{G} (R + \Lambda) + S_{materia}. \quad (3.6)$$

La primera variación respecto a  $G_{mn}$  da las ecuaciones de Einstein (1.1) en  $d + 1$  dimensiones. En ausencia de materia y con  $\Lambda < 0$ , una solución es la métrica de AdS, (3.4). Una fuente de materia,  $T^{m'n'}(x')$ <sup>1</sup>, produce una fluctuación  $h_{mn} = \delta G_{mn}$  alrededor de la métrica de AdS,  $G_{mn}$ . Entonces, para obtener el propagador del gravitón es necesario considerar (1.1) a primer orden en  $h_{mn}$ . Por lo tanto nos queda una ecuación diferencial para  $h_{mn}$ , cuya solución puede ser expresada en términos de la siguiente integral:

$$h_{mn}(x) = \kappa_5^2 \int d^{d+1}x' \sqrt{G} \mathcal{G}_{mn;m'n'}(x, x') T^{m'n'}(x'), \quad (3.7)$$

donde  $\mathcal{G}_{mn;m'n'}(x, x')$  es el propagador del gravitón. Entonces, dicho propagador satisface la ecuación diferencial,

<sup>1</sup>La ' la usaremos para indicar las coordenadas donde la fuente está colocada.

### 3. LA DOBLE INTEGRAL DE KARCH Y CHANG

---

$$\begin{aligned}
& - D^l D_l \mathcal{G}_{mn;m'n'} - D_m D_n \mathcal{G}_{l;m'n'}^l + D_m D^l \mathcal{G}_{ln;m'n'} \\
& + D_n D^l \mathcal{G}_{ml;m'n'} - 2(\mathcal{G}_{mn;m'n'} - G_{mn} \mathcal{G}_{l;m'n'}^l) \\
& = 2(G_{mm'} G_{nn'} + G_{mn'} G_{nm'}) - \frac{2}{d-1} G_{mn} G_{m'n'} \delta^{(d+1)}(z, x; z', x') \\
& + D_{m'} \Lambda_{mn;n'} + D_{n'} \Lambda_{mn;m'}, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

donde  $\Lambda_{mn;m'}$  y  $\Lambda_{mn;n'}$  representan los difeomorfismos en la coordenada  $m'$ , es decir son una redundancia en el propagador del gravitón. Notemos que los términos  $D_{n'} \Lambda_{mn;m'}$  al ser convolucionados con el tensor de energía-momento  $T^{m'n'}(x')$ , de la expresión (3.7), y después de una integración por partes nos quedan términos de la forma  $\Lambda_{mn;m'} D_{n'} T^{m'n'}(x')$  y al ser el tensor de energía-momento un tensor conservado no contribuye para obtener  $h_{mn}(x)$ .

La propuesta de [28] es representar a  $\mathcal{G}_{mn;m'n'}$  y a  $\Lambda_{mn;m'}$  como una superposición lineal de bitensores. Como los términos que involucran  $\Lambda_{mn;m'}$  no contribuyen para  $h_{mn}(x)$  aquí solo nos enfocaremos en la solución de  $\mathcal{G}_{mn;m'n'}$  como la combinación lineal de cinco bitensores independientes,  $T_{mn;m'n'}^{(i)}$  multiplicados por funciones escalares de  $u$ ,

$$\mathcal{G}_{mn;m'n'}(u) = T_{mn;m'n'}^{(1)} \mathbb{H}(u) + T_{mn;m'n'}^{(2)} \mathbb{G}(u) + \sum_{i=3}^5 T_{mn;m'n'}^{(i)} A_i(u). \tag{3.9}$$

Esta superposición de bitensores tiene la ventaja de que podemos separar las componentes que tienen el contenido físico,  $\mathbb{H}(u)$  y  $\mathbb{G}(u)$ , de las componentes que son de norma,  $A_i(u)$ . Los términos que contienen  $A_i(u)$  son gradientes respecto a  $x$  y a  $x'$ . Los que son gradientes respecto a  $x$  son difeomorfismos que al introducirlos en (3.8) no contribuyen a  $h_{mn}(x)$  y los gradientes respecto a  $x'$  pueden ser absorbidos en  $\Lambda_{mn;m'}$ . De esta manera, solo nos quedamos con la parte que es independiente de norma,

$$\mathcal{G}_{mn;m'n'}(u) = T_{mn;m'n'}^{(1)} \mathbb{H}(u) + T_{mn;m'n'}^{(2)} \mathbb{G}(u), \tag{3.10}$$

donde

$$T_{mn;m'n'}^{(1)} = G_{mn} G_{m'n'}, \tag{3.11}$$

$$T_{mn;m'n'}^{(2)} = L^4 (\partial_m \partial_{m'} u \partial_n \partial_{n'} u + \partial_m \partial_{n'} u \partial_n \partial_{m'} u). \tag{3.12}$$

### 3.2 El propagador del Gravitón

Después de introducir (3.10) en (3.8) y de varios cálculos largos<sup>1</sup>, encontramos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$u(2+u)\mathbb{G}'' + (d+1)(1+u)\mathbb{G}' = \frac{1}{2}\delta^{(d+1)}(z, z', x-x'), \quad (3.13)$$

$$2\mathbb{G}'' + 2(1+u)\mathbb{G}' + 4(d-1)\mathbb{G} + (d-1)\mathbb{H}'' = 0. \quad (3.14)$$

La solución, de acuerdo con [28], de (3.13) para  $d = 4$  es

$$\mathbb{G}(u) = -\frac{1}{8\pi^2 L^3} \left( \frac{(1+u)[2(1+u)^2 - 3]}{[u(2+u)]^{\frac{3}{2}}} - 2 \right). \quad (3.15)$$

Igualmente, con (3.15) podemos resolver para  $\mathbb{H}(u)$  de la expresión (3.14),

$$\mathbb{H}(u) = \frac{1}{12\pi^2 L^3} \left( \frac{(1+u)[6(1+u)^4 - 9(1+u)^2 + 2]}{[u(2+u)]^{\frac{3}{2}}} - 6(1+u)^2 \right). \quad (3.16)$$

Resumiendo, si tenemos una fuente de materia en un espaciotiempo, la perturbación producida es dada por (3.7) y está en función del propagador del gravitón y del tensor de energía-momento de la fuente de materia. La expresión (3.7) nos será de utilidad en la siguiente sección, ya que Karch y Chang basan su propuesta a partir de dicha perturbación. Para nuestros propósitos solo estamos interesados en la parte que es independiente de norma, es decir la expresión (3.10). Los términos que son de norma al ser convolucionados con el tensor de energía-momento no contribuyen en el cálculo de  $h_{mn}(x)$ .

---

<sup>1</sup>Cálculos que no nos proporcionan información útil aquí, pero que pueden ser vistos por el lector interesado en [28].

### 3. LA DOBLE INTEGRAL DE KARCH Y CHANG

---

#### 3.3 La deducción de Karch y Chang

En [25], Karch y Chang derivan, a partir de la prescripción de RT, una fórmula simple y compacta para calcular la primera corrección a la entropía de entrelazamiento a causa de una brana de prueba. Para ello, es conveniente primero distinguir dos superficies: la primera trazada por la brana de prueba, es decir el volumen de mundo de la brana, cuyas coordenadas las denotamos por  $x'^\alpha$ . Si la brana es  $p$ -dimensional, entonces  $\alpha = 0, \dots, p$ . La segunda es la superficie mínima (de codimensión 2) en el bulto,  $\gamma_A$ ; si consideramos un fondo estático las coordenadas de la superficie las escribimos con  $w^a$ , donde  $a = 1, \dots, d-1$  (el índice  $^0$  lo asignamos a la coordenada temporal).

El área mínima de la superficie  $\gamma_A$  (normalizada por conveniencia con  $\frac{1}{4G_N^{(d+1)}}$ , igual que en (2.26)) la podemos obtener con el encaje  $X^m(w^a)$  a través de la siguiente acción:

$$S_{Min} = \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} \int d^{d-1}w \sqrt{\gamma}, \quad (3.17)$$

donde  $\gamma = \det(\gamma_{ab})$  y  $\gamma_{ab}$  es la métrica inducida en  $\gamma_A$ ,  $\gamma_{ab} = \partial_a X^m \partial_b X^n G_{mn}$ . Si buscamos calcular el cambio en la entropía de entrelazamiento, variamos (3.17) y obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S_{Min} &= \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} \int d^{d-1}w \delta(\sqrt{\gamma}) \\ &= \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} \int d^{d-1}w \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \gamma^{ab} \left[ \partial_a X^m \partial_b X^n (\delta G)_{mn} + \delta(\partial_a X^m \partial_b X^n) G_{mn} \right] \\ &= \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} \int d^{d-1}w \left[ \frac{\sqrt{\gamma}}{2} T_{Min}^{mn} (\delta G)_{mn} + \frac{\delta L_{Min}}{\delta X^m} \delta X^m \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $T_{Min}^{mn}$  lo definimos como un tensor de energía-momento auxiliar asociado a la superficie mínima,

$$T_{Min}^{mn} \equiv \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_{Min}}{\delta G_{mn}} = \gamma^{ab} \partial_a X^m \partial_b X^n. \quad (3.19)$$

