



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

ESTUDIO DE ISLAS MAGNÉTICAS EN STELLARATORS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
MARÍA STEFANY CANCINO ESCOBAR

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JULIO J. MARTINELL BENITO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. JULIO HERRERA VELÁZQUEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX. JUNIO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco enormemente todo el apoyo, comprensión y paciencia de mi tutor el Dr. Julio J. Martinell Benito, quien merece mi admiración y respeto. Gracias por sus enseñanzas, orientarme durante la maestría para que este trabajo fuera posible y reafirmara mi interés por tan bella área de la física. También por el apoyo económico que me brindo para que pudiera asistir a congresos y material para facilitar mi desarrollo en la maestría.

Gracias a los miembros de mi comité tutorial: el Dr. Julio Herrera Velázquez y el Dr. Sergio García Cuevas, quienes me han orientado también en este camino y su apoyo fue parte fundamental. Así mismo agradezco al Dr. César Gutiérrez, a la Dra. Libertad Barrón, al Dr. Mayo Villagrán y a la Dr. Catalina Stern por aceptar ser mis sinodales y darme sus consejos para que este trabajo fuera mejor. A la Dr. Libertad también le agradezco por recibirme como su alumna al principio de este camino y hacerme sentir como en casa.

Quiero agradecer al Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM por haberme aceptado en este programa y darme el espacio para desarrollarme más como científica. Gracias al apoyo económico de CONACyT por la beca de maestría y a la DGAPA a través del proyecto PAPIIT de clave **IN109115** para la realización de esta tesis.

Agradezco a Dios por haberme dado la salud y las fuerzas para seguir adelante, por poner a excelentes personas en mi camino.

Le doy las gracias a mi madre por darme la vida, por su amor, gracias por enseñarme disciplina y organización; a mi padre por todo su amor, por enseñarme empatía, compasión, me heredaste tu corazón de pollo. Adi, gra-

cias por el amor que solo tú mi hermanita me puedes dar, me enseñaste a que puedo relajarme y divertirme también.

De manera muy especial doy las gracias a quienes me amaron como una hija, mi abuelita Lulú (QEPD) quién fue mi pilar y guía, mi abuelito Andrés (QEPD) que me dio tantos consejos y me enseñó el amor por el trabajo. Ustedes me enseñaron a soñar y me impulsaron a volar, nada de esto sería posible sin ustedes.

Gracias a toda mi familia por darme su amor y ánimos cuando lo necesito, a mis tíos Alex, Blanca, Lupita y Paco, a mis amigos por ayudarme a sonreír entre el estrés y los deberes, a Jaze, Omar, José Juan, Tona, Lupis, Sam y muchos más familiares y amigos a los que no alcanzo a mencionar pero ustedes saben quiénes son.

Finalmente le agradezco a Aldo por haber estado, me apoyaste y alentaste a no rendirme.

A todos ustedes, mi mayor agradecimiento y gratitud.

M. Stefany Cancino Escobar

Índice general

1. Introducción	3
2. Coordenadas de flujo	13
2.1. Coordenadas de Boozer	14
3. Campo magnético helicoidal	23
3.1. Campo magnético ideal	23
3.2. Campo magnético perturbado	29
4. Islas magnéticas	33
4.1. Modelo de placa	33
4.2. Modos de desgarre	37
4.2.1. Solución interna	41
4.2.2. Empalme con la solución externa	42
4.3. Ecuación de evolución	43
5. Transporte y balance de torcas	47
5.1. Flujo en ausencia de islas	50
5.2. Flujo en presencia de islas	53
6. Contribución de la corriente de polarización en geometría helicoidal	55
6.1. Solución en el límite ρ_s/w grande	62
6.2. Resultados en el límite MHD	63
6.3. Solución en el límite ρ_s/w pequeño	66
7. Simulación De Transporte ASTRA	81
8. Conclusiones	87

Resumen

Se presenta un estudio de las islas magnéticas que se forman en los aparatos de confinamiento magnético toroidales usados en la investigación de fusión termonuclear, en particular se enfoca en las configuraciones tipo stellarator que son las que no presentan simetría axial. Las islas magnéticas se forman por la reconexión magnética entre dos superficies magnéticas toroidales lo que modifica la topología permitiendo el libre flujo de masa y energía entre esas dos superficies. El trabajo está motivado por las observaciones en el stellarator TJ-II que muestran una correlación entre actividad magnética (que indica la presencia dinámica de islas magnéticas) y la formación y desaparición de barreras de transporte. Se pretende entonces dar una explicación de la causa de este fenómeno basado en estudiar la evolución de las islas en presencia de flujos de plasma paralelos a dichas islas y simular el proceso incluyendo todos los ingredientes relevantes.

Para hacer una descripción adecuada de los campos magnéticos en geometría toroidal se utiliza un sistema de coordenadas apropiado, basado en los flujos magnéticos. Para el caso considerado aquí se utilizan las coordenadas de Boozer, las cuales se describen con detalle. Dado que los stellarators tienen simetría helicoidal se analizan los campos magnéticos con esta simetría pero usando coordenadas locales de tipo cilíndrico, en lugar de las de Boozer, para ser utilizadas en el estudio de la reconexión magnética.

Con estas herramientas se aborda el problema de la formación de islas magnéticas producida por los modos de desgarre que se deben a los efectos resistivos del plasma. Para poder estudiar estos modos se considera al plasma como conductor perfecto, usando la llamada magnetohidrodinámica (MHD) ideal, excepto en una capa resonante en donde la dirección de la perturbación magnética es paralela al campo magnético, en la cual se incluye la conducti-

vidad eléctrica finita. Se describe este método de análisis para encontrar la tasa de crecimiento lineal de la reconexión. La isla magnética así formada evoluciona en su etapa no lineal de acuerdo a la ecuación de Rutherford, que es la que se considera en el resto de los estudios. A continuación se describe el efecto de la isla en el transporte del plasma y las torcas electromagnéticas que se ejercen sobre las islas por el resto de los campos que se mantienen estáticos. Este efecto es de interés aunque no es necesario incluirlo en los análisis subsecuentes.

En el primer estudio se hace una evaluación de cómo se modifica la evolución de la isla en presencia de flujos cizallados para un stellarator. Se sabe que un flujo con cizalla produce la supresión de la turbulencia que es responsable del transporte no colisional en el plasma. Por ello, debe estar presente cuando hay barreras de transporte y debe afectar a su vez a las islas magnéticas. Estos flujos dan lugar a una corriente de polarización que se debe a que la velocidad varía al fluir a lo largo de la cadena de islas. Se calcula entonces el efecto de esta corriente sobre la estabilidad de la isla cuando se incluye la no axisimetría de la configuración magnética. Se encuentra que este efecto es importante solo para cuando el cociente del radio de giro de las partículas sobre el ancho de la isla es pequeño. Por lo tanto no es relevante para altas temperaturas y no es necesario incluirlo en las simulaciones que se hacen.

Finalmente, se presentan los resultados de la simulación numérica del fenómeno observado en TJ-II. Se usa el código de transporte Astra en el que se incluye la presencia de 3 impurezas de carbono para obtener la emisión de radiación que sirve de diagnóstico del proceso observado. Para la formación de la barrera de transporte se usa un modelo de turbulencia basado en modos ballooning resistivos que incorpora la estabilización por flujos cizallados. Se muestra que este modelo reproduce las observaciones de manera razonable.

Capítulo 1

Introducción

Existen dos tipos de reacciones nucleares: la bien conocida fisión y la fusión. El proceso de fusión nuclear ocurre cuando dos átomos ligeros se unen para formar uno más pesado. En ambas reacciones se libera una gran cantidad de energía pero la principal ventaja de la fusión es la de ser considerada una energía limpia al no contribuir al efecto invernadero y que sus productos radioactivos tendrían una vida más corta que los producidos por el proceso de fisión.

Este proceso solo tiene lugar de manera natural en el interior de una estrella, donde las altas temperaturas (alrededor de 15 millones de grados Kelvin, de aquí que a las reacciones de fusión se les denomina termonucleares) provocan que los núcleos de los átomos ligeros puedan superar la fuerza de repulsión eléctrica y fusionarse. Sin embargo, desde varias décadas atrás, muchos investigadores persiguen el desafío de traer el poder de producción de energía de una estrella a la Tierra. Esta investigación se sustenta por la física de los plasmas, gases tan calientes que los electrones están libres del núcleo del átomo formando un ensamble de iones y electrones que pueden conducir corrientes eléctricas y responder a campos electromagnéticos.

Gracias a la naturaleza eléctrica del plasma se puede lograr mantener a las partículas que lo forman confinadas en una cierta región del espacio; mediante la aplicación de campos eléctricos y magnéticos adecuados quedan atrapadas entre complicadas trayectorias más o menos cerradas, importantes para el buen confinamiento y la estabilidad del plasma. Este mecanismo es conocido como confinamiento magnético.

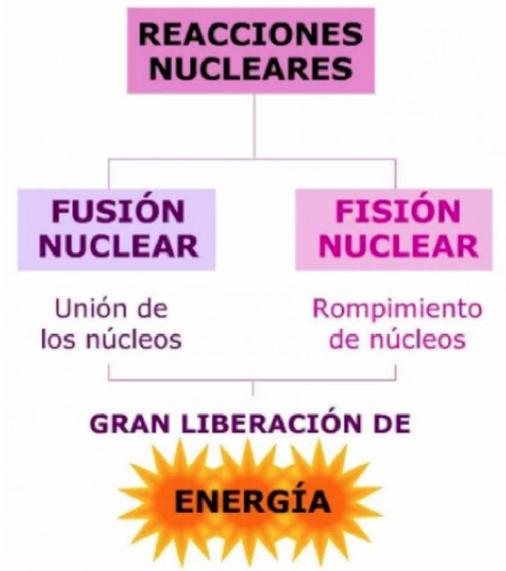


Figura 1.1: Reacciones nucleares que liberan energía.



Figura 1.2: Ejemplos de donde podemos encontrar plasma son en las estrellas, como el sol, en rayos y flamas.

Los aparatos de fusión nuclear más destacados que usan este tipo de confinamiento son los tokamaks y los stellarators. El campo magnético en ambos tiene una geometría helicoidal (Figura 1.3). En el tokamak esta geometría se consigue con una corriente toroidal en el plasma, lo que hace que haya simetría axial (alrededor del eje del toro). En el stellarator, la helicidad la producen las mismas bobinas externas por lo que no se tiene axisimetría.

Cada línea de campo magnético está contenida en una superficie toroidal a la que se llama superficie magnética. Una consecuencia de la geometría helicoidal es que estas líneas de campo pueden cerrarse sobre sí mismas después de un número finito de vueltas o nunca cerrarse, cubriendo la superficie totalmente. Las primeras son llamadas superficies racionales.

En una superficie racional las líneas de campo magnético se pueden romper y reconectar dando lugar a islas magnéticas. Las islas magnéticas conectan a las partículas del interior del plasma con el exterior, esto provoca pérdida de confinamiento y es una de las principales razones por las que se estudia el comportamiento de las islas.

Alrededor de las regiones de reconexión el campo magnético cambia de dirección cuando se pasa de una superficie magnética a otra al variar la posición radial, es decir, tiene cizallamiento. Cuando su dirección coincide con la dirección de la perturbación, lo cual ocurre en una superficie racional, se pueden excitar los modos de desgarre. Esto hace que se desarrolle una isla cuyo ancho depende de la cantidad de cizalla, cuyo análisis se hará en el capítulo 4.

Durante el confinamiento del plasma se transportan partículas, momento y calor. Según sea la causa del transporte, puede ser descrito por dos principales modelos: el transporte clásico, que es debido a colisiones de partículas, y el transporte anómalo, que es generado por turbulencia en el plasma. Esta turbulencia está impulsada por micro-inestabilidades y produce fluctuaciones en los campos. Para el caso en el que la geometría es toroidal, el transporte clásico debe tomar en cuenta efectos por el doblamiento del sistema y se le denomina transporte neoclásico. Este tipo de transporte es diferente para

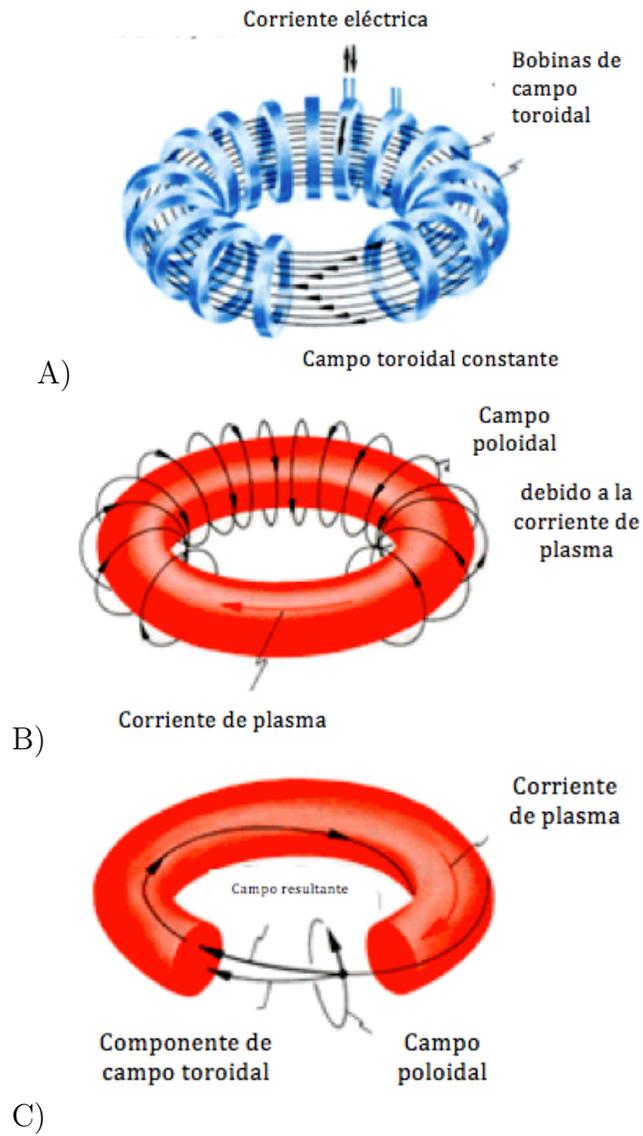


Figura 1.3: A) Campo magnético toroidal, B) Campo magnético poloidal, C) Campo magnético helicoidal

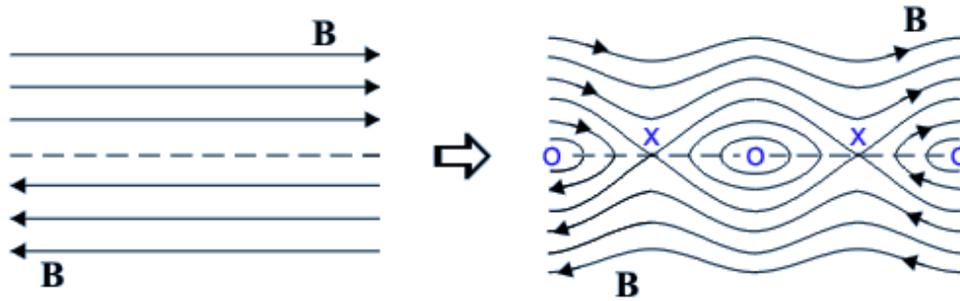


Figura 1.4: Las líneas de campo magnético se reconectan formando islas magnéticas.

electrones e iones, es decir, es no ambipolar. Mientras que el transporte anómalo si es ambipolar y es más rápido que el neoclásico.

Cuando el transporte radial de iones o electrones disminuye en una región se le conoce como barrera de transporte. Por lo regular, las barreras de transporte no afectan al transporte neoclásico. Los gradientes de velocidad en el plasma provocan una disminución en el nivel de turbulencia lo que produce un menor transporte turbulento. Por otro lado, cuando hay una isla magnética, la velocidad del flujo de plasma paralelo a la isla varía al recorrer el contorno de la isla por el efecto Venturi. Esto produce una corriente de polarización que también influye en el aumento del ancho de la isla.

El stellarator heliac TJ-II que motiva el presente trabajo se compone de una bobina circular y otra helicoidal en el centro y un conjunto de bobinas externas que determinan las superficies magnéticas aún cuando no se ha iniciado la descarga, consistentes en 5 bobinas de campo magnético poloidal para determinar la posición horizontal del plasma y 32 bobinas de campo magnético toroidal a distintas alturas.

En las superficies racionales de este stellarator se ha observado, además de la formación de islas magnéticas, que también se pueden formar barreras de transporte. Por esta razón se piensa que puede existir una relación entre el crecimiento de una isla magnética y el rompimiento de una barrera de transporte. Vemos en la Figura [1.6](#) en las señales bolométricas del centro y borde del plasma que se tiene un comportamiento periódico de dientes de

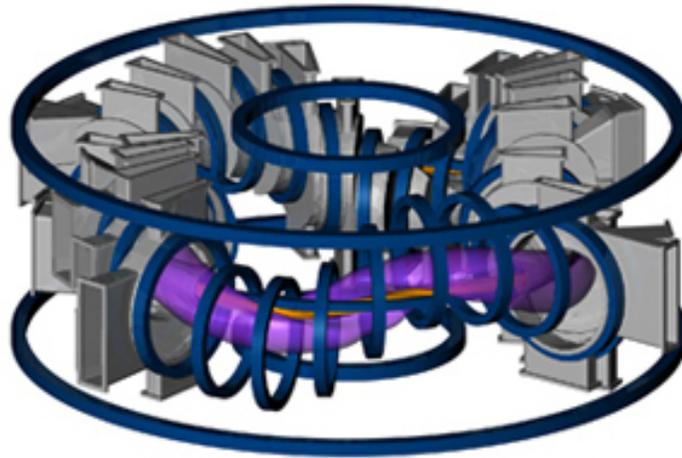


Figura 1.5: Modelo del stellarator TJ-II

sierra, cerca del centro la emisión sube en rampa y decae luego de forma abrupta; al alcanzar el radio al que se encuentra la superficie racional el comportamiento se invierte, observándose que primero decae y luego sube abruptamente. El mismo comportamiento se observa en H_α que mide las partículas que llegan al borde del plasma. Este comportamiento es explicado con la presencia de una barrera de transporte en la superficie racional $8/5$ que se forma y se destruye cíclicamente, porque las caídas dentro de la posición $r = r_s$ de la superficie racional corresponden a subidas fuera de r_s . Cuando una perturbación destruye la barrera se deteriora el confinamiento del plasma en esa zona liberando las partículas que estaban atrapadas por la barrera; al mismo tiempo el aumento en H_α indica que hay partículas que se disparan a las paredes y coincide con el aumento de actividad MHD. Los paneles inferiores muestran los espectros de frecuencia de la señal magnética y de la emisión bolométrica cerca del borde y cerca del centro respectivamente.

Una representación esquemática se muestra en la figura [1.7](#). En la fase A se tiene una isla de ancho grande y una barrera de transporte está presente pero ocurre una inestabilidad al pasar a la fase B destruyendo la barrera, esto provoca que el ancho de la isla se reduzca y rote con una frecuencia de rotación mayor a la inicial. Durante la fase C la isla comienza a recuperar su frecuencia de rotación inicial y su ancho comienza a crecer simultáneamente

hasta que se satura y se crea una barrera de transporte haciendo que el ciclo vuelva a comenzar.

Basado en las observaciones proponemos un modelo en el que la torca viscosa crece hasta dominar a la torca electromagnética, como se describirá en el capítulo 5, provocando una bifurcación que lleva a un equilibrio con una velocidad de rotación más grande. La barrera de transporte que se tenía antes desaparece ahora al aumentar la rotación y la densidad disminuye cerca del centro. Además el flujo alrededor de una isla magnética crea una corriente de polarización por el efecto tobera; esta afecta la estabilidad de la isla a través de su ecuación de evolución en el término Δ_{pol} . Para calcular este término se necesita conocer la parte oscilatoria de la corriente paralela, definida como la corriente de polarización. El análisis usado es similar al hecho en [2] pero tomando ahora en cuenta una geometría no-axisimétrica con el uso de coordenadas de Boozer.

