



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CRITERIOS DE ENREDAMIENTO Y ESTRUCTURA  
TRANSVERSAL EN MOMENTO TRANSVERSAL DE PAREJAS DE  
FOTONES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**Físico**

**P R E S E N T A :**

**JOSE TOMAS SANTIAGO CRUZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTES  
2017**

**Ciudad Universitaria, CDMX**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno

Apellido paterno  
Apellido materno  
Nombre(s)  
Teléfono  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera  
Número de cuenta

2. Datos del tutor

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

3. Datos del sinodal 1

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

7. Datos del trabajo escrito.

Título  
  
Número de páginas  
Año

1. Datos del alumno

Santiago  
Cruz  
José Tomás  
55 4963 7009  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
411084516

2. Datos del tutor

Dr.  
Alfred Barry  
U'Ren  
Cortés

3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Jorge Gustavo  
Hirsch  
Ganievich

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Víctor Manuel  
Velázquez  
Aguilar

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Daniel  
Sahagún  
Sánchez

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Jorge Amin  
Seman  
Harutinian

7. Datos del trabajo escrito

Criterios de enredamiento y estructura transversal en momento transversal de parejas de fotones  
107  
2017

*Para Maricela, Josmar y Elvia.*



# Agradecimientos

---

Primero que nada quiero agradecer al Dr. Alfred U'Ren por haberme aceptado como su estudiante y por su asesoría a lo largo de este trabajo. También le agradezco profundamente por todas las facilidades brindadas durante mi estancia en su grupo de trabajo. En segunda, deseo agradecer al Sistema de Becas para Estudiantes Indígenas (SBEI), a través del Programa Universitario de Estudios de la Diversidad Cultural y la Interculturalidad (PUIC), UNAM, antes Programa Universitario México, Nación Multicultural (PUMC), por el invaluable apoyo brindado desde el primer semestre de la universidad y hasta la culminación de este trabajo. De la misma forma, deseo agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado como ayudante de Investigador Nacional Nivel III y al mismo tiempo hago extensos mis agradecimientos al Dr. Héctor Cruz Ramírez por el apoyo económico otorgado a través del Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME-PE105917).

Deseo agradecer también a la Dra. Verónica Vicuña Hernández y al Dr. Roberto Ramírez Alarcón por todas sus enseñanzas durante la implementación del experimento. En este punto también cabe agradecer nuevamente al Dr. Héctor Cruz Ramírez por la asistencia brindada durante la realización de las simulaciones numéricas.

A los amigos que hice durante la carrera, Miguel, Daniel, Eduardo, Yuriko, Luis Armando y a todos mis compañeros del Laboratorio de Óptica Cuántica. A los profesores que me inculcaron un gusto mayor por la ciencia, Javier Páez, Chumin Wang y Victor Romero. A la Dra. María Chekhova, por servirme de motivación las veces que pensé que este trabajo quedaría inconcluso. A los miembros de mi jurado. A todos ustedes gracias totales.

Finalmente, agradezco inmensamente a mi mamá, a mi hermano, a Vanessa Calvo e Irina Pineda (mis dos hermanas) por estar siempre que lo he necesitado. También a Dalia, por la felicidad que ha traído en estos días. Todos ustedes son parte de esto.



# Resumen

---

Este trabajo presenta un estudio tanto teórico como experimental de algunas de las propiedades de las parejas de fotones generadas a través del proceso de Conversión Espontánea Paramétrica Descendente (SPDC) tipo I no colineal, usando como cristal no lineal un beta borato de bario (BBO) y como fuentes de bombeo un haz puramente Gaussiano y un haz Bessel-Gauss de orden cero (BG0).

En la parte teórica de este trabajo se hizo un estudio del entrelazamiento cuántico entre las parejas de fotones a través de una serie de criterios. Para llevar a cabo este estudio, se realizaron simulaciones numéricas de las correlaciones espaciales tanto en el espacio de momento transversal (far field) como en el de posiciones (near field). La caracterización del entrelazamiento hace en términos de dos variables que definen al estado cuántico de la pareja de fotones y que son susceptibles de modificar experimentalmente, éstas son la longitud del cristal no lineal y el radio en la cintura del bombeo. Las simulaciones se calcularon con un haz Gaussiano.

En la vertiente experimental, se generó un haz Bessel-Gauss de orden cero y se montó una fuente de parejas de fotones. Particularmente, el enfoque se centra en el estudio del Espectro Angular (AS), del Espectro Angular Condicional (CAS) y en las correlaciones espaciales transversales. Los haces BG0 están caracterizados por su vector de onda transversal  $\vec{k}_{tp}^\perp$  y el radio de la cintura de la envolvente Gaussiana  $\mathcal{W}_0$ . Para hacer más interesante este estudio, se generaron haces con distintos valores de  $k_{tp}$  y  $\mathcal{W}_0$ , lo que permitió establecer dos regímenes, el paraxial, que está caracterizado por valores pequeños de  $k_p$  y el no-paraxial, con valores de  $k_p$  más grandes. Con esto, fue posible hacer una comparación de los efectos que surgen al pasar de un régimen a otro.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma. El Capítulo 1 presenta la motivación del trabajo. En el Capítulo 2 se abordan conceptos básicos de óptica no lineal y se deduce el estado cuántico de la pareja de fotones para haces con estructura Gaussiana y Bessel-Gauss de orden cero. Se deducen también las expresiones matemáticas para el Espectro Angular, el Espectro Angular Condicional y las correlaciones espaciales. En el Capítulo 3 se presentan de forma breve el contexto histórico del entrelazamiento cuántico y se derivan los criterios de enredamiento. El Capítulo 4 está dedicado a las simulaciones numéricas y al estudio de los criterios de enredamiento con los resultados



obtenidos de éstas. El Capítulo 5 es la parte experimental y en él se abordan de forma minuciosa I) la generación de un haz Bessel-Gauss de orden cero, II) el montaje de la fuente de parejas de fotones, III) el sistema de detección y IV) se presentan y discuten los resultados experimentales. Finalmente el Capítulo 6 presenta las conclusiones.

# Índice general

---

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría de la conversión espontánea paramétrica descendente</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción . . . . .	3
2.2. Conceptos básicos de óptica no lineal . . . . .	4
2.2.0.1. Aproximación paraxial . . . . .	9
2.3. Hamiltoniano del sistema . . . . .	10
2.4. Estado cuántico del SPDC . . . . .	11
2.4.1. Operador de campo eléctrico del bombeo . . . . .	12
2.4.2. Operador de campo eléctrico de la pareja de fotones . . . . .	14
2.4.3. Deducción de la función de amplitud conjunta . . . . .	14
2.4.4. Cálculo de la función de phase - matching . . . . .	17
2.4.4.1. Caso Gaussiano . . . . .	17
2.4.4.2. Caso Bessel-Gauss de orden cero ( $m = 0$ ) . . . . .	19
2.5. Espectro Angular Condicional de la pareja de fotones . . . . .	21
2.5.1. Consideraciones experimentales I . . . . .	23
2.5.1.1. Aproximación de bombeo de onda continua . . . . .	24
2.6. Correlaciones transversales entre parejas de fotones . . . . .	24
2.7. Espectro Angular de la pareja de fotones . . . . .	25
2.7.1. Consideraciones experimentales II . . . . .	26
2.7.1.1. Aproximación de bombeo de onda continua . . . . .	27
2.7.1.2. Aproximación de resolución perfecta . . . . .	27
<b>3. Enredamiento cuántico entre parejas de fotones generadas por SPDC</b>	<b>29</b>
3.1. No-localidad en Mecánica Cuántica . . . . .	29
3.1.1. Paradoja de Einstein - Podolsky - Rosen . . . . .	29
3.1.2. No-localidad de Bell, Steering y Enredamiento . . . . .	33
3.1.3. Inequivalencia entre No-localidad de Bell, Steering y Enredamiento	33
3.2. Criterios de enredamiento . . . . .	34

3.2.0.1. EPR-steering . . . . .	34
3.2.0.2. Criterio de Duan-Giedke-Cirac-Zoller . . . . .	37
3.2.0.3. Criterio de Mancini-Giovanetti-Vitali-Tombesi . . . . .	39
<b>4. Simulaciones numéricas</b>	<b>43</b>
4.1. Valores de entrada . . . . .	43
4.2. Espectro Angular . . . . .	45
4.3. Espectro Angular Condicional con consideraciones experimentales . . . . .	46
4.4. Correlaciones en el espacio de vectores de onda transversal (campo lejano) con consideraciones experimentales . . . . .	48
4.5. Correlaciones Espaciales en el espacio de posiciones (campo cercano) . . . . .	48
4.6. Resultados de simulaciones numéricas para medir enredamiento cuántico entre parejas de fotones . . . . .	51
4.7. Análisis de los criterios de enredamiento . . . . .	53
4.7.1. Criterio de EPR-steering . . . . .	53
4.7.2. Criterio de Mancini-Giovanetti-Vitali-Tombesi (MGVT) . . . . .	55
<b>5. Desarrollo experimental y análisis de resultados</b>	<b>59</b>
5.1. Arreglo experimental . . . . .	59
5.1.1. Parte I. Preparación del bombeo . . . . .	60
5.1.2. Parte II. Generación de pareja de fotones . . . . .	63
5.1.3. Parte III. Sistema de detección . . . . .	64
5.2. Resultados experimentales . . . . .	67
<b>6. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A. Teorema del desplazamiento (Shift Theorem)</b>	<b>77</b>
<b>B. Propiedades de los operadores de creación y aniquilación</b>	<b>79</b>
<b>C. Cambio de variable</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Índice de figuras

---

2.1. En SPDC la interacción de una molécula con el bombeo resulta en la aniquilación de un fotón del bombeo y la creación de dos nuevos fotones. a) Geometría del proceso de SPDC. b) Diagrama de niveles de energía que describe al SPDC. . . . .	5
2.2. Tipos de phase-matching: (a) Colineal y (b) no colineal. . . . .	5
2.3. (a) Proceso de SPDC, en el cual se muestran los ángulos de emisión. (b) Los fotones se emiten en un par de conos que definen la dirección de propagación, que en el caso degenerado colapsan a uno solo (c). (d) En el caso colineal, la apertura de los conos tiende a cero conforme la dirección de propagación se va haciendo paralela a la dirección de propagación del bombeo. . . . .	6
2.4. (a) Plano principal del cristal ( $\vec{k}\vec{a}$ ) y haz ordinario. (b) Plano principal del cristal ( $\vec{k}\vec{a}$ ) y haz extraordinario. . . . .	7
2.5. Indices de refracción ordinario $n_o$ y extraordinario $n_e$ para BBO. Dado que $n_o > n_e$ , BBO es un cristal negativo. . . . .	8
2.6. Como consecuencia de la birrefringencia, el vector de Poynting $\vec{S}$ no se propaga paralelo al vector de onda $\vec{k}$ , de modo que la energía fluye a un ángulo $\rho_0$ con respecto a la dirección de propagación. . . . .	8
2.7. Diferentes correlaciones espaciales entre parejas de fotones. . . . .	25
3.1. Experimento pensado de Einstein-Podolsky-Rosen. . . . .	30
3.2. Relación entre enredamiento, <i>one way steering</i> y no-localidad. No-localidad implica steerabilidad en ambos sentidos, <i>one way steering</i> implica enredamiento. . . . .	34
4.1. Algoritmo para calcular numéricamente las correlaciones en el espacio de posiciones (campo cercano). . . . .	50
4.2. Correlaciones transversales en el espacio de momento (a, c y e) y en el espacio de posiciones (b, d y f). El primer renglón se ha calculado con $L = 1mm$ y $\mathcal{W}_0 = 75\mu m$ , el segundo renglón con $L = 1mm$ y $\mathcal{W}_0 = 180\mu m$ y el tercer con $L = 1mm$ y $\mathcal{W}_0 = 320\mu m$ . . . . .	51

4.3.	Correlaciones transversales en el espacio de momento (a, c y e) y en el espacio de posiciones (b, d y f). El primer renglón se ha calculado con $L = 5mm$ y $W_0 = 75\mu m$ , el segundo renglón con $L = 5mm$ y $W_0 = 180\mu m$ y el tercer con $L = 5mm$ y $W_0 = 320\mu m$ . . . . .	52
4.4.	Procedimiento para evaluar $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$ . Primero se escoge $k_{sx0}$ y se obtiene el valor de $P(k_{sx0})$ . Después, dado $k_{sx0}$ se calcula $P(k_{ix} k_{sx0})$ , de donde se obtiene $\Delta^2(k_{ix} k_{sx0})$ , para finalmente calcular $\Delta_{\text{inf}}^2 k_{ix} = \sum_{k_{sx0}} P(k_{sx0}) \Delta^2(k_{ix} k_{sx0})$ . . . . .	53
4.5.	$\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$ calculado con los datos de las simulaciones. . . . .	54
4.6.	Comportamiento de $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$ en función de $L$ . . . . .	55
4.7.	Procedimiento para evaluar $\Delta^2(x_s - x_i) \Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$ . De los datos de las correlaciones $x_s - x_i$ y $k_{sx} - k_{ix}$ calculan las distribuciones $P(x_s - x_i)$ y $P(k_{sx} + k_{ix})$ , respectivamente, a partir de las cuales es posible calcular $\Delta^2(x_s - x_i)$ y $\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$ . . . . .	56
4.8.	$\Delta^2(x_s - x_i) \Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$ calculado con los datos de las simulaciones. . . . .	57
5.1.	Tres fases del arreglo experimental. . . . .	59
5.2.	Iluminando un axicón con un haz Gaussiano se genera un haz Bessel-Gauss de orden cero, el cual se comporta como no-difraccional sobre la región en color verde. . . . .	60
5.3.	Haces Bessel - Gauss (panel superior) y sus respectivos espectros angulares (panel inferior) para cada una de las configuraciones de la <a href="#">Tabla 5.1</a> . Primer columna: $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ , segunda columna: $k_{tp} = 0.05\mu m^{-1}$ , tercer columna: $k_{tp} = 0.147\mu m^{-1}$ . . . . .	62
5.4.	Espectro Angular. En el panel superior resultados experimentales y en el panel inferior resultados de las simulaciones numéricas. Primera columna $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ , segunda columna $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ y tercera columna $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . Las imágenes reportadas fueron adquiridas con la cámara Andor ICCD . . . . .	67
5.5.	Espectro Angular Condicional $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS. . . . .	68
5.6.	Espectro Angular Condicional $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS. . . . .	69
5.7.	Espectro Angular Condicional $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS. . . . .	70
5.8.	Espectro Angular Condicional $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS. . . . .	71

5.9. Espectro Angular Condicional $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS. . . . .	71
5.10. Espectro Angular Condicional $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS. . . . .	71
5.11. Correlaciones para $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . En (a), el origen de los ejes coordenados indican las coordenadas fijas de OFs y OFi. $k_{sx} - k_{ix}$ : (b) experimento y (e) simulación; $k_{sy} - k_{iy}$ : (c) experimento y (f) simulación; $k_{sx} - k_{iy}$ : (d) experimento y (g) simulación. . . . .	72
5.12. Correlaciones para $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ . En (a), el origen de los ejes coordenados indican las coordenadas fijas de OFs y OFi. $k_{sx} - k_{ix}$ : (b) experimento y (e) simulación; $k_{sy} - k_{iy}$ : (c) experimento y (f) simulación; $k_{sx} - k_{iy}$ : (d) experimento y (g) simulación. . . . .	73
5.13. Correlaciones para $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . En (a), el origen de los ejes coordenados indican las coordenadas fijas de OFs y OFi. $k_{sx} - k_{ix}$ : (b) experimento y (e) simulación; $k_{sy} - k_{iy}$ : (c) experimento y (f) simulación; $k_{sx} - k_{iy}$ : (d) experimento y (g) simulación. . . . .	74



# Índice de tablas

---

2.1. Clasificación de cristales en función de su tipo de red. . . . .	7
2.2. Tipos de phase-matching en un cristal uniaxial. . . . .	9
2.3. Estructura de la función de <i>phase-matching</i> $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ . . . . .	21
2.4. Tipos de Correlaciones Espaciales. . . . .	25
4.1. Valores de $k_{tp}$ y $\mathcal{W}_0$ usados en las simulaciones. . . . .	44
5.1. Valores de $k_{tp}$ y $\mathcal{W}_0^{\text{BG}}$ generados. M es la magnificación de L2 y $\gamma$ es el ángulo en el ápice del axicón. . . . .	61
5.2. Ventanas de tiempo y distancia entre puntos vecinos para medir el CAS y las correlaciones . . . . .	65





# Introducción

---

En la naturaleza existen diferentes formas de generar fuentes de luz no clásica. Con no clásico se da a entender aquellos procesos físicos que son explicados únicamente a través de la mecánica cuántica. En particular, las parejas de fotones generadas a través la *Conversión Espontánea Paramétrica Descendente* (*SPDC* por sus siglas en inglés de *Spontaneous Parametric Down Conversion*) y el *Mezclado Espontáneo de Cuatro Ondas* (*SFWM* por sus siglas en inglés de *Spontaneous Four Wave Mixing*) son fuentes de luz no clásica. A pesar de que *SPDC* y *SFWM* son fuentes de parejas de fotones, existen diferencias sutiles tanto en el medio en el que se generan como en el número de campos que intervienen. Mientras que las fuentes de *SPDC* son medios no lineales caracterizados por  $\chi^{(2)}$  (susceptibilidad no lineal de orden dos), las fuentes de *SFWM* son medios no lineales caracterizados por  $\chi^{(3)}$  (susceptibilidad no lineal de tercer orden). Además, en *SPDC* sólo se requiere la intervención de un campo de bombeo, mientras que en *SFWM* se necesitan dos campos de bombeo. Las fuentes de *SPDC* pueden ser de tipo I o tipo II. Las fuentes de tipo I están caracterizadas por tener una forma transversal de anillo, mientras que las fuentes de tipo II están formadas por dos anillos que se cortan en dos puntos.

Hoy en día, las fuentes de parejas de fotones han recibido gran atención por la vasta cantidad de aplicaciones que se les han encontrado. En primer lugar podemos mencionar que se pueden usar para hacer experimentos de fundamentos de la Mecánica Cuántica [1-4]. En segundo lugar se encuentran las aplicaciones tecnológicas como en información cuántica, encriptación cuántica, simulación cuántica y cómputo cuántico. Quizá la característica más importante que distingue a las parejas de fotones es el entrelazamiento. El entrelazamiento es una propiedad que se da únicamente a nivel cuántico y que ha causado mucha polémica pues personalidades como Albert Einstein se rehusaban a aceptar al enredamiento como una consecuencia de la teoría formulada, por lo que apuntaba que deberían hacerse ciertas correcciones a la teoría.

Desde su fundación, las líneas de investigación del Laboratorio de Óptica Cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) han sido la generación de fuentes de luz no clásica a través de los dos métodos mencionados anteriormente. Respecto a *SPDC*, se han montado tanto fuentes tipo I como tipo II. En este trabajo se ha considerado una fuente tipo I donde se utiliza

como medio no lineal un cristal de *Beta Borato de Bario* (*BBO*), que dentro de la terminología de la óptica no lineal, es un cristal tipo I negativo. Para la parte experimental de este trabajo se emplea un haz Bessel-Gauss de orden cero como medio de bombeo. Los haces Bessel forman parte de la familia de haces adifraccionales. Los haces adifraccionales son aquellos cuyo perfil transversal no se ve afectado mientras se propagan en el espacio. Otra propiedad importante de los haces Bessel es la auto-reconstrucción [5–7], esto es, cuando pasan a través de una obstrucción se reconstruyen después de cierta distancia. Estas dos propiedades resultan ser de mucha utilidad cuando se trata de propagar haces en largas distancias [8, 9] y sobre condiciones atmosféricas extremas [10–12]. No se puede pasar por alto el hecho de que cuando se consideran haces Bessel de orden superior (con momento angular), se pueden utilizar para confinar partículas pequeñas en la región central [13–16], logrando tener control sobre la dinámica de esta partícula sin necesidad de hacer ningún tipo de contacto mecánico. Es pues, de gran interés generar parejas que fotones que también puedan tener este tipo de propiedades para que su implementación en las aplicaciones tecnológicas sea más eficiente. Se ha demostrado experimentalmente que cuando se generan parejas de fotones usando como bombeo un haz Bessel-Gauss, los fotones generados no solo heredan esta estructura [17], sino todas las propiedades del bombeo, lo cual indica que no es necesario un post-procesamiento para imprimirle a cada miembro de la pareja de fotones el modo deseado, como en el caso reportado en la referencia [7]. Además, experimentalmente se ha probado también que al tener la estructura Bessel, los fotones individuales también presentan la propiedad de auto-reconstrucción, pero esta vez a nivel cuántico, del entrelazamiento cuando se les hace pasar a través de una obstrucción [7]. En este trabajo se generaron parejas de fotones siguiendo la técnica reportada en la referencia [17].

Uno de los propósitos de este trabajo es hacer una caracterización exhaustiva de las propiedades de la pareja de fotones a nivel espacial, para ello, se realizaron mediciones experimentales del *Espectro Angular* (*AS*) de la pareja de fotones, del *Espectro Angular Condicional* (*CAS*) y de las correlaciones entre las diferentes variables fotónicas espaciales. Para lograrlo, se diseñaron haces de bombeo Bessel-Gauss con diferente magnitud de vector de onda transversal  $k_{tp}$ , que van desde el régimen paraxial al no paraxial, abarcando también valores en la frontera. Para construir los haces Bessel-Gauss se empleó un axicón. Los resultados muestran puntos relevantes: i) en el régimen paraxial el comportamiento a nivel espacial de la pareja de fotones es el mismo que si se hubiera empleado un bombeo puramente Gaussiano, ii) en el régimen no-paraxial la distinguibilidad juega un papel importante y iii) en el caso de las correlaciones espaciales se muestran resultados nunca antes reportados que distan de ser comparables con el caso Gaussiano. Todas las mediciones experimentales vienen reforzadas por una parte teórica en donde se realizaron simulaciones numéricas de todas las cantidades medidas. Se muestra además, que a través de la modificación de algunas variables experimentales es posible tener control absoluto de las características de la pareja de fotones.

# Teoría de la conversión espontánea paramétrica descendente

## 2.1. Introducción

Cuando una onda electromagnética se propaga dentro de un medio, el campo eléctrico actúa sobre cada partícula (electrones, átomos o moléculas) desplazando las cargas positivas en una dirección y las negativas en dirección opuesta. Como consecuencia de esta separación se genera un momento dipolar eléctrico global en cada unidad de volumen, conocido como polarización  $\vec{P}$ , si la amplitud del campo eléctrico de la luz incidente es substancialmente más pequeña que la magnitud del campo eléctrico que mantiene unidos a los átomos en el medio, entonces podemos expresar a la polarización de la siguiente forma [18]

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E} \vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots \right) \\ &= \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío;  $\chi^{(n)}$  es el tensor (de rango  $n+1$ ) de susceptibilidad eléctrica de orden  $n$ ;  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ .  $\vec{P}^{(1)}$  es la polarización lineal,  $\vec{P}^{(2)}$  es la polarización no lineal de segundo orden y  $\vec{P}^{(3)}$  es la polarización no lineal de tercer orden<sup>1</sup>. Al escribir la Eq. (2.1) de esa forma se ha supuesto que el medio es no dispersivo<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Dada la naturaleza tensorial de  $\chi^{(n)}$ ,  $\vec{P}^{(2)}$  y  $\vec{P}^{(3)}$  se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_i^{(2)} &= \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \\ P_i^{(3)} &= \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \end{aligned}$$

donde  $P_i^{(m)}$  ( $m = 2, 3$ ) es la  $i$ -ésima componente cartesiana de la polarización no lineal de orden  $m$ . De esta forma, se asegura que  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  sea un vector.

<sup>2</sup>Si el medio es dispersivo, la susceptibilidad no lineal se transforma en una cantidad compleja. Puede consultarse la referencia [18] para un tratamiento detallado de este caso.

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

Si la intensidad del campo incidente es pequeña comparada con la intensidad característica del campo de los átomos ( $E_{at} \approx 6 \times 10^{11} \text{V/m}$ ) [18], la polarización inducida se puede describir correctamente usando únicamente el primer término  $\vec{P}^{(1)}$ . No obstante, si la intensidad del campo eléctrico se vuelve muy grande es necesario hacer correcciones de orden superior [19], por lo que los términos de segundo y tercer orden se vuelven necesarios y en este caso, la polarización queda descrita por la Ec. (2.1). Los procesos físicos que resultan de  $\vec{P}^{(2)}$  son distintos de aquellos que resultan de  $\vec{P}^{(3)}$ . Mientras que  $\vec{P}^{(2)}$  únicamente puede ocurrir en cristales no centrosimétricos, esto es, cristales que no presentan simetría de inversión, dado que en esos casos  $\chi^{(2)}$  se reduce a cero<sup>3</sup>,  $\vec{P}^{(3)}$  está presente tanto en medios centrosimétricos como en no centrosimétricos.

Como consecuencia de estos fenómenos no lineales se desprenden distintos procesos físicos como son generación de segundo armónico (SHG, por Second Harmonic Generation) [21, 22], generación de suma de frecuencias (SFG, por Sum Frequency Generation) [23–26], generación de diferencia de frecuencias (DFG, por Difference Frequency Generation) [26–28] y conversión espontánea paramétrica descendente (SPDC), entre otros. Tal como se mencionó en la introducción, en este trabajo estamos interesados en SPDC, por lo que nos enfocaremos en su descripción.

### 2.2. Conceptos básicos de óptica no lineal

La conversión espontánea paramétrica descendente (SPDC) es uno de los procesos posibles que resultan de la interacción de un haz de luz laser y un arreglo de moléculas dentro de un cristal con propiedades no lineales. El resultado de esta interacción es la generación de un sistema físico compuesto por dos fotones, donde un fotón del bombeo, de frecuencia angular  $\omega_p$  y vector de onda  $\vec{k}_p$  decae espontáneamente en un fotón de frecuencia  $\omega_s$  y vector de onda  $\vec{k}_s$  que llamaremos señal y otro fotón de frecuencia  $\omega_i$  y vector de onda  $\vec{k}_i$  que llamaremos acompañante, como lo ilustra la Figura 2.1. De ahora en adelante, se emplearán los símbolos (p) para denotar al bombeo, (s) para el fotón señal e (i) para el fotón acompañante.

El nombre de SPDC se deriva de las características del propio proceso físico. Es un proceso paramétrico porque la energía incidente es totalmente transferida a los fotones generados y no al arreglo de moléculas, por lo que el estado inicial y final del cristal es el mismo. Es un proceso de conversión descendente porque los fotones generados tienen una energía menor que el fotón incidente proveniente del bombeo.

---

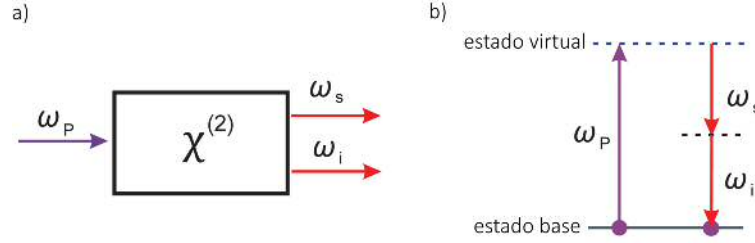
<sup>3</sup>Sabemos que

$$P^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} : \vec{E} \vec{E}$$

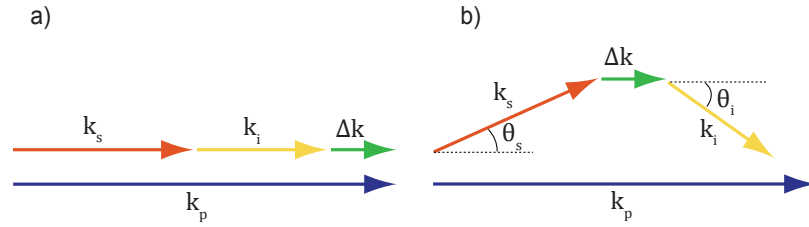
Al cambiar signo de  $\vec{E}$  también cambia el signo de  $P^{(2)}$  debido a que hemos asumido que el medio tiene centro de inversión, por lo que

$$-P^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} : (-\vec{E})(-\vec{E}) = \epsilon_0 \chi^{(2)} : \vec{E} \vec{E}$$

Para satisfacer ambas ecuaciones simultáneamente  $\chi^{(2)}$  tiene que ser igual a cero [18, 20].



**Figura 2.1:** En SPDC la interacción de una molécula con el bombeo resulta en la aniquilación de un fotón del bombeo y la creación de dos nuevos fotones. a) Geometría del proceso de SPDC. b) Diagrama de niveles de energía que describe al SPDC.



**Figura 2.2:** Tipos de phase-matching: (a) Colineal y (b) no colineal.

Para que el proceso de SPDC sea posible en un medio homogéneo, se requiere que se satisfagan ciertas condiciones:

I) Conservación de la energía

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (2.2)$$

II) Conservación de momento lineal o condición de empatamiento de fases (phase-matching)

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i \quad (2.3)$$

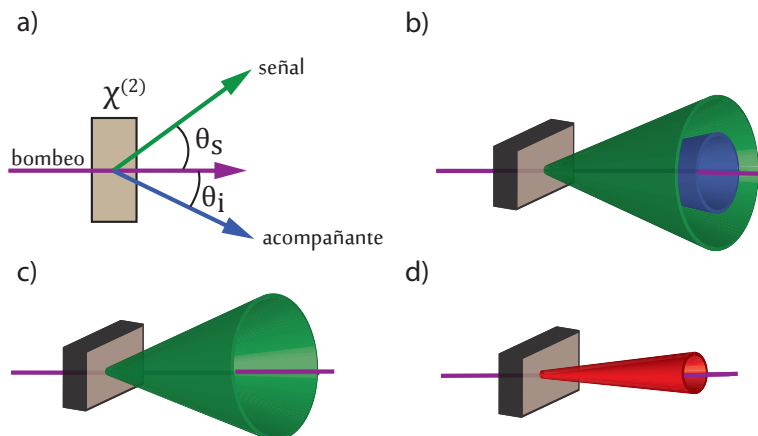
Físicamente, desde un punto de vista microscópico, cuando la condición (2.3) se satisface, cada uno de los dipolos atómicos que se forman en el medio están completamente en fase de tal forma que el campo eléctrico emitido por cada uno de ellos se suma coherentemente en la dirección de propagación. La potencia total radiada por el ensamble de dipolos atómicos se escala como el cuadrado del número de átomos [18].

Existen 2 tipos de phase matching: i) colineal, cuando los fotones emitidos viajan en la misma dirección que el bombeo, y ii) no colineal, cuando son emitidos a cierto ángulo con respecto al vector de onda del bombeo. En la Figura 2.2 se muestran ambas configuraciones.

Para un medio dado, las condiciones impuestas por las ecuaciones (2.2) y (2.3) determinan las características de la pareja de fotones emitida. La condición (2.3) define la configuración geométrica del proceso de SPDC. Los fotones se emiten en dos conos

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---



**Figura 2.3:** (a) Proceso de SPDC, en el cual se muestran los ángulos de emisión. (b) Los fotones se emiten en un par de conos que definen la dirección de propagación, que en el caso degenerado colapsan a uno solo (c). (d) En el caso colineal, la apertura de los conos tiende a cero conforme la dirección de propagación se va haciendo paralela a la dirección de propagación del bombeo.

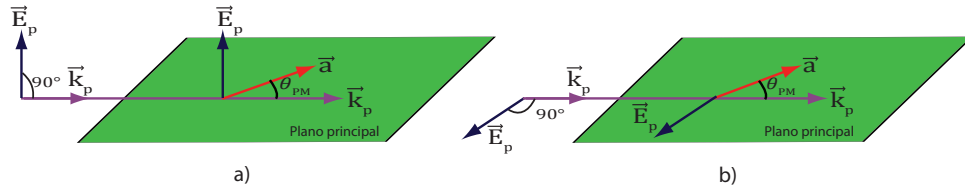
que tienen como eje la dirección de propagación del bombeo. Las aperturas de los conos están dadas por los ángulos de emisión  $\theta_{s,i}$  asociados a las frecuencias  $\omega_{s,i}$ . En el caso particular de SPDC degenerado los fotones señal y acompañante tienen la misma frecuencia  $\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2}$ . Existen dos tipos de SPDC degenerado: I) colineal en el que los ángulos de emisión son cero, es decir, los fotones se propagan paralelos a la dirección del bombeo y II) no colineal, en el caso los dos fotones son emitidos al mismo ángulo  $\theta_s = \theta_i$ , lo que implica que los conos se traslapan (Veáse [Figura 2.3](#)).

En principio, se puede satisfacer la condición de phase-matching (Eq. (2.3)) haciendo uso de dispersión anómala, esto es, el efecto de disminuir el índice de refracción con un aumento en la frecuencia. Sin embargo, la forma más fácil de satisfacer esta condición es haciendo uso de la birrefringencia, propiedad de algunos cristales que consiste en la dependencia del índice de refracción sobre la dirección de la polarización del haz que incide en el cristal. No todos los cristales presentan birrefringencia, en particular aquellos que tienen red cúbica son ópticamente isotrópicos por lo que no hay forma de satisfacer la Eq. (2.3). La birrefringencia es un fenómeno que se presenta en cristales uniaxiales y biaxiales. Los cristales uniaxiales tienen un solo eje óptico, mientras que los cristales biaxiales tienen dos ejes ópticos. En la [Tabla 2.1](#) se puede ver la clasificación de los cristales en función de su tipo de red.