En [29, 30], se ha estudiado cómo se comporta la entropía de entrelazamiento ante perturbaciones de la métrica. El segundo término del último renglón en (3.18), la variación del área debido a la deformación de la superficie  $\gamma$ , es cero por la

### 3.3 La deducción de Karch y Chang

definición de una superficie mínima. Por lo tanto, la variación en el área es solo por el cambio en la métrica y la expresión (3.18) se simplifica,

$$\delta S_{Min} = \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} \int d^{d-1}w \frac{\sqrt{\gamma}}{2} T_{Min}^{mn} (\delta G)_{mn}. \quad (3.20)$$

Si introducimos la expresión de la perturbación (3.7) en (3.20) obtenemos:

$$\delta S_{Min} = \pi T_0 \int d^{d-1}w \sqrt{\gamma} \int d^{p+1}x' \sqrt{G} T_{Min}^{mn} \mathcal{G}_{mnp'q'} T_{Brana}^{p'q'}. \quad (3.21)$$

Esta es la fórmula de la doble integral que Karch y Chang deducen en [25], para calcular la primera contribución a la entropía de entrelazamiento debido al cambio en el estado inducido por la prueba. Se dice que es una doble integral por el hecho de que estamos integrando sobre el volumen de mundo de la brana y sobre la superficie mínima. La expresión (3.21) presenta una sutileza que tenemos que tratar: es doblemente divergente.

La primera de estas divergencias es sobre la integral en  $z$  del volumen de mundo, específicamente para branas de prueba que se extienden hasta la frontera de AdS hay una divergencia en  $z$ . Esta divergencia es consecuencia de la libertad de norma y puede ser eliminada. La manera natural de hacer (3.21) es haciendo primero la integral sobre el volumen de mundo, para ello es necesario especificar el propagador del gravitón. Si la superficie mínima y la brana de prueba son estáticas, podemos elegir el propagador del gravitón en AdS Euclideo, (3.9). Ahora, notemos que cerca de la frontera  $u \rightarrow \infty$ , mientras que para  $d = 4$  las funciones  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{H}$  van como  $\mathbb{G} \sim u^{-4}$  y  $\mathbb{H} \sim u^{-2}$ . Por lo tanto, considerando los bitensores, las funciones  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{H}$  y la medida de la integral tenemos un comportamiento que va como  $u^4$ . Para que la integral (3.21) no tenga divergencias de este tipo necesitamos una fuente,  $T_{Brana}^{p'q'}$ , que decaiga más rápido que  $u^{-4}$ . Comúnmente para una brana de prueba que se extiende hacia la frontera las componentes no cero de  $T_{Brana}^{p'q'}$  van como  $G^{mn} \sim u^{-2}$ , por lo tanto la integral diverge como  $u^2$ . Estas divergencias pueden ser absorbidas en los términos  $A_i(u)$  del propagador (3.9). Específicamente, cuando convolucionamos los términos  $A_i(u)$  (que son gradientes respecto a  $x$  y  $x'$ ) con  $T_{Brana}^{p'q'}$  y después de una integración por partes nos quedan términos de frontera divergentes que cancelarían las divergencias a causa de  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{H}$ . En la siguiente sección, veremos que nuestra prueba es un cuerda F1 y su tensor de energía-momento

### 3. LA DOBLE INTEGRAL DE KARCH Y CHANG

---

va como  $T_{F1}^{p'q'} \sim u^{-5}$ , así no tendremos problemas con esta divergencia<sup>1</sup>. La otra divergencia es sobre la integral en  $w$  y se presenta cuando la superficie de entrelazamiento llega a la frontera de AdS, veremos en más detalle esta divergencia en la siguiente subsección.

#### 3.3.1 El término de regularización

La divergencia en  $w$  es a causa de que la superficie de entrelazamiento se interseca con la frontera de AdS. Esta es una divergencia UV que corresponde a la contribución de la prueba en la entropía de entrelazamiento, pero a diferencia de la integral en  $z$  la divergencia en  $w$  es física. Al igual que la divergencia principal de la entropía de entrelazamiento, la corrección a la entropía de entrelazamiento debida a la brana de prueba también es sensible a la física a distancias cortas, ya que está dominada por el entrelazamiento a corto alcance de los grados de libertad cercanos a la prueba.

Para hacer la integral en  $w$  y aislar los términos divergentes, necesitamos elegir un proceso de regularización. Debido a la presencia de la brana de prueba, la métrica inducida en el corte original será un poco modificada,  $\Gamma_{\epsilon'}$ , y también se modificará la contribución a la entropía de entrelazamiento asociada con los grados de libertad que no son los de prueba. Por lo tanto, para calcular la entropía de entrelazamiento debido solo a la brana de prueba necesitamos asegurarnos que la contribución de los grados de libertad que no son de prueba no se modifica. Para ello, necesitamos elegir un corte  $\epsilon$ , cuyo determinante de la métrica inducida en esta superficie,  $\det\{\Gamma_{\epsilon}\}$ , es el mismo que el determinante de la métrica inducida en la superficie  $\epsilon'$  en la geometría perturbada,  $G'$ ,

$$\det\{\Gamma_{\epsilon}\} = \det\{\Gamma_{\epsilon'}\} \quad (3.22)$$

Esta condición ([25, 32]) nos asegura que estamos calculando correctamente la diferencia en el área total. Así, la diferencia en el área total es escrita como:

$$\delta A = (A[G']_{\epsilon'} - A[G]_{\epsilon})_{\det\{\Gamma_{\epsilon'}[G']\} = \det\{\Gamma_{\epsilon}[G]\}}, \quad (3.23)$$

---

<sup>1</sup>El lector interesado puede ver [25] y [31] para solucionar el problema de la divergencia en  $z$ .

### 3.3 La deducción de Karch y Chang

---

donde  $A[G]_\epsilon$  representa el área de la superficie mínima calculada con métrica  $G$  y corte  $\epsilon$ .

La expresión (3.23) nos muestra que además de que la perturbación en la métrica (debida a la prueba) afecta el integrando, la perturbación también está presente en el dominio de integración. Si expandimos la expresión (3.23) y nos quedamos con los primeros órdenes en  $t_0$  obtenemos,

$$\delta A = \left( A[G + \delta G]_\epsilon - A[G]_\epsilon \right) + \left( A[G]_{\epsilon'} - A[G]_\epsilon \right) + \mathcal{O}(t_0^2), \quad (3.24)$$

donde el primer término entre paréntesis es dado por la doble integral (3.21). El segundo término representa la diferencia de la superficie mínima limitada entre el corte  $\epsilon$  y el corte  $\epsilon'$ .

En el siguiente capítulo usaremos la doble integral (3.21), el propagador del gravitón (3.10) y calcularemos (3.24) a primer orden; nuestra prueba será una cuerda fundamental.

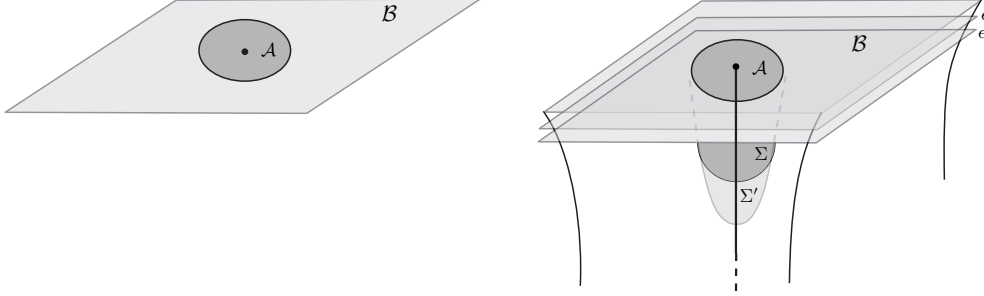




# Entrelazamiento del campo gluónico producido por un quark infinitamente masivo

En el presente capítulo, calcularemos la contribución de un quark externo (con masa infinita) a la entropía de entrelazamiento del campo gluónico. En la Figura 4.1 se muestra nuestro sistema. Colocamos el quark en el origen de la teoría de campo y elegimos una superficie de entrelazamiento esférica centrada en el quark, como se muestra en el lado izquierdo de la Figura 4.1. En la sección 1.2.1 vimos que un quark infinitamente masivo en la teoría de norma corresponde a una cuerda macroscópica en el dual gravitacional, con uno de sus extremos atados en  $z = 0$ . De manera precisa, el quark se relaciona al punto final de la cuerda en la frontera de AdS y el cuerpo de la cuerda codifica el perfil del campo gluónico, del cual es fuente el quark. Entonces, según la prescripción de RT la extensión de la superficie de entrelazamiento en el bulto, corresponde a la superficie de área mínima. Por lo dicho anteriormente, estamos interesados en calcular el entrelazamiento del campo gluónico que produce el quark con masa infinita. Calcularemos la primera corrección inducida por el quark, por encima del entrelazamiento ya presente en el vacío. Para ello, hay un punto a enfatizar: debido a la presencia de la cuerda en

#### 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO



**Figura 4.1:** Del lado izquierdo, colocamos un quark en el origen de la teoría de campo y para calcular la entropía de entrelazamiento elegimos una superficie de entrelazamiento esférica alrededor del quark. Del lado derecho, dibujamos la configuración en el bulto, es decir, la cuerda atada en  $z = 0$ , la superficie de entrelazamiento y la superficie mínima asociada sin y con la perturbación debido a la cuerda,  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  respectivamente. Se muestra también el corte  $\epsilon$  sin la modificación debida a la cuerda y el corte  $\epsilon'$  elegido para tomar en cuenta la perturbación producida por la cuerda.