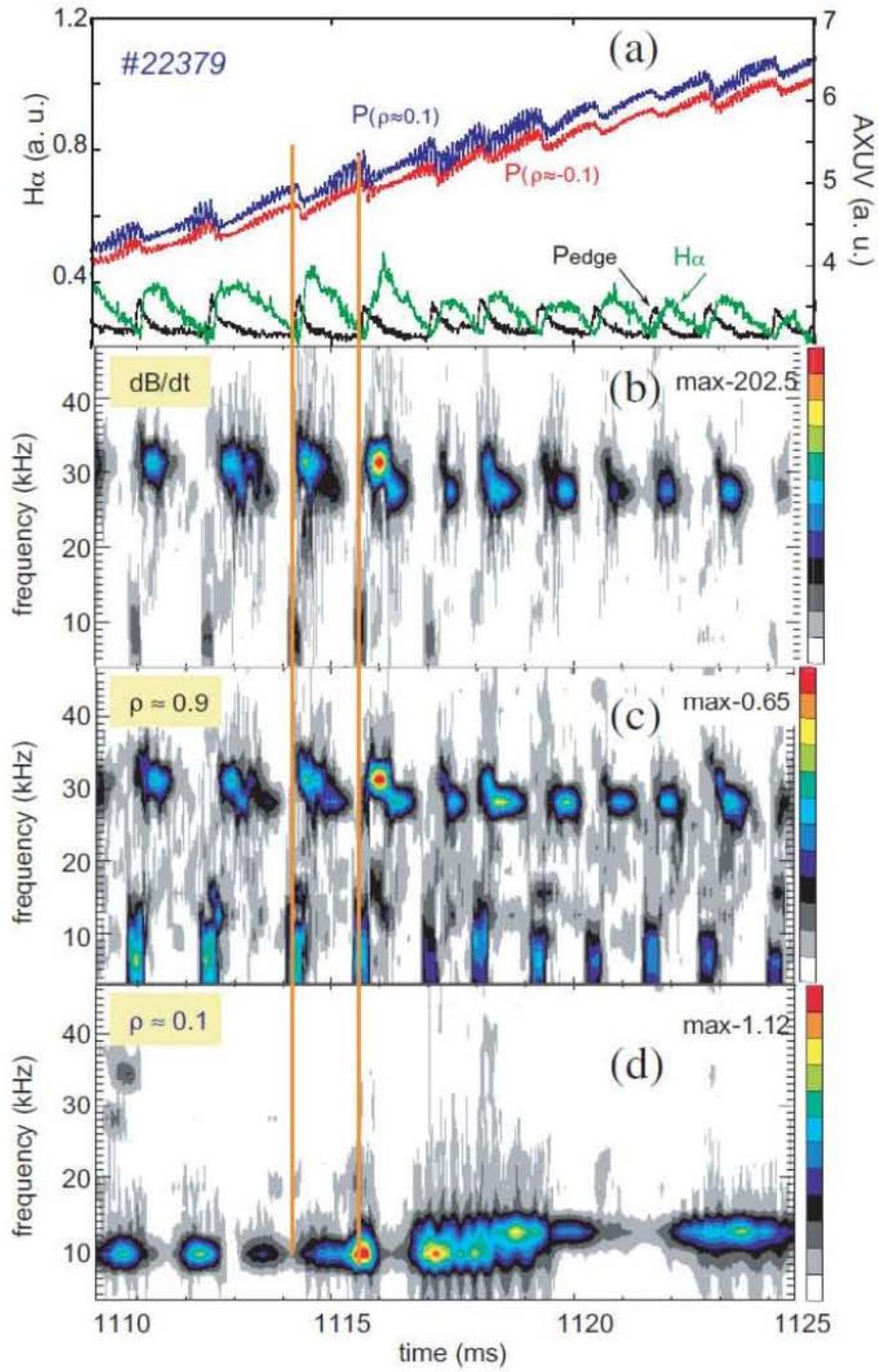


Figura 1.6: Observaciones experimentales en TJ-II

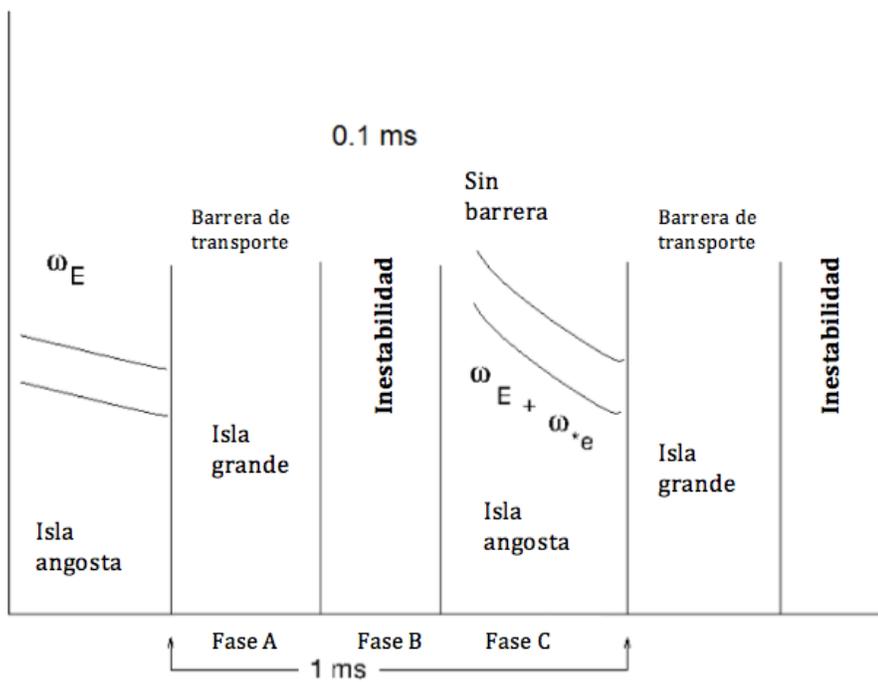


Figura 1.7: Representación esquemática de las observaciones en TJ-II

Capítulo 2

Coordenadas de flujo

Las superficies magnéticas son superficies trazadas por las líneas de campo magnético, se encuentran anidadas dentro del aparato de confinamiento. También son llamadas superficies de flujo porque en ellas el flujo magnético poloidal y toroidal es constante. Cada superficie magnética tiene asociado un factor de seguridad q , igual a la tasa de cambio del flujo toroidal entre el flujo poloidal. Cuando este factor es racional hablamos de una superficie magnética racional, $q = m/n$ con m y n enteros. Para el caso de stellarator se usa la notación de transformada rotacional ι , igual al inverso de el factor de seguridad.

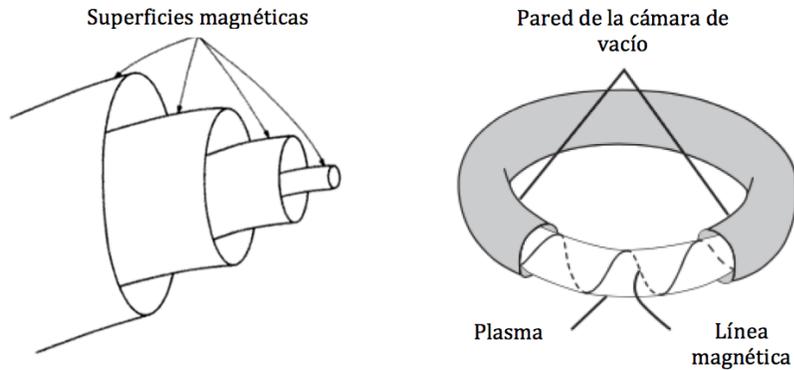


Figura 2.1: Izquierda: Superficies magnéticas anidadas. Derecha: Líneas magnéticas enrollándose sobre superficies magnéticas.

Las ecuaciones para describir la física en plasmas llegan en ocasiones a tener formas complicadas y dificultar la comprensión de la información que contienen. Una adecuada transformación de coordenadas puede facilitar el entendimiento de las ecuaciones y por lo tanto de la física, en particular facilita el entendimiento del transporte neoclásico en stellerator. Al conjunto de coordenadas resultante de estas transformaciones se les denomina coordenadas de flujo, pues están dadas en términos de funciones de flujo magnético.

Las coordenadas de flujo permiten escribir de forma más simple al campo magnético como vector con una representación covariante y otra contravariante. Existen diversas transformaciones posibles pero frecuentemente son las coordenadas de Boozer las más usadas.

2.1. Coordenadas de Boozer

Establecemos una transformación de coordenadas r , θ y ϕ al conjunto de las coordenadas de flujo deseadas ψ , χ y ζ (Fig. 2.2). Estas representan respectivamente a las coordenadas radial, poloidal y toroidal. En este capítulo usaremos la notación χ y ζ para que no haya confusión con las coordenadas esféricas; en el capítulo 6 las denotaremos con θ y ϕ . Dado que ψ es la coordenada perpendicular a la superficie magnética, y por lo tanto a \vec{B} , se debe cumplir que

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

Para estas coordenadas se propone el conjunto de vectores base independientes:

$$\nabla \psi \times \nabla \chi \quad \nabla \zeta \times \nabla \psi \quad \nabla \chi \times \nabla \zeta \quad (2.2)$$

de manera que en términos de estos vectores el campo magnético se puede expresar de la siguiente manera,

$$\vec{B}(\vec{r}) = f_1(\nabla \psi \times \nabla \chi) + f_2(\nabla \zeta \times \nabla \psi) + f_3(\nabla \chi \times \nabla \zeta) \quad (2.3)$$

donde $f_i = f_i(\psi, \chi, \zeta)$, esta es una representación contravariante del campo B

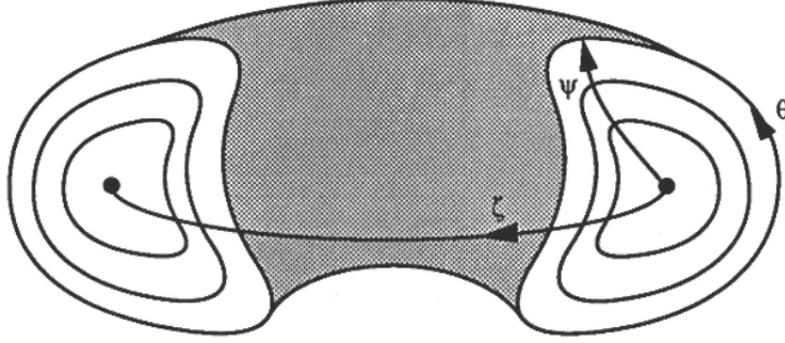


Figura 2.2: Coordenadas de flujo

De las condiciones en (2.1) sabemos que $f_3 = 0$ y

$$\nabla \cdot \vec{B} = [(\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\zeta] \left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_2}{\partial \chi} \right) = 0 \quad (2.4)$$

El término entre corchetes es equivalente al jacobiano de la transformación, $d\vec{r} = Jd\psi d\chi d\zeta$ y $J' \equiv 1/J = \nabla\psi \times \nabla\chi \cdot \nabla\zeta$. Las soluciones de f_1 y f_2 tienen la forma

$$f_1(\psi, \chi, \zeta) = \bar{f}_1(\psi) + \sum_1^{\infty} \bar{f}_{1n}(\psi)\chi^n + \bar{f}(\psi)\zeta + \frac{\partial \tilde{f}(\psi, \chi, \zeta)}{\partial \chi} \quad (2.5)$$

$$f_2(\psi, \chi, \zeta) = \bar{f}_2(\psi) + \sum_1^{\infty} \bar{f}_{2n}(\psi)\zeta^n - \bar{f}(\psi)\chi + \frac{\partial \tilde{f}(\psi, \chi, \zeta)}{\partial \zeta} \quad (2.6)$$

Por definición se debe tener $\langle \tilde{f} \rangle = 0$ sobre un periodo en χ y ζ . Entonces $\bar{f}_{1n} = \bar{f}_{2n} = \bar{f} = 0$. Introduciendo estas expresiones en el campo magnético obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \left(\bar{f}_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \chi} \right) (\nabla\psi \times \nabla\chi) + \left(\bar{f}_2 - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} \right) (\nabla\zeta \times \nabla\psi) \\ &= \bar{f}_1 \nabla\psi \times \nabla\chi + \bar{f}_2 \nabla\zeta \times \nabla\psi + \nabla\psi \times \nabla \tilde{f} \end{aligned} \quad (2.7)$$

De igual forma se debe cumplir para la densidad de corriente la condicion

de neutralidad del plasma y la conservación de carga, $\vec{J} \cdot \nabla \psi = 0$ y $\nabla \cdot \vec{J} = 0$,

$$\mu_0 \vec{J}(\vec{r}) = \bar{h}_1 \nabla \psi \times \nabla \chi + \bar{h}_2 \nabla \zeta \times \nabla \psi + \nabla \psi \times \nabla \tilde{h} \quad (2.8)$$

Si escribimos

$$\bar{h}_1 = \frac{d\bar{g}_1}{d\psi} \quad y \quad \bar{h}_2 = \frac{d\bar{g}_2}{d\psi} \quad (2.9)$$

obtenemos una expresión contravariante de \vec{J}

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \left[\bar{g}_1 \nabla \chi - \bar{g}_2 \nabla \zeta - \tilde{h} \nabla \psi \right] \quad (2.10)$$

Al comparar esta expresión con la ley de Ampere $\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B}$ obtenemos la representación covariante de \vec{B}

$$\vec{B} = \bar{g}_1 \nabla \chi - \bar{g}_2 \nabla \zeta - \tilde{h} \nabla \psi + \nabla \tilde{g}(\psi, \chi, \zeta) \quad (2.11)$$

Para eliminar los términos \tilde{f} y \tilde{g} definimos un nuevo conjunto de coordenadas

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi \\ \chi' &= \chi - \tilde{k}_\chi(\psi, \chi, \zeta) \\ \zeta' &= \zeta - \tilde{k}_\zeta(\psi, \chi, \zeta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

y sustituimos en las expresiones contravariante y covariante de \vec{B} . Entonces, en la ecuación (2.7)

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \bar{f}_1 \nabla \psi' \times \nabla (\chi' + \tilde{k}_\chi) + \bar{f}_2 \nabla (\zeta' + \tilde{k}_\zeta) \times \nabla \psi' + \nabla \psi' \times \nabla \tilde{f} \\ &= \bar{f}_1 \nabla \psi' \times \nabla \chi' + \bar{f}_2 \nabla \zeta' \times \nabla \psi' + \nabla \psi' \times \nabla (\tilde{f} + \bar{f}_1 \tilde{k}_\chi - \bar{f}_2 \tilde{k}_\zeta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

y para la ecuación (2.7)

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \bar{g}_1 \nabla (\chi' + \tilde{k}_\chi) - \bar{g}_2 \nabla (\zeta' + \tilde{k}_\zeta) - \tilde{h} \nabla \psi' + \nabla \tilde{g} \\ &= \bar{g}_1 \nabla \chi' - \bar{g}_2 \nabla \zeta' + \left(\frac{d\bar{g}_1}{d\psi} \tilde{k}_\chi - \frac{d\bar{g}_2}{d\psi} \tilde{k}_\zeta - \tilde{h} \right) \nabla \psi' \\ &\quad + \nabla (\tilde{g} + \bar{g}_1 \tilde{k}_\chi - \bar{g}_2 \tilde{k}_\zeta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si elegimos que los últimos términos en paréntesis de cada ecuación anterior sean cero, $\tilde{f} + \bar{f}_1 \tilde{k}_\chi - \bar{f}_2 \tilde{k}_\zeta = 0$ y $\tilde{g} + \bar{g}_1 \tilde{k}_\chi - \bar{g}_2 \tilde{k}_\zeta = 0$, entonces \tilde{k}_χ y \tilde{k}_ζ deben ser

$$\begin{aligned}\tilde{k}_\chi &= - \left(\frac{\bar{g}_2}{\bar{f}_1 \bar{g}_2 - \bar{f}_2 \bar{g}_1} \right) \tilde{f} + \left(\frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1 \bar{g}_2 - \bar{f}_2 \bar{g}_1} \right) \tilde{g} \\ \tilde{k}_\zeta &= - \left(\frac{\bar{g}_1}{\bar{f}_1 \bar{g}_2 - \bar{f}_2 \bar{g}_1} \right) \tilde{f} + \left(\frac{\bar{f}_1}{\bar{f}_1 \bar{g}_2 - \bar{f}_2 \bar{g}_1} \right) \tilde{g}\end{aligned}\quad (2.15)$$

Con esto quedan determinadas las expresiones para \tilde{k}_χ y \tilde{k}_ζ en términos de \tilde{f} y \tilde{g} y podemos regresar a la notación de (ψ, χ, ζ) . Las formas contravariante y covariante del campo magnético resultantes son, respectivamente

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\psi \times \nabla(\bar{f}_1\chi - \bar{f}_2\zeta) \quad (2.16)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \bar{g}_1\nabla\chi - \bar{g}_2\nabla\zeta + \tilde{k}\nabla\psi \quad (2.17)$$

$$\tilde{k}(\psi, \chi, \zeta) = \frac{d\bar{g}_1}{d\psi} \tilde{k}_\chi - \frac{d\bar{g}_2}{d\psi} \tilde{k}_\zeta - \tilde{h} \quad (2.18)$$

Las funciones f_1 , f_2 , g_1 y g_2 son funciones sólo de ψ cuyo sentido físico se obtiene al calcular los flujos y corrientes poloidales y toroidales en términos de las f_i y g_i respectivamente. La Figura 2.3 muestra las superficies diferenciales en direcciones toroidal y poloidal. Estas áreas diferenciales están dadas por

$$\begin{aligned}d\vec{A}_p &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi} d\zeta d\psi \\ d\vec{A}_t &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\chi} d\chi d\psi\end{aligned}\quad (2.19)$$

En coordenadas cartesianas $x(\psi, \chi, \zeta)$, $y(\psi, \chi, \zeta)$, $z(\psi, \chi, \zeta)$, el vector de posición es

$$\vec{r} = x(\psi, \chi, \zeta)\hat{e}_x + y(\psi, \chi, \zeta)\hat{e}_y + z(\psi, \chi, \zeta)\hat{e}_z \quad (2.20)$$

con los vectores unitarios:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x &= \nabla x = x_\psi \nabla\psi + x_\chi \nabla\chi + x_\zeta \nabla\zeta \\ \hat{e}_y &= \nabla y = y_\psi \nabla\psi + y_\chi \nabla\chi + y_\zeta \nabla\zeta \\ \hat{e}_z &= \nabla z = z_\psi \nabla\psi + z_\chi \nabla\chi + z_\zeta \nabla\zeta\end{aligned}\quad (2.21)$$

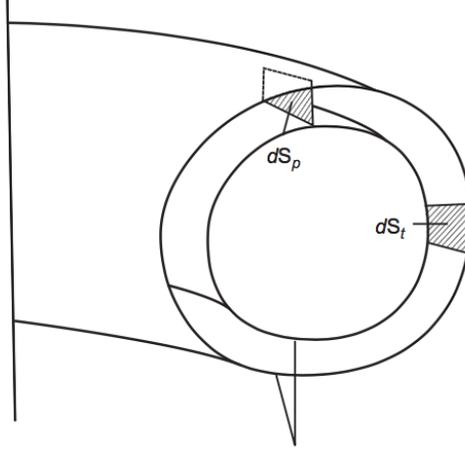


Figura 2.3: Diferenciales de áreas de flujo y corriente poloidales dS_p y toroidales dS_t entre dos superficies de flujo.

Hemos usado la notación $a_b = \frac{\partial a}{\partial b}$. Con esto podemos calcular los productos vectoriales de la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} &= [x_\chi (y_\zeta z_\psi - z_\zeta y_\psi) + y_\chi (x_\psi z_\zeta - z_\psi x_\zeta) \\ &\quad + z_\chi (x_\zeta y_\psi - y_\zeta x_\psi)] \nabla \chi \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} &= [x_\psi (y_\chi z_\zeta - z_\chi y_\zeta) + x_\chi (z_\psi y_\zeta - y_\zeta x_\psi - y_\psi z_\zeta) \\ &\quad + x_\zeta (y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi)] \nabla \zeta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pero el jacobiano de la transformación de coordenadas está dado por

$$J = \begin{vmatrix} x_\psi & x_\chi & x_\zeta \\ y_\psi & y_\chi & y_\zeta \\ z_\psi & z_\chi & z_\zeta \end{vmatrix} = \begin{aligned} &x_\psi (y_\chi z_\zeta - z_\chi y_\zeta) \\ &-x_\chi (y_\psi z_\zeta - z_\psi y_\zeta) \\ &+x_\zeta (y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} &= J \nabla \chi \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} &= J \nabla \zeta \end{aligned} \quad (2.24)$$

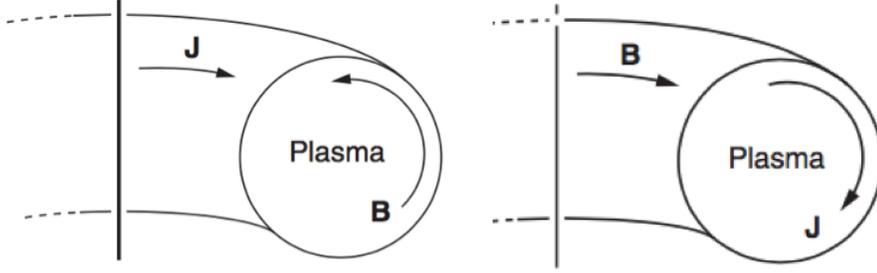


Figura 2.4: Campos magnéticos en únicamente dirección poloidal y toroidal respectivamente.

y las superficies diferenciales son

$$\begin{aligned} d\vec{A}_p &= (J\nabla\chi)d\zeta d\psi \\ d\vec{A}_t &= (J\nabla\zeta)d\chi d\psi \end{aligned} \quad (2.25)$$

Con esto podemos calcular el flujo poloidal ($\psi = \psi_p/2\pi$) y toroidal.

$$\begin{aligned} \psi_p &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A}_p = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi (\vec{B} \cdot \nabla\chi) J d\zeta d\psi \\ \psi_t &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A}_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi (\vec{B} \cdot \nabla\zeta) J d\chi d\psi \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para el flujo poloidal usamos la expresión contravariante de \vec{B}

$$\vec{B} \cdot \nabla\chi = \bar{f}_2/J \quad (2.27)$$

Entonces el flujo poloidal

$$\psi_p = 2\pi \int_0^\psi \bar{f}_2 d\psi \quad (2.28)$$

De aquí que $\bar{f}_2 = 1$. De la misma manera obtenemos el flujo toroidal,

$$\vec{B} \cdot \nabla\zeta = \bar{f}_1/J \quad (2.29)$$

$$\psi_t = 2\pi \int_0^\psi \bar{f}_1 d\psi \quad (2.30)$$

Por lo tanto $\bar{f}_1 = \frac{d\psi_t(\psi)}{d\psi_p} \equiv q(\psi)$, coincide con la definición del factor de seguridad. Ahora usamos las expresiones covariante y contravariante de \vec{J} para calcular las corrientes toroidales y poloidales netas definidas como:

$$\begin{aligned}\mu_0 I_t &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}_t = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\psi (\vec{J} \cdot \nabla \zeta) J d\chi d\psi \\ \mu_0 I_p &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}_p = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\psi (\vec{J} \cdot \nabla \chi) J d\zeta d\psi\end{aligned}\tag{2.31}$$

y se reducen a

$$\mu_0 I_t = 2\pi \int_0^\psi \bar{h}_1 d\psi\tag{2.32}$$

$$\mu_0 I_p = 2\pi \int_0^\psi \bar{h}_2 d\psi\tag{2.33}$$

Definimos las corrientes toroidales y poloidales como $i_t = \mu_0 I_t / 2\pi$ y $i_p = \mu_0 I_p / 2\pi$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{h}_1 &= \frac{di_t}{d\psi} \\ \bar{h}_2 &= \frac{di_p}{d\psi}\end{aligned}\tag{2.34}$$

y combinado con la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= i_t + i_{t0} \\ \bar{g}_2 &= i_p + i_{p0}\end{aligned}\tag{2.35}$$

donde i_{t0} e i_{p0} son constantes de integración. El valor de i_{t0} debe ser cero pues cuando no hay corriente de plasma toroidal, $i_t = 0$ el campo magnético en dirección poloidal es cero, de la ecuación (2.11) $\bar{g}_1 = 0$. Mientras que cuando no hay corriente poloidal, $i_p = 0$, sí existe campo magnético en dirección toroidal debido a las bobinas, i_{coil} , entonces $\bar{g}_2 = i_p + i_{coil}$. Finalmente el campo magnético en coordenadas de Boozer es

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\psi \times \nabla(q\chi - \zeta)\tag{2.36}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i_t \nabla\chi - i_p \nabla\zeta + \tilde{k} \nabla\psi\tag{2.37}$$

Una característica importante de las coordenadas de Boozer es que podemos ver las líneas de campo magnéticas como líneas rectas pues son representadas como la intersección de dos superficies de flujo constantes, pues se debe satisfacer de la versión contravariante $\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\alpha$, con $\alpha = q\chi - \zeta$, y $\vec{B} \cdot \nabla\psi = \vec{B} \cdot \nabla\alpha = 0$; solo la intersección permite que las líneas de campo estén al mismo tiempo en ambas superficies y están descritas por $\zeta = q\chi - \alpha$ (ecuación para una línea recta).

