



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**TESELACIONES POLITOPALES REGULARES
DEL ESPACIO HIPERBÓLICO**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:**

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

RICARDO CANDÁS VEGA



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. JAVIER BRACHO CARPIZO
2017**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

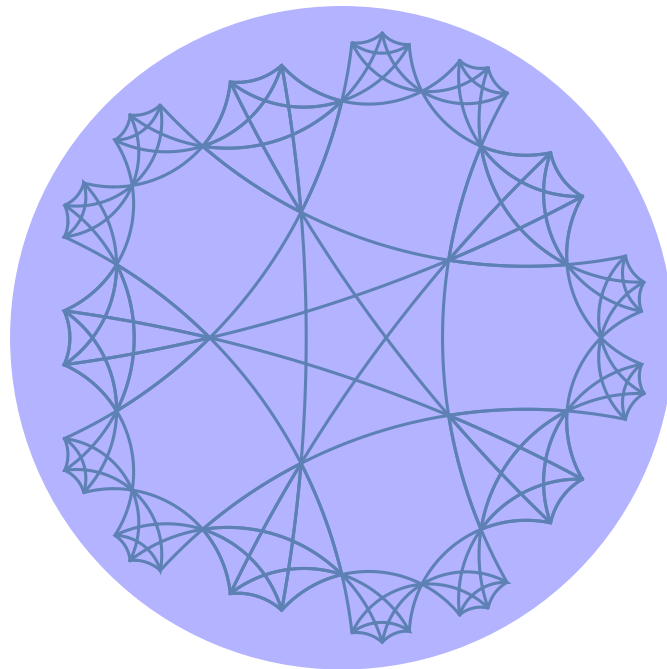
DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Ricardo Candás Vega
Tesis de licenciatura

TESELACIONES POLITOPALES REGULARES DEL ESPACIO
HIPERBÓLICO



Introducción

El objetivo de la presente tesis es la ilustración de las primeras partes del artículo de H. S. M. Coxeter, *Regular Honeycombs in Hyperbolic Space* [C1], con imágenes tridimensionales por computadora.

La línea de pensamiento que se presenta para llegar a dichas ilustraciones es la siguiente: los primeros dos

capítulos de este trabajo son un compendio de fragmentos traducidos de los textos originales de H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, [C2]. (Secciones: 1.1, 1.2, 1.7, 1.6, 2.1, 1.3, 2.2, 1.8, 2.6, 2.4, 7.4, 3.2, 3.3, 3.4 y 4.1), con ilustraciones dinámicas, que ayudan al entendimiento de los textos y a la formalidad matemática. Para los capítulos tres y cuatro la información es la recopilación de generalizaciones de fragmentos de J. Bracho, *Introducción analítica a las geometrías*, [B], (Capítulos: VI y VIII), junto con algunos fragmentos de A. I. Ramírez González, *Invitación a las geometrías no euclidianas* [R] y el capítulo 1 de la Tesis Doctoral de D. Alatorre Guzmán, *Espacios de teselaciones y el toro irracional; con sus respectivas ilustraciones dinámicas* [A]. Por último, el capítulo 5 escrito como la conclusión de la línea de pensamiento, es la ilustración de la sección 3 del artículo de H. S. M. Coxeter Regular [C1]. De esta manera se puede pensar románticamente que la estructura del trabajo es una teselación en sí, formada por fragmentos de diferentes textos y reacomodados para la comprensión del último capítulo.

Los conceptos de la línea de pensamiento están presentados constructivamente, en un tono divulgativo y educativo, con la formalidad en las ilustraciones.

En el primer capítulo partiendo de las ideas de punto y línea, construyo los conceptos de polígono, poliedro, regularidad, figura del vértice, dualidad y politopo, mediante la notación de Schläfli.

En el segundo capítulo dando una idea de lo que son las teselaciones, defino constructivamente lo que son las transformaciones, los grupos y las simetrías, para finalizar aplicando dichos conceptos a las teselaciones y mostrar las restricciones para el caso regular, del plano y el espacio euclidiano, y el del espacio esférico, mostrando la idea del concepto de capa.

En el tercer capítulo, doy una introducción a las geometrías no-euclidianas, seguido de una breve presentación de la geometría proyectiva, para utilizar la generalización de esos conceptos en el siguiente capítulo y así construir el modelo de la esfera de Klein. Salto a una narrativa histórica del proceso de construcción de los modelos de la geometría hiperbólica plana, definiendo los planos en los diferentes modelos, para terminar mudando los conceptos de polígonos regulares y las teselaciones en esta geometría.

En el cuarto capítulo defino el espacio hiperbólico en los modelos de la esfera de Klein y la de Poincaré, defino la transformación que utilizo para teselar (la reflexión) y la que manda un modelo en el otro, y para terminar defino los horociclos, su generalización en tres dimensiones y los poliedros regulares que abitan en esta.

En el último capítulo se clasifican las teselaciones en tres tipos:

Esféricas-esféricas, las cuales su faceta inicial es un poliedro compacto en el espacio, equivalente a una teselación esférica.

Esféricas-planas, las cuales sus facetas iniciales tienen todos sus vértices en el infinito, haciendo que sus respectivos duales son paracompactos en el espacio y tengan la estructura combinatoria de las teselaciones regulares del plano euclidiano.

Planas-planas, las cuales su faceta inicial y sus respectivas duales sean paracompactas en el espacio, dándoles la estructura combinatoria de las teselaciones regulares del plano euclidiano.

La tesis se presenta en un formato poco convencional con imágenes en formato CDF (formato de documento computable), para la posible interacción con dichas ilustraciones, aunque también se realizó en formato PDF para impresión.

Índice General

Índice General	II
Introducción	III
1 Polítopos	
1.1) Entes esenciales e inadvertidos	1
1.2) p -gonos	2
1.3) Poliedros y Mapas	5
1.4) Característica de Euler	7
1.5) Regularidad	7
Los sólidos Platónicos	11
1.6) Polítopos	12
2 Transformaciones y grupos	
2.1) Teselaciones	15
2.2) Transformaciones	16
2.3) Grupos de transformaciones	19
2.4) Simetrías	20
2.5) Las teselaciones euclidianas	
planas regulares	21
2.6) Los Paneles	23
3 Paradigmas No Euclidianos	
3.1) El Quinto	25
3.2) Geometría Proyectiva	26
3.3) Geometría Hiperbólica	28
4 Espacio Hiperbólico	
4.1) Los cimientos del espacio	37
4.2) Modelo de Klein	38
4.3) Modelo de Poincaré	41
4.4) Las transformaciones	43
4.5) Andamios proyectivos	43
4.6) Polígonos y poliedros horocíclicos	49
5 Teselaciones regulares del espacio hiperbólico	
5.1) La restricción	55
5.2) Esférico-esférico	56
5.3) Esféricos-planos	67
5.4) Planos-planos	83
5.5) Ideario	87
Anexo de imágenes	88

Agradecimientos:

Al Dr. Javier Bracho, no solo por darme la oportunidad de trabajar junto a él en esta tesis ayudarme con las imágenes y con los textos, si no por ser un maestro en todo el sentido de la palabra.

A Ricardo Candás Sordo (1963-2012) quien me enseñó a luchar y me dijo “*El que trabaja infatigablemente sobrevive al naufragio*”.

Investigación realizada gracias al programa de apoyo a proyectos de investigación e innovación tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN101615 *Poliedros altamente simétricos en espacios de dimensión 3 y 4*. Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida

“ There are three ways of approaching the Euclidean geometry of four or more dimensions: the axiomatic, the algebraic (or analytical), and the intuitive. The first two have been admirably expounded by Sommerville and Neville, and we shall presuppose some familiarity with such treatises. ”

(Coxeter, [C2], p 118)

1

Politopos

1.1) Entes esenciales e inadvertidos

Aunque los conceptos de punto y línea son mucho más complejos y profundos de lo que sus respectivas representaciones puedan llegar a serlo; dichos conceptos son y han sido, elementales en cualquier tratado geométrico, por lo que los considero el punto de partida fundamental para la comprensión de la teoría.

Quizás por formar parte de esa base, o por su muy temprana aparición en el proceso de enseñanza, muchas veces pasan inadvertidos suponiendo así que al ser elementales la complejidad que los envuelve es nula. Para comprender un poco mejor la existencia de su complejidad y empezar a alimentar nuestra intuición sobre dichos conceptos presento a continuación las ideas y definiciones que el artista ruso Vasili Kandinsky propuso sobre dichos entes geométricos:

*“El punto geométrico es invisible de modo que **lo debemos definir como un ente abstracto.**[...]*

[...] El punto geométrico invisible deviene aquí material, adquiere necesariamente cierto tamaño, recubre una determinada superficie. Además consta de ciertos límites que lo aíslan de aquello que lo rodea. Todo esto se sobre entiende y parece en principio muy sencillo[...]

*El punto se instala sobre la superficie y se afirma indefinidamente. De tal modo representa **la afirmación interna más permanente y más escueta**, que surge con brevedad, firmeza y rapidez.*

La línea geométrica es un ente invisible. Es la traza que deja el punto al moverse y es por lo tanto su producto. Surge del movimiento al destruirse el re-poso tamaño del punto. Dando un salto de lo estético a lo dinámico.[...]

[K] (p.21-27)

***Cuando una fuerza procede del exterior** desplaza al punto en cualquier dirección, se genera el primer tipo de línea; la dirección permanece invariable y la línea tiende a prolongarse indefinidamente.*

*Se trata de la recta, que en su tensión constituye **la forma más simple de la infinita posibilidad de movimiento.**"*

[K] (p.49)

Aunque estos primeros acercamientos a dichos conceptos si bien están permeados de un tono más filosófico y artístico que matemático creo que es importante tomarlos en cuenta; en primer lugar, pues al decir la palabra matemáticas la mayoría de la gente sale despavorida, haciendo que la comprensión de las ideas que se desean transmitir sea imposible. En segundo lugar, para darnos cuenta de que la complejidad que permean a estos entes (junto con estos) no se queda estancada en un área de estudio, sino que traspasa a diferentes niveles de nuestra vida y de su estudio.

Y por último para tratar de entender y quizá llegar a compartir la necesidad de personas como Euclides, Riemann, Poicare, Hilbert y Coxeter, de entre muchos otros, de explicar esa inmensidad donde nos encontramos a la que llamamos realidad. Pues si recordamos que la palabra Geometría viene de las palabras griegas γεωμετρία de γῆ (ge), 'tierra', y μετρία (metría), 'medida'; podemos pensar que los que han dedicado su vida al estudio de esta rama de las matemáticas en el fondo lo que han buscado es el entendimiento del "sitio" y "la estructura" donde se encuentra dicha "realidad"

mediante la ciencia de medir. Y aunque no podemos discernir si la matemática es el lenguaje de la naturaleza (o de algún dios) con el cual escribió esta realidad; o si es más bien un lenguaje entre nosotros y todo lo que nos rodea y permea ("la realidad"), el cual hemos formalizado partiendo de la sensorialización de diferentes patrones; lo que si podemos hacer es ver que sea cual sea la opción correcta, se trata de algo que hay que darle la importancia que merece y entender a los que se han aventurado a buscar en su camino comprender esta ya muy mencionada realidad.

Quizá Euclides al darse cuenta de esto intentó buscar la esencia de los entes geométricos, que ya representaban mucho más que simples figuras. En esa búsqueda Euclides caracteriza los elementos esenciales que le dan estructura a esos entes definiendo así el punto como *aquello que no tiene partes*, y la línea como una longitud sin anchura, donde sus extremidades son puntos. Partiendo de estos conceptos propone los 5 axiomas que le dan fundamento a toda la teoría, estos son:

- I) *Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.*
- II) *Cualquier segmento se puede prolongar de manera continua en cualquier sentido.*
- III) *Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.*
- IV) *Todos los ángulos rectos son congruentes.*
- V) *Dado un punto y una recta que no lo contenga existe una única recta que pasa por ese punto y nunca toca a dicha recta.*

Con lo anterior podemos tener una intuición más completa y clara de lo que son estos entes esenciales y su comportamiento e importancia; pero existe algo más que me gustaría hacer notar, pues nos servirá para poder ampliar nuestra intuición geométrica y para terminar de comprender la complejidad elemental de estos entes.

Pensemos en una hoja de papel, y queremos dibujar algo dentro de ésta de manera continua. Para que esto ocurra necesitamos que al poner la pluma con tinta sobre el papel y mover nuestra mano, no se separe la pluma de este, pues obviamente si lo hacemos dejaríamos de dibujar. Pensemos así en el papel, como el espacio de dos dimensiones y todos sus habitantes como las figuras que podemos dibujar sin despegar la pluma del papel: cuadrados, triángulos, puntos y líneas de entre muchas otras; dichos habitantes solo pueden moverse sobre el papel pues si queremos dibujarlos fuera tendríamos que levantar la pluma.

¿Qué pasa si en lugar de esa hoja de papel solo tenemos una tira tan delgada que si intentamos de dibujar en ella solo se dibujaría lo que entendemos por una línea (ahora que ya tenemos más intuición)?, entonces la pluma para poder dibujar algo solo podría hacer moviéndose en dos direcciones dándonos rectas; o pararse y no moverse dándonos puntos. Pues al quitarle esta libertad al plano, para transformarla en esta tira podemos pensar que le estamos quitando una dimensión. Entonces la línea no solo va a ser un elemento de ese espacio y de los de mayor dimensión, si no que va a ser una representación del espacio con una dimensión.

Ahora, análogamente si a esa tira le cortamos los extremos hasta que la única manera de dibujar algo sea poner la pluma sobre ese pequeñísimo (ya sin más partes que quitar) pedazo de papel; sin moverse en ninguna dirección dándonos como resultado un punto. Así diremos que el punto va a ser el elemento y la representación del espacio de cero dimensiones.

Podemos ahora entender que hablar del punto y la línea es hablar de entes que son elementos y representaciones de todo un espacio, he allí parte de su compleja esencia.

1.2) p -gonos

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 1.1)

Con la intuición de Punto y Línea presente consideremos un p -gono como un circuito de p segmentos de línea A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , ..., A_pA_1 que unen a pares de puntos consecutivos A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_p . Los segmentos y los puntos son llamados lados (aristas) y vértices respectivamente. Si los vértices son todos coplanares diremos que se trata de un *polígono plano* en otro caso será un *polígono chueco*.

Un polígono plano descompone ese plano en dos regiones, una a la cual llamaremos *interior*, que cumple con ser finita. Por lo que será conveniente pensar al p -gono como el conjunto de vértices, aristas y dicho interior.

Podemos redefinir al polígono plano como la región simplemente conexa rodeada por dichos p -segmentos distintos. ("*Simplemente conexa*" podemos entenderla como que para cualquier curva cerrada dibujada sobre la superficie puede contraerse a un punto que vive dentro de la región, i.e. que la región no tiene hoyos).

El caso más importante es cuando las aristas que van generándolo no penetran en la región interior. En ese caso diremos que se trata de un p -gono *convexo*.

Se dice que un polígono es *equilátero* si todos sus lados son iguales, es *equiángulo* si todos los ángulos son iguales. Si $p > 3$ un p -gono puede ser equilátero sin tener que ser equiángulo o vice versa; por ejemplo un rombo es equilátero y un rectángulo es equiángulo. Un p -gono plano va a ser regular si cumple con ser equiángulo y equilátero. En este caso el p -gono será denotado por $\{p\}$; así $\{3\}$ será un triángulo regular, $\{4\}$ un cuadrado, $\{5\}$ un pentágono regular y así sucesivamente; como se muestra en la Figura 1.2a.

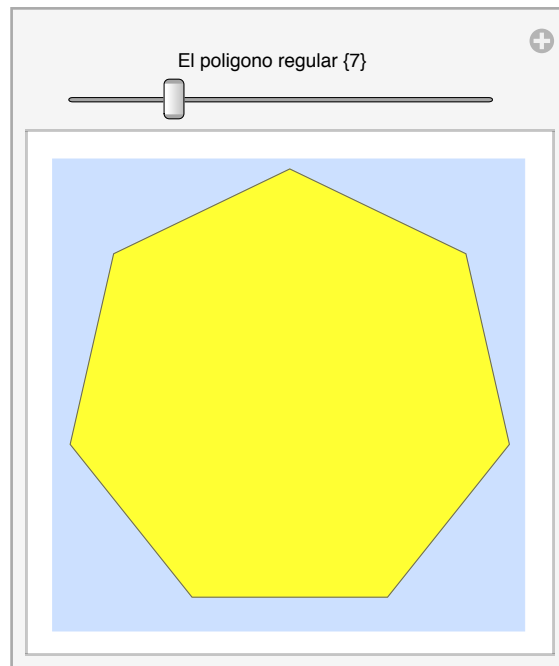


Figura 1.2a

Es fácil ver que un polígono regular tiene un centro, el cual es el punto en el interior que equidista de todos los vértices a la distancia R_0 , y de todos los lados a distancia R_1 . Esto claramente significa que existen dos círculos concéntricos el circuncírculo y el incírculo con radios R_0 y R_1 respectivamente; como se puede ver en la Figura 1.2b.

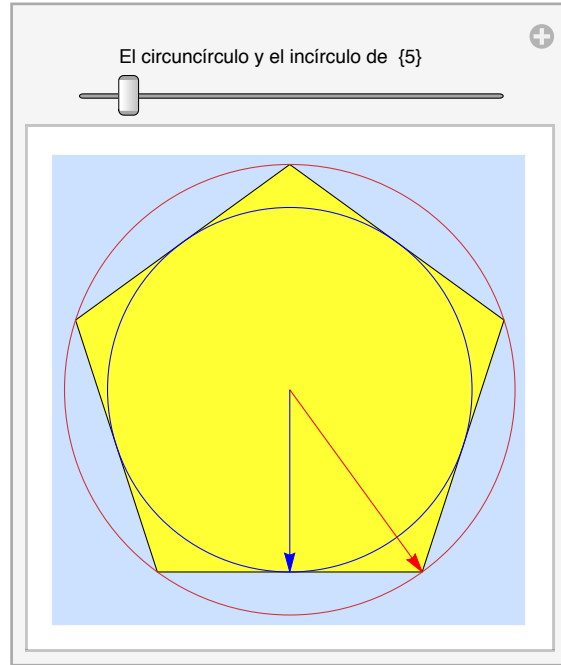


Figura 1.2b

Algunas veces ayuda a pensar que los lados de un p -gono son la representación de p vectores cuya suma es cero. Entonces pueden ser comparados con p segmentos generados desde un punto, y el ángulo entre dos segmentos consecutivos es igual al ángulo exterior de un p -gono. Si recordamos que la suma de los ángulos exteriores de un polígono plano es una vuelta completa o 2π . Entonces cada ángulo exterior de $\{p\}$ (pensado como vectores) es $2\pi/p$, y el ángulo interior es el suplemento.