AdS, la superficie de área mínima,  $\Sigma$ , y el corte UV,  $\epsilon$ , se modifican a  $\Sigma'$  y  $\epsilon'$ . Esto se muestra en el lado derecho de la Figura 4.1. Seremos más específicos sobre el cambio en el corte más adelante.

La manera natural de calcular la entropía de entrelazamiento en virtud del quark es con la prescripción de RT, (2.26). Para ello tendremos que obtener la perturbación en la métrica debida a la cuerda y considerar el fondo gravitacional como AdS más esta perturbación. En seguida, debemos resolver el problema de la superficie mínima en la nueva geometría. Calcular la perturbación a causa de la cuerda de forma exacta resulta complicado, por lo que nos limitaremos a examinar dicha perturbación a nivel de la ecuación de Einstein linealizada, y extraer a partir de ella el cambio en la entropía de entrelazamiento usando la fórmula de Karch y Chang descrita en el capítulo anterior, ecuación (3.21). Como explicamos allá, este procedimiento da una buena aproximación en el régimen de prueba (3.3). Traducido al lenguaje de la teoría de campos estamos trabajando en el límite de  $N \gg 1$ ,  $\lambda \gg 1$ .

El resultado que presentaremos se obtuvo mediante otras técnicas en [33]<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Se usaron técnicas de localización para calcular la entropía de entrelazamiento de una región esférica que contiene un quark pesado.

---

Lewkowycz y Maldacena obtienen que la aportación a la primera corrección de la entropía de entrelazamiento del quark pesado es  $\frac{\sqrt{\lambda}}{3}$ . En este trabajo, nos interesa entonces mostrar que este mismo resultado se puede obtener usando la fórmula de la doble integral de Karch y Chang, (3.21), y considerando como ellos un término de regularización para calcular la contribución al área entre los dos cortes,  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ . Primero, obtendremos la perturbación a causa de la cuerda, después calcularemos la doble integral (3.21), y finalmente el término de regularización debido al cambio de corte UV. En las siguientes secciones daremos todos estos detalles.

## 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

### 4.1 La perturbación debida a la cuerda

En virtud de que la cuerda está presente en el fondo gravitacional, ésta provoca una retroacción en la geometría de fondo. Es decir, tenemos una perturbación provocada por la cuerda sobre AdS, que es calculada con la expresión (3.7). Como consideraremos un quark y una superficie mínima que son ambos estáticos, podemos tomar el propagador Euclideo (3.10) con las funciones (3.15) y (3.16). Al considerar el propagador (3.10), necesitamos construir el tensor de energía momento a partir de la acción de la cuerda Euclidea. Por lo tanto, aplicamos una rotación de Wick,  $t \rightarrow -it_{\mathcal{L}}$ , a la acción de Nambu-Goto, (1.2), y obtenemos,

$$\begin{aligned} S_{NG}^{(\mathcal{E})} &\rightarrow -iS_{NG}^{(\mathcal{L})} \\ &= T \int dt dz \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $S_{NG}^{(\mathcal{E})}$  y  $S_{NG}^{(\mathcal{L})}$  son las acciones Euclidea y Lorentziana, respectivamente;  $t$  es el tiempo Euclideo.

Como tenemos una cuerda fija en  $z = 0$ , si elegimos la norma estática, las coordenadas del encaje son las siguientes,

$$z = \sigma, \quad t = \tau, \quad X^i(z, t) = 0. \quad (4.2)$$

Con la acción (4.1) obtenemos el tensor de energía-momento de la cuerda,

$$\begin{aligned} T^{mn} &= \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{\delta S_{NG}^{(\mathcal{E})}}{\delta G_{mn}} \\ &= \frac{T}{\sqrt{G}} \int dt dz \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^m \partial_b X^n \delta^5(x - X(t, z)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por consiguiente, para el quark estático,

$$t^{mn} = \frac{T}{\sqrt{G}} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^m \partial_b X^n \delta^3(\vec{x}). \quad (4.4)$$

Conforme a la relación (4.4) y con los ingredientes

$$\sqrt{G} = \frac{L^5}{z^5}, \quad (4.5)$$

$$\sqrt{g} = \frac{L^2}{z^2}, \quad g^{tt} = g^{zz} = \frac{z^2}{L^2}, \quad (4.6)$$

## 4.1 La perturbación debida a la cuerda

obtenemos las únicas componentes no cero del tensor de energía-momento de la cuerda,

$$t^{tt} = t^{zz} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{z^5}{L^5} \delta^3(\vec{x}). \quad (4.7)$$

Antes de seguir con el cálculo de  $h_{mn}$ , notemos que en (4.7) las componentes no cero del tensor de energía-momento van como  $t^{mn} \sim \frac{1}{u^5}$ . Del conteo que hicimos en la sección 3.3, a partir de los bitensores, las funciones  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{H}$  y la medida de la integral, para  $d = 4$ , obtuvimos un comportamiento que va como  $u^4$ . En consecuencia, la integral (3.7) cae como  $\frac{1}{u}$ , y cerca de  $z = 0$  la integral va a cero (ya que en la frontera  $u \rightarrow \infty$ ). Así, el sistema no presenta divergencias en  $z = 0$ , es decir podemos confiar en el ansatz (3.9) para el gravitón (propuesto en [28]) y quedarnos sólo con los términos que son invariantes de norma (3.10).

Con las componentes no cero del tensor de energía-momento (4.7), la expresión (3.7) queda determinada por

$$h_{mn}(z, x) = \kappa_5^2 \int dz' dt' d^3x' \sqrt{G} [\mathcal{G}_{mn; z' z'} t^{z' z'} + \mathcal{G}_{mn; t' t'} t^{t' t'}].$$

Usando (4.5) y (4.7), simplificamos para obtener

$$h_{mn}(z, x) = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int dz' dt' [\mathcal{G}_{mn; z' z'} + \mathcal{G}_{mn; t' t'}]. \quad (4.8)$$

Ahora construiremos las componentes del propagador. Para ello necesitaremos la distancia  $u$  del punto fuente  $(x', z')$  sobre la cuerda estática al punto de observación  $(x, z)$ ,

$$u = \frac{z^2 + z'^2 + t'^2 + x^2}{2zz'} - 1, \quad (4.9)$$

y para facilitar los cálculos es conveniente realizar el cambio de variable

$$U = 1 + u. \quad (4.10)$$

Con (4.10) y según (3.12) construimos el segundo bitensor,  $T_{mn; m' n'}^{(2)}$ , a partir de las segundas derivadas de  $U$ ,

$$\begin{aligned} \partial_m \partial_{n'} U = & - \frac{1}{zz'} \left\{ \delta_{\mu\nu} \delta_m^\nu \delta_{n'\mu} + \delta_{mz} \delta_{n'z'} \left( \frac{z'}{z} + \frac{z}{z'} - U \right) \right. \\ & \left. - \frac{(x-x')^\mu}{z} \delta_{n'\mu} \delta_{mz} + \frac{(x-x')^\mu}{z'} \delta_{\mu m} \delta_{n'z'} \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

donde los índices  $m$  y  $n$  corren de 0 a 4 y los índices  $\mu$  y  $\nu$  de 0 a 3. Con la variable  $U$  las funciones (3.15) y (3.16) toman la forma

$$\mathbb{G}(U) = \frac{1}{8\pi^2 L^3} \left\{ \frac{U(2U^2 - 3)}{[(U-1)(U+1)]^{3/2}} - 2 \right\}, \quad (4.12)$$

$$\mathbb{H}(U) = -\frac{1}{12\pi^2 L^3} \left\{ \frac{U(6U^4 - 9U^2 + 2)}{[(U-1)(U+1)]^{3/2}} - 6U^2 \right\}. \quad (4.13)$$

Por consiguiente, con las relaciones (3.11), (3.12) y (4.11) expresamos las componentes del propagador,

$$\mathcal{G}_{zz; z' z'} - \mathcal{G}_{zz; t' t'} = \frac{2L^4}{z'^2 z^2} \left\{ \mathbb{H}(U) + \left[ \left( \frac{z'}{z} + \frac{z}{z'} - U \right)^2 + \frac{t'^2}{z^2} \right] \mathbb{G}(U) \right\}, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{G}_{zt; z' z'} - \mathcal{G}_{zt; t' t'} = \frac{2L^4}{z'^2 z^2} t' \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \left( \frac{z'}{z} + \frac{z}{z'} - U \right) \right] \mathbb{G}(U), \quad (4.15)$$

$$\mathcal{G}_{zj; z' z'} - \mathcal{G}_{zj; t' t'} = \frac{2L^4}{z'^2 z^2} \frac{x^j}{z'} \left[ \frac{z'}{z} + \frac{z}{z'} - U \right] \mathbb{G}(U), \quad (4.16)$$

$$\mathcal{G}_{tt; z' z'} - \mathcal{G}_{tt; t' t'} = \frac{2L^4}{z'^2 z^2} \left[ \mathbb{H}(U) + \left( \frac{t'^2}{z^2} + 1 \right) \mathbb{G}(U) \right], \quad (4.17)$$

$$\mathcal{G}_{tj; z' z'} - \mathcal{G}_{tj; t' t'} = -\frac{2L^4}{z'^2 z^2} \frac{x^j t'}{z'^2} \mathbb{G}(U), \quad (4.18)$$

$$\mathcal{G}_{ij; z' z'} - \mathcal{G}_{ij; t' t'} = \frac{2L^4}{z'^2 z^2} \left[ \delta_{ij} \mathbb{H}(U) + \frac{x^i x^j}{z'^2} \mathbb{G}(U) \right]. \quad (4.19)$$

Como estamos trabajando con coordenadas Euclidianas vamos a integrar el tiempo,  $t'$ , de  $-\infty$  a  $\infty$ , y al ser las expresiones (4.15) y (4.18) impares en  $t'$ , la integral para esas componentes es cero. Las relaciones (4.14), (4.16), (4.17) y (4.19) son pares en  $t'$  y por lo tanto la integral será dos veces la integral en  $t'$  de 0 a  $\infty$ .