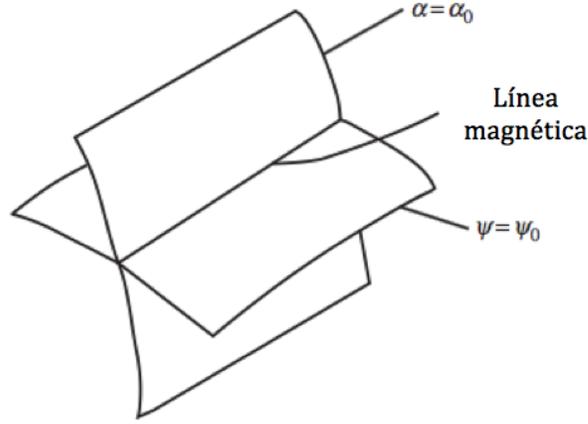


Figura 2.5: La línea magnética corresponde a la intersección entre los planos de la superficie ψ constante y α constante.

Las coordenadas de Boozer proporcionan también una expresión útil para el Jacobiano como función de la magnitud del campo magnético y de la función de flujo al hacer el producto escalar entre las expresiones contravariante y covariante de \vec{B}

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = (\nabla\psi \times q\nabla\chi - \nabla\psi \times \nabla\zeta) \cdot (i_t\nabla\chi - i_p\nabla\zeta + \tilde{k}\nabla\psi) \quad (2.38)$$

$$\frac{B^2}{(i_t - qi_p)} = \frac{1}{J} = \nabla\psi \times \nabla\chi \cdot \nabla\zeta \quad (2.39)$$

Capítulo 3

Campo magnético helicoidal

Como se vio en la sección anterior, la representación más conveniente en el análisis del transporte de partículas en un stellarator es la obtenida a partir de las coordenadas de Boozer.

Para facilitar la descripción de la reconexión magnética es conveniente usar un sistema de coordenadas simplificado que es válido localmente. Para el caso de un campo magnético helicoidal usamos coordenadas cilíndricas, aproximando al toro por un cilindro cuando $a/R \ll 1$.

Analizamos primero el campo magnético de geometría helicoidal sin presencia de islas para después añadir un término de perturbación.

3.1. Campo magnético ideal

Un campo magnético con simetría helicoidal expresado en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , está descrito por las variables r y

$$\chi = \theta - \alpha z, \tag{3.1}$$

con $\alpha = \text{constante}$ para una superficie magnética dada.

Además, el campo magnético en vacío satisface

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{B} = \nabla \varphi \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.4)$$

El potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace en estas coordenadas es

$$\varphi = B_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(n\alpha r) \text{sen } n\chi \quad (3.5)$$

donde B_0 es un campo magnético homogéneo a lo largo del eje z , b_n es la amplitud del campo producido por el n -ésimo conductor helicoidal y I_n es la función modificada de Bessel.

Por otro lado, sabemos que el campo magnético puede obtenerse a partir del potencial vectorial A , $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definimos la variable Ψ como

$$\Psi = \alpha r A_\theta + A_z \quad (3.7)$$

Necesitamos entonces conocer las componentes de \vec{A} . Si comparamos cada entrada de $\nabla \varphi = \nabla \times \vec{A}$ y suponemos $A_z = 0$ obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\partial A_r}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De la expresión del potencial escalar (3.5), hacemos el cálculo de las derivadas e integrales correspondientes para las relaciones (3.8) obteniendo así

las expresiones de cada componente de A

$$A_r = -\frac{1}{\alpha^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I(n\alpha r) \text{sen } n\chi, \quad (3.9)$$

$$A_\theta = \frac{B_0 r}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I'_n(n\alpha r) \cos n\chi, \quad (3.10)$$

$$A_z = 0. \quad (3.11)$$

De aquí notamos que $\partial A_r / \partial r = -\alpha \partial A_r / \partial \theta$. Usando esto junto con las relaciones en (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \alpha r B_z - B_\theta \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} &= r B_r \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente la ecuación para la superficie magnética $\Psi = \text{constante}$ es

$$\Psi(r, \chi) = \frac{\alpha r^2}{2} B_0 - r \sum_{n=1}^{\infty} b_n I'_n(n\alpha r) \cos n\chi = \text{constante} \quad (3.13)$$

El campo magnético producido por n conductores helicoidales para $r \simeq 0$ se puede aproximar por el n -ésimo armónico, pues a órdenes más altos las contribuciones son casi nulas. Entonces si escribimos las ecuaciones para un solo armónico, el potencial escalar y la superficie magnética se reducen a

$$\varphi = B_0 z + \frac{b}{\alpha} I_n(n\alpha r) \text{sen } n\chi \quad (3.14)$$

$$\Psi = \frac{B_0}{2\alpha} \left\{ (\alpha r)^2 - \frac{2b}{B_0} \alpha r I'_n(n\alpha r) \cos n\chi \right\} = \text{constante} \quad (3.15)$$

Consideramos secciones transversales de la superficie magnética cortadas por el plano $z = 0$, esto implica $\chi = \theta$. Por relaciones de funciones modificadas de Bessel sabemos

$$I'_n(x) = \frac{1}{2(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en (3.15), el corte transversal de las superficies magnéticas para un campo producido por n pares de conductores helicoidales

$$(\alpha r)^2 - \frac{b}{B_0} \frac{(\alpha r)^n}{(n-1)!} \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \cos n\theta = \text{constante} \quad (3.17)$$

Esta relación nos permite ver la forma de las superficies magnéticas que tendrían los stellarators. Por ejemplo, para stellarators con $n = 1$ se tendrá

$$r^2 - \frac{b}{B_0} \frac{r}{\alpha} \cos \theta = \text{constante} \quad (3.18)$$

y si definimos $C = b/B_0$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, podemos reescribirla como

$$\left(x - \frac{C}{2\alpha}\right)^2 + y^2 - \frac{C^2}{4\alpha^2} = \text{constante} \quad (3.19)$$

Entonces las superficies magnéticas describen círculos fuera del centro para $b/B_0 \ll 1$.

Para el caso de $n = 2$

$$r^2 \left(1 - \frac{b}{B_0} \cos 2\theta\right) = \text{constante} \quad (3.20)$$

se tienen dos tipos de superficies: elíptica cuando $b/B_0 < 1$ e hiperbólica cuando $b/B_0 > 1$. La que se observa en los stellarators con 2 conductores es la elíptica.

Para obtener los puntos singulares de la ecuación (3.15) calculamos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} = 0 \quad (3.22)$$

Hacemos el cambio de variable $X = n\alpha r$ y usamos el hecho de que las funciones de Bessel satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 I_n}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{dI_n}{dX} - \left(1 + \frac{n^2}{X^2}\right) I_n = 0 \quad (3.23)$$

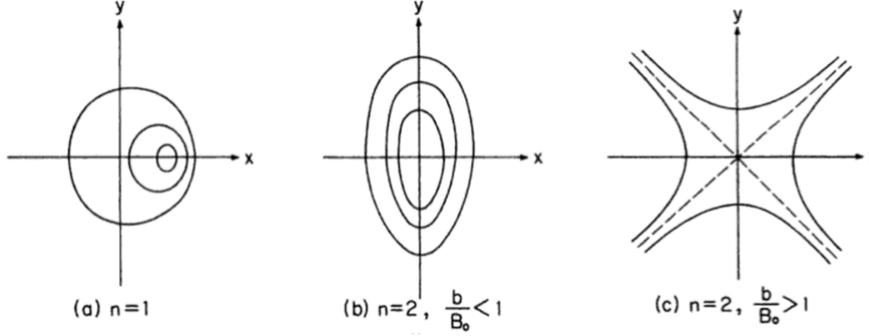


Figura 3.1: Vista transversal de las superficies magnéticas.

obteniendo así

$$\alpha r \left[1 - \frac{nb}{B_0} \left(1 + \frac{1}{(\alpha r)^2} \right) I_n(n\alpha r) \cos n\chi \right] = 0 \quad (3.24)$$

$$\text{sen } n\chi = 0 \quad (3.25)$$

De estos resultados sabemos que para $n > 1$ tendremos un punto singular del tipo elíptico en el origen de las coordenadas y el eje magnético coincidirá con el eje z , además de que el número de puntos singulares (además del origen) será igual a n y la distancia del origen a un punto singular en r_s será

$$\frac{b}{B_0} = \frac{(\alpha r_s)^2}{n(1 + (\alpha r_s)^2 I_n(n\alpha r_s))} \quad (3.26)$$

Las siguientes relaciones nos permiten encontrar una expresión para la transformada rotacional

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -B_0 r \frac{d\theta}{dz} \quad (3.27)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \alpha \omega_0 \quad (3.28)$$

con el promedio de la superficie magnética definido como $\bar{\Psi} = -\frac{1}{B_0} \overline{\hat{B}_r B_\theta}$. Hemos usado

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\alpha \\ \hat{f} &= \int_0^\alpha \tilde{f} d\alpha \end{aligned} \quad (3.29)$$

para cualquier función periódica $f = f(\alpha, t) = \bar{f} + \tilde{f}$, denotando \bar{f} como la parte constante de f y \tilde{f} como su parte variable. Entonces se tendrá para Ψ ,

$$\Psi = -\frac{1}{4B_0\alpha} \sum_n b_n^2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} I_n^2(n\rho) \quad (3.30)$$

con $\rho = \alpha r$. La transformada rotacional por periodo ω_0 es

$$\omega_0 = \sum_n \frac{b_n^2}{4B_0^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2 I_n^2(n\rho) \quad (3.31)$$

y expandiendo $I_n(n\rho)$ para obtener ω_0 en la vecindad del eje magnético

$$\omega_0 = \left(\frac{b_n}{B_0} \right)^2 \left(\frac{2}{n!} \left(\frac{n}{2} \right)^{n+1} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \rho^{2n-4} + \frac{n}{2} \rho^{2n-2} + \dots \right] \quad (3.32)$$

Observamos que para $r = 0$ la transformada rotacional es distinta de cero para $n = 1$ y $n = 2$, mientras que para n mayores es igual a cero.

Queremos ahora analizar el comportamiento de las líneas de campo, para ello construimos su Hamiltoniano. Usando las ecuaciones para las líneas de fuerza

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z} \quad \text{y} \quad \frac{rd\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{B_z} \quad (3.33)$$

Como $\vec{B} = \nabla\varphi$, usamos la ecuación (3.5) para obtener las componentes del campo magnético y de las ecuaciones (3.33) obtenemos

$$\begin{aligned} B_z \frac{dr}{dz} &= bn I_n'(n\alpha r) \text{sen } n\chi \\ B_z \frac{d\chi}{dz} &= bn \left(\alpha + \frac{1}{\alpha r^2} \right) I_n(n\alpha r) \cos n\chi - \alpha B_0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Introduciendo en

$$\frac{dH}{dz} = \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dz} + \frac{\partial H}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dz} = 0 \quad (3.35)$$

obtenemos

$$H = \frac{B_0}{2} \alpha^2 r^2 - b\alpha r I_n'(n\alpha r) \cos n\chi \quad (3.36)$$

Si hacemos ahora el cambio de variable $\rho = \frac{1}{2}\alpha r^2$, siendo ahora (ρ, χ) las variables canónicas, y usamos la componente $B_z = dz/dt$ para expresar una

variable de tiempo, podemos reescribir la ecuación (3.34) como un sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \chi} \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho}\end{aligned}\quad (3.37)$$

y en término de las variables de acción-ángulo (J, Θ) tienen la forma

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= 0 \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \alpha\omega\end{aligned}\quad (3.38)$$

donde ω es la frecuencia.

3.2. Campo magnético perturbado

Dada una perturbación pequeña no-estacionaria, el potencial magnético tendrá una parte no perturbada φ_0 y otra parte φ_1 que incluye el parámetro de la perturbación ϵ

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon\varphi_1 \quad (3.39)$$

Esta perturbación se debe principalmente al doblamiento de las líneas de campo magnético en el toro. La forma explícita del potencial para el campo magnético doblado en un toro con $N \geq 1$ correcciones toroidales es

$$\varphi = \varphi_0 \left[1 + \sum_N (-1)^N \left(\frac{r}{R}\right)^N \cos^N(\chi + \alpha z) \right] \quad (3.40)$$

con r el radio menor y R el radio mayor del toro; suponemos que $r \ll R$ y $b \ll B_0$. De aquí vemos que la perturbación se expresa como

$$\epsilon\varphi_1 = \sum_N (-1)^N \left(\frac{r}{R}\right)^N \frac{b}{\alpha} I_n(n\alpha r) \sin(n\chi) \cos^N(\chi + \alpha z) \quad (3.41)$$

Las ecuaciones de las líneas de campo ahora involucran la perturbación

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{dr_0}{dt} + \epsilon \frac{dr_1}{dt} z \quad (3.42)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\alpha B_z^{(0)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + \epsilon \left(-\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) = \frac{d\chi_0}{dt} + \epsilon \frac{d\chi_1}{dt} \quad (3.43)$$

donde $\frac{\partial \chi_0}{\partial z} \equiv B_z^{(0)}$.

Las variables de acción-ángulo con la perturbación serán entonces

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon \frac{r_0}{\alpha \omega} \left[-\frac{d\chi_0}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_0} + \frac{dr_0}{dt} \left(-\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \alpha \omega + \frac{\epsilon \alpha \omega}{(d\chi_0/dt)} \left(-\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) \quad (3.45)$$

Cerca del eje magnético, r pequeño, se tiene $\frac{dr_0}{dt} \simeq 0$, $\frac{d\chi_0}{dt} \simeq \alpha \omega$ y $\alpha \ll 1$ por lo que las dos ecuaciones anteriores se comportan como

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &\simeq -\epsilon r_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_0} \\ \frac{d\Theta}{dt} &\simeq \alpha \omega + \frac{\epsilon}{r_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Haciendo el cambio de variable $J(H) = r_0^2/2$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -\frac{\epsilon}{2} J \frac{\partial \varphi_1}{\partial J} \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \alpha \omega + \frac{\epsilon}{2J} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Theta} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Usando la expansión del potencial en series de Fourier

$$\varphi_1(J, \Theta, t) = \sum_{ml} [\varphi_{1ml}(J) \exp^{i(m\Theta - lt)} + \varphi_{1ml}^*(J) \exp^{-i(m\Theta - lt)}] \quad (3.48)$$

podemos encontrar la integral de movimiento $I(J, \Theta, t)$ que satisface la ecuación hamiltoniana

$$I(J, \Theta, t) \equiv \epsilon \varphi_{1m_0 l_0} \text{sen}(m_0 \Theta - l_0 t + \Theta_0) \quad (3.49)$$

$$+ \int \frac{\varphi_{1m_0 l_0}}{J(\partial \varphi_{1m_0 l_0} / \partial J)} (m_0 \alpha \omega - l_0) dJ = \text{constante} \quad (3.50)$$

Las líneas de campo magnético formarán islas magnéticas cerca de una resonancia $J = J_r$, en este caso $m_0\alpha\omega J_r - l_0 = 0$ y se tiene

$$\epsilon\varphi_{1m_0l_0}(J_r)\text{sen}(m_0\Theta - l_0t + \Theta_0) + \frac{\varphi_{1m_0l_0}(J_r)}{J_r(\partial\varphi_{1m_0l_0}/\partial J_r)} \frac{m_0\alpha}{2} \frac{d\omega}{dJ_r} (\delta J)^2 = 0 \quad (3.51)$$

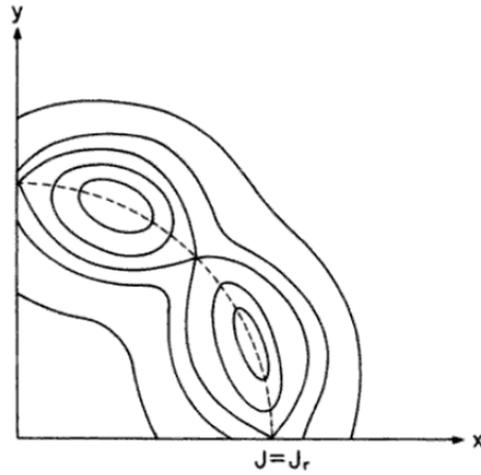


Figura 3.2: Islas magnéticas en la superficie resonante $J = J_r$.

La condición de resonancia

$$\omega(J_r) = \frac{N}{sn + N}, \quad (3.52)$$

donde s es el número de armónicos que tiene el campo magnético. Cuando N es grande, las islas magnéticas aparecen lejos de la separatriz; en cambio cuando s es grande, las islas se crean cerca de la separatriz. En este caso las superficies magnéticas se destruyen, $\omega \rightarrow 0$ o $s \gg 1$. Si $s \gg 1$ entonces $\omega(J_r^{(s)}) \sim \frac{1}{s}$ y se obtiene una relación de la frecuencia con la distancia entre las resonancias magnéticas

$$|\omega(J_r^{(s+1)}) - \omega(J_r^{(s)})| \simeq \frac{1}{s^2} \ll \omega(J_r^{(s)}) \quad (3.53)$$

Por lo tanto, si la suma de los anchos de las islas en $J_r^{(s)}$ y $J_r^{(s+1)}$ es mayor que la distancia entre estas resonancias entonces habrá destrucción de superficies magnéticas.

Capítulo 4

Islas magnéticas

La formación de islas magnéticas tiene lugar en las superficies racionales, $q = m/n$, y se debe a la reconexión de líneas de campo magnético principalmente causada por la inestabilidad de modos de desgarre. Las islas son superficies de flujo magnético cerradas, delimitadas por una separatriz que la aísla. Permiten que calor y partículas fluyan rápidamente a lo largo de las líneas de campo desde el interior al exterior del plasma provocando pérdida de confinamiento. En el stellarator pueden formarse islas aún sin presencia del plasma debido a la no-simetría del campo magnético, se denominan a estas *islas naturales* o simplemente *islas en vacío*. A diferencia de las islas en presencia de plasma, que pueden rotar en el plasma y/o con el plasma, las islas en vacío son estáticas.

El stellarator heliac TJ-II cuenta con diferentes sistemas de bolometría para detectar la rotación de las islas con la medición de perturbaciones en el campo magnético, densidad de electrones, temperatura o presión. Además tiene una configuración magnética flexible que le permite variar el valor de la transformada rotacional y así controlar la posición de las superficies racionales, por ende la de las islas magnéticas.

4.1. Modelo de placa

Suponemos que la función de flujo Ψ de la perturbación magnética es casi constante a través de la región interna, a esta suposición se le llama aproximación Ψ constante. Para desarrollar las expresiones matemáticas que

caracterizan a una isla magnética, consideramos el caso más sencillo: una isla en un tokamak cilíndrico, $\mathbf{B}_0 = (0, B_\theta^0(r), B_0)$ con B_θ^0 es el campo magnético poloidal producido por una corriente longitudinal de plasma uniforme, y una perturbación resonante $q = rB_0/(RB_\theta^0) = m/n$ en $r = r_s$. Entonces cuando se le aplica una perturbación \vec{B}_1 se considera un campo magnético cerca de r_s en coordenadas cilíndricas de forma

$$\mathbf{B}^*(r, \theta, z) = \mathbf{B}_0(r) + \mathbf{B}_1(r, \theta, z) - \frac{r}{r_s} B_\theta^0(r_s) \mathbf{e}_\theta - B_0 \mathbf{e}_z \quad (4.1)$$

que es nulo en $r = r_s$ antes de incluir \vec{B}_1 .

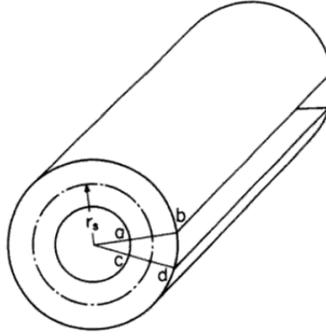


Figura 4.1: El cilindro se corta a un cierto ángulo, la superficie resonante está en r_s

El modelo de Placa consiste entonces en cortar el cilindro a un cierto ángulo y abrirlo, de manera que la forma resultante es la de una placa o bloque. A partir de esto definimos un nuevo sistema coordenado x, y, z con $x = r - r_s$ la distancia radial a la superficie racional, y es la posición poloidal y z la toroidal que también es la dirección del campo magnético.

De esta manera, podemos expandir el campo magnético en dirección y

$$B_y^{0*}(x) = \left. \frac{dB_y^{0*}}{dx} \right|_{x=0} x + \dots \quad (4.2)$$

y la perturbación resonante es

$$B_x^1 = b \sin \left(ky - \frac{n}{R} z \right) \quad (4.3)$$

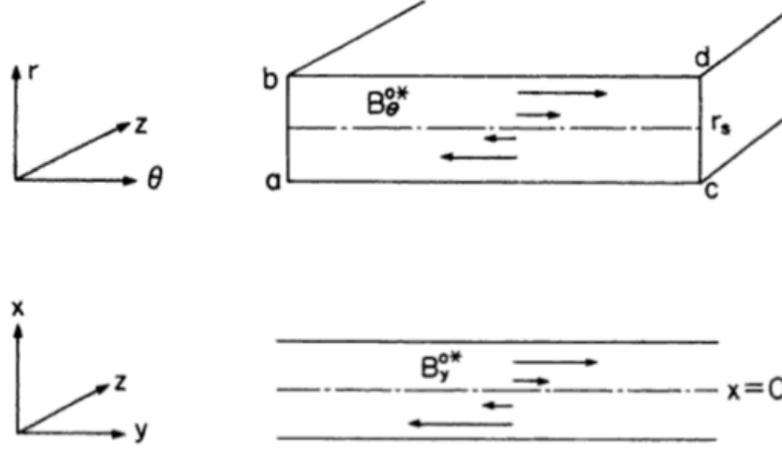


Figura 4.2: Modelo de placa.