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi \tag{1.1}$$

De esta manera alternativa podemos ver como se forma el triángulo $O_2 O_1 O_0$ de color verde en la Figura 1.2c, donde O_2 es el centro, O_1 es el punto medio de uno de los lados y O_0 es un vértice correspondiente a uno de esos lados. El ángulo recto es el correspondiente al vértice O_1 y el ángulo correspondiente a O_2 es claramente π/p . Si $2l$ es la longitud de los lados, se cumple:

$$O_1 O_0 = l, \quad O_0 O_2 = R_0, \quad O_1 O_2 = R_1.$$

Entonces es fácil ver que se cumple

$$R_0 = l \csc \frac{\pi}{p}, \quad R_1 = l \cot \frac{\pi}{p}. \tag{1.2}$$

Por lo que el *área* de $\{p\}$, está compuesta por la suma de las áreas de $2p$ triángulos, la cual es

$$C_p = p \cdot l \cdot R_1 = p \cdot l^2 \cdot \cot \frac{\pi}{p}. \tag{1.3}$$

El *perímetro* de $\{p\}$ es, por supuesto,

$$S = 2p \cdot l.$$

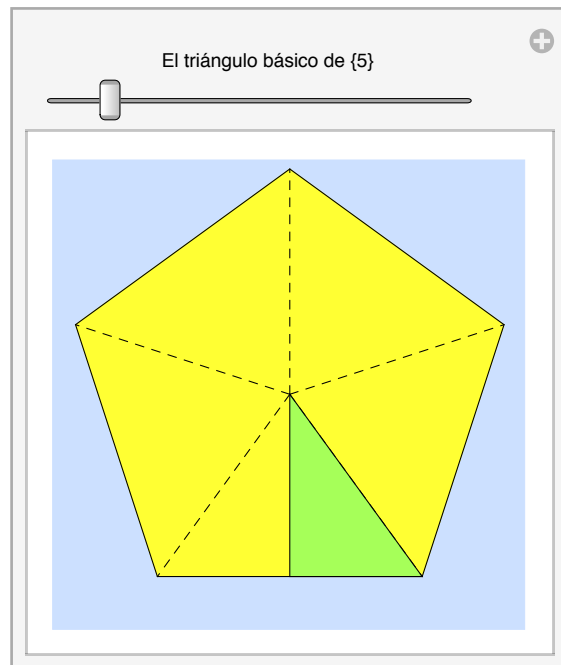


Figura 1.2c

Si p tiende a infinito, las razones S/R_0 y S/R_1 las dos tienden a 2π , como se esperaba se puede ver en la Figura 1.2b. (Este fue el método utilizado por Arquímedes para estimar π , tomando $p = 96$).

1.3) Poliedros y Mapas

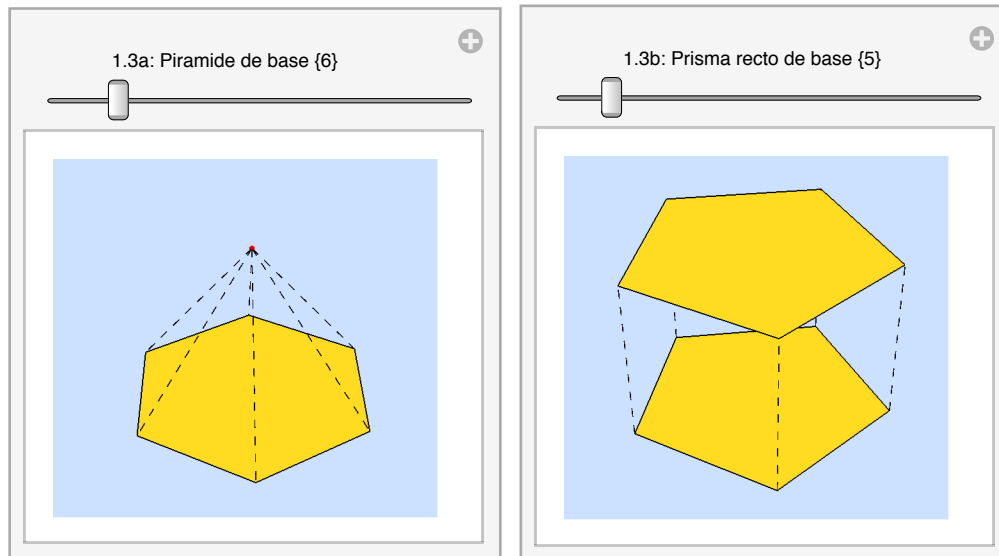
(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Secciones 1.3 y 1.7)

Un *Poliedro* puede ser definido como un conjunto *finito* y *conexo* de polígonos planos, donde cada lado de un polígono le corresponde uno y solo un lado de otro polígono, con la condición de que los polígonos alrededor de un vértice formen un circuito simple (excluyendo anomalías como dos pirámides unidas por un vértice). Los polígonos son llamados *caras*, y los lados *aristas*. Si el poliedro tiene q $\{p\}$ -caras alrededor de cada vértice se denota $\{p, q\}$.

Un poliedro es una superficie simple y cerrada, y descompone el espacio en dos regiones, una de las cuales llamaremos *interior* la cual es finita. Algunas veces podemos encontrar que los poliedros consisten en ese interior, junto con N_2 caras, N_1 aristas, y N_0 vértices.

El caso más importante es cuando ninguno de los planos que generan las caras penetra en el interior; de cumplirse este caso lo llamaremos *poliedro convexo*.

Como primeros casos podemos pensar en un punto y un p -gono unidos por p triángulos para formar una pirámide como en la Figura 1.3a, o también dos p -gonos iguales pueden ser pegados por rectángulos para formar un prisma recto como en la Figura 1.3b.



Figuras 1.3a y 1.3b

Un poliedro puede ser representado como un *mapa*; donde un mapa es un caso particular de *grafica topológica* (i.e. una grafica donde no se toma en cuenta las medidas) con N_0 nodos, unidos en pares por N_1 aristas que parte a la superficie (limitada) en N_2 regiones poligonales.

Por ejemplo si proyectamos las aristas y los vértices de un cubo en su circum-esfera; tendremos que el mapa está formado por $N_0 = 8$, $N_1 = 12$, $N_2 = 6$, y las regiones tienen la forma de cuadrados esféricos como en la Figura 1.3c.

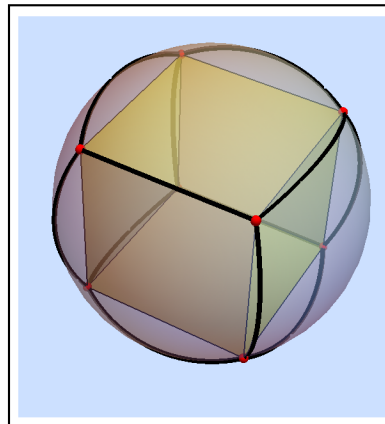


Figura 1.3c

Dado un mapa siempre se puede derivar un segundo mapa sobre la misma superficie, el cual llamaremos mapa dual. Este segundo mapa tiene N_2 vértices, uno en el interior de cada cara del mapa dado; N_1 aristas, donde cada una cruza una arista del primero, cada una uniendo dos de los nuevos vértices y N_0 caras, una alrededor de cada vértice del mapa original.

Si contamos los lados de todas las caras (de un poliedro o un mapa) obtenemos la siguiente formula:

$$\sum p = 2 N_1. \tag{1.4}$$

Si contamos las aristas que salen de todos los vértices *dualmente* obtenemos:

$$\sum q = 2 N_1. \tag{1.5}$$

1.4) Característica de Euler

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 1.6)

La *característica de Euler* ξ de una superficie subdividida en celdas es: $\xi = v - a + c$, donde v es el número de vértices (N_0), a el número de aristas (N_1) y c el de caras (N_2).

Si pensamos en la definición de un poliedro, observemos que no se excluye la posibilidad de que sea multi-conexo (i.e., que la superficie sobre la cual esté el mapa pueda tener por lo menos un hoyo). La propiedad especial que distingue un poliedro simplemente conexo de los que no lo son, es que para cualquier curva simple y cerrada que se dibuje sobre la superficie, esta pueda ser contraída a cualquier punto sobre la misma superficie, o lo que es lo mismo que cualquier circuito de aristas limite una región (lo que consiste en una o más caras). Para estos últimos poliedros, el número de sus elementos satisface que la característica de Euler es igual a dos, i.e.

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 \tag{1.6}$$

1.5) Regularidad

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 2.1)

Una primera interpretación para decir cuando un poliedro $\{p, q\}$ es *regular*, podría ser pedir que todas sus caras fueran regulares e iguales, y que rodearan a todos los vértices por igual. De esta manera diremos que un mapa del tipo $\{p, q\}$ es regular, si tiene p vértices y p aristas en cada cara, y q aristas y q caras en cada vértice. Por lo que un poliedro regular pasaría a ser un caso particular de un mapa regular. De esta manera por (1.4) y (1.5) tenemos que

$$q N_0 = 2 N_1 = p N_2. \tag{1.7}$$

Con esta primera definición y en búsqueda de dar una clasificación a los poliedros regulares, es decir según (1.7) encontrar los posibles valores que puedan adquirir p y q , recordemos entonces que el *ángulo sólido* de un vértice, tiene q caras-ángulo, cada una con un ángulo $(1 - 2/p) \pi$, esto por (1.1). Además como esos q ángulos están alrededor de un vértice, el cual esta en una superficie (pensado al poliedro como mapa), la suma de esos q ángulos tiene que ser igual a 2π .

Dicho lo anterior, la condición matemática que p y q deben satisfacer para que $\{p, q\}$ sea regular será: $1 - 2/p < 2/q$; o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \tag{1.8}$$

observemos que esto también lo podemos escribir como $(p - 2)(q - 2) < 4$. Esta restricción se puede deducir fácilmente de (1.6) y (1.7).

Regresando un momento entonces a ese caso particular (poliedros regulares), observemos que esa primera interpretación para la regularidad de un poliedro nos dice en otras palabras que se necesitan tener caras regulares e iguales y ángulos sólidos iguales. Pero quizás esto es pedirle demasiado, pues que los ángulos sólidos sean iguales se puede derivar de que las caras sean regulares e iguales. Para poder dar una mejor definición de regularidad en poliedros conviene hacer las siguientes definiciones.

La *figura del vértice* de un polígono en un vértice O , serán los segmentos que unen los puntos medios de las aristas que inciden en O ; para $\{p\}$ con $2l$ lados, será el segmento de longitud

$$2l \cos \frac{\pi}{p}. \quad (1.9)$$

Por ejemplo en la Figura 1.5a la línea azul que limita la región roja de la amarilla será la *figura del vértice* que corresponde al vértice contenido en la región roja para el respectivo p -gono.

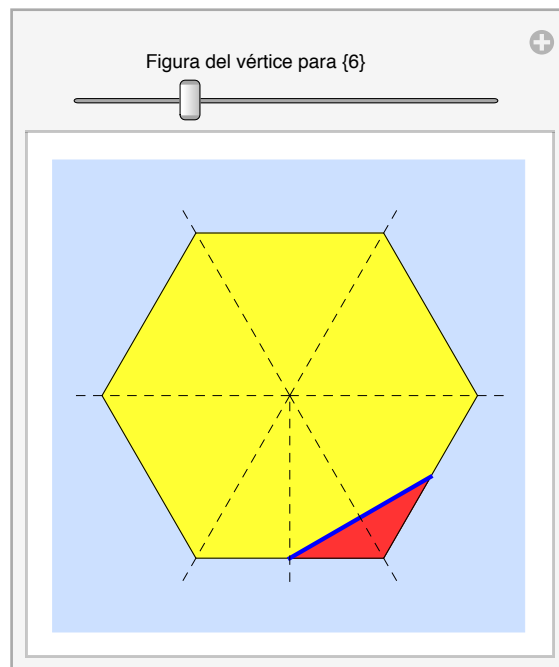


Figura 1.5a

La *figura del vértice* de un poliedro en un vértice O , es el polígono que se forma con la figura del vértice de todos los polígonos que rodean a O ; los vértices de ese polígono están dados por el *punto medio* de todas las aristas que inciden en O . Como ejemplo, en la Figura 1.5b, la figura-vértice de cualquier vértice de un cubo es un triángulo.

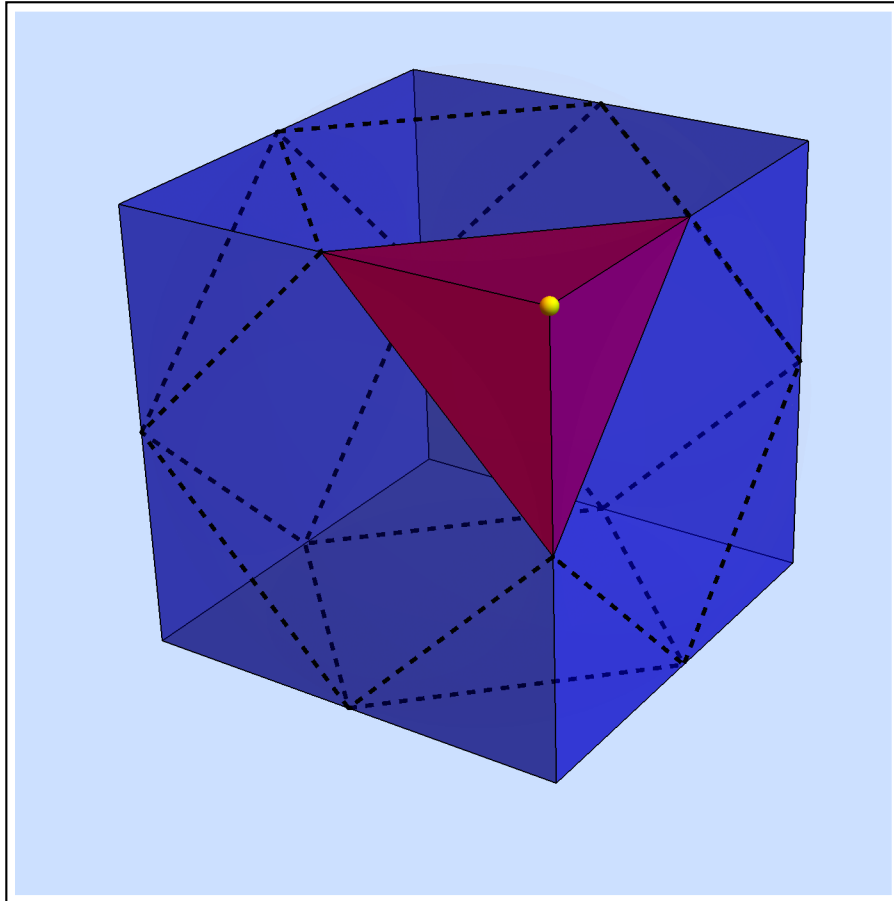


Figura 1.5b

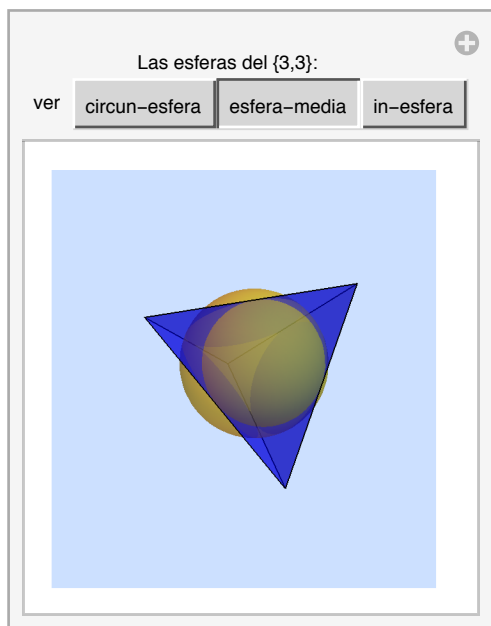
Diremos entonces que un poliedro es *regular* si todas sus caras y figuras del vértices son regulares.

Observemos que esta definición es mejor que la anterior pues así, si las caras son regulares, las aristas deben de ser todas iguales, supongamos entonces que estas tienen longitud $2l$. Análogamente si las figuras del vértices son regulares, las caras deben de ser todas iguales; pues si existieran algún par de caras diferentes que contienen un vértice en común O , entonces la figura vértice tendría que ser desigual por lo menos respecto a dos de sus lados, es decir $2l \cos \pi/p$ por lo menos para dos distintos valores de p ; pero el ángulo diédrico (entre un par de caras adyacentes) es siempre igual; pues esto siempre ocurre en una pirámide recta con la figura-vértice como base, donde cada cara lateral de la pirámide es un triángulo isósceles con lados $l, l, 2l \cos \pi/p$. Por lo que pedir que las figuras-vértices sean regulares resulta en una mejor definición, pues la figura del vértice guarda toda la información del poliedro y de su dual, lo cual puede ser de gran utilidad.

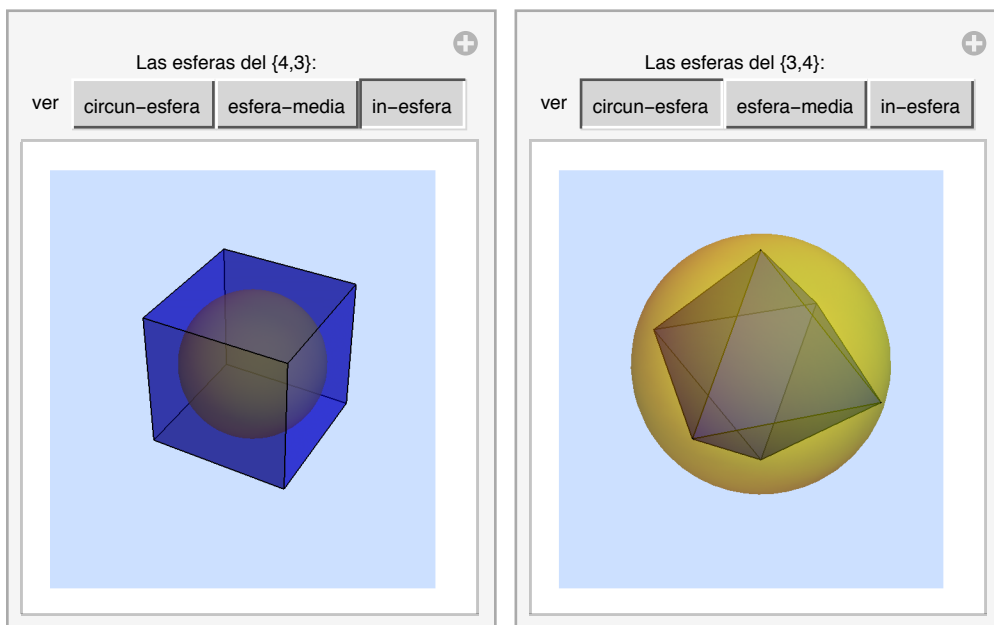
Entonces tenemos que dado un poliedro regular $\{p, q\}$, sus caras son $\{p\}$ de lados $2l$, y la figura-vértice para cada vértice es $\{q\}$ de lados $2l \cos \pi/p$.

Es fácil ver que la línea perpendicular al plano que contiene una cara y pasa por su centro, corta a la perpendicular al plano que contiene a la figura vértice y pasa por el vértice correspondiente, en un punto O_3 que es el centro de tres importantes esferas: la *circun-esfera* que contiene a todos los vértices (y a los circuncírculos de las caras), la *esfera-media* que toca a todas las aristas (y contiene todos los incírculos de las caras), y la *in-esfera* que es tangente a todas las

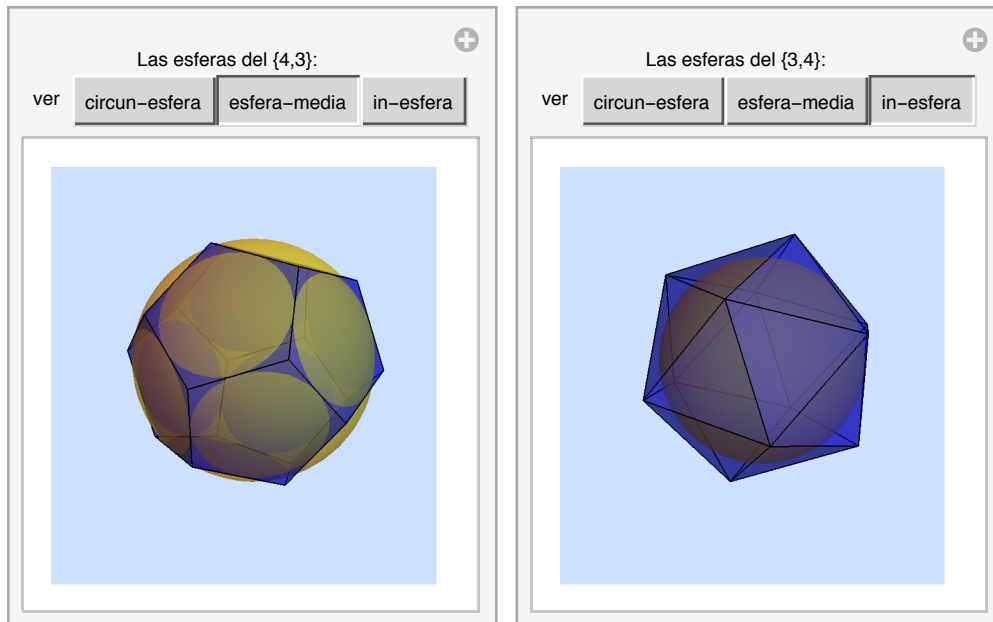
caras. Sus radios los denotaremos como R_0 , R_1 y R_2 , respectivamente. Como se puede ver en las Figuras: 1.5c, 1.5d, 1.5e, 1.5f y 1.5g.