Por medio de (4.9) y (4.10), hacemos un nuevo cambio de variable para integrar en  $t'$ ,

$$t' = -\sqrt{2zz'U - z^2 - z'^2 - \vec{x}^2}, \quad (4.20)$$

cuyo diferencial es

$$dt' = \frac{-zz'dU}{\sqrt{2zz'U - z^2 - z'^2 - \vec{x}^2}}. \quad (4.21)$$

En consecuencia, los límites de integración van de  $U_{min} = \frac{z^2 + z'^2 + \vec{x}^2}{2zz'}$  a  $U_{max} \rightarrow \infty$  (considerando que en  $t'$  van de 0 a  $\infty$ ).

## 4.1 La perturbación debida a la cuerda

Después de que en la expresión (4.8) introducimos las relaciones (4.14)-(4.19), realizamos el cambio de variable (4.20) y hacemos la integral en  $U$ , obtenemos las siguientes expresiones para la perturbación debida a la cuerda:

$$h_{zz} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L}{30\pi^2 z^4 z'^4 (x^2 + (z - z')^2) (x^2 + (z + z')^2)^{3/2}} \left[ \text{Pol}_{zz}^{(1)} E \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) + \text{Pol}_{zz}^{(2)} K \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) \right], \quad (4.22)$$

$$h_{zt} = h_{tj} = 0, \quad (4.23)$$

$$h_{zj} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{Lx_j}{6\pi^2 z^3 z'^4 (x^2 + (z - z')^2) \sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \left[ \text{Pol}_{zj}^{(1)} E \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) + \text{Pol}_{zj}^{(2)} K \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) \right], \quad (4.24)$$

$$h_{tt} = -\frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L}{15\pi^2 z^4 z'^4 (x^2 + (z - z')^2) (x^2 + (z + z')^2)^{3/2}} \left[ \text{Pol}_{tt}^{(1)} E \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) + \text{Pol}_{tt}^{(2)} K \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) \right], \quad (4.25)$$

$$h_{ij} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L}{15\pi^2 z^4 z'^4 (x^2 + (z - z')^2) \sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \left[ \text{Pol}_{ij}^{(1)} E \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) + \text{Pol}_{ij}^{(2)} K \left( \frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{x^2 + (z + z')^2}} \right) \right], \quad (4.26)$$

donde  $K(p)$  y  $E(p)$  son las integrales elípticas completas de primera y segunda clase, respectivamente, con módulo elíptico  $p$ . Los términos  $\text{Pol}_{mn}^{(i)}$  son polinomios



#### 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

en función de  $z$ ,  $z'$  y  $x$ , que acompañan a las funciones elípticas,

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{zz}^{(1)} = & (x^2 + (z + z')^2)(4x^8 - 6z^8 + 13z^6z'^2 - 14z^4z'^4 - 7z^2z'^6 + 4z'^8 \\ & + x^6(36z^2 + 46z'^2) + x^4(54z^4 + 125z^2z'^2 + 84z'^4) + 2x^2(8z^6 + z^4z'^2 \\ & - 4z^2z'^4 + 23z'^6)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{zz}^{(2)} = & -4x^{10} - 10x^8(4z^2 + 5z'^2) + (z^2 - z'^2)^3(6z^4 + 5z^2z'^2 + 4z'^4) \\ & - x^6(90z^4 + 203z^2z'^2 + 130z'^4) - x^4(70z^6 + 149z^4z'^2 + 159z^2z'^4 \\ & + 130z'^6) - x^2(10z^8 + 9z^6z'^2 - 58z^4z'^4 - 11z^2z'^6 + 50z'^8), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\text{Pol}_{zj}^{(1)} = 2x^6 - 4z^6 + z^4z'^2 + z^2z'^4 - 4z'^6 - x^2(6z^4 + 17z^2z'^2 + 6z'^4), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{zj}^{(2)} = & -2x^6 + 4x^4zz' + (z - z')^2(4z^4 + 7z^2z'^2 + 4z'^4) + x^2(6z^4 \\ & - 4z^3z' + 11z^2z'^2 - 4zz'^3 + 6z'^4), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{tt}^{(1)} = & -(x^2 + (z + z')^2)(4x^8 + 9z^8 - 17z^6z'^2 + 6z^4z'^4 - 7z^2z'^6 \\ & + 4z'^8 + x^6(21z^2 + 16z'^2) + x^4(39z^4 + 35z^2z'^2 + 24z'^4) + x^2(31z^6 \\ & + 2z^4z'^2 + 7z^2z'^4 + 16z'^6)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{tt}^{(2)} = & 4x^{10} + 5x^8(5z^2 + 4z'^2) + x^6(60z^4 + 68z^2z'^2 + 40z'^4) \\ & + (z^2 - z'^2)^2(9z^6 + z^4z'^2 + z^2z'^4 + 4z'^6) + x^4(70z^6 + 59z^4z'^2 + 54z^2z'^4 \\ & + 40z'^6) + 2x^2(20z^8 - 3z^6z'^2 + z^4z'^4 + 2z^2z'^6 + 10z'^8), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{ij}^{(1)} = & -15x_ix_jz^2(x^4 + z^4 - z^2z'^2 + z'^4 + 2x^2(z^2 + z'^2)) + (4x^8 \\ & + 3z^6z'^2 + 4z^8 - 4z^4z'^4 + 3z^2z'^6 + 4z'^8 + 16x^6(z^2 + z'^2) + x^4(24z^4 \\ & + 35z^2z'^2 + 24z'^4) + 2x^2(8z^6 + 11z^4z'^2 + 11z^2z'^4 + 8z'^6))\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{ij}^{(2)} = & -(x^4 + (z - z')^2(z^2 + z'^2) + 2x^2(z^2 - zz' + z'^2)) \\ & ((4x^4 + 4z^4 + 7z^2z'^2 + 4z'^4 + 8x^2(z^2 + z'^2))\delta_{ij} - 15x_ix_jz^2). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Las expresiones (4.22)-(4.26) son las componentes de la perturbación provocada por la presencia de la cuerda, pero por la complejidad de éstas, las integrales en  $z'$  no son sencillas de realizar. No obstante las relaciones (4.22)-(4.26) son una buena aproximación para nuestro propósito, que es convolucionar  $h_{mn}$  con  $T_{Min}^{mn}$ , de acuerdo con la expresión (3.20).

## 4.2 Entrelazamiento desde la fórmula de Karch y Chang para un quark

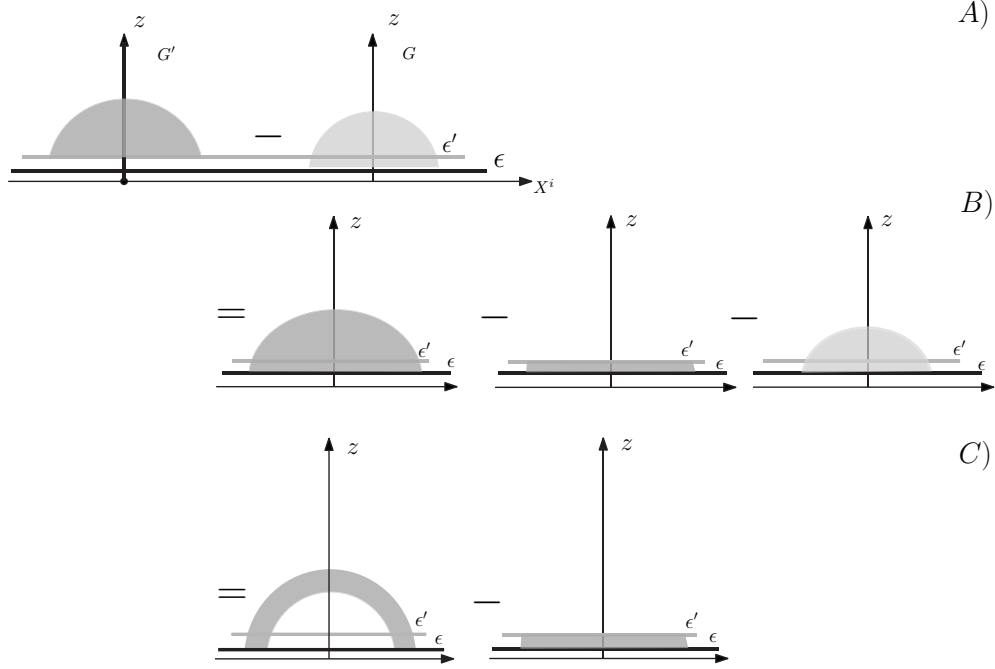
Con la fórmula de Karch y Chang que presentamos en el capítulo anterior, en esta sección calcularemos la aportación de un quark a la primera corrección de la entropía de entrelazamiento. Como ingrediente de la fórmula, haremos uso de la perturbación debida a la cuerda, que obtuvimos en la sección anterior. Un punto a destacar es que estamos eligiendo una superficie de entrelazamiento esférica alrededor del quark, por lo tanto la superficie de Ryu-Takayanagi es la mitad de un casquete esférico.