Podemos definir el argumento del seno como $k\zeta$, la función de flujo incluyendo a la perturbación es

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{2} \frac{dB_y^{0*}}{dx} \Big|_{x=0} x^2 + \dots + \frac{b}{k} \cos k\zeta \quad (4.4)$$

con Ψ_0 constante y $dB_y^{0*}/dx|_{x=0} < 0$. Las superficies descritas por Ψ constante tienen puntos de silla en $x = 0$ y $k\zeta = \pm\pi$; sobre ellos está $\Psi = \Psi_0 - b/k$. La separatriz está descrita como

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{2} \frac{dB_y^{0*}}{dx} \Big|_{x=0} (w)^2 + \dots + \frac{b}{k} \quad (4.5)$$

con $x = \pm w$ y $k\zeta = 0$, siendo w el ancho medio de la isla magnética definida por las líneas cerradas dentro de la separatriz. En la figura [4.3](#) se muestra la forma de la isla magnética en el modelo de placa con los puntos x y O de la separatriz trazada por Ψ . Si se describe un campo en un toro se puede usar la función de flujo de la perturbación A , definida por la componente del campo perturbado $\vec{B}_1 = \nabla A \times \nabla \zeta$, y la transformada rotacional ι para expresar la función de flujo que describe la superficie magnética donde se localiza la isla, en vacío o no,

$$\Psi = \frac{B_\theta^0}{\iota} \left(\frac{1}{2} \iota' x^2 - \frac{A_0}{\psi'} \cos \xi \right) \quad (4.6)$$

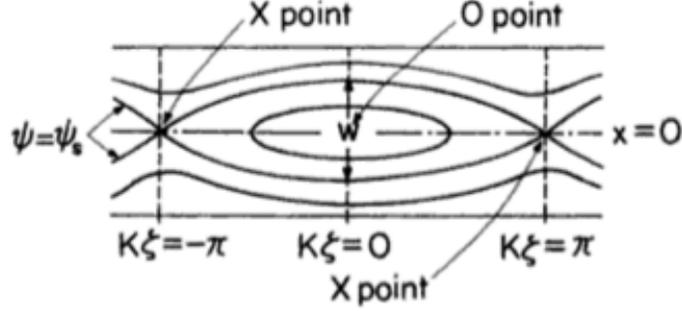


Figura 4.3: Isla magnética resultante del modelo de placa.

donde ahora $\xi = k\zeta = m(\theta - \iota\phi)$. Los puntos x corresponden a $\cos \xi = -1$ y $x = 0$, mientras que para el punto O es $\cos \xi = 1$ y w . Denotamos a la isla como un flujo azimutal $A_0 \cos \zeta$. A partir de la función de flujo (4.5), y notando que para $k\zeta = \pi$, $\Psi - \Psi_0 = -\frac{b}{k}$, se obtiene el ancho medio de la isla

$$w = 2 \left(b/k \left| \frac{dB_y^{0*}}{dx} \right| \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

Para obtener el ancho para geometría toroidal en términos de A , usamos que $b \rightarrow A$ con $A = A(\xi) = A_0 \cos \xi$ y $A_v = A_0^v \cos(\xi + \Delta\phi)$ para el potencial en presencia de plasma y en vacío, correspondientemente. $\Delta\phi$ es la fase de la isla en vacío relativa a la fase de la isla con plasma. Así, las expresiones para el ancho de la isla magnética con plasma y en vacío son

$$w = 2 \sqrt{\left| \frac{A_0}{\epsilon' \psi'} \right|} \quad w^v = 2 \sqrt{\left| \frac{A_0^v}{\epsilon' \psi'} \right|} \quad (4.8)$$

con $\psi' \equiv \frac{d\psi}{d\rho} = B_0/L_\alpha$, $L_\alpha \equiv |\nabla\alpha|$ y $\epsilon' = \epsilon/L_s$; L_s es la longitud de cizalla magnética $L_s = Rq/\hat{s}$, R es el radio mayor y $\hat{s} = (r/q)dq/dr$ es la cizalla magnética. De esta manera podemos reescribir w como

$$w = \sqrt{\frac{4L_s A_0}{\epsilon_0 B_0 L_\alpha}} \quad (4.9)$$

Si se tienen varias superficies resonantes a distintas posiciones radiales $q(r_s^i) = m_i/n_i$, entonces puede haber destrucción de las superficies magné-

ticas y pérdida de confinamiento. La relación que da la condición para la destrucción de la superficie es

$$\frac{1}{2} (w^i + w^{i+1}) > |r_s^i - r_s^{i+1}| \quad (4.10)$$

Usaremos en los cálculos la superficie de flujo normalizada

$$\chi^2 = \frac{A - \psi}{2A} = x^2 + \text{sen}^2 \frac{\xi}{2} \quad (4.11)$$

con $x = X/w$ adimensional.

4.2. Modos de desgarre

La inestabilidad de desgarre es la causa principal de la formación de las islas magnéticas, y el crecimiento de los modos juega un papel importante en la estabilidad del plasma. Ésta inestabilidad se analiza en dos regiones, primero ignorando la singularidad producida al coincidir la dirección del campo magnético con la dirección de la perturbación. Luego se analiza dentro de la región de la singularidad, donde ya no es válida la teoría MHD ideal.

Utilizamos el modelo de placa con un campo magnético $\vec{B} = B_x(y)\vec{e}_x + B_z(y)\vec{e}_z$ en un fluido incompresible ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) con conductividad finita grande, $\sigma = \eta^{-1}$ con η la resistividad, y una perturbación electromagnética de la forma $\exp[i(k_x x + k_z z)]$. Este campo magnético está cizallado, la dirección del vector de campo magnético rota conforme nos movemos en dirección y , Figura 4.4. Ponemos la superficie resonante en $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ en $y = 0$.

Los modos de desgarre pueden crecer gracias a la habilidad del campo magnético de encontrar un camino a un estado más bajo de energía. Con la resistividad presente se permite que el campo B_x negativo difundirse en la región B_x positiva, esta difusión es mayor en la vecindad de $y = 0$ a la que llamamos capa resistiva o de difusión. Si limitamos el bloque con paredes conductoras en $y = \pm a$, entonces $B_y(\pm a) = 0$ y tendremos una curva estable y otra inestable para B_y (Figura 4.5). Entonces al crecer la perturbación hay mayor difusión de las líneas de campo y la inestabilidad puede crecer exponencialmente. Para determinar la tasa de crecimiento, γ , de la inestabilidad se necesita calcular el grosor Δ de la capa resistiva que debe ser menor que

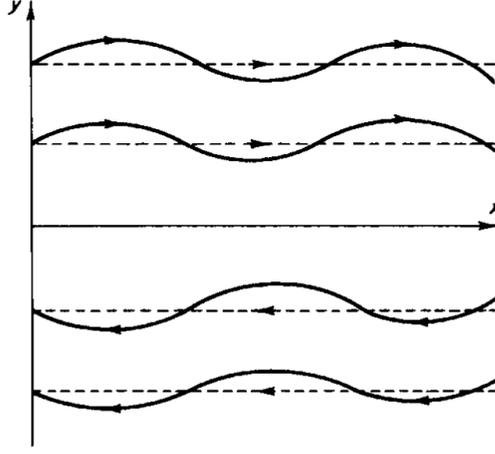


Figura 4.4: Líneas magnéticas en el plano xy , las líneas continuas son líneas perturbadas de \vec{B} mientras que las líneas punteadas son líneas sin perturbar.

la profundidad superficial (skin depth) $\delta = (\eta/\mu_0\gamma)^{1/2}$. De modo que el ordenamiento es $\Delta \ll \delta \ll a$, con a el ancho de la placa.

Utilizamos la ley de Ohm con resistividad $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$, combinándola con la ley de Faraday con $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, $\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_1$ y $\vec{v} = \vec{v}_1$. Las ecuaciones a primer orden son

$$\vec{E}_1 = \eta \vec{J}_1 - \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}_1 = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) - \eta \nabla \times \vec{J}_1 \quad (4.13)$$

De la ley de Ampere $\mu_0 \vec{J}_1 = \nabla \times \vec{B}_1$

$$\mu_0 \nabla \times \vec{J}_1 = \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}_1) - \nabla^2 \vec{B}_1 = -\nabla^2 \vec{B}_1 \quad (4.14)$$

Entonces

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B}_1 \quad (4.15)$$

La componente y de esta ecuación linealizada es

$$\gamma B_{1y} = i\vec{k} \cdot \vec{B} v_{1y} + \frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial y^2} - k^2 B_{1y} \right) \quad (4.16)$$

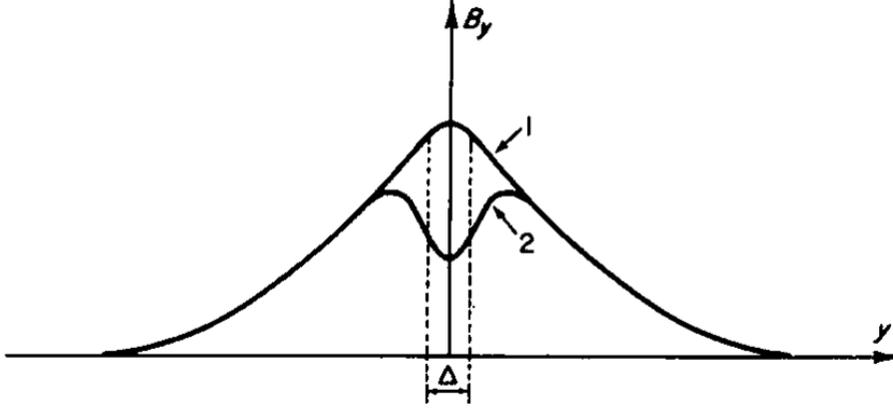


Figura 4.5: Curva 1 estable, curva 2 inestable para B_y .

ya que asumimos una variación $\exp[\gamma t + i(k_x x + k_z z)]$. Reescribimos esta ecuación cambiando las variables $F = \vec{k} \cdot \vec{B}$, $b = B_{1y}$, $v = v_{1y}$, $\vec{B} = \vec{B}_0$ y denotamos las derivadas con primas,

$$\gamma b = iFv + \frac{\eta}{\mu_0}(b'' - k^2 b) \quad (4.17)$$

Ahora, de la ecuación de movimiento para la perturbación junto con la ley de Ampere

$$\nu \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = (\vec{J} \times \vec{B})_1 \quad (4.18)$$

$$= (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \quad (4.19)$$

con $\nu =$ constante igual a la densidad de masa. Si sacamos el rotacional de esta ecuación y luego derivamos las componentes en x y z respecto a z y x respectivamente, al restarlas obtendremos

$$i\mu_0 \nu \gamma (v'' - k^2 v) = -Fb'' + F''b + k^2 Fb \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.17) tenemos una expresión para v

$$v = \frac{\gamma}{iF} [(1 + \delta^2 k^2) b - \delta^2 b''] \quad (4.21)$$

y sus derivadas

$$v' = \frac{\gamma}{iF} [(1 + \delta^2 k^2) b' - \delta^2 b'''] - \frac{\gamma F'}{iF^2} [(1 + \delta^2 k^2) b - \delta^2 b'']$$

$$v'' = \frac{\gamma}{iF} [(1 + \delta^2 k^2) b'' - \delta^2 b^{IV}] - 2 \frac{\gamma F'}{iF^2} [(1 + \delta^2 k^2) b' - \delta^2 b'''] - \frac{\gamma}{iF^2} [(1 + \delta^2 k^2) b - \delta^2 b''] \left(F'' - 2 \frac{F'^2}{F} \right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} v'' - k^2 v &= \frac{\gamma}{iF} \left\{ -\delta^2 b^{IV} + 2\delta^2 \left(\frac{F'}{F} \right) b''' \right. \\ &\quad + \left[(1 + \delta^2 k^2) + \delta^2 \left(\frac{F''}{F} - 2 \frac{F'^2}{F^2} \right) + k^2 \delta^2 \right] b'' \\ &\quad \left. - 2(1 + \delta^2 k^2) \frac{F'}{F} b' - (1 + \delta^2 k^2) \left(\frac{F''}{F} - 2 \frac{F'^2}{F^2} + k^2 \right) b \right\} \\ &= \frac{1}{i\mu_0 \nu \gamma} [-F b'' + (F'' + k^2 F) b] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Con esto obtenemos una ecuación para b

$$\begin{aligned} \delta^2 b^{IV} - 2\delta^2 \frac{F'}{F} b''' - \left(1 + 2k^2 \delta^2 + \delta^2 \frac{F''}{F} - 2\delta^2 \frac{F'^2}{F^2} + \frac{F^2}{\mu_0 \nu \gamma^2} \right) b'' \\ + 2 \frac{F'}{F} (1 + \delta^2 k^2) b' - \left[2 \frac{F'^2}{F^2} (1 + \delta^2 k^2) \right. \\ \left. - \left(\frac{F''}{F} + k^2 \right) \left(1 + \delta^2 k^2 + \frac{F^2}{\mu_0 \nu \gamma^2} \right) \right] b = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como $a \gg \delta$ entonces $(k\delta)^2 \ll 1$ y $\delta^2 F''/F \ll 1$, por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \delta^2 b^{IV} - 2\delta^2 \frac{F'}{F} b''' - \left(1 - 2\delta^2 \frac{F'^2}{F^2} + \frac{F^2}{\mu_0 \nu \gamma^2} \right) b'' + 2 \frac{F'}{F} b' \\ + \left[\left(k^2 + \frac{F''}{F} \right) \left(1 + \frac{F^2}{\mu_0 \nu \gamma^2} \right) - 2 \frac{F'^2}{F^2} \right] b = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

El último término en el coeficiente b diverge en $y = 0$ y va disminuyendo al alejarse. Para poder tratar la divergencia dividimos la región $|y| < a$ en una región externa, $y_0 < |y| < a$, y una región interna $|y| < y_0$. usamos las aproximaciones $F'' \approx F/L^2$ y $F \approx kB_0y/L$ para $y \ll L$, con L la longitud de la cizalla. Además $F''F/\mu_0\nu\gamma^2 \gg (F'/F)^2$ en y_0 implica que $y_0 \gg L\sqrt{\gamma/kv_A}$, con $v_A^2 = B_0^2/\mu_0\nu$ es la velocidad de Alfvén. Así $F^2/\mu_0\nu\gamma^2$ para y_0

$$\left. \frac{F^2}{\mu_0\nu\gamma^2} \right|_{y_0} \approx \frac{(kB_0)^2 y_0}{\mu_0\nu\gamma L^2} = \left(\frac{k^2 v_A^2 y_0^4}{\gamma^2 L^4} \right) \frac{L^2}{y_0^2} \gg 1 \quad (4.25)$$

es el dominante pues el término entre paréntesis será mucho mayor que 1 ($\frac{y_0^2}{L^2} \gg \frac{\gamma}{kv_A}$). Entonces en la región externa la ecuación (4.24) se vuelve

$$b'' - \left(k^2 + \frac{F''}{F} \right) b = 0 \quad (4.26)$$

Estas aproximaciones también nos dan información sobre los límites de la tasa de crecimiento γ , como $L \gg y_0 \gg L\sqrt{\gamma/kv_A}$ entonces $1 \gg \gamma/kv_A$ y de $\delta \ll a$ se tiene $a^2 \gg \eta/\mu_0\gamma$. Por lo tanto la tasa de crecimiento está delimitada por

$$\frac{\eta}{\mu_0 a^2} \ll \gamma \ll kv_A \quad (4.27)$$

4.2.1. Solución interna

Tomamos el caso $y \ll y_0$ y usando $F'/F \approx y^{-1}$ en la ecuación (4.24) obtenemos

$$\delta^2 b^{IV} - \frac{2}{y} \delta^2 b''' - \left(1 - 2\frac{\delta^2}{y^2} + \frac{k^2 v_A^2 y^2}{\gamma^2 L^2} \right) b'' + \frac{2}{y} b' - \frac{2}{y^2} b = 0 \quad (4.28)$$

Hacemos el cambio de variable $x = y/\delta$

$$b^{IV} - \frac{2}{x} b''' - g(x) b'' + \frac{2}{x} b' - \frac{2}{x^2} b = 0 \quad (4.29)$$

con

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{k^2 v_A^2 \delta^2}{\gamma^2 L^2} x^2 = 1 - \frac{2}{x^2} + \sigma x^2 \quad (4.30)$$

Al derivar la ecuación (4.29)

$$b^V - \frac{2}{x} b^{IV} - g(x) b''' + \frac{2}{x} b'' - \frac{2}{x^2} b' = 0 \quad (4.31)$$

y si definimos $z = b''$

$$z''' - \frac{2}{x}z'' - \left(1 - \frac{2}{x^2} + \sigma x^2\right)z' + \frac{2}{x}z - \frac{2}{x^2}b' = 0 \quad (4.32)$$

Sustituyendo la ecuación (4.29) en la ecuación anterior

$$z''' - (1 + \sigma x^2)z' - 4\sigma xz = 0 \quad (4.33)$$

Esta ecuación se puede resolver numéricamente para tres soluciones asintóticas para x grande, $z \sim x^{-4}$ y $z \sim \exp(\pm\sqrt{\sigma}x^2/2)$.

4.2.2. Empalme con la solución externa

Para encontrar la solución externa resolvemos la ecuación (4.26) con las condiciones de frontera en $y = \pm a$. Cuando las soluciones para $y > 0$ y $y < 0$ se acercan a $y = 0$ sus derivadas en general no coinciden; entonces se define el salto en la primera derivada, dado un ϵ pequeño, como

$$\Delta' = \frac{b'(\epsilon) - b'(-\epsilon)}{b(0)} \quad (4.34)$$

El salto Δ' en la región externa debe igualarse al cambio en la derivada de la solución interna para x grande a fin de que las dos soluciones se empalmen. Entonces se escribe Δ' para la región interna en términos del potencial vectorial

$$\Delta' = \frac{1}{A_z} \left. \frac{\partial A_z}{\partial y} \right|_{-y_0}^{+y_0} \quad (4.35)$$

Al integrar el potencial vectorial $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$, combinado con la ley de Ohm y $\vec{E} = -\dot{A} = -\gamma A$, obtenemos una expresión para Δ

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial y} \right|_{-y_0}^{+y_0} = -\mu_0 \langle J_z \rangle \Delta \approx \mu_0 \frac{\gamma}{\eta} A_z \Delta = \frac{\Delta}{\delta^2} \quad (4.36)$$

Por lo tanto

$$\Delta' = \frac{\Delta}{\delta^2} \quad (4.37)$$

Aquí $\langle \rangle$ denota el promedio sobre la capa resistiva.

Si en la ecuación (4.33) $z \sim \exp(-\sqrt{\sigma}x^2/2)$, entonces $\sigma x^4 = 1$ y

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{\sigma^{1/4}} = \left(\frac{\gamma L}{k v_A \delta} \right)^{1/2} \quad (4.38)$$

y la tasa de crecimiento será

$$\gamma = (\Delta')^{4/5} \left(\frac{\eta}{\mu_0} \right)^{3/5} \left(\frac{kv_A}{L} \right)^{2/5} \quad (4.39)$$

4.3. Ecuación de evolución

En general Δ' puede tener contribuciones de fuentes externas que se manifiestan a través de las condiciones de frontera Δ'_{BC}

$$\Delta' = \Delta'_0 + \Delta'_{BC} \quad (4.40)$$

donde Δ'_0 representa la energía libre disponible en ausencia de fuentes externas. En este trabajo analizaremos la contribución que tiene la corriente de polarización J_{pol} sobre la evolución de la isla y por lo tanto la estabilidad del plasma. Cuando se tiene una isla de vacío inicial, esta puede modificarse por la presencia del plasma por efecto de la inestabilidad de desgarre. Entonces aparece una diferencia de fase $\Delta\phi$ entre las islas y el parámetro Δ' puede dividirse en una componente coseno y una componente seno

$$\Delta'_c = \Delta'_0 \left[1 - \nu \frac{A^V}{A_0} \cos(\Delta\phi) \right] \quad (4.41)$$

$$\Delta'_s = -\Delta'_0 \nu \frac{A^V}{A_0} \text{sen}(\Delta\phi) \quad (4.42)$$

donde ν es un coeficiente de orden uno. En la etapa de crecimiento no lineal, el modo de desgarre evoluciona de manera que el ancho de la isla magnética está dado por la ecuación $dw/dt = D_m \Delta'_c$, donde D_m es el coeficiente de difusión magnética resistiva. Cuando la isla se satura, $dw/dt = 0$, $\Delta'_c = 0$

$$\Delta'_0 \left[1 - \nu \frac{A^v}{A_0} \cos(\Delta\phi) \right] = 0 \quad (4.43)$$

o

$$1 = \nu \left(\frac{w^v}{w} \right)^2 \cos(\Delta\phi) \quad (4.44)$$

Los anchos de las islas están relacionados a través de su diferencia de fase

$$w = w^v \sqrt{\nu \cos(\Delta\phi)} \quad (4.45)$$

Por la paridad de Δ' en los cálculos, sólo la componente coseno Δ'_c tendrá contribución en el ancho de la isla, mientras que la componente seno Δ'_s contribuirá al balance de torcas. La suma de las torcas electromagnética y viscosa (definidas en el siguiente capítulo) da la evolución en el tiempo de la diferencia de fase

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} = T_{EM} + T_V \quad (4.46)$$

Siguiendo el procedimiento de Rutherford [15], se integra la ley de Ampere en la región de la isla; la corriente que nos interesa es J_{\parallel} . Tomamos entonces la componente coseno y la empalmamos con Δ'

$$\oint d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx J_{\parallel} \cos(\xi) = \frac{c\Delta'}{4w} \tilde{\psi} \quad (4.47)$$

Combinando esta ecuación junto con la ley de Ohm la ecuación de evolución del ancho de la isla magnética está dado por la ecuación de Rutherford

$$\frac{dw}{dt} = D_{\eta}(\Delta'_0 + \Delta_{pol}) \quad (4.48)$$

donde D_{η} es el coeficiente de difusión magnética. La contribución de la corriente de polarización estará dada por Δ_{pol}

$$\Delta_{pol} = -\frac{16L_s}{cB_0w} \oint d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx J_{pol} \cos(\xi) \quad (4.49)$$

Se puede parametrizar a Δ_{pol} como [2]

$$\Delta_{pol} = 4g \frac{L_s^2}{w^3} \frac{\omega(\omega - \omega_{*i})}{k^2 v_A^2} \quad (4.50)$$

donde ω es la frecuencia de rotación de la isla, $\omega_{*e} = k \frac{T_e}{q_e B L_n}$ es la frecuencia diamagnética de los electrones, $\omega_{*i} = k \frac{T_i}{q_i B L_n}$ la frecuencia diamagnética de los iones y g es la cantidad importante que se debe calcular a partir de J_{pol} . Se puede probar [17] que las condiciones de frontera en la isla llevan a la siguiente relación

$$\omega = f\omega_{*e} + (1 - f)\omega_{*i} \quad (4.51)$$

donde f es el factor de aplanamiento en el interior de la isla de los perfiles de los parámetros del plasma; para islas anchas se tiene aplanamiento de perfiles y $f = 0$, mientras que para islas angostas se tienen gradientes y $f = 1$. Si

$\Delta_{pol} < 0$ entonces tiene un efecto estabilizador en la ecuación (4.48) y desestabilizador cuando $\Delta_{pol} > 0$. Entonces, si g es positiva, cuando la isla tenga una frecuencia de rotación $\omega > \omega_{*i}$, el signo de Δ_{pol} será positivo y tendrá un efecto desestabilizador. Solo cuando la frecuencia de rotación de la isla esté en el intervalo $\omega < \omega_{*i}$ se tendrá $\Delta_{pol} < 0$ y será estabilizadora.

Entonces el signo de Δ_{pol} estará determinado por el signo del coeficiente g . Al combinar las ecuaciones (4.49) y (4.50) obtenemos una expresión para g en el límite $T_i \rightarrow 0$ que depende de la corriente de polarización.

$$g = -\frac{4k^2 v_A^2 w^2}{c B_0 L_s \omega^2} \oint d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx J_{pol} \cos \xi \quad (4.52)$$

El objetivo entonces es calcular la corriente de polarización. Veremos antes como afecta la presencia de la isla a los coeficientes de transporte.