Figuras 1.5c



Figuras 1.5d y 1.5e



Figuras 1.5f y 1.5g

Sea O_2 el centro de una cara, O_1 el punto medio de una arista correspondiente a un vértice de la misma cara, y O_0 uno de los vértices de esa arista. Entonces el triángulo $O_i O_j O_k$ ($i < j < k$) tiene un ángulo recto en O_j , y por el teorema de Pitágoras tenemos

$$R_0^2 = l^2 + R_1^2 = \left(2l \cos \frac{\pi}{p}\right)^2 + R_2^2 \tag{1.10}$$

$$R_1^2 = \left(2l \cot \frac{\pi}{p}\right)^2 + R_2^2.$$

Los sólidos Platónicos

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 2.3)

Observemos que dado un poliedro regular $\{p, q\}$, los posibles valores que puedan tener p y q están limitados por la inequación (1.8) y, por las ecuaciones (1.6) y (1.7), obtenemos

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}, \tag{1.11}$$

que está expresada en términos de p, q y el número de aristas. Por lo que la ecuación (1.7) resulta una consecuencia obvia de (1.11), cuyas soluciones son

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}.$$

Estas soluciones son los ya conocidos sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro (en las Figuras 1.5b, 1.35c, 1.5d, 1.5e, 1.5f podemos verlos con sus respectivas esferas).

Consideremos el poliedro regular $\{p, q\}$ que tiene N_0 vértices, N_1 aristas, y N_2 caras. Si reemplazamos cada arista por una línea perpendicular que tenga el mismo punto de tangencia que tiene dicha arista con la esfera-media, obtenemos las N_1 aristas del poliedro *recíproco* $\{q, p\}$, que tiene N_2 vértices y N_0 caras.

Este proceso es la *reciprocidad* respecto a la esfera-media: los vértices y las caras planas de $\{q, p\}$ son los polos y las polares de las caras planas y los vértices de $\{p, q\}$.

La reciprocidad respecto a cualquier otra esfera concéntrica, nos daría como resultado un $\{q, p\}$ más grande o pequeño. Es conveniente usar la esfera-media, pues guarda la misma relación entre los dos poliedros. Más aun cuando usamos la esfera-media, los circuncírculos de la figura del vértice de $\{p, q\}$ coinciden con los in-círculos de las caras de $\{q, p\}$ y esos dos $\{q\}$'s son recíprocos respecto a dicho círculo.

Dado un poliedro $\{p, q\}$, si distinguimos con un guión los radios de las respectivas esferas de su recíproco tenemos que

$$R_0 R_2' = R_1 R_1' = R_2 R_0';$$

para cada una de estas igualdades, tenemos que los cuadrados de los radios son iguales a los cuadrados de sus recíproco. Por lo tanto cada radio puede ser tomado como $R_0' = R_0$ y $R_2' = R_2$; pero esto solo se cumple respecto a la esfera-media, en general solo tenemos que $R_1' = R_1$. Este proceso de reciprocidad puede ser aplicado a cualquier figura que tenga un *centro* reconocible.

Si se acepta la dualidad topológica, también se puede definir la reciprocidad para mapas, la cual llamaremos simplemente *dualidad*. Diremos además, que un mapa es auto dual si él mismo es su propio dual. Observemos que la dualidad es una relación simétrica y por como lo hemos definido la reciprocidad se vuelve un caso particular de la dualidad.

Entonces tenemos que para cada mapa del tipo $\{p, q\}$ existe un mapa dual del tipo $\{q, p\}$.

Observemos que si se trata de un mapa regular en la esfera entonces por (1.11) tenemos que los posibles candidatos para p y q además de tener a los cinco sólidos platónicos como solución, tenemos el *diedro* $\{p, 2\}$ y el *hosoeдро* $\{2, p\}$. Donde el último está formado por p gajos o lunas. De esta manera tenemos que el tetraedro es auto dual, el cubo es dual del octaedro, el dodecaedro es dual del icosaedro y el diedro es dual del hosoeдро.

1.6) Polítopos

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 7.4)

Comentario

Jules Heri Poincaré (1854-1912) alguna vez dijo:

Solo una o dos personas han logrado alcanzar la habilidad de visualizar hiper-sólidos simple y naturalmente así como los mortales visualizan los sólidos; pero cierta facilidad para ir en esa dirección quizás pueda venir en contemplar la analogía que existe entre la primera y la segunda dimensión, entre la segunda y la tercera, (y así con un poco de extrapolación) entre la tercera y la cuarta.

Con esa observación podemos pensar en la secuencia supradimensional

punto, segmento, polígono, poliedro,....

de esta manera llamaremos coloquialmente “*paso dimensional*” a la siguiente secuencia

punto, línea, plano, espacio, hiperespacio,....

Así un polítopo va a ser en terminos coloquiales el sucesor del poliedro en la secuencia dimensional, refiriéndose a los objetos que cumplen propiedades semejantes pero que se encuentran en dimensiones más grandes. Para dar cierta facilidad a la intuición en lo que respecta a dimensiones más grandes pensemos en el muy conocido plano cartesiano. Sabemos que en él se encuentran dos direcciones “especiales” aquellas que corresponden a una base canónica, es decir si tomamos dos vectores, cada uno con una de esas direcciones; cualquier otro vector en ese plano (es decir, que viva en esas 2 dimensiones) lo podemos escribir en términos de esos dos. Pero ¿si quisiéramos ir más allá del plano?, es decir, llegar a un punto que viva en el espacio (en tres dimensiones) no nos es suficiente tener esas dos direcciones canónicas,

necesitamos tener un vector nuevo que cumpla la misma propiedad que se cumplía entre el primero y el segundo (de llegar a cualquier lado con combinaciones de estos), pero ahora con respecto a los dos anteriores, lo que corresponde a dar una nueva dirección y un vector; dándonos como resultado, el también muy conocido espacio cartesiano. Así, sucesivamente, si quisiéramos ir más allá de ese espacio necesitaríamos una dirección diferente a las tres anteriores que cumpliera que para algún vector en esa dirección operándolo con los tres vectores “esenciales” anteriores nos diera cualquier punto en el hiperespacio.

Para entenderlo pongamos el siguiente ejemplo:

Dados 2 puntos tenemos un segmento, con 4 segmentos iguales tenemos un cuadrado, con 6 cuadrados iguales tenemos un cubo, con 8 cubos iguales tenemos un hipercubo, y así sucesivamente.

Por lo que una definición de politopo Π_n va a ser una región finita y convexa en un espacio n -dimensional, encerrada por un número finito de *hiperplanos*. La parte del politopo que se encuentra en uno de esos hiperplanos, Π_{n-1} , es llamada *faceta*. Las facetas de Π_{n-1} son Π_{n-2} y así sucesivamente lo que nos da la secuencia descendente $\Pi_{n-1}, \Pi_{n-2}, \Pi_{n-3}, \dots, \Pi_1, \Pi_0$. Así un politopo 4-dimensional Π_4 tiene, facetas sólidas Π_3 , facetas planas Π_2 , aristas Π_1 y vértices Π_0 .

Es natural pensar que un politopo n -dimensional tiene *un* elemento n -dimensional, él mismo; por lo que escribiremos

$$N_n=1.$$

Recíprocamente y por convención escribiremos

$$N_{-1}=1.$$

Análogamente a los casos vistos para dimensiones menores, si los puntos medios de todas las aristas que salen de un vértice O de un Π_n , se encuentran todos en un mismo hiperplano, entonces los puntos medios van a ser los vértices de un politopo $(n-1)$ -dimensional llamado *figura del vértice* de Π_n en O . Sus facetas son evidentemente la figura del vértice (en O) de las facetas de Π_n alrededor de O .

De esta manera los polígonos regulares $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \dots$ pueden definir un politopo regular inductivamente. Diremos que un politopo Π_n ($n > 2$) es *regular* si todas sus facetas son regulares y la figura-vértice es regular para todos los vértices.

Siendo que las facetas de la figura del vértice son las figuras del vértice de las facetas, para un Π_4 regular cuyas facetas son $\{p, q\}$ debe tener figuras del vértices $\{q, r\}$ (donde r es el número de facetas alrededor de una arista) por los que acordamos escribir

$$\Pi_4 = \{p, q, r\}.$$

2

Transformaciones y grupos

2.1) Teselaciones

(Fragmentos de Alatorre, [A]. Capítulo 1)

Como una primera noción podemos pensar a una *teselación*, como un plano completamente “lleno” con la repetición de un número finito de piezas (teselas) diferentes, de manera tal que no se sobrepongan ni dejen ningún espacio entre ellas; es decir, como una especie de rompecabezas infinito donde el número de piezas distintas es finito. Esta noción no es exenta de la generalización para diferentes tipos de plano y espacios.

Las primeras teselaciones que se conocen datan del 4000 a.e.c (*antes de la era común*) cuando los sumerios utilizaron patrones repetitivos con figuras simétricas en algunas de sus construcciones, para llenar el espacio de la superficie de pisos, paredes y techos. En el castillo de la Alhambra, construido en el Siglo XIII se puede ver un amplio conocimiento del tema, pues se encuentran un ejemplar de cada grupo de isometrías asociada a cada teselación periódica plana que existe, es decir existen en el castillo 17 teselaciones esencialmente diferentes. La majestuosidad de la obra quería representar la perfección y grandeza de Dios.

El primer estudio documentado de teselaciones lo realizó Johannes Kepler en su libro *Harmonices Mundi* en 1619.

Las teselaciones se descomponen en dos grandes clases de acuerdo con sus simetrías:

- 1) Periódicas
- 2) No-periódicas

Una teselación es periódica si existe una traslación (distinta de la traslación por el neutro) que al aplicarla a la teselación pareciera que no se hizo nada con ella, es decir, si pusiéramos una copia de la teselación trasladada encima de la teselación sin trasladar, todas las piezas de la segunda se identificarían perfectamente con las de abajo. Estas teselaciones fueron clasificadas desde el principio del Siglo XX por el cristalógrafo ruso E. Fedorov, pues en su estudio de cristales encontró que las simetrías que tienen estos son iguales a los que tienen las teselaciones; y, como ya fue mencionado, los árabes ya tenían todo el conocimiento de las teselaciones, por lo menos en el ámbito práctico.

Las teselaciones periódicas se dividen a su vez en *regulares* y *cuasiregulares*. Las primeras construidas al aplicarle a un solo polígono un *grupo de transformaciones*, y las segundas aplicando la misma idea pero a dos o más polígonos.

Una teselación es no-periódica si, como dice su nombre, no es periódica, es decir, si no existe una traslación que haga lo antes mencionado.

Dentro de las teselaciones no-periódicas podemos encontrar las teselaciones aperiódicas que, aunque en esta tesis este sea el único contacto que se tenga con ellas, pueden ser quizás las más interesantes de todas, pues además de ser no periódicas cumplen la propiedad de no contener patrones periódicos arbitrariamente grandes. El estudio de las tesela-

ciones aperiódicas en sus comienzos, hace medio siglo, se concentraba en la mera existencia de conjuntos de teselas aperiódicas y en la decidibilidad de que un conjunto de piezas teselaran. Con estos problemas en mente Hao Wang demostró la indecidibilidad de dicho problema, y fue su alumno Robert Berger quien dio el primer conjunto de teselas aperiódicas, el cual constaba de 20426 piezas; posteriormente pudo reducirlo hasta 104. En 1971, R. Robinson halló un conjunto de 6 piezas disminuyendo un poco más de 14 veces el número de piezas de Berger. Unos años después, Roger Penrose encontró tres conjuntos de teselas aperiódicas basadas en simetrías pentagonales, dos de esos conjuntos con solo dos piezas distintas. También se empezaron a estudiar sus simetrías, pues se encontraron que los cuasi-cristales tenían simetrías aperiódicas. Algo muy similar a esos cuasi-cristales, los cristales aperiódicos son los que el físico E. Schrödinger en su libro *¿Qué es la vida?* menciona como modelos de la estructura elemental para vida "la fibra cromosómica". Pero solo lo deja como una idea en el aire, la cual los químicos Watson y Crick atrapan y concretan para formular el modelo de la doble hélice del ADN que conocemos hoy en día.

2.2) Transformaciones

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Secciones 3.1 y 3.2)

Aquel que haya observado la naturaleza y todo lo que de esta se deriva, podrá fácilmente estar de acuerdo con Heráclito, quien decía que lo único que permanece constante es el cambio; es decir, todo se transforma. Así que podemos pensar para nuestra intuición que una transformación es la causa de que las cosas cambien o se transformen.

Para entender las *transformaciones* empezaremos diciendo que dos figuras son *congruentes* si la distancia entre dos pares de puntos correspondientes es igual, en este caso, el ángulo entre un par de líneas correspondientes es el mismo. En particular y análogo al caso plano para cada car, si el ángulo sólido de dos triedros (figura formada por tres rectas no coplanares que comparten un vértice) son congruentes si las tres caras-ángulo de uno de estos son iguales a las respectivas caras-ángulo del otro. Se dirá que dos triedros serán *directamente congruentes* (que se pueden sobreponer uno en otro) si son congruentes y tienen el mismo sentido u orientación, y *enantiomorfos* si tienen sentidos opuestos. La misma distinción puede ser aplicada a cualquier otra figura, de acuerdo a lo siguiente.

Para cualquier punto P colocado respecto a un triedro dado por las coordenadas cartesianas x, y, z , sea P' el punto con coordenadas referidas a otro triedro, con las mismas x, y, z . Cada P determina un único P' , y viceversa. Si suponemos que los dos triedros son congruentes, esta correspondencia es llamada una *transformación congruente*, (también conocida como *isometría*) donde P' es la transformación de P , pues se preservan los ángulos, y la forma al poder sobreponer uno en el otro, como en la Figura 2.2a para el caso de dos dimensiones.

Si cualquier otro punto Q se transforma en un punto Q' , tenemos definida una fórmula para la distancia PQ en términos de sus coordenadas, que denotaremos como $P'Q' = PQ$ y se muestra con la línea verde en la Figura 2.2a para el caso de dos dimensiones. En otras palabras una transformación congruente, *es una correspondencia punto a punto que preserva distancias*. Diremos que dicha transformación para dos triedros, es *directa* u *opuesta*, si estos son directamente congruentes o enantiomorfos, i.e. dependiendo si la transformación preserva o invierte el sentido al aplicarse. Observemos que el producto de dos transformaciones directas o dos opuestas, preserva siempre el sentido, i.e. ese producto es también una transformación y es directa; cuando el producto es de una transformación directa y una opuesta (o vice versa) el resultado también es una transformación, la cual siempre es opuesta. A una transformación directa también se le conoce como *desplazamiento*, pues puede ser pensada como un movimiento rígido.

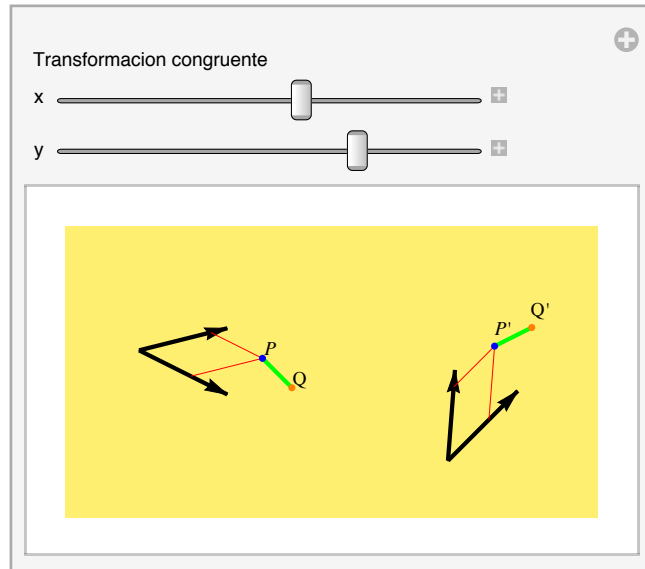


Figura 2.2a

Cualesquiera dos figuras congruentes, están relacionadas bajo una transformación congruente, directa u opuesta. Así, dos zapatos izquierdos idénticos son directamente congruentes; mientras que el primero y su respectivo par son opuestamente congruentes.

Todas las transformaciones congruentes pueden ser derivadas de las siguientes tres transformaciones "primitivas": *traslación* (transformación directa, compuesta con cierta dirección y distancia dadas) Figura 2.2b. *Rotación* (transformación directa, respecto a cierta línea o eje y con un cierto ángulo dados) Figura 2.2c y *Reflexión* (transformación opuesta, respecto a un cierto plano) Figura 2.2d.

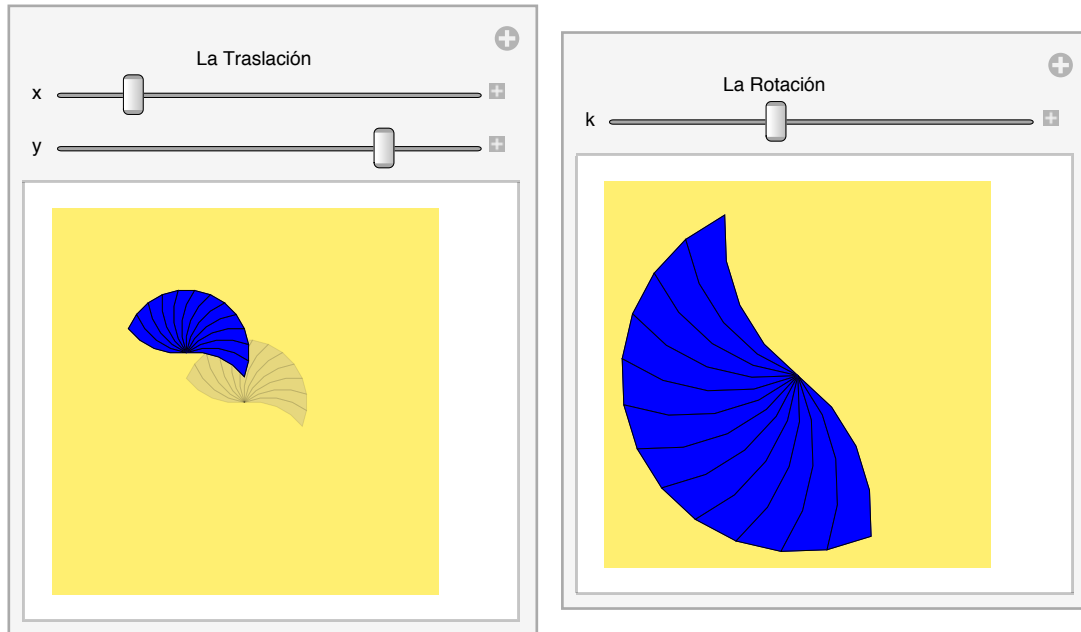


Figura 2.2b, Figura 2.2c

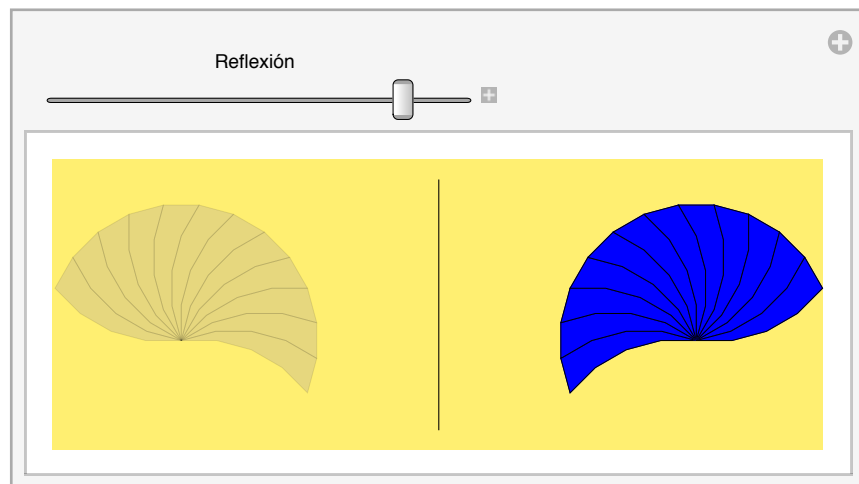


Figura 2.2d

Existen transformaciones elementales análogas para espacios de cualquier dimensión. Para dos dimensiones (como en las Figuras 2.2b, 2.2c, 2.2d), la rotación es respecto a un punto, la reflexión es respecto a una línea, y las transformaciones congruentes se definen en términos de dos *ángulos* congruentes. En una dimensión la reflexión es respecto a un punto, y las transformaciones congruentes están definidas en términos de *rayos* (lados de línea).