En la sección 3.3 mostramos que para calcular la aportación a la entropía de entrelazamiento debida a una prueba consideramos las dos contribuciones (3.24). La primera es obtenida con la fórmula de Karch y Chang, y la segunda contribución se debe al cambio de corte, es decir el área entre el nuevo y el viejo corte (multiplicado por el factor  $\frac{1}{4G_N}$ ). Esto puede ser visto en la Figura 4.2. Lo que nos interesa es la diferencia entre el área de la superficie mínima, donde el fondo es AdS más la perturbación de la cuerda,  $G'$ , menos el área de la superficie mínima calculada en el fondo sin la presencia de la cuerda,  $G$ , (ver *A*) de la Figura 4.2.

Para no tener una contribución espuria por el método de regularización, elegimos un corte  $\epsilon'$  cuya métrica inducida usando  $G'$  sea igual a la métrica inducida en el corte  $\epsilon$  usando  $G$ . Podemos calcular el área de la superficie mínima con  $G'$  desde el corte  $\epsilon$ , siempre y cuando restemos el área entre los cortes,  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ , y finalmente restemos también el área de la superficie mínima en  $G$  con corte  $\epsilon$ , (ver parte *B*) de la Figura 4.2. Del proceso anterior obtenemos dos términos que son mostrados en *C*) de la Figura 4.2; donde el primer término lo llamaremos  $I_{KCh}$  y corresponde a la doble integral de Karch y Chang, (3.21), y el segundo es la aportación entre los cortes,  $I_R$ . Estos son los 2 términos que aparecen en (3.24).

Como primer paso, en la siguiente sección calcularemos el tensor de energía-momento asociado a la superficie de Ryu-Takayanagi, de acuerdo a la expresión (3.19).

## 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO



**Figura 4.2:** La parte A) es un esquema de la fórmula (3.23). Para realizar la resta necesitamos elegir un corte  $\epsilon$ , de tal manera que se cumpla  $\Gamma_\epsilon = \Gamma_{\epsilon'}$ . Podemos calcular el área desde el corte  $\epsilon$  en  $G'$  y restar el área entre los cortes  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ ; esto es lo que se muestra en la Figura B). Como resultado tenemos dos términos que corresponden a la doble integral de Karch y Chang,  $I_{KCh}$ , y el término de regularización,  $I_R$ , donde ambos términos se muestran esquemáticamente en la Figura C).

### 4.2.1 El tensor de energía-momento mínimo

La superficie de Ryu-Takayanagi de nuestro sistema es un casquete de radio  $R$ , por esta razón aprovechamos la simetría del sistema y usamos AdS Euclideo en coordenadas esféricas,

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2). \quad (4.35)$$

En tal caso, el casquete esférico está dado por

$$R^2 = r^2 + z^2. \quad (4.36)$$

Con base en la expresión anterior calculamos la métrica inducida en el casquete

## 4.2 Entrelazamiento desde la fórmula de Karch y Chang para un quark

a través de

$$\gamma_{ab} = \partial_a X^m \partial_b X^n G_{mn}, \quad (4.37)$$

donde

$$X^m = \{z, t, r, \theta, \phi\} = \{z, t, \sqrt{R^2 - z^2}, \theta, \phi\}. \quad (4.38)$$

Al ser una superficie de Ryu-Takayanagi estática, con la restricción (4.36), las coordenadas del casquete las elegimos como

$$X^a = \{z, \theta, \phi\}. \quad (4.39)$$

Así, la métrica inducida tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \gamma_{zz} &= \frac{L^2}{z^2} \frac{R^2}{R^2 - z^2}, & \gamma_{\theta\theta} &= \frac{L^2}{z^2} (R^2 - z^2), \\ \gamma_{\phi\phi} &= \frac{L^2}{z^2} (R^2 - z^2) \sin^2(\theta), & \gamma_{z\theta} &= \gamma_{z\phi} = \gamma_{\theta\phi} = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

De acuerdo con la expresión (3.19), con las coordenadas (4.38) y (4.39) y con la métrica inversa del casquete obtenemos las componentes del tensor de energía-momento asociado a la superficie de área mínima,

$$T_{Min}^{zz} = \frac{z^2}{L^2} \frac{R^2 - z^2}{R^2}, \quad (4.41)$$

$$T_{Min}^{zr} = - \frac{z^3 \sqrt{R^2 - z^2}}{L^2 R^2}, \quad (4.42)$$

$$T_{Min}^{tt} = 0, \quad (4.43)$$

$$T_{Min}^{rr} = \frac{z^4}{L^2 R^2}, \quad (4.44)$$

$$T_{Min}^{\theta\theta} = \frac{z^2}{L^2} \frac{1}{R^2 - z^2}, \quad (4.45)$$

$$T_{Min}^{\phi\phi} = \frac{z^2}{L^2} \frac{1}{(R^2 - z^2) \sin^2(\theta)}. \quad (4.46)$$

Los términos restantes son cero. Notemos que la componente  $tt$  del tensor de energía-momento es cero y esto se debe a que estamos considerando una superficie mínima estática.

## 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

### 4.2.2 La doble integral de Karch y Chang para la cuerda

En la sección 3.3 vimos que la fórmula de Karch y Chang se deduce a partir de la prescripción de RT, y que es función de lo que se considera un “tensor de energía-momento” asociado a la presencia de la superficie mínima dentro del bulto, y de la perturbación provocada por la prueba. En el apartado anterior construimos el tensor de energía-momento para un casquete esférico, y en 4.1 obtuvimos la perturbación debida a la cuerda. Por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de Karch y Chang, pero antes de calcular la convolución de  $T_{Min}^{mn}$  con  $h_{mn}$ , como estamos aprovechando la simetría esférica del sistema cambiamos las componentes (4.22)-(4.26) a coordenadas esféricas. Los únicos términos no cero son

$$h_{zz} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L}{30\pi^2 z^4 z'^4 (R^2 - 2zz' + z'^2)(R^2 + 2zz' + z'^2)^{3/2}} \left[ \text{Pols}_{zz}^{(1)} E\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) + \text{Pols}_{zz}^{(2)} K\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) \right], \quad (4.47)$$

$$h_{zr} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L\sqrt{R^2 - z^2}}{6\pi^2 z^3 z'^4 (R^2 - 2zz' + z'^2)\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}} \left[ \text{Pols}_{zr}^{(1)} E\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) + \text{Pols}_{zr}^{(2)} K\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) \right], \quad (4.48)$$

$$h_{tt} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L}{15\pi^2 z^4 z'^4 (R^2 - 2zz' + z'^2)\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}} \left[ \text{Pols}_{tt}^{(1)} E\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) + \text{Pols}_{tt}^{(2)} K\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) \right], \quad (4.49)$$

$$h_{rr} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L}{15\pi^2 z^4 z'^4 (R^2 - 2zz' + z'^2)\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}} \left[ \text{Pols}_{rr}^{(1)} E\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) + \text{Pols}_{rr}^{(2)} K\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) \right], \quad (4.50)$$

## 4.2 Entrelazamiento desde la fórmula de Karch y Chang para un quark

$$h_{\theta\theta} = \frac{\kappa_5^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\infty dz' \frac{L(R^2 - z^2)}{15\pi^2 z^4 z'^4 (R^2 - 2zz' + z'^2) \sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}} \left[ \text{Pols}_{\theta\theta}^{(1)} E\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) + \text{Pols}_{\theta\theta}^{(2)} K\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{R^2 + 2zz' + z'^2}\right) \right], \quad (4.51)$$

$$h_{\phi\phi} = h_{\theta\theta} \sin^2(\theta), \quad (4.52)$$

donde hemos tomado en cuenta que  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ , gracias a la restricción (4.36). Los términos  $\text{Pols}_{mn}^{(i)}$ , al igual que antes, son polinomios en función de  $z$  y  $z'$ .