Capítulo 5

Transporte y balance de torcas

El análisis de la respuesta del plasma a la isla magnética se hace como el análisis de modos de desgarre. Como ya se dijo, asumimos la aproximación ψ constante. El plasma estará dividido en la región interior, el plasma en la vecindad de la isla, y la región exterior comprende al resto del plasma. Los cálculos se basan en el modelo de dos fluidos, las coordenadas (ψ, θ, ϕ) las cambiamos a (ρ, α, ζ) recordando que

$$\alpha = \theta - \iota_0 \phi = \xi / m_0, \quad \zeta = \phi \quad (5.1)$$

El campo magnético en equilibrio en coordenadas de flujo es $\vec{B}_0 = \nabla\psi \times \nabla(\theta - \iota\phi) = G\nabla\phi + I\nabla + h\nabla\psi$, G , I y h son funciones de flujo. Mientras que el campo magnético perturbado producido por la isla es $\vec{B}_1 = \nabla A \times \nabla\zeta + \nabla\vartheta \times \nabla\alpha$, con $\vartheta = G\phi + I\theta$ [18]. El campo magnético total es entonces

$$\vec{B} = \nabla[\psi(\rho) + \vartheta] \times \nabla\alpha + \psi' \nabla\zeta \times \nabla\psi \quad (5.2)$$

Integramos radialmente la ley de Ampere pero ahora empalmamos con la componente correspondiente de la solución lejos de la isla

$$- \int dx \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{2\pi} \cos(m_0\alpha) \frac{\mu_0\gamma}{g^{\rho\rho}} \frac{\vec{J}_1 \cdot \vec{B}_0}{B^2} = \Delta'_c A_0 \quad (5.3)$$

$$- \int dx \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{2\pi} \text{sen}(m_0\alpha) \frac{\mu_0\gamma}{g^{\rho\rho}} \frac{\vec{J}_1 \cdot \vec{B}_0}{B^2} = \Delta'_s A_0 \quad (5.4)$$

donde $x = \rho - \rho_0$, $g^{\rho\rho} = \nabla\rho \cdot \nabla\rho$, $\gamma = G + \iota I = \vec{B}_0 \cdot [\vec{e}_\zeta + (\iota - \iota_0)\vec{e}_\alpha]$. Si tomamos la ecuación de balance de momentos en estado estacionario en

dirección \vec{e}_ρ

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 + \mu_0 \delta p \right) = \mathcal{O}(\delta) \quad (5.5)$$

con δp representa la diferencia de presiones con y sin isla. Entonces la ecuación radial perturbada de balance de momentos

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} - \frac{I}{\gamma} \frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{\mu_0 \psi'}{B^2} \frac{\partial \delta p}{\partial \rho} = \mathcal{O}(\delta) \quad (5.6)$$

y las corrientes perturbadas

$$\mu_0 \vec{J}_1 = -\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} \frac{g^{\rho\rho}}{\gamma} \vec{B}_0 + \frac{\vec{B}_0 \times \nabla \rho}{B^2} \frac{\partial \delta p}{\partial \rho} + \mathcal{O}(\delta) \quad (5.7)$$

Definimos la torca electromagnética promedio en la superficie magnética en dirección \vec{e}_α como

$$T_{EM\alpha} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{e}_\alpha \cdot \vec{J} \times \vec{B} \frac{\sqrt{g}}{g^{\rho\rho}} d\zeta d\alpha \quad (5.8)$$

Usando la expresión para el campo magnético total junto con la ecuación anterior, obtenemos

$$T_{EM\alpha} = -\frac{2\pi\psi'}{\mu_0\gamma} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \rho^2} \quad (5.9)$$

De la que obtenemos

$$T_{EM\alpha} = \frac{2\pi\psi'}{\mu_0\gamma} m_0 A_0 \int_0^{2\pi} d\alpha \text{sen}(m_0\alpha) \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \rho^2} \quad (5.10)$$

y la torca electromagnética total sobre la región de la isla es

$$T_{EM0} \equiv \int dx T_{EM\alpha} = \frac{2\pi^2\psi'}{\mu_0\gamma} m_0 A_0^2 \Delta'_s \quad (5.11)$$

Usando

$$\frac{1}{16} (w^v)^2 \left| \epsilon'_0 \psi' \right| = A_0^v \quad (5.12)$$

en Δ'_s

$$A_0 \Delta'_s = -k_v \Delta'_0 \frac{1}{16} (w^v)^2 \left| \epsilon'_0 \psi' \right| \text{sen}(\Delta\phi) \quad (5.13)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por A_0 y usando la expresión $A_0 = \frac{1}{16}w^2 |\epsilon'_0 \psi'|$

$$A_0^2 \Delta'_s = -k_v \Delta'_0 \frac{1}{256} (w^v)^2 w^2 (\epsilon'_0)^2 (\psi')^2 \text{sen}(\Delta\phi) \quad (5.14)$$

Finalmente

$$T_{EM0} = \frac{\pi^2 \psi'^3 m_0 k_v (-\Delta'_0)}{\mu_0 \gamma 128} (\epsilon'_0)^2 (w^v)^2 w^2 \text{sen}(\Delta\phi) \quad (5.15)$$

Mientras que la componente coseno es asociada con el ancho de la isla magnética, la componente seno es asociada con el cambio del momento angular de la isla. Para una isla con ancho suficientemente grande, los perfiles de densidad, temperatura y potencial eléctrico son considerados constantes en el interior. El gradiente entre los perfiles en el exterior y el interior de la isla esta relacionado con velocidades de flujo que afectan su rotación. La velocidad de fase de la isla es determinada por la tasa de rotación de iones, ya que la disipación dominante se debe al amortiguamiento neoclásico de iones y a la viscosidad del campo transversal.

La disminución abrupta de la frecuencia de rotación observada en el TJ-II podría deberse a un imbalance de torcas, de acuerdo a la ecuación (4.46) vemos que hay un cambio en la diferencia de fase, esto provoca una variación en la velocidad de rotación hasta que de nuevo se llegue a un balance de torcas. Se ha encontrado [3] que el efecto de la torca electromagnética sobre la isla en función de la velocidad de rotación, tiene bifurcaciones. En la Figura 5.1 la línea curva representa la T_{EM} , vemos se acerca a su máximo a medida que la frecuencia de deslizamiento disminuye, y alcanza su mínimo cuando la frecuencia de deslizamiento crece. La T_V está representada por líneas rectas paralelas, a medida que disminuye se produce una bifurcación de una ω alta a una ω baja. Cuando la frecuencia de rotación comienza a bajar se produce de nuevo un salto a un estado de T_V alta que lleva de nuevo a una frecuencia de rotación alta [17]. Asociado a este proceso, se tiene el ciclo mostrado en la Fig. 5.2 para el ancho de la isla. Del punto A hacia el punto B, la viscosidad disminuye y se tiene una isla angosta hasta que se alcanza B produciéndose una bifurcación que lleva a un ancho de isla grande en el punto C. Al acercarse ahora al punto D, la viscosidad aumenta y experimenta histéresis que regresa al estado de isla con ancho pequeño y viscosidad grande.

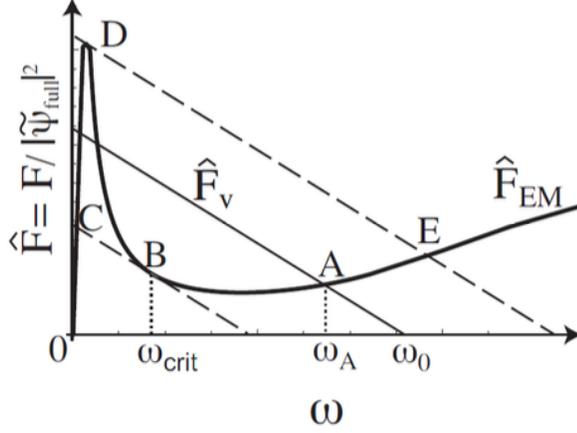


Figura 5.1: Balance de torcas electromagnética y viscosa dado por el diagrama de bifurcación tangencial. Las rectas paralelas representan la fuerza viscosa y la línea curva representa la fuerza electromagnética normalizada.

5.1. Flujo en ausencia de islas

La ecuación de balance de momentos

$$\rho_M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p - \nabla \cdot \vec{\pi} + \nabla \cdot (\rho_M \nu_{\perp} \nabla \vec{v}) + \vec{S} \quad (5.16)$$

donde ρ_M es la densidad de masa, $\vec{\pi}$ es el tensor de viscosidad, ν_{\perp} es el coeficiente fenomenológico de viscosidad y \vec{S} es la fuente de momentos externos.

Para el caso sin islas, $\vec{B} \cdot \nabla \rho = 0$, los perfiles de rotación son obtenidos de la ecuación de balance de momentos a orden más bajo $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \nabla p_i / n_i q_i$

$$\vec{v} = \left(\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{n_i q_i} \frac{dp_i(\rho)}{d\rho} \right) \frac{\vec{B} \times \nabla \rho}{B^2} + \frac{v_{\parallel}}{B} \vec{B} \quad (5.17)$$

donde Φ es el potencial eléctrico, p_i , n_i y q_i son la presión, densidad y carga de los iones. Podemos escribir los flujos como

$$\vec{v} = \Omega^{\theta} \vec{e}_{\theta} + \Omega^{\phi} \vec{e}_{\phi} \quad (5.18)$$

con

$$\Omega^{\theta} = \frac{g}{\psi' \gamma} \left(\Phi' + \frac{p'_i}{n_i q_i} \right) + \frac{tv_{\parallel} B}{\gamma} \quad (5.19)$$

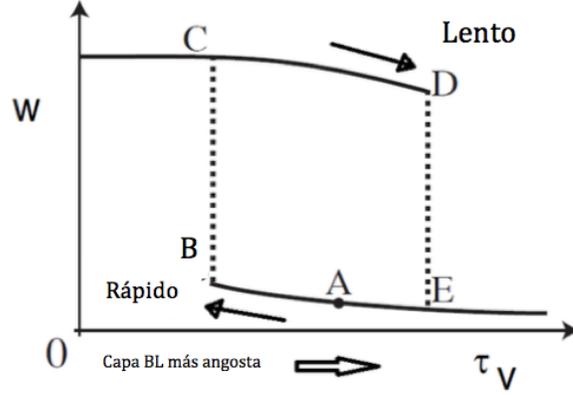


Figura 5.2: El tamaño de la isla en función de la torca viscosa presenta histéresis

$$\Omega^\phi = -\frac{I}{\psi'\gamma} \left(\Phi' + \frac{p'_i}{n_i q_i} \right) + \frac{v_{\parallel} B}{\gamma} \quad (5.20)$$

Pero en las coordenadas (ρ, α, ζ)

$$\vec{v} = \Omega^\alpha \vec{e}_\alpha + \Omega^\zeta \vec{e}_\zeta \quad (5.21)$$

Usamos la transformación $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\alpha$ y $\vec{e}_\phi = \vec{e}_\zeta - t_0 \vec{e}_\alpha$

$$\Omega^\theta \vec{e}_\alpha + \Omega^\phi \vec{e}_\zeta - t_0 \Omega^\phi \vec{e}_\alpha = \Omega^\alpha \vec{e}_\alpha + \Omega^\zeta \vec{e}_\zeta \quad (5.22)$$

$$\Omega^\alpha = \Omega^\theta - t_0 \Omega^\phi = \frac{1}{\psi'} \left(\Phi' + \frac{p'_i}{n_i q_i} \right) + \mathcal{O}(\delta) \quad (5.23)$$

$$\Omega^\zeta = \Omega^\phi = -\frac{I}{\gamma} \Omega^\alpha + \frac{v_{\parallel} B}{\gamma} \quad (5.24)$$

El promedio sobre la superficie de flujo de la proyección sobre la componente \vec{e}_α del balance de momentos en estado estacionario da

$$0 = -\psi' \langle \vec{J} \cdot \nabla \rho \rangle_0 - \langle \vec{e}_\alpha \cdot \nabla \cdot \vec{P} \rangle_0 + \langle \vec{e}_\alpha \cdot \nabla \cdot (\rho_M \nu_\perp \nabla v) \rangle_0 + \langle \vec{e}_\alpha \cdot \vec{S} \rangle_0 \quad (5.25)$$

donde $\vec{P} = p\vec{I} + \vec{\pi}$ y el promedio sobre la superficie de flujo definido como

$$\langle f(\rho, \alpha, \zeta) \rangle_0 = \frac{1}{V'} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\zeta \sqrt{g} f(\rho, \alpha, \zeta) \quad (5.26)$$

$$V' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\zeta \sqrt{g} \quad (5.27)$$

No hay corriente radial cuando el flujo es ambipolar, $\langle \vec{J} \cdot \nabla \rho \rangle_0 = 0$ y en la ecuación de balance de momentos podemos calcular el campo eléctrico radial usando la condición de ambipolaridad. El término de la ecuación de balance de momentos que corresponde al transporte neoclásico no-ambipolar se puede escribir como

$$\langle \vec{e}_\alpha \cdot \nabla \cdot \vec{P} \rangle_0 = -\psi' \sum_s q_s \langle \vec{\Gamma}_s^{neo} \cdot \nabla \rho \rangle_0 \quad (5.28)$$

Aquí el subíndice s denota cada especie de partículas.

En el transporte neoclásico incluimos las contribuciones en el régimen $1/\nu$, régimen en donde los coeficientes de transporte varían inversamente con la frecuencia de colisión ν y corresponde también a la región de altas temperaturas. Se incluyen además las contribuciones en la región de mayor colisionalidad correspondiente al régimen de plateau, $\vec{\Gamma}_s^{plat}$, en el que los coeficientes de transporte son independientes del término de colisionalidad.

$$e \langle \vec{\Gamma}_s^{1/\nu} \cdot \nabla \rho \rangle_0 = -C_{1/\nu} \rho_M \frac{\omega_{ts}^2}{\nu_s} \left\langle \frac{g^{\rho\rho}}{B^2} \right\rangle_0 \left[\Phi' \frac{q_s}{e} + \frac{p'_s}{n_s e} + k_s \frac{T'_s(\rho)}{e} \right] \quad (5.29)$$

$$e \langle \vec{\Gamma}_s^{plat} \cdot \nabla \rho \rangle_0 = -C_{plat} \rho_M \omega_{ts} \left\langle \frac{g^{\rho\rho}}{B^2} \right\rangle_0 \left[\Phi' \frac{q_s}{e} + \frac{p'_s}{n_s e} + k_s \frac{T'_s(\rho)}{e} \right] \quad (5.30)$$

donde $\omega_{ts} = v_{ts}/R_0$ es la frecuencia de tránsito con v_{ts} la velocidad térmica de las especies s , R_0 es el radio mayor. En el límite de cero campo eléctrico radial, el coeficiente de transporte adimensional $C_{1/\nu}$ escala como $C_{1/\nu} \sim \epsilon_{eff}^{3/2}$ con ϵ_{eff} el parámetro de rizo helicoidal.

5.2. Flujo en presencia de islas

Cuando las islas magnéticas están presentes el promedio ahora se hace sobre la superficie de flujo $\bar{\Psi}^*$

$$\frac{e}{l'} \langle \vec{\Gamma}_s^{neo} \cdot \nabla \bar{\Psi}^* \rangle = \frac{e}{l'} \langle \vec{\Gamma}_s^{1/\nu} \cdot \nabla \bar{\Psi}^* \rangle + \frac{e}{l'} \langle \vec{\Gamma}_s^{plat} \cdot \nabla \bar{\Psi}^* \rangle \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{l'} \langle \vec{\Gamma}_s^{neo} \cdot \nabla \bar{\Psi}^* \rangle = & \\ & - C_{1/\nu} \rho_M \frac{\omega_{ts}^2}{\nu_s} (1 + c_0 \nu_s^*) \frac{q_s}{e} \left[\frac{\langle \Omega^\alpha \rangle}{\langle x \rangle} - \frac{\langle \Omega_{amb,s}^\alpha \rangle}{\langle x \rangle} \right] \left\langle \frac{x^2 \psi' g^{\rho\rho}}{B^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.32)$$

con $c_0 = \epsilon^{-3/2} \frac{C_{plat}}{C_{1/\nu}}$ y $\nu_s^* = \epsilon^{3/2} \nu_s / \omega_{si}$. Tomamos el promedio sobre la superficie de flujo de la proyección de la ecuación de balance de momentos sobre la coordenada helicoidal

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{\psi'}{l'} \langle \vec{J} \cdot \nabla \bar{\Psi}^* \rangle - \langle x \vec{e}_\alpha \cdot \nabla \cdot \vec{P} \rangle & \\ + \langle x \vec{e}_\alpha \cdot \nabla \cdot (\rho_M \nu_\perp \nabla \vec{v}) \rangle + \langle x \vec{e}_\alpha \cdot \vec{S} \rangle & \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde $\vec{P} = p\vec{I} + \vec{\pi}$. De esta forma podemos identificar al segundo término de la ecuación anterior con el término de transporte neoclásico y cuando tomamos el caso de estado estacionario, $\langle \vec{J} \cdot \nabla \bar{\Psi}^* \rangle = 0$, obtenemos una ecuación de transporte para los perfiles de flujo en términos de el resto de la ecuación de balance de momentos,

$$\langle \Omega^\alpha \rangle = \Omega_0^\alpha + \delta_r^2 \frac{l'^2 \langle x \rangle^2}{c_r \langle x^2 g^{\rho\rho} / B^2 \rangle} \frac{d}{d\Psi^*} \left[\frac{\langle x^4 (g^{\rho\rho})^2 / B^2 \rangle}{\langle x \rangle} \frac{d}{d\Psi^*} \frac{\langle \Omega^\alpha \rangle}{\langle x \rangle} \right] \quad (5.34)$$

con $c_r = \langle (g^{\rho\rho})^2 / B^2 \rangle / \langle g^{\rho\rho} / B^2 \rangle$, y Ω_0^α es el perfil de rotación dado por

$$\Omega_0^\alpha = \langle \Omega_{amb,s}^\alpha \rangle + \frac{\nu_s \langle x \vec{e}_\alpha \cdot \vec{S} \rangle \langle x \rangle}{\omega_{ts}^2 \rho_M C_{1/\nu} (1 + c_0 \nu_s^*) \langle x^2 \psi'^2 g^{\rho\rho} / B^2 \rangle} \quad (5.35)$$

El parámetro δ_r^2 mide el ancho de la capa que se forma fuera de la separatriz y su expresión es

$$\delta_r^2 = \frac{c_r \nu_{\perp} \nu_s}{\omega_{ts}^2 C_{1/\nu} (1 + c_0 \nu^*)} \quad (5.36)$$

Capítulo 6

Contribución de la corriente de polarización en geometría helicoidal

Para conocer la corriente de polarización J_{pol} usamos las ecuaciones de dos fluidos siguiendo el procedimiento descrito en la referencia [2], pero usando coordenadas de flujo para obtener el resultado de forma general incluyendo la geometría helicoidal de los stellarators. Usamos las expresiones covariante y contravariante del campo magnético en coordenadas de Boozer para considerar la no-axisimetría

$$\vec{B}_0 = \nabla\psi \times \nabla(\theta - \iota\phi) = G\nabla\phi + I\nabla\theta + h\nabla\psi \quad (6.1)$$

$$\vec{B}_1 = \nabla A \times \nabla\zeta + \nabla\vartheta \times \nabla\alpha \quad (6.2)$$

La corriente de polarización se define como la parte oscilatoria de \mathbf{J}_{\parallel} , es decir, $\mathbf{J}_{pol} \equiv \mathbf{J}_{\parallel} - \langle \mathbf{J}_{\parallel} \rangle$. El promedio sobre la superficie de flujo está definido como

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \frac{1}{\langle 1 \rangle} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\zeta \sqrt{gx}^{-1} f \\ \langle 1 \rangle &\equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\zeta \sqrt{gx}^{-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Se define la derivada convectiva para la velocidad $\vec{E} \times \vec{B}$ como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_E \cdot \nabla \quad (6.4)$$

Las ecuaciones de fluidos son:

- Continuidad de electrones

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{1}{e} \nabla_{\parallel} J_{\parallel} + D \nabla_{\perp}^2 n \quad (6.5)$$

donde definimos el gradiente paralelo como $\nabla_{\parallel} = \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla$ y el coeficiente de difusión radial es $D = \beta_e \frac{c^2}{8\pi\sigma_{\parallel}}$.

- La ecuación de cuasi-neutralidad, $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

$$\nabla_{\parallel} J_{\parallel} = \frac{c^2}{4\pi v_A^2} \left[\frac{DU}{Dt} - \mu \nabla_{\perp}^2 U \right] \quad (6.6)$$

con $U = \nabla_{\perp}^2 \varphi$ proporcional a la vorticidad $\nabla \times v$.

- La ley de Ohm generalizada

$$E_{\parallel} + \frac{1}{ne} \nabla_{\parallel} p = \frac{1}{\sigma_{\parallel}} J_{\parallel} - \frac{a}{e} \nabla_{\parallel} T_e \quad (6.7)$$

con $E_{\parallel} = -\nabla_{\parallel} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ y $a = 0,71$.