Una transformación congruente aplicada a figuras en algún espacio, se puede generalizar como una *función biyectiva*

aplicada a cualquier conjunto de elementos en el espacio, pues existe una correspondencia punto a punto que preserva distancias entre la figura y su imagen bajo la transformación.

Al hablar del producto de dos transformaciones debemos pensar en la composición de las funciones biyectivas que mencionamos anteriormente. Para dicho producto existe una analogía natural entre las transformaciones y los números. Así, si podemos pensar que las letras R, S, \dots denotan a las transformaciones y a RS como el resultado del producto entre S y R (en ese orden). Esta notación la podemos justificar por la validez de la ley asociativa:

$$(RS)T = R(ST). \tag{2.1}$$

Así como se cumple que al multiplicar cualquier número por 1 el número no se altera por ser el neutro multiplicativo, podemos denotar a la transformación identidad (es decir la que al aplicarse deja a la figura en la misma posición y con el mismo sentido) con el mismo símbolo I . Utilizando la simbología análoga al denotar R^p como el producto de aplicar p -veces la transformación R ; por ejemplo si R representa una rotación por un ángulo θ , R^p representa la rotación por el ángulo $p\theta$ en el mismo eje. Se dirá que la transformación R es periódica si existe un p tal que $R^p = I$ y el *periodo* es el p más pequeño para el cual se cumple dicha igualdad. Con la misma intuición podemos denotar R^{-1} como la *inversa* de la transformación R , la cual “neutraliza” el efecto de R , por lo que $RR^{-1} = I = R^{-1}R$. Si R es de periodo p se cumple que $R^{-1} = R^{(p-1)}$. En particular si R es de periodo 2 (como pasa en una reflexión) esta es su propia inversa.

Es fácil ver que la fórmula general de la inversa de un producto es:

$$(RS \dots T)^{-1} = T^{-1} \dots S^{-1} R^{-1}. \tag{2.2}$$

Denotando a alguna figura como x , a la que al aplicarle T transforma x en x' (por lo que T^{-1} transforma x' en x), escribiremos entonces $x' = x^T$.

Esta notación es justificada por el hecho que $(x^T)^S = x^{TS}$. Si S transforma el par de figuras (x, x^T) en $(x_1, x_1^{T_1})$, diremos que S transforma a T en T_1 y escribiremos $T_1 = T^S$; por ejemplo, si T es una rotación alrededor del eje l entonces T^S es la rotación por el mismo ángulo al rededor del eje transformado l^S . Siendo $x_1 = x^S$ y $x_1^{T_1} = (x^T)^S$, se cumple que $x^{ST_1} = x^{TS}$ para toda x . Por lo que $ST_1 = TS$, y

$$T^S = S^{-1}TS.$$

Con lo anterior, a la hora de transformar un producto obtenemos que:

$$(TU)^S = S^{-1}TUS = S^{-1}TSS^{-1}US = T^S U^S.$$

Así, para cualquier entero p se cumple que $(T^p)^S = (T^S)^p$.

2.3) Grupos de transformaciones

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 3.3)

Cuenta la leyenda que la noche antes de batirse en duelo y perder la vida por defender el honor de una joven, Evariste Galois con 20 años escribió todos los indicios de una teoría que revolucionaría las matemáticas dándole un dinamismo a los entes matemáticos en sí, diferente a los que Leibnitz y Newton dieron algunas décadas atrás. Estos indicios cifrados que dejó Galois son lo que hoy se conoce como teoría de grupos y teoría de Galois, siendo la primera los fundamentos de la segunda.

Se dice que un conjunto de elementos u operaciones es un *grupo* si:

- 1) Es cerrado bajo un “producto” asociativo

2) Contiene una "identidad".

3) Cada operación tiene un "inverso".

Para precisar más, se dice que para cualesquiera R, S transformaciones u operaciones en un grupo, RS es también una transformación. Como en (2.1), el producto es asociativo. Contiene una identidad a la que denotamos con el símbolo I . Y para cualquier R en el grupo de transformaciones, existe su inverso R^{-1} tal que $R^{-1}R = I$.

El número de operaciones o transformaciones distintas (incluyendo la identidad) es llamado el *orden* del grupo, el cual no necesariamente es finito.

Un subconjunto de transformaciones cuyo producto (con repeticiones) contenga a todo el grupo es llamado *generador*. En particular, si un único elemento R genera todo el grupo, este consiste en todas las potencias de R incluyendo $R^0 = I$ y es llamado *grupo cíclico*; es finito si R es periódico y en ese caso el orden es igual al periodo de R . Como hemos dicho, entonces el grupo cíclico de orden p está definido por la relación:

$$R^p = I$$

donde se entiende que $R^n \neq I$ para toda n que se encuentre entre 0 y p .

De esta manera nuestros grupos de transformaciones van a ser algo análogo a "ánimas", a las cuales después veremos que podremos asociarles un "cuerpo".

2.4) Simetrías

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 3.4)

Cuando decimos que una figura es simétrica, es que existe una transformación congruente que no la altera como un todo, pero permuta a sus elementos. Una transformación congruente tal es llamada una *operación simétrica*. Claramente, todas las operaciones simétricas de una figura forman un grupo (incluyendo, por supuesto, la que deja todo igual, es decir, la identidad). Este es llamado el *grupo de simetrías* de la figura.

Recíprocamente, dado un grupo de transformaciones congruentes, podemos construir una figura simétrica tomando todas las transformaciones de algún punto. El grupo original es un subgrupo del grupo de simetrías de la figura. Si el grupo dado es finito, la figura consiste de un número finito de puntos a los que las transformaciones permutan. Estos puntos tienen un centroide (o "centro de gravedad") que coincide con sí mismo al aplicarle cualquiera de las transformaciones. Por lo que:

Todo grupo finito de transformaciones congruentes dejan por lo menos a un punto invariante.

En el caso de tener un grupo cíclico generado por una única transformación congruente S , la transformación de un punto A_0 en posición general será

$$\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots,$$

donde $A_n = A_0^{S^n}$. Estos pueden ser considerados como la generalización de los vértices de un *polígono regular* (capítulo 1.2).

Los diferentes casos de transformaciones congruentes dan diferentes casos de polígonos. En el caso de que S sea una reflexión o una inversión, el polígono se reduce a un *dígono* $\{2\}$. Si S es una rotación, los lados son cuerdas iguales de un círculo; si el ángulo de rotación es $2\pi/p$, tenemos entonces el polígono regular ordinario $\{p\}$. En el caso de que S sea una traslación, tenemos el caso límite cuando p tiende a infinito: una sucesión de segmentos iguales sobre una línea el *apeirogono* $\{\infty\}$. Si S es un paso (la composición de una reflexión y una traslación en la dirección del espejo), el polígono es un zig-zag plano. En todos los casos exceptuando el dígono, el grupo cíclico generado por S no es todo el grupo de simetrías del polígono generado.

El grupo completo de simetrías de $\{p\}$ es el grupo de rotación del *diedron* $\{p, 2\}$, que es el grupo diédrico de orden $2p$ (pensando por supuesto que $\{p\}$ no es chueco). Por otra parte el grupo completo de simetrías de $\{p, 2\}$, es de orden

$4p$ conteniendo además los múltiplos de rotación por la reflexión que intercambia las dos caras del diedro.

Cuando tomamos solamente el punto de vista 2-dimensional, considerando rotaciones alrededor de puntos y reflexiones sobre líneas. Entonces el grupo de simetrías de $\{p\}$ consiste en p reflexiones (sobre líneas que unen el centro con los vértices y el punto medio de los lados) y p rotaciones (alrededor del centro); el grupo de rotaciones es cíclico.

2.5) Las tres teselaciones euclidianas planas regulares

(Fragmentos de Coxeter, [C2]. Sección 4.1)

Pensemos primero en el límite de un p -gono, cuando p tiende a infinito. Es una línea infinita dividida en segmentos, llamaremos a este polígono degenerado un *apeirogono*, $\{\infty\}$. Análogamente un plano lleno de polígonos (como mosaicos) puede ser considerado como un poliedro degenerado y tomará un lugar natural en nuestra investigación.

Una teselación plana o panal (*honeycomb*) 2-dimensional es un conjunto infinito de polígonos, que cubren todo el plano una sola vez, i.e., que no dejan ningún espacio entre ellos y no se superponen, así que a cada lado de un polígono le corresponde solo un lado de otro polígono. Así que es un *mapa* con una infinidad de caras (capítulo 1.3).

Dada una porción finita de este mapa rodeada por aristas, con N_2-1 caras, N_1 aristas y N_0 vértices (incluyendo los vértices y aristas de la periferia). Si lo que corresponde a toda la región exterior es considerado como una sola cara, lo que obtenemos es un mapa finito al cual podemos aplicar la característica de Euler (1.4)

$$N_0 - N_1 + N_2 = \xi. \tag{2.3}$$

Esta ecuación es válida para cualquier porción finita sin importar qué tanto la extendemos añadiendo más caras. Si el proceso de crecimiento puede ser hecho de tal manera que los números crecientes N_0, N_1, N_2 tiendan a ser proporcionales con números definidos v_0, v_1, v_2 , podemos concluir que:

$$v_0 - v_1 + v_2 = 0.$$

En particular, si todas las caras son p -gonos, y se tienen q de ellos en cada vértice, la ecuación (1.8) puede aproximarse con un error del orden de la magnitud de $\sqrt{N_2}$. Entonces se cumple que

$$q v_0 = 2 v_1 = p v_2,$$

de donde podemos concluir

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, \tag{2.4}$$

o lo que es lo mismo

$$(p - 2)(q - 2) = 4.$$

Este resultado puede ser deducido también de (1.11) haciendo tender N_1 a infinito. Pero esta deducción, aunque alimenta la intuición, no la podemos aceptar como una prueba; pues no hay una secuencia de mapas regulares finitos que tienda a algún mapa regular infinito (como los polígonos $\{p\}$ que tienden al apeiragono $\{\infty\}$).

Las soluciones de (2.4) son $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$ las cuales podemos apreciar (en parte) en las Figuras 2.5a, 2.5b, 2.5c.

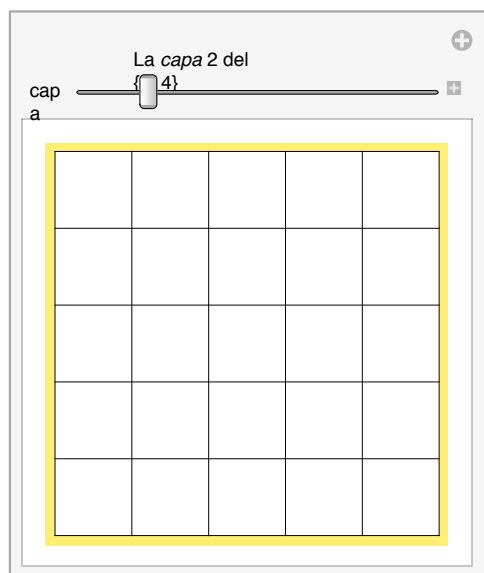


Figura 2.5a

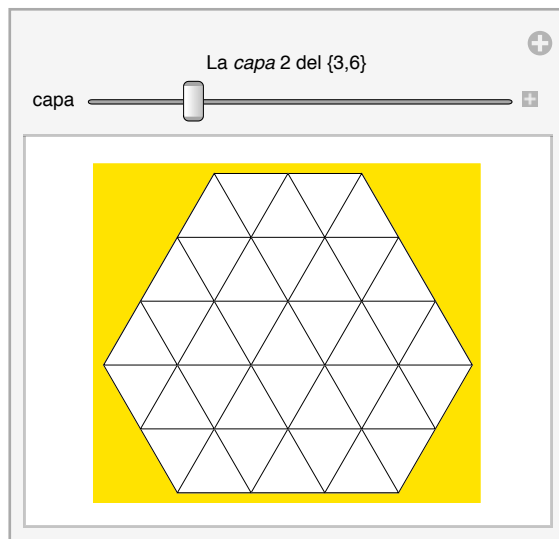
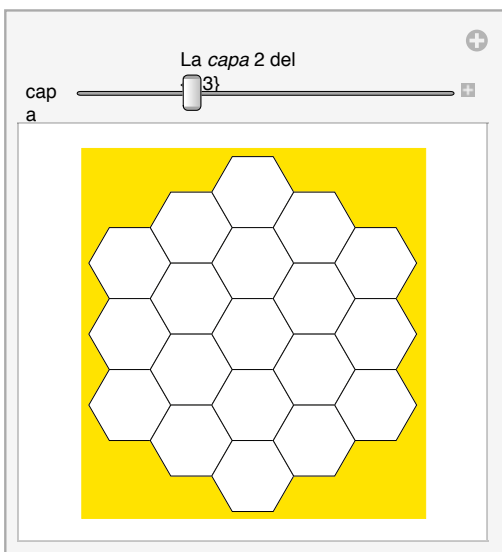


Figura 2.5b, Figura 2.5c

El criterio 2.4 puede ser obtenido alternativamente por la siguiente consideración métrica. Las definiciones de *figura del vértice* y *regularidad* son iguales en el caso de los poliedros como vimos en la Sección 1.5. Así, una teselación va a ser regular si sus caras son regulares e iguales. Un vértice de $\{p, q\}$ es rodeado por q ángulos, cada uno $(1-2/p)\pi$, y todos juntos son 2π . Por lo que $1-2/p = 2/q$.

2.6) Los panales

Los *panales* (honeycombs) o *politopos*, son los análogos a los poliedros en dimensiones mayores a tres. Así como los poliedros están formados por polígonos en sus caras; los panales de dimensión cuatro están formados por poliedros, estos últimos se les llamara *facetas* o *celdas*, las cuales se pegan por caras o lo que es lo mismo comparten algún polígono. Si son regulares, tienen un símbolo de Schläfli $\{p, q, r\}$ que indica que sus facetas son poliedros $\{p, q\}$ y r de ellos rodean a cada arista. La figura del vértice tiene sentido y es un poliedro $\{q, r\}$.

Por ejemplo el $\{4, 3, 4\}$ corresponde a la tesselación del espacio por cubos en la cual cada arista pertenece a 4 cubos, como se muestra en la Figura 2.5d. Obsérvese que en este caso se tiene que

$$(p - 2)(q - 2)(r - 2) = 4.$$

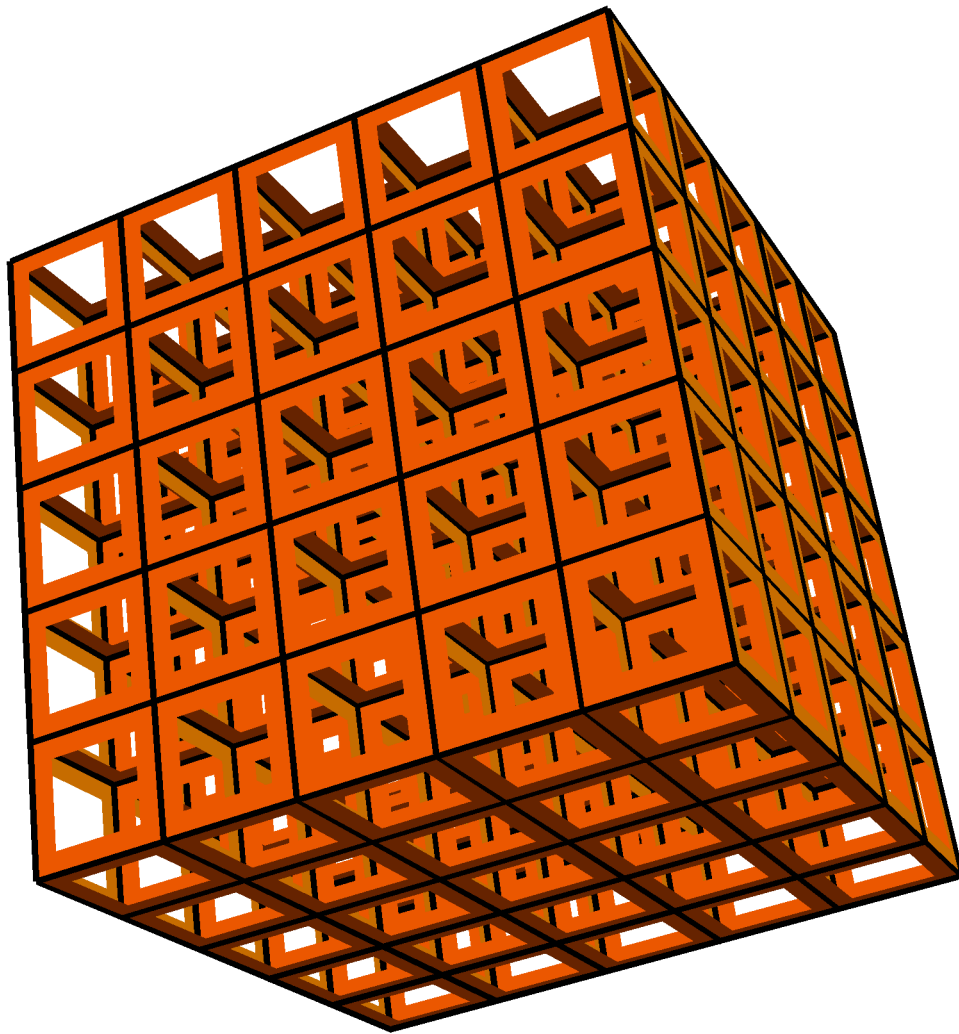


Figura 2.5d La capa 2 del $\{4, 3, 4\}$.

Si en lugar de satisfacer la ecuación anterior, $\{p, q, r\}$ satisface que

$$(p - 2)(q - 2)(r - 2) < 4,$$

entonces tenemos a un politopo euclidiano de cuatro dimensiones como es el caso de $\{4, 3, 3\}$, mejor conocido como *hipercubo*, el cual se muestra su proyección en la Figura 2.5e. Sus 8 facetas son cubos y tres de ellos rodean a cada arista. El dibujo es una proyección de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 que deforma las facetas y hay que considerar al cubo exterior como frontera de una faceta que es lo de afuera. Obsérvese que en los dibujos no pintamos todo el polígono que forma una cara bidimensional, sino solo el “listón” exterior del polígono para indicar que esa cara está ahí. Si la dibujáramos toda, no veríamos lo que pasa detrás de ella.