El eje óptico  $\vec{a}$  es considerado como una dirección privilegiada en un cristal, ya que un haz que se propaga en la dirección del eje óptico no experimenta birrefringencia. En el caso del presente trabajo, el cristal utilizado es un  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> (BBO, de sus siglas en inglés de beta barium borate), que es un cristal uniaxial de tipo I, por lo que de ahora en

**Tabla 2.1:** Clasificación de cristales en función de su tipo de red.

Tipo de red	Clasificación óptica
Triclínico, monoclinico, ortorrómbico	Biaxial
Trigonal, tetragonal, hexagonal	Uniaxial
Cúbica	Isotrópico


**Figura 2.4:** (a) Plano principal del cristal  $(\vec{k}\vec{a})$  y haz ordinario. (b) Plano principal del cristal  $(\vec{k}\vec{a})$  y haz extraordinario.

adelante se describirán únicamente las propiedades de cristales uniaxiales. Se denomina plano principal al plano que contiene el eje óptico  $\vec{a}$  y al vector de onda  $\vec{k}$ . El haz cuyo vector de polarización esté contenido en el plano principal recibe el nombre de haz extraordinario. Por otro lado, el haz cuya polarización sea perpendicular a este plano recibe el nombre de ordinario (véase Figura 2.4). De esto se deriva que en un cristal uniaxial existen dos tipos de índice de refracción: el extraordinario  $n_e$  y el ordinario  $n_o$ . Los índices de refracción en el plano normal al eje óptico son los valores principales de índice de refracción y serán denotados por  $n_o$  y  $n_e$ , respectivamente, y pueden ser calculados a través de las ecuaciones de Sellmeier. En el caso de un BBO, las ecuaciones de Sellmeier son [29]

$$\begin{aligned} n_o^2 &= 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2 \\ n_e^2 &= 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01516\lambda^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

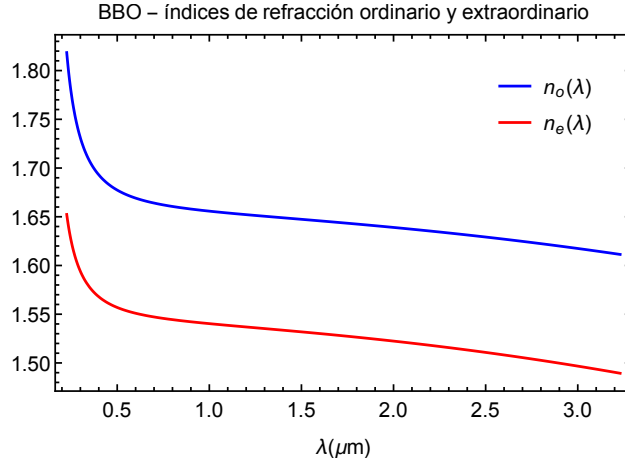
con  $\lambda \in [0.226, 3.23]\mu m$ . Los cristales uniaxiales se clasifican en positivos si  $n_e > n_o$  y negativos si  $n_o > n_e$ . De la Figura 2.5 se concluye que el BBO es un cristal negativo. El índice de refracción efectivo  $n_{\text{eff}}(\theta)$  que experimenta un haz que se propaga a un ángulo  $\theta$  con respecto al eje óptico  $\vec{a}$ , se puede calcular a partir de la siguiente ecuación [30]

$$\frac{1}{n_{\text{eff}}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (2.5)$$

De esta ecuación se derivan dos casos interesantes: i) si  $\theta = 90^\circ$ ,  $n_{\text{eff}} = n_e$  y ii)  $n_{\text{eff}} = n_o$  si  $\theta = 0^\circ$ . La importancia del ángulo  $\theta$  radica en que se puede ajustar de tal forma que se obtenga un valor de  $n_{\text{eff}}$  tal que la condición de phase-matching (Ec.(2.3)) se



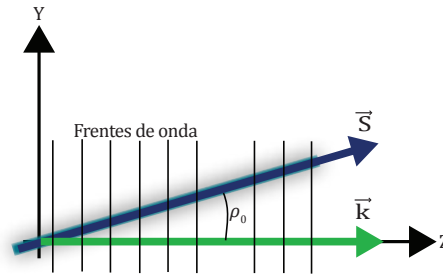
## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE



**Figura 2.5:** Índices de refracción ordinario  $n_o$  y extraordinario  $n_e$  para BBO. Dado que  $n_o > n_e$ , BBO es un cristal negativo.

satisfaga. De ahora en adelante al ángulo  $\theta$  le llamaremos ángulo de phase-matching y lo denotaremos por  $\theta_{\text{PM}}$ .

Se define a la *birrefringencia*  $\Delta n$  como la diferencia entre los índices de refracción ordinario y efectivo. Por el párrafo anterior, sabemos que  $\Delta n$  se anula a lo largo del eje óptico y alcanza su máximo en la dirección normal a este eje.



**Figura 2.6:** Como consecuencia de la birrefringencia, el vector de Poynting  $\vec{S}$  no se propaga paralelo al vector de onda  $\vec{k}$ , de modo que la energía fluye a un ángulo  $\rho_0$  con respecto a la dirección de propagación.

Otro fenómeno que se presenta cuando una onda plana se propaga a través de un cristal uniaxial es el *efecto walk-off* (véase [Figura 2.6](#)). Para ángulos de phase-matching distintos de  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , el vector de Poynting  $\vec{S}$  y el vector de propagación  $\vec{k}$  no viajan en la misma dirección en el caso de rayos extraordinarios. A este efecto se le llama walk-off y al ángulo  $\rho_0$  entre  $\vec{k}$  y  $\vec{S}$  se le conoce como ángulo de walk-off [31]; y se puede calcular en función de  $\theta_{\text{PM}}$  como [32]

$$\rho_0(\theta_{\text{PM}}) = \pm \arctan \left[ (n_o/n_e)^2 \tan \theta_{\text{PM}} \right] \mp \theta_{\text{PM}} \quad (2.6)$$

donde el signo superior se emplea para cristales negativos y el signo inferior para los cristales positivos.

Dependiendo de la polarización del haz incidente y del tipo de cristal uniaxial (positivo o negativo), existen diferentes configuraciones de phase-matching, en la [Tabla 2.2](#) se listan los posibles casos. Nótese que las configuraciones positivas siempre tienen al haz incidente con polarización ordinaria, mientras que en las configuraciones negativas el haz incidente tiene polarización extraordinaria.

**Tabla 2.2:** Tipos de phase-matching en un cristal uniaxial.

Tipo de phase-matching	Clasificación del cristal	Polarización p → s + i
I	Negativo	e → o + o
I	Positivo	o → e + e
II	Negativo	e → o + e e → e + o
II	Positivo	o → o + e o → e + o
III	Negativo	e → e + e

### 2.2.0.1. Aproximación paraxial

Como ya se mencionó en párrafos anteriores, en un cristal uniaxial, dependiendo de la polarización (ordinaria o extraordinaria) se tienen dos índices de refracción y por ende, dos relaciones de dispersión, una para cada tipo de polarización. Sean  $\vec{a}$  el eje óptico del cristal;  $\epsilon_{\perp}$  el coeficiente de permeabilidad transversal al plano definido por  $\vec{a}$ ;  $\epsilon_{\parallel}$  el coeficiente de permeabilidad paralelo al eje óptico. Para los fotones emitidos, que tienen polarización ordinaria, la relación de dispersión es [\[30, 33\]](#)

$$k_{\mu z}^o = \sqrt{\epsilon_{\perp} \frac{\omega^2}{c^2} - (k_{\mu}^{\perp})^2} \quad (2.7)$$

Para el bombeo, que se propaga como una onda extraordinaria [\[30, 33\]](#),

$$k_{pz}^e = -\beta \vec{a} \cdot \vec{k}_p^{\perp} + \eta \frac{\omega_p}{c} \sqrt{1 - \alpha \frac{(k_p^{\perp})^2 c^2}{\omega_p^2}} \quad (2.8)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{\epsilon_{\perp} + \Delta \epsilon a_z^2} \quad (2.9)$$

$$\beta = \frac{\Delta \epsilon a_z}{\epsilon_{\perp} + \Delta \epsilon a_z^2} \quad (2.10)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp} + \Delta \epsilon a_z^2}} \quad (2.11)$$

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

con  $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ .

En la ecuación (2.8), el término  $\beta$  es el responsable del efecto walk-off, mientras que el término  $\alpha$  da origen a efectos de astigmatismo [34]. Si aplicamos aproximación paraxial, es decir,  $\vec{k}_p^{\perp} \sim 0$  [33], la ecuación (2.8) se reduce a

$$k_{pz}^e = \eta \frac{\omega_p}{c} \quad (2.12)$$

Para este caso, conviene escribir a  $\eta$  en términos de  $\theta_{\text{PM}}$ ,  $n_o$  y  $n_e$  de la siguiente forma [34]:

$$\eta = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta_{\text{PM}} + n_e^2 \cos^2 \theta_{\text{PM}}}} \quad (2.13)$$

Nótese que  $\eta = n_{\text{eff}}$ .

### 2.3. Hamiltoniano del sistema

El Hamiltoniano clásico del campo electromagnético en un medio dieléctrico de volumen  $V$  está dado por [35, 36]

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} \int_V dV \left[ \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \right] \quad (2.14)$$

donde  $\vec{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico;  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $\vec{B}$  es el campo de inducción magnético y  $\vec{H}$  es el campo magnético. Por definición,

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (2.15)$$

entonces, tomando la polarización  $\vec{P}$  (Ec. (2.1)) hasta segundo orden, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \left( \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \left( \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \left( \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{D}^{(1)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

de modo que el Hamiltoniano se puede reescribir como

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_L(t) + \mathcal{H}_{\text{NL}}(t) \quad (2.17)$$

donde

$$\mathcal{H}_L(t) = \frac{1}{2} \int_V dV \left[ \vec{D}^{(1)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \right] \quad (2.18)$$

contiene la interacción del campo eléctrico con la polarización lineal.  $\mathcal{H}_{\text{NL}}$  es la componente no lineal del Hamiltoniano y constituye la contribución de  $\vec{P}^{(2)}$  a la energía del campo electromagnético, y está dada por

$$\mathcal{H}_{\text{NL}}(t) = \frac{1}{2} \int_V dV \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.19)$$

Para el caso particular de SPDC esta ecuación se reduce a [37–39]

$$\mathcal{H}_{\text{NL}}(t) = 2\epsilon_0 \int_V dV d_{\text{eff}} \vec{E}_p(\vec{r}, t) \vec{E}_s(\vec{r}, t) \vec{E}_i(\vec{r}, t) \quad (2.20)$$

donde los subíndices p, s e i son para bombeo, señal y acompañante, respectivamente;  $\vec{E}_\nu(\vec{r}, t)$  es el campo eléctrico dentro del cristal no lineal en el punto  $\vec{r}$  al tiempo  $t$ ;  $\nu = \{p, s, i\}$ , y  $d_{\text{eff}}$  representa al coeficiente efectivo no lineal de segundo orden [18] en donde se ha añadido a  $\chi^{(2)}$  (algunas constantes fueron incluidas dentro de esta variable).

Nótese que en la Ec. (2.20) se ha utilizado una notación vectorial para los campos eléctricos; sin embargo, cuando se cuantiza el campo electromagnético estos campos se transforman en operadores en el espacio de Hilbert y pueden ser descompuestos en una contribución de frecuencia positiva  $\hat{E}_\nu^{(+)}(\vec{r}, t)$  y otra de frecuencia negativa igual al conjugado Hermítico de la contribución de frecuencia positiva,  $\hat{E}_\nu^{(-)}(\vec{r}, t) = \hat{E}_\nu^{(+)\dagger}(\vec{r}, t)$  de tal forma que [40]

$$\hat{E}_\nu(\vec{r}, t) = \hat{E}_\nu^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}_\nu^{(-)}(\vec{r}, t) \quad (2.21)$$

de modo que la Ec. (2.20) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}}(t) &= 2\epsilon_0 \int_V dV d_{\text{eff}} \left( \hat{E}_p^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}_p^{(-)}(\vec{r}, t) \right) \\ &\times \left( \hat{E}_s^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}_s^{(-)}(\vec{r}, t) \right) \left( \hat{E}_i^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}_i^{(-)}(\vec{r}, t) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.4. Estado cuántico del SPDC

De ahora en adelante trabajaré en el esquema de interacción en mecánica cuántica. Suponiendo que la interacción no lineal comienza al tiempo  $t = 0$  cuando el sistema está en el estado inicial

$$|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_p |\text{vac}\rangle \quad (2.23)$$

donde  $|\alpha\rangle_p$  es un estado coherente que representa al bombeo;  $|\text{vac}\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i$  representa el estado de vacío en la dirección de los haces señal y acompañante. Para hallar el estado cuántico a un tiempo posterior  $t$  debemos aplicar el operador de evolución temporal

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}}(\tau)\right) \quad (2.24)$$

al estado inicial, de modo que el estado del SPDC al tiempo  $t$  está dado por  $|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t)|\Psi(0)\rangle$ .

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

Supóngase que el tiempo de interacción  $t$  es mucho mayor que la escala de tiempo en la que se lleva a cabo la conversión descendente y más pequeño que el intervalo de tiempo entre dos eventos consecutivos de conversión descendente. Considérese también que la interacción paramétrica es muy débil. Entonces, podemos hacer una expansión en serie de potencias del propagador (2.24) y quedarnos a primer orden [37, 38]:

$$\hat{\mathfrak{U}}(t) \approx 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}}(\tau) \quad (2.25)$$

de modo que el estado del bombeo y de la pareja de fotones a un tiempo  $t$  está dado por

$$|\Psi(t)\rangle \approx |\alpha\rangle_{\text{p}}|\text{vac}\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}}(\tau) |\alpha\rangle_{\text{p}}|\text{vac}\rangle \quad (2.26)$$

El primer término en la Ec. (2.26) describe a un sistema con un fotón del bombeo y vacío para los modos señal y acompañante, mientras que el segundo término describe un sistema de dos fotones, uno en el modo señal y otro en el modo acompañante. Si se desarrollan los productos de la Ec. (2.22) se encontrará que el Hamiltoniano de interacción se descompone en una suma de ocho términos, correspondiendo a cada uno los procesos posibles que derivan de  $\chi^2$  (generación de suma de frecuencias, generación de diferencia de frecuencias, rectificación óptica, por mencionar algunos). Dado que inicialmente sólo se cuenta con el haz de bombeo y no hay fotones en los modos señal y acompañante, los únicos términos que conservan energía en el Hamiltoniano son las transiciones donde fotones del bombeo son aniquilados para crear pares de fotones señal - acompañante, de modo que podemos despreocupar los términos que no conservan energía. Hacer esto es equivalente a hacer aproximación de onda rotante [39]. Los términos que si conservan energía son  $\hat{E}_{\text{p}}^{(+)}\hat{E}_{\text{s}}^{(-)}\hat{E}_{\text{i}}^{(-)}$  y  $\hat{E}_{\text{p}}^{(-)}\hat{E}_{\text{s}}^{(+)}\hat{E}_{\text{i}}^{(+)}$ . Con esto en mente, el Hamiltoniano de interacción  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}}$  se reduce a

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}}(t) &= 2\epsilon_0 \int_{V_c} dV d_{\text{eff}} \left[ \hat{E}_{\text{p}}^{(+)}\hat{E}_{\text{s}}^{(-)}\hat{E}_{\text{i}}^{(-)} + \hat{E}_{\text{p}}^{(-)}\hat{E}_{\text{s}}^{(+)}\hat{E}_{\text{i}}^{(+)} \right] \\ &= 2\epsilon_0 \int_{V_c} dV d_{\text{eff}} \left[ \hat{E}_{\text{p}}^{(+)}\hat{E}_{\text{s}}^{(-)}\hat{E}_{\text{i}}^{(-)} \right] + \text{H.C.} \end{aligned} \quad (2.27)$$

En lo sucesivo, para evitar complicaciones introducidas por la frontera del cristal, se asumirá que el cristal está inmerso en un medio lineal con mismo índice de refracción que el cristal [37], de tal forma que el vector de onda  $\vec{k}$  tendrá el mismo valor dentro y fuera del cristal.

### 2.4.1. Operador de campo eléctrico del bombeo

Una consecuencia directa de la baja eficiencia del proceso no lineal es que el campo incidente es varios órdenes de magnitud más intenso que los campos generados, por lo que es posible considerar al bombeo como un campo clásico mientras que los campos de los fotones señal y acompañante deberán ser considerados como campos cuánticos.

Al operador de campo eléctrico del bombeo se le dará una estructura espacial y para ello se usará como base la familia de haces Helmholtz - Gauss. Usando la notación de [41], la función de amplitud compleja que representa a estos haces está dada por

$$U(\vec{r}) = \exp\left(-i\frac{k_{\text{tp}}^2}{2k_{\text{p}}}\frac{z}{\xi(z)}\right) \text{GB}(\vec{r}) \text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y}{\xi(z)}; k_{\text{tp}}\right) \quad (2.28)$$

donde  $\text{GB}(\cdot)$  representa la componente Gaussiana dado por

$$\text{GB}(\vec{r}) = \exp(ik_{\text{p}}(\omega_{\text{p}})z) \text{GB}_{\text{T}}(\vec{r}) \quad (2.29)$$

con

$$\text{GB}_{\text{T}}(\vec{r}) = \frac{1}{\xi(z)} \exp\left(-\frac{x^2}{\mathcal{W}_0^2\xi(z)}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{\mathcal{W}_0^2\xi(z)}\right) \quad (2.30)$$

y

$$\xi(z) = 1 + \frac{iz}{z_{\text{R}}} \quad (2.31)$$

con  $\mathcal{W}_0$  el radio en la cintura del haz;  $k_{\text{tp}}$  la magnitud de la componente transversal del vector de onda;  $k_{\text{p}}$  la magnitud del vector de onda  $\vec{k}_{\text{p}}$ ;  $z_{\text{R}} = \frac{k_{\text{p}}\mathcal{W}_0^2}{2}$  el rango de Rayleigh.  $\text{W}(\cdot)$  representa el perfil transversal de un haz ideal no-difraccional; la forma matemática de esta función dependerá del haz bajo consideración, que para el caso Gaussiano se reduce a

$$\text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y}{\xi(z)}; k_{\text{tp}}\right) \rightarrow 1 \quad (2.32)$$

mientras que para un haz Bessel - Gauss

$$\text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y}{\xi(z)}; k_{\text{tp}}\right) = J_m(k_{\text{tp}}\rho) \exp(im\phi) \quad (2.33)$$

donde  $J_m(\cdot)$  es la función Bessel de orden  $m$  [41];  $\vec{\rho}^{\perp}$  es la parte transversal del vector de posición  $\vec{r}$  tal que  $\vec{r} = \vec{\rho}^{\perp} + z\hat{e}_z$ .

Definimos como amplitud angular a la transformada de Fourier bidimensional de la función de amplitud compleja, que para la familia Helmholtz-Gauss esta dada por [41]

$$\mathfrak{U}(k_x, k_y; z) = \text{D}(z) \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2\xi(z)}{4}\rho^2\right) \text{W}\left(\frac{\mathcal{W}_0^2}{2i}k_x, \frac{\mathcal{W}_0^2}{2i}k_y; k_{\text{tp}}\right) \quad (2.34)$$

donde

$$\text{D}(z) = \frac{\mathcal{W}_0^2}{2} \exp\left(-\frac{k_{\text{tp}}\mathcal{W}_0^2}{4}\right) \exp(ik_{\text{p}}z) \quad (2.35)$$

Para obtener el espectro angular basta con tomar el módulo cuadrado de la Ec. (2.34). Establecida la estructura espacial, tenemos que la componente del campo eléctrico del

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

bombeo en la dirección de la polarización extraordinaria está dada por [42]

$$\begin{aligned} \hat{E}_p(\vec{r}, t) &= (2\pi)^3 A_p \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \exp(-i\omega_p t) \exp\left\{-i\frac{k_{tp}^2 z}{2k_p(\omega_p)\xi(z)}\right\} \exp(i\vec{k}_p \cdot \vec{r}) \\ &\times \text{GB}(x, y - z \tan(\rho_0), z) \text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{\xi(z)}; k_{tp}\right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde  $\rho_0$  es el ángulo de *walk-off* y la amplitud espectral  $\alpha(\omega_p)$ , bajo el supuesto de que puede ser modelada correctamente por una función Gaussiana con frecuencia central  $\omega_{p0}$  y ancho espectral  $\sigma_p$ , está dada por

$$\alpha(\omega_p) = \exp\left[-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma_p^2}\right] \quad (2.37)$$

En la Ec. (2.36) se ha supuesto que el efecto de *walk-off* es paralelo al plano  $YZ$ .

### 2.4.2. Operador de campo eléctrico de la pareja de fotones

De [37] tenemos que la componente de frecuencia positiva del operador de campo eléctrico de la pareja de fotones está dada por

$$\hat{E}_\mu^{(+)}(\vec{r}, t) = i \int_V d^3k_\mu \exp\left[-i(\omega_\mu t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right] \ell(\omega_\mu) \hat{a}_\mu(\vec{k}_\mu) \quad (2.38)$$

con

$$\ell(\omega_\mu) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2(2\pi)^3 \epsilon_0 n(\omega_\mu)^2}} \quad (2.39)$$

y  $\omega_\mu = c|\vec{k}_\mu|$ ;  $\hat{a}_\mu(\vec{k}_\mu)$  es el operador de aniquilación de un fotón de vector de onda  $\vec{k}_\mu$ . Se integra sobre el volumen  $V$  de cuantización,  $\mu = \{s, i\}$ . La componente de frecuencia negativa de  $\hat{E}_\mu^{(-)}$  (Ec. (2.21)) es el conjugado Hermítico de la componente con frecuencia positiva, es decir,  $\hat{E}_\mu^{(-)}(\vec{r}, t) = \hat{E}_\mu^{(+)\dagger}(\vec{r}, t)$

### 2.4.3. Deducción de la función de amplitud conjunta

Hasta este punto ya se cuentan con todos los elementos necesarios para proceder con el cálculo del Hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{NL}$  (Ec. (2.27)). Primero calculemos

$$\begin{aligned} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= - \int_V d^3k_s \int_V d^3k_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \exp\left\{i(\omega_s t - \vec{k}_s \cdot \vec{r})\right\} \exp\left\{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})\right\} \\ &\times \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \exp\{i(\omega_s + \omega_i)t\} \exp\left\{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r}\right\} \\ &\times \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $\hat{E}_s^{(-)}$  y  $\hat{E}_i^{(-)}$  son las componentes en la dirección de la polarización ordinaria. Dado que debemos considerar todos los modos disponibles, la integración sobre el volumen  $V$  la estamos realizando sobre todo  $\mathbb{R}^3$ . Continuando con el cálculo

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -i(2\pi)^3 A_p \int d\omega_p \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \alpha(\omega_p) \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \\
 &\times \exp(-i\omega_p t) \exp\left\{-i \frac{k_{tp}^2 z}{2k_p(\omega_p) \xi(z)}\right\} \exp(ik_p z) \\
 &\times \text{GB}_T(x, y - z \tan(\rho_0), z) \text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{\xi(z)}; k_{tp}\right) \\
 &\times \exp\{i(\omega_s + \omega_i)t\} \exp\left\{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r}\right\} \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_s + \vec{k}_i &= (k_{sx}, k_{sy}, k_{sz}) + (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}) \\
 &= \vec{k}^\perp + (k_{sz} + k_{iz}) \hat{e}_z \\
 &= (\vec{k}^\perp, k_{sz} + k_{iz}) \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

donde  $\vec{k}^\perp = (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy})$ . Además,

$$\vec{r} = (x, y, z) = \vec{\rho}^\perp + z\vec{e}_z = (\vec{\rho}^\perp, z) \quad (2.43)$$

donde  $\vec{\rho}^\perp = (x, y)$ , de modo que

$$\begin{aligned}
 (\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r} &= (\vec{k}^\perp, k_{sz} + k_{iz}) \cdot (\vec{\rho}^\perp, z) \\
 &= \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp + (k_{sz} + k_{iz})z \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -i(2\pi)^3 A_p \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \\
 &\times \exp\{-i(\omega_p - \omega_s - \omega_i)t\} \exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp) \exp\{i(k_p - k_{sz} - k_{iz})z\} \\
 &\times \exp\left\{-i \frac{k_{tp}^2 z}{2k_p(\omega_p) \xi(z)}\right\} \text{GB}_T(x, y - z \tan(\rho_0), z) \\
 &\times \text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{\xi(z)}; k_{tp}\right) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

De la Ec. (2.27) sabemos que el Hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{\text{NL}}$  está compuesto por una contribución proporcional a la frecuencia negativa  $(\hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)})$  y otra a la frecuencia positiva  $(\hat{E}_p^{(-)} \hat{E}_s^{(+)} \hat{E}_i^{(+)})$  de los fotones señal y acompañante. Por otro lado,



## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

los operadores de frecuencia positiva son función de los operadores de aniquilación  $\hat{a}_s(\vec{k}_s)$  y  $\hat{a}_i(\vec{k}_i)$  respectivamente. Por la Ec. (2.26), es necesario aplicarlos sobre  $|\text{vac}\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_s$  cuyo resultado es nulo, por lo que de ahora en adelante no se tomará en cuenta dicha contribución. De modo que

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}} &= 2\epsilon_0 \int_{V_c} dV d_{eff} \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} \\ &= -2\epsilon_0 i (2\pi)^3 A_p d_{eff} \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \\ &\quad \times \exp(-i\Delta\omega t) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i)\end{aligned}\quad (2.46)$$

con

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \int_{V_c} dV \exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp) \exp(i\Delta k_z z) \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2 z}{2k_p(\omega_p)\xi(z)}\right\} \\ &\quad \times \text{GB}_T(x, y - z \tan(\rho_0), z) \text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{\xi(z)}; k_{\text{tp}}\right)\end{aligned}\quad (2.47)$$

la función de *phase-matching*;  $\Delta\omega = \omega_p - \omega_s - \omega_i$ ;  $\Delta k_z = k_p - k_{sz} - k_{iz}$ . Suponiendo que las dimensiones transversales del cristal son mucho más grandes que el perfil transversal del bombeo y considerando que la longitud del cristal es  $L$ , la integral sobre volumen se transforma en

$$\int_{V_c} dV \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-L/2}^{L/2} dz \quad (2.48)$$

Sea

$$\begin{aligned}\Lambda(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp) \text{GB}_T(x, y - z \tan(\rho_0), z) \\ &\quad \times \text{W}\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{\xi(z)}; k_{\text{tp}}\right)\end{aligned}\quad (2.49)$$

de modo que

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp(i\Delta k_z z) \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2 z}{2k_p(\omega_p)\xi(z)}\right\} \Lambda(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) \quad (2.50)$$

Analizando cuidadosamente la función  $\Lambda(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})$  podemos percatarnos de que la presencia del factor  $\exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp)$  sugiere verla como una transformada de Fourier en 2D cuyo kernel es precisamente dicho factor. En efecto, de las ecuaciones (10) y (11) de [41] se puede concluir que  $\Lambda(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})$  es el espectro angular salvo funciones que

dependen de  $z$ . Para finalizar el cálculo, tenemos que realizar la integral sobre el tiempo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_{\text{NL}} &= -2\epsilon_0 i (2\pi)^3 A_p d_{eff} \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \\
 &\quad \times \int_0^\tau dt \exp(-i\Delta\omega t) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \\
 &= -2\epsilon_0 i (2\pi)^4 A_p d_{eff} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \\
 &\quad \times \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \delta(\omega_p - (\omega_s + \omega_i)) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \\
 &= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p0}) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

donde se ha considerado que  $\int dt \exp(-i\Delta\omega t) = 2\pi\delta(\Delta\omega)$ . Además, en este caso se puede hacer la aproximación  $\ell(\omega_\mu) = \text{cte}$  [38], por lo que este factor extraerse de las integrales. Todas las constantes han sido agrupadas en el factor  $\eta$ . Definamos

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p0}) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \tag{2.52}$$

Por lo que el estado cuántico de la pareja de fotones está dado por:

$$|\Psi_2\rangle = \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) |\text{vac}\rangle \tag{2.53}$$

A la función  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  se le conoce como *función de amplitud conjunta*.

#### 2.4.4. Cálculo de la función de phase - matching

Primero presentaré el cálculo suponiendo que no hay efecto de walk-off, es decir,  $\rho_0 = 0$  y después, a partir de este resultado, derivaré el caso general.

##### 2.4.4.1. Caso Gaussiano

Para el caso de un haz puramente Gaussiano, tenemos que

$$W\left(\frac{x}{\xi(z)}, \frac{y}{\xi(z)}; k_{tp}\right) \exp\left\{-i\frac{k_{tp}^2 z}{2k_p(\omega_p)\xi(z)}\right\} \longrightarrow 1 \tag{2.54}$$

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

Bajo esta suposición y tomando en cuenta la Ec. (2.30), el espectro angular (Ec. (2.49)) se reduce a

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\text{I,G}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp) \text{GB}_T(x, y, z) \\
&= \frac{1}{\xi(z)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-ik_x^\perp x - \frac{x^2}{\mathcal{W}_0^2 \xi(z)}\right) \right] \\
&\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-ik_y^\perp y - \frac{y^2}{\mathcal{W}_0^2 \xi(z)}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\xi(z)} \left[ \mathcal{W}_0 \sqrt{\xi(z)} \exp\left(-\frac{1}{4} \mathcal{W}_0^2 \xi(z) (k_x^\perp)^2\right) \right] \\
&\times \left[ \mathcal{W}_0 \sqrt{\xi(z)} \exp\left(-\frac{1}{4} \mathcal{W}_0^2 \xi(z) (k_y^\perp)^2\right) \right] \\
&= \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left[-\frac{1}{4} \mathcal{W}_0^2 \xi(z) \left((k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2\right)\right] \\
&= \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{1}{4} \mathcal{W}_0^2 \left(1 + \frac{iz}{z_R}\right) |\vec{k}^\perp|^2\right) \tag{2.55}
\end{aligned}$$

con este resultado en mano se procede a calcular la función de phase-matching (sin walk-off) :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{I,G}}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp(i\Delta k_z z) \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2 \frac{iz}{z_R}\right) \\
&= \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp(i\Delta k z) \\
&= L \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \exp\left(i\frac{1}{2} L \Delta k_I\right) \text{sinc}\left(\frac{1}{2} L \Delta k_I\right) \tag{2.56}
\end{aligned}$$

donde he definido

$$\begin{aligned}
\Delta k_I &= \Delta k_z - \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} \\
&= k_p - \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - k_{sz} - k_{iz} \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Esta expresión es conocida como *desempatamiento de fases* (*phase mismatch*). Si ahora consideramos el efecto de walk-off  $\rho_0 \neq 0$ , aplicando el teorema del desplazamiento (Shift theorem, véase apéndice A) a la integral sobre  $y$  en la ecuación (2.55), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\text{II,G}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp) \text{GB}_T(x, y - z \tan \rho_0, z) \\
&= \Lambda_{\text{I,G}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) \exp(-ik_y^\perp z \tan \rho_0) \tag{2.58}
\end{aligned}$$

por lo que la función de phase-matching resulta en

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{II,G}}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \\
 &\times \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp(i\Delta k_z z) \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2 \frac{iz}{z_R}\right) \exp\left(-ik_y^\perp z \tan \rho_0\right) \\
 &= \pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp\left[i\left(\Delta k_z - \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - k_y^\perp \tan \rho_0\right) z\right] \\
 &= L\pi \mathcal{W}_0^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \exp\left(i\frac{1}{2} L\Delta k_{\text{II}}\right) \text{sinc}\left(\frac{1}{2} L\Delta k_{\text{II}}\right) \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

donde ahora el desempatamiento de fases está dado por

$$\begin{aligned}
 \Delta k_{\text{II}} &= \Delta k_z - \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - k_y^\perp z \tan \rho_0 \\
 &= k_p - \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - k_{sz} - k_{iz} - k_y^\perp \tan \rho_0 \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

#### 2.4.4.2. Caso Bessel-Gauss de orden cero ( $m = 0$ )

Para el caso de un haz Bessel-Gauss de orden cero  $m = 0$ , considerando la Ec. (2.33) y suponiendo que no hay walk-off, el espectro angular está dado por

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\text{I,BG}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp) \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2 z}{2k_p(\omega_p)\xi(z)}\right\} \\
 &\times \text{GB}_T(x, y, z) J_0\left(\frac{1}{\xi(z)} k_{\text{tp}} |\vec{\rho}^\perp|\right) \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

en seguida, lo que haremos será agregar un uno a través del factor  $\exp(-ik_{\text{tp}}z) \exp(ik_{\text{tp}}z)$ . Recordemos que la expresión del espectro angular  $\Lambda_{\text{I,BG}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})$  se debe introducir en la expresión de la función de phase-matching  $\Phi_{\text{I,BG}}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ , por lo que del factor que vamos a agregar, la parte  $\exp(ik_{\text{tp}}z)$  la conservaremos dentro de  $\Lambda_{\text{I,BG}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})$  mientras que su conjugado lo dejaremos en  $\Phi_{\text{I,BG}}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ . Nótese que esto puede hacerse sin ningún problema ya que las integrales en  $\Lambda_{\text{I,BG}}(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})$  sólo dependen de las variables  $x, y$  mientras que el factor depende de  $z$ , por lo que puede extraerse de las integrales.