- Evolución de temperatura de electrones

$$\frac{3}{2} n \frac{DT_e}{Dt} = \nabla_{\parallel} (\kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e) + \kappa_{\perp} \nabla_{\perp}^2 T_e + (1 + a) \nabla_{\parallel} \left(\frac{J_{\parallel} T_e}{e} \right) \quad (6.8)$$

El transporte lo consideramos solo en el régimen Pfirsch-Schlüter (osea de alta colisionalidad). Despreciando términos perpendiculares y haciendo $\partial/\partial t = 0$ obtenemos

$$\vec{v}_E \cdot \nabla n = \frac{1}{e} \nabla_{\parallel} J_{\parallel} \quad (6.9)$$

$$\nabla_{\parallel} J_{\parallel} = \frac{c^2}{4\pi v_A^2} \vec{v}_E \cdot \nabla U \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{n} \nabla_{\parallel} n - \frac{e}{T_e} \nabla_{\parallel} \varphi = - (1 + a) \frac{\nabla_{\parallel} T_e}{T_e} \quad (6.11)$$

La ecuación de energía para el caso estacionario en la que domina el término de transporte paralelo.

$$\nabla_{\parallel} (\kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e) = 0 \quad (6.12)$$

Sobre la superficie magnética T es constante y será función de σ , al cambiar de superficie magnética tendrá dependencia en χ . La solución a la ecuación de calor es

$$T_e = T_{\sigma}(\chi) \quad (6.13)$$

con $\sigma = \pm$ toma valor (+) cuando está de lado derecho de la isla y valor (-) cuando está de lado izquierdo. Usando esto en la ecuación (6.11) obtenemos una ecuación diferencial para n

$$\nabla_{\parallel} n = n \left[\frac{e}{T_e} \nabla_{\parallel} \varphi - (1 + a) \frac{\nabla_{\parallel} T_e}{T_e} \right] \quad (6.14)$$

el último término es cero al usar la ecuación (6.13) pues T no cambia de dirección a lo largo de la línea magnética; la solución es entonces

$$n = N_{\sigma}(\chi) \exp \left[\frac{e\varphi}{T_e} \right] \quad (6.15)$$

donde $N_{\sigma}(\chi)$ es una constante de integración. Definimos la densidad y potenciales normalizados como

$$\tilde{n} = \frac{n - n_0}{n'_0} \quad \tilde{\varphi} = \frac{-kc\varphi}{Bw\omega_{*e}} = \frac{e\varphi}{T_e} \frac{L_n}{w} \quad (6.16)$$

donde $n_0 = N(0)$, $n'_0 = dn/dx|_{x \gg w}$. Tomando términos lineales en la ecuación (6.15)

$$\tilde{n} = \tilde{\varphi} + H_{\sigma}(\chi) \quad (6.17)$$

La función $H_{\sigma}(\chi) = (N_{\sigma}(\chi) - n_0)/n'_0$ se determina con el transporte. De las ecuaciones (6.9) y (6.10) obtenemos

$$\vec{v}_E \cdot \nabla \left[\frac{c^2}{4\pi e v_A^2 n'_0} \nabla_{\perp}^2 \varphi - \tilde{n} \right] = 0 \quad (6.18)$$

$$\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi} - \tilde{n} = L_{\lambda}(\tilde{\varphi}) \quad (6.19)$$

L_{λ} es una constante de integración. Si en esta ecuación sustituimos \tilde{n} y definimos $K_{\lambda}(\tilde{\varphi}) = L_{\lambda}(\tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi}$, obtenemos

$$\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi} - K_{\lambda}(\tilde{\varphi}) = H_{\sigma}(\chi) \quad (6.20)$$

Los perfiles de K_{λ} también son determinados a través del transporte. Consideramos estados $H_{\sigma}(\chi) = \sigma H(\chi)$ y dentro de la separatriz $H(\chi) = 0$, esto nos da la condición de frontera $\varphi(x = 0, \alpha) = 0$. Empalmamos el campo eléctrico asintótico con el campo eléctrico del estado de referencia, es decir, la velocidad de deriva asintótica en el marco de referencia de la isla (ω_{*e}) debe ser igual y opuesta a la velocidad de fase de la isla en el marco $E = 0$ (ω); por lo que otra condición de frontera es $\partial\tilde{\varphi}/\partial x = \omega/\omega_{*e}$.

Sustituimos la ecuación (6.17) en (6.9)

$$\begin{aligned} \vec{v}_E \cdot \nabla n &= \vec{v}_E \cdot \nabla \left(\tilde{n} n'_0 + n_0 \right) \\ &= \vec{v}_E \cdot \nabla (\tilde{n} n'_0) \\ &= \vec{v}_E \cdot n'_0 \nabla [\tilde{\varphi} + \sigma H(\chi)] \end{aligned} \quad (6.21)$$

Calculamos el término $\vec{v}_E \cdot \nabla \tilde{\varphi}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_E \cdot \nabla \tilde{\varphi} &= -\frac{1}{B_0^2} \left(\nabla \varphi \times \vec{B}_0 \right) \cdot \nabla \tilde{\varphi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Entonces

$$\vec{v}_E \cdot \nabla n = \sigma n'_0 \vec{v}_E \cdot \nabla H(\chi) \quad (6.23)$$

El operador ∇ en coordenadas de flujo aplicado a $H(\chi)$

$$\vec{v}_E \cdot \nabla n = \sigma n'_0 \vec{v}_E \cdot \nabla \psi \frac{\partial H(\chi)}{\partial \psi} \quad (6.24)$$

Calculando el término $\vec{v}_E \cdot \nabla \psi$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_E \cdot \nabla \psi &= -\frac{1}{B_0^2} \left(\nabla \varphi \times \vec{B}_0 \right) \cdot \nabla \psi \\
&= \frac{1}{B_0^2} \left(\vec{B}_0 \times \nabla \varphi \right) \cdot \nabla \psi \\
&= \frac{1}{B_0^2} \left(\nabla \psi \times \vec{B}_0 \right) \cdot \nabla \varphi
\end{aligned} \tag{6.25}$$

De la versión covariante del campo magnético

$$\begin{aligned}
\nabla \psi \times \vec{B}_0 &= \nabla \psi \times (G \nabla \phi + I \nabla \theta + h \nabla \psi) \\
&= G \nabla \psi \times \nabla \phi - I \nabla \theta \times \nabla \psi
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Pero en la forma contravariante

$$\vec{B}_0 = \nabla \psi \times \nabla \theta + {}_t \nabla \phi \times \nabla \psi \tag{6.27}$$

$$\nabla \psi \times \nabla \phi = -\frac{1}{t} \nabla \theta \times \nabla \psi - \frac{1}{t} \vec{B}_0 \tag{6.28}$$

Sustituyendo en $\nabla \psi \times \vec{B}_0$

$$\begin{aligned}
\nabla \psi \times \vec{B}_0 &= -\frac{G}{t} \vec{B}_0 - \frac{G}{t} \nabla \theta \times \nabla \psi - I \nabla \theta \times \nabla \psi \\
&= -\frac{G}{t} \vec{B}_0 - \frac{1}{t} (G + {}_t I) \nabla \theta \times \nabla \psi
\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\vec{v}_E \cdot \nabla \psi = -\frac{G}{t} \frac{\vec{B}_0}{B_0^2} \cdot \nabla \varphi - \frac{(G + {}_t I)}{t B_0^2} (\nabla \theta \times \nabla \psi) \cdot \nabla \varphi \tag{6.30}$$

Notamos que el jacobiano J está relacionado con el operador

$$\begin{aligned}
(\nabla \theta \times \nabla \psi) \cdot \nabla &= (\nabla \theta \times \nabla \psi) \cdot \left(\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
&= -\nabla \psi \times \nabla \theta \cdot \nabla \phi \frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$(\nabla \theta \times \nabla \psi) \cdot \nabla = -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{6.32}$$

Por lo que $\vec{v}_E \cdot \nabla\psi$ es

$$\vec{v}_E \cdot \nabla\psi = -\frac{G \vec{B}_0}{\iota B_0^2} \cdot \nabla\varphi + \frac{(G + \iota I)}{\iota B_0^2} \frac{1}{J} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \quad (6.33)$$

y usando el hecho de que $B_0^2 = (G + \iota I)/J$

$$\vec{v}_E \cdot \nabla\psi = -\frac{G}{\iota B_0} \nabla_{\parallel}\varphi + \frac{1}{\iota} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \quad (6.34)$$

Además

$$\frac{\partial H(\chi)}{\partial\psi} = \frac{dH(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{d\psi} \quad (6.35)$$

De la definición de χ

$$\frac{d\chi}{d\psi} = -\frac{1}{4\chi A} \quad (6.36)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}_E \cdot \nabla n &= \frac{\sigma n'_0}{4\chi A} \frac{dH}{d\chi} \left[\frac{G}{\iota B_0} \nabla_{\parallel}\varphi - \frac{1}{\iota} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \right] \\ &= \frac{1}{e} \nabla_{\parallel} J_{\parallel} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Es conveniente cambiar la derivada respecto a ϕ por la variable helicoidal α

$$-\frac{1}{\iota} \frac{\partial\varphi(\psi, \alpha)}{\partial\phi} = \frac{\partial\varphi(\psi, \alpha)}{\partial\alpha} \quad (6.38)$$

Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial

$$\nabla_{\parallel} J_{\parallel} = \frac{e\sigma n'_0}{4\chi A} \frac{dH}{d\chi} \left(\frac{G}{\iota B_0} \right) \nabla_{\parallel}\varphi + \frac{e\sigma n'_0}{4\chi A} \frac{dH}{d\chi} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \quad (6.39)$$

Integrando sobre las líneas magnéticas

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} ds = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} s(\psi) \quad (6.40)$$

donde s es la longitud de la línea magnética y el resultado para la corriente paralela

$$J_{\parallel} = \frac{e\sigma n'_0}{4\chi A} \frac{dH}{d\chi} \frac{G}{\epsilon B_0} \varphi + \frac{e\sigma n'_0}{4\chi A} \frac{dH}{d\chi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} s + I(\chi) \quad (6.41)$$

con $I(\chi)$ la constante de integración. Aplicando el promedio definido en la ecuación (6.3) a la corriente paralela

$$\left\langle \frac{dH(\chi)}{d\chi} \varphi \right\rangle = \frac{dH}{d\chi} \langle \varphi \rangle \quad (6.42)$$

$$\langle I(\chi) \rangle = I \langle 1 \rangle \quad (6.43)$$

$$\left\langle s \frac{dH(\chi)}{d\chi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right\rangle = s \frac{dH}{d\chi} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right\rangle \quad (6.44)$$

Pero calculando la integral del promedio de $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right\rangle &= \frac{1}{\langle 1 \rangle} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\zeta \sqrt{g} x^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

y al escribir en términos de $\tilde{\varphi}$

$$\langle \varphi \rangle = -\frac{Bw\omega_{*e}}{kc} \langle \tilde{\varphi} \rangle \quad (6.46)$$

Finalmente, el promedio de la corriente paralela es

$$\langle J_{\parallel} \rangle = -\frac{e\sigma n'_0}{4\chi A} \frac{Bw\omega_{*e}}{kc\epsilon B_0} G \frac{dH}{d\chi} \langle \tilde{\varphi} \rangle + I(\chi) \langle 1 \rangle \quad (6.47)$$

Las constantes las podemos reducir usando la ecuación (4.9)

$$\begin{aligned} -\frac{Bw\omega_{*e}}{4kA} &= \frac{Bw}{4A} \frac{\rho_s c_s}{L_n} \\ &= \frac{L_s \rho_s c_s Bw}{\epsilon w^2 B L_n L_\alpha} \\ &= \frac{\rho_s c_s}{\epsilon w} \frac{L_s}{L_n L_\alpha} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Por lo tanto la corriente de polarización es, $J_{pol} = J_{\parallel} - \frac{\langle J_{\parallel} \rangle}{\langle 1 \rangle}$

$$\frac{J_{pol}}{n'_0 e c_s} = \frac{\rho_s}{w} \frac{L_s}{L_n L_\alpha} \frac{\sigma}{\chi} \frac{G}{\epsilon^2 B_0} \frac{dH}{d\chi} \left(\tilde{\varphi} - \frac{\langle \tilde{\varphi} \rangle}{\langle 1 \rangle} + \frac{\epsilon B_0 s}{G} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \right) \quad (6.49)$$

Vemos que el último término en el paréntesis proviene de haber tomado en cuenta la geometría helicoidal.

De las ecuaciones para Δ_{pol} vistas en la sección 4.3, (4.49) y (4.50), obtenemos una expresión para g , (4.52). Las constantes las reducimos de nuevo de manera que al introducir la corriente de polarización en la expresión para g obtenemos, en el límite cuando $T_i \rightarrow 0$, que implica $\omega_{*i} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} g = & - \left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s} \right)^2 \frac{m_0 G}{\epsilon^2 B_0 L_\alpha} \oint \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma}{\chi} \frac{dH}{d\chi} \left(\tilde{\varphi} - \frac{\langle \tilde{\varphi} \rangle}{\langle 1 \rangle} \right) \cos(m_0 \alpha) \\ & - \left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s} \right)^2 \frac{m_0}{\epsilon^2 B_0 L_\alpha} \oint \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma}{\chi} s \epsilon B_0 \frac{dH}{d\chi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \cos(m_0 \alpha) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Usando el resultado de Connor [2] para la primer integral y usando $\xi = m_0 \alpha$

$$\begin{aligned} g = & - \left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s} \right)^2 \frac{G}{\epsilon^2 B_0 L_\alpha} \oint \frac{d\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma}{\chi} \frac{dH}{d\chi} \left[\tilde{\varphi} \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_\chi}{\langle 1 \rangle_\chi} \right) \right. \\ & \left. + \epsilon m_0 \frac{B_0}{G} s \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \cos \xi \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

Analizaremos ahora la medida en la que este término extra afecta a Δ_{pol} para cuando tenemos islas anchas o angostas.

6.1. Solución en el límite ρ_s/w grande

En este caso el término de vorticidad domina sobre los demás por lo que es el que se debe anular, pues si la isla es delgada entonces las modificaciones que produce, contenidas en H y K , son despreciables

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi}_0 = 0 \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (6.53)$$

La solución para la ecuación de Laplace:

$$\tilde{\varphi}_0 = Ax + B\alpha + C\alpha x \quad (6.54)$$

De la primer condición de frontera

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0(x = 0, \alpha) = B\alpha = 0 \\ B = 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

y de la segunda condición de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x} = A + C\alpha = \frac{\omega}{\omega_{*e}} \\ A = \frac{\omega}{\omega_{*e}} \quad C = 0 \end{aligned} \quad (6.56)$$

Encontramos que la solución que satisface las condiciones de frontera es:

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{\omega}{\omega_{*e}} x \quad (6.57)$$

Por lo tanto el nuevo término $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} = 0$ y no tiene contribución en la ecuación [6.51](#) para g .

Analizamos entonces el caso cuando este término si contribuye.

6.2. Resultados en el límite MHD

La expansión para el potencial

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right) \tilde{\varphi}_1 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right)^2 \tilde{\varphi}_2 + \dots \quad (6.58)$$

Introduciendo la expansión en la ecuación diferencial

$$\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi} - K(\tilde{\varphi}) = \sigma H(\chi) \quad (6.59)$$

donde hemos tomado estados en los que n y φ son impares y por lo tanto $H_\sigma = \sigma H$,

$$\begin{aligned} \rho_s^2 \nabla_\perp^2 \left[\tilde{\varphi}_0 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right) \tilde{\varphi}_1 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right)^2 \tilde{\varphi}_2 + \dots \right] \\ - K \left[\tilde{\varphi}_0 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right) \tilde{\varphi}_1 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right)^2 \tilde{\varphi}_2 + \dots \right] = \sigma H(\chi) \end{aligned} \quad (6.60)$$

Expandimos la función $K(\tilde{\varphi})$ alrededor de $\tilde{\varphi}_0$

$$K(\tilde{\varphi}) = K \left[\tilde{\varphi}_0 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right) \tilde{\varphi}_1 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right)^2 \tilde{\varphi}_2 + \dots \right] \quad (6.61)$$

$$= K(\tilde{\varphi}_0) + K'(\tilde{\varphi}_0)(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0) + \dots \quad (6.62)$$

$$= K(\tilde{\varphi}_0) + K'(\tilde{\varphi}_0) \left[\left(\frac{\rho_s}{w}\right) \tilde{\varphi}_1 + \left(\frac{\rho_s}{w}\right)^2 \tilde{\varphi}_2 \right] \quad (6.63)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_s^2 \left[\nabla_\perp^2 \tilde{\varphi}_0 + \frac{\rho_s}{w} \nabla_\perp^2 \tilde{\varphi}_1 + \frac{\rho_s^2}{w^2} \nabla_\perp^2 \tilde{\varphi}_2 \right] \\ - K(\tilde{\varphi}_0) - K'(\tilde{\varphi}_0) \left[\frac{\rho_s}{w} \tilde{\varphi}_1 + \frac{\rho_s^2}{w^2} \tilde{\varphi}_2 \right] = \sigma H(\chi) \end{aligned} \quad (6.64)$$

Los términos de orden más bajo:

$$K(\tilde{\varphi}_0) = -\sigma H(\chi) \quad (6.65)$$

Con esto definimos la función Φ como

$$\tilde{\varphi}_0 = K^{-1}(-\sigma H) \equiv \sigma \Phi(\chi) \quad (6.66)$$

Al aplicar la función K al lado derecho de la ecuación anterior

$$-\sigma H = K[\sigma \Phi(\chi)] \quad (6.67)$$

Al derivar $K(\sigma \Phi)$ respecto a χ

$$\frac{dK}{d\chi} = \sigma \frac{dK}{d\Phi} \frac{d\Phi}{d\chi} = -\sigma \frac{dH}{d\chi} \quad (6.68)$$

$$\frac{dK}{d\Phi} = \frac{-dH/d\chi}{d\Phi/d\chi} \quad (6.69)$$

$$K'[\Phi(\chi)] = -\frac{H'(\chi)}{\Phi'(\chi)} \quad (6.70)$$

De la ecuación (6.64), los términos de orden ρ_s^2 :

$$\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi}_0 = \frac{\rho_s^2}{w^2} K' \tilde{\varphi}_2 \quad (6.71)$$

Al hacer el cambio de variable $X = xw$, por el lado izquierdo de la ecuación anterior notamos

$$\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi}_0 = \rho_s^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \sigma \Phi \quad (6.72)$$

$$= \frac{\rho_s^2}{w^2} \sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (6.73)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{\sigma}{K'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\Phi'}{H'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (6.74)$$

Con los resultados anteriores para $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0 + \rho_s^2/w^2 \tilde{\varphi}_2$ podemos calcular g , de nuevo el término $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}$ no contribuye a la ecuación 6.51 ya que $\Phi = \Phi(\chi)$. Entonces g

$$g = -\left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s}\right)^2 \frac{G}{t^2 B_0 L_{\alpha}} \oint \frac{d\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\chi} \frac{dH}{d\chi} \sigma \tilde{\varphi} \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_{\chi}}{\langle 1 \rangle_{\chi}} \right) \quad (6.75)$$

$$g = -\left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s}\right)^2 \frac{G}{t^2 B_0 L_{\alpha}} \left[\oint \frac{d\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\chi} H' \sigma^2 \Phi(\chi) \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_{\chi}}{\langle 1 \rangle_{\chi}} \right) \right. \\ \left. - \oint \frac{d\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\chi} \sigma^2 \Phi' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\rho_s^2}{w^2} \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_{\chi}}{\langle 1 \rangle_{\chi}} \right) \right] \quad (6.76)$$

Recordemos que $\sigma^2 = 1$ y χ dado por la ecuación (4.11) depende de x^2 . Al calcular cada término de la ecuación anterior y reescribiendo en términos del potencial eléctrico normalizado $\hat{\Phi} = (\omega_{*e}/\omega)\Phi$

$$g = -\frac{G}{t^2 B_0 L_\alpha} \left[\frac{w^2}{\rho_s^2} \oint \frac{d\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\chi} H' \frac{\omega_{*e}}{w} \hat{\Phi}(\chi) \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_\chi}{\langle 1 \rangle_\chi} \right) - \oint \frac{d\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\chi} \hat{\Phi}' \left(\frac{1}{\chi} \frac{d\hat{\Phi}}{d\chi} - \frac{x^2}{\chi^3} \frac{d\hat{\Phi}}{d\chi} + \frac{d^2 \hat{\Phi}}{d\chi^2} \frac{x^2}{\chi^2} \right) \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_\chi}{\langle 1 \rangle_\chi} \right) \right] \quad (6.77)$$

Pero por la paridad de H y Φ hay integrales que se anulan, además es conveniente cambiar la variable de integración x a χ , usando de nuevo su definición. Entonces la expresión resultante será

$$g = \frac{G}{t^2 B_0 L_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \hat{\Phi}' \left[\frac{d^2 \hat{\Phi}}{d\chi^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{d\hat{\Phi}}{d\chi} \frac{1}{\chi^3} \right] \oint \frac{d\xi}{\pi} x \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_\chi}{\langle 1 \rangle_\chi} \right) \quad (6.78)$$

$$= \frac{G}{t^2 B_0 L_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \frac{d}{d\chi} \left(\frac{1}{\chi} \frac{d\hat{\Phi}}{d\chi} \right)^2 \frac{1}{\chi} \oint \frac{d\xi}{2\pi} \frac{\chi}{x} x^2 \left(\cos \xi - \frac{\langle \cos \xi \rangle_\chi}{\langle 1 \rangle_\chi} \right)$$

y al resolver las integrales en α

$$g = \frac{m_0 G}{t^2 B_0 L_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{2\chi} \frac{d}{d\chi} \left(\frac{1}{\chi} \frac{d\hat{\Phi}}{d\chi} \right)^2 \left(\langle \cos^2(m_0 \alpha) \rangle_\chi - \frac{\langle \cos(m_0 \alpha) \rangle_\chi^2}{\langle 1 \rangle_\chi} \right) \quad (6.79)$$

Finalmente

$$g = \frac{m_0 G}{t^2 B_0 L_\alpha} \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi} \frac{d}{d\chi} \left(\frac{1}{\chi} \frac{d\hat{\Phi}}{d\chi} \right)^2 \left(\langle \cos^2(m_0 \alpha) \rangle_\chi - \frac{\langle \cos(m_0 \alpha) \rangle_\chi^2}{\langle 1 \rangle_\chi} \right) \quad (6.80)$$

6.3. Solución en el límite ρ_s/w pequeño

Consideramos de nuevo la ecuación (6.63) para un potencial externo $\tilde{\varphi}_{ext}$. De la ecuación (6.20), la ecuación a considerar en este límite es

$$\rho^2 \nabla_\perp^2 \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}_{ext} \quad (6.81)$$

Hacemos una expansión de $\tilde{\varphi}_0$

$$\tilde{\varphi}_0 = \sigma \Phi(\chi) = \sigma [\Phi(1) + \Phi'(1)(\chi - 1) + \dots] \quad (6.82)$$

$\Phi(1) = 0$ porque $\Phi = 0$ dentro de la isla ($\chi \leq 1$)

$$\tilde{\varphi}_0 = \sigma\Phi'(1)(\chi - 1) \quad (6.83)$$

Como estamos cerca de la isla/separatriz:

$$(\chi - 1) \equiv \delta \ll 1 \quad (6.84)$$

$$\rightarrow \chi = \delta + 1 \quad (6.85)$$

Al tomar $\chi(\cos(\frac{m_0}{2}\alpha), x)$

$$\chi = 1 + \frac{\partial\chi}{\partial(\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))}\Big|_{\chi=1} \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) + \frac{\partial\chi}{\partial x}\Big|_{\chi=1} x \quad (6.86)$$

Entonces δ es

$$\delta = \frac{\partial\chi}{\partial x}\Big|_{\chi=1} x + \frac{\partial\chi}{\partial(\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))}\Big|_{\chi=1} \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \quad (6.87)$$

De $\chi^2 = x^2 + \sin^2(\frac{m_0}{2}\alpha)$ obtenemos $\chi d\chi = xdx + \sin(\frac{m_0}{2}\alpha)d(\sin(\frac{m_0}{2}\alpha))$.
Por otro lado de $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = -\frac{\cos x}{\sin x}$ tenemos $d(\sin x) = -\frac{\cos x}{\sin x}d(\cos x)$.