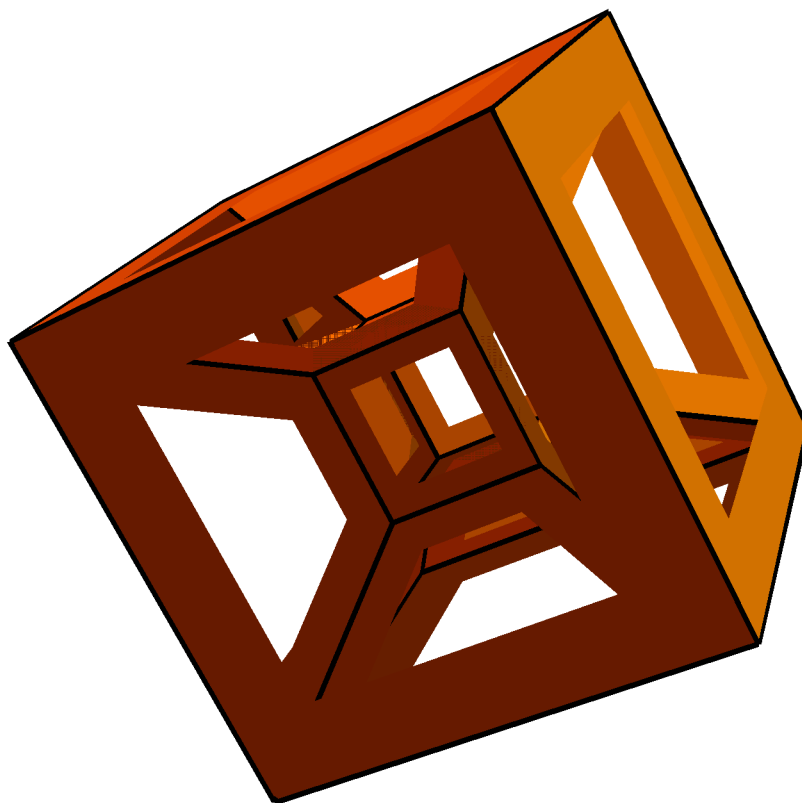


Figura 2.5e El $\{4, 3, 3\}$

3

Paradigmas No Euclidianos

3.1 El Quinto

El libro *Los Elementos de Euclides* es, después de la Biblia, el libro con más ediciones publicadas a lo largo de la historia de la humanidad. Fue escrito alrededor del 300 a.e.c. y dentro de todos los tesoros que contiene, uno muy importante y polémico es sus postulados o axiomas (Sección 1.1). Estos han intervenido directa e indirectamente desde la majestuosidad de las obras de da Vinci hasta la construcción de vehículos que pueden ir más allá de la exosfera, pasando por una inmensa cantidad de inventos, eventos y obras de arte. Pero dentro de estos postulados axiomáticos hay uno que se destaca de los demás, este es "el quinto".

La importancia del quinto postulado de Euclides, no recae únicamente en ser parte de ese hilo de pensamiento que fundó las bases de las matemáticas y las ciencias en general. Pues aún siendo parte de esos fundamentos, generó una división en dos grupos entre los matemáticos; el primer grupo era el que aceptaba con cierta humildad la esencia axiomática de este "quinto", mientras que los otros con la irreverencia, y valentía que han caracterizado a aquellos que en sus respectivas áreas pasaron a la historia como grandes; intuían que más que un axioma, por su estructura de esencia compleja, el "quinto" era una proposición que dependía de los cuatro axiomas anteriores.

Por siglos se intentó probar la independencia y la dependencia simultáneamente, según al grupo que se perteneciera. Y no fue hasta el Siglo XVIII que con una mezcla de irreverencia e ingenio los lógicos Saccheri (1667-1733) y Lambert (1728-1777) decidieron negar al "quinto" (ya que mas o menos se había domado el concepto de infinito en el Siglo XVII) lo que trajo en consecuencia dos proposiciones diferentes. Recordando que el quinto nos dice:

V) Dado un punto y una recta que no lo contenga existe una única recta que pasa por ese punto y nunca toca a dicha recta. (3.1)

El cual, a la hora de negar nos da las siguientes dos opciones:

Va) Dado un punto y una recta que no lo contenga no existe recta que pasa por ese punto y nunca toque a dicha recta. (3.2)

Vb) Dado un punto y una recta que no lo contenga existe mas de una recta que pasa por ese punto y nunca toca a dicha recta.

Al intentar negar "el quinto" lo que se buscaba era, mediante el método lógico de reducción al absurdo, demostrar la dependencia de este último "axioma" respecto a los cuatro anteriores. En su lugar lo que se obtuvo fueron dos sistemas axiomáticos independientes, formados respectivamente de cinco axiomas cada uno, los cuatro primeros axiomas que Euclides propuso y en lugar del "quinto" sus respectivas negaciones.

Pensando que el hombre ha utilizado la geometría para entender y representar "el espacio" donde se encuentra, es decir, la geometría ha sido un modelo y una herramienta para entender e interactuar con este "lugar" o "entorno" en donde nos

desarrollamos. Este cambio paradigmático trajo consigo la llave a nuevas maneras de entender esta maraña compleja a la cual denominamos realidad.

Una vez que se tenían estos dos nuevos sistemas axiomáticos que podemos pensar como las *almas* para lo que después serán los entes a los que llamaremos geometrías, lo que se buscaba era darle un cuerpo a esas almas es decir construir modelos donde se pudieran representar estos sistemas.

3.2) Geometría Proyectiva

(Generalizaciones de fragmentos de J. Bracho, [B1]. Capítulo VI)

Para el sistema que consta de los primeros cuatro axiomas junto con el *Va* se encontró rápidamente un modelo que se adecuaba perfectamente a dicho sistema, este modelo en esencia tenía un par de siglos en funcionamiento práctico.

Nos remontamos a principios del renacimiento con el artista italiano Filippo Brunelleschi (1377-1446) quien buscando una manera de plasmar mediante la pintura, escenas de una manera visiblemente más realistas que las hechas hasta ese momento, basado en las obras de Giotto quien para el año 1300 y de una manera innovadora había utilizado las *profundidades* como elemento característico de su obra. Para esto ideó el concepto de *punto de fuga o punto al infinito*; que en esencia y basado en la observación de nuestra percepción, es un punto que está lo suficientemente lejos, a donde se dirigen las proyecciones de otras líneas del espacio que se está representando (Figura 3.2a). De esta manera se cumple que para cualquier línea y un punto fuera de esta, cualquier línea que pase por ese punto se va a intersectar con la primera; pues si intentaban de pintar una paralela que pasara por dicho punto, estas líneas se intersectarían en ese *punto al infinito*.

Esta nueva herramienta fue conocida como *perspectiva* y fue utilizada, estudiada y en algunas ocasiones mejorada por todos los grandes artistas y algunos naturalistas del renacimiento como Leonardo da Vinci, Nicolás de Cusa, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca y Alberto Durero. Siendo estos algunos de los más destacados. Aunque no fue hasta el Siglo XVIII que Brook Taylor (1685-1731) y Johann Heinrich Lambert (1723-1812) quienes formalmente escriben los tratados matemáticos de la geometría proyectiva.

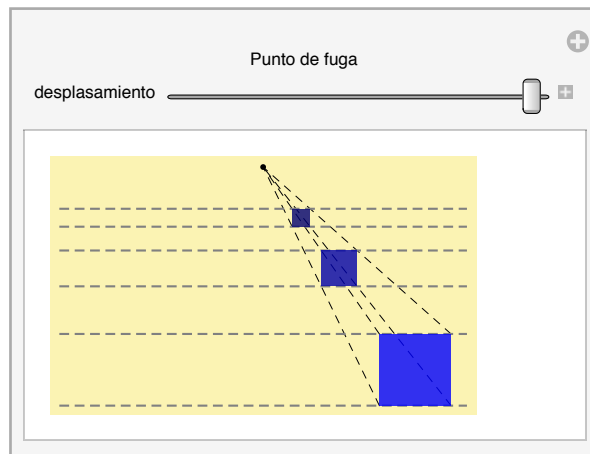


Figura 3.2a

Para pensar en el modelo en sí, podríamos pensar primeramente en una esfera, donde las líneas fueran círculos máximos, y los puntos pues puntos sobre ésta. Parecería que este resulta ser un modelo adecuado pues cumple todos los axiomas pero con un pequeño detalle, todas las líneas se intersectan en dos puntos y no en uno. Este modelo aunque no nos sirve para la geometría proyectiva nos servirá para lo que llamaremos geometría esférica o elíptica, por lo que no conviene deshacerse de él. Además si en lugar de tomar un punto proyectivo como uno sobre la esfera, lo pensamos como una pareja de antípodas, esto equivale a tomar en la Figura 3.2b cualquier punto sobre el casquete verde, junto con el

punto de intersección entre la esfera y la línea que pasa por el primer punto y el centro de dicha esfera; ese sí que resulta ser un modelo conveniente.

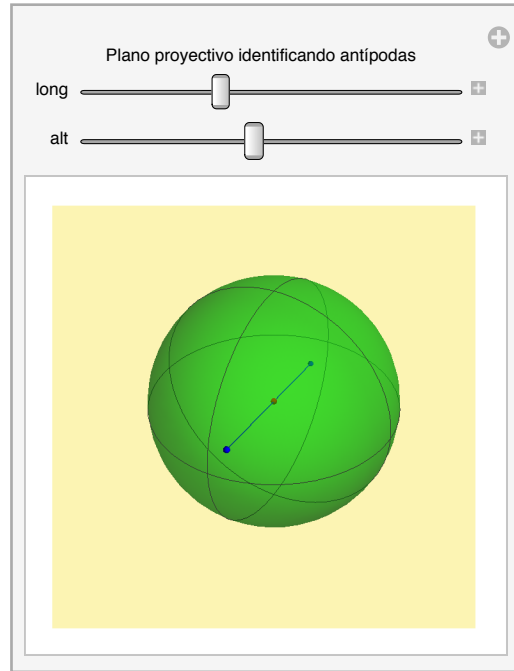


Figura 3.2b

Dado $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en \mathbb{R}^3 tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, sea entonces

$$[\mathbf{x}] = [x : y : z] := \{(tx, ty, tz) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Es decir $[\mathbf{x}]$ es la recta que pasa por el origen con dirección \mathbf{x} , menos el origen. Lo que implica que

$$[\mathbf{x}] = [t\mathbf{x}] \text{ para cualquier } t \neq 0.$$

Así podemos definir al *plano proyectivo* \mathbb{P}^2 como:

$$\mathbb{P}^2 := \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}.$$

Estamos pensando que los elementos de \mathbb{P}^2 son puntos los cuales expresamos mediante coordenadas homogéneas como $[\mathbf{x}] = [x : y : z]$, aunque observemos que estas coordenadas no son únicas.

Se puede pensar a $[\mathbf{x}]$ como un punto en \mathbb{P}^2 o como su correspondiente línea por el origen en \mathbb{R}^3 . Definimos entonces a las *líneas* o *rectas* en \mathbb{P}^2 como los conjuntos de puntos en \mathbb{P}^2 tales que sus correspondientes líneas en \mathbb{R}^3 forman un plano por el origen.

Sea \mathbf{n} un vector no nulo en \mathbb{R}^3 ; la *línea* de \mathbb{P}^2 dada por \mathbf{n} se define como

$$\lambda_{\mathbf{n}} := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\}.$$

O, en términos de coordenadas homogéneas si $\mathbf{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\lambda_{\mathbf{n}} := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\}. \tag{3.3}$$

Observemos que la recta proyectiva λ_n no depende del vector no nulo en \mathbb{R}^3 (\mathbf{n}), sino del correspondiente punto en \mathbb{P}^2 (es decir, $\lambda_n = \lambda_m$); por lo que podemos definir para $[\mathbf{n}] \in \mathbb{P}^2$ su *recta dual* como:

$$\lambda_{[\mathbf{n}]} := \lambda_n.$$

De esta manera, a cada recta $[\mathbf{n}]$ que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 le asociamos su plano perpendicular que pasa por el origen ($\lambda_{[\mathbf{n}]}$). Pero además como cada plano por el origen tiene una única recta perpendicular por el origen, se tiene que

$$\lambda_n = \lambda_m \iff [\mathbf{n}] = [\mathbf{m}],$$

estableciendo de esta manera una biyección entre las rectas de \mathbb{P}^2 y los puntos de \mathbb{P}^2 , que se conoce como *dualidad*. Una propiedad bonita y de mucha utilidad es que dados $[\mathbf{p}]$ y $[\mathbf{q}] \in \mathbb{P}^2$, se tiene:

$$[\mathbf{p}] \in \lambda_q \iff [\mathbf{q}] \in \lambda_p. \quad (3.4)$$

Hasta aquí dejaremos nuestro breve estudio del plano proyectivo el cual nos servirá más adelante, no sin antes mencionar que al utilizar nuevamente nuestro paso dimensional podemos generalizar el plano proyectivo al espacio proyectivo de dimensión tres y sucesivamente a más dimensiones; además utilizando la generalización de la proyección estereográfica podemos encontrar diferentes modelos de los espacios proyectivos de dimensión mayor.

3.3) Geometría Hiperbólica

(Fragmentos de Ramírez, [R]. Capítulo 4. Y de Bracho, [B1]. Capítulo VIII)

El sistema compuesto por los cuatro primeros axiomas euclidianos junto con el **Vb** forman la base axiomática para lo que se conoce como *geometría hiperbólica*. A diferencia de la proyectiva, la geometría hiperbólica no contaba con tratados informales que dieran hincapié a la construcción de modelos geométricos. Aunque esto no significa que no existieran personajes que intuyeran previamente esa geometría y trabajaran en secreto por miedo al descrédito y al ridículo; algunos tan grandes como el príncipe de las matemáticas Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quien aun siendo director del instituto de matemáticas de la universidad de Göttingen, no se atrevió a sacar sus resultados a la luz.

La historia de la geometría hiperbólica irónicamente se escribe en paralelo, y me refiero a un paralelo hiperbólico, pues no se trató de una única persona si no de varias, las que fueron creando y dándole forma.

Por una parte tenemos a János Bolyai (1802-1860) quien prescindiendo del quinto, decide crear la *Ciencia absoluta del espacio*. En ella define los conceptos de *paralela asintótica*, circunferencia de radio infinito (mejor conocida como *horociclo*); y de *ángulo de paralelismo* además de la relación entre las distancias de un punto a una recta y dicho ángulo, estos últimos siendo la clave de la trigonometría hiperbólica.

Bolyai tuvo la fortuna de ser amigo de Gauss, por lo que pudo hacerle llegar su trabajo mediante el libro que escribió su padre, siendo su trabajo parte de los apéndices del libro. Recibió los más grandes elogios del príncipe de las matemáticas y la confesión de que él trabajaba en el tema también.

Por otra parte en Rusia tenemos a Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856). Él conocía el trabajo de Saccheri y Lambert y para 1823 ya había elaborado una *Geometría Imaginaria*. En 1826 trabajó en una geometría "más general" donde podía trazar un haz de paralelas a una recta desde un punto exterior.

Lobachevski también obtiene todos los conceptos que obtuvo Bolyai, pero poniendo el ángulo de paralelismo en función de la distancia del punto a la recta y señalando que las horoesferas también son válidas en geometría euclidiana, ganándose por su parte el reconocimiento de Gauss.

Para 1851 Riemann se doctoraba en Göttingen asesorado por Gauss. Para tener derecho a dar clases en esa prestigiosa universidad, primero le tiene que exponer temas a los matemáticos más importantes de Göttingen, Gauss escoje el tema "*Sobre las hipótesis más importantes en que se basa la geometría*" para que su alumno exponga. En la exposición Bernard generaliza el concepto de *superficie* al de *variedad*. Indicando que la forma de medir puede variar de un punto de la variedad a otro, siempre que ésta sea suave, definiendo así lo que se conoce como *variedad riemanniana*; esto serviría después de inspiración a Albert Einstein (1879-1955) para su teoría de la relatividad.

Riemann también se había dado a la tarea junto con Ferdinand Minding (1806-1885) de buscar superficies con curvatura constante negativa, pero ingenuamente sin relacionarlo con la "geometría hiperbólica".

Aunque los avances eran muchos y muy rápidos, y ya se tenían diferentes geometrías teóricas todavía no se obtenía de un modelo para la geometría hiperbólica.

El primer modelo surge a cargo de Eugenio Beltrami (1835-1900), quien inspirado en el trabajo de Riemann y Minding propone que dicha superficie debe de crearse mediante una geometría no-euclidiana y exhibe la *seudoesfera* (Figura 3.3a.) la cual es una superficie de revolución generada por una *tractriz* (la línea roja) que gira en torno a su asíntota (línea puntada).

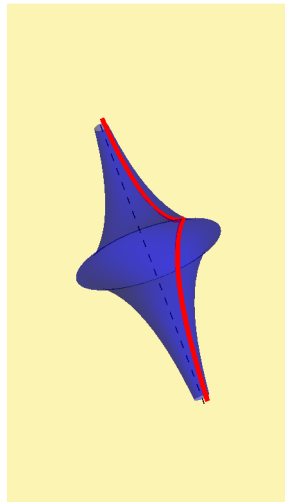


Figura 3.3a

Esta superficie cumple con el objetivo de Beltrami de tener curvatura negativa aunque no con todas sus ambiciones, pues como hace notar David Hilbert (1862-1943): caminando por una tractriz en dirección al borde no se puede avanzar tanto como se quisiera, lo que impide que la pseudoesfera sea un modelo para la geometría hiperbólica.

Pero Beltrami tenía un as bajo la manga y tenía otra propuesta para el modelo, esta vez se trataba de un disco donde los puntos son los puntos interiores, y los puntos sobre la circunferencia frontera son *puntos al infinito* los cuales no forman parte del plano, las rectas serán en este caso las cuerdas de dicho disco, y la forma para medir los ángulos entre dos rectas a y b que concurren es

$$\angle(a, b) = \left(\frac{1}{2i}\right) \log(a, b; m, n),$$

donde i es el número complejo cuyo cuadrado es -1 y $(a, b; m, n)$ es la razón cruzada de las rectas a, b, m, n siendo m y n las tangentes desde el vértice del ángulo a borde del círculo.

Cabe destacar que una característica de esta geometría es que el ángulo entre dos rectas siempre será más pequeño que en la geometría euclidiana, lo que nos da uno de los primeros resultados que destacan desde los inicios de esta geometría con Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) quien junto con su sobrino Franz Adolf Turinus (1794-1874) fueron de los pioneros en esta geometría que todavía estaba muy pantanosa, pero desilusionados por los errores que le hizo ver el mismo Gauss mediante correspondencia, destruyeron casi todo el trabajo realizado. Pero de él se destacan resultados como:

$$\text{La suma de los ángulos internos de un triángulo era menor que } 180^\circ \text{ (en dicha geometría).} \quad (3.5)$$

La importancia de este par no destaca en construir lo que llamaron *Geometría Astral* estudiando previamente derecho y no matemáticas, sino mas bien, que este junto con otros resultados son válidos en la geometría hiperbólica.