La segunda integral de la fórmula de Karch y Chang es sobre el casquete esférico, así pues la medida de integración la obtenemos a partir del determinante de la métrica inducida en el casquete (4.40),

$$\sqrt{\gamma} = \frac{L^3}{z^3} R \sin(\theta) \sqrt{R^2 - z^2}. \quad (4.53)$$

De la expresiones (3.20) y (3.21) notemos que estamos integrando en las coordenadas sobre la superficie mínima,  $d^3w = dzd\theta d\phi$ . Los límites de integración en  $\phi$  y  $\theta$  son los usuales en coordenadas esféricas, sin embargo en  $z$  los límites de integración van de  $\epsilon$  (el corte que hemos elegido en el bulto de AdS) a  $R$ , que es el radio del casquete esférico. Siguiendo (3.20), convolucionamos el tensor de energía-momento mínimo, (4.41), con la perturbación (4.47)-(4.52), agregamos la medida (4.53) y realizamos las integrales angulares para obtener

$$\delta S = \frac{1}{8G_N^{(5)}} \int_0^\infty dz' \int_\epsilon^R dz \frac{L^2}{\alpha'} \frac{\kappa_5^2 \sqrt{R^2 - z^2}}{15\pi^2 R z^5 z'^4 (R^2 - 2zz' + z'^2) \sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}} \left[ \text{Pol}^{(1)} E\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) + \text{Pol}^{(2)} K\left(\frac{2\sqrt{zz'}}{\sqrt{R^2 + 2zz' + z'^2}}\right) \right], \quad (4.54)$$

siendo los polinomios,

$$\begin{aligned} \text{Pol}^{(1)} = & 20R^{10} + 2R^8(2z^2 + 55z'^2) + R^6(-79z^2z'^2 + 180z'^4) + R^4(-13z^4z'^2 \\ & - 256z^2z'^4 + 110z'^6) + R^2(34z^4z'^4 - 79z^2z'^6 + 20z'^8) + 18z^6z'^4 \\ & - 13z^4z'^6 + 4z^2z'^8, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}^{(2)} = & -(R^2 + z'^2)(20R^8 + R^6(4z^2 - 40zz' + 90z'^2) + R^4z'(-8z^3 - 23z^2z' \\ & - 140zz'^2 + 90z'^3) - R^2z'^2(z^4 - 54z^3z' + 23z^2z'^2 + 40zz'^3 - 20z'^4) \\ & + z^2z'^3(2z^3 - z^2z' - 8zz'^2 + 4z'^3)). \end{aligned} \quad (4.56)$$

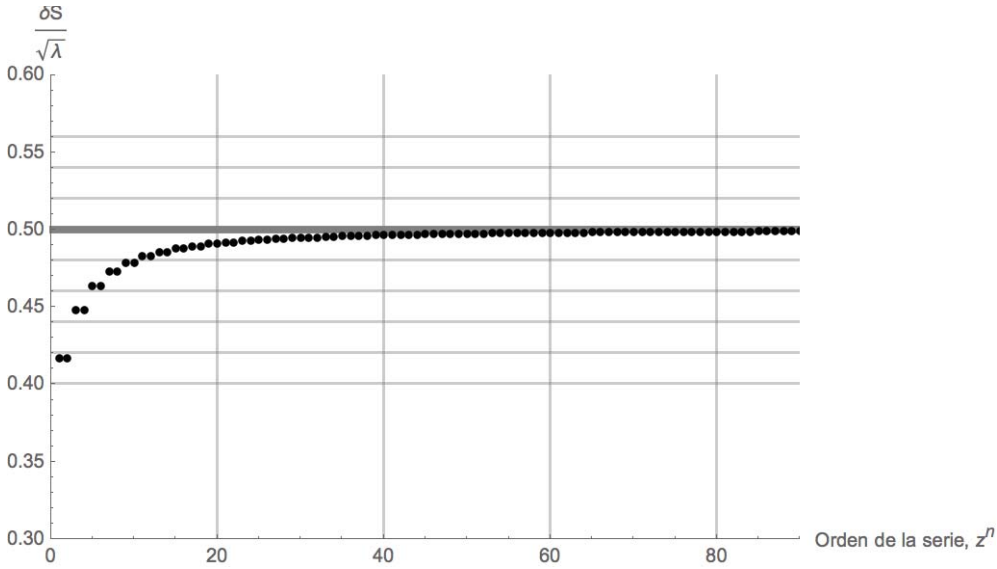
#### 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

Las integrales en (4.54) no son sencillas de calcular. Por ello expandimos el integrando de (4.54) en series alrededor de  $z = 0$  e integramos cada término. En la Figura 4.3 podemos ver que al incrementar el orden de la serie ésta se aproxima al valor,

$$\delta S \sim \frac{L^2}{2\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}, \quad (4.57)$$

donde consideramos que el corte se aproxima a cero,  $\epsilon \rightarrow 0$ .



**Figura 4.3:** La integral (4.54) la realizamos expandiendo el integrando en series alrededor de  $z = 0$  e integrando cada término. Hacemos la integral a orden noventa y vemos que conforme la serie aumenta su valor se aproxima a  $\frac{\delta S}{\sqrt{\lambda}} \sim \frac{1}{2}$ .

Hay algunos puntos a resaltar del resultado anterior. El primero es que no existe dependencia del radio  $R$ , es decir, la aportación a la entropía de entrelazamiento debida al quark no depende del radio que elegimos para la superficie de entrelazamiento. Por otro lado, dentro de la integral no tenemos divergencias, como se esperaba de acuerdo con la expresión (2.23), esto lo atribuimos a que la fórmula de Karch y Chang sólo calcula la contribución debida a la prueba; en nuestro caso a causa de la cuerda.

## 4.2 Entrelazamiento desde la fórmula de Karch y Chang para un quark

### 4.2.3 El término de regularización para la cuerda

En la sección 3.3 hablamos de un término de regularización, ya que debido a la presencia de la cuerda la métrica inducida en el corte original,  $\Gamma_\epsilon$ , será modificada a la métrica inducida  $\Gamma_{\epsilon'}$ . Por otra parte, en la Figura 4.2 y en la expresión (3.24) mostramos dicho término, que multiplicado por el factor  $\frac{1}{4G_N^{(5)}}$ , contribuye a la entropía de entrelazamiento.

Calculamos la contribución entre los cortes con la siguiente integral:

$$I_R = -\frac{1}{4G_N^{(5)}} \int_\epsilon^{\epsilon'} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sqrt{\gamma}, \quad (4.58)$$

donde  $\epsilon' = \epsilon + \delta z$  y  $\delta z$  es el cambio en el corte debido a la presencia de la cuerda. Tomando la relación (4.53), integrando y quedándonos a primer orden en  $\delta z$  obtenemos,

$$I_R = -\frac{\pi L^3 R}{G_N^{(5)} \epsilon^3} \delta z \sqrt{R^2 - \epsilon^2}. \quad (4.59)$$

De acuerdo con la expresión (4.59) necesitamos  $\delta z$ ; la propuesta es encontrar  $\delta z$  eligiendo un corte  $\epsilon'$ , de manera que se cumpla que la determinante de la métrica inducida en  $\epsilon$  usando  $G$  como métrica en el bulto es la misma que la métrica inducida en el corte  $\epsilon'$  usando  $G'$ ,

$$\det(\{\Gamma_\epsilon\}_{ab}) = \det(\{\Gamma_{\epsilon'}\}_{ab}). \quad (4.60)$$

Determinamos la métrica inducida, en coordenadas esféricas, en el corte  $\epsilon'$  mediante,

$$\begin{aligned} \{\Gamma_{\epsilon'}\}_{ab} &= \partial_a X^{lm} \partial_b X^{lm} G'_{mn} \\ &= \partial_a X^{lm} \partial_b X^{lm} \left[ G_{mn}(\epsilon + \delta z, t, \sqrt{R^2 - (\epsilon + \delta z)^2}, \theta, \phi) \right. \\ &\quad \left. + \delta G_{mn}(\epsilon + \delta z, t, \sqrt{R^2 - (\epsilon + \delta z)^2}, \theta, \phi) \right] \\ &= \partial_a X^{lm} \partial_b X^{lm} \left[ \left(1 - 2\frac{\delta z}{\epsilon}\right) G_{mn}^{(0)}(z = \epsilon) + G_{mn}^{(1)}(z = \epsilon) + \delta G_{mn} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$



#### 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

En la segunda igualdad evaluamos  $G_{mn}$  y  $\delta G_{mn}$  en  $z = \epsilon' = \epsilon + \delta z$  y en  $r = \sqrt{R^2 - (\epsilon + \delta z)^2}$ . En la tercera igualdad dejamos  $\{\Gamma_{\epsilon'}\}_{ab}$  a primer orden en  $\delta z$ ;  $G_{mn}^{(0)}$  y  $G_{mn}^{(1)}$  es la métrica de AdS en esféricas a orden cero y primer orden en  $\delta z$ , respectivamente.