Sustituyendo obtenemos:

$$\chi d\chi = xdx - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) d\left(\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right) \quad (6.88)$$

e introduciendo en δ :

$$\delta = \frac{x}{\chi}\Big|_{\chi=1} x - \frac{\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)}{\chi}\Big|_{\chi=1} \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \quad (6.89)$$

pero en $\chi = 1$, $x = \pm \cos(m_0\alpha/2)$ tenemos $\frac{x}{\chi}\Big|_{\chi=1} = \pm \cos(m_0\alpha/2)$, por lo tanto:

$$\delta = \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\Big|_{\chi=1} \left[\pm x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right] = \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\Big|_{\chi=1} (|x| - \cos(m_0\alpha/2)) \quad (6.90)$$

y en $\tilde{\varphi}_0$:

$$\tilde{\varphi}_0 = \sigma\Phi'(1) \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\Big|_{\chi=1} (|x| - \cos(m_0\alpha/2))\Theta(|x| - \cos(m_0\alpha/2)) = \tilde{\varphi}_{ext} \quad (6.91)$$

68CAPÍTULO 6. CONTRIBUCIÓN DE LA CORRIENTE DE POLARIZACIÓN

Se agrega la función de Heaviside para contemplar $\Phi(\chi < 1) = 0$. Usamos la función de Green para resolver

$$\frac{\rho^2}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\varphi}_G - \tilde{\varphi}_G = \delta(\chi - 1) \quad (6.92)$$

y las regiones a considerar son:

$$\begin{aligned} \chi > \chi', & \quad \tilde{\varphi}_{G>} \\ \chi < \chi', & \quad \tilde{\varphi}_{G<} \end{aligned} \quad (6.93)$$

Las soluciones a la ecuación homogénea son :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{G>} &= A_+ e^{(x-x')w/\rho} + A_- e^{-(x-x')w/\rho} \\ \tilde{\varphi}_{G<} &= B_+ e^{(x'-x)w/\rho} + B_- e^{-(x'-x)w/\rho} \end{aligned} \quad (6.94)$$

Aplicamos la condición de frontera $\tilde{\varphi}_{G<}(\chi = 0, \alpha) = 0$ y obtenemos

$$B_+ = -B_- e^{-2x'/\rho} \equiv B \quad (6.95)$$

Entonces

$$\tilde{\varphi}_{G<} = B \left[e^{w(x'-x)/\rho} - e^{w(x'+x)/\rho} \right] \quad (6.96)$$

Además, a medida que $\chi \rightarrow \infty$, $\tilde{\varphi}_{G>} \rightarrow 0$, por lo que $A_+ = 0$ y $A_- \equiv A$

$$\tilde{\varphi}_{G>} = A e^{-(x-x')w/\rho} \quad (6.97)$$

Integrando la ecuación para la función de Green se tiene

$$\frac{\rho^2}{w^2} \int_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} d\chi \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_G}{\partial \chi^2} - \int_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} d\chi \tilde{\varphi}_G = \int_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} d\chi \delta(\chi - \chi') \quad (6.98)$$

La integral de la función δ es

$$\int dx \delta(x - x') = \Theta(x - x') = \begin{cases} 0 & x < x' \\ 1 & x \geq x' \end{cases} \quad (6.99)$$

Además podemos dividir la región de integración $\chi' - \delta < \chi < \chi' + \delta$, entonces los límites de integración van de $\chi = \chi' - \delta$ a $\chi = \chi' + \delta$. Entonces

podemos usar la función $\tilde{\varphi}_{G<}$ en el dominio $\chi < \chi'$ y la función $\tilde{\varphi}_{G>}$ en el dominio $\chi > \chi'$ con las expresiones obtenidas antes.

Evaluamos así cada integral, comenzando por la segunda de la ecuación

(6.98)

$$\int_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} d\chi \tilde{\varphi}_G = \int_{\chi'-\delta}^{\chi'} d\chi \tilde{\varphi}_{G<} + \int_{\chi'}^{\chi'+\delta} d\chi \tilde{\varphi}_{G>} \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned} \int_{\chi'-\delta}^{\chi'} d\chi \tilde{\varphi}_{G<} &= \int_{\chi'-\delta}^{\chi'} d\chi B \left[e^{w(\chi'-\chi)/\rho} - e^{w(\chi'+\chi)/\rho} \right] \\ &= -\frac{\rho B}{w} \left[e^{w(\chi'-\chi)/\rho} + e^{w(\chi'+\chi)/\rho} \right]_{\chi'-\delta}^{\chi'} \\ &= -\frac{\rho B}{w} \left[1 - e^{w\delta/\rho} + e^{2w\chi'/\rho} - e^{w(2\chi'-\delta)/\rho} \right] \end{aligned} \quad (6.101)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\chi'}^{\chi'+\delta} d\chi \tilde{\varphi}_{G>} &= \int_{\chi'}^{\chi'+\delta} d\chi A e^{w(\chi'-\chi)/\delta} \\ &= -\frac{\rho A}{w} \left[e^{-\delta/\rho} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.102)$$

Cuando $\delta = 0$ estas integrales valen cero, por lo tanto

$$\int_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} d\chi \tilde{\varphi}_G = 0 \quad (6.103)$$

La integral restante es

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{w^2} \int_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} d\chi \frac{d^2 \tilde{\varphi}_G}{d\chi^2} &= \frac{\rho^2}{w^2} \frac{d\tilde{\varphi}_G}{d\chi} \Big|_{\chi'-\delta}^{\chi'+\delta} \\ &= \frac{\rho^2}{w^2} \left(\frac{d\tilde{\varphi}_G}{d\chi} \Big|_{\chi'+\delta} - \frac{d\tilde{\varphi}_G}{d\chi} \Big|_{\chi'-\delta} \right) \end{aligned} \quad (6.104)$$

combinado con la ecuación (6.99)

$$\frac{\rho^2}{w^2} \left(\frac{d\tilde{\varphi}_G}{d\chi} \Big|_{\chi'+\delta} - \frac{d\tilde{\varphi}_G}{d\chi} \Big|_{\chi'-\delta} \right) = \begin{cases} 0 & \chi < \chi' \\ 1 & \chi \geq \chi' \end{cases} \quad (6.105)$$

70CAPÍTULO 6. CONTRIBUCIÓN DE LA CORRIENTE DE POLARIZACIÓN

Al hacer $\delta = 0$ estamos evaluando en $\chi = \chi'$

$$\frac{\rho^2}{w^2} \left(\frac{d\tilde{\varphi}_{G>}}{d\chi} - \frac{d\tilde{\varphi}_{G<}}{d\chi} \right) \Big|_{\chi=\chi'} = 1 \quad (6.106)$$

Usando los resultados de $\tilde{\varphi}_{G>}$ y $\tilde{\varphi}_{G<}$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2}{w^2} \left(\frac{d\tilde{\varphi}_{G>}}{d\chi} - \frac{d\tilde{\varphi}_{G<}}{d\chi} \right) \Big|_{\chi'=x} \\ &= \frac{\rho^2}{w^2} \left[-\frac{wA}{\rho} e^{-w(x-\chi')/\rho} - \frac{wB}{\rho} \left(-e^{w(\chi'-x)/\rho} - e^{w(\chi'+x)/\rho} \right) \right] \Big|_{\chi=\chi'} \\ &= \frac{\rho}{w} \left[-A + B \left(1 + e^{2w\chi'/\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.107)$$

Por lo que

$$\frac{w}{\rho} = -A + B \left(1 + e^{2w\chi'/\rho} \right) \quad (6.108)$$

También debe cumplirse que $\tilde{\varphi}_{>}(\chi') = \tilde{\varphi}_{<}(\chi')$

$$A = B \left(1 - e^{2w\chi'/\rho} \right) \quad (6.109)$$

Esto nos da los valores de A y B

$$A = \frac{w}{2\rho} \left(e^{-2w\chi'/\rho} - 1 \right) \quad B = \frac{w}{w\rho} e^{-2w\chi'/\rho} \quad (6.110)$$

y las soluciones a la función de Green son

$$\tilde{\varphi}_{G>} = \frac{w}{2\rho} \left[e^{-w(x+\chi')/\rho} - e^{w(\chi'-x)/\rho} \right] \quad (6.111)$$

$$\tilde{\varphi}_{G<} = \frac{w}{2\rho} \left[e^{-w(x+\chi')/\rho} - e^{w(\chi-x')/\rho} \right] \quad (6.112)$$

Con esto podemos resolver la ecuación (6.81)

$$\rho^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}_{ext}$$

que al hacer el cambio de variable de $X = wx$

$$\frac{\rho^2}{w^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \chi^2} - \tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}_{ext} \quad (6.113)$$

Usando la función de Green integramos en χ'

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{w^2} \int \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_G(\chi, \chi')}{\partial \chi'^2} (-\tilde{\varphi}_{ext}(\chi')) d\chi' - \int \tilde{\varphi}_G(\chi, \chi') (-\tilde{\varphi}_{ext}(\chi')) d\chi' \\ = \int \delta(\chi - \chi') (-\tilde{\varphi}_{ext}(\chi')) d\chi' \quad (6.114) \\ = -\tilde{\varphi}_{ext}(\chi) \end{aligned}$$

Para que se reproduzca la ecuación (6.113) se debe cumplir que

$$\tilde{\varphi}(\chi) = - \int \tilde{\varphi}_G(\chi, \chi') \tilde{\varphi}_{ext}(\chi') d\chi' \quad (6.115)$$

Como ya conocemos $\tilde{\varphi}_G(\chi, \chi')$ podemos calcular $\tilde{\varphi}$, con los límites de integración:

$$-\tilde{\varphi}(\chi) = \begin{cases} \int_1^\infty \tilde{\varphi}_{G<}(\chi, \chi') \tilde{\varphi}_{ext}(\chi') d\chi', & \chi < 1 \\ \int_1^\chi \tilde{\varphi}_{G>} \tilde{\varphi}_{ext} d\chi' + \int_\chi^\infty \tilde{\varphi}_{G<} \tilde{\varphi}_{ext} d\chi', & \chi \geq 1 \end{cases} \quad (6.116)$$

Para expresar $\tilde{\varphi}_{ext}$ como función de χ' usamos $(\chi - 1) = |x| - |\cos(m_0\alpha/2)|$

$$\tilde{\varphi}_{exp}(x, \alpha) = a\sigma [|x| - \cos(m_0\alpha/2)] \Theta(|x| - \cos(m_0\alpha/2)) \quad (6.117)$$

La función de Heaviside ya ha sido tomando en cuenta en los límites de integración y de la separación en $\chi < 1$ y $\chi \geq 1$; entonces de

$$\tilde{\varphi}_{ext}(\chi') = a\sigma(\chi' - 1)\Theta(\chi' - 1) \quad (6.118)$$

solo usamos

$$\tilde{\varphi}_{ext}(\chi') = a\sigma(\chi' - 1) \quad (6.119)$$

para las integrales para $\tilde{\varphi}$. Evaluamos el valor de $\tilde{\varphi}$ para cada caso comen-

zando por $\chi < 1$

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \tilde{\varphi}_{G<}(\chi, \chi') \tilde{\varphi}_{ext}(\chi') d\chi' &= \\
 &= \frac{aw\sigma}{2\rho} \int_1^\infty \left(e^{-w(\chi'+\chi)/\rho} - e^{w(\chi-\chi')/\rho} \right) (\chi' - 1) d\chi' \\
 &= \frac{aw\sigma}{2\rho} \left[\int_1^\infty e^{-w(\chi+\chi')/\rho} \chi' d\chi' - \int_1^\infty e^{-w(\chi+\chi')/\rho} d\chi' \right. \\
 &\quad \left. - \int_1^\infty e^{w(\chi-\chi')/\rho} \chi' d\chi' + \int_1^\infty e^{w(\chi-\chi')/\rho} d\chi' \right] \\
 &= \frac{a\sigma}{2} \left[e^{-w(1+\chi)/\rho} + \frac{\rho}{w} e^{-w(1+\chi)/\rho} - e^{-w(1+\chi)/\rho} \right. \\
 &\quad \left. - e^{w(\chi-1)/\rho} - \frac{\rho}{w} e^{w(\chi-1)/\rho} + e^{w(\chi-1)/\rho} \right]
 \end{aligned} \tag{6.120}$$

Por lo tanto

$$-\tilde{\varphi}_{<}(\chi) = \frac{a\sigma\rho}{2w} \left[e^{-w(\chi+\chi')/\rho} - e^{w(\chi-1)/\rho} \right], \quad \chi < 1 \tag{6.121}$$

Para el caso en que $\chi \geq 1$ de la ecuación (6.116)

$$\begin{aligned}
 -\tilde{\varphi}_{\geq}(\chi) &= \frac{aw\sigma}{2\rho} \int_1^\chi d\chi' \left[e^{-w(\chi+\chi')/\rho} \chi' - e^{-w(\chi+\chi')/\rho} - e^{w(\chi'-\chi)/\rho} \chi' \right. \\
 &\quad \left. + e^{w(\chi'-\chi)/\rho} \right] + \frac{aw\sigma}{2\rho} \int_\chi^\infty d\chi' \left[e^{-w(\chi+\chi')/\rho} \chi' - e^{-w(\chi+\chi')/\rho} \right. \\
 &\quad \left. - e^{w(\chi-\chi')/\rho} \chi' + e^{w(\chi-\chi')/\rho} \right] \\
 &= \frac{a\sigma}{2} \left[\frac{\rho}{w} e^{-(1+\chi)/\rho} - \frac{\rho}{w} e^{(1-\chi)/\rho} - 2\chi + 2 \right]
 \end{aligned} \tag{6.122}$$

Entonces el valor de $\tilde{\varphi}$ es

$$-\tilde{\varphi}(\chi) = \begin{cases} \frac{a\sigma\rho}{2w} \left[e^{-w(1+\chi)/\rho} - e^{w(\chi-1)/\rho} \right], & \chi < 1 \\ \frac{a\sigma}{2} \left[\frac{\rho}{w} \left(e^{-w(1+\chi)/\rho} - e^{-w(\chi-1)/\rho} \right) - 2(\chi - 1) \right], & \chi \geq 1 \end{cases} \tag{6.123}$$

Usando de nuevo que

$$(|x| - |\cos(m_0\alpha/2)|) (|x| + |\cos(m_0\alpha/2)|) = (\chi + 1)(\chi - 1) \tag{6.124}$$

podemos reescribir la ecuación anterior en términos de x y reducirla a

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -\frac{a\sigma\rho}{2w} [e^{w(-|x| - |\cos(\xi/2)|)/\rho} - e^{w(|x| - |\cos(\xi/2)|)/\rho}] , & |x| < \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ -\frac{a\sigma\rho}{2w} [e^{w(-|x| - |\cos(\xi/2)|)/\rho} - e^{-w(|x| - |\cos(\xi/2)|)/\rho}] & \\ +a\sigma(|x| - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)) , & |x| \geq \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{cases} \quad (6.125)$$

Notamos que el argumento de la primer exponencial es el mismo en ambos casos, mientras que el argumento de la segunda exponencial cambia de signo lo que significa que la podemos expresar como valor absoluto. Recordamos también que

$$\tilde{\varphi}_{ext}(x, \alpha) = \begin{cases} 0 , & |x| < \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \\ a\sigma(|x| - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)) , & |x| \geq \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \end{cases} \quad (6.126)$$

Por lo tanto $\tilde{\varphi}$ se reduce a

$$\tilde{\varphi}(x, \alpha) = \frac{a\sigma\rho}{2w} [e^{-w||x| - |\cos(m_0\alpha/2)||/\rho} - e^{-w(|x| + |\cos(m_0\alpha/2)|)/\rho}] + \tilde{\varphi}_{ext}(x, \alpha) \quad (6.127)$$

Podemos comparar con la expansión $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0 + \frac{\rho}{w}\tilde{\varphi}_1$, ya hemos supuesto que $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_{ext}$ dada en ecuación (6.117), entonces

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{a\sigma}{2} [e^{-w||x| - |\cos(m_0\alpha/2)||/\rho} - e^{-w(|x| + |\cos(m_0\alpha/2)|)/\rho}] \quad (6.128)$$

Con esto podemos finalmente calcular el término $\partial\tilde{\varphi}/\partial\alpha$ que da la contribución de la geometría helicoidal en g (ec. 6.51)

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}(x, \alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial\tilde{\varphi}_{ext}(x, \alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\rho}{w} \frac{\partial\tilde{\varphi}_1(x, \alpha)}{\partial\alpha} \quad (6.129)$$

Las derivadas de cada potencial son

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\varphi}_{ext}}{\partial\alpha} &= \frac{a\sigma m_0}{2} \text{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \Theta\left(|x| - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right) \\ &\quad + a\sigma \left[|x| - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right] \delta\left(|x| - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right) \\ &= \frac{a\sigma m_0}{2} \text{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \Theta\left(|x| - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right) \end{aligned} \quad (6.130)$$

pues en el segundo término el valor de $\delta(|x| - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))$ solo será distinto de cero si $|x| = \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)$ pero de esta forma el término entre corchetes es cero. Luego, de la ecuación (6.128)

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} = & - \frac{a\sigma m_0}{4} \left[\frac{|x| - |\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)|}{|x| - |\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)|} e^{-|x| - |\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)|/\rho} \right. \\ & \left. + e^{-|x| + |\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)|/\rho} \right] \frac{\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)}{|\cos(\frac{m_0}{2}\alpha)|} \operatorname{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \end{aligned} \quad (6.131)$$

Ahora la integral a calcular según la ecuación (6.51) es

$$g_\alpha \equiv - \left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s} \right)^2 \frac{m_0 s}{\epsilon L_\alpha} \oint \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma}{\chi} \frac{dH}{d\chi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \right) \cos(m_0 \alpha) \quad (6.132)$$

Hay tres regiones a considerar para resolver g_α :

- A. Dentro de la separatriz $|x| < \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)$, $\Theta(|x| - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)) = 0$
- B. Fuera de la separatriz $|x| > \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)$, $\Theta(|x| - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)) = 1$
- C. En la separatriz $|x| = \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)$, $\Theta(|x| - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)) = 1$

además de los casos a considerar en $\tilde{\varphi}_1$

- 1) $x > 0$, $\cos(\frac{m_0}{2}\alpha) > 0$
- 2) $x < 0$, $\cos(\frac{m_0}{2}\alpha) > 0$
- 3) $x > 0$, $\cos(\frac{m_0}{2}\alpha) < 0$
- 4) $x < 0$, $\cos(\frac{m_0}{2}\alpha) < 0$

A. Dentro de la separatriz

Para este caso $\tilde{\varphi}_{exp}$ es cero, así que solo obtendremos $\tilde{\varphi}_1$. La región a considerar es $-\cos(\frac{m_0}{2}\alpha) < x < \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)$ por lo que dentro de la separatriz se debe cumplir

$$\begin{aligned} x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) &> 0 \\ x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) &< 0 \end{aligned} \quad (6.134)$$

Calculamos $\partial\tilde{\varphi}_1/\partial\alpha$ para cada caso de la ecuación (6.133)

$$1) \quad x > 0, \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \\ \left||x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right|\right| &= -(x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)) > 0 \\ |x| + \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \end{aligned} \quad (6.135)$$

De acuerdo a la ecuación (6.131)

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial\alpha} = \frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{w(x - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} - e^{-w(x + \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \text{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \quad (6.136)$$

$$2) \quad x < 0, \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= -x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \\ \left||x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right|\right| &= x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ |x| + \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= -x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \end{aligned} \quad (6.137)$$

De acuerdo a la ecuación (6.131)

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial\alpha} = \frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{-w(x + \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} - e^{w(x - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \text{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \quad (6.138)$$

$$3) \quad x > 0, \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ \left||x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right|\right| &= x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ |x| + \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \end{aligned} \quad (6.139)$$

De acuerdo a la ecuación (6.131)

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} = \frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{-w(x+\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} + e^{-w(x-\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) > 0 \quad (6.140)$$

$$4) \quad x < 0, \quad \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) < 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left| \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \right| &= -x + \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) > 0 \\ \left| |x| - \left| \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \right| \right| &= -x + \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) > 0 \\ |x| + \left| \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \right| &= -x - \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) < 0 \end{aligned} \quad (6.141)$$

De acuerdo a la ecuación (6.131)

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} = \frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{w(x-\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} + e^{w(x+\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) > 0 \quad (6.142)$$

B. Fuera de la separatriz

Fuera de la separatriz $\Theta \left(|x| - \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \right) = 1$, y se deben considerar las regiones $x < -\cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right)$ y $x > \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right)$, es decir que se debe cumplir

$$\begin{aligned} x + \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) &< 0 \\ x - \cos \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) &> 0 \end{aligned} \quad (6.143)$$

Calculamos $\partial \tilde{\varphi}_1 / \partial \alpha$ de nuevo para cada caso

$$1) \quad x > 0, \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ \left||x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right|\right| &= x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ |x| + \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} &= -\frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{-w(x - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} + e^{-w(x + \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \text{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (6.145)$$

$$2) \quad x < 0, \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= -x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ \left||x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right|\right| &= -(x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)) > 0 \\ |x| + \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= -x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \end{aligned} \quad (6.146)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} &= -\frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{w(x + \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} + e^{w(x - \cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \text{sen}\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (6.147)$$

$$3) \quad x > 0, \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0$$

$$\begin{aligned} |x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \\ \left||x| - \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right|\right| &= -(x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)) > 0 \\ |x| + \left|\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)\right| &= x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \end{aligned} \quad (6.148)$$

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} = - \frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{w(x+\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} - e^{-w(x-\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \text{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \quad (6.149)$$

$$< 0$$

4) $x < 0$, $\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0$

$$\begin{aligned} |x| - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| &= -x + \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) < 0 \\ \left| |x| - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| \right| &= x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \\ |x| + \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| &= -x - \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0 \end{aligned} \quad (6.150)$$

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} = - \frac{a\sigma m_0}{4} \left[e^{-w(x-\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} - e^{w(x+\cos(\frac{m_0}{2}\alpha))/\rho} \right] \text{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \quad (6.151)$$

$$> 0$$

C. Exactamente en la separatriz

Justo en la separatriz se tiene $|x| = \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right)$ y las relaciones que nos interesan las reescribimos en términos de cosenos

$$\begin{aligned} |x| - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| &= \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| \\ \left| |x| - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| \right| &= \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| \right| \\ |x| + \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| &= \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) + \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| \end{aligned} \quad (6.152)$$

además de $|x| > 0$ tenemos $\cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) > 0$

$$\begin{aligned} |x| - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| &= 0 \\ \left| |x| - \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| \right| &= 0 \\ |x| + \left| \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \right| &= 2 \cos\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \end{aligned} \quad (6.153)$$

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \alpha} = -\frac{a\sigma m_0}{4} e^{-2w \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)/\rho} \text{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) < 0 \quad (6.154)$$

Para ambos casos B y C, la función de Heaviside es igual a uno y la ecuación (6.130) será

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_{ext}}{\partial \alpha} = \frac{a\sigma m_0}{2} \text{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \quad (6.155)$$

Analizando los resultados obtenidos para cada caso, vemos que A-1 y A-2 son iguales y opuestos, lo mismo para A-3 y B-1, A-4 y B-2, B-3 y B-4. Entonces al sumar todas las contribuciones la única que no se anula es la contribución justo en la separatriz y da a $\partial \tilde{\varphi}/\partial \alpha$ signo negativo, pues el valor obtenido de $\partial \tilde{\varphi}_1/\partial \alpha$ es mayor que el de $\partial \tilde{\varphi}_{ext}/\partial \alpha$. Esto indica que g es positiva y por lo tanto la contribución de la corriente de polarización Δ_{pol} tiene un efecto desestabilizador a causa de la geometría no axisimétrica cuando $\omega > \omega_{*i}$.

$$g_\alpha = -\left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s} \right)^2 \frac{m_0 s}{t L_\alpha} \oint \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma^2}{\chi} \frac{dH}{d\chi} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-2w \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)/\rho} \right] \times \cos(m_0 \alpha) \text{sen} \left(\frac{m_0}{2}\alpha \right) \quad (6.156)$$

El cálculo de la integral para g dependerá de la expresión que se elija para H normalizada ($\hat{H}(\chi) = H(\chi)/(1 - \frac{\omega}{\omega_{*e}})$) según cálculos numéricos.