Este modelo se conoce como Beltrami-Klein o simplemente modelo de Klein pues fue Felix Klein (1849-1925) quien dio la fórmula para medir las distancias entre dos puntos p y q ; si s y t son los puntos al infinito de la recta que pasa p y q y c

una constante, entonces

$$d(p, q) = c \log(p, q; s, t). \quad (3.6)$$

Para entender un poco mejor este modelo pensemos en \mathbb{R}^3 y en nuestra ya conocida geometría proyectiva, empezamos con un disco centrado en las coordenadas $(0, 0, 1)$ y radio 1, el cual será nuestro plano hiperbólico \mathbb{H}_k^2 . Imaginemos ahora la hoja superior del hiperboloide de dos hojas que responde a la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Todos los puntos del interior del disco van a quedar en relación biunívoca con los puntos de la hoja del hiperboloide, esta correspondencia nos la va a dar la proyección de cualquier punto sobre la hoja del hiperboloide, desde el origen a nuestro \mathbb{H}_k^2 , y los puntos al infinito, es decir los puntos de la circunferencia del borde nos lo darán los haces del cono asintótico al hiperboloide el cual se conoce como *cono de luz*. Se lo conoce con este nombre pues la geometría y el álgebra que hay detrás de este modelo son la misma que hay detrás de la teoría de relatividad especial donde Einstein es el personaje principal pero no el único que merece todo el crédito.

Por consiguiente los puntos van en puntos y si pensamos que las rectas sobre el hiperboloide son las hipérbolas formadas por cortar con un plano perpendicular al XY la hipérbola, podemos decir que rectas van en rectas. De esta manera tenemos nuestro primer modelo del plano hiperbólico (Figura 3.3b).

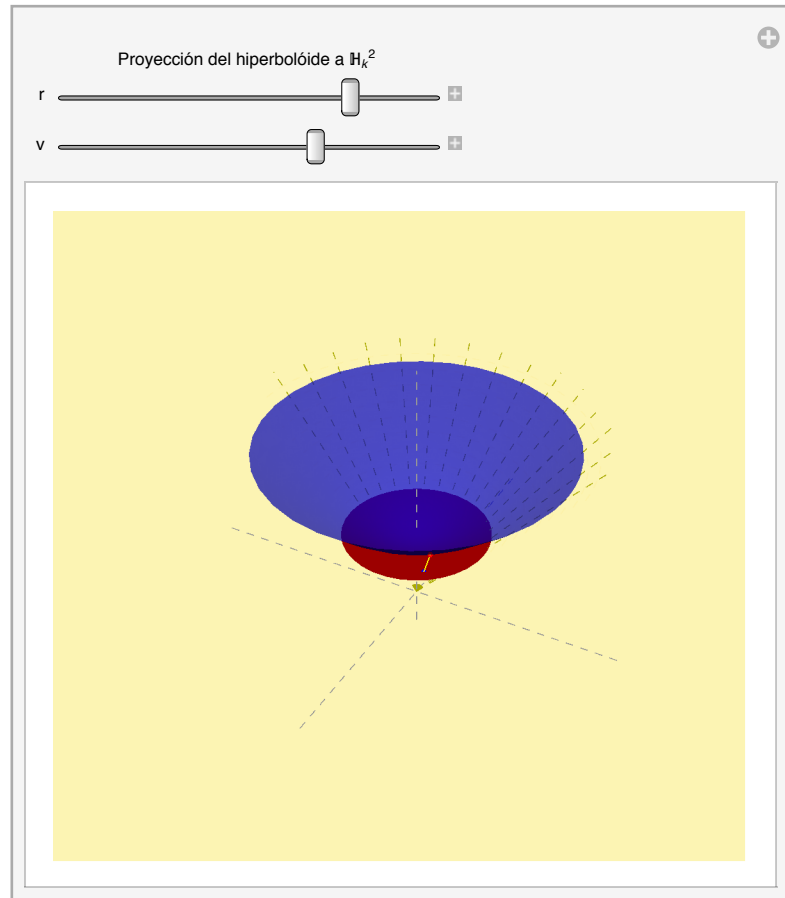


Figura 3.3b

Klein había trabajado en combinar los conceptos algebraicos de grupos creados por Galois y los conceptos geométricos

de Riemann para trabajar en esta nueva geometría, pero sin tener resultados. Estos trabajos, se los hizo llegar a Henri Poincaré (1854-1912) que su trayectoria en Física, Astronomía y sobre todo en matemáticas, le hizo ser reconocido como líder de las matemáticas de finales del Siglo XIX y principios del XX.

Poincaré resuelve el problema que se planteaba Klein mediante las transformaciones de Möbius aplicadas a números complejos. La importancia de estas transformaciones es que Poincaré logró ver es que son *conformes* es decir respetan ángulos, con lo cual mandan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas, respetando el ángulo entre estas. Con todo esto en la cabeza Henri propone un nuevo modelo para la geometría hiperbólica llamado *modelo o disco de Poincaré* \mathbb{H}_p^2 (por obvias razones).

Como su nombre lo dice este modelo consta nuevamente de un disco, donde los puntos son los puntos del interior del disco, los puntos del borde de la circunferencia son puntos al infinito los cuales, al igual que en el modelo anterior no, forman parte del plano, pero ahora las líneas consisten en arcos de circunferencia que son perpendiculares al borde del disco, en dado caso que una línea pase por el centro del disco, como dicho arco tiene que ser perpendicular al borde del disco pues tiene que ser una línea recta o circunferencia de radio infinito. Podemos pasar del modelo del disco de Klein al de Poincaré con la función:

$$h(x) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x \cdot x}}{x \cdot x} \right) x, \tag{3.7}$$

que es una “contracción radial” desde el origen y se deduce fácilmente de la Figura 3.3c.

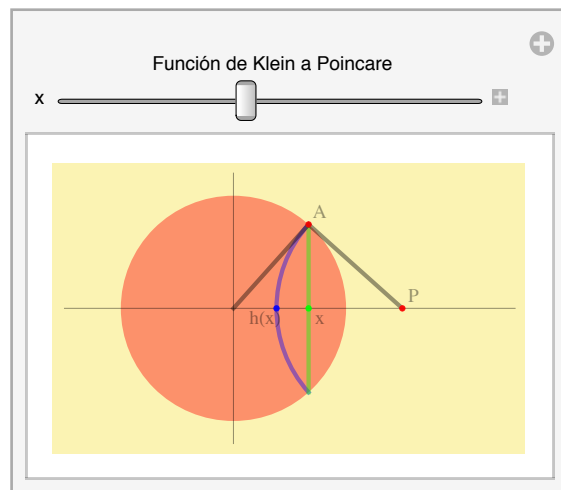


Figura 3.3c

Poincaré no solo postuló el modelo, sino que dio también el grupo de transformaciones para trabajar en él, combinado el álgebra y la geometría como lo habría hecho su compatriota René Descartes (1596-1650) con la geometría euclidiana, un par de siglos atrás. Dicho grupo, como es de esperar, consiste nuevamente, de las transformaciones de Möbius. Este modelo al igual que en los demás, contiene dos tipos de paralelismo las *hiperparalelas* (o simplemente paralelas) las cuales se intersectan en un punto al infinito y las *ultraparalelas* que no se intersectan ni en el infinito.

En este modelo la distancia va a estar dada nuevamente en términos de la razón cruzada (3.6) solo que con la constante $c = 1$.

Pero Poincaré no sé queda allí; con la transformación de Möbius

$$H(z) = \frac{iz + 1}{z - i}$$

que manda el interior del disco en el semiplano superior y el borde en el eje X genera un segundo modelo, el modelo de *semiplano superior*; el cual con ayuda nuevamente de la genialidad de Riemann, en esta ocasión con la proyección estereográfica y un poco de topología, demuestra la correspondencia entre el disco y el semiplano.

Este modelo al ser la transformación de Möbius del disco no cambia mucho en esencia, los puntos son puntos y las rectas arcos de circunferencia ortogonales al círculo de radio infinito que está en el borde, es decir, el eje X donde sus puntos serán los puntos al infinito.

El siguiente capítulo está dedicado mediante el paso dimensional, a los modelos del espacio hiperbólico para los primeros dos que se mencionaron aquí, de manera un poco más formal; por lo que una vez que se haya leído el siguiente capítulo, podemos dar el paso hacia atrás y pensar en los modelos del plano y mucho de lo que ellos conllevan.

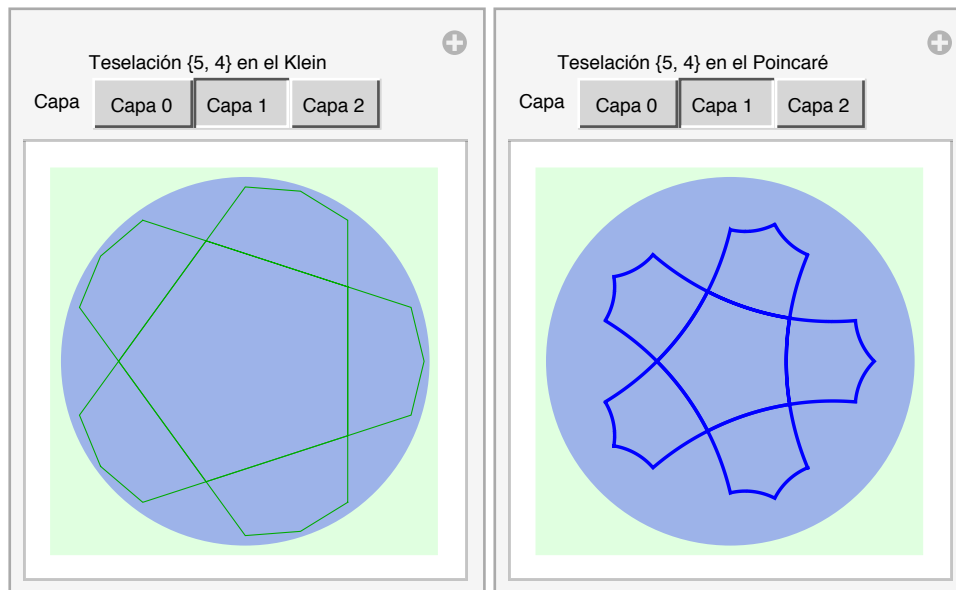
Pero ya mencionados los grupos de transformaciones para los planos hiperbólicos mencionemos un par de cosas relacionadas con estos.

Como vimos en la sección 2.3 las isometrías son un subgrupo de transformaciones, que preservan ángulos y distancias, en general la forma de las figuras; y como en la construcción que dimos de polígonos en la sección 1.2 y en la sección 1.5 la definición de regularidad fue en base al número de lados y a la regularidad de la figura vértice (la que tampoco está definida mediante ángulos), podemos trasladar esos conceptos a los diferentes modelos del plano hiperbólico. De esta manera siguiendo la línea de pensamiento de este trabajo, también podemos construir polígonos en esta geometría.

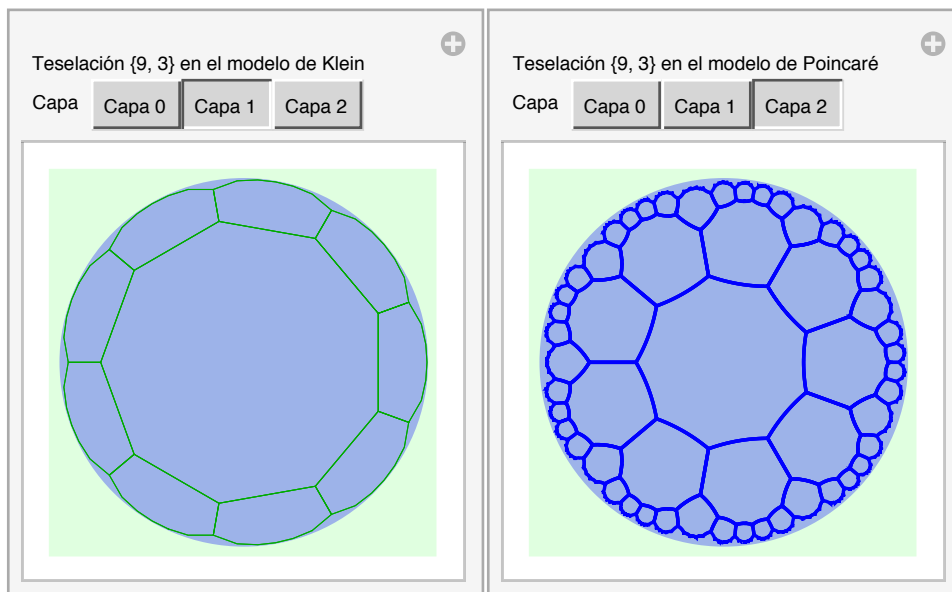
Las teselaciones tampoco escapan de esta mudanza conceptual, en particular las teselaciones regulares. Aunque como en esta geometría se cumple el resultado (3.5) la manera en que se llena el espacio será un poco diferente. Pues dado un p -gono $\{p\}$ en lugar de que se cumpla (2.5) para q de ellos se cumple la restricción (3.8) esto a causa de propiedades topológicas del plano, incluyendo la propiedad (3.5).

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

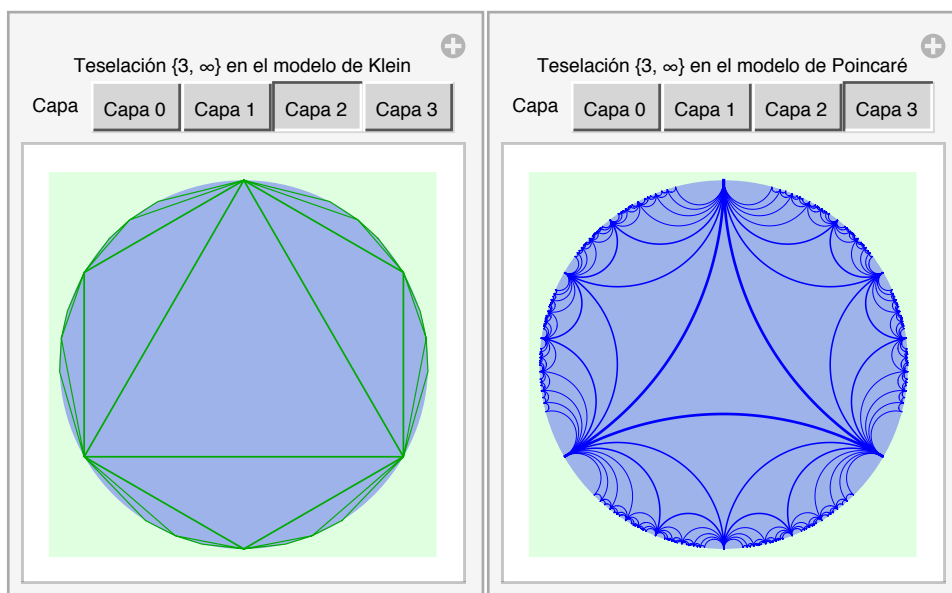
Como se puede notar tenemos una cantidad muchísimo mayor de polígonos regulares en el plano hiperbólico los cuales teselan, pues tenemos teselaciones para cualquier $p > 2$ en los naturales, incluso para $q = \infty$ donde eso significa que los vértices del p -gono están sobre el borde del disco “en el infinito”. Aquí solo mostraremos algunos ejemplos: un $\{5, 4\}$ Figuras 3.3d y 3.3e, un $\{9, 3\}$ (Figura 3.3f y 3.3g), un $\{3, \infty\}$ (Figura 3.3h y 3.3i) y un $\{4, \infty\}$ (Figura 3.3j y 3.3k). Para poder entenderlos mejor, en las respectivas figuras se muestran las primeras capas de la respectiva teselación. Con esto nos referimos a que la capa 0 es el p -gono base con la que se va a teselar, es decir el primer número en la nomenclatura de Schläfli, el $\{p\}$ del $\{p, q\}$ respectivo. La siguiente capa se formará reflejando en cada arista libre al p -gono, y este proceso se repite para la siguiente capa.



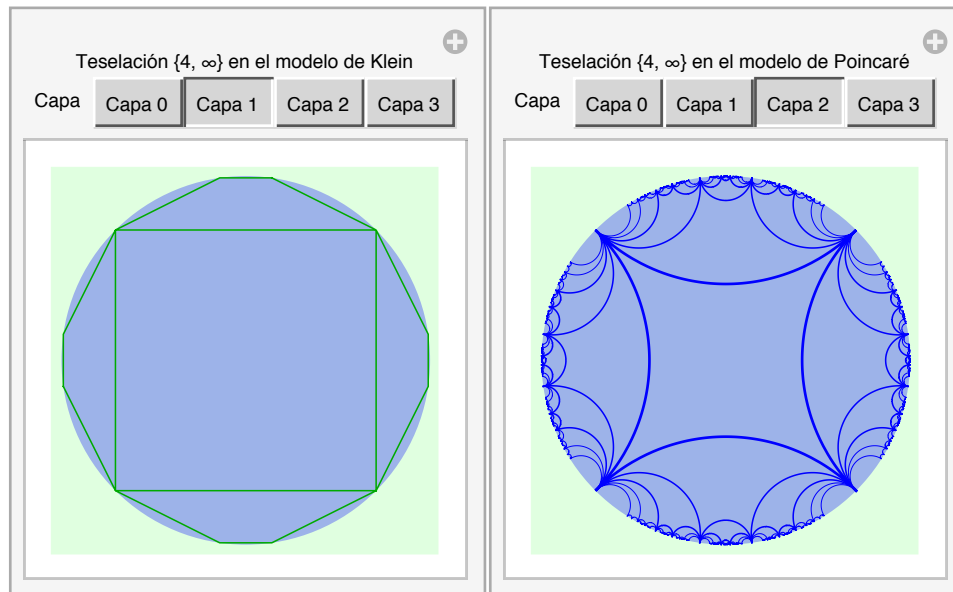
Figuras 3.3d y 3.3e



Figuras 3.3f y 3.3g



Figuras 3.3h y 3.3i



Figuras 3.3j y 3.3k

Las teselaciones en esta geometría eran bien conocidas por el artista holandés Maurits Cornelies Escher (1898-1972) quien trabajó en varias ocasiones con diferentes teselaciones, sobre todo en el modelo del disco de Poincaré Figura 3.3h.



Figura 3.3h Tomada del Escher Museum; Den Haag Holland.

4

Espacio Hiperbólico

4.1) Los cimientos del espacio

(Fragmentos generalizados de J. Bracho, [B1]. Capítulo VIII)

Nuestro primer modelo del espacio hiperbólico, al que llamaremos *modelo de Klein*; consistirá en los puntos interiores de la esfera unitaria o *bola abierta*, pero pensando a \mathbb{R}^3 como la carta coordenada canónica del espacio proyectivo \mathbb{P}^3 ; es decir,

4.11

$$\mathbb{H}_k^3 := \{[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w^2 < 0\} \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \quad (4.1)$$

La esfera unitaria, \mathbb{S}^2 , consta de los *puntos al infinito*, que como en el plano hiperbólico, no son parte del espacio. Las rectas hiperbólicas, también como en el caso de dos dimensiones, son las intersecciones con las líneas proyectivas, es decir, serán segmentos de línea abiertos cuyos extremos son puntos al infinito (pertenecen a \mathbb{S}^2). Análogamente, los planos son intersecciones de planos proyectivos con \mathbb{H}_k^3 , es decir, son discos abiertos completamente contenidos en la bola abierta y cuyos bordes son círculos que pertenecen a \mathbb{S}^2 .

Con estos conceptos básicos, obtenemos los de polígono (1.2) y poliedro (2.2) *hiperbólico*; pues como como aquellas definiciones únicamente dependen de los conceptos de punto, segmento de línea y plano, podemos utilizarlas en nuestro nuevo espacio sin ningún problema. Así que polígonos o poliedros cuyos vértices estén cerca del origen (a distancia menor que 1) se pueden considerar como hiperbólicos. Sin embargo, como pronto veremos, se va a cumplir que entre más cerca estén los vértices entre sí (o del origen), los ángulos se van a parecer más a los ángulos euclidianos, y mientras más se alejen, o se acerquen los vértices al infinito, el ángulo va a decrecer. Teniendo como caso especial y límite aquel en que todos los vértices de la figura sean puntos al infinito, dicha figura la llamaremos *polígono o poliedro ideal*.