Obtenemos  $\delta G_{mn}$  de las expresiones (4.22)-(4.26), no obstante simplificamos éstas considerando que estamos trabajando a nivel de los cortes, es decir en  $z \rightarrow 0$ . Así pues, hacemos  $z \rightarrow 0$  en (4.22)-(4.26) quedándonos con los primeros órdenes en  $z$ , cambiamos a esféricas, reemplazamos  $z = \epsilon + \delta z$  y  $r = \sqrt{R^2 - (\epsilon + \delta z)^2}$  e integramos. De esta manera, las expresiones para  $\delta G_{mn}$  a primer orden en  $\delta z$  quedan

$$h_{zz} = -\frac{LG_N^{(5)}}{24\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^4} (16R^6 - 112R^4\epsilon^2 + 317R^2\epsilon^4 - 221\epsilon^6 + \delta z(-96R^4\epsilon + 500R^2\epsilon^3 + 442\epsilon^5)), \quad (4.62)$$

$$h_{zr} = \frac{LG_N^{(5)}}{3\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^{7/2}} (3R^4\epsilon - 17R^2\epsilon^3 + 14\epsilon^5 + \delta z(3R^4 - 30R^2\epsilon^2 - 28\epsilon^4)), \quad (4.63)$$

$$h_{tt} = \frac{LG_N^{(5)}}{48\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^4} (16R^6 - 96R^4\epsilon^2 + 207R^2\epsilon^4 - 127\epsilon^6 + \delta z(-64R^4\epsilon + 188R^2\epsilon^3 + 254\epsilon^5)), \quad (4.64)$$

$$h_{rr} = \frac{LG_N^{(5)}}{48\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^4} (16R^6 - 144R^4\epsilon^2 + 479R^2\epsilon^4 - 351\epsilon^6 + \delta z(-160R^4\epsilon + 892R^2\epsilon^3 + 702\epsilon^5)), \quad (4.65)$$

$$h_{\theta\theta} = \frac{LG_N^{(5)}}{48\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^3} (16R^6 - 48R^4\epsilon^2 + 47R^2\epsilon^4 - 15\epsilon^6 - 4R^2\delta z\epsilon^3), \quad (4.66)$$

$$h_{\phi\phi} = h_{\theta\theta} \sin^2(\theta). \quad (4.67)$$

Con las relaciones anteriores y de acuerdo con la expresión (4.61), las compo-

## 4.2 Entrelazamiento desde la fórmula de Karch y Chang para un quark

mentos de la métrica inducida a primer orden en  $\delta z$  son:

$$\Gamma'_{tt} = \frac{G_N^{(5)} L}{48\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^4} \left( 16R^6 + 127(2\delta z - \epsilon)\epsilon^5 - 32R^4\epsilon(2\delta z + 3\epsilon) + R^2\epsilon^3(188\delta z + 207\epsilon) \right) + \frac{L^2(-2\delta z + \epsilon)}{\epsilon^3}, \quad (4.68)$$

$$\Gamma'_{rr} = \frac{L}{48\pi\alpha\epsilon^3(R^2 - \epsilon^2)^4} \left[ -48L\pi\alpha(2\delta z - \epsilon)(R^2 - \epsilon^2)^4 + G_N^{(5)}\epsilon^3 \left( 16R^6 + 351(2\delta z - \epsilon)\epsilon^5 - 16R^4\epsilon(10\delta z + 9\epsilon) + R^2\epsilon^3(892\delta z + 479\epsilon) \right) \right], \quad (4.69)$$

$$\Gamma'_{\theta\theta} = \frac{L}{48\pi\alpha(\epsilon^3 - R^2\epsilon)^3} \left( 48L\pi\alpha(R^2 - \epsilon^2)^3(R^2(2\delta z - \epsilon) + \epsilon^3) + G_N^{(5)}\epsilon^3(-16R^6 + 48R^4\epsilon^2 + R^2(4\delta z - 47\epsilon)\epsilon^3 + 15\epsilon^6) \right), \quad (4.70)$$

$$\Gamma'_{\phi\phi} = \Gamma'_{\theta\theta} \sin^2(\theta). \quad (4.71)$$

Hemos expresado  $\{\Gamma'_\epsilon\}_{ab} = \Gamma'_{ab}$ . Por otro lado, las componentes de la métrica inducida en el corte  $\epsilon$  son

$$\Gamma_{tt} = \frac{L^2}{\epsilon^2}, \quad \Gamma_{rr} = \frac{L^2}{\epsilon^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta} = \frac{L^2}{\epsilon^2} \sqrt{R^2 - \epsilon^2} = \frac{\Gamma_{\phi\phi}}{\sin^2(\theta)}. \quad (4.72)$$

En este caso evaluamos en el corte  $\epsilon$ ,  $z = \epsilon$  y  $r = \sqrt{R^2 - \epsilon^2}$ . Siguiendo (4.60), obtenemos los determinantes de  $\Gamma'_{ab}$  y  $\Gamma_{ab}$ , los igualamos y resolvemos para  $\delta z$ ,

$$\delta z = \frac{G_N}{6\pi\alpha'LR^2}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5). \quad (4.73)$$

Nos quedamos a orden  $\epsilon^3$  en la expresión anterior debido a que en la relación (4.59) el orden más bajo va como  $\epsilon^{-3}$ . Así, introducimos (4.73) en (4.59), quedándonos a orden cero en  $\epsilon$ ,

$$I_R = -\frac{L^2}{6\alpha'} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{6}. \quad (4.74)$$

Con el resultado (4.57), de la fórmula de la doble integral, y con el resultado anterior (4.74), expresamos el cambio a la entropía de entrelazamiento a primer

#### 4. ENTRELAZAMIENTO DEL CAMPO GLUÓNICO PRODUCIDO POR UN QUARK INFINITAMENTE MASIVO

---

orden, debido a la cuerda (i.e. el quark en la teoría de campo),

$$\begin{aligned}\delta S &= I_{KCh} + I_R \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{3},\end{aligned}\tag{4.75}$$

destacando que el término de regularización contribuye importantemente al resultado de la entropía de entrelazamiento.

La expresión (4.75) está totalmente de acuerdo con el resultado obtenido por Lewkowycz y Maldacena en [33], calculado mediante métodos diferentes a los que hemos usado en el presente trabajo.

## Conclusiones y trabajo futuro

El objetivo del presente trabajo fue calcular la primera corrección de la entropía de entrelazamiento del campo gluónico en una teoría de norma fuertemente acoplada, a causa de un quark estático e infinitamente pesado. Esto se realizó con métodos de la llamada correspondencia AdS/CFT. En términos generales, la correspondencia holográfica es una herramienta que surge de la teoría de cuerdas, que relaciona teorías de campos con teorías gravitacionales que tienen una dimensión mayor. La correspondencia AdS/CFT ha permitido realizar cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte para diversas teorías de campos, que por métodos perturbativos serían inaccesibles. Una de las cantidades difíciles de obtener en la teoría de campo, incluso en el régimen perturbativo, es la entropía de entrelazamiento. Esta cantidad es propia de la mecánica cuántica, donde dos o más objetos alejados pueden tener un comportamiento coordinado. No obstante, utilizando como cimiento la dualidad de Maldacena, Ryu y Takayanagi dan una prescripción, (2.26), para calcular la entropía de entrelazamiento usando herramientas geométricas del fondo gravitacional. Una deducción que proviene de la relación de Ryu-Takayanagi es la fórmula de la doble integral de Karch y Chang, (3.21), que específicamente se usa para sistemas de branas de prueba. Con esta fórmula, en el presente trabajo calculamos la

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

aportación a la entropía de entrelazamiento, usando como prueba la cuerda fundamental. La punta de la cuerda en  $z = 0$  es dual al quark en la teoría de campo, y el perfil de la cuerda codifica el campo gluónico.

La presencia de una cuerda fundamental externa en el bulto provoca una perturbación en el fondo. Calculamos esta perturbación a partir de la expresión (3.7) para una cuerda estática, con el propagador del gravitón Euclideo, (3.9), y con el tensor de energía-momento de la cuerda, (4.7). Del ansatz para el propagador Euclideo solo nos hemos quedado con los elementos que son independientes de norma, en vista de que el propagador es convolucionado con el tensor de energía-momento de la cuerda, que es una cantidad covariantemente conservada, y por lo tanto los términos dependientes de norma no aportan para el cálculo de  $h_{mn}$ . Como resultado, obtenemos la perturbación hasta la integral en  $z'$ , (4.22)-(4.26), destacando que en la frontera  $h_{mn}$  es finita. En otras palabras, no tenemos divergencias conforme nos acercamos a  $z = 0$ .

En virtud de la presencia de la superficie mínima en el bulto, calculamos el "tensor de energía-momento" del casquete esférico, (4.41), y realizamos la convolución con la perturbación. Debido a la complejidad de las integrales, solo nos fue posible expandir el integrando alrededor de  $z = 0$ , e ir integrando término a término. Llegamos así al resultado mostrado en la Figura 4.3, donde queda claro que la serie converge al valor  $\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ .

Además, hemos considerado un término de regularización, dado que por la presencia de la cuerda en el fondo gravitacional, el corte UV original se modifica en un nuevo corte UV. Este término contribuye de manera significativa, restando  $\frac{\sqrt{\lambda}}{6}$  al resultado mostrado en la Figura 4.3. En consecuencia, obtenemos  $\frac{\sqrt{\lambda}}{3}$ ; de manera esquemática vemos el área calculada en la Figura 4.2.