Capítulo 7

Simulación De Transporte ASTRA

En el capítulo anterior se obtuvo la contribución de la corriente de polarización a la estabilidad de las islas magnéticas, obteniéndose que la única contribución aparece en el caso en que $\rho_s/w \ll 1$. Por lo tanto la contribución de este efecto es pequeña en plasmas de alta temperatura. Ahora nos interesa modelar el efecto de las islas magnéticas en el transporte tomando en cuenta el efecto global de las islas sobre el campo eléctrico radial, sin incluir la pequeña contribución obtenida en el capítulo 6.

Tratamos de reproducir las observaciones del stellarator TJ-II con el código para transporte ASTRA (Automated System for TRansport Analysis) simulando la formación y rompimiento de las barreras de transporte. La ecuación que ASTRA resuelve es la ecuación de conservación de partículas y las ecuaciones de conservación de energía para iones y electrones. En ellas se introducen los flujos de partículas, $\Gamma = -D\nabla n$, y de energía, $q_j = -X_j\nabla T_j$, y los coeficientes de transporte se dan de acuerdo a un modelo predeterminado. En este caso se usa un modelo de transporte colisional neoclásico junto con uno de transporte turbulento. Además ASTRA permite incorporar otras ecuaciones para representar efectos adicionales y son de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(V'f_j) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[V' \langle (\nabla \rho)^2 \rangle \left(D_j \frac{\partial f_j}{\partial \rho} - v_j f_j \right) \right] + V' S_j \quad j = 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

En nuestro caso usamos estas ecuaciones para incluir la presencia de impurezas en el plasma, es decir, de iones más pesados que el hidrógeno. Esto

es con la finalidad de poder tener información de la emisión de radiación, la cuál se observa en el experimento. En el stellarator TJ-II las principales impurezas son de carbono, por lo que incluimos impurezas de carbono $i = CII, CIII, CIV$ tomando en cuenta los coeficientes de ionización y recombinación de cada uno

$$\frac{dn_i}{dt} = n_e(n_{i+1}(R_{i+1} + I_{i-1}) - n_i(I_i + R_i)) - \nabla \cdot \Gamma_i \quad (7.2)$$

Un efecto importante sobre el transporte es la presencia de un campo eléctrico radial que se genera por la diferencia entre flujos radiales de iones y electrones (no ambipolaridad). Dicho campo acelera o frena a las partículas por lo que altera el flujo final hacia el borde del plasma. Este flujo se calcula resolviendo la ecuación de ambipolaridad $\Gamma_i(E_r) = \Gamma_e(E_r)$ en la rutina Flux Er. La presencia de la isla se introduce en esta parte. Se supone que, como la separatriz de la isla magnética debe ser una equipotencial, el campo en el interior de la isla debe ser cero. Entonces, se simula la formación de la isla haciendo que el campo eléctrico sea cero en una región del ancho de la isla. Por ende, habrá un gradiente de campo grande en la separatriz.

Debido a la inestabilidad de modos de desgarre, la isla tiene un crecimiento rápido a su ancho grande, después de alcanzar su máximo el valor del ancho decae lentamente. El flujo cizallado se vuelve grande cuando la isla alcanza su ancho máximo. La función que describe el comportamiento de la isla se introdujo como una onda cuadrada para representar su variación en el tiempo entre su valor mínimo y máximo.

Además del transporte colisional se incluye el transporte anómalo debido a la turbulencia del plasma. El modelo de turbulencia está basado en los modos de globos resistivos (RBM) para representar la reducción del transporte anómalo debido a flujo cizallado grande [1]. El nivel de fluctuación ϵ está determinado por

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = (\gamma_{RB} - \alpha_1 \epsilon - \alpha_2 | \omega'_E |) \epsilon - \nabla \cdot \Gamma_\epsilon \quad (7.3)$$

donde γ_{RB} es la tasa de crecimiento RBM, α_1 es el término de saturación y Γ_E es un flujo convectivo. La cizalla del flujo $\vec{E} \times \vec{B}$ está representada por $\omega'_E = (c/B)dE_r/dr$ y aparece en el último término como un efecto estabilizador de las fluctuaciones turbulentas. Cuando este término es grande, o

sea cuando el campo eléctrico radial tiene un gradiente radial grande, la turbulencia se reduce mucho, de modo que el transporte anómalo en esa zona puede disminuir lo suficiente como para formar una barrera de transporte. La ecuación para las fluctuaciones se introduce en ASTRA a través de una de las ecuaciones (7.1).

La potencia de radiación $PRad$ está dada por

$$PRad = n_e(C_e f n_I + C_2 n_2 + C_3 n_3 + C_4 n_4) \quad (7.4)$$

con $C_i = R_i W_i$. Esta potencia incluye las emisiones de las tres impurezas de carbono y la emisión de continuo del resto de las componentes del plasma dada por el primer término. Dicha emisión es la que da la información medida experimentalmente.

La rutina SHRATE da la variación de la cizalla por deriva eléctrica, calcula la diferencia entre el campo eléctrico en un punto fuera y un punto dentro de isla. En el punto de ancho de isla máximo es donde se manifiesta mayor cantidad de cizalla.

Los resultados de la simulación muestran la formación de la barrera en la posición de la isla, que a su vez aparece en la superficie racional $n/m = 8/5$. La figura 7.1 muestra los perfiles radiales de distintos parámetros del plasma a un tiempo en el que la isla tiene ancho máximo. La posición de la racional es en $\rho = r/a = 0,74$ y se puede apreciar que los coeficientes de transporte De (coeficiente de difusión), Xe y Xi (conductividades térmicas de electrones e iones) tienen una gran caída en su valor en ese punto, lo que es el indicador de una barrera de transporte. A la vez, los perfiles de densidad ni y ne junto con los de temperatura Te y Ti muestran un pequeño pedestal en ese punto como resultado de la presencia de la barrera. La aparición de pedestales en el perfil de temperatura es típica en los experimentos donde se tienen barreras de transporte. En los paneles inferiores se ve que también el nivel de fluctuaciones cae en la posición de las islas y el campo eléctrico tiene picos en las dos posiciones de la frontera de la isla (la separatriz). También se muestran los perfiles de emisión de las tres impurezas de carbono que están concentradas en el borde, que es la parte más fría.

Vemos que las impurezas de carbono se encuentran en el borde del plasma y hay una reducción de los coeficientes de transporte en la región en donde la

isla está localizada. En la Fig. 7.2 se muestra una mejor representación de los perfiles radiales para el campo eléctrico radial y para la difusividad térmica de los electrones afectados por el ancho de la isla cuando se encuentra cerca del máximo y confirma que el flujo cizallado crece para reducir el transporte alrededor de la superficie racional.

El aumento de actividad magnética indica el inicio de la inestabilidad y es debida a un cambio abrupto de rotación. La Fig. 7.3 muestra la evolución en el tiempo de las emisiones bolométricas a distintos radios y observamos que el radio de inversión está en $\rho = 0,76$ que corresponde al radio al que se fijó la superficie racional. Esto coincide con los resultados experimentales de la Fig. 1.6. Cuando la isla aparece, se tiene barrera de transporte y la bolometría aumenta del lado interno de la barrera, mientras que por fuera (a radios mayores) no se ven partículas.

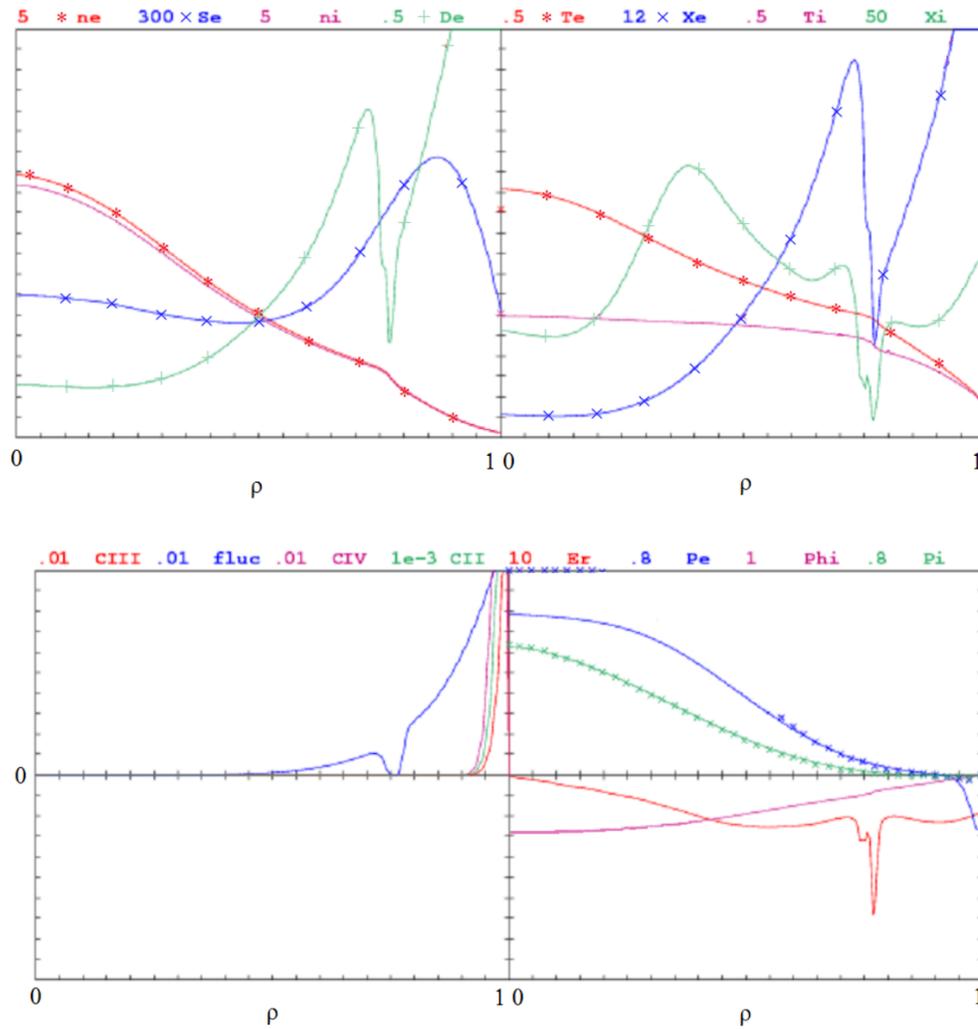


Figura 7.1: Arriba: Perfiles de densidad, temperatura y flujos coeficientes de transporte para iones y electrones. Abajo: Perfiles de impurezas de Carbono y campo eléctrico radial E_r

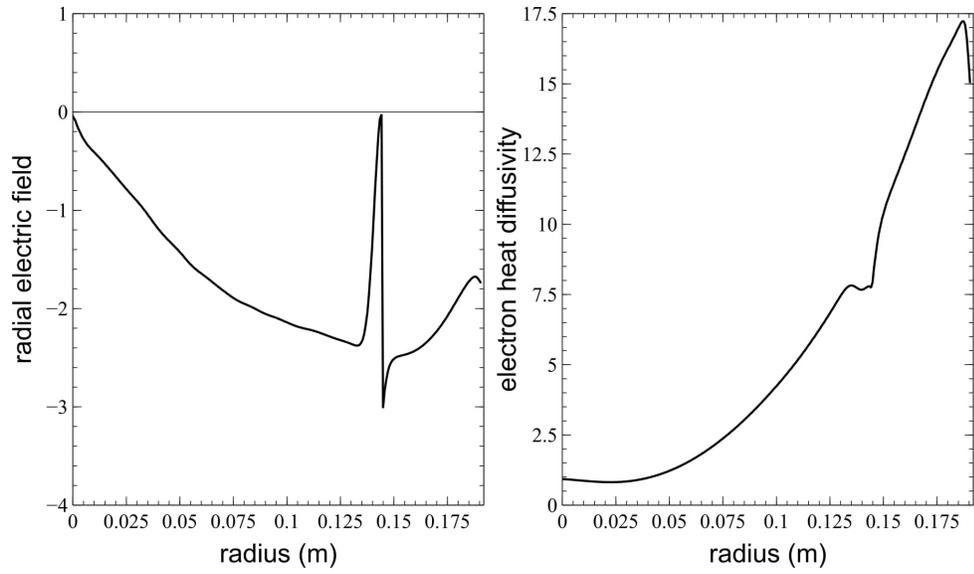


Figura 7.2: Perfiles radiales para campo eléctrico radial y difusividad térmica de los electrones

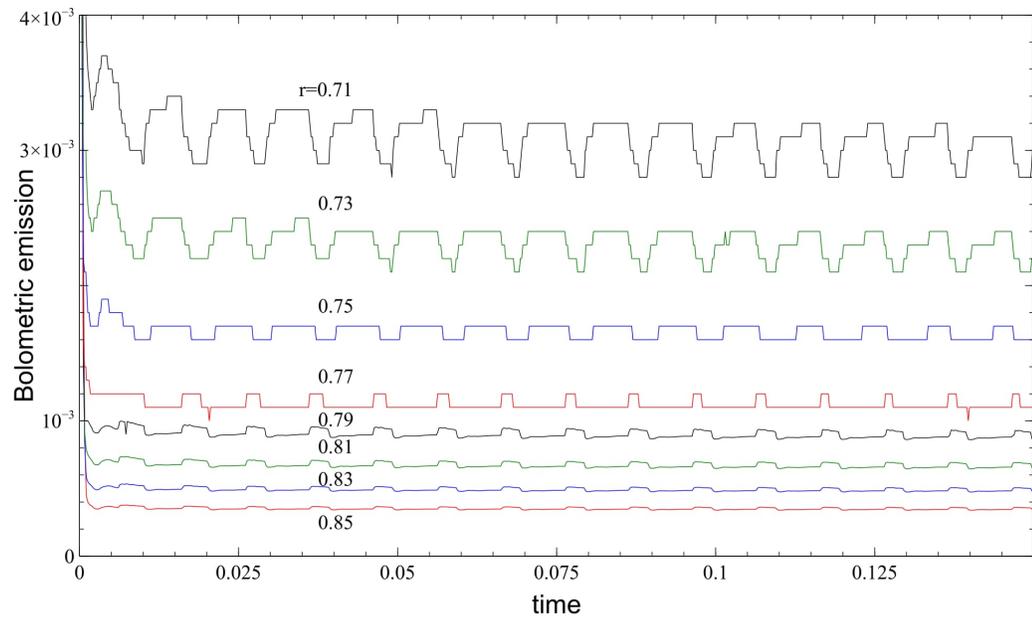


Figura 7.3: Evolución temporal de emisiones bolométricas

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron dos aspectos del comportamiento de las islas magnéticas en aparatos de confinamiento magnético de tipo stellarator. El interés particular es en las propiedades de las islas en presencia de flujos cizallados en el plasma. Cuando se tiene flujo externo a la isla se generan corrientes de polarización debido a que la velocidad cambia en el tiempo por el efecto de Bernoulli (o de tobera). Esta corriente de polarización modifica la estabilidad de la isla y había sido calculada para geometrías axisimétricas (como el tokamak).

La primera parte del trabajo consistió en encontrar la contribución de la corriente de polarización para la geometría del stellarator, que tiene una simetría helicoidal pero no axial. En la segunda parte se desarrolló un modelo para hacer la simulación de los experimentos del TJ-II en los que se observa una interacción entre la formación de islas magnéticas y la existencia de barreras de transporte asociadas a flujos cizallados. El transporte se consideró solo en el régimen Pfirsch-Schlüter encontrando que el término que afecta la derivada convectiva en coordenadas de flujo es

$$\vec{v}_E \cdot \nabla \psi = -\frac{G}{\iota B_0} \nabla_{\parallel} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (8.1)$$

y la corriente de polarización en geometría helicoidal,

$$\frac{J_{pol}}{n'_0 e c_s} = \frac{\rho_s}{w} \frac{L_s}{L_n L_\alpha} \frac{\sigma}{\chi} \frac{G}{\iota^2 B_0} \frac{dH}{d\chi} \left(\tilde{\varphi} - \frac{\langle \tilde{\varphi} \rangle}{\langle 1 \rangle} + \frac{\iota B_0 s}{G} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha} \right) \quad (8.2)$$

Que se reduce al resultado para tokamak obtenido por Connor *et al.* [2].

La contribución en la corriente de polarización obtenida en ec. 8.2 solo será importante en el límite $\rho_s/w \ll 1$ y proviene de la contribución por la separatriz de la isla, siendo esta igual a

$$g_\alpha = - \left(\frac{\omega_{*e} w}{\omega \rho_s} \right)^2 \frac{m_0 s}{\epsilon L_\alpha} \oint \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma^2}{\chi} \frac{dH}{d\chi} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-2w \cos(\frac{m_0}{2}\alpha)/\rho} \right] \times \cos(m_0 \alpha) \sin\left(\frac{m_0}{2}\alpha\right) \quad (8.3)$$

Se vio que esta contribución es de signo negativo y provoca que $\Delta_{pol} > 0$. Esto indica en la ecuación de Rutherford para la evolución de la isla magnética que la corriente de polarización tendrá un efecto desestabilizador. Para el caso $\rho_s/w \gg 1$ este término no contribuye, lo que indica que para este caso la geometría helicoidal no juega ningún papel.

Los flujos cizallados causan asimetría en los perfiles de velocidad y estos influyen en la estabilidad. La inestabilidad se puede interpretar como inicio de actividad magnética debido a cambios abruptos de rotación. El balance de torcas determina la frecuencia de rotación de la isla. Cuando la rotación de la isla es baja la isla es ancha pero la torca electromagnética es pequeña y está balanceada por una torca viscosa también pequeña, la barrera de transporte que se genera en esta situación hace que la temperatura crezca provocando que la torca viscosa aumente hasta que llegue a un punto en el que se pierde el balance con la torca electromagnética y se da una bifurcación a un estado de rotación grande. En ese momento la barrera se destruye y el ancho de la isla disminuye. Por lo tanto la temperatura baja y con ella la torca viscosa dando lugar a la segunda bifurcación que provoca que la rotación decrezca nuevamente completando el ciclo.

Si la isla tiene una frecuencia de rotación mayor que la frecuencia diamagnética de los iones, entonces $\Delta_{pol} > 0$ y J_{pol} es desestabilizadora. Mientras que si $\omega < \omega_{*i}$, J_{pol} es estabilizadora.

La presencia de la isla magnética modifica los coeficientes de transporte de partículas en una región alrededor de ella. En esta región se tienen flujos zonales en la separatriz de la isla que reducen la turbulencia y su efecto en el transporte lo cual representa una barrera de transporte.

Hemos podido reproducir, al menos de forma cualitativa, el comportamiento observado en TJ-II por medio de simulaciones de transporte en AS-TRA. En la posición donde hemos localizado a la isla magnética se obtienen perfiles de gradientes grandes de cizalla y campo eléctrico simulando la barrera de transporte. En las simulaciones se observa el aumento y disminución de la temperatura cuando hay formación y rompimiento de la barrera de transporte, reproduciendo así el ciclo experimental.

Bibliografía

- [1] CARRERAS, B. A., NEWMAN, D., DIAMOND, P. H., AND LIANG, Y. Dynamics of low to high (“l” to “h”) confinement bifurcation: Poloidal flow and ion pressure gradient evolution. *Physics of Plasmas* 1, 12 (1994), 4014–4021.
- [2] CONNOR, J. W., WAELBROECK, F. L., AND WILSON, H. R. The role of polarization current in magnetic island evolution. *Physics of Plasmas* 8, 6 (2001), 2835–2848.
- [3] FITZPATRICK, R. Interaction of tearing modes with external structures in cylindrical geometry (plasma). *Nuclear Fusion* 33, 7 (1993), 1049.
- [4] FITZPATRICK, R., AND WAELBROECK, F. Effect of local $e \times b$ flow shear on the stability of magnetic islands in tokamak plasmas. *Physics of Plasmas* 16, 5 (2009), 052502.
- [5] FITZPATRICK, R., AND WAELBROECK, F. L. Drift-tearing magnetic islands in tokamak plasmas. *Physics of Plasmas* 15, 1 (2008), 012502.
- [6] FITZPATRICK, R., AND WAELBROECK, F. L. Effect of flow damping on drift-tearing magnetic islands in tokamak plasmas. *Physics of Plasmas* 16, 7 (2009), 072507.
- [7] FREIDBERG, J. *Ideal MHD*. Cambridge University Press, 2014.
- [8] GOLDSTON, R., AND RUTHERFORD, P. *Introduction to Plasma Physics: Buch*. Institute of Physics Pub, 1995.
- [9] HAZELTINE, R., AND MEISS, J. *Plasma Confinement*. Dover books on physics. Dover Publications, 2003.

- [10] HEGNA, C. Healing of magnetic islands in stellarators by plasma flow. *Nuclear Fusion* 51, 11 (2011), 113017.
- [11] HEGNA, C. C. Plasma flow healing of magnetic islands in stellarators. *Physics of Plasmas* 19, 5 (2012), 056101.
- [12] HELANDER, P., AND SIGMAR, D. *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge Monographs on Plasma Physics. Cambridge University Press, 2005.
- [13] JOHNSON, J. L. Stellarator and heliotron devices. *Nuclear Fusion* 39, 2 (1999), 293.
- [14] LÓPEZ-BRUNA, D., OCHANDO, M., LÓPEZ-FRAGUAS, A., MEDINA, F., AND ASCASÍBAR, E. Relationship between mhd events, magnetic resonances and transport barriers in tj-ii plasmas. *Nuclear Fusion* 53, 7 (2013), 073051.
- [15] RUTHERFORD, P. H. Nonlinear growth of the tearing mode. *The Physics of Fluids* 16, 11 (1973), 1903–1908.
- [16] SCHMIDT, G. *Physics of high temperature plasmas*. Academic Press, 1979.
- [17] WAELBROECK, F. Theory and observations of magnetic islands. *Nuclear Fusion* 49, 10 (2009), 104025.
- [18] WAKATANI, M. *Stellarator and Heliotron Devices*. International series of monographs on physics. Oxford University Press, 1998.