De esta manera, los ángulos de las figuras que viven aquí, están acotadas por abajo por su respectiva figura ideal y por arriba por su versión euclidiana. En el caso particular de los polígonos, por abajo están acotados por el ángulo de 0° , esto porque dos aristas adyacentes se tocan en el infinito, es decir son paralelas. Mientras que en los poliedros este ángulo siempre es mayor a 0° , por ser un ángulo diédrico, es decir, el ángulo entre dos caras planas y no solamente líneas. Así que podemos tener pentágonos regulares con ángulos rectos y con ángulos de 0° como en la Figura 4.1a.

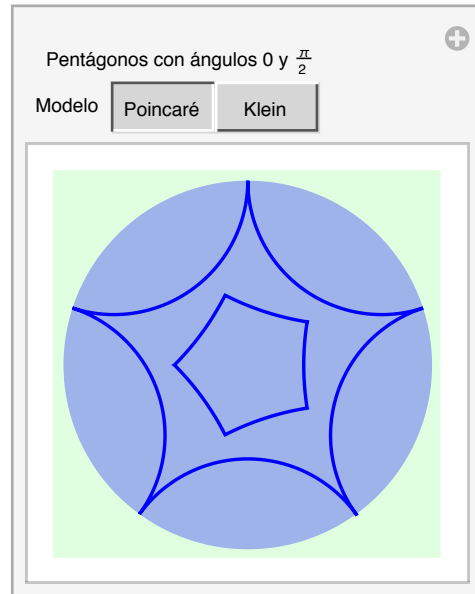


Figura 4.1a

4.2) Modelo de Klein

Como ya sabemos, \mathbb{H}_k^3 consiste en el interior de la esfera unitaria, y al considerarla dentro del espacio proyectivo como en la definición (4.1), su forma cuadrática asociada será el polinomio homogéneo en cuatro variables:

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2$$

La cual se conoce como *forma cuadrática de Lorentz* y su matriz simétrica asociada es la *matriz de Lorentz*

4.21

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Entonces podemos escribir

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = (x, y, z, w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T L \mathbf{x}$$

Y con esto en mente, se define el *producto interno de Lorentz-Minkowski* como

4.22

$$\mathbf{x} \bullet_L \mathbf{y} := \mathbf{x}^T L \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (L\mathbf{y}) = (L\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \quad (4.3)$$

Esta función de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ en \mathbb{R} es *simétrica* y *bilineal* y es una herramienta muy poderosa. Análogamente al caso euclidiano donde la norma proviene del producto interior; podemos pensar en la *norma de Lorentz-Minkowski* o la *L-norma* de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$:

$$|x|_L^2 := x \bullet_L x = x^T L x$$

Otra consecuencia de este producto es la definición de *L-ortogonalidad*. Dados dos vectores u y v en \mathbb{R}^4 se dice que son *L-ortogonales* si

$$u \bullet_L v = 0$$

Podemos definir en *plano L-ortogonal* a v en \mathbb{R}^4 , con $v \neq 0$, como

$$\Pi_{L_v} := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid v \bullet_L x = 0\}.$$

También podemos definir lo que es el *plano polar*, concepto que será de gran utilidad para el siguiente capítulo. Sea $\mathbf{p} = [v]$ un punto en \mathbb{P}^3 , su *plano polar* es

4.23

$$\Pi_{\mathbf{p}} := \{[x] \in \mathbb{P}^3 \mid v \bullet_L x = 0\}. \tag{4.4}$$

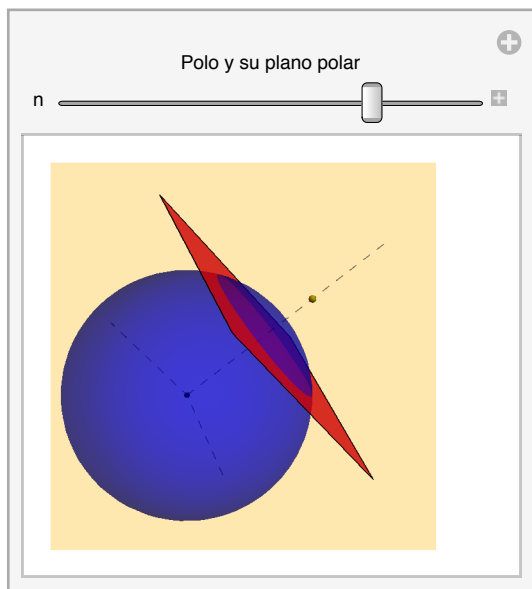
En términos geométricos, tenemos que al tomar un punto $\mathbf{p} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{P}^3$, su vector asociado en \mathbb{R}^4 es $v = (a, b, c, 1)$ cuyo plano polar tiene como polinomio homogéneo asociado a

$$v \bullet_L x = (a, b, c, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ax + by + cz - w.$$

Que nos da, de vuelta en \mathbb{R}^3 tomando $w=1$, el plano polar de $\mathbf{p} = (a, b, c)$

$$\Pi_{\mathbf{p}} : ax + by + cz = 1$$

que, para $\mathbf{p} \neq 0$, es el plano ortogonal al vector (a, b, c) y cuya distancia al origen es el inverso de la norma de (a, b, c) . Lo que da tres casos: si \mathbf{p} esta contenido dentro de la esfera unitaria (es decir $|\mathbf{p}|^2 < 1$), entonces su plano polar se encuentra afuera de la esfera unitaria; si \mathbf{p} está sobre la esfera unitaria (es decir $|\mathbf{p}|^2 = 1$), el plano polar es el tangente (en ese mismo punto) a la esfera; y si \mathbf{p} esta afuera de la esfera unitaria (es decir $|\mathbf{p}|^2 > 1$), el plano polar cortará a dicha esfera, y esa intersección será un plano hiperbólico en \mathbb{H}_k^3 como se muestra en la Figura 4.2a.



También hay que notar que si $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, su plano polar es el del infinito y que si \mathbf{p} está afuera de la esfera, la intersección de ésta con su plano polar define el cono de tangencia de ese punto respecto a la esfera.

La fórmula para calcular el ángulo diédrico entre dos planos hiperbólicos resulta ser similar a la euclidiana: si $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}]$ son sus puntos polares en \mathbb{P}^3 , y los planos se intersectan (en el espacio hiperbólico), se tiene que el ángulo entre ellos es

$$\arccos\left(\frac{\mathbf{u} \bullet_L \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|_L |\mathbf{v}|_L}\right). \tag{4.5}$$

Por ejemplo, el cubo $\{4, 3\}$ se puede sumergir en el espacio hiperbólico centrado en el origen y con caras ortogonales a los ejes coordenados, dependiendo de un parametro (el *tamaño*). En el límite de “tamaño 0” los puntos polares de las caras están en el infinito (con cuarta coordenada 0) y la fórmula da justo la de la geometría euclidiana, es decir, entre más chico el cubo, tiende a tener ángulo diédrico de 90° . En el otro extremo, el $\{4, 3\}$ ideal, con vértices en la esfera al infinito, los puntos polares de las caras son los seis de la forma $[0 : \pm\sqrt{3} : 0 : 1]$ en los ejes, y tenemos de la fórmula (4.5) que las caras que se intersectan lo hacen en 60° .

Análogamente, podemos pensar al resto de los sólidos platónicos euclidianos y hacerlos hiperbólicos con un cierto *tamaño*. Por lo anterior, dan una infinidad de cubos, de tetraedros, de icosaedros, de octaedros y de dodecaedros geoméricamente diferentes, donde los ángulos diédricos, estarán acotados por arriba por los de los euclidianos y por abajo por los de los ideales (Figuras 4.2b, 4.2c, 4.2d, 4.2e, 4.2f). A estos poliedros hiperbólicos los llamaremos *esféricos* por su topología.

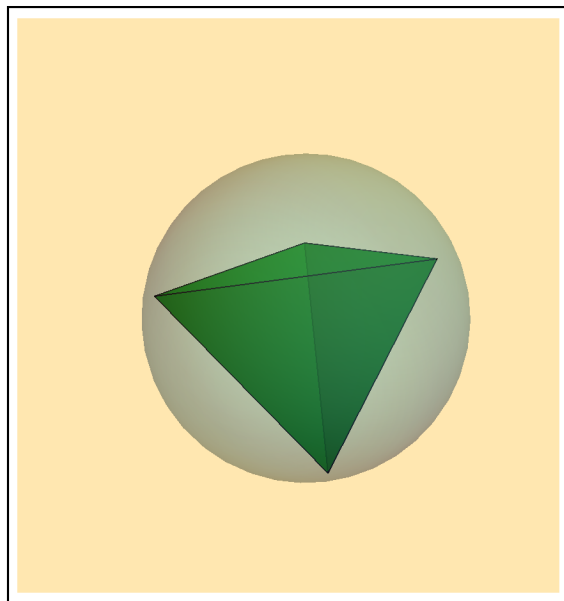
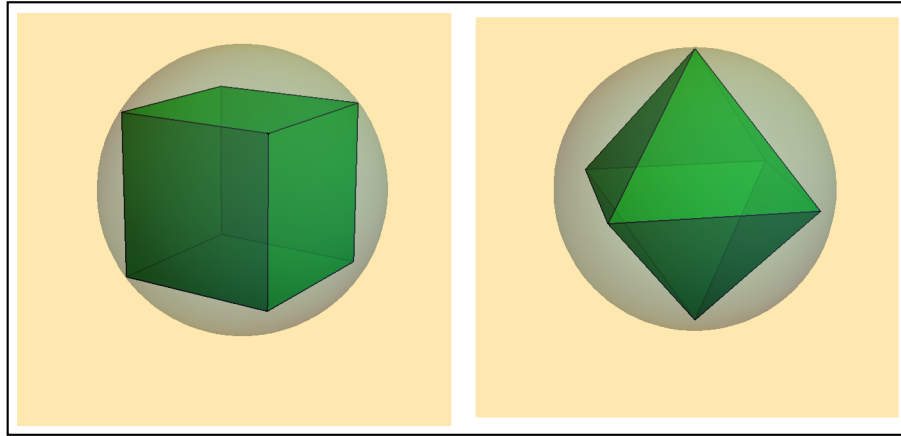
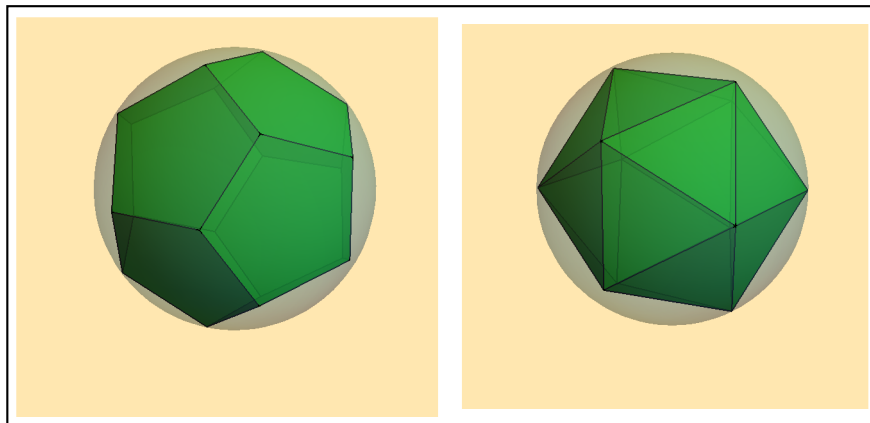


Figura 4.2b



Figuras 4.2c y 4.2d



Figuras 4.2e y 4.2f

4.3) Modelo de Poincaré

Al igual que en el plano, el modelo de Poincaré del espacio hiperbólico tiene los mismos puntos que el de Klein, es decir, será nuevamente la bola abierta o el interior de la esfera unitaria:

$$\mathbb{H}_p^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

y los puntos que están en la frontera, \mathbb{S}^2 , serán los puntos “al infinito”. Pero ahora los planos son la intersección de esferas ortogonales a \mathbb{S}^2 y las líneas, la intersección de círculos ortogonales a la frontera.

Una de las propiedades que hacen al modelo de Poincaré muy atractivo visualmente, es que es *conforme*, es decir, los ángulos que se miden euclidianamente corresponden precisamente a los ángulos hiperbólicos.

Podemos mandar el modelo de Klein al de Poincaré, mediante la función que manda planos en un modelo a los planos en el otro:

$$h : \mathbb{H}_k^3 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{H}_p^3 \subset \mathbb{R}^3$$

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(\frac{1-\sqrt{1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \right) \mathbf{x} & \text{si } \mathbf{x} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ es el producto punto euclidiano. Esta función se extiende continuamente al resto de \mathbb{P}^3 como la identidad, de tal manera que los puntos polares de los planos hiperbólicos (en \mathbb{H}_k^3) resultan ser ahora los centros de las esferas correspondientes como planos de \mathbb{H}_p^3 .

De esta manera podemos ver a los poliedros en cualquiera de los dos modelos y en particular, los platónicos ideales dan las figuras siguientes.

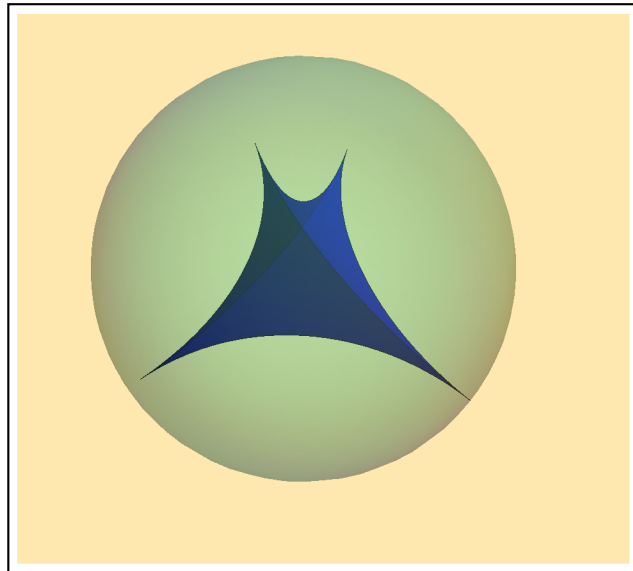
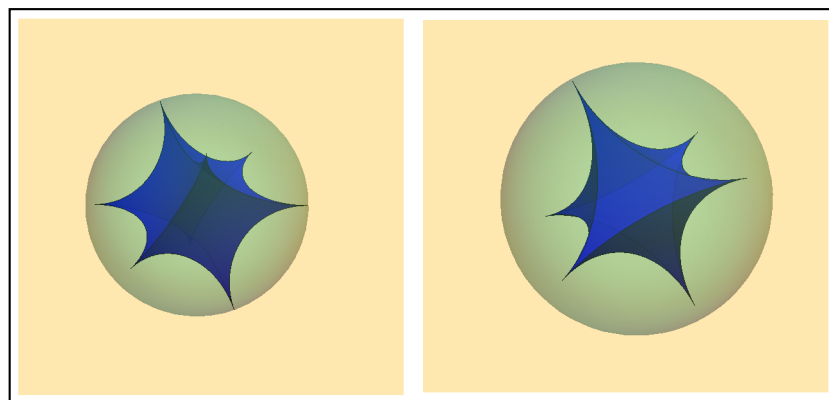
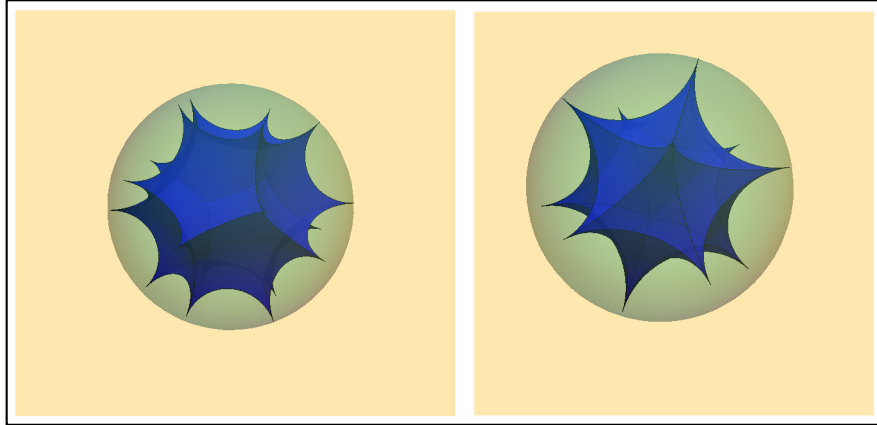


Figura 4.3a



Figuras 4.3b y 4.3c



Figuras 4.3d y 4.3e

4.4) Las transformaciones

En el modelo de Klein, el grupo de *transformaciones hiperbólicas* consiste de todas las transformaciones proyectivas que dejan fijo (como conjunto) al espacio (\mathbb{H}_k^3) , y por ende a su frontera. No es difícil ver que coincide con el subgrupo proyectivizado de las matrices A en $GL(4)$ que cumplen

$$A^T L A = L .$$

Es decir, consta de las matrices que dejan invariante a la forma bilineal de Lorentz. Se tiene entonces que preservan polaridad, y como están definidas más allá del espacio hiperbólico mandan a los puntos exteriores en los puntos polares de la imagen del plano hiperbólico correspondiente.

Una de las propiedades que hacen al modelo de Klein muy útil es que sus transformaciones resultan ser tan fáciles de manejar como lo son las matrices.

Las Reflexiones

Dentro de las isometrías, unas de gran importancia son las reflexiones. Pues con ellas se generan todas las isometrías y también con ellas se generan las simetrías de los polítopos que nos interesan.

Dado un plano hiperbólico en \mathbb{H}_k^3 , con punto polar $[p]$, la reflexión en ese plano está dada por:

$$f_{[p]} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$f_{[p]}([x]) = \left[x - 2 \left(\frac{x \bullet_L p}{p \bullet_L p} \right) p \right]. \quad (4.6)$$

En el modelo de Poincaré, las reflexiones son las inversiones en las esferas definidas por los planos, que son más difíciles de expresar analíticamente. Así que se podría decir que el modelo de Poincaré está contenido en la “geometría inversiva”, mientras que el de Klein vive en la geometría proyectiva.

4.5) Andamios Proyectivos

Al ver al espacio hiperbólico contenido dentro del proyectivo (modelo de Klein) e “interpretar” a los puntos exteriores como planos hiperbólicos, nos permite asociar naturalmente a cada cara de algún poliedro hiperbólico el punto polar de su plano, las aristas internas corresponderán a segmentos externos y los vértices a planos para obtener, “afuera”, una

estructura dual.

Como vimos en la Sección 1.5, dualidad y reciprocidad, observemos que podemos hacer lo mismo con la polaridad. Así obtenemos una estructura proyectiva exterior que tiene toda la información de un poliedro hiperbólico, dicha estructura la llamaremos *andamio proyectivo* y tiene la estructura combinatoria del poliedro dual. Las Figuras 4.5a, 4.5b, 4.5c, 4.5d y 4.5e muestran los andamios proyectivos de los sólidos platónicos ideales, sobreponiendo los dos modelos. Obsérvese que, por ser ideales, las caras de los andamios contienen a los vértices del original. Si no fueran ideales, los andamios estarían más alejados de la esfera.