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

De modo que

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\text{I,BG}} \left( z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left( -i \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp \right) \exp \left\{ -i \frac{k_{\text{tp}}^2 z}{2k_{\text{p}} (\omega_{\text{p}}) \xi(z)} \right\} \\
&\times \exp \left( i k_{\text{tp}} z \right) \text{GB}_{\text{T}} \left( x, y, z \right) J_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} |\vec{\rho}^\perp|}{\xi(z)} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left( -i \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp \right) \exp \left\{ -i \frac{k_{\text{tp}}^2 z}{2k_{\text{p}} (\omega_{\text{p}}) \xi(z)} \right\} \\
&\times \text{GB} \left( \vec{r} \right) J_0 \left( \frac{1}{\xi(z)} k_{\text{tp}} |\vec{\rho}^\perp| \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left( -i \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}^\perp \right) \text{BG}_0 \left( \vec{r} \right) \\
&= \mathfrak{B}\mathfrak{G}_0 \left( \vec{k}^\perp; z \right) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se da por la Ec. (2.29).  $\mathfrak{B}\mathfrak{G}_0(\vec{k}^\perp; z)$  es el espectro angular de  $\text{BG}_0(\vec{r})$  [41], que en general está dado por

$$\mathfrak{B}\mathfrak{G}_m(\vec{k}^\perp; z) = (-i)^m D(z) \exp \left( -\frac{1}{4} \xi(z) \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp|^2 \right) I_m \left( \frac{1}{2} k_{\text{tp}} \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp| \right) e^{im\phi} \tag{2.63}$$

donde  $m$  es la carga topológica de momento angular;  $I_m(\frac{1}{2}k_{\text{tp}}\mathcal{W}_0^2|\vec{k}^\perp|)$  es la función Bessel modificada de primera especie de orden  $m$ , y

$$D(z) = \frac{\mathcal{W}_0^2}{2} \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 \mathcal{W}_0^2 \right) \exp \left( i k_{\text{p}} z \right) \tag{2.64}$$

Entonces, retomando el cálculo de la función de phase-matching

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{I,BG}}(\vec{k}_{\text{s}}, \vec{k}_{\text{i}}) &= \frac{\mathcal{W}_0^2}{2} \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 \mathcal{W}_0^2 \right) I_0 \left( \frac{1}{2} k_{\text{tp}} \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp| \right) \\
&\times \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \left( i \Delta k_z z \right) \exp \left( -i k_{\text{p}} z \right) \exp \left( i k_{\text{p}} z \right) \exp \left( -\frac{1}{4} \xi(z) \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp|^2 \right) \\
&= \frac{\mathcal{W}_0^2}{2} \exp \left( -\frac{1}{4} \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp|^2 \right) \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 \mathcal{W}_0^2 \right) I_0 \left( \frac{1}{2} k_{\text{tp}} \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp| \right) \\
&\times \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \left( i \Delta k z \right) \\
&= \frac{L \mathcal{W}_0^2}{2} \exp \left( -\frac{1}{4} \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp|^2 \right) \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 \mathcal{W}_0^2 \right) I_0 \left( \frac{1}{2} k_{\text{tp}} \mathcal{W}_0^2 |\vec{k}^\perp| \right) \\
&\times \exp \left( i \frac{1}{2} L \Delta k_{\text{I}} \right) \text{sinc} \left( \frac{1}{2} L \Delta k_{\text{I}} \right) \tag{2.65}
\end{aligned}$$

donde  $\Delta k$  coincide con la Ec. (2.57). El siguiente paso es hacer el cálculo incluyendo el efecto walk-off. Este cálculo no es necesario hacerlo explícitamente, puesto que el

teorema del desplazamiento (Shift theorem, Apéndice A), asegura que esto sólo agregará al espectro angular una fase dada por  $\exp(-ik_y^\perp z \tan \rho_0)$ , factor que puede ser agrupado de tal forma que ahora el desempatajamiento de fases viene dado por la Ec. (2.60).

**Tabla 2.3:** Estructura de la función de *phase-matching*  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ .

Tipo de haz	$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \mathcal{S}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \times \mathcal{L}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$		$\Delta k$	
	$\mathcal{S}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$	$\mathcal{L}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$	$\Delta k_{\text{I}}(\rho = 0)$	$\Delta k_{\text{II}}(\rho \neq 0)$
Gaussiano	$\exp\left(-\frac{\mathcal{W}_0^2}{4} \vec{k}^\perp ^2\right)$			
Bessel - Gauss ( $m = 0$ )	$\exp\left[-\frac{1}{4}\mathcal{W}_0^2\left( \vec{k}^\perp ^2 + k_{\text{tp}}^2\right)\right]$ $I_0\left(\frac{1}{2}k_{\text{tp}}\mathcal{W}_0 \vec{k}^\perp \right)$	$\exp\left(i\frac{1}{2}L\Delta k\right)$ $\text{sinc}\left(\frac{1}{2}L\Delta k\right)$	$k_{\text{p}} - \frac{ \vec{k}^\perp ^2}{2k_{\text{p}}}$ $-k_{\text{sz}} - k_{\text{iz}}$	$\Delta k_{\text{I}}$ $-k_y^\perp \tan \rho_0$

En la tabla [Tabla 2.3](#) se resumen los resultados de esta sección. El primer punto a destacar es que la función de phase matching  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  se puede descomponer en dos factores, es decir,  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \mathcal{S}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \times \mathcal{L}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  donde  $\mathcal{S}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  es una función que queda determinada únicamente por las propiedades espaciales del bombeo mientras que  $\mathcal{L}(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  es una función que depende de las propiedades del cristal tales como su longitud, dispersión y walk-off. De modo que la función de amplitud conjunta,  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  (Ec. (2.52)), queda estructurada de la siguiente forma

$$F = \alpha \times \mathcal{S} \times \mathcal{L} \quad (2.66)$$

donde  $\alpha$  depende de las propiedades temporales del bombeo. El segundo punto a destacar es que el desempatajamiento de fases es independiente de la estructura que se le imparta al haz de bombeo.

En este punto es necesario hacer un paréntesis. En la literatura es muy común, y para fines experimentales resulta práctico, escribir al estado de la pareja de fotones en el espacio de vectores de onda transversal  $(k_{\mu x}, k_{\mu y}, \omega_\mu)$ , véase por ejemplo [33, 36, 43]. Para hacer esta transformación de coordenadas emplearé los Jacobianos  $J_{k_\mu}$  y  $J_{\omega_\mu}$  (ecuaciones (C.12) y (C.13)) calculados en el Apéndice C, quedando el estado de la pareja de fotones de la siguiente forma

$$|\Psi_2\rangle = \eta \int d^2k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2k_i^\perp \int d\omega_i A_s A_i F(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s^\perp, \omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i^\perp, \omega_i) |\text{vac}\rangle \quad (2.67)$$

donde  $A_\mu = J_{k_\mu} J_{\omega_\mu}$ .

## 2.5. Espectro Angular Condicional de la pareja de fotones

A continuación presentaré el cálculo del *Espectro Angular Condicional* (CAS, por su siglas en inglés *Conditional Angular Spectrum*). El CAS representa la distribución

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

transversal de vectores de onda (espectro angular) de un fotón en el modo señal condicionado a la detección de un fotón acompañante con vector de onda transversal  $\vec{k}_{i0}$ . Matemáticamente podemos representar esta medición mediante el valor de expectativa del operador de número de un sólo fotón tomado sobre el estado del fotón señal anunciado.

Definimos al operador de proyección sobre el modo señal de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(\vec{k}_{i0}) &= \hat{\mathbb{I}} \otimes |\vec{k}_{i0}\rangle_i \langle \vec{k}_{i0}|_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s |\vec{k}_s\rangle_s \langle \vec{k}_s|_s \otimes |\vec{k}_{i0}\rangle_i \langle \vec{k}_{i0}|_i\end{aligned}\quad (2.68)$$

donde  $\vec{k}_{i0}$  es el vector de onda del fotón acompañante e  $\hat{\mathbb{I}}$  es el operador identidad. Ahora veamos cuál es la acción de este operador de proyección sobre el estado de la pareja de fotones (2.53)

$$\begin{aligned}|\Psi(\vec{k}_{i0})\rangle_s &= \hat{\Pi}(\vec{k}_{i0})|\Psi_2\rangle \\ &= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{\mathbb{I}} \otimes |\vec{k}_{i0}\rangle_i \langle \vec{k}_{i0}|_i \cdot |\vec{k}_s\rangle_s \otimes |\vec{k}_i\rangle_i \\ &= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{\mathbb{I}} |\vec{k}_s\rangle_s \otimes \langle \vec{k}_{i0}|_i |\vec{k}_i\rangle_i |\vec{k}_{i0}\rangle_i\end{aligned}\quad (2.69)$$

Utilizando las relaciones de conmutación entre los operadores de aniquilación y creación (Apéndice B), se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \vec{k}_{i0}|_i |\vec{k}_i\rangle_i &= \langle 0|_i \hat{a}(\vec{k}_{i0}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle_i \\ &= \langle 0|_i [\delta^{(3)}(\vec{k}_i - \vec{k}_{i0}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \hat{a}(\vec{k}_{i0})] |0\rangle_i \\ &= \delta^{(3)}(\vec{k}_i - \vec{k}_{i0}) \langle 0|_i |0\rangle_i \\ &= \delta^{(3)}(\vec{k}_i - \vec{k}_{i0})\end{aligned}\quad (2.70)$$

con este resultado, la Ec. (2.69) se reduce a

$$|\Psi(\vec{k}_{i0})\rangle_s = \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s F(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0}) |\vec{k}_s\rangle_s \otimes |\vec{k}_{i0}\rangle_i\quad (2.71)$$

Esta ecuación representa el estado de un solo fotón en el modo señal sujeto a la detección del fotón acompañante de vector de onda  $\vec{k}_{i0}$ . Podemos simplificar la notación dejando a un lado el ket que representa al fotón acompañante de la siguiente manera:

$$|\Psi(\vec{k}_{i0})\rangle_s = \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s F(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0}) |\vec{k}_s\rangle_s\quad (2.72)$$

De esto, tenemos que el operador de densidad está dado por

$$\hat{\rho}_s(\vec{k}_{i0}) = |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s'' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s' F(\vec{k}_s', \vec{k}_{i0}) F^*(\vec{k}_s'', \vec{k}_{i0}) |\vec{k}_s'\rangle_s \langle \vec{k}_s''|_s\quad (2.73)$$

Tomando la definición de operador de número del Apéndice B, finalmente el CAS está dado por

$$\begin{aligned}
 R_c^{(0)}(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0}) &= \langle \hat{n}_s(\vec{k}_s) \rangle = \text{Tr}_{\vec{k}_s}(\hat{n}_s \hat{\rho}_s) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \langle \vec{k}_s | \hat{n}_s \hat{\rho}_s | \vec{k}_s \rangle_s \\
 &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s'' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s' F(\vec{k}_s', \vec{k}_{i0}) F^*(\vec{k}_s'', \vec{k}_{i0}) \\
 &\quad \times \langle \vec{k}_s | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) \cdot | \vec{k}_s' \rangle_s \langle \vec{k}_s'' | \cdot | \vec{k}_s \rangle_s
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

por las propiedades de los operadores de creación y aniquilación (Apéndice C), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{k}_s | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) | \vec{k}_s' \rangle_s &= \langle \vec{k}_s | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s') | 0 \rangle_s \\
 &= \langle \vec{k}_s | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) [\delta^{(3)}(\vec{k}_s' - \vec{k}_s) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s') \hat{a}(\vec{k}_s)] | 0 \rangle_s \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{k}_s' - \vec{k}_s) \langle \vec{k}_s | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) | 0 \rangle_s \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{k}_s' - \vec{k}_s) \langle \vec{k}_s | \vec{k}_s \rangle_s \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{k}_s' - \vec{k}_s) \delta^{(3)}(\vec{k}_s - \vec{k}_s)
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

además,

$$\langle \vec{k}_s'' | \vec{k}_s \rangle_s = \delta^{(3)}(\vec{k}_s'' - \vec{k}_s) \tag{2.76}$$

usando los resultados (2.75) y (2.76), el cálculo del CAS , Ec.(2.74), se reduce a

$$\begin{aligned}
 R_c^{(0)}(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0}) &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s'' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s' F(\vec{k}_s', \vec{k}_{i0}) F^*(\vec{k}_s'', \vec{k}_{i0}) \\
 &\quad \times \delta^{(3)}(\vec{k}_s' - \vec{k}_s) \delta^{(3)}(\vec{k}_s'' - \vec{k}_s) \delta^{(3)}(\vec{k}_s - \vec{k}_s) \\
 &= |\eta|^2 F(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0}) F^*(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0}) \\
 &= |\eta|^2 |F(\vec{k}_s, \vec{k}_{i0})|^2
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Al igual que (2.67), podemos hacer una transformación de coordenadas y escribir a  $R_c^{(0)}(\cdot)$  en el espacio de vectores de onda transversal  $(\vec{k}^\perp, \omega)$  y si además consideramos el caso de los fotones degenerados  $\omega_{s0} = \omega_{i0} = \omega_p/2$ :

$$R_c^{(0)}(\vec{k}_s^\perp, \omega_{s0}, \vec{k}_{i0}^\perp, \omega_{i0}) = |\eta|^2 |F(\vec{k}_s^\perp, \omega_{s0}, \vec{k}_{i0}^\perp, \omega_{i0})|^2 \tag{2.78}$$

### 2.5.1. Consideraciones experimentales I

Para hacer compatible la teoría con el experimento es necesario hacer ciertas consideraciones. El primer punto a tomar en cuenta es que la colección de los fotones se hace mediante una punta de fibra óptica, que puede considerarse como un filtro de momentos transversales en el espacio de Fourier. Supóngase que la aceptación está caracterizada



## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

por funciones  $u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp)$  y  $u_i(\vec{k}_i^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp)$  para los modos señal y acompañante, respectivamente, donde  $\vec{k}_{\mu 0}^\perp$  representa la coordenada del centro de la fibra óptica. Otro hecho experimental a tomar en cuenta es el uso de filtros espectrales, que podemos modelar a través de una función  $f(\omega_\mu)$ . Entonces, el efecto completo se toma en cuenta integrando sobre la aceptación espectral y sobre la aceptación en vectores de onda transversal de las fibras, quedando la expresión para el CAS de la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_c(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \int d^2\tilde{k}_s^\perp \int d\tilde{\omega}_s \int d^2\tilde{k}_i^\perp \int d\tilde{\omega}_i \\ &\times u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) u_i(\vec{k}_i^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) f(\tilde{\omega}_s) f(\tilde{\omega}_i) R_c^{(0)}(\vec{k}_s^\perp, \tilde{\omega}_s, \vec{k}_i^\perp, \tilde{\omega}_i) \end{aligned} \quad (2.79)$$

### 2.5.1.1. Aproximación de bombeo de onda continua

En la parte experimental de este trabajo se emplea un bombeo de onda continua, es decir, un bombeo esencialmente monocromático a una frecuencia  $\omega_p$ . Matemáticamente, esto se consigue tomando el límite  $\sigma_p \rightarrow 0$  en la ecuación (2.37), de modo que  $|\alpha(\tilde{\omega}_s + \tilde{\omega}_i, \omega_p)|^2$  puede reemplazarse por  $\delta(\omega_p - (\tilde{\omega}_s + \tilde{\omega}_i))$ , por lo que

$$\begin{aligned} R_c(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \int d^2\tilde{k}_s^\perp \int d^2\tilde{k}_i^\perp \int d\tilde{\omega}_i \\ &\times u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) u_i(\vec{k}_i^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) f(\omega_p - \tilde{\omega}_i) f(\tilde{\omega}_i) |\Phi(\vec{k}_s^\perp, \omega_p - \tilde{\omega}_i, \vec{k}_i^\perp, \tilde{\omega}_i)|^2 \\ &= \int d^2\tilde{k}_s^\perp \int d^2\tilde{k}_i^\perp u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) u_i(\vec{k}_i^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) |\mathcal{S}(\vec{k}_s^\perp + \vec{k}_i^\perp)|^2 \mathfrak{L}(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_i^\perp) \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde he definido

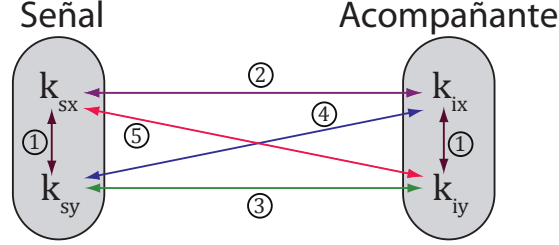
$$\mathfrak{L}(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_i^\perp) = \int d\tilde{\omega}_i f(\omega_p - \tilde{\omega}_i) f(\tilde{\omega}_i) \mathcal{L}(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_i^\perp) \quad (2.81)$$

## 2.6. Correlaciones transversales entre parejas de fotones

Otro aspecto de interés a estudiar son las correlaciones entre las diferentes variables espaciales fotónicas. En la [Figura 2.7](#) el caso etiquetado con el número 1 es el Espectro Angular Condicional (CAS) y los casos 2 – 5 corresponden a las distintas correlaciones. El CAS, en estricto sentido, no representa una correlación, ya que la esencia de éstas consiste en monitorear simultáneamente una variable espacial de un fotón señal y una variable espacial de un fotón acompañante, mientras que en el CAS se monitorean sólo las variables de un fotón.

No presentaré el cálculo de la función que representa a una correlación por ser de derivación similar al cálculo del CAS, la diferencia radica en el operador de proyección que representa las coordenadas que se mantendrán fijas. En la [Tabla 2.4](#) se muestran para cada tipo de correlación el operador de proyección que deberá usarse en caso de que el lector desee realizar el cálculo y las coordenadas que se toman como fijas. En general, representaremos a las correlaciones a través de la función

$$\mathfrak{C}(k_{sx}, k_{sy}, k_{ix}, k_{iy}, \omega_0) = |\eta|^2 |F(k_{sx}, k_{sy}, \omega_0, k_{ix}, k_{iy}, \omega_0)|^2 \quad (2.82)$$



**Figura 2.7:** Diferentes correlaciones espaciales entre parejas de fotones.

donde  $\omega_0 = \omega_p/2$  por tratarse del caso de los fotones degenerados. Dependiendo del tipo de correlación que se desee calcular serán las coordenadas que se tomarán como fijas. Nótese que la ecuación (2.82) sólo es válida para el caso ideal. En una situación real, se deben tomar en cuenta las mismas consideraciones que en la sección 2.5.1.

**Tabla 2.4:** Tipos de Correlaciones Espaciales.

Tipo de correlación	Coordenadas fijas	Operador de proyección
$\{k_{sx} - k_{ix}\}$	$k_{sy} = k_{sy0}$ $k_{iy} = k_{iy0}$	$\hat{\Pi}(k_{sy0}, k_{ix0}) = \int_{\mathbb{R}} dk_{sx}  k_{sx}, k_{sy0}, \omega_0\rangle_s \langle k_{sx}, k_{sy0}, \omega_0 _s$ $\otimes \int_{\mathbb{R}} dk_{ix}  k_{ix}, k_{iy0}, \omega_0\rangle_i \langle k_{ix}, k_{iy0}, \omega_0 _i$
$\{k_{sx} - k_{iy}\}$	$k_{sy} = k_{sy0}$ $k_{ix} = k_{ix0}$	$\hat{\Pi}(k_{sy0}, k_{ix0}) = \int_{\mathbb{R}} dk_{sx}  k_{sx}, k_{sy0}, \omega_0\rangle_s \langle k_{sx}, k_{sy0}, \omega_0 _s$ $\otimes \int_{\mathbb{R}} dk_{iy}  k_{ix0}, k_{iy}, \omega_0\rangle_i \langle k_{ix0}, k_{iy}, \omega_0 _i$
$\{k_{sy} - k_{iy}\}$	$k_{sx} = k_{sx0}$ $k_{ix} = k_{ix0}$	$\hat{\Pi}(k_{sx0}, k_{iy0}) = \int_{\mathbb{R}} dk_{sy}  k_{sx0}, k_{sy}, \omega_0\rangle_s \langle k_{sx0}, k_{sy}, \omega_0 _s$ $\otimes \int_{\mathbb{R}} dk_{iy}  k_{ix0}, k_{iy}, \omega_0\rangle_i \langle k_{ix0}, k_{iy}, \omega_0 _i$
$\{k_{sy} - k_{ix}\}$	$k_{sx} = k_{sx0}$ $k_{iy} = k_{iy0}$	$\hat{\Pi}(k_{sx0}, k_{iy0}) = \int_{\mathbb{R}} dk_{sy}  k_{sx0}, k_{sy}, \omega_0\rangle_s \langle k_{sx0}, k_{sy}, \omega_0 _s$ $\otimes \int_{\mathbb{R}} dk_{ix}  k_{ix}, k_{iy0}, \omega_0\rangle_i \langle k_{ix}, k_{iy0}, \omega_0 _i$

## 2.7. Espectro Angular de la pareja de fotones

Definimos al *Espectro Angular* (*AS*, por sus siglas en inglés *Angular Spectrum*) como [43]

$$\mathbf{R}_s(\vec{k}_s) = \langle \Psi | \hat{n}_s(\vec{k}_s) | \Psi \rangle \quad (2.83)$$

$$= \langle \Psi | \hat{n}_s(\vec{k}_s) \otimes \hat{\mathbb{1}} | \Psi \rangle \quad (2.84)$$

## 2. TEORÍA DE LA CONVERSIÓN ESPONTÁNEA PARAMÉTRICA DESCENDENTE

---

donde  $\hat{\mathbb{I}}$  es el operador identidad,  $\hat{n}_s(\vec{k}_s) = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s)\hat{a}(\vec{k}_s)$ . Sea  $|\Phi\rangle = \hat{n}_s(\vec{k}_s) \otimes \hat{\mathbb{I}}|\Psi\rangle$ , entonces

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) \otimes \hat{\mathbb{I}} \cdot |\vec{k}'_s\rangle_s \otimes |\vec{k}'_i\rangle_i \\
&= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) |\vec{k}'_s\rangle_s \otimes \hat{\mathbb{I}} |\vec{k}'_i\rangle_i \\
&= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_s) |0\rangle_s \otimes |\vec{k}'_i\rangle_i \\
&= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \delta^{(3)}(\vec{k}'_s - \vec{k}_s) |\vec{k}'_s\rangle_s \otimes |\vec{k}'_i\rangle_i
\end{aligned} \tag{2.85}$$

con este resultado se tiene que

$$\begin{aligned}
R_s^{(0)}(\vec{k}_s) &= \langle \Psi | \Phi \rangle \\
&= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F^*(\vec{k}''_s, \vec{k}''_i) F(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\vec{k}'_s - \vec{k}_s) \langle \vec{k}''_s |_s \otimes \langle \vec{k}''_i |_i \cdot |\vec{k}_s\rangle_s \otimes |\vec{k}'_i\rangle_i \\
&= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F^*(\vec{k}''_s, \vec{k}''_i) F(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\vec{k}''_s - \vec{k}_s) \delta^{(3)}(\vec{k}'_s - \vec{k}_s) \delta^{(3)}(\vec{k}''_i - \vec{k}'_i) \\
&= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i F^*(\vec{k}_s, \vec{k}'_i) F(\vec{k}_s, \vec{k}'_i) \\
&= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i |F(\vec{k}_s, \vec{k}'_i)|^2
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Ahora, podemos hacer la transformación de coordenadas del espacio  $(k_{\mu x}, k_{\mu y}, k_{\mu z})$  al espacio  $(k_{\mu x}, k_{\mu y}, \omega_\mu)$ , en el Apéndice C se muestran los jacobianos necesarios (Ec. (C.12) y (C.13)), quedando el AS, en el espacio transversal, expresado de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
R_s^{(0)}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s) &= |\eta|^2 \int d^2 k_i^\perp \int dk_i J_{k_i} |F(\vec{k}_s^\perp, k_s, \vec{k}_i^\perp, k_i)|^2 \\
&= |\eta|^2 \int d^2 k_i^\perp \int d\omega_i J_{k_i} J_{\omega_i} |F(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i)|^2 \\
&= \int d^2 k_i^\perp \int d\omega_i A_i R_c^{(0)}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Nótese que se ha logrado escribir al AS en términos del CAS; esto indica que para obtener el AS hay que integrar el CAS en cada punto donde se detecte un fotón acompañante.

### 2.7.1. Consideraciones experimentales II

De nueva cuenta, para hacer compatible la teoría con el experimento, tenemos que añadir las funciones de los filtros espectrales y de aceptación de los detectores. Como

en este caso sólo nos interesan las cuentas simples, es decir, únicamente aquellas que derivan del fotón señal; experimentalmente esto se logra poniendo una punta de fibra en el camino óptico del fotón señal y dejando libre el camino óptico del fotón acompañante, por lo que solo es necesario agregar una función que caracterice al detector. Integrando sobre la aceptación espectral de los filtros y sobre la aceptación en vectores de onda del detector, el AS queda de la siguiente forma

$$R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) = \int d^2\vec{k}_s^\perp \int d\omega_s \int d^2\vec{k}_i^\perp \int d\omega_i A_i u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) f(\omega_s) f(\omega_i) R_c^{(0)}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i) \quad (2.88)$$

### 2.7.1.1. Aproximación de bombeo de onda continua

Un bombeo de onda continua es un bombeo monocromático, lo cual implica que podemos hacer la aproximación  $|\alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_p)|^2 \approx \delta(\omega_p - (\omega_s + \omega_i))$ , de modo que

$$R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) = \int d^2\vec{k}_s^\perp \int d^2\vec{k}_i^\perp u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) |\mathcal{S}(\vec{k}_s^\perp + \vec{k}_i^\perp)|^2 \mathcal{L}(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_i^\perp) \quad (2.89)$$

donde he definido

$$\mathcal{L}(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_i^\perp) = \int d\omega_i A_i f(\omega_p - \omega_i) f(\omega_i) \mathcal{L}(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_i^\perp) \quad (2.90)$$

### 2.7.1.2. Aproximación de resolución perfecta

La función de aceptación de las fibras ópticas la podemos modelar como una función Gaussiana de la forma

$$u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) \propto \exp\left(-\frac{|\vec{k}_s^\perp - \vec{k}_{s0}^\perp|^2}{\delta k^2}\right) \quad (2.91)$$

donde  $r = 1/\delta k^2$  es el radio del núcleo de la fibra óptica. Considerar resolución perfecta significa tener una fibra óptica puntual, es decir, considerar el límite  $r \rightarrow 0$ . Bajo esta suposición, es posible hacer la siguiente aproximación

$$u_s(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) = \delta^{(2)}(\vec{k}_s^\perp - \vec{k}_{s0}^\perp) \quad (2.92)$$

$\delta^{(2)}$  es la función delta de Dirac en 2D. La ecuación (2.88) se reduce a

$$R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) = \int d^2\vec{k}_i^\perp |\mathcal{S}(\vec{k}_{s0}^\perp + \vec{k}_i^\perp)|^2 \mathcal{L}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp) \quad (2.93)$$

Comparando las ecuaciones (2.87) y (2.93) podemos notar que la única diferencia radica en que la ecuación (2.93) incorpora las funciones de los filtros espectrales.



# Enredamiento cuántico entre parejas de fotones generadas por SPDC

---

En este capítulo introduciré el concepto de enredamiento (entrelazamiento) en mecánica cuántica. Comenzaré con una descripción histórica revisando el artículo que publicaron en 1935 Einstein, Podolsky y Rosen donde se discutía la incompletez de la mecánica cuántica y que fue parteaguas en el problema de enredamiento cuántico. Finalizada la revisión histórica, comenzaré con los diferentes criterios que han sido desarrollados para detectar enredamiento.

## 3.1. No-localidad en Mecánica Cuántica

El concepto de *localidad* es algo que podemos entender muy fácilmente de nuestra experiencia diaria: sistemas físicos sólo pueden ser alterados directamente por el medio que los rodea pero jamás se verán afectados por objetos que se encuentren fuera del cono de causalidad. Sin embargo, en el mundo de la mecánica cuántica esto no sucede. A pesar de ir totalmente en contra de nuestra intuición, objetos separados espacialmente pueden revelar correlaciones no locales, esto es, pueden influenciarse el uno al otro [44]. Esta idea fue la que condujo a Albert Einstein, Boris Podolsky y Natham Rosen (*EPR*) a publicar en 1935 el famoso artículo *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* [45], en donde discuten la incompletez de la mecánica cuántica. Mas adelante será discutido con detalle este artículo.

A partir de los fenómenos no locales en la mecánica cuántica surgieron diferentes conceptos como *Enredamiento Cuántico*, *Steering* y *no-localidad de Bell*. Los primeros dos fueron introducidos por Schrödinger en 1935 [46] en respuesta al artículo de EPR, y el último deriva consecuencia del trabajo publicado por Bell en 1964 [47].

### 3.1.1. Paradoja de Einstein - Podolsky - Rosen

La esencia del artículo de EPR es una demostración de la incompatibilidad entre las premisas de realismo local<sup>1</sup> y la completez de la mecánica cuántica. Primero que

---

<sup>1</sup>Los resultados de las mediciones realizadas en un sistema que se encuentra localizado en el espacio - tiempo están completamente determinados por las propiedades que definen al sistema (su realidad

### 3. ENREDAMIENTO CUÁNTICO ENTRE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR SPDC

---

nada, es necesario introducir lo que se entiende por una teoría completa, para ello citaré textualmente la condición de completez [45]:

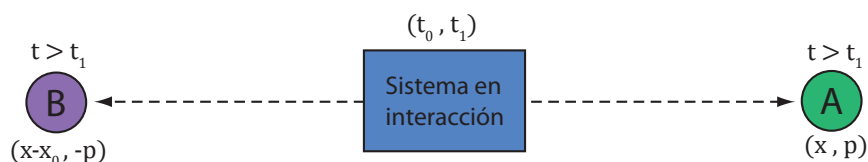
**Condición de completez:** *Todo elemento de la realidad física debe tener su contraparte en la teoría física.*

Otro concepto importante en este artículo es el de realidad y se hace mención del siguiente criterio:

**Criterio suficiente de realidad:** *Si es posible predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a 1) el valor de una cantidad física sin perturbar de ninguna forma al sistema, entonces existe un elemento de la realidad que se corresponde con esta cantidad física.*

Parafraseando, este criterio nos dice que si una cantidad física, es decir una cantidad medible, puede ser predicha sin interactuar con el sistema, entonces el valor de esta cantidad física es independiente del proceso de medición elegido. Con estos conceptos en mano podemos introducir los dos problemas de la mecánica cuántica que se discuten en el artículo:

- (1) *La completez de la descripción cuántica de la realidad dada por la función de onda.*
- (2) *Los operadores correspondientes a cantidades físicas que no conmutan no pueden tener una realidad simultánea.*



**Figura 3.1:** Experimento pensado de Einstein-Podolsky-Rosen.

Para hacer más tangible estos problemas, se propone el siguiente ejemplo. Para describir a cualquier sistema en mecánica cuántica se recurre al concepto de estado, el cual se supone que está caracterizado completamente por la función de onda. También, para cada cantidad física observable existe un operador en mecánica cuántica asociado a dicho observable. Consideremos un sistema compuesto por dos partículas a las que hacemos interactuar desde un tiempo  $t = t_0$  a  $t = t_1$ . Después de transcurrido este tiempo, las partículas ya no interactúan por lo que cada una sigue su propio camino. Supóngase además que para tiempos anteriores a  $t_0$  el estado de cada uno de los sistemas es conocido. Entonces, con ayuda de la función de onda podemos determinar el estado del sistema compuesto I + II a cualquier tiempo. De mecánica cuántica se sabe que física) y no pueden ser influenciados por eventos fuera del cono de causalidad (localidad) [48].

no es posible calcular en qué estado particular se encontrará cada subsistema después de la interacción, no obstante, esto sí es posible a través de una serie de mediciones, procedimiento conocido como *Reducción del paquete de ondas*.

Considérese un sistema de dos partículas descrito por la función de onda

$$|\Psi(x_I, x_{II})\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x_{II})\rangle_{\Phi} |u_n(x_I)\rangle_{\Phi} \quad (3.1)$$

donde  $\hat{\Phi}$  representa un operador asociado al subsistema I, en cuya base se ha escrito la función de onda;  $\{|u_n(x_I)\rangle_{\Phi}\}$  son las eigenfunciones del operador  $\hat{\Phi}$  con eigenvalores  $\{\phi_n\}$ . Nótese que el conjunto de funciones  $\{|u_n(x_I)\rangle_{\Phi}\}$  queda determinado por la elección del operador que se ha deseado medir. Supongamos que se realiza una medición del operador  $\hat{\Phi}$  y se obtiene como resultado el eigenvalor  $\phi_r$ . Esto significa que el subsistema I, después de la medición, se encuentra en el estado  $|u_r(x_I)\rangle_{\Phi}$  y, en consecuencia, el subsistema II es forzado a estar en el estado  $|\psi_r(x_{II})\rangle_{\Phi}$ . A esto se le conoce como reducción del paquete de ondas, pues la descripción de la función de onda dada por la suma infinita (3.1) ha sido reducida a un sólo término dado por

$$|\Psi(x_I, x_{II})\rangle = |\psi_r(x_{II})\rangle_{\Phi} |u_r(x_I)\rangle_{\Phi} \quad (3.2)$$

Si en lugar del operador  $\hat{\Phi}$  elegimos un operador distinto  $\hat{\Lambda}$ , de modo que si al medir este operador se encuentra el eigenvalor  $\lambda_s$ , significa que el subsistema I, después de la medición, se encuentra en el estado  $|u_s(x_I)\rangle_{\Lambda}$  mientras que el subsistema II es, nuevamente forzado, a estar en el estado  $|\psi_s(x_{II})\rangle_{\Lambda}$ . De esto se concluye que, como consecuencia de dos mediciones distintas realizadas sobre el primer subsistema, el segundo subsistema permanece en estados con diferentes funciones de onda<sup>2</sup>. Sin embargo, al momento de realizar las mediciones los subsistemas ya no están interactuando de modo que no debería haber ningún efecto en el segundo subsistema como consecuencia de haber realizado mediciones en el primero, es decir, no debería haber interacción a distancia entre ambos subsistemas, lo cual viola la suposición de localidad. Poniendo esto en palabras de EPR, es posible asignar dos funciones de onda distintas ( $|\psi_r(x_{II})\rangle_{\Phi}$  y  $|\psi_s(x_{II})\rangle_{\Lambda}$ ) a la misma realidad.