Del resultado anterior se pueden inferir dos puntos. Primero, que no hay dependencia del radio del casquete esférico que estamos eligiendo,  $R$ . Segundo, que no nos vemos afectados por la ley de área de la entropía de entrelazamiento (LAEE), que nos llevaría a esperar un comportamiento divergente, proporcional al área de la superficie de entrelazamiento. Ambos puntos son explicados considerando que solo estamos obteniendo la contribución del quark a la entropía de entrelazamiento. En otras palabras, la divergencia de la LAEE con la métrica  $G'$  es cancelada con

---

la divergencia de la LAEE con la métrica  $G$ . De la misma manera, no hay dependencia de  $R$ , debido a que no importa el radio del casquete cuando lo que estamos calculando es únicamente la contribución del quark a la entropía de entrelazamiento.

La aportación a la entropía de entrelazamiento del término de regularización pudiera resultar sorprendente, ya que al estar trabajando a nivel de los cortes,  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ , pudiéramos haber supuesto que el área entre éstos era despreciable. No obstante, la cantidad está completamente de acuerdo con el resultado que Lewkowycz y Maldacena reportan en [33]. El cálculo de Lewkowycz y Maldacena es en la teoría de campo e involucra el valor de expectación del lazo de Wilson circular y la función de un punto del tensor de esfuerzos en presencia del lazo de Wilson. A partir de las expresiones exactas para estas dos cantidades (obtenidas mediante la técnica de localización) ellos determinan el resultado exacto para la entropía de entrelazamiento y después de una serie en  $\lambda$  y  $N$  obtienen la entropía de entrelazamiento a cada orden. Su resultado, en el límite  $N \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow \infty$ , implica que la primera contribución a la entropía de entrelazamiento a causa del quark es  $\frac{\sqrt{\lambda}}{3}$ <sup>1</sup>. Así, concluimos que el término de regularización es pieza clave en nuestro cálculo, pues es solo después de incluirlo que reproducimos el resultado  $\frac{\sqrt{\lambda}}{3}$ . El punto más importante es que nuestro resultado sirve para comprobar la validez de la fórmula de Karch y Chang, y de la técnica de cálculo de Lewkowycz y Maldacena.

Como trabajo futuro pensamos en la posibilidad de extender este análisis para un quark estático de masa finita. Es decir, ahora cortaremos la fuente de la cuerda de  $z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m}$  a  $\infty$ , provocando un quark que ya no es puntual, puesto que ahora tendría un radio de Compton. De éste nos interesa estudiar el patrón de entrelazamiento eligiendo el radio del casquete dentro del radio de Compton. Otro de nuestros intereses es analizar el entrelazamiento de un quark en movimiento, para ello necesitamos considerar el propagador lorentziano. Sin embargo, por la complejidad de las integrales que procesamos en el presente trabajo, vislumbramos que el caso en movimiento puede convertirse en un cálculo extenso.

---

<sup>1</sup>En su resultado también se puede observar un término  $\log(\lambda)$  (el cual es despreciable respecto a  $\frac{\sqrt{\lambda}}{3}$ ) que es una corrección cuántica que viene de los campos cuánticos que se están propagando sobre la cuerda. Nuestro cálculo es a nivel clásico, por lo tanto, nosotros no obtenemos este término.



# Bibliografía

- [1] J. Polchinski, “Tasi lectures on D-branes,” in *Fields, strings and duality. Proceedings, Summer School, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI’96, Boulder, USA, June 2-28, 1996*, pp. 293–356, 1996. 4, 7
- [2] M. Kaku, *Introduction to Superstrings and M-Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd ed., 2013. 7, 9
- [3] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.*, vol. 323, pp. 183–386, 2000. 11, 14
- [4] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 38, pp. 1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)]. 13
- [5] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 253–291, 1998. 18
- [6] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett.*, vol. B428, pp. 105–114, 1998. 18
- [7] L. Susskind and E. Witten, “The Holographic bound in anti-de Sitter space,” 1998. 18
- [8] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?,” *Physical Review*, vol. 47, pp. 777–780, May 1935. 23



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [9] E. Schrödinger, “Discussion of probability relations between separated systems,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 31, no. 4, p. 555–563, 1935. 23
- [10] E. Schrödinger, “Probability relations between separated systems,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 32, no. 3, p. 446–452, 1936. 23
- [11] A. Kitaev and J. Preskill, “Topological entanglement entropy,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, no. 11, pp. 110404, 4, 2006. 23
- [12] I. R. Klebanov, D. Kutasov, and A. Murugan, “Entanglement as a probe of confinement,” 2007. 23
- [13] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, no. 6, pp. 002, 27 pp. (electronic), 2004. 23, 33
- [14] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de Sitter space/conformal field theory correspondence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, no. 18, pp. 181602, 4, 2006. 23, 36, 37
- [15] A. Rényi, “On measures of entropy and information,” in *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*, (Berkeley, Calif.), pp. 547–561, University of California Press, 1961. 31
- [16] H. Araki and E. H. Lieb, “Entropy inequalities,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 18, no. 2, pp. 160–170, 1970. 32
- [17] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, “Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy,” *J. Math. Phys.*, vol. 14, pp. 1938–1941, 1973. 32
- [18] H. Liu and M. Mezei, “A Refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom,” *JHEP*, vol. 04, p. 162, 2013. 33
- [19] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of holographic entanglement entropy,” *J. High Energy Phys.*, no. 8, pp. 045, 48, 2006. 33, 36, 37

- 
- [20] M. Srednicki, “Entropy and area,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, no. 5, pp. 666–669, 1993. 34
- [21] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, “Quantum source of entropy for black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 34, pp. 373–383, Jul 1986. 34
- [22] V. E. Hubeny, M. Rangamani, and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal,” *JHEP*, vol. 07, p. 062, 2007. 36
- [23] M. Headrick and T. Takayanagi, “A Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy,” *Phys. Rev.*, vol. D76, p. 106013, 2007. 37
- [24] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 104, pp. 207–226, 1986. 38
- [25] H.-C. Chang and A. Karch, “Entanglement Entropy for Probe Branes,” *JHEP*, vol. 01, p. 180, 2014. 39, 46, 47, 48
- [26] A. Karch and A. Katz, “Adding flavor to AdS/CFT,” in *Proceedings of the 35th International Symposium Ahrenschoop on the Theory of Elementary Particles (Berlin-Schmöckwitz, 2002)*, vol. 51, pp. 759–763, 2003. 39, 41
- [27] A. Karch and L. Randall, “Open and closed string interpretation of SUSY CFT’s on branes with boundaries,” *JHEP*, vol. 06, p. 063, 2001. 41
- [28] E. D’Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, and L. Rastelli, “Graviton and gauge boson propagators in AdS(d+1),” *Nucl. Phys.*, vol. B562, pp. 330–352, 1999. 43, 44, 45, 55
- [29] M. Nozaki, T. Numasawa, A. Prudenziati, and T. Takayanagi, “Dynamics of Entanglement Entropy from Einstein Equation,” *Phys. Rev.*, vol. D88, no. 2, p. 026012, 2013. 46
- [30] G. Wong, I. Klich, L. A. Pando Zayas, and D. Vaman, “Entanglement Temperature and Entanglement Entropy of Excited States,” *JHEP*, vol. 12, p. 020, 2013. 46

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [31] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, and L. Rastelli, “AdS / CFT four point functions: How to succeed at  $z$  integrals without really trying,” *Nucl. Phys.*, vol. B562, pp. 395–411, 1999. 48
- [32] M. Taylor and W. Woodhead, “Renormalized entanglement entropy,” *JHEP*, vol. 08, p. 165, 2016. 48
- [33] A. Lewkowycz and J. Maldacena, “Exact results for the entanglement entropy and the energy radiated by a quark,” *JHEP*, vol. 05, p. 025, 2014. 52, 68, 71
- [34] I. R. Klebanov, S. S. Pufu, S. Sachdev, and B. R. Safdi, “Renyi Entropies for Free Field Theories,” *JHEP*, vol. 04, p. 074, 2012.
- [35] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2000.
- [36] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Physics Letters B*, vol. 379, pp. 99–104, Feb. 1996.
- [37] T. Hirata and T. Takayanagi, “AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy,” *J. High Energy Phys.*, no. 2, pp. 042, 24 pp. (electronic), 2007.
- [38] M. Headrick and T. Takayanagi, “Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, no. 10, pp. 106013, 5, 2007.
- [39] S. N. Solodukhin, “Entanglement entropy, conformal invariance and extrinsic geometry,” *Phys. Lett. B*, vol. 665, no. 4, pp. 305–309, 2008.
- [40] H. Casini, M. Huerta, and L. Leitaó, “Entanglement entropy for a dirac fermion in three dimensions: vertex contribution,” 2008.
- [41] H. Casini, “Geometric entropy, area and strong subadditivity,” *Classical Quantum Gravity*, vol. 21, no. 9, pp. 2351–2378, 2004.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [42] M. B. Plenio, J. Eisert, J. Dreißig, and M. Cramer, “Entropy, entanglement, and area: analytical results for harmonic lattice systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, no. 6, pp. 060503, 4, 2005.
- [43] A. Karch and L. Randall, “Open and closed string interpretation of SUSY CFT’s on branes with boundaries,” *J. High Energy Phys.*, no. 6, pp. Paper 63, 20, 2001.