A este respecto, queda pendiente la siguiente cuestión ¿Qué sucede si los operadores  $\hat{\Theta}$  y  $\hat{\Lambda}$  son operadores que no conmutan? Para ello, EPR tomaron el caso de los operadores  $\hat{X}$  y  $\hat{P}$  y consideraron un ejemplo similar al anterior en el cual toman un par de partículas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  (Figura 3.1) separadas espacialmente<sup>3</sup> (space-like separated) una de otra con la intención de que no puedan interactuar de modo que nada de lo que se realice sobre  $\mathcal{A}$  pueda perjudicar los elementos de realidad de  $\mathcal{B}$ , y viceversa. La

<sup>2</sup>A esto fue a lo que más tarde Schrödinger denominó *Steering* [46]

<sup>3</sup>Dos puntos en el espacio-tiempo tienen separación espacial (space-like separated) si la distancia (espacial) entre ellos es lo suficientemente larga tal que ninguna señal que viaje a la velocidad de la luz pueda atravesar la distancia entre ellos en ese intervalo de tiempo



### 3. ENREDAMIENTO CUÁNTICO ENTRE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR SPDC

---

función de onda que describe a este par de partículas es

$$\Psi(x_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{B}}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ip/\hbar)(x_{\mathcal{A}} - x_{\mathcal{B}} - x_0)} dp \quad (3.3)$$

donde  $x_0$  es una variable que hace énfasis en la separación espacial. Escribir la función de onda de esta forma es una elección muy inteligente para abordar y simplificar el problema, pues si  $\hat{P}_{\mathcal{A}} = (\hbar/i)\partial/\partial x_{\mathcal{A}}$  es el operador de momento de la partícula  $\mathcal{A}$ , su eigenfunción está dada por

$$u_p(x_{\mathcal{A}}) = e^{(i/\hbar)px_{\mathcal{A}}} \quad (3.4)$$

cuyo eigenvalor es  $p$ , (3.3) se puede reescribir en la base de momentos de la siguiente manera

$$\Psi(x_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{B}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_{\mathcal{B}})u_p(x_{\mathcal{A}})dp \quad (3.5)$$

donde  $\psi_p(x_{\mathcal{B}}) = e^{-(i/\hbar)(x_{\mathcal{B}} - x_0)p}$ . No es difícil constatar que  $\psi_p(x_{\mathcal{B}})$  es eigenfunción del operador de momento  $\hat{P}_{\mathcal{B}} = (\hbar/i)\partial/\partial x_{\mathcal{B}}$  de la partícula  $\mathcal{B}$  cuyo eigenvalor es  $-p$ . De la misma forma, sea  $\hat{X}_{\mathcal{A}}$  el operador de posición de la partícula  $\mathcal{A}$  cuya eigenfunción y eigenvalor son  $v_x(x_{\mathcal{A}}) = \delta(x_{\mathcal{A}} - x)$  y  $x$ , respectivamente. De esta forma, (3.3) se puede reescribir en la base de posiciones como

$$\Psi(x_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{B}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_{\mathcal{B}})v_x(x_{\mathcal{A}})dx \quad (3.6)$$

donde  $\phi_x(x_{\mathcal{B}}) = h\delta(x - x_{\mathcal{B}} + x_0)$  es la eigenfunción del operador de posición  $\hat{X}_{\mathcal{B}}$  de la partícula  $\mathcal{B}$  con eigenvalor  $x + x_0$ . Entonces, por un lado, sabemos que  $[\hat{X}_{\alpha}, \hat{P}_{\beta}] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$  con  $\alpha, \beta = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ , es decir,  $\hat{X}_{\alpha}$  y  $\hat{P}_{\alpha}$  no conmutan, lo que implica que si se conoce el momento de  $\mathcal{B}$ , su posición no tiene realidad física. Por otro lado, como podemos predecir con certeza la posición y el momento de  $\mathcal{B}$  sin perturbar el sistema (a través de mediciones realizadas en  $\mathcal{A}$ ), podemos asignarle una realidad física a cada una de estas cantidades. Estos dos argumentos entran en contradicción. Empezamos suponiendo que la descripción cuántica de la realidad dada por la función de onda es completa, lo que nos ha llevado a que los operadores de dos cantidades físicas que no conmutan tienen realidad física.

La conclusión a la que *EPR* arribaron es a inferir la existencia de un conjunto de variables locales ocultas (LHVs, del inglés Local Hidden Variables) en mecánica cuántica que puedan explicar de forma coherente el problema que ellos divisaban. Actualmente, gracias al trabajo de Bell [47], se sabe que no es posible un modelo que incluya LHVs para explicar las correlaciones entre los resultados de las mediciones.

### 3.1.2. No-localidad de Bell, Steering y Enredamiento

El artículo de EPR provocó una respuesta interesante por parte de Schrödinger quien introdujo el concepto de *estado enredado* y *Steering*.

Sea  $\rho$  un estado mixto compuesto de dos modos A y B. Decimos que  $\rho$  es *separable* si y solo si es posible expresarlo de la siguiente forma

$$\rho = \sum_r \varrho_r \rho_r^A \otimes \rho_r^B \quad (3.7)$$

donde  $\sum_r \varrho_r = 1$  con  $\varrho_r \geq 0 \forall r$ . Además,  $\rho_r^A$  y  $\rho_r^B$  son los estados normalizados de los modos A y B, respectivamente. Si no es posible escribir a  $\rho$  de esta forma, decimos que  $\rho$  es un estado enredado (no factorizable). Es posible proveer otra definición de estado enredado cuando estamos trabajando con estados puros (o una superposición de estados puros). Decimos que  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  es separable si  $\exists |\Psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1, |\Psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$  tales que  $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ . En caso contrario,  $|\Psi\rangle$  es un estado enredado.

Nótese que el estado considerado por *EPR* (Ecuaciones (3.1) y (3.3)) es, en efecto, un estado enredado. Cabe mencionar que a lo largo del artículo [45], EPR nunca acuñaron el término estado enredado.

Por *steering* (o *EPR-steering*, como usualmente se encuentra en la literatura) entenderemos la habilidad de Alice de afectar el estado de Bob a través de la base que ella haya elegido para realizar su medición (*Spooky action at distance*). En relación a este concepto, hay una famosa frase de Schrödinger que a continuación cito textualmente [46]:

*“It is rather discomfoting that the theory should allow a system to be steered or piloted into one or the other type of state at the experimenter’s mercy in spite of his having no access to it”*

Por no-localidad de Bell entenderemos a aquellos sistemas que violan cualquiera de las desigualdades de Bell [47].

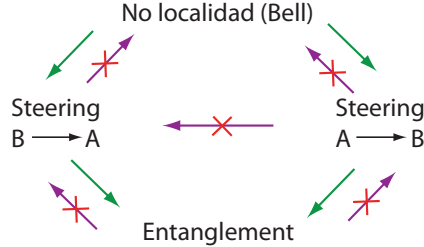
### 3.1.3. Inequivalencia entre No-localidad de Bell, Steering y Enredamiento

Para hablar de no-localidad en mecánica cuántica se debe tener mucho cuidado, pues actualmente, se sabe que tanto no-localidad de Bell, como *EPR-steering* y enredamiento son distintos tipos de fenómenos no locales.

En contraste con no-localidad de Bell y enredamiento, *EPR-steering* es un tipo de no-localidad muy peculiar pues representa una no-localidad asimétrica, es decir, la “steerabilidad” puede ser distinta para Alice y Bob, que puede derivar en *EPR-steering en una dirección* (*one way EPR-steering*) en donde Alice puede “steerar” a Bob pero Bob no puede “steerar” a Alice [49, 50]. Este fenómeno de *one way EPR-steering* ha sido confirmado experimentalmente en diversos trabajos [2–4, 51–53].

### 3. ENREDAMIENTO CUÁNTICO ENTRE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR SPDC

---



**Figura 3.2:** Relación entre enredamiento, *one way steering* y no-localidad. No-localidad implica steerabilidad en ambos sentidos, *one way steering* implica enredamiento.

Hacer una definición matemática formal de no-localidad de Bell, *EPR-steering* y enredamiento escapa de los objetivos de este trabajo, no obstante es posible revisar estos conceptos con un formalismo matemático en los trabajos H. M. Wiseman et al [49, 54] para el caso de mediciones proyectivas y en el Antonio Acín et al [50] para el caso de mediciones más generales.

## 3.2. Criterios de enredamiento

A pesar de contar con una definición formal de enredamiento que puede ser útil al momento de caracterizar si un estado está o no enredado, hacerlo a través de ella es la forma más ineficiente de hacerlo. Además, tal como se mencionó en la sección anterior, dado que existen diferentes tipos de no-localidad en mecánica cuántica, es importante contar con criterios que permitan detectar cada tipo, para ello se ha hecho un gran esfuerzo para desarrollar distintos criterios con la intención de revelar, ya sea, no-localidad de Bell, *EPR-steering* o enredamiento. En esta sección únicamente discutiré criterios de variable continua, pues son los que se adaptan al propósito de este trabajo. Entre ellos se encuentran, *EPR-steering* (1989) [55], *Duan et al* (2000) [56] y *Mancini et al*(2002) [57].

### 3.2.0.1. EPR-steering

Para extender el problema de EPR al caso más general se necesitan hacer ciertas modificaciones a su criterio de realidad local. M. Reid propuso una modificación a la condición suficiente de realidad de EPR, que versa en lo siguiente [58]:

#### Extensión de la condición suficiente de realidad de EPR por M. Reid:

*Si podemos predecir con cierta incertidumbre el valor de una cantidad física sin perturbar al sistema de ninguna forma, entonces existe un elemento estocástico de la realidad física que determina el valor de esta cantidad física con esa incertidumbre.*

Supóngase que, basados en el resultado  $x_B$  de una medición realizada en el sistema B, hacemos un estimado  $x_{\text{est}}(x_B)$  del resultado que se podría obtener al realizar

una medición en el sistema A. Definamos al error promedio de esta inferencia  $\Delta_{\text{inf}}^2 x$  como [59]:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{inf}}^2 x &= \langle [x - x_{\text{est}}(x_B)]^2 \rangle = \int dx dx_B P(x, x_B) [x - x_{\text{est}}(x_B)]^2 \\ &= \int dx_B P(x_B) \Delta_{\text{inf}}^2(x|x_B)\end{aligned}\quad (3.8)$$

donde

$$\Delta_{\text{inf}}^2(x|x_B) = \int dx P(x|x_B) [x - x_{\text{est}}(x_B)]^2 \quad (3.9)$$

pues  $P(x|x_B) = \frac{P(x, x_B)}{P(x_B)}$ . Para cada  $x_B$ , el error en cada estimación de  $x$  está dado por  $\Delta_{\text{inf}}^2(x|x_B)$ . Sea  $x_0$  la media de la distribución condicional  $P(x|x_B)$ , es decir, el valor de expectación de  $x$  dado  $x_B$ . Si tomamos  $x_{\text{est}}(x_B) = x_0$ , se tiene que

$$\Delta_{\text{inf}}^2(x|x_B) = \int dx P(x|x_B) [x - x_0]^2 = \Delta^2(x|x_B) \quad (3.10)$$

con  $\Delta^2(x|x_B)$  la varianza de la distribución condicional. De esta forma, usando la Ec. (3.8), se define

$$\Delta_{\text{min}}^2 x = \min_{x_{\text{est}}} \{ \Delta_{\text{inf}}^2 x \} = \int dx_B P(x_B) \Delta^2(x|x_B) \quad (3.11)$$

De manera análoga se puede deducir

$$\Delta_{\text{min}}^2 p = \min_{p_{\text{est}}} \{ \Delta_{\text{inf}}^2 p \} = \int dp_B P(p_B) \Delta^2(p|p_B) \quad (3.12)$$

Ahora probaré que este criterio, además de implicar la realización de la paradoja de EPR, también implica enredamiento. Dado que  $P(x|x_B) = P(x, x_B)/P(x_B)$ , en virtud de (3.7) se tiene que

$$P(x, x_B) = \sum_r \varrho_r P_r(x_B) P_r(x) \quad (3.13)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned}P_r(x) &= \langle x | \rho_r^A | x \rangle \\ P_r(x_B) &= \langle x_B | \rho_r^B | x_B \rangle\end{aligned}\quad (3.14)$$

con  $|x\rangle, |x_B\rangle$  los eigenestados de  $\hat{x}$  y  $\hat{x}_B$ . La varianza de la distribución de probabilidad condicional se reescribe como

$$\begin{aligned}\Delta^2(x|x_B) &= \sum_x P(x|x_B) [x - x_0]^2 \\ &= \frac{\sum_x \sum_r \varrho_r P_r(x_B) P_r(x) [x - x_0]^2}{P(x_B)} \\ &= \frac{\sum_r \varrho_r P_r(x_B) \Delta_r^2(x)}{P(x_B)}\end{aligned}\quad (3.15)$$

### 3. ENREDAMIENTO CUÁNTICO ENTRE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR SPDC

---

donde hemos definido  $\Delta_r^2(x) = \sum_x P_r(x)[x - x_0]^2$ . Para cada  $r$ , sean  $\langle x \rangle_r = \sum_x x P_r(x)$  y  $\sigma_r^2(x) = \sum_x P_r(x)(x - \langle x \rangle_r)^2$  la media y la varianza de la distribución  $P_r(x)$ . Nótese que  $\Delta_r^2(x) \geq \sigma_r^2(x)$ , esto se debe a que con  $x_0 = \langle x \rangle_r$  alcanza su valor mínimo. De tal forma que podemos definir

$$\Delta_{\min,r}^2(x|x_B) = \frac{\sum_r \varrho_r P_r(x_B) \sigma_r^2(x)}{P(x_B)} \quad (3.16)$$

tal que  $\Delta^2(x|x_B) \geq \Delta_{\min,r}^2(x|x_B)$ , lo que conlleva a

$$\begin{aligned} \Delta_{\inf}^2 x &\geq \Delta_{\min}^2 x = \sum_{x_B} P(x_B) \Delta^2(x|x_B) \\ &\geq \sum_{x_B} P(x_B) \Delta_{\min,r}^2(x|x_B) \\ &= \sum_{x_B} P(x_B) \frac{\sum_r \varrho_r P_r(x_B) \sigma_r^2(x)}{P(x_B)} = \sum_r \varrho_r \sigma_r^2(x) \sum_{x_B} \frac{P(x_B) P_r(x_B)}{P(x_B)} \\ &= \sum_r \varrho_r \sigma_r^2(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

De forma totalmente análoga se puede llegar a

$$\Delta_{\inf}^2 p \geq \sum_r \varrho_r \sigma_r^2(p) \quad (3.18)$$

donde  $\sigma_r^2(p)$  es la varianza de  $P_r(p) = \langle p | \rho_r^A | p \rangle$ ,  $|p\rangle$  es un eigenestado de  $\hat{p}$ . De esta forma, usando (3.17) y (3.18) se tiene que

$$\Delta_{\inf}^2 x \Delta_{\inf}^2 p \geq \left\{ \sum_r \varrho_r \sigma_r^2(x) \right\} \left\{ \sum_s \varrho_s \sigma_s^2(p) \right\} \geq \left| \sum_k \varrho_k \sigma_k(x) \sigma_k(p) \right|^2 \quad (3.19)$$

Para obtener la segunda desigualdad en la ecuación anterior se ha aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz<sup>4</sup> con  $\vec{\alpha}$  y  $\vec{\beta}$  definidos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= (\sqrt{\varrho_1} \sigma_1(x), \sqrt{\varrho_2} \sigma_2(x), \dots) \\ \vec{\beta} &= (\sqrt{\varrho_1} \sigma_1(p), \sqrt{\varrho_2} \sigma_2(p), \dots) \end{aligned}$$

Nótese que  $\vec{\alpha}$  y  $\vec{\beta}$  están bien definidas pues  $\varrho_j \geq 0$ . Dado que

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}|^2 &= \varrho_1 \sigma_1^2(x) + \varrho_3 \sigma_3^2(x) + \dots = \sum_k \varrho_k \sigma_k^2(x) \\ |\vec{\beta}|^2 &= \varrho_1 \sigma_1^2(p) + \varrho_3 \sigma_3^2(p) + \dots = \sum_k \varrho_k \sigma_k^2(p) \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \varrho_1 \sigma_1(x) \sigma_1(p) + \varrho_2 \sigma_2(x) \sigma_2(p) + \dots = \sum_k \varrho_k \sigma_k(x) \sigma_k(p) \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Sean  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ , se cumple la siguiente desigualdad

$$|\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \geq |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|^2$$

Finalmente, como  $\sigma_r(x)$  y  $\sigma_r(p)$  satisfacen el principio de incertidumbre

$$\sigma_r(x)\sigma_r(p) \geq \frac{1}{2} |[\hat{x}, \hat{p}]| = \frac{1}{2} \quad (3.20)$$

se sigue que, para cualquier estado cuántico separable se satisface la desigualdad

$$\Delta_{\text{inf}}^2 x \Delta_{\text{inf}}^2 p \geq \frac{1}{4} \quad (3.21)$$

La conclusión inmediata es que la violación del criterio de EPR-Reid implica, además, inseparabilidad.

### 3.2.0.2. Criterio de Duan-Giedke-Cirac-Zoller

Considérense el siguiente par de operadores tipo EPR

$$\hat{\mathcal{U}} = |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2 \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathcal{V}} = |a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2 \quad (3.23)$$

donde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sin pérdida de generalidad, se ha tomado a los operadores  $\hat{x}_j$  y  $\hat{p}_j$  adimensionales.

**Teorema 3.1 (Criterio suficiente de inseparabilidad)** *Para cualquier estado cuántico separable  $\rho$ , la varianza total del par de operadores tipo EPR definidos en las ecuaciones (3.22), tales que  $[\hat{x}_j, \hat{p}_{j'}] = i\delta_{jj'}$  ( $j, j' = 1, 2$ ) satisfacen la desigualdad*

$$\langle (\Delta \hat{\mathcal{U}})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{\mathcal{V}})^2 \rangle_\rho \geq a^2 + \frac{1}{a^2} \quad (3.24)$$

Sabemos que

$$\langle (\Delta \hat{\mathcal{U}})^2 \rangle_\rho = \langle \hat{\mathcal{U}}^2 \rangle_\rho - \langle \hat{\mathcal{U}} \rangle_\rho^2 \quad (3.25)$$

y de forma similar para  $\langle (\Delta \hat{\mathcal{V}})^2 \rangle_\rho$ . Por otro lado, el valor de expectación lo calculamos de la siguiente forma

$$\langle (\hat{\mathcal{U}})^2 \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho \mathcal{U}^2) = \text{Tr} \left[ \sum_i \varrho_i (\rho_{i1} \otimes \rho_{i2}) \mathcal{U}^2 \right] = \sum_i \text{Tr} [\varrho_i (\rho_{i1} \otimes \rho_{i2}) \mathcal{U}^2] = \sum_i \varrho_i \langle \hat{\mathcal{U}}^2 \rangle_i \quad (3.26)$$

donde  $\hat{\rho}$  es la matriz de densidad del sistema compuesto que, por hipótesis, es separable (véase [Ecuación 3.7](#)). De forma análoga

$$\langle \hat{\mathcal{U}} \rangle_\rho = \sum_i \varrho_i \langle \hat{\mathcal{U}} \rangle_i \quad (3.27)$$

### 3. ENREDAMIENTO CUÁNTICO ENTRE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR SPDC

---

Usando las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27) se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho &= \sum_i \varrho_i \left[ \langle\hat{U}^2\rangle_i + \langle\hat{V}^2\rangle_i \right] - \langle\hat{U}\rangle_\rho^2 - \langle\hat{V}\rangle_\rho^2 \\
&= \sum_i \varrho_i \left[ \langle(|a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2)^2\rangle_i + \langle(|a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2)^2\rangle_i \right] - \langle\hat{U}\rangle_\rho^2 - \langle\hat{V}\rangle_\rho^2 \\
&= \sum_i \varrho_i \left[ a^2\langle\hat{x}_1^2\rangle_i + \frac{1}{a^2}\langle\hat{x}_2^2\rangle_i + a^2\langle\hat{p}_1^2\rangle_i + \frac{1}{a^2}\langle\hat{p}_2^2\rangle_i \right] \\
&\quad + \frac{2a}{|a|} \sum_i \varrho_i [\langle\hat{x}_1\rangle_i\langle\hat{x}_2\rangle_i - \langle\hat{p}_1\rangle_i\langle\hat{p}_2\rangle_i] - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{U}\rangle_i \right]^2 - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{V}\rangle_i \right]^2 \\
&= a^2 \sum_i \varrho_i [\langle\hat{x}_1^2\rangle_i - \langle\hat{x}_1\rangle_i^2] + \frac{1}{a^2} \sum_i \varrho_i [\langle\hat{x}_2^2\rangle_i - \langle\hat{x}_2\rangle_i^2] \\
&\quad + a^2 \sum_i \varrho_i [\langle\hat{p}_1^2\rangle_i - \langle\hat{p}_1\rangle_i^2] + \frac{1}{a^2} \sum_i \varrho_i [\langle\hat{p}_2^2\rangle_i - \langle\hat{p}_2\rangle_i^2] \\
&\quad + \sum_i \varrho_i \left[ a^2\langle\hat{x}_1\rangle_i^2 + \frac{2a}{|a|}\langle\hat{x}_1\rangle_i\langle\hat{x}_2\rangle_i + \frac{1}{a^2}\langle\hat{x}_2\rangle_i^2 \right] \\
&\quad + \sum_i \varrho_i \left[ a^2\langle\hat{p}_1\rangle_i^2 - \frac{2a}{|a|}\langle\hat{p}_1\rangle_i\langle\hat{p}_2\rangle_i + \frac{1}{a^2}\langle\hat{p}_2\rangle_i^2 \right] \\
&\quad - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{U}\rangle_i \right]^2 - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{V}\rangle_i \right]^2 \\
&= \sum_i \varrho_i \left[ a^2\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2}\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i + a^2\langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2}\langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i \right] \\
&\quad + \sum_i \varrho_i \langle\hat{U}\rangle_i^2 - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{U}\rangle_i \right]^2 + \sum_i \varrho_i \langle\hat{V}\rangle_i^2 - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{V}\rangle_i \right]^2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Para concluir la demostración vamos a considerar lo siguiente

I) Sean

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} &= (\sqrt{\varrho_1}, \sqrt{\varrho_2}, \sqrt{\varrho_3}, \dots) \\
\vec{\beta} &= (\sqrt{\varrho_1}\langle\hat{U}\rangle_1, \sqrt{\varrho_2}\langle\hat{U}\rangle_2, \sqrt{\varrho_3}\langle\hat{U}\rangle_3, \dots)
\end{aligned}$$

Nótese que  $\vec{\alpha}$  y  $\vec{\beta}$  están bien definidos pues  $\varrho_k \geq 0$ . Como

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}|^2 &= \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots = \sum_k \varrho_k = 1 \\ |\vec{\beta}|^2 &= \varrho_1 \langle \hat{U} \rangle_1^2 + \varrho_2 \langle \hat{U} \rangle_2^2 + \varrho_3 \langle \hat{U} \rangle_3^2 \cdots = \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k^2 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \varrho_1 \langle \hat{U} \rangle_1 + \varrho_2 \langle \hat{U} \rangle_2 + \varrho_3 \langle \hat{U} \rangle_3 \cdots = \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con  $\vec{\alpha}$  y  $\vec{\beta}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k^2 &= \left( \sum_k \varrho_k \right) \left( \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k^2 \right) = |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \geq |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|^2 = \left( \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k \right)^2 \\ &\Rightarrow \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k^2 - \left( \sum_k \varrho_k \langle \hat{U} \rangle_k \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

y de forma similar,

$$\sum_k \varrho_k \langle \hat{V} \rangle_k^2 - \left( \sum_k \varrho_k \langle \hat{V} \rangle_k \right)^2 \geq 0 \quad (3.30)$$

II) Sean

$$\begin{aligned} \gamma &= \Delta \hat{x}_j \\ \mu &= \Delta \hat{p}_j \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $\gamma^2 + \mu^2 \geq 2\gamma\mu$  y el principio de incertidumbre

$$\Delta \hat{x}_j \Delta \hat{p}_j \geq \frac{1}{2} |[\hat{x}_j, \hat{p}_j]|$$

se tiene que

$$\langle (\Delta \hat{x}_j)^2 \rangle_i + \langle (\Delta \hat{p}_j)^2 \rangle_i = \gamma^2 + \mu^2 \geq 2\gamma\mu = 2\Delta \hat{x}_j \Delta \hat{p}_j \geq 2 \frac{1}{2} |[\hat{x}_j, \hat{p}_j]| = 1 \quad (3.31)$$

Finalmente, usando (3.29), (3.30) y (3.31) en (3.28) se obtiene el resultado esperado.

### 3.2.0.3. Criterio de Mancini-Giovannetti-Vitali-Tombesi

**Teorema 3.2 (Criterio suficiente de inseparabilidad)** *Dado el par de operadores tipo EPR (3.22), tales que  $[\hat{x}_j, \hat{p}_{j'}] = i\hat{C}$  ( $j, j' = 1, 2$ ), entonces para cualquier estado separable  $\rho$  se tiene*

$$\langle (\hat{\Delta} \mathcal{U})^2 \rangle_\rho \langle (\hat{\Delta} \mathcal{V})^2 \rangle_\rho \geq |\langle [\hat{x}_j, \hat{p}_{j'}] \rangle|^2 \quad (3.32)$$



### 3. ENREDAMIENTO CUÁNTICO ENTRE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR SPDC

---

De la Ec. (3.28), se deduce de inmediato que

$$\begin{aligned}\langle(\hat{\Delta}\mathcal{U})^2\rangle_\rho &= \sum_i \varrho_i \left[ a^2 \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i \right] + \sum_i \varrho_i \langle\hat{\mathcal{U}}\rangle_i^2 - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{\mathcal{U}}\rangle_i \right]^2 \\ \langle(\hat{\Delta}\mathcal{V})^2\rangle_\rho &= \sum_i \varrho_i \left[ a^2 \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i \right] + \sum_i \varrho_i \langle\hat{\mathcal{V}}\rangle_i^2 - \left[ \sum_i \varrho_i \langle\hat{\mathcal{V}}\rangle_i \right]^2\end{aligned}$$

Usando (3.29) y (3.30), las expresiones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}\langle(\hat{\Delta}\mathcal{U})^2\rangle_\rho &\geq \sum_i \varrho_i \left[ a^2 \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i \right] \\ \langle(\hat{\Delta}\mathcal{V})^2\rangle_\rho &\geq \sum_i \varrho_i \left[ a^2 \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i \right]\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= a\sqrt{\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i} & \mu_1 &= \frac{1}{a}\sqrt{\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i} \\ \gamma_2 &= a\sqrt{\langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i} & \mu_2 &= \frac{1}{a}\sqrt{\langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i}\end{aligned}\tag{3.33}$$

Usando el hecho de que  $\gamma_j^2 + \mu_j^2 \geq 2\gamma_j\mu_j$  se tiene que

$$\begin{aligned}\langle(\hat{\Delta}\mathcal{U})^2\rangle_\rho \langle(\hat{\Delta}\mathcal{V})^2\rangle_\rho &\geq \left\{ \sum_i \varrho_i \left[ a^2 \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_i \varrho_i \left[ a^2 \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i \right] \right\} \\ &\geq 4 \left\{ \sum_i \varrho_i \sqrt{\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_i \varrho_i \sqrt{\langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i} \right\}\end{aligned}\tag{3.34}$$

Definamos

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= (\sqrt{\varrho_1} \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_1 \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_1)^{1/4}, \sqrt{\varrho_2} \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_2 \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_2)^{1/4}, \dots) \\ \vec{\beta} &= (\sqrt{\varrho_1} \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_1 \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_1)^{1/4}, \sqrt{\varrho_2} \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_2 \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_2)^{1/4}, \dots)\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
 |\vec{\alpha}|^2 &= \sum_i \varrho_i \sqrt{\langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle_i \langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle_i} \\
 |\vec{\beta}|^2 &= \sum_i \varrho_i \sqrt{\langle (\Delta \hat{p}_1)^2 \rangle_i \langle (\Delta \hat{p}_2)^2 \rangle_i} \\
 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \sum_i \varrho_i [\langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle_i \langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle_i \langle (\Delta \hat{p}_1)^2 \rangle_i \langle (\Delta \hat{p}_2)^2 \rangle_i]^{1/4} \\
 &= \sum_i \varrho_i \langle (\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{p}_1 \Delta \hat{x}_2 \Delta \hat{p}_2)^2 \rangle_i^{1/4}
 \end{aligned}$$

Aplicando primero la desigualdad de Schwarz y luego el principio de incertidumbre en la Eq. (3.34), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle (\hat{\Delta} \mathcal{U})^2 \rangle_\rho \langle (\hat{\Delta} \mathcal{V})^2 \rangle_\rho &\geq 4 \left[ \sum_i \varrho_i \langle (\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{p}_1 \Delta \hat{x}_2 \Delta \hat{p}_2)^2 \rangle_i^{1/4} \right]^2 \\
 &\geq 4 \left[ \sum_i \varrho_i \left( \frac{1}{4} \|\hat{x}_1, \hat{p}_1\| \|\hat{x}_2, \hat{p}_2\| \right)^{1/4} \right]^2 \\
 &= 4 \left[ \sum_i \varrho_i \left( \left( \frac{1}{2} \|\hat{x}_1, \hat{p}_1\| \right)^4 \right)^{1/4} \right]^2 \\
 &= 4 \left[ \frac{1}{2} \|\hat{x}_1, \hat{p}_1\| \sum_i \varrho_i \right]^2 \\
 &= \|\hat{x}_1, \hat{p}_1\|^2
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

lo que concluye la demostración.



# Simulaciones numéricas

---

En este capítulo describiré el método empleado para construir los programas en MATLAB que permitieron calcular numéricamente el Espectro Angular, el Espectro Angular Condicional y las Correlaciones espaciales.

## 4.1. Valores de entrada

Tal como se deduce del [Capítulo 2](#), el estado cuántico de la pareja de fotones depende de un conjunto de parámetros que son susceptibles de ser modificados experimentalmente, estos parámetros pueden ser clasificados en dos clases:

- Parámetros provenientes del bombeo
  - Longitud de onda  $\lambda_p$ . Tal como se especifica en el [Capítulo 5](#), la longitud de onda del láser empleado es de  $\lambda_p = 406.8nm$  cuyo ancho de banda, acorde con el fabricante, es de  $\Delta\lambda_p = 1nm$ .
  - Radio en la cintura del haz  $\mathcal{W}_0$ . Esto sólo aplica cuando se está considerando un bombeo puramente Gaussiano, como el haz que proviene del láser. Para el caso de las simulaciones numéricas para medir enredamiento, se consideró un haz puramente Gaussiano con sección transversal circular, es decir,  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_{0x} = \mathcal{W}_{0y}$  y el rango de valores empleados  $\mathcal{W}_0 \in [5, 320]\mu m$ .
  - Cinturón  $\mathcal{W}_0^{BG}$  de la envolvente Gaussiana de la Función Bessel. Este parámetro sólo se ha de tomar en cuenta cuando se está empleado un haz de bombeo con estructura Bessel-Gauss, como en el caso del arreglo experimental. Los valores de  $\mathcal{W}_0^{BG}$  utilizados pueden consultarse en la [Tabla 4.1](#), éstos valores coinciden con los de la [Tabla 5.1](#), que son los valores obtenidos experimentalmente.
  - Vector de onda transversal  $\vec{k}_p$ . Al igual que con  $\mathcal{W}_0^{BG}$ , este parámetro sólo debe tomarse en cuenta cuando se está empleando como bombeo un haz Bessel-Gauss. En este caso, el parámetro utilizado es la magnitud de la componente transversal  $k_{tp}$  y no el vector  $\vec{k}_p$  (véase [Ecuación 2.33](#)). Los valores empleados se encuentran en la [Tabla 4.1](#).

#### 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

---

**Tabla 4.1:** Valores de  $k_{\text{tp}}$  y  $W_0$  usados en las simulaciones.

$k_{\text{tp}} [\mu\text{m}^{-1}]$	$W_0^{\text{BG}} [\mu\text{m}]$
0.0195	1300
0.050	650
0.150	1200

- Carga topológica  $m$  del haz BG. Tal como se mencionó en el [Capítulo 2](#), en este trabajo se ha considerado un haz Bessel Gauss de orden cero (BG0), por lo que  $m = 0$ .
- Parámetros provenientes del cristal
  - Tipo de cristal. En este trabajo el cristal empleado fue un Beta Borato de Bario (BBO) tipo I negativo, esto significa que la polarización del bombeo incidente es extraordinaria mientras que la de los fotones generados es ordinaria (véase [Tabla 2.2](#)). Dado que en un cristal birrefringente el índice de refracción depende de la polarización, para calcular los índices de refracción de las ondas ordinarias y extraordinarias necesitamos recurrir a las ecuaciones de Sellmeier ([Ecuación 2.4](#)).
  - Longitud  $L$  del cristal. Las dimensiones del cristal considerado es de  $10\text{mm} \times 10\text{mm}$  en su sección transversal y de  $L = 1\text{mm}$  en la parte longitudinal.
  - Ángulo de phase-matching  $PM$  o ángulo de corte del cristal. El ángulo phase-matching es de  $\theta_{PM} = 29.3^\circ$ . El valor de este ángulo ha sido calculado a priori para que, con las características del bombeo y del cristal, podamos generar SPDC tipo I degenerado y no-colineal.
  - Efecto walk-off. El efecto de walk-off entra en el cálculo a partir del ángulo de walk-off  $\rho_0$ . Para calcular el valor de  $\rho_0$  se recurre a la ecuación ([2.6](#)).

Existen otra gama de parámetros que también son susceptibles de modificarse experimentalmente pero que no derivan del bombeo ni del cristal y que están relacionados de forma directa con el sistema de detección:

- Filtros espectrales. Para garantizar que estamos detectando el caso degenerado, es necesario colocar filtros espectrales pasa bandas en los caminos ópticos de los fotones señal y acompañante. Cada filtro espectral está caracterizado por dos parámetros: la frecuencia central y el ancho de banda. En el caso del experimento desarrollado en este trabajo, la frecuencia central del filtro fue de  $800\text{nm}$  con ancho de banda de  $10\text{nm}$ .
- Espacio de Fourier. El sistema de detección, tal como se explicará en el [Capítulo 5](#), ha sido montado en un plano de Fourier que se obtiene a través de un sistema  $f - f$  con una lente plano-convexa de longitud focal  $f = 5\text{cm}$  en donde el primer

plano focal se coloca en el centro del cristal no lineal y en el segundo plano focal, donde se obtiene la transformada de Fourier, se coloca el sistema de detección.

- Fibras ópticas. Para colectar fotones, se emplearon un par de fibras ópticas multimodo de  $64\mu m$  de diámetro, cuyas puntas se colocaron exactamente en el plano de Fourier.
- Platinas motorizadas. Para poder colectar fotones en todo el espacio de Fourier, cada fibra óptica se ancló en una platina motorizada que permite hacer un escaneo en el espacio transversal  $X - Y$ . Cada platina puede desplazar la punta de fibra en un espacio de  $15mm \times 15mm$  y el intervalo mínimo de desplazamiento es de  $50nm$ . Para convertir el espacio  $\vec{\rho} = (x, y)$  de las platinas al espacio  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  de Fourier, se hace uso de la siguiente relación [60]:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{cf} \vec{\rho} \quad (4.1)$$

donde  $f$  es la longitud focal de la lente plano-convexa,  $\omega$  es la frecuencia de la luz y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Cabe destacar que esta relación es biunívoca únicamente si el haz es monocromático.

Una vez conocidos todos los parámetros de los cuales van a depender los programas, procederé a explicar el procedimiento para obtener el Espectro Angular (EA) de la pareja de fotones.

## 4.2. Espectro Angular

Para comenzar con la descripción, debo aclarar que para las simulaciones numéricas dedicadas a medir enredamiento se usaron expresiones ideales, es decir, se dejan fuera las consideraciones experimentales discutidas en el [Capítulo 2](#), además de que el haz de bombeo considerado es un haz Gaussiano; mientras que para las simulaciones dedicadas a comparar los resultados experimentales, las consideraciones experimentales sí fueron tomadas en cuenta y el haz de bombeo empleado es un haz Bessel-Gauss. Entonces, para calcular el Espectro Angular de las mediciones de enredamiento se usará la ecuación (2.87), mientras que para calcular el Espectro Angular que será comparado con los resultados experimentales se empleará la ecuación (2.93) que incorpora los límites de bombeo de onda continua y resolución perfecta (en este caso es posible aplicar el límite de resolución perfecta ya que la dimensión del Espectro Angular es mayor que la dimensión del núcleo de la fibra óptica). Analizando las ecuaciones (2.87) y (2.93), podemos notar que para obtener una gráfica de densidad del Espectro Angular es necesario evaluar la función  $R_s(\vec{k}_{s0}^\perp)$  en una malla de puntos  $(k_{sx0}, k_{sy0})$  y realizar tres integrales  $\int d^2 \vec{k}_i^\perp \int d\omega_i = \int dk_{ix} \int dk_{iy} \int d\omega_i$  por cada pareja de puntos  $(k_{sx0}, k_{sy0})$ . Teniendo esto en mente, lo primero que tenemos que hacer es construir una malla de puntos en 2D que represente el espacio generado por las platinas motorizadas:

$$\mathcal{M}_{(x,y)} = \{(x_j, y_{j'}) \mid j = 1, \dots, n_j, j' = 1, \dots, n_{j'}; n_j, n_{j'} \in \mathbb{Z}^+\} \quad (4.2)$$

#### 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

---

La longitud de desplazamiento de los motores nos pone la restricción  $\min(x_j) = \min(y_{j'}) = -L_{mot}/2$ ,  $\max(x_j) = \max(y_{j'}) = L_{mot}/2$  con  $L_{mot} = 15mm$ . Esta malla será utilizada varias veces a lo largo del texto. Para evaluar la integral  $\int d\omega_i$  definimos la malla

$$\mathcal{M}_{\omega_i} = \{\omega_{i_{j''}} \mid j'' = 1, \dots, n_{j''}; n_{j''} \in \mathbb{Z}^+\} \quad (4.3)$$

Esta malla debe estar centrada en  $810nm$  con un ancho de banda de  $\pm 10nm$ . Para realizar las integrales  $\int d^2 \vec{k}_i^\perp$  tenemos que definir la malla

$$\mathcal{M}_{(k_{ix}, k_{iy})} = \{(k_{ix_j}, k_{iy_{j'}}) \mid (k_{ix_j}, k_{iy_{j'}}) = \frac{\omega_{i_{j''}}}{cf} \times (x_j, y_{j'}); \omega_{i_{j''}} \in \mathcal{M}_{\omega_i} \wedge (x_j, y_{j'}) \in \mathcal{M}_{(x,y)}\} \quad (4.4)$$

Por último, a partir  $\mathcal{M}_{(x,y)}$  podemos constuir la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sx0}, k_{sy0})}$  para los puntos  $(k_{sx0}, k_{sy0})$  tal como se hizo para  $\mathcal{M}_{(k_{ix}, k_{iy})}$  pero esta vez con  $\omega_s = \omega_p/2$ .

Para calcular el haz numéricamente primero realizamos la integral  $\int d^2 \vec{k}_i^\perp$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\omega_{i_{j''}}, k_{sx0}, k_{sy0}) &= \sum_{j, j'} A_i(k_{ix_j}, k_{iy_{j'}}, \omega_{i_{j''}}) f(\omega_p - \omega_{i_{j''}}) f(\omega_{i_{j''}}) \\ &\times |F(k_{sx0}, k_{sy0}, \omega_p - \omega_{i_{j''}}, k_{ix_j}, k_{iy_{j'}}, \omega_{i_{j''}})|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nótese que en (4.5) hemos incluido las funciones de los filtros espectrales. Para el caso de las simulaciones para medir enredamiento cuántico sólo se consideran las expresiones ideales, es decir, aquellas que no incluyen las consideraciones experimentales, tales como los filtros espectrales. El segundo paso es realizar la integral  $\int d\omega_i$

$$R_s(k_{sx0}, k_{sy0}) = \sum_{j''} \mathcal{C}(\omega_{i_{j''}}, k_{sx0}, k_{sy0}) \quad (4.6)$$

Para obtener una gráfica del AS, se debe repetir este procedimiento para todos los puntos  $(k_{sx0}, k_{sy0}) \in \mathcal{M}_{(k_{sx0}, k_{sy0})}$ .

### 4.3. Espectro Angular Condicional con consideraciones experimentales

Para calcular de forma numérica el CAS se sigue un procedimiento similar al del AS, la diferencia radica en el número de integrales a evaluar. Para el cálculo numérico del CAS usaremos la ecuación (2.80) que constituye el caso del CAS con aproximación de bombeo de onda continua. En este caso, ya no es posible aplicar la aproximación de resolución perfecta debido a que la dimension de la fibra óptica ya es comparable con las dimension del CAS. Como puede verse, la ecuación (2.80) requiere llevar a cabo 5 integrales  $\int d^2 \vec{k}_s^\perp \int d^2 \vec{k}_i^\perp \int d\omega_i = \int dk_{sx} \int dk_{sy} \int dk_{ix} \int dk_{iy} \int d\omega_i$  por lo que necesitamos, en principio, definir tres mallas. Es importante considerar tres aspectos. El primero de ellos es que debemos ubicar las coordenadas del punto de fijo (de condicionamiento)

$\vec{k}_{i0}^\perp = (k_{ix0}, k_{iy0})$ , para hacerlo sólo se debe construir un algoritmo que encuentre el punto de máxima intensidad en la gráfica del AS. El segundo aspecto a considerar son las funciones de aceptación de las fibras ópticas que fueron definidas en la ecuación (2.91) y que dependen del radio del núcleo de la fibra óptica. En el experimento se usaron fibras ópticas de diámetro  $64\mu m$ . Nótese que las integrales en vectores de onda transversal son debidas a que se incluyen las funciones de aceptación de las fibras ópticas. El tercer aspecto son las mallas que se deben construir. Primero debemos construir la malla para hacer la integración sobre las frecuencias del fotón acompañante  $\int d\omega_i$ , ésta se define de la misma forma que la malla (4.3).

Para realizar la integral  $\int d^2\vec{k}_i^\perp$  también debemos construir una malla tomando en cuenta que  $\vec{k}_i^\perp$  depende de  $\omega_i$ . Esto se hace de forma análoga a como se hizo en la Sección 4.2: primero construimos  $\mathcal{M}_{(x,y)}$  y después usando la ecuación 4.1 generamos la malla  $\mathcal{M}_{(k_{ix}, k_{iy})}$  (véase (4.4)).

Para generar la malla de puntos  $(k_{sx0}, k_{sy0})$ , que son las coordenadas, en vectores de onda, donde se colocará la fibra óptica del fotón señal, usamos la siguiente relación:

$$\mathcal{M}_{(k_{sx0}, k_{sy0})} = \{(k_{sx0_w}, k_{sy0_{w'}}) | (k_{sx_w}, k_{sy_{w'}}) = \frac{\omega_0}{cf} \times (x_j, y_{j'}); (x_j, y_{j'}) \in \mathcal{M}_{(x,y)}\} \quad (4.7)$$

donde  $\omega_0 = \omega_p/2$  es la frecuencia de los fotones degenerados. Para construir la malla que se necesita para realizar la integral  $\int dk_{sx}$ , primero recordemos que en la derivación de la ecuación (2.80) eliminamos la integral  $\int d\omega_s$  a través de una función delta de Dirac y con ello, hicimos la sustitución  $\tilde{\omega}_s = \omega_p - \omega_i$ . Con esto en mente, construimos la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sxq}, k_{sy_{q'}})}$  de la siguiente forma

$$\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{sy})}^{(\omega_i)} = \{(k_{sx_q}, k_{sy_{q'}}) | (k_{sx_q}, k_{sy_{q'}}) = \frac{\tilde{\omega}_s}{cf} \times (x_w, y_{w'}); (x_w, y_{w'}) \in \mathcal{M}_{(x,y)}\} \quad (4.8)$$

El cálculo numérico del CAS consiste en que en cada par de puntos  $(k_{sx0_w}, k_{sy0_{w'}})$  y  $(k_{ix0}, k_{iy0})$  se realiza la siguiente suma

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(k_{sx0_w}, k_{sy0_{w'}}, k_{ix0}, k_{iy0}, \omega_{i_{j''}}) &= \sum_{q,q'} \sum_{j,j'} u_s(k_{sx_q}, k_{sy_{q'}}, k_{sx0_w}, k_{sy0_{w'}}) u_i(k_{ix_j}, k_{iy_{j'}}, k_{ix0}, k_{iy0}) \\ &\times f(\omega_p - \omega_{i_{j''}}) f(\omega_{i_{j''}}) |\mathcal{S}(k_{sx_q} + k_{ix_j}, k_{sy_{q'}} + k_{iy_{j'}})|^2 \\ &\times \mathcal{L}(k_{sx_q}, k_{sy_{q'}}, k_{ix_j}, k_{iy_{j'}}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

para finalmente obtener

$$\mathcal{R}_c(k_{sx0_w}, k_{sy0_{w'}}, k_{ix0}, k_{iy0}) = \sum_{j''} \mathcal{C}(k_{sx0_w}, k_{sy0_{w'}}, k_{ix0}, k_{iy0}, \omega_{i_{j''}}) \quad (4.10)$$

Una gráfica del CAS se obtiene evaluando la expresión anterior en todos los puntos de la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sx0}, k_{sy0})}$ .



#### 4.4. Correlaciones en el espacio de vectores de onda transversal (campo lejano) con consideraciones experimentales

Para calcular cualquier tipo de correlación (véase [Figura 2.7](#)) se requiere mantener dos coordenadas fijas: una coordenada del fotón señal y una coordenada de fotón acompañante. Para calcular las correlaciones se sigue un procedimiento similar al de la sección anterior, sólo es necesario cambiar los puntos que se están tomando fijos. Por ejemplo, si se desea calcular la correlación  $k_{sx} - k_{ix}$  sólo habría que sustituir  $(k_{sx0_w}, k_{sy0_w'})$  por  $(k_{sx0_w}, k_{sy0})$  y  $(k_{ix0}, k_{iy0})$  por  $(k_{ix_j}, k_{iy0})$ , donde ahora  $k_{sy0}$  y  $k_{iy0}$  denotan las coordenadas fijas y se escogen en la posición de máximas cuentas. Además,  $k_{sy0} = -k_{iy0}$  (por la conservación de momento transversal sabemos que si detectamos un fotón señal (s) en el punto  $(k_{sx0}, k_{sy0})$ , su fotón acompañante (i) correspondiente será detectado en la posición conjugada, esto es, en el punto  $(-k_{sx0}, -k_{sy0})$ , y viceversa. Es por ello que la coordenada fija del fotón señal se ha escogido de esa manera).

Si no deseamos tomar en cuenta las consideraciones experimentales, como en el caso de las simulaciones de las correlaciones para medir enredamiento, entonces la ecuación que debemos emplear para calcular las correlaciones es (2.82), que además constituye el caso de los fotones degenerados. Para efectos ilustrativos, se calculará la correlación  $k_{sx} - k_{ix}$ , por lo que las coordenadas que se mantendrán fijas son  $k_{iy} = k_{iy0}$  y  $k_{sy0} = -k_{iy0}$ , nuevamente, estas coordenadas se escogen con el mismo criterio que en el párrafo anterior. Una vez identificadas las coordenadas fijas, se debe construir la malla

$$\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})} = \{(k_{sx_n}, k_{ix_m}) \mid (k_{sx_n}, k_{ix_m}) = \frac{\omega_0}{cf} \times (x_n, x_m); x_n \wedge x_m \in \mathcal{M}_{(x)}\} \quad (4.11)$$

donde

$$\mathcal{M}_{(x)} = \{x_w \mid w = 1, \dots, n_w; n_w \in \mathbb{Z}^+\} \quad (4.12)$$

con la restricción de que  $\min(x_w) = -L_{mot}/2$  y  $\max(x_w) = L_{mot}/2$ , de modo que la correlación  $k_{sx} - k_{ix}$  se calcula numéricamente de la siguiente forma

$$\mathfrak{C}(k_{sx_n}, k_{sy0}, k_{ix_m}, k_{iy0}, \omega_0) = |\eta|^2 |F(k_{sx_n}, k_{sy0}, \omega_0, k_{ix_m}, k_{iy0}, \omega_0)|^2 \quad (4.13)$$

Finalmente, para obtener una gráfica de la correlación  $k_{sx} - k_{ix}$  se debe evaluar la función (2.82) en cada uno de los puntos de la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})}$ .

#### 4.5. Correlaciones Espaciales en el espacio de posiciones (campo cercano)

Hasta la sección anterior todos los cálculos numéricos han sido realizados en el espacio de momento transversal, sin embargo ahora es necesario hacer el cálculo de las correlaciones en el espacio de posiciones. La desventaja que esto representa es que el

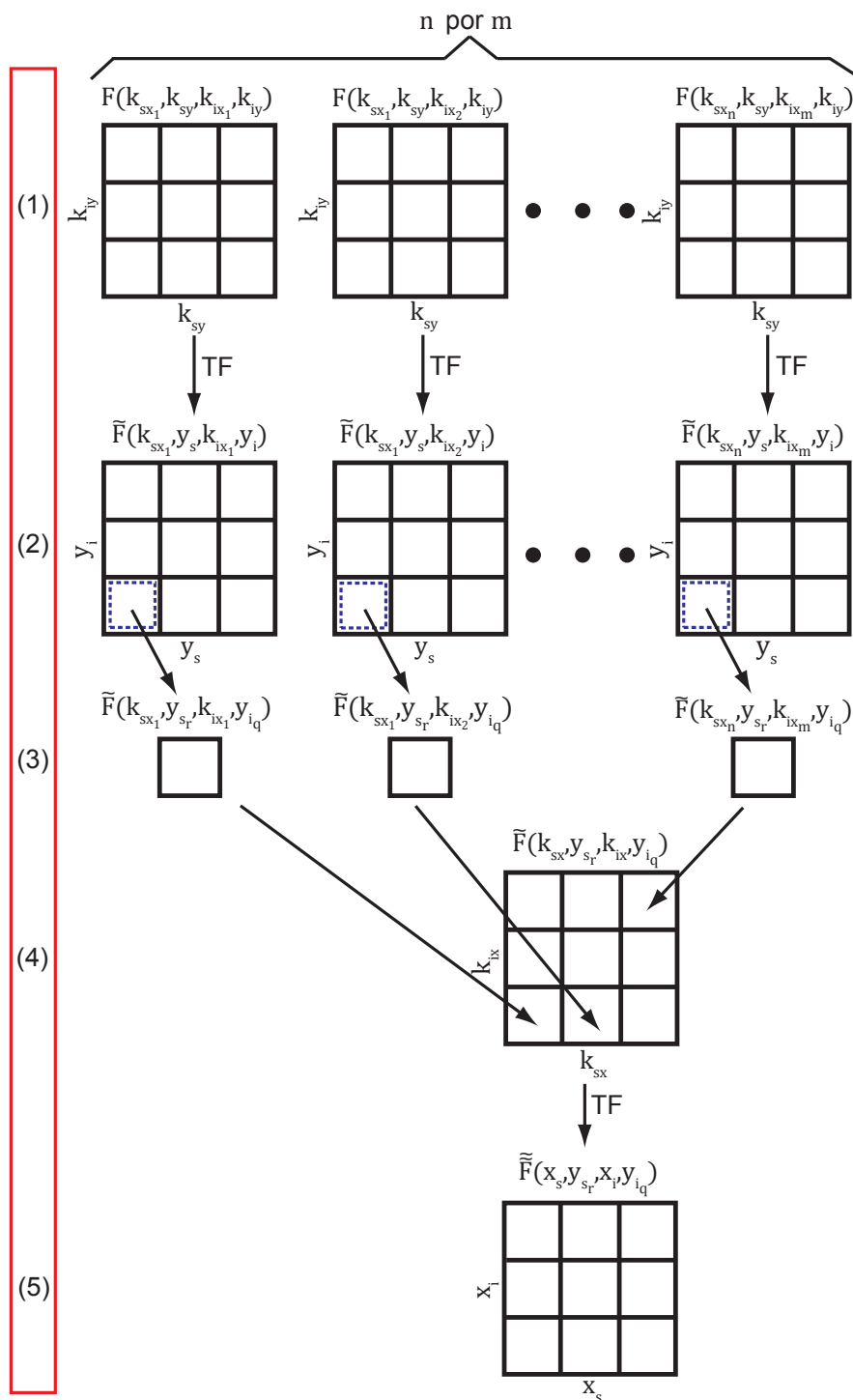
estado de la pareja de fotones (Ecuación 2.67) está escrita en el espacio de momento transversal y para tenerla en el espacio de posiciones habría que realizar una transformada de Fourier de al menos cuatro variables, no obstante, obtener una expresión analítica no es del todo posible debido a la compleja estructura de la función de amplitud conjunta

$$F(\cdot) \propto \exp(\cdot) \times \exp\{i(\cdot)\} \times \text{sinc}(\cdot)$$

y al número de variables involucradas. En la literatura es posible encontrar ciertas expresiones para el estado de la pareja de fotones en el espacio de posiciones (véase por ejemplo, [39, 61–63]). Sin embargo, para llegar a esas expresiones, los autores tuvieron que realizar ciertas aproximaciones y dejar fuera ciertos efectos que, como se ha demostrado experimentalmente [43, 63], son importantes. Es por ello que, en este trabajo, decidimos realizar el cálculo de la transformada de Fourier de forma numérica y sin ninguna aproximación. Para ello, ideamos un algoritmo que se muestra esquemáticamente en la Figura 4.1. Para efectos ilustrativos, la Figura 4.1 sólo muestra el procedimiento para obtener la correlación  $x_s - x_i$ , pero cualquier otra correlación se obtiene por un procedimiento similar. Antes de comenzar a explicar el algoritmo, es necesario definir las mallas sobre las cuales se evaluará la función de correlación. Primero definimos la malla en 2D

$$\mathcal{M}_{(k_{sy}, k_{iy})} = \{(k_{sy_r}, k_{iy_q}) \mid (k_{sy_r}, k_{iy_q}) = \frac{\omega_0}{c f} \times (y_r, y_q); y_r \wedge y_q \in \mathcal{M}_{(y)}\} \quad (4.14)$$

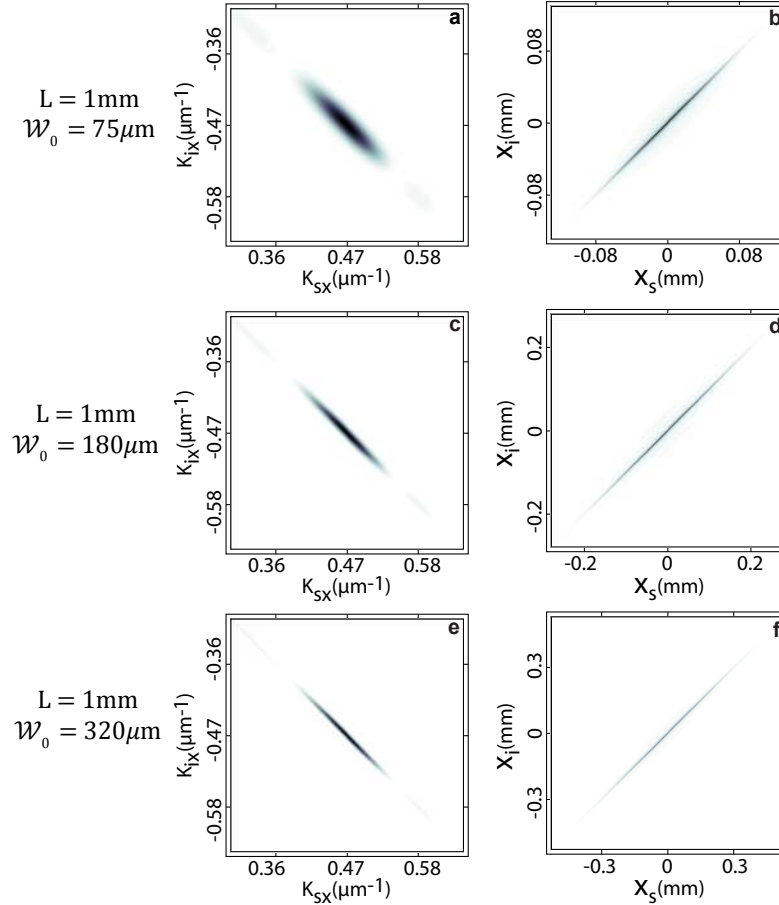
donde  $\mathcal{M}_{(y)}$  se define de forma similar que en (4.12). La otra malla necesaria es idéntica a  $\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})}$  en (4.11). El algoritmo se puede dividir en cinco pasos. En la figura 4.1, estos pasos están marcados dentro del cuadro rojo. El primer paso consiste en que por cada punto de la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})}$  se evalúa la función en todos los puntos de la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sy}, k_{iy})}$ , dando un total de  $n \times m$  matrices de tamaño  $r$  por  $q$ , pues la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})}$  contiene un total de  $n \times m$  puntos. El segundo paso en el algoritmo consiste en calcular la transformada de Fourier bidimensional en cada una de estas matrices, que da como resultado una nueva función  $\tilde{F}(k_{sx}, y_s, k_{ix}, y_i)$ . En el tercer paso se escoge un elemento en cada una de las matrices anteriores. El elemento que se escoja debe ser el mismo en todas las matrices, es decir, si en la primera matriz se escoge el elemento  $r = 1, q = 3$ , en todas las demás matrices se debe seleccionar el mismo elemento. Este paso es crucial en el algoritmo pues simboliza la selección de las coordenadas fijas  $y_{s0}$  y  $y_{i0}$ . El cuarto paso consiste en tomar todos los elementos seleccionados en el paso anterior y con ellos formar una nueva matriz. Los elementos de esta matriz contienen el valor de la función  $\tilde{F}$  evaluada en los puntos  $(k_{sx}, y_{s0}, k_{ix}, y_{i0})$ . Esta matriz es de tamaño  $n$  por  $m$ . El último paso consiste en calcular la transformada de Fourier bidimensional de la matriz construída en el cuarto paso, dando como resultado la función  $\tilde{\tilde{F}}(x_s, y_{s0}, x_i, y_{i0})$ . Finalmente, para obtener la correlación  $x_s - x_i$  se debe tomar el módulo cuadrado de la función  $\tilde{\tilde{F}}(\cdot)$ .



**Figura 4.1:** Algoritmo para calcular numéricamente las correlaciones en el espacio de posiciones (campo cercano).

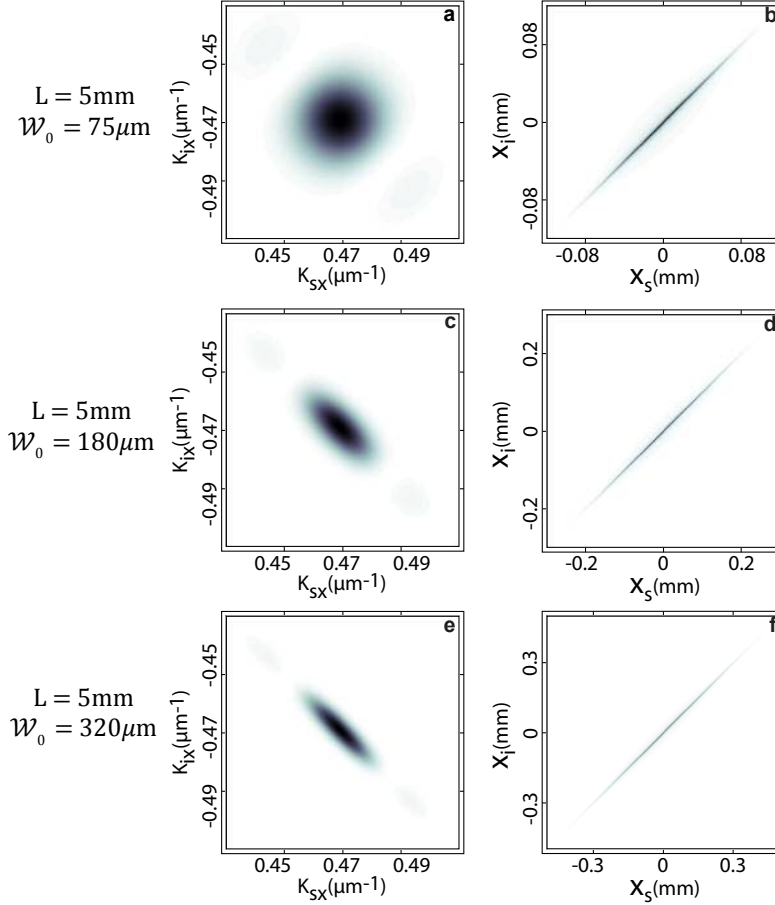
## 4.6. Resultados de simulaciones numéricas para medir enredamiento cuántico entre parejas de fotones

A continuación, en la [Figura 4.2](#) se presentan los resultados que arroja el cálculo numérico de las correlaciones transversales para medir enredamiento. En el primer renglón están las simulaciones para  $L = 1mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 75\mu m$ , mientras que en el segundo renglón las simulaciones se calcularon con  $L = 1mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 180\mu m$  y en el tercer con  $L = 1mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 320\mu m$ . Los paneles (a), (c) y (e) son las correlaciones  $k_{sx} - k_{ix}$  y los paneles (b), (d) y (f) las correlaciones  $x_s - x_i$ . Nótese que mientras las correlaciones  $k_{sx} - k_{ix}$  exhiben correlación negativa, las correlaciones  $x_s - x_i$  exhiben correlación positiva.



**Figura 4.2:** Correlaciones transversales en el espacio de momento (a, c y e) y en el espacio de posiciones (b, d y f). El primer renglón se ha calculado con  $L = 1mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 75\mu m$ , el segundo renglón con  $L = 1mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 180\mu m$  y el tercer con  $L = 1mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 320\mu m$ .

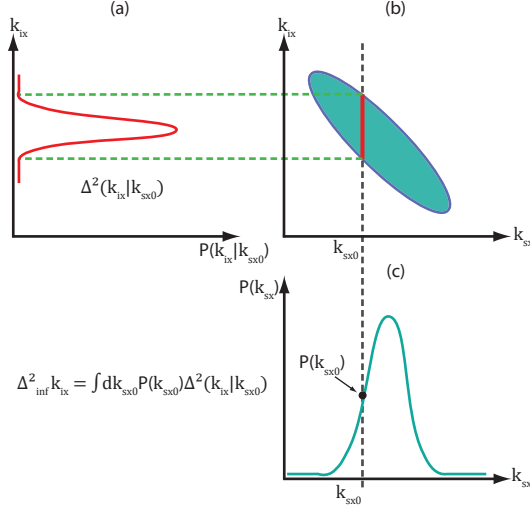
En la [Figura 4.3](#) se muestran los resultados de las simulaciones de las correlaciones transversales para  $L = 5mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 75\mu m$ ,  $180\mu m$  y  $320\mu m$ .



**Figura 4.3:** Correlaciones transversales en el espacio de momento (a, c y e) y en el espacio de posiciones (b, d y f). El primer renglón se ha calculado con  $L = 5mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 75\mu m$ , el segundo renglón con  $L = 5mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 180\mu m$  y el tercer con  $L = 5mm$  y  $\mathcal{W}_0 = 320\mu m$ .

Para poder hacer un estudio completo de los criterios de enredamiento estudiados en el [Capítulo 3](#), los cálculos se hicieron para diferentes longitudes de cristal en el rango  $L \in [0.5, 10]mm$  y para diferentes radios en la cintura del haz dentro del rango  $\mathcal{W}_0 \in [5, 320]\mu m$ . Sin embargo, por tratarse de demasiadas gráficas, en este trabajo sólo se presentan un conjunto de ellas como representativas. Nótese que mientras más grande es  $\mathcal{W}_0$  mas larga se va haciendo la correlación  $x_s - x_i$  (la escala en el panel (d) es un orden de magnitud mayor comparada con la escala el panel (b)), lo que significa que para valores de  $\mathcal{W}_0$  mayores, la correlación se irá haciendo mas larga, lo que se traduce en agregar más puntos en las mallas  $\mathcal{M}_{(k_{sy}, k_{iy})}$  y  $\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})}$ . Recordemos que el algoritmo consiste en calcular por cada punto de la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sx}, k_{ix})}$  una transformada de Fourier sobre la malla  $\mathcal{M}_{(k_{sy}, k_{iy})}$ , de modo que al ir agregando más puntos a ambas mallas crece el número de transformadas por calcular, lo que tiene un costo computacional muy alto, además de que requiere demasiado tiempo de cálculo, es por ello que el máximo cinturón alcanzado es  $\mathcal{W}_0 = 320\mu m$ . Con este par conjugado de gráficas es posible

evaluar las desigualdades para identificar entrelazamiento cuántico entre la pareja de fotones.



**Figura 4.4:** Procedimiento para evaluar  $\Delta_{\text{inf}}^2 k_{ix} \Delta_{\text{inf}}^2 k_{ix}$ . Primero se escoge  $k_{sx0}$  y se obtiene el valor de  $P(k_{sx0})$ . Después, dado  $k_{sx0}$  se calcula  $P(k_{ix}|k_{sx0})$ , de donde se obtiene  $\Delta^2(k_{ix}|k_{sx0})$ , para finalmente calcular  $\Delta_{\text{inf}}^2 k_{ix} = \sum_{k_{sx0}} P(k_{sx0}) \Delta^2(k_{ix}|k_{sx0})$ .

## 4.7. Análisis de los criterios de enredamiento

En esta sección serán evaluadas las desigualdades estudiadas en el [Capítulo 3](#). Empezaré por el criterio de *EPR-steering* y después analizaré el criterio de Mancini et al.

### 4.7.1. Criterio de EPR-steering

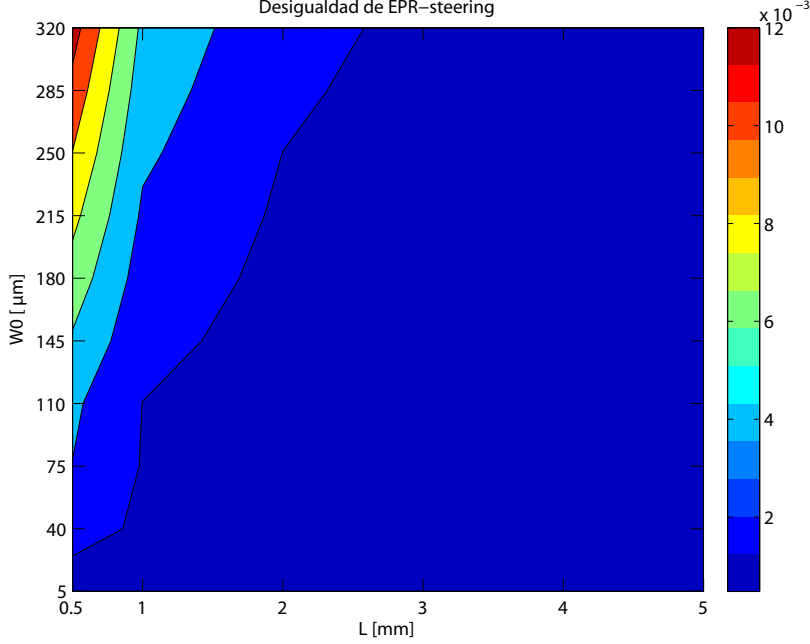
En este punto vale la pena recordar la desigualdad de *EPR-steering* (EPR-s):

$$\Delta_{\text{inf}}^2 x_{\mu} \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x} \geq \frac{1}{4} \quad (4.15)$$

donde se ha definido

$$\Delta_{\text{inf}}^2 x_{\mu} = \int dx_{\xi} P(x_{\xi}) \Delta^2(x_{\mu}|x_{\xi}) \quad (4.16)$$

y de forma totalmente análoga se define  $\Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu}$ . En la ecuación (4.16),  $\Delta^2(x_{\mu}|x_{\xi})$  es el error en cada estimación de  $x_{\mu}$  en el sistema  $\mu$  una vez que se ha obtenido el valor  $x_{\xi}$  en el sistema  $\xi$  y  $P(x_{\xi})$  es la probabilidad de obtener el valor  $x_{\xi}$  en una medición realizada en el sistema  $\xi$ . Nótese que  $\mu, \xi \in \{s, i\}$  pero  $\mu \neq \xi$ , es decir,  $\mu$  y  $\xi$  no pueden



**Figura 4.5:**  $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$  calculado con los datos de las simulaciones.

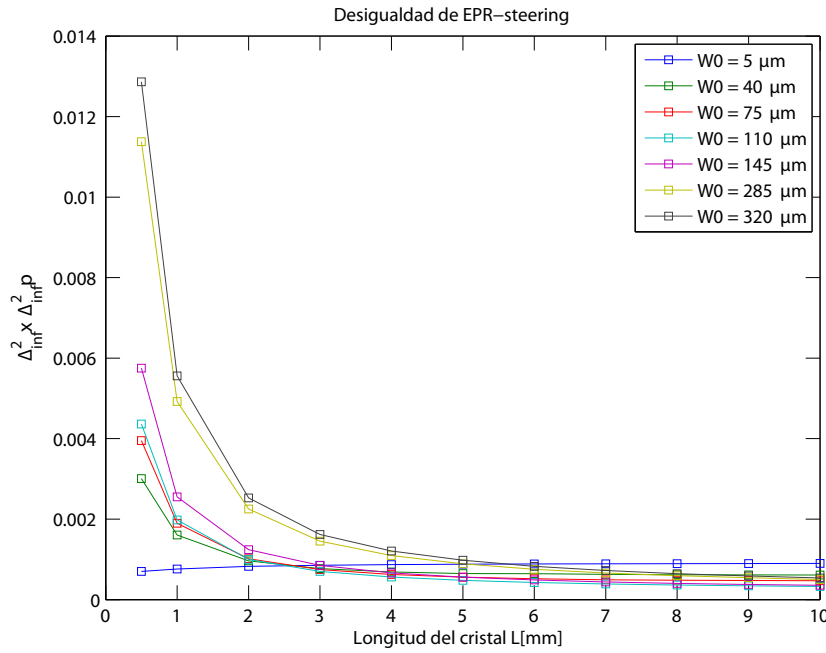
tomar el mismo valor al mismo tiempo. El procedimiento para evaluar  $\Delta_{\text{inf}}^2 k_\mu$  a partir de los resultados de las correlaciones es el siguiente (de ahora en adelante supondré que  $\mu = i$  y  $\xi = s$ , pero el análisis es el mismo si  $\mu$  y  $\xi$  toman los valores opuestos):

1. De los datos de las correlación  $k_{sx} - k_{ix}$  (Figura 4.4 panel (b)) se puede obtener la distribución marginal  $P(k_{sx}) = \sum_{k_{ix}} P(k_{sx}, k_{ix})$ .
2. Del arreglo  $\{k_{sx}\}$  escogemos un punto  $k_{sx0}$  y obtenemos el valor de la distribución maginal  $P(k_{sx})$  en este punto:  $P(k_{sx0})$  (Figura 4.4 panel (c))
3. Para este mismo punto  $k_{sx0}$  obtenemos a partir de  $P(k_{sx}, k_{ix})$  la distribución condicional  $P(k_{ix}|k_{sx0})$  (Figura 4.4 panel (a)).
4. Dada la distribución condicional  $P(k_{ix}|k_{sx0})$  se puede calcular  $\Delta^2(k_{ix}|k_{sx0})$ .
5. Con estos datos se calcula  $P(k_{sx0})\Delta^2(k_{ix}|k_{sx0})$ .
6. Se repiten los pasos 2-5 para todos los puntos del arreglo  $\{k_{sx}\}$  y finalmente se obtiene  $\Delta_{\text{inf}}^2 k_{ix} = \sum_{k_{sx0}} P(k_{sx0})\Delta^2(k_{ix}|k_{sx0})$ .

El procedimiento para calcular  $\Delta_{\text{inf}}^2 x_i$  es idéntico.

En la Figura 4.5 se muestra una gráfica de densidad en donde la escala de colores denota el valor del producto  $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$  según el estado cuántico caracterizado por di-

ferentes combinaciones de longitud del cristal  $L$  y radio en la cintura del haz  $W_0$ <sup>1</sup>. En el estado  $\{L, W_0\} = \{0.5mm, 320\mu m\}$  se alcanza el valor máximo  $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x} = 0.012$ . Puede notarse que ningún estado cuántico satisface la desigualdad (4.15), concluyendo que todos los estados explorados están entrelazados. Sin embargo, la intuición sugiere que si escogemos  $L = 0.5mm$  y seguimos aumentando  $W_0$ , eventualmente alcanzaremos un estado que supere la cota impuesta por el criterio de EPR-s, estableciendo que hemos encontrado un estado no enredado.



**Figura 4.6:** Comportamiento de  $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$  en función de  $L$ .

Con la intención de analizar el comportamiento del criterio EPR-s, en la [Figura 4.6](#) se muestra una gráfica del producto  $\Delta_{\text{inf}}^2 x_\mu \Delta_{\text{inf}}^2 k_{\mu x}$  como función de  $L$ . De esta gráfica se concluyen dos cosas, primero, para una  $W_0$  dada, el producto alcanza un máximo (este valor máximo viola la desigualdad) si se escogen longitudes de cristal pequeñas, y segundo, sin importar el valor de  $W_0$ , el producto converge a un valor mínimo para cristales largos.

#### 4.7.2. Criterio de Mancini-Giovanetti-Vitali-Tombesi (MGVT)

La desigualdad de Mancini-Giovanetti-Vitali-Tombesi (MGVT) es la siguiente:

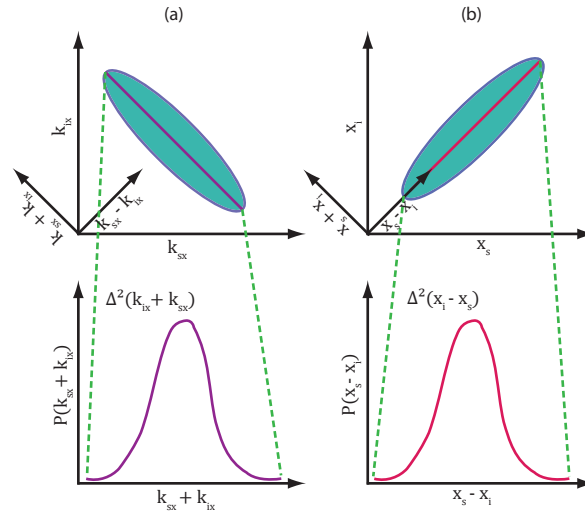
$$\Delta^2(x_s - x_i) \Delta^2(k_{sx} + k_{ix}) \geq 1 \quad (4.17)$$

<sup>1</sup>Nótese que en esta gráfica solo se muestran resultados hasta  $L = 5mm$ , esto se debe a que para  $L$  más grandes el comportamiento es el mismo y hacer esto permite observar mejor lo que sucede para longitudes más pequeñas



#### 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

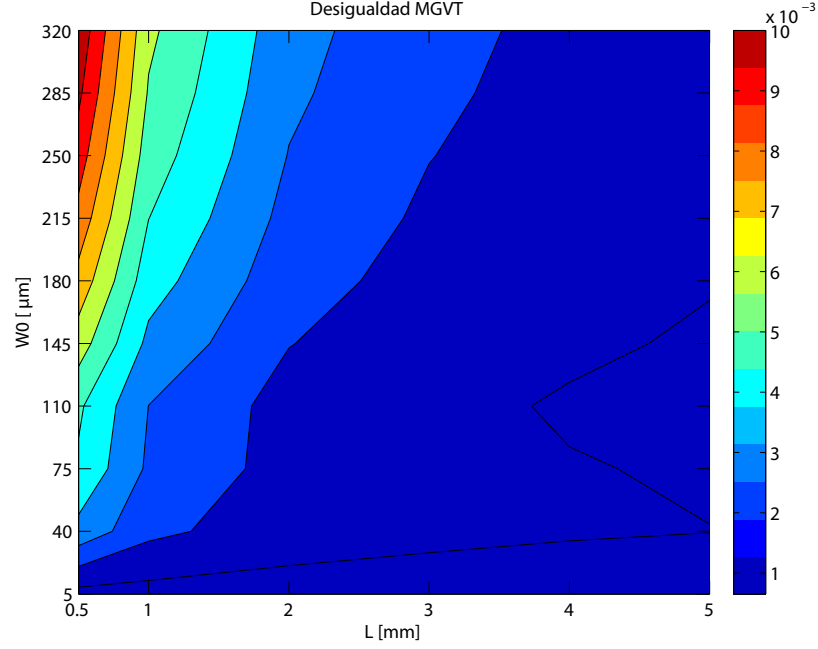
en donde, de acuerdo a lo visto en el [Capítulo 3](#), cualquier estado separable debe satisfacer esta desigualdad. En la desigualdad (4.17),  $\Delta^2(x_s - x_i)$  representa la varianza de la distribución  $P(x_s - x_i)$  mientras que  $\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$  representa la varianza de la distribución  $P(k_{sx} + k_{ix})$ . Para obtener la distribución  $P(x_s - x_i)$  ( $P(k_{sx} + k_{ix})$ ) a partir de los datos de la correlación  $\{k_{sx}, k_{ix}\}$  definimos un eje diagonal dado por  $x_s - x_i$  ( $k_{sx} + k_{ix}$ ) y en seguida obtenemos el valor de la correlación a lo largo de este eje, que será la distribución  $P(x_s - x_i)$  ( $P(k_{sx} + k_{ix})$ ), en la [Figura 4.7](#) se muestra como realizar este proceso.



**Figura 4.7:** Procedimiento para evaluar  $\Delta^2(x_s - x_i)\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$ . De los datos de las correlaciones  $x_s - x_i$  y  $k_{sx} - k_{ix}$  calculan las distribuciones  $P(x_s - x_i)$  y  $P(k_{sx} + k_{ix})$ , respectivamente, a partir de las cuales es posible calcular  $\Delta^2(x_s - x_i)$  y  $\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$

En la [Figura 4.8](#) se muestra, en una gráfica de densidad, el resultado de evaluar  $\Delta^2(x_s - x_i)\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$  con los datos obtenidos de las simulaciones. Lo primero que puede observarse es que ningún estado cuántico satisface el criterio, resultado que era de esperarse puesto que tampoco el criterio EPR-s fue satisfecho por estos mismos estados. El valor máximo alcanzado es de  $\Delta^2(x_s - x_i)\Delta^2(k_{sx} + k_{ix}) = 0.010$  que se obtiene en el estado  $\{L, W_0\} = \{0.5mm, 320\mu m\}$ , igual que en el caso del criterio de EPR-s. Puede observarse que ambos criterios de enredamiento presentan casi el mismo comportamiento (comparense figuras (4.5) y (4.8)), es decir,  $\Delta^2(x_s - x_i)\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$  alcanza valores mayores para configuraciones de  $L$  pequeña y  $W_0$  grande y alcanza valores pequeños para cualquier cristal suficientemente largo sin importar el tamaño del cinturón del haz.

Si estos criterios sirvieran no solo para determinar si un estado cuántico se encuentra entrelazado, sino también para cuantificar el grado de entrelazamiento de un estado dado, entonces, en base a los resultados derivados de ambos criterios se podría afirmar que los estados más enredados son aquellos que se obtienen de un cristal suficientemente



**Figura 4.8:**  $\Delta^2(x_s - x_i)\Delta^2(k_{sx} + k_{ix})$  calculado con los datos de las simulaciones.

largo.

Sería muy conveniente poder optimizar el algoritmo que se empleó para calcular las correlaciones en el espacio de posiciones de tal manera que fuera posible acceder a estados con  $W_0 \gg 320\mu m$  y con ello buscar si existe (o existen) una configuración de  $\{L, W_0\}$  que produzca un estado no entrelazado, y de existir estos estados, poder definir un nuevo criterio en términos de una longitud crítica  $L_c$  o de un cinturón crítico  $W_{0c}$  que permita determinar de forma mucho más directa cuando se tiene un estado de SPDC entrelazado o no entrelazado.



# Desarrollo experimental y análisis de resultados

En este capítulo daré los detalles del experimento y los resultados obtenidos. El arreglo experimental se puede dividir en tres partes, la primera corresponde a la preparación del bombeo en donde se genera el haz Bessel-Gauss de orden cero; la segunda corresponde a la generación de la pareja de fotones y la tercera es el sistema de detección. Finalmente, mostraré y discutiré los resultados derivados de las mediciones.

## 5.1. Arreglo experimental

El arreglo experimental completo se muestra en la [Figura 5.1](#). El sistema de referencia es tal que el eje  $Z$  siempre apuntará en la dirección de propagación del bombeo. El eje  $X$  será perpendicular a la mesa óptica. El eje  $Y$  se escogerá de tal forma que el sistema de coordenadas sea un sistema derecho. Con esta convención, la mesa óptica está situada en el plano  $YZ$ .

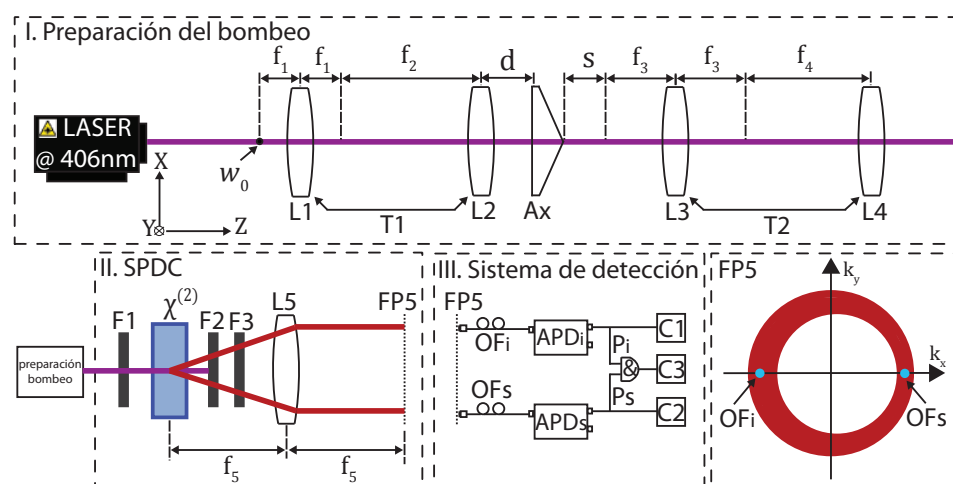
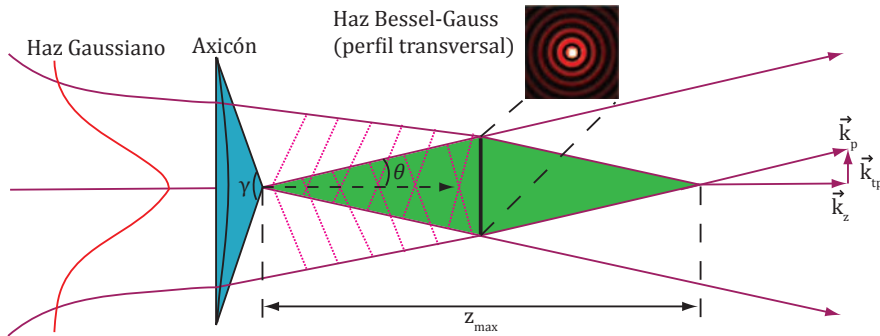


Figura 5.1: Tres fases del arreglo experimental.

### 5.1.1. Parte I. Preparación del bombeo

La primer parte del arreglo experimental es la preparación del bombeo y básicamente consiste en generar un haz Bessel-Gauss<sup>1</sup> de orden cero<sup>2</sup> (BG0). Existen diferentes técnicas para generar un haz BG, dos de las más comunes son haciendo uso de un Modulador Espacial de Luz (SLM, por sus siglas en inglés Spatial Light Modulator) [7] o de un Axicón (Ax) [17, 64]. En el caso de este trabajo se optó por el uso de un axicón. Un axicón es un elemento óptico que consiste de una lente que tiene una superficie plana y una superficie cónica y están caracterizados por su ángulo  $\gamma$  medido en el ápice (véase Figura 5.2). El haz BG se forma cuando las ondas planas que inciden en el axicón son refractadas e interfieren, resultando en un haz Bessel-Gauss de orden cero (BG0). Los vectores de onda se encuentran contenidos dentro de un cono cuyo ángulo de apertura está dado por  $\theta = \arcsin(k_{tp}/k_p)$ . Una característica muy importante de los haces BG es que tienen una distancia finita de propagación  $z_{\max}$  en donde se comportan como no-difraccionales (zona de color verde en la Figura 5.2) (Véase por ejemplo [65, 66]). Usando argumentos geométricos simples, la distancia máxima de propagación se puede calcular como [67]  $z_{\max} = 2\pi W_0/\lambda k_{tp} = W_0 k_p/k_{tp}$ . La transformada de Fourier (TF) de un haz BG, es decir, el espectro angular, es un anillo en el espacio de vectores de onda cuyos radio y ancho están dados por  $k_{tp}$  y  $\delta k = 4/W_0$ , respectivamente. De esto se deduce que para caracterizar a un haz BG0 sólo es necesario conocer  $k_{tp}$  y  $W_0$  toda vez que  $z_{\max}$  ha sido determinada.



**Figura 5.2:** Iluminando un axicón con un haz Gaussiano se genera un haz Bessel-Gauss de orden cero, el cual se comporta como no-difraccional sobre la región en color verde.

Como fuente de bombeo se emplea un diodo láser centrado en  $\lambda_p = 406.8nm$  con ancho de banda  $\Delta\lambda_p = 1nm$ . Este diodo láser ha sido caracterizado con anterioridad para su uso en diferentes experimentos en el Laboratorio de Óptica Cuántica, encontrándose

<sup>1</sup>Generar un haz Bessel puro es técnicamente imposible debido a que se requiere que cada anillo tenga la misma energía que el anillo central, lo que demanda energía infinita. No obstante, usando elementos ópticos es posible generar un haz con una distribución muy parecida a un haz Bessel.

<sup>2</sup>Un haz Bessel de orden cero está caracterizado por tener un máximo central mientras que cualquier haz Bessel de orden superior ( $\ell > 0$ ) tiene una intensidad nula en el centro rodeado por anillos concéntricos. Esto se debe a la singularidad proveniente del término azimutal  $\exp(i\ell\phi)$ .

que la cintura del haz se ubica a  $\delta_{W_0} = 162.56\text{cm}$  a partir de la salida del láser. Para generar un haz BG0 de buena calidad, primero es necesario magnificar el haz Gaussiano proveniente del láser a través un telescopio T1 de magnificación  $10\times$  formado por dos lentes plano convexas L1 y L2 de longitud focal  $f_1 = 5\text{cm}$  y  $f_2 = 50\text{cm}$ , respectivamente, para cubrir la mayor área posible de la cara frontal del axicón. L1 se colocó a una distancia  $f_1$  de la posición donde se ubica  $W_0$ , esto es, a una distancia  $f_1 + \delta_{W_0}$  del láser. L2 se colocó a una distancia  $f_1 + f_2$  de L1. El haz Gaussiano colimado y magnificado que se obtiene de T1 es dirigido hacia el axicón (fabricado por Altechna), formando el haz BG0. El axicón se colocó a  $d = 10\text{cm}$  de L2.

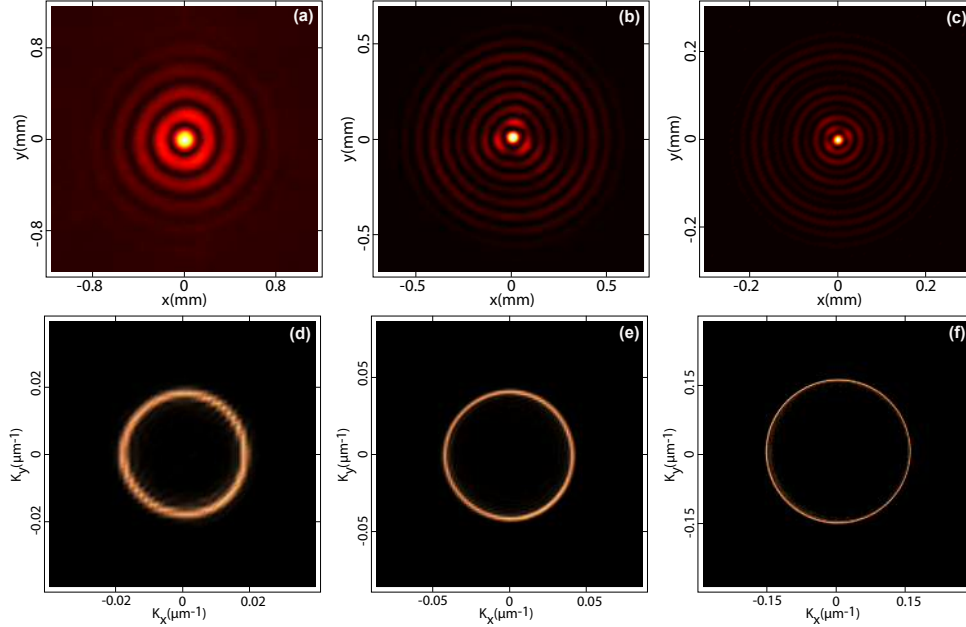
Dado que el objetivo principal de la parte experimental de este trabajo es estudiar los efectos de haces BG0 paraxiales y no-paraxiales en el proceso de SPDC, se necesita contar con una herramienta que permita hacer la transición entre estos dos regímenes modificando los dos parámetros que caracterizan a este tipo de haces,  $k_{\text{tp}}$  y  $W_0^{\text{BG}}$ <sup>3</sup>. Esto se puede lograr a través de la combinación (axicón + telescopio). Por lo que el siguiente paso es montar, después del axicón, un telescopio T2 formado por dos lentes plano convexas L3 y L4 de distancia focal  $f_3$  y  $f_4$ , respectivamente. En la [Tabla 5.1](#) se muestran las distintas configuraciones de T2 y axicón para generar diferentes valores de  $k_{\text{tp}}$  y  $W_0^{\text{BG}}$ .

**Tabla 5.1:** Valores de  $k_{\text{tp}}$  y  $W_0^{\text{BG}}$  generados. M es la magnificación de L2 y  $\gamma$  es el ángulo en el ápice del axicón.

L3 [cm]	L4 [cm]	M	Ax $\gamma$ [°]	$s$ [cm]	$k_{\text{tp}} [\mu\text{m}^{-1}]$	$W_0^{\text{BG}} [\mu\text{m}]$	$z_{\text{max}} [\text{cm}]$
10	30	3x	198	24	0.0195	1300	103.4
	15	1.5x	198	24	0.050	650	20.1
			196	4.5	0.150	1200	12.4

Experimentalmente, el axicón no es un elemento óptico ideal (no se pueden evitar pequeñas imperfecciones en el proceso de fabricación), por lo que la longitud  $z_{\text{max}}$  (véase [Figura 5.2](#)) no se mide inmediatamente después de éste, esto es, el haz BG0 no se forma inmediatamente a la salida del axicón. Existe un plano ubicado a una distancia  $\Delta$  después del axicón a partir de la cual se empieza a medir  $z_{\text{max}}$ . Para saber a qué distancia ubicar L3 respecto del axicón, con ayuda de una cámara CCD (Thorlabs, modelo DCU224M) se fue monitoreando el cambio en el lóbulo central del haz BG0 a lo largo del eje  $Z$ , a partir de esto se estableció la distancia  $s$  (véase [Figura 5.1](#)), medida desde del axicón, a partir de la cual se considera está ubicado un haz BG0 de buena calidad en su perfil transversal. Es importante recalcar que  $\Delta < s < \Delta + z_{\text{max}}$ . En la [Tabla 5.1](#) se muestran los valores de  $s$  según el Ax empleado. Antes de montar L3 se debe desmontar el axicón, esto se debe a que para alinear el Ax correctamente debemos fijarnos en su TF que se obtendrá en el plano de Fourier de L3, lo que demanda alinear primero a L3. De esta forma, L3 se colocó a una distancia  $d + s + f_3$  respecto de L2

<sup>3</sup>De ahora en adelante, para evitar confusiones, se usará  $W_0^{\text{BG}}$  para denotar al radio en la cintura de la envolvente Gaussiana presente en el haz BG0.



**Figura 5.3:** Haces Bessel - Gauss (panel superior) y sus respectivos espectros angulares (panel inferior) para cada una de las configuraciones de la [Tabla 5.1](#). Primer columna:  $k_{\text{tp}} = 0.0195 \mu\text{m}^{-1}$ , segunda columna:  $k_{\text{tp}} = 0.05 \mu\text{m}^{-1}$ , tercer columna:  $k_{\text{tp}} = 0.147 \mu\text{m}^{-1}$

(véase [Figura 5.1](#)). En seguida, L4 se ubicó a una distancia  $f_3 + f_4$  de L3.

El tercer paso es la alineación del axicón. El proceso de alineación es muy sencillo, se debe cuidar que tanto el haz reflejado como el transmitido sean paralelos y coincidan con la dirección del bombeo. Para el haz reflejado se monta una iris detrás del axicón y con la rotación de la base se espera que el haz reflejado pase por la iris. Para el haz transmitido, se coloca una cámara CCD en el plano de Fourier de L3 y se debe cuidar que el anillo (tal como se ha mencionado, la transformada de Fourier de un Bessel es un anillo) sea simétrico además de que su intensidad en cada punto sea uniforme azimutalmente, para lograrlo nos apoyamos del par de tornillos giratorios de la montura.

Finalmente, es necesario hacer la caracterización del haz BG0, que se llevó a cabo en dos partes. La primera consiste en tomar, con una cámara CCD, una imagen del perfil transversal del haz BG0 en el plano en donde se colocará el cristal no lineal. Con esto podemos obtener el valor de  $W_0^{\text{BG}}$  a través de un ajuste en Matlab. La segunda parte consiste en capturar una imagen de la TF del haz BG0, es decir, su espectro angular. Para esto se requiere un arreglo  $f - f$  donde el primer plano focal coincida con el plano en donde se colocará el cristal no lineal y en el segundo plano focal es donde se coloca la cámara CCD para obtener la imagen. Con un programa en Matlab podemos analizar la imagen y obtener el valor de  $k_{\text{tp}}$ . En la [Figura 5.3](#) se muestran, para cada una de las configuraciones de la [Tabla 5.1](#), en el panel superior, el perfil transversal de cada haz

BG0, y en el panel inferior su respectiva transformada de Fourier. La longitud focal de la lente empleada para obtener el espectro angular es  $5\text{cm}$ . Como puede observarse en la [Figura 5.3](#), la magnitud de  $k_{\text{tp}}$  determina la extensión transversal del espectro angular. Con esto se concluye el proceso de preparación del bombeo.

### 5.1.2. Parte II. Generación de pareja de fotones

La segunda parte del experimento constituye la generación de la pareja de fotones. En este punto cabe recordar que estamos interesados en generar SPDC tipo I degenerado no colineal, para lo cual se empleará como cristal no lineal un BBO de dimensiones  $10\text{mm} \times 10\text{mm} \times 1\text{mm}$  cuyo ángulo de phase matching para la configuración deseada es  $\theta_{\text{PM}} = 29.3^\circ$ . El eje óptico  $\vec{a}$  está contenido en el plano  $XZ$ , es decir,  $\vec{a} = (\sin \theta_{\text{PM}}, 0, \cos \theta_{\text{PM}})$ . Con este valor de  $\theta_{\text{PM}}$  y la longitud de onda del bombeo se garantiza que el phase matching sea tipo I ( $e \rightarrow oo$ ).

El cristal BBO se debe colocar después de T2. Antes del cristal se colocó un filtro pasabandas Schott BG39 (F1), que transmite en la región de  $(300\text{nm} - 660\text{nm})$ . Después del cristal se deben colocar otros dos filtros, el primero es un pasa altas Semrock LP02-488RS-25 (F2), cuya longitud de onda de corte está fijada en  $488\text{nm}$ . Con este filtro suprimimos al bombeo. El segundo filtro es un pasabandas Thorlabs FBH810-10 (F3) centrado en  $810\text{nm}$  y  $\text{FWHM} = 10\text{nm}$ . Con este filtro eliminamos fotones espurios alrededor de  $810\text{nm}$  que se pueden confundir con la pareja de fotones y además aseguramos que se estén detectando fotones degenerados<sup>4</sup>. Para la correcta alineación y orientación del cristal se deben tomar en cuenta dos cosas. Primero, el bombeo debe incidir normalmente en la cara frontal del cristal, por lo que se debe comprobar que la dirección del haz reflejado y del transmitido sean paralelos y coincidan con la dirección del bombeo antes de incidir en el cristal. Segundo, se debe seleccionar la correcta orientación del cristal. Para elegir la orientación correcta se usará una cámara CCD para observar la distribución anular de los fotones. Es de mencionar que el ancho del anillo de SPDC quedará determinado por el ancho de banda del filtro pasabanda. La cámara CCD se coloca inmediatamente después de los dos filtros. Para orientar correctamente se debe observar el anillo de SPDC conforme se rota el cristal a lo largo de los ejes  $X, Y$  y  $Z$ . Rotar el cristal a lo largo de los ejes  $X$  y  $Y$  provocaría que la incidencia del bombeo en el cristal ya no sea normal. Como el eje óptico  $\vec{a}$  está contenido en el plano  $XZ$ , si rotamos alrededor del eje  $X$  estaríamos aumentando o disminuyendo  $\theta_{\text{PM}}$  según la dirección de rotación. Si se aumenta  $\theta_{\text{PM}}$ , aumenta el radio del anillo SPDC; por el contrario, si  $\theta_{\text{PM}}$  disminuye, el radio del anillo decrece hasta alcanzar un ángulo de phase matching crítico en que el anillo colapsa a un círculo, indicatriz de que se ha pasado al régimen de SPDC tipo I y colineal. Para ángulos menores al ángulo crítico, la condición de phase matching ya no se satisface. Se observa el mismo efecto si se rota alrededor del eje  $Y$ . Además, rotar alrededor de los ejes  $X, Y$  implicaría que la incidencia del bombeo en el cristal no es normal, desajustando la alineación del bombeo. La solu-

<sup>4</sup>Nótese que la frecuencia central del filtro no coincide con la frecuencia de los fotones degenerados, no obstante la frecuencia degenerada si cae dentro del ancho de banda del filtro.



ción para ajustar la orientación del cristal es rotar alrededor del eje  $Z$ . La orientación adecuada está determinada al hallar el máximo en la intensidad del anillo de SPDC.

Como estamos interesados en obtener el Espectro Angular (AS), el Espectro Angular Condicional (CAS) de la pareja de fotones, así como también las correlaciones transversales entre las diferentes variables fotónicas, cantidades que son medibles en un espacio de Fourier bidimensional, tenemos que implementar un arreglo  $f - f$  para obtener el espacio de Fourier. Para ello, colocamos una lente L5 de distancia focal  $f_5 = 5\text{cm}$  tal que el primer plano focal quede ubicado exactamente en el centro del cristal. El segundo plano focal será el plano de detección. Por otro lado, dada una frecuencia  $\omega$ , existe una relación biunívoca entre el espacio de posiciones  $\vec{\rho} = (x, y)$  y el espacio de vectores de onda transversal  $(k_x, k_y)$  dada por [68]

$$\vec{k} = A(\omega)\vec{\rho} \quad (5.1)$$

con  $A(\omega) = \omega/cf$ , donde  $f$  es la longitud focal de la lente que realiza la TF y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Con esto, a cada punto del espacio de Fourier se le asocia un vector de onda transversal dado por (5.1). En vista de que los fotones generados contienen un rango de frecuencias angulares, para aplicar esta relación biunívoca tenemos que tomar la frecuencia angular de los fotones degenerados, esto es,  $\omega_s = \omega_i = 2\pi c/813.6\text{nm}$  como la frecuencia representativa de los demás fotones.

### 5.1.3. Parte III. Sistema de detección

Para coleccionar fotones individuales se usaron un par de fibras ópticas multimodo de  $64\mu\text{m}$  de diámetro montadas, cada una, sobre un eje motorizado (Physik Instrumente PI, M-111.1DG) con grados de libertad en el plano transversal  $XY$ , área de escaneo de  $\mathcal{M} = 15\text{mm} \times 15\text{mm}$  y resolución de  $50\text{nm}$ . Cada punta de fibra óptica se colocó en el plano de Fourier de L5 en donde los fotones son colectados y se propagan hasta el otro extremo de la fibra, para finalmente incidir en un fotodiodo de avalancha de silicio (APD, por sus siglas en inglés Avalanche Photo-Diode Detector, marca PerkinElmer) produciendo un pulso eléctrico TTL (Transistor-Transistor Logic) con ancho temporal  $17\text{ns}$  y voltaje pico de  $2.5\text{V}$ . Las características de estos APD's son: I) tienen un tiempo muerto de  $80\text{ns}$ , esto es, una vez que se ha producido un pulso TTL, cualquier fotón que llegue dentro de este intervalo de  $80\text{ns}$  no es detectado. II) Las cuentas oscuras rondan alrededor de 150 -250 cuentas por segundo. III) En el rango de  $500\text{nm} - 900\text{nm}$  tienen sensibilidad mayor al 40 %.

Para obtener el Espectro Angular (AS), se siguieron dos métodos: (I) Usando la punta de fibra OFs. Se dividió la malla  $\mathcal{M}$  en puntos separados espacialmente  $100\mu\text{m}$ . Con los motores, la fibra óptica se posicionó en cada uno de estos puntos abriendo una ventana de conteo de  $1\text{s}$  por punto. Esta configuración de detección se denomina cuentas simples porque solo se requiere una punta de fibra. Este procedimiento se realiza para cada valor de  $k_{\text{tp}}$ . Es indiferente cuál de las dos puntas de fibra, OFs u OFi, se emplee para obtener el AS. (II) El método más sencillo y más rápido es ubicar una cámara

ICCD (Intensified Charge Coupled Device) Andor iStar DH334T-18-F-73 con resolución de  $1024 \times 1024$  pixeles, con un tamaño por pixel de  $13\mu m$  en FP5 (véase [Figura 5.1](#)) y adquirir la imagen directamente.

Para el Espectro Angular Condicional (CAS) se requiere usar las dos puntas de fibra óptica. La punta OFs se utiliza para condicionar/anunciar mientras que la punta OFi se usa para hacer un escaneo. La punta OFs se ubica en un punto de coordenadas  $\vec{\rho}_{s0} = (x_{s0}, y_{s0})$  o su equivalente  $\vec{k}_{s0}^\perp = (k_{xs0}, k_{ys0})$  en el espacio de vectores de onda transversal (véase [Ecuación 5.1](#)). La selección del punto  $\vec{\rho}_{s0}$  es de suma importancia ya que en algunos casos, dependiendo del valor de  $k_{tp}$ , determinará la geometría del CAS. Para ilustrar esto, dado un AS, se tomaron cinco puntos  $\vec{\rho}_{s0}$  con posición azimutal (aproximada) en  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  y  $180^\circ$ . Dada  $\varphi$ , para seleccionar el punto  $\vec{\rho}_{s0}$  adecuado nos basamos en el EA y se elige la posición de mayor número de cuentas por unidad de tiempo. En seguida, se debe elegir el subespacio  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  en donde OFi realizará el escaneo espacial. Para identificar la región que debe delimitar  $\mathcal{N}$  se procede de la siguiente manera. Como los fotones s e i deben satisfacer conservación de momento transversal, se tiene que  $\vec{k}_{s0}^\perp$  debe corresponderse con  $\vec{k}_{i0}^\perp = -\vec{k}_{s0}^\perp$ , y como  $\vec{k}_{i0}^\perp$  se asocia con  $\vec{\rho}_{i0}$  a través de [\(5.1\)](#),  $\mathcal{N}$  se debe escoger centrada en  $\vec{\rho}_{i0}$  y con dimensiones tal que el CAS quede completamente contenido en este subespacio. Al igual que para el AS, la malla  $\mathcal{N}$  se debe dividir en puntos igualmente espaciados de tal forma que en cada punto se coloca OFi y se realiza el conteo de fotones i en coincidencia con los fotones s colectados por OFs para obtener el CAS. El ancho de la ventana de tiempo y la separación espacial entre cada punto de la malla están especificados en la [Tabla 5.2](#) para cada valor de  $k_{tp}$ . Nótese que la ventana de tiempo para el CAS es mayor que para el AS, esto se debe a una tasa de conteo muy baja de coincidencias, de modo que para aumentar el número de coincidencias aumentamos el tamaño de la ventana temporal.

**Tabla 5.2:** Ventanas de tiempo y distancia entre puntos vecinos para medir el CAS y las correlaciones

$k_{tp}[\frac{1}{\mu m}]$	$\Delta\rho[\mu m]$				$\Delta t[s]$			
	Correlaciones			CAS	Correlaciones			CAS
	$k_{sx} - k_{ix}$	$k_{sy} - k_{iy}$	$k_{sx} - k_{iy}$		$k_{sx} - k_{ix}$	$k_{sy} - k_{iy}$	$k_{sx} - k_{iy}$	
0.0195	12.5	25	12.5	12.5	5	2	5	5
0.050	25	25	25	25	5	2	5	5
0.150	12.5	25	25	25	5	2	5	5

El siguiente objetivo es obtener las correlaciones transversales entre las diferentes variables fotónicas. Tal como se mencionó en la [Sección 2.6](#), las correlaciones que son de interés son

- (I)  $k_{sx} - k_{ix}$
- (II)  $k_{sy} - k_{iy}$
- (III)  $k_{sx} - k_{iy}$

## 5. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

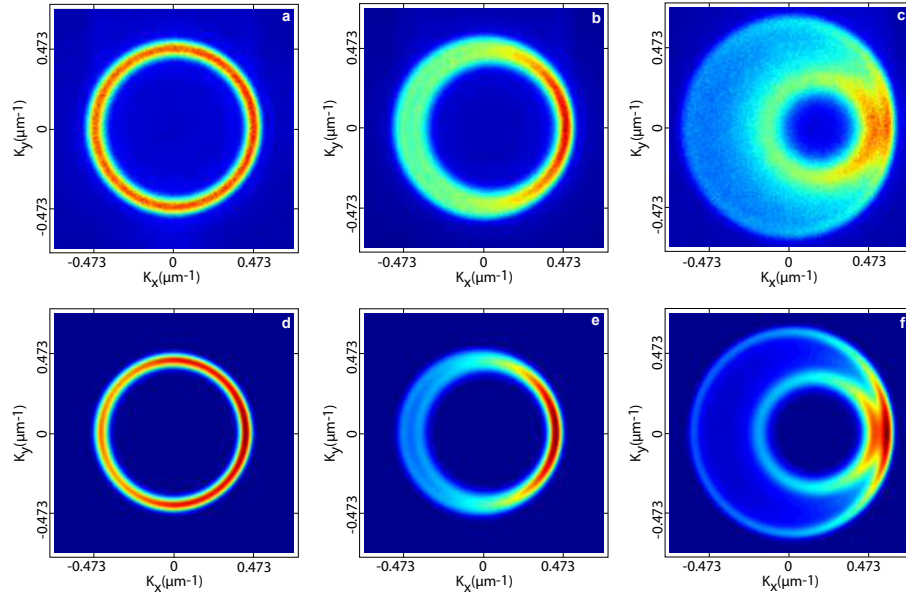
---

A diferencia del CAS, para obtener las correlaciones se requiere que cada punta de fibra condicione y colecte fotones, esto es, se fija una coordenada de la fibra y se hace un escaneo lineal a lo largo de la coordenada libre. La posición de cada punta de fibra óptica está dada por  $(x_s, y_s)$  para OFs y  $(x_i, y_i)$  para OFi. Para fijar los valores de  $x_s, y_s, x_i$  y  $y_i$ , según sea el caso de (I), (II) o (III) recurrimos a los valores de los puntos de condicionamiento del CAS: las coordenadas etiquetadas con (s) se identifican con el CAS a  $\varphi = 0^\circ$  y las etiquetadas con (i) con el CAS a  $\varphi = 180^\circ$ . El siguiente paso es hacer un escaneo lineal en las direcciones correspondientes: para (I) OFs a lo largo de  $x_s$  y OFi a lo largo  $x_i$ , para (II) OFs a lo largo de  $y_s$  y OFi a lo largo  $y_i$  y para (III) OFs a lo largo de  $x_s$  y OFi a lo largo  $y_i$ ; para ello se realiza una malla lineal con puntos separados equidistantemente. La separación entre puntos y el ancho de la ventana temporal para la colección de fotones se muestra en la [Tabla 5.2](#) para cada tipo de correlación y para cada valor de  $k_{tp}$ .

El sistema de detección está constituido de dos configuraciones: cuentas simples y cuentas en coincidencia. Implementar el sistema de detección no fue objetivo de este trabajo, de modo que lo presentaré de forma breve. El conteo de fotones se realiza a través de pulsos eléctricos. Un fotón incide en el APD y se produce un pulso TTL. Para contar los pulsos primero es necesario hacer un procesamiento. El pulso pasa primero por un inversor para después pasar por atenuador de  $20DB$  con el cual la señal eléctrica queda con un voltaje pico de  $-250mV$ , mientras que el ancho temporal permanece intacto. El siguiente paso es un discriminador que funciona a partir de un voltaje característico  $V_d$ , que para este caso fue configurado a  $V_d = -180mV$ , donde los pulsos con voltaje pico mayor a  $V_d$  son bloqueados y los pulsos con voltaje menor se dejan pasar. También puede ser configurable el ancho temporal del pulso que deja pasar el discriminador, que para este trabajo fue sintonizado a  $7ns$ . La intención de usar el discriminador es para eliminar pulsos espurios, que tienen la característica de tener un voltaje mayor a  $-250mV$ . El siguiente paso es llevar el pulso saliente del discriminador hasta el canal A de un contador de pulsos eléctricos que cuenta en un intervalo de tiempo predeterminado por el usuario. Esto constituye el esquema de cuentas simples.

Para la configuración de cuentas en coincidencia, como ya se mencionó anteriormente, se requiere usar las dos puntas de fibra óptica. De ahora en adelante vamos a nombrar APDs al APD que está conectado a la punta OFs, y APDi para el APD que va conectado a la punta OFi. Entonces, tal como se explicó en el párrafo anterior, cada punta de fibra va conectada a un APD en donde se produce un pulso TTL. Este pulso es procesado para después llevarlo a un contador de pulsos eléctricos. Para coincidencias se necesita hacer una modificación al circuito. Después del discriminador es necesario agregar un divisor de voltaje de tal forma que ahora las señales a la salida del discriminador son duplicadas al pasar por el divisor. El voltaje pico de la señal queda en  $-125mV$ . Ahora se tienen dos pares de señales eléctricas. Para el par de pulsos proveniente de APDs, una de las señales va al contador C1 (como en el caso de cuentas simples, sólo que ahora con la mitad de voltaje pico) y la otra señal, que ahora llamaremos Ps, se conecta a una de las entradas de una compuerta lógica AND. De la misma forma, para el par proveniente de APDi, una de las señales es llevada al contador C2 y la otra, Pi,

a la compuerta AND. La compuerta AND generará un pulso si los dos pulsos entrantes Ps y Pi coinciden dentro de un intervalo de tiempo, es decir, dados los pulsos Ps y Pi, la compuerta AND los sumará. Si Ps + Pi rebasa cierto umbral, la compuerta AND generará un pulso nuevo de salida, en caso contrario no se genera pulso alguno. Como cada pulso es de  $7ns$ , el intervalo de tiempo en el que se pueden traslapar (para poder ser sumados) es de  $14ns$ . A este tiempo se le conoce como ventana de coincidencia. El pulso saliente de la compuerta AND es dirigido a un contador C3. Sean  $t_{\mu,1}$  el tiempo que le toma al fotón  $\mu$ /pulso llegar al divisor de voltaje, con  $\mu = s, i$ ;  $t_{\mu,2}$  el tiempo que toma en ir del divisor al contador C1 o C2, dependiendo si se trata del fotón señal o acompañante;  $t_{\mu,3}$  el tiempo del divisor a la compuerta AND y  $t_c$  el tiempo que tarda la señal de salida de la compuerta AND en llegar al contador C3. Suponiendo que los fotones viajan la misma distancia en el vacío, las longitudes de las fibras ópticas y de los cables coaxiales para los modos (s) e (i) se eligen de tal forma que  $t_{s,1} = t_{i,1} = t_1$ ,  $t_{s,2} = t_{i,2} = t_2$ ,  $t_{s,3} = t_{i,3} = t_3$ . Si se satisface que  $t_1 + t_2 = t_3 + t_c$  se podrá contar simultáneamente cuentas simples y cuentas en coincidencia por unidad de tiempo.



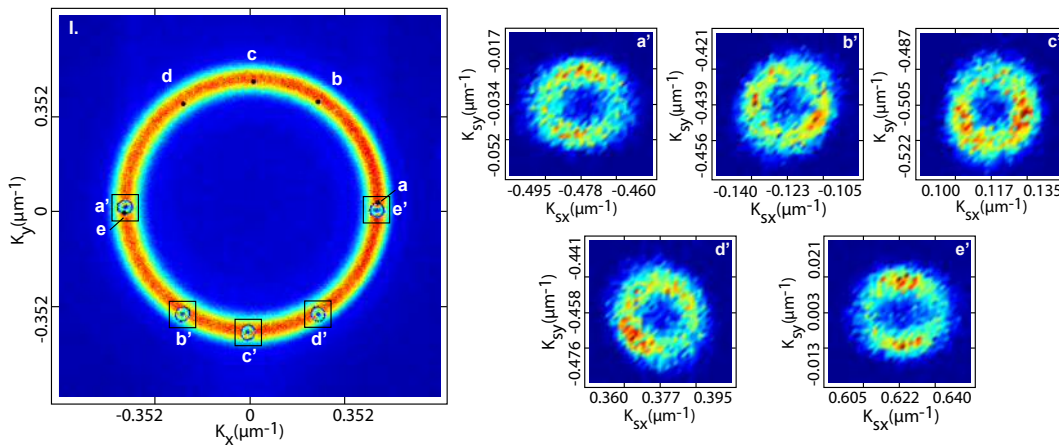
**Figura 5.4:** Espectro Angular. En el panel superior resultados experimentales y en el panel inferior resultados de las simulaciones numéricas. Primera columna  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ , segunda columna  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$  y tercera columna  $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . Las imágenes reportadas fueron adquiridas con la cámara Andor ICCD

## 5.2. Resultados experimentales

En la [Figura 5.4](#) se muestran gráficas del Espectro Angular (AS). En el panel superior se muestran las gráficas experimentales y en el panel inferior los resultados de

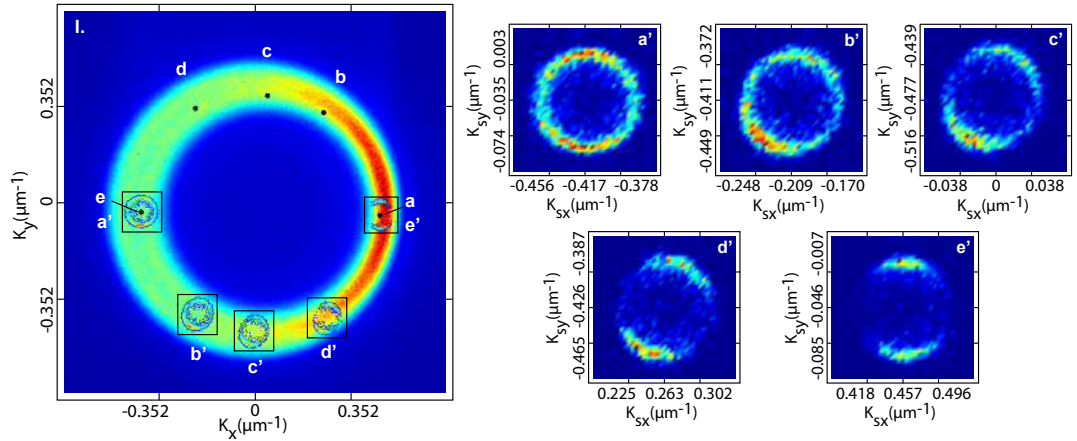
## 5. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

las simulaciones. Nótese la excelente correspondencia entre la teoría y el experimento, independientemente de la ligera diferencia que se aprecia entre los radios internos y externos del AS en los paneles (c) y (f). Esto se puede justificar por diversos factores, pero principalmente se atribuye a que en las simulaciones siempre se supone incidencia normal del bombeo en el cristal, sin embargo, experimentalmente es difícil asegurar una perfecta incidencia normal. Si en las simulaciones se incluyera un efecto de incidencia no normal, la magnitud de los radios sería la misma. Para poder hacer una comparativa, las gráficas corresponden a tres valores distintos de  $k_{tp}$ : (a) y (d)  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ , (b) y (e)  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ , (c) y (f)  $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . Podemos observar que para el valor más pequeño de  $k_{tp}$  la estructura del Espectro Angular es prácticamente un anillo perfecto, muy similar al Espectro Angular cuando se bombeó con un haz puramente Gaussiano [33, 43]. Más aún, conforme va aumentando la magnitud de  $k_{tp}$  la estructura de anillo simétrico del Espectro Angular se va perdiendo poco a poco hasta llegar al caso extremo de  $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ , en el cual se presenta una estructura de anillo dual que está delimitado por dos circunferencias no concéntricas que tienden a tocarse. En [69] se presentan expresiones aproximadas para calcular la magnitud de los radios de estas circunferencias. Es perceptible además que al aumentar la magnitud de  $k_{tp}$  las cuentas se van concentrando en una zona específica del Espectro Angular, perdiéndose la estructura de intensidad uniforme en todo el anillo. Estos efectos son consecuencia de, (I) si bien los vectores de onda están distribuidos uniformemente en la cara frontal del cristal, no están distribuidos de manera uniforme respecto al eje óptico de éste y (II) el walk-off. Este efecto de asimetría se traduce en un efecto de indistinguibilidad azimutal cuando nos fijamos en el Espectro Angular Condicional. Para ilustrarlo, se tomaron cinco medidas del CAS (a' - e') condicionando en diferentes puntos (a - e) del Espectro Angular (Figura 5.5).



**Figura 5.5:** Espectro Angular Condicional  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS.

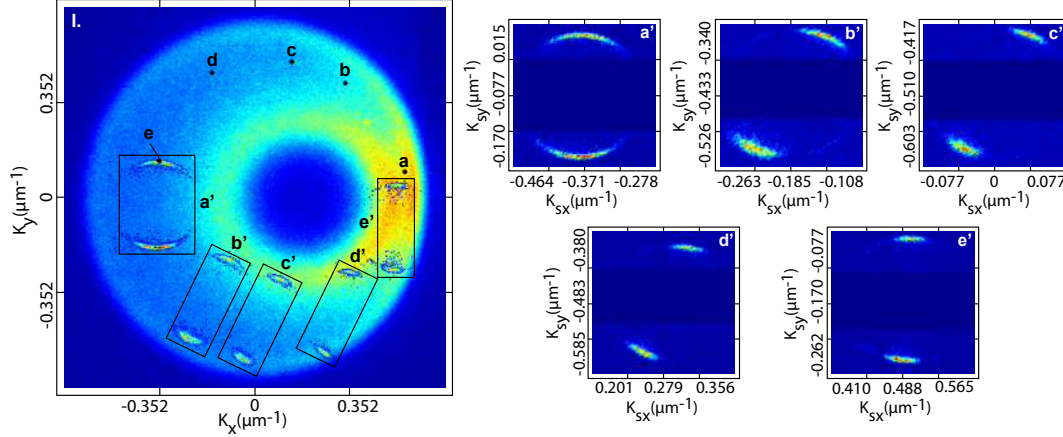
Nótese que para  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$  el CAS presenta la misma estructura (véase [Figura 5.5](#) paneles a - e), estructura de anillo, sin importar el punto donde se ubicó la fibra que condiciona. La estructura de la geometría del CAS es idéntica a la estructura del Espectro Angular del bombeo (panel (d) en la [Figura 5.3](#)). Esto no es completamente cierto cuando se consideran valores de  $k_{tp}$  grandes. Por ejemplo, en el caso de  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ , mientras que el CAS en los paneles a' y b' presentan la misma estructura de anillo, no se observa lo mismo en los paneles c' - e' donde la función del CAS cambia apreciablemente perdiendo por completo la estructura de anillo. Incluso, puede notarse que en d' y e' la orientación del CAS es también distinta. Esto se hace más evidente si consideramos un valor de  $k_{tp}$  aún más grande. Si nos fijamos en la [Figura 5.7](#), donde se muestra el Espectro Angular Condicional para  $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ , podemos observar que la estructura de anillo del CAS se ha perdido por completo, además de que la orientación del CAS depende fuertemente del punto que se haya elegido para condicionar (posición de la fibra OFs). Estos cambios notables en la estructura del CAS alrededor del AS conducen a una distinguibilidad azimutal en el estado de la pareja de fotones.



**Figura 5.6:** Espectro Angular Condicional  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS.

Esto es posible explicarlo si tomamos en cuenta que la función del CAS, tal como se vio en la [Sección 2.5](#), se puede escribir como el producto de las funciones  $\mathcal{S} \times \mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{S}(\cdot)$  es una función que depende únicamente de las propiedades del bombeo y  $\mathcal{L}(\cdot)$  depende únicamente de las propiedades del cristal no lineal. Dentro de la aproximación de cristal delgado (para una descripción más detallada del régimen de cristal delgado consúltese [\[43\]](#)), el estado de la pareja de fotones queda determinado por las propiedades del bombeo, es decir, depende sólo de la función  $\mathcal{S}(\cdot)$ . Para una fuente de SPDC bombeada con un haz BG0, los parámetros que determinan el intervalo de validez de la aproximación de cristal delgado son la longitud del cristal no lineal  $L$  y la magnitud del vector de onda transversal  $k_{tp}$ . Para un valor de  $k_{tp}$  suficientemente

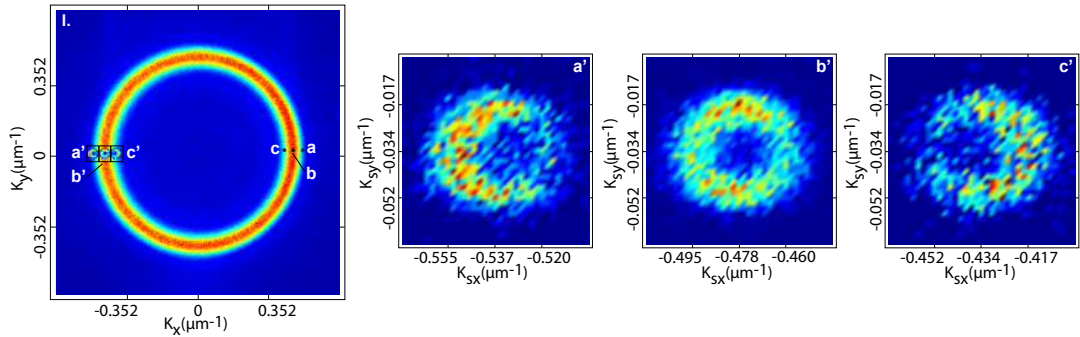




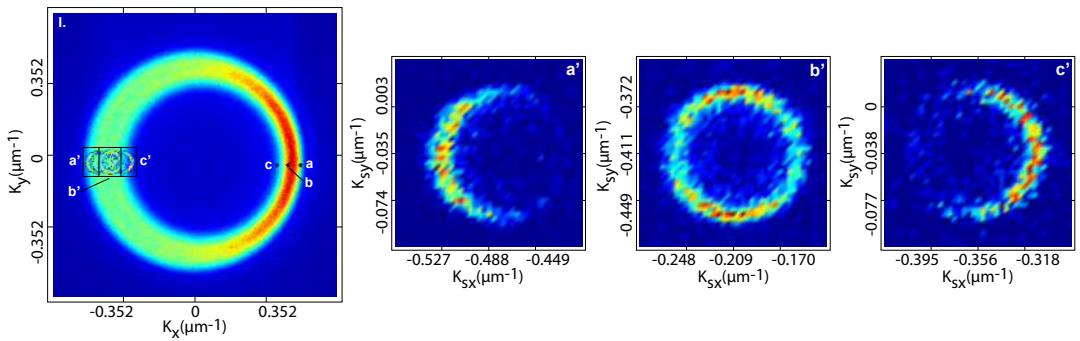
**Figura 5.7:** Espectro Angular Condicional  $k_{tp} = 0.150\mu\text{m}^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS.

pequeño en combinación con un cristal suficientemente delgado, el ancho de la función  $\mathcal{S}(\cdot)$  es considerablemente más pequeño que el de la función  $\mathcal{L}(\cdot)$ , de modo que al tomar el producto  $\mathcal{S} \times \mathcal{L}$  la función que domina es  $\mathcal{S}(\cdot)$ . En [17] Figura 1.a se muestra una gráfica en el espacio de parámetros  $\{L, k_{tp}\}$  que ilustra el régimen donde la aproximación de cristal delgado es válida, y puede verse que para un cristal no lineal de longitud  $L = 1\text{mm}$  y  $k_{tp} = 0.0195\mu\text{m}^{-1}$  el régimen de cristal delgado es válido, de modo que para esta combinación las propiedades del CAS quedan determinadas completamente por la función  $\mathcal{S}(\cdot)$ . Esto explica el hecho de que en la Figura 5.5 la estructura del CAS sea idéntica a la del Espectro Angular del bombeo, es decir, los fotones heredan las propiedades del bombeo. Es evidente que el CAS presenta un ligero desplazamiento con respecto al origen, esto se debe a la posición de la fibra que condiciona. En la misma referencia se puede verificar que el caso  $L = 1\text{mm}$  y  $k_{tp} = 0.150\mu\text{m}^{-1}$  se posiciona completamente fuera del régimen de cristal delgado, lo cual explica que el CAS ya no hereda las propiedades del Espectro Angular del bombeo.

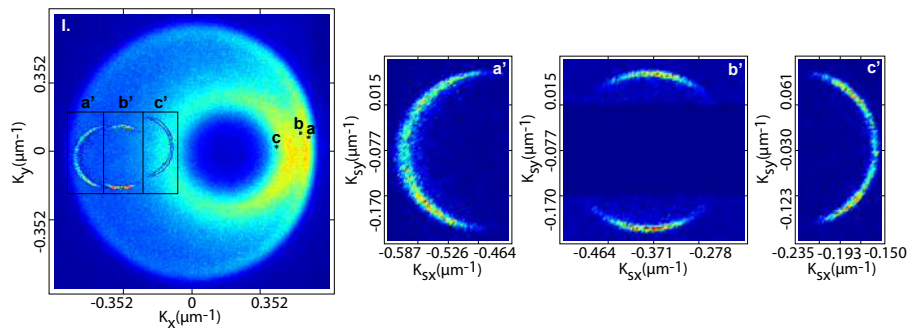
En una dirección similar, se ha medido el Espectro Angular Condicional en diferentes puntos del lado derecho del Espectro Angular con la intención de revelar el comportamiento de la función  $\mathcal{S}(\cdot)$ . En la Figura 5.8, los puntos (a), (b) y (c) indican la posición de la fibra OFs, mientras que los paneles (a'), (b') y (c') indican las regiones de escaneo de la fibra OFi. Observando los paneles (a'), (b') y (c') se deduce que, con sólo hacer un desplazamiento a lo largo del eje  $X$  del punto que condiciona es posible elegir que porción del CAS se desea obtener. De forma análoga, las Figuras 5.9 y 5.10 muestran las mismas mediciones para  $k_{tp} = 0.050\mu\text{m}^{-1}$  y  $k_{tp} = 0.150\mu\text{m}^{-1}$ , respectivamente. Nótese también que la estructura del CAS es la misma para los puntos (a), (b) y (c) independientemente del valor de  $k_{tp}$ . Con esto se ilustra que es posible tener un control completo del CAS.



**Figura 5.8:** Espectro Angular Condicional  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS.



**Figura 5.9:** Espectro Angular Condicional  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS.

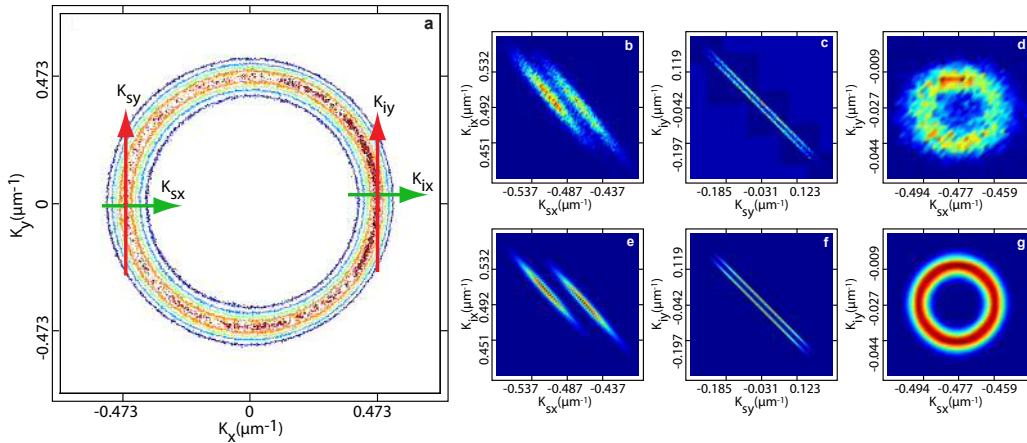


**Figura 5.10:** Espectro Angular Condicional  $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ . (a - e) son los puntos donde se condicionó (posiciones de la fibra OFs) y (a' - e') son las regiones de escaneo de la fibra OFi para medir el CAS.



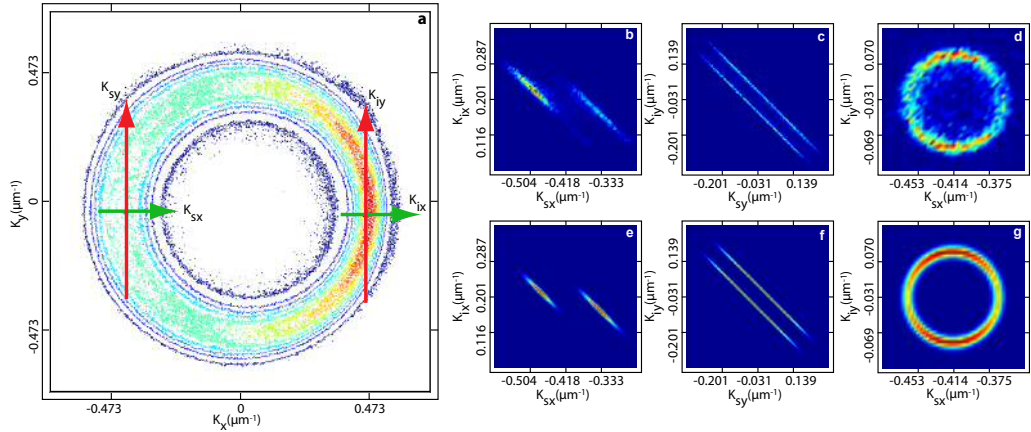
## 5. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Por otro lado, en la [Figura 5.11](#) se muestran las correlaciones para  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . En el panel (a) se muestra una gráfica en contornos del Espectro Angular en donde han quedado indicados un par de ejes coordenados cuyos orígenes representan las coordenadas donde se fijaron los detectores OFs y OFi, respectivamente. En (b), (c) y (d) se muestran resultados experimentales y en (e), (f) y (g) resultados de las simulaciones numéricas. Lo primero que podemos notar es que para las correlaciones  $k_{sx} - k_{ix}$  ([Figura 5.11](#) panel (a)) y  $k_{sy} - k_{iy}$  ([Figura 5.11](#) panel (b)), a diferencia del caso con bombeo Gaussiano en el que las correlaciones están formadas por una sola rama (en [\[70, 71\]](#) se muestran mediciones experimentales de correlaciones para SPDC con bombeo Gaussiano, puede consultar también los resultados de las simulaciones para el caso Gaussiano en la [Sección 4.6](#)), aquí se presenta una *correlación doble* en el sentido de que ahora la correlación está formada por dos ramas. Esta es, quizá la diferencia mas importante entre SPDC con bombeo Gaussiano y SPDC con bombeo BG0. Evidentemente, existe una diferencia entre la correlacion  $k_{sx} - k_{ix}$  y  $k_{sy} - k_{iy}$ : si se trazara una recta con pendiente de  $45^\circ$ , dicha recta cortaría al mismo tiempo la rama izquierda y la rama derecha en el caso de la correlación  $k_{sy} - k_{iy}$ , mientras que en el caso de  $k_{sx} - k_{ix}$  hay regiones del espacio en que la recta solamente cortaría a la rama izquierda o a la rama derecha, es decir, en  $k_{sx} - k_{ix}$  hay un desfase entre la rama izquierda y la derecha. Además, las dos ramas de  $k_{sy} - k_{iy}$  cubren un área mayor comparadas con las ramas  $k_{sx} - k_{ix}$ , esto se debe al hecho de que la dirección  $Y$  es tangente al Espectro Angular, mientras que la dirección  $X$  cruza radialmente al Espectro Angular. Por otro lado, en el caso de la correlación  $k_{sx} - k_{iy}$ , panel (d) y (g), podemos notar que tiene estructura idéntica a la del Espectro Angular Condicional. Este resultado es sorprendente pues una correlación es una medición no local (en el sentido de que se monitorean variables de entes distintos) que en este caso replica el resultado de una medición local (el CAS).



**Figura 5.11:** Correlaciones para  $k_{tp} = 0.0195\mu m^{-1}$ . En (a), el origen de los ejes coordenados indican las coordenadas fijas de OFs y OFi.  $k_{sx} - k_{ix}$ : (b) experimento y (e) simulación;  $k_{sy} - k_{iy}$ : (c) experimento y (f) simulación;  $k_{sx} - k_{iy}$ : (d) experimento y (g) simulación.

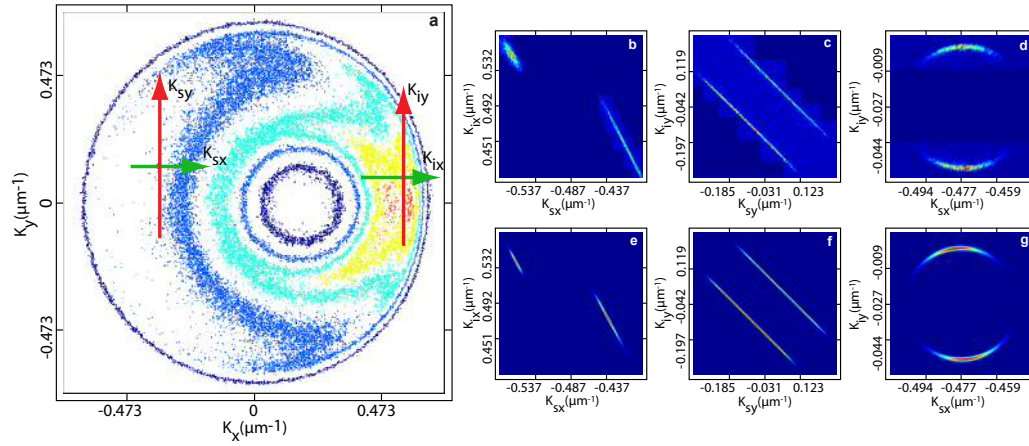
En las Figuras 5.12 y 5.13 se muestran las correlaciones para  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$  y  $k_{tp} = 0.150\mu m^{-1}$ , respectivamente. En forma similar, el par de ejes coordenados en el panel (a) indican los puntos fijos de OFs y OFi. Se puede notar que las correlaciones  $k_{sx} - k_{ix}$  y  $k_{sy} - k_{iy}$  presentan de nueva cuenta el patrón de *correlación doble*. De comparar las Figuras 5.11, 5.12 y 5.13 se deduce que a mayor magnitud de  $k_{tp}$ : (i) la separación entre las ramas de las correlaciones  $k_{sx} - k_{ix}$  y  $k_{sy} - k_{iy}$  es mayor, (ii) el panel (b) de la Figura 5.11 da la impresión de que la “longitud” de ambas ramas es la misma, pero si comparamos con el panel (b) de la Figura 5.13, la “longitud” de la rama izquierda es evidentemente menor que la “longitud” de la rama derecha, y en consecuencia, (iii) el traslape entre las dos ramas de la correlación  $k_{sx} - k_{ix}$  va desapareciendo. Nuevamente se pone de manifiesto el efecto de la anisotropía. Esta peculiar característica de *correlación doble* en SPDC con bombeo BG0 puede ser herramienta importante cuando se realiza ingeniería de estados cuánticos con parejas de fotones. Por ejemplo, el control de esta doble correlación puede ser de importancia cuando se aplica a una fuente de *ghost imaging* [72–75], que derivaría en una imagen doble en lugar de una sola imagen. Además, la separación entre las dos imágenes estaría dada por la separación entre las dos ramas.



**Figura 5.12:** Correlaciones para  $k_{tp} = 0.050\mu m^{-1}$ . En (a), el origen de los ejes coordenados indican las coordenadas fijas de OFs y OFi.  $k_{sx} - k_{ix}$ : (b) experimento y (e) simulación;  $k_{sy} - k_{iy}$ : (c) experimento y (f) simulación;  $k_{sx} - k_{iy}$ : (d) experimento y (g) simulación.

Por último, podemos observar que para las tres magnitudes de  $k_{tp}$ , la correlación  $k_{sx} - k_{iy}$  tiene la misma estructura que el Espectro Angular Condicional para la respectiva  $k_{tp}$ . No pasa por desapercibido notar la excelente correspondencia entre los resultados experimentales y las simulaciones numéricas.

## 5. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS



**Figura 5.13:** Correlaciones para  $k_{tp} = 0.150 \mu\text{m}^{-1}$ . En (a), el origen de los ejes coordenados indican las coordenadas fijas de OFs y OFi.  $k_{sx} - k_{ix}$ : (b) experimento y (e) simulación;  $k_{sy} - k_{iy}$ : (c) experimento y (f) simulación;  $k_{sx} - k_{iy}$ : (d) experimento y (g) simulación.

# Conclusiones

---

Las conclusiones se resumen en lo siguiente:

- Se realizaron simulaciones numéricas de las correlaciones espaciales tanto en el espacio de momento transversal como en el de posiciones para evaluar los criterios de enredamiento. Se diseñó un algoritmo para calcular de forma exacta las correlaciones en el espacio de posiciones (campo cercano). De este análisis se obtienen dos resultados preliminares importantes, el primero es que para el conjunto de valores  $\{L, \mathcal{W}_0\}$  explorados, ningún estado cuántico viola los criterios, concluyendo que todos los estados están entrelazados. Y el segundo, es que a menor longitud del cristal no lineal  $L$  y a mayor magnitud del radio en la cintura del haz  $\mathcal{W}_0$  los criterios alcanzan un valor máximo (sin satisfacer la desigualdad, claro está) y, además, sin importar el valor de  $\mathcal{W}_0$ , para cristales suficientemente largos los dos criterios llegan a un valor mínimo.

Como trabajo futuro, queda pendiente hacer el algoritmo mucho más eficiente para poder explorar una gama mas amplia de estados, y ver si es posible encontrar alguno que satisfaga la desigualdad, dando a entender que se ha hallado un estado no enredado. De poder lograr esto, se podría construir un nuevo criterio, que únicamente dependa de una longitud crítica  $L_c$  o de un cinturón crítico  $\mathcal{W}_0$ , tal que permita determinar de forma más directa si un estado de SPDC está entrelazado. Queda también pendiente hacer un estudio de los criterios usando haces estructurados, como por ejemplo haces Bessel-Gauss de orden cero, en lugar de sólo haces Gaussianos. Esto no fue posible implementarse en este trabajo ya que tan solo computar el algoritmo tiene un alto costo computacional, añadirle una función Bessel haría eterno el cálculo.

- Se diseñó una fuente de pareja de fotones bombeada con un haz Bessel-Gauss de orden cero con diferentes valores de vector de onda transversal  $k_{tp}$  que van desde el régimen paraxial hasta el no-paraxial. Dentro del régimen paraxial se encontró que el AS y el CAS se comportan como el caso de una fuente de SPDC bombeada con un haz puramente Gaussiano. Además, dentro de este régimen, los fotones heredan las propiedades del bombeo. En el régimen no-paraxial surgen efectos debidos a la distribución anisotrópica de los vectores de onda respecto del

## 6. CONCLUSIONES

---

eje óptico del cristal y al walk-off. La estructura del AS se transforma en una de doble cono, no concéntricos y tangentes, mientras que la forma del CAS va dependiendo de la posición azimutal del detector que condiciona. Respecto a las correlaciones espaciales, se obtuvieron resultados nunca antes reportados en la literatura, y que muestran una diferencia significativa respecto a las correlaciones con bombeo Gaussiano. En el régimen paraxial, las correlaciones tienen estructura de doble rama, mientras que en el caso Gaussiano se presenta una sola rama. Se observó que a medida que incrementa el valor de  $k_{tp}$ , la separación entre las ramas va aumentando y en el régimen no-paraxial se observa también que, en el caso de  $k_{sx} - k_{ix}$  una de las ramas se vuelve mas larga que la otra. De las correlaciones  $k_{sx} - k_{iy}$  se obtiene una réplica no local del CAS. La aparición de doble rama en las correlaciones puede tener aplicación importante cuando se consideran experimentos de ghost imaging.

Es oportuno mencionar que los resultados experimentales de este trabajo fueron publicados en la revista *Physical Review A* bajo el título “*Double transverse wave-vector correlations in photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion pumped by Bessel-Gauss beams*”. En [76] se encuentran los datos para acceder al artículo completo.

Este trabajo provee un mejor entendimiento a nivel espacial del comportamiento de la pareja de fotones. Estos resultados pueden ser de gran provecho cuando se considere la implementación de estos sistemas con objetivos en información cuántica, computación cuántica y encriptación cuántica

---

## Teorema del desplazamiento (Shift Theorem)

---

Sean  $\omega$  y  $t$  un par de variables conjugadas tal que

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{A.1})$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (\text{A.2})$$

forman una pareja de Fourier  $f(\omega) \Leftrightarrow F(t)$ , es decir,  $F(t)$  es la transformada de Fourier de  $f(\omega)$ :

$$F(t) = \mathcal{F}\{f(\omega)\} \quad (\text{A.3})$$

y

$$f(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{F(t)\} \quad (\text{A.4})$$

entonces se satisface que

$$\mathcal{F}\{f(\omega - \omega_0)\} = \exp(i\omega_0 t) \mathcal{F}\{f(\omega)\} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{F}\{F(t - t_0)\} = \exp(-i\omega t_0) \mathcal{F}\{F(t)\} \quad (\text{A.6})$$

a esta propiedad se le conoce como **Shift Theorem** [77].



## Propiedades de los operadores de creación y aniquilación

---

De [38], [40] tenemos que las relaciones de conmutación de los operadores de creación  $\hat{a}^\dagger$  y aniquilación  $\hat{a}$  están dadas por

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}_{\mu,\lambda}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_{\nu,\lambda'}) \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}^{(3)} \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{B.1})$$

$$\left[ \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\mu,\lambda}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_{\nu,\lambda'}) \right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}_{\mu,\lambda}), \hat{a}(\vec{k}'_{\nu,\lambda'}) \right] = 0 \quad (\text{B.3})$$

donde  $\mu, \nu = \{s, i\}$  y  $\lambda, \lambda'$  son para etiquetar los distintos modos de polarización.

Se define al operador de número de fotones como

$$\hat{n}(\vec{k}_{\mu,\lambda}) = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\mu,\lambda}) \hat{a}(\vec{k}_{\mu,\lambda}) \quad (\text{B.4})$$

no es difícil demostrar que  $\hat{n}(\cdot)$  es un operador Hermítico. Sea  $|n_{\vec{k}_\mu}\rangle$  un estado de Fock, entonces

$$\hat{n}(\vec{k}_{\mu,\lambda}) |n_{\vec{k}_\mu}\rangle = n_{\vec{k}_\mu} |n_{\vec{k}_\mu}\rangle \quad (\text{B.5})$$

es decir, los estados de Fock son eigenestados del operador de número de fotones.

Además,

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\mu,\lambda}) |n_{\vec{k}_\mu}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_\mu,\lambda} + 1} |n_{\vec{k}_\mu} + 1\rangle \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{a}(\vec{k}_{\mu,\lambda}) |n_{\vec{k}_\mu}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_\mu,\lambda}} |n_{\vec{k}_\mu} - 1\rangle \quad (\text{B.7})$$

$$\hat{a}(\vec{k}_{\mu,\lambda}) |0\rangle = 0 \quad (\text{B.8})$$

Como  $\hat{n}(\cdot)$  es Hermítico, los números  $n_{\vec{k}_{\mu,\lambda}}$  son reales y además positivos (su cota inferior es 0, Ec. (B.8)). Se deduce también que el espectro de  $\hat{n}(\cdot)$  está conformado por números enteros.





## Cambio de variable

---

En este apéndice se describen los jacobianos a tomarse en cuenta para pasar del sistema de coordenadas  $(k_x, k_y, k_z)$  a los sistemas de coordenadas  $(k_x, k_y, k)$  y  $(k_x, k_y, \omega)$ .

- $(k_x, k_y, k_z) \longrightarrow (k_x, k_y, k)$

En este caso del cambio de variables está dado por

$$\begin{aligned} k_x &= k_x \\ k_y &= k_y \\ k_z &= \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \end{aligned} \tag{C.1}$$

donde  $k = |\vec{k}|$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_z}{\partial k_x} &= -\frac{k_x}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} = -\frac{k_x}{k_z} \\ \frac{\partial k_z}{\partial k_y} &= -\frac{k_y}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} = -\frac{k_y}{k_z} \\ \frac{\partial k_z}{\partial k} &= \frac{k}{k_z} \end{aligned} \tag{C.2}$$

De estas relaciones se tiene que el jacobiano de la transformación está dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial k_x} & \frac{\partial k_x}{\partial k_y} & \frac{\partial k_x}{\partial k} \\ \frac{\partial k_y}{\partial k_x} & \frac{\partial k_y}{\partial k_y} & \frac{\partial k_y}{\partial k} \\ \frac{\partial k_z}{\partial k_x} & \frac{\partial k_z}{\partial k_y} & \frac{\partial k_z}{\partial k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_x}{k_z} & -\frac{k_y}{k_z} & \frac{k}{k_z} \end{vmatrix} = \frac{k}{k_z} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \tag{C.3}$$

de modo que el cambio de coordenadas queda como

$$dk_x dk_y dk_z \longrightarrow \frac{k}{k_z} dk_x dk_y dk = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y dk \tag{C.4}$$

## C. CAMBIO DE VARIABLE

---

- $(k_x, k_y, k_z) \longrightarrow (k_x, k_y, \omega)$

De la relación de dispersión

$$k = n_o(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (\text{C.5})$$

se tiene que

$$dk = \frac{dk}{d\omega} d\omega = \frac{1}{c} \left[ \frac{dn_o}{d\omega} \omega + n_o(\omega) \right] d\omega \quad (\text{C.6})$$

Como

$$n_o(\lambda) = \sqrt{A + \frac{B}{\lambda^2 + C} + D\lambda^2} \quad (\text{C.7})$$

Dado que  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dn_o}{d\omega} &= \frac{dn_o}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{dn_o}{d\lambda} \\ &= -\frac{2\pi c}{\omega^2} \left[ D\lambda - \frac{B\lambda}{(\lambda^2 + C)^2} \right] \frac{1}{n_o(\lambda)} \\ &= -\frac{2\pi c}{\omega^2} u(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

donde he definido

$$u(\lambda) = \left[ D\lambda - \frac{B\lambda}{(\lambda^2 + C)^2} \right] \frac{1}{n_o(\lambda)} \quad (\text{C.9})$$

De modo que

$$\frac{dk}{d\omega} = -\frac{2\pi}{\omega} u(\lambda) + \frac{n_o(\omega)}{c} \quad (\text{C.10})$$

Finalmente, la transformación de coordenadas queda como

$$\begin{aligned} dk_x dk_y dk_z &\longrightarrow \frac{k(\omega)}{\sqrt{k^2(\omega) - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y dk \\ &= \frac{k(\omega)}{\sqrt{k^2(\omega) - k_x^2 - k_y^2}} \frac{dk}{d\omega} dk_x dk_y d\omega \\ &= \frac{k(\omega)}{\sqrt{k^2(\omega) - k_x^2 - k_y^2}} \left[ -\frac{2\pi}{\omega} u(\lambda) + \frac{n_o(\omega)}{c} \right] dk_x dk_y d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

---

A lo largo del texto se hace uso de la siguiente notación para los jacobianos

$$\mathbf{J}_k = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \quad (\text{C.12})$$

y

$$\mathbf{J}_\omega = -\frac{2\pi}{\omega} \mathbf{u}(\lambda) + \frac{n_o(\omega)}{c} \quad (\text{C.13})$$

Cuando sea necesario, a lo largo del texto se empleará la notación  $\mathbf{A} = \mathbf{J}_k \mathbf{J}_\omega$ .



# Bibliografía

---

- [1] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, and R. W. Boyd, “Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 210403, May 2004. [1](#)
- [2] V. Händchen, T. Eberle, S. Steinlechner, A. Sambrowski, T. Franz, R. F. Werner, and R. Schnabel, “Observation of one-way einstein-podolsky-rosen steering,” *Nature Photonics*, vol. 6, no. 9, pp. 596–599, 2012. [33](#)
- [3] K. Sun, X.-J. Ye, J.-S. Xu, X.-Y. Xu, J.-S. Tang, Y.-C. Wu, J.-L. Chen, C.-F. Li, and G.-C. Guo, “Experimental quantification of asymmetric einstein-podolsky-rosen steering,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 160404, Apr 2016.
- [4] S. Wollmann, N. Walk, A. J. Bennet, H. M. Wiseman, and G. J. Pryde, “Observation of genuine one-way einstein-podolsky-rosen steering,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 160403, Apr 2016. [1](#), [33](#)
- [5] Z. Bouchal, J. Wagner, and M. Chlup, “Self-reconstruction of a distorted non-diffracting beam,” *Optics Communications*, vol. 151, no. 4, pp. 207 – 211, 1998. [2](#)
- [6] Y. Gu and G. Gbur, “Scintillation of pseudo-bessel correlated beams in atmospheric turbulence,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 27, pp. 2621–2629, Dec 2010.
- [7] M. McLaren, T. Mhlanga, M. J. Padgett, F. S. Roux, and A. Forbes, “Self-healing of quantum entanglement after an obstruction,” *Nat Commun*, vol. 5, 02 2014. [2](#), [60](#)
- [8] X. Chu, Q. Sun, J. Wang, P. Lü, W. Xie, and X. Xu, “Generating a bessel-gaussian beam for the application in optical engineering,” *Scientific reports*, vol. 5, 2015. [2](#)
- [9] M. Albani, S. C. Pavone, M. Casaletti, and M. Ettore, “Generation of non-diffractive bessel beams by inward cylindrical traveling wave aperture distributions,” *Opt. Express*, vol. 22, pp. 18354–18364, Jul 2014. [2](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [10] W. Nelson, J. P. Palastro, C. C. Davis, and P. Sprangle, “Propagation of bessel and airy beams through atmospheric turbulence,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 31, pp. 603–609, Mar 2014. [2](#)
- [11] S. Li and J. Wang, “Adaptive free-space optical communications through turbulence using self-healing bessel beams,” *Scientific Reports*, vol. 7, 2017.
- [12] O. J. Farías, V. D’Ambrosio, C. Taballione, F. Bisesto, S. Slussarenko, L. Aolita, L. Marrucci, S. P. Walborn, and F. Sciarrino, “Resilience of hybrid optical angular momentum qubits to turbulence,” *Scientific reports*, vol. 5, 2015. [2](#)
- [13] Y. Arita, M. Chen, E. M. Wright, and K. Dholakia, “Dynamics of a levitated microparticle in vacuum trapped by a perfect vortex beam: three-dimensional motion around a complex optical potential,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 34, pp. C14–C19, Jun 2017. [2](#)
- [14] G. Milne, K. Dholakia, D. McGloin, K. Volke-Sepulveda, and P. Zemánek, “Transverse particle dynamics in a bessel beam,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 13972–13987, Oct 2007.
- [15] G. S. Sokolovskii, V. V. Dudelev, S. N. Losev, K. K. Soboleva, A. G. Deryagin, V. I. Kuchinskii, W. Sibbett, and E. U. Rafailov, “Optical trapping with bessel beams generated from semiconductor lasers,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 572, no. 1, p. 012039, 2014.
- [16] Y. A. Ayala, A. V. Arzola, and K. Volke-Sepúlveda, “Comparative study of optical levitation traps: focused bessel beam versus gaussian beams,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 33, pp. 1060–1067, Jun 2016. [2](#)
- [17] V. Vicuña-Hernández, H. Cruz-Ramírez, R. Ramírez-Alarcón, and A. B. U’Ren, “Classical to quantum transfer of optical vortices,” *Opt. Express*, vol. 22, pp. 20027–20037, Aug 2014. [2](#), [60](#), [70](#)
- [18] R. W. Boyd, *Nonlinear optics*. Academic press, 2008. [3](#), [4](#), [5](#), [11](#)
- [19] N. Bloembergen, “Conservation laws in nonlinear optics,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 70, pp. 1429–1436, Dec 1980. [4](#)
- [20] K. Itoh, K. Isobe, and W. Watanabe, *Functional Imaging by Controlled Nonlinear Optical Phenomena*. John Wiley & Sons, 2013. [4](#)
- [21] M. Ghotbi and M. Ebrahim-Zadeh, “Optical second harmonic generation properties of bib3o6,” *Opt. Express*, vol. 12, pp. 6002–6019, Nov 2004. [4](#)
- [22] M. V. Pack, D. J. Armstrong, A. V. Smith, and M. E. Amiet, “Second harmonic generation with focused beams in a pair of walkoff-compensating crystals,” *Optics Communications*, vol. 221, no. 1, pp. 211 – 221, 2003. [4](#)

- 
- [23] D. J. Berkeland, F. C. Cruz, and J. C. Bergquist, “Sum-frequency generation of continuous-wave light at 194 nm,” *Appl. Opt.*, vol. 36, pp. 4159–4162, Jun 1997. [4](#)
- [24] A. Borsutzky, R. Brüngrer, C. Huang, and R. Wallenstein, “Harmonic and sum-frequency generation of pulsed laser radiation in bbo, lbo, and kdp,” *Applied Physics B: Lasers and Optics*, vol. 52, no. 1, pp. 55–62, 1991.
- [25] E. Herault, F. Balembois, and P. Georges, “491 nm generation by sum-frequency mixing of diode pumped neodymium lasers,” *Opt. Express*, vol. 13, pp. 5653–5661, Jul 2005.
- [26] W. Wang and M. Ohtsu, “Frequency-tunable sum- and difference-frequency generation by using two diode lasers in a ktp crystal,” *Optics Communications*, vol. 102, no. 3, pp. 304 – 308, 1993. [4](#)
- [27] S. Ashworth, C. Iaconis, O. Votava, and E. Riedle, “High-efficiency, high-power difference-frequency generation of 0.9–1.5 $\mu\text{m}$  light in bbo,” *Optics Communications*, vol. 97, no. 1, pp. 109 – 114, 1993.
- [28] G. C. Bhar, A. M. Rudra, A. K. Chaudhary, T. Sasaki, and Y. Mori, “Highly efficient difference-frequency generation in ktp,” *Applied Physics B*, vol. 63, no. 2, pp. 141–144, 1996. [4](#)
- [29] K. Kato, “Second-harmonic generation to 2048 a beta-ba<sub>2</sub>o<sub>4</sub>,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 22, pp. 1013–1014, Jul 1986. [7](#)
- [30] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. CUP Archive, 2000. [7](#), [9](#)
- [31] G. D. Boyd, A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and D. A. Kleinman, “Second-harmonic generation of light with double refraction,” *Phys. Rev.*, vol. 137, pp. A1305–A1320, Feb 1965. [8](#)
- [32] V. G. Dmitriev, G. G. Gurzadyan, and D. N. Nikogosyan, *Handbook of nonlinear optical crystals*, vol. 64. Springer, 2013. [8](#)
- [33] Y. Jeronimo-Moreno and R. Jáuregui, “Type i parametric down conversion of highly focused gaussian beams in finite length crystals,” *Journal of Optics*, vol. 16, no. 6, p. 065201, 2014. [9](#), [10](#), [21](#), [68](#)
- [34] A. Moura, W. Nogueira, S. Walborn, and C. Monken, “Transverse spatial and frequency properties of two-photon states generated by spontaneous parametric down-conversion,” *arXiv:0806.4624*, 2008. [10](#)
- [35] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999. [10](#)
- [36] S. Walborn, C. Monken, S. Pádua, and P. S. Ribeiro, “Spatial correlations in parametric down-conversion,” *Physics Reports*, vol. 495, no. 4–5, pp. 87 – 139, 2010. [10](#), [21](#)
-



- [37] C. K. Hong and L. Mandel, “Theory of parametric frequency down conversion of light,” *Phys. Rev. A*, vol. 31, pp. 2409–2418, Apr 1985. [11](#), [12](#), [14](#)
- [38] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995. [12](#), [17](#), [79](#)
- [39] J. Schneeloch and J. C. Howell, “Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone,” *Journal of Optics*, vol. 18, no. 5, p. 053501, 2016. [11](#), [12](#), [49](#)
- [40] R. Loudon, *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000. [11](#), [79](#)
- [41] J. C. Gutiérrez-Vega and M. A. Bandres, “Helmholtz–gauss waves,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 289–298, Feb 2005. [13](#), [16](#), [20](#)
- [42] L. E. Vicent, A. B. U’Ren, R. Rangarajan, C. I. Osorio, J. P. Torres, L. Zhang, and I. A. Walmsley, “Design of bright, fiber-coupled and fully factorable photon pair sources,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 9, p. 093027, 2010. [14](#)
- [43] R. Ramírez-Alarcón, H. Cruz-Ramírez, and A. B. U’Ren, “Effects of crystal length on the angular spectrum of spontaneous parametric downconversion photon pairs,” *Laser Physics*, vol. 23, no. 5, p. 055204, 2013. [21](#), [25](#), [49](#), [68](#), [69](#)
- [44] N. Brunner, “Quantum mechanics: Steered towards non-locality,” *Nature physics*, vol. 6, pp. 842–843, 2010. [29](#)
- [45] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Phys. Rev.*, vol. 47, pp. 777–780, May 1935. [29](#), [30](#), [33](#)
- [46] E. Schrödinger, “Discussion of probability relations between separated systems,” in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 31, pp. 555–563, Cambridge Univ Press, 1935. [29](#), [31](#), [33](#)
- [47] J. S. Bell, “On the einstein podolsky rosen paradox,” *Physics*, vol. 1, pp. 195–200, 1964. [29](#), [32](#), [33](#)
- [48] A. Aspect, “Quantum mechanics: to be or not to be local,” *Nature*, vol. 446, no. 7138, pp. 866–867, 2007. [30](#)
- [49] H. M. Wiseman, S. J. Jones, and A. C. Doherty, “Steering, entanglement, nonlocality, and the einstein-podolsky-rosen paradox,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 140402, Apr 2007. [33](#), [34](#)
- [50] M. T. Quintino, T. Vértesi, D. Cavalcanti, R. Augusiak, M. Demianowicz, A. Acín, and N. Brunner, “Inequivalence of entanglement, steering, and bell nonlocality for general measurements,” *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 032107, Sep 2015. [33](#), [34](#)

- 
- [51] S. L. W. Midgley, A. J. Ferris, and M. K. Olsen, “Asymmetric gaussian steering: When alice and bob disagree,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 022101, Feb 2010. [33](#)
- [52] J. Bowles, T. Vértesi, M. T. Quintino, and N. Brunner, “One-way einstein-podolsky-rosen steering,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 200402, May 2014.
- [53] S. Armstrong, M. Wang, R. Y. Teh, Q. Gong, Q. He, J. Janousek, H.-A. Bachor, M. D. Reid, and P. K. Lam, “Multipartite einstein-podolsky-rosen steering and genuine tripartite entanglement with optical networks,” *Nature Physics*, 2015. [33](#)
- [54] S. J. Jones, H. M. Wiseman, and A. C. Doherty, “Entanglement, einstein-podolsky-rosen correlations, bell nonlocality, and steering,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 052116, Nov 2007. [34](#)
- [55] M. D. Reid, “Demonstration of the einstein-podolsky-rosen paradox using nondegenerate parametric amplification,” *Phys. Rev. A*, vol. 40, pp. 913–923, Jul 1989. [34](#)
- [56] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, “Inseparability criterion for continuous variable systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 2722–2725, Mar 2000. [34](#)
- [57] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, and P. Tombesi, “Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 120401, Mar 2002. [34](#)
- [58] E. G. Cavalcanti, S. J. Jones, H. M. Wiseman, and M. D. Reid, “Experimental criteria for steering and the einstein-podolsky-rosen paradox,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 032112, Sep 2009. [34](#)
- [59] M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. A. Bachor, U. L. Andersen, and G. Leuchs, “*Colloquium* : The einstein-podolsky-rosen paradox: From concepts to applications,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 1727–1751, Dec 2009. [35](#)
- [60] B. E. Saleh, M. C. Teich, and B. E. Saleh, *Fundamentals of photonics*, vol. 22. Wiley New York, 1991. [45](#)
- [61] M. V. Fedorov, Y. M. Mikhailova, and P. A. Volkov, “Gaussian modelling and schmidt modes of spdc biphoton states,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 42, no. 17, p. 175503, 2009. [49](#)
- [62] K. W. Chan, J. P. Torres, and J. H. Eberly, “Transverse entanglement migration in hilbert space,” *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 050101, May 2007.
- [63] A. Cavanna, F. Just, P. R. Sharapova, M. Taheri, G. Leuchs, and M. V. Chekhova, “Tunable optical parametric generator based on the pump spatial walk-off,” *Opt. Lett.*, vol. 41, pp. 646–649, Feb 2016. [49](#)
-

- [64] J. Arlt and K. Dholakia, “Generation of high-order bessel beams by use of an axicon,” *Optics Communications*, vol. 177, no. 1–6, pp. 297 – 301, 2000. [60](#)
- [65] H. Cruz-Ramírez, R. Ramírez-Alarcón, F. J. Morelos, P. A. Quinto-Su, J. C. Gutiérrez-Vega, and A. B. U’Ren, “Observation of non-diffracting behavior at the single-photon level,” *Opt. Express*, vol. 20, pp. 29761–29768, Dec 2012. [60](#)
- [66] R. Ramírez-Alarcón, V. Vicuña-Hernández, H. Cruz-Ramírez, and A. B. U’Ren, “Transverse amplitude transfer experiments based on the process of spontaneous parametric downconversion,” *Physica Scripta*, vol. 90, no. 6, p. 068013, 2015. [60](#)
- [67] D. McGloin and K. Dholakia, “Bessel beams: Diffraction in a new light,” *Contemporary Physics*, vol. 46, no. 1, pp. 15–28, 2005. [60](#)
- [68] B. E. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of photonics*, vol. 22. Wiley New York, 1991. [64](#)
- [69] Y. Jerónimo-Moreno and R. Jáuregui, “On-demand generation of propagation-invariant photons with orbital angular momentum,” *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 013833, Jul 2014. [68](#)
- [70] M. P. Edgar, D. S. Tasca, F. Izdebski, R. E. Warburton, J. Leach, M. Agnew, G. S. Buller, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, “Imaging high-dimensional spatial entanglement with a camera,” *Nat Commun*, vol. 3, p. 984, 08 2012. [72](#)
- [71] P.-A. Moreau, F. Devaux, and E. Lantz, “Einstein-podolsky-rosen paradox in twin images,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 160401, Oct 2014. [72](#)
- [72] D. S. Tasca, R. S. Aspden, P. A. Morris, G. Anderson, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, “The influence of non-imaging detector design on heralded ghost-imaging and ghost-diffraction examined using a triggered iccd camera,” *Opt. Express*, vol. 21, pp. 30460–30473, Dec 2013. [73](#)
- [73] R. S. Aspden, D. S. Tasca, A. Forbes, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, “Experimental demonstration of klyshko’s advanced-wave picture using a coincidence-count based, camera-enabled imaging system,” *Journal of Modern Optics*, vol. 61, no. 7, pp. 547–551, 2014.
- [74] R. S. Aspden, D. S. Tasca, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, “Epr-based ghost imaging using a single-photon-sensitive camera,” *New Journal of Physics*, vol. 15, no. 7, p. 073032, 2013.
- [75] P. A. Morris, R. S. Aspden, J. E. C. Bell, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, “Imaging with a small number of photons,” *Nat Commun*, vol. 6, 01 2015. [73](#)

- [76] V. Vicuña Hernández, J. T. Santiago, Y. Jerónimo-Moreno, R. Ramírez-Alarcón, H. Cruz-Ramírez, A. B. U'Ren, and R. Jáuregui-Renaud, “Double transverse wave-vector correlations in photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion pumped by bessel-gauss beams,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 063863, Dec 2016. [76](#)
- [77] I. R. Kenyon, *The light fantastic: a modern introduction to classical and quantum optics*. Oxford University Press, USA, 2008. [77](#)