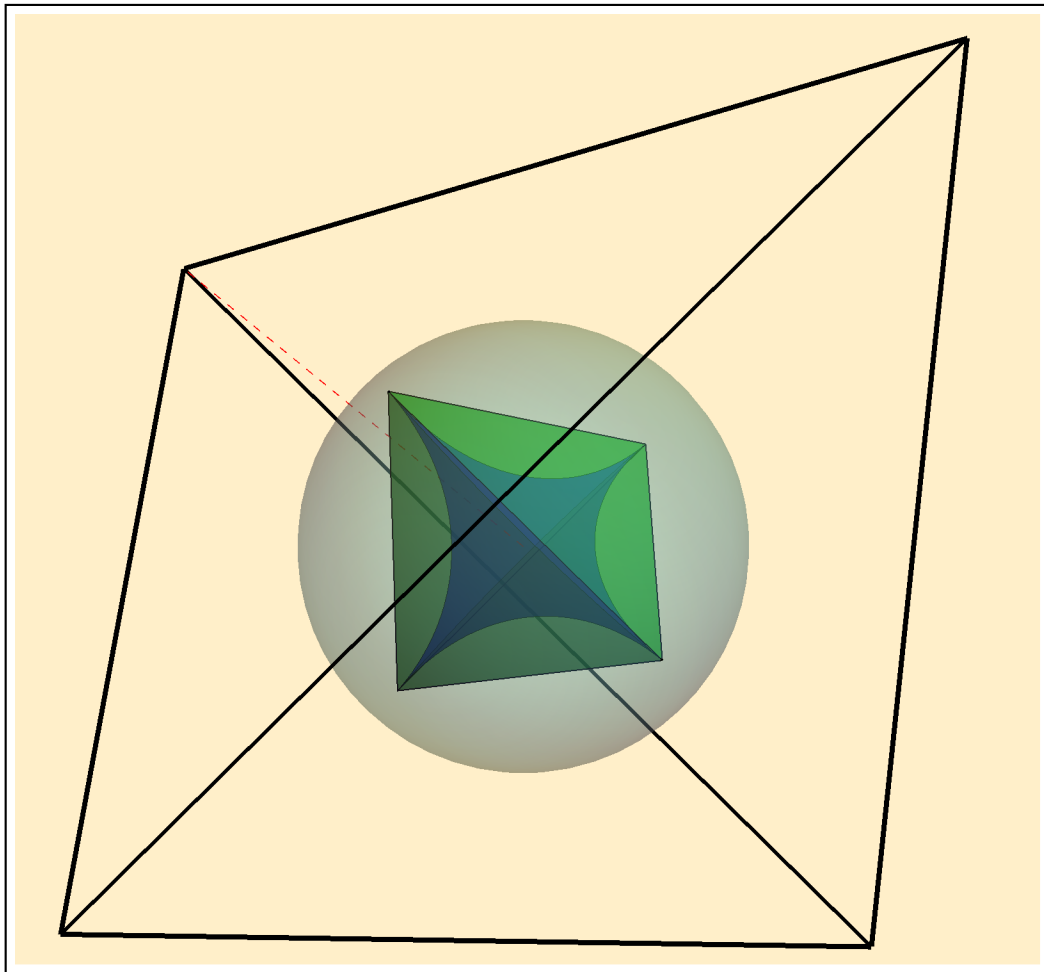


Figura 4.5a

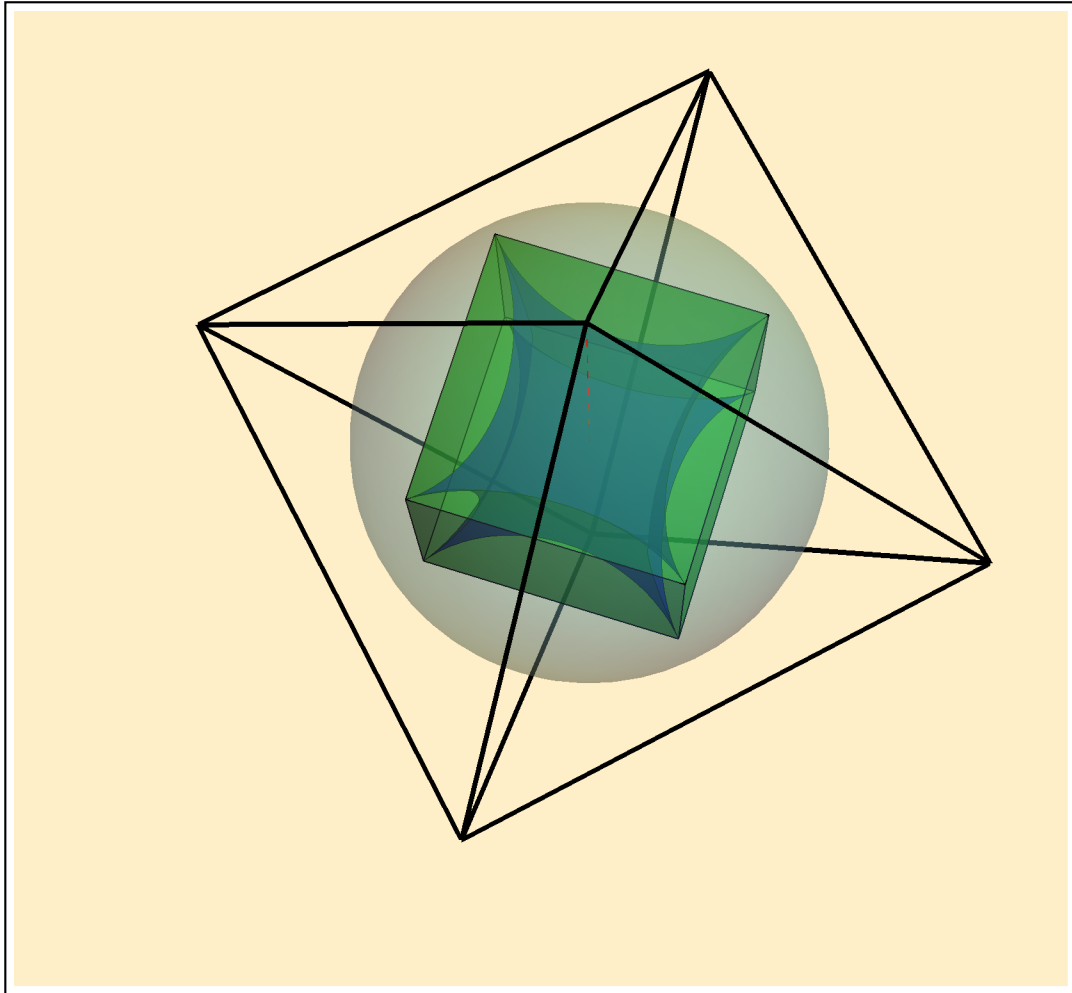


Figura 4.5b

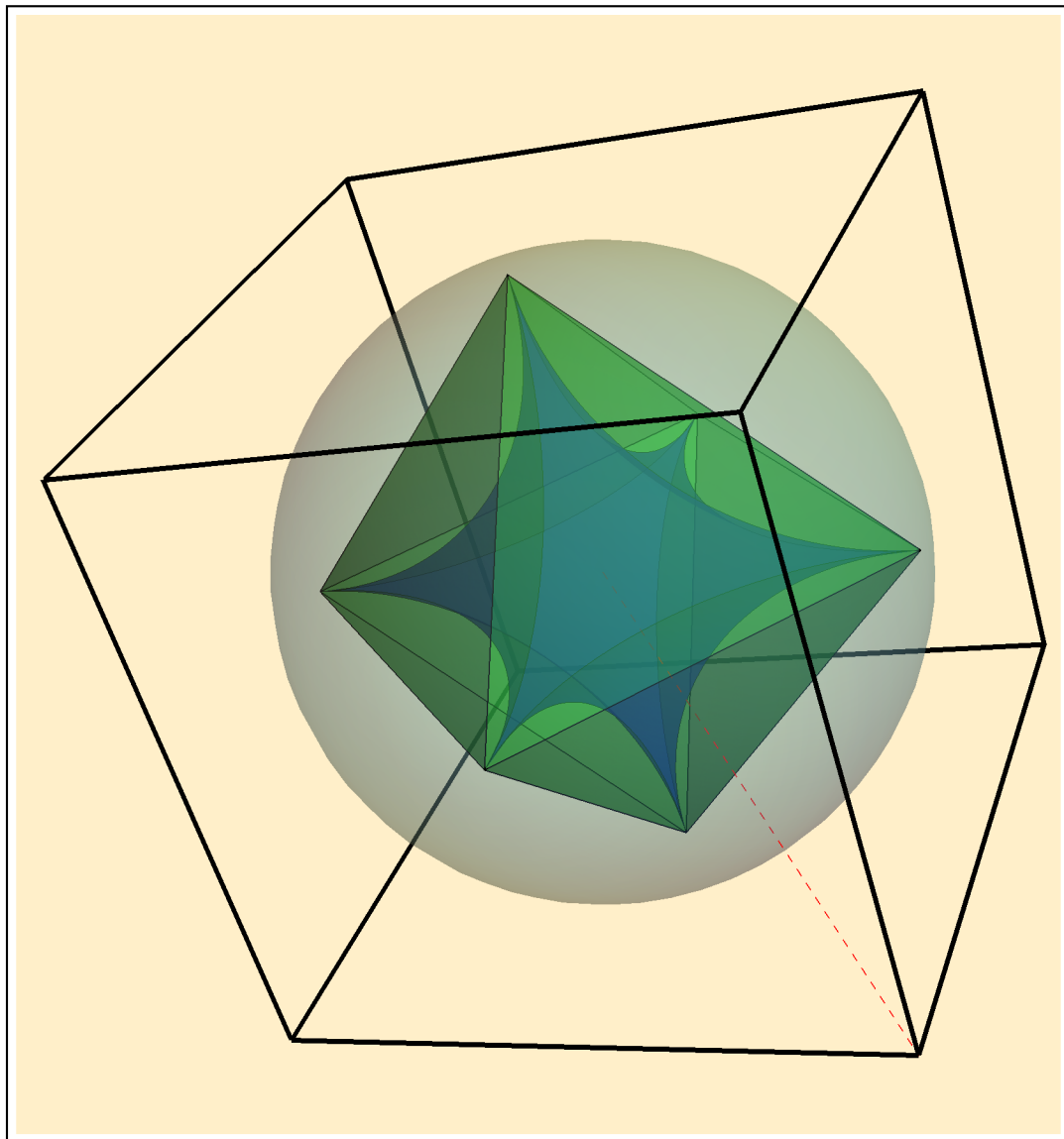


Figura 4.5c

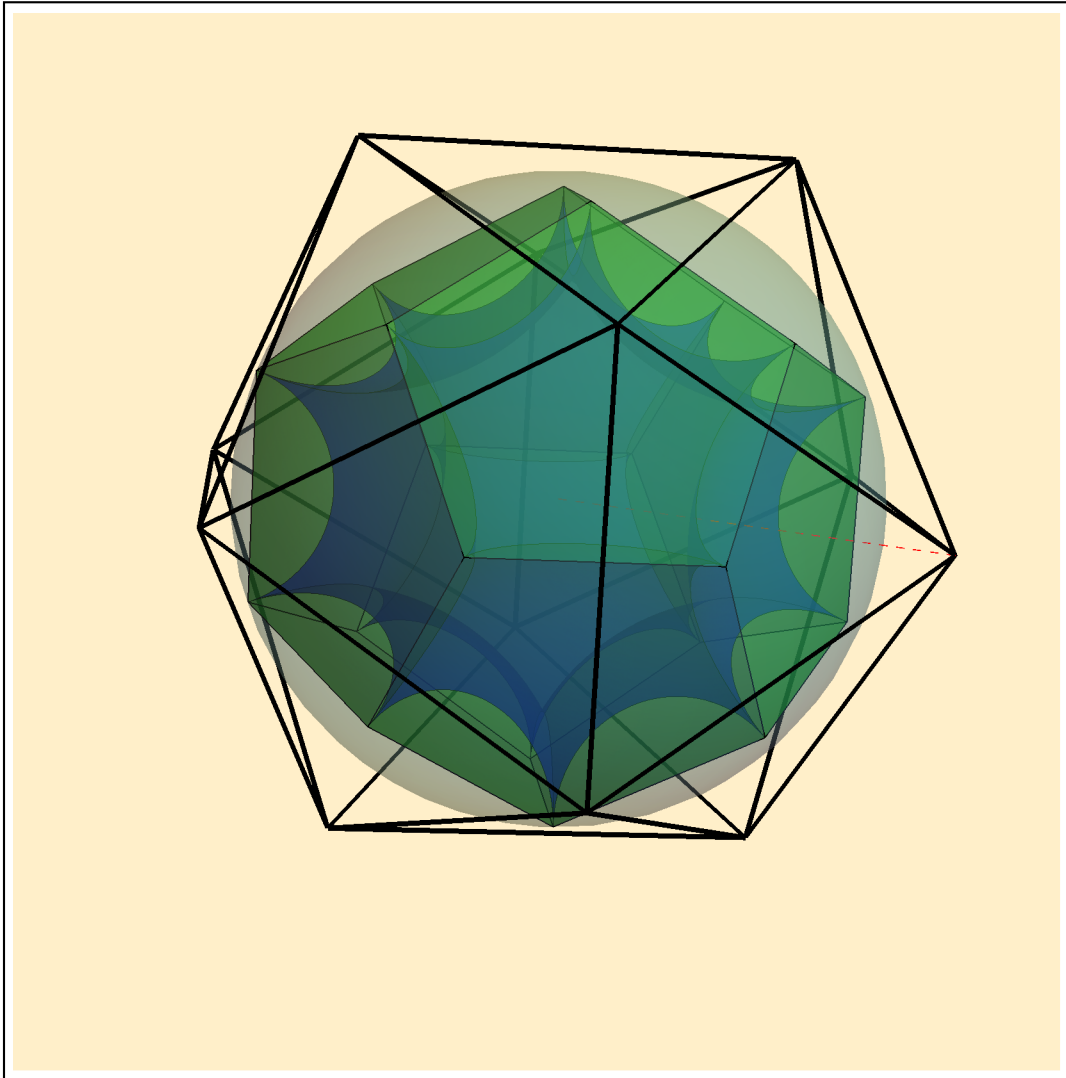


Figura 4.5d

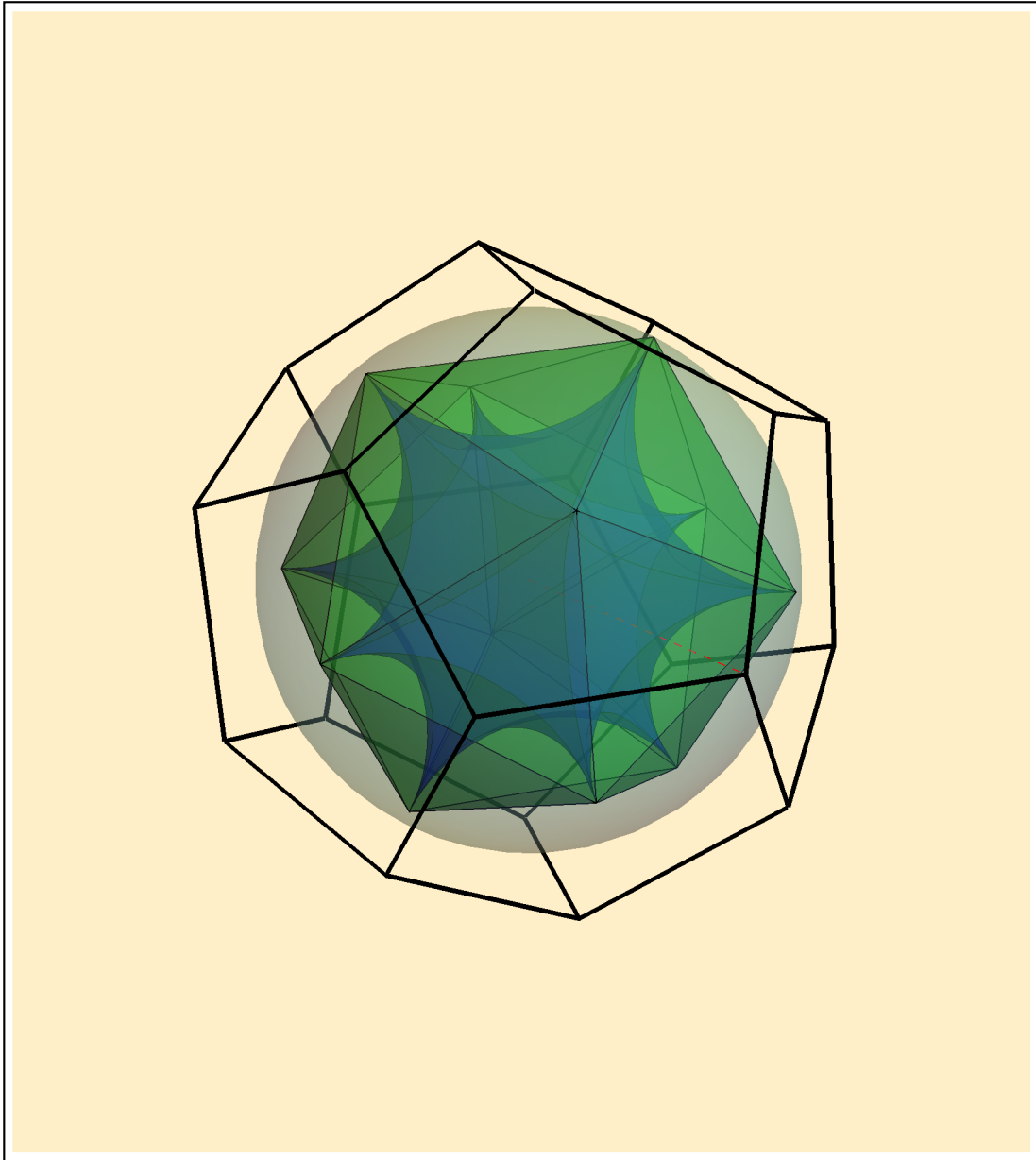
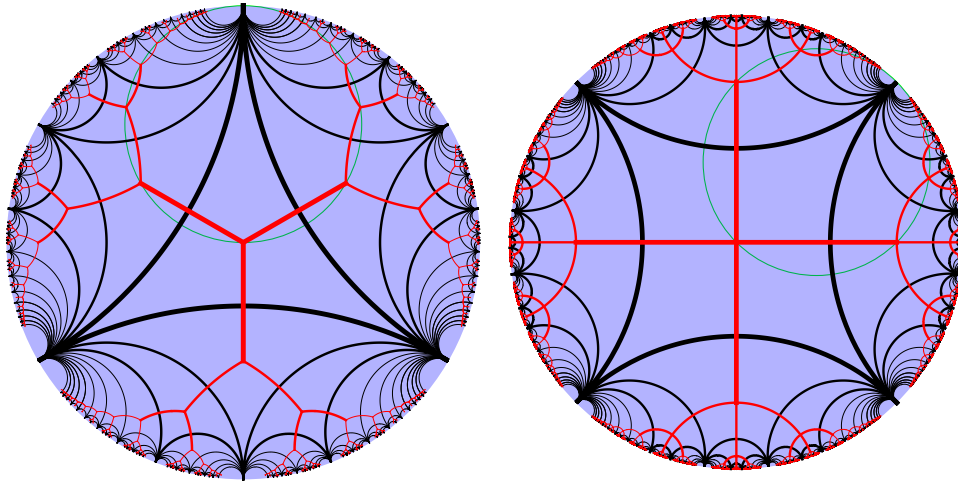


Figura 4.5e

Para dibujar los polítopos hiperbólicos, los andamios proyectivos de los poliedros regulares nos serán muy útiles pues sus vértices serán la base para obtener sus reflexiones según la ecuación (4.6).

4.6) Polígonos y poliedros horocíclicos

Consideremos la teselación del plano hiperbólico por triángulos ideales, $\{3, \infty\}$. El símbolo ∞ representava que la figura del vértice es combinatoriamente un apeirogon $\{\infty\}$, pero también tiene un significado geométrico más preciso. Al tomar los centroides de las facetas (los $\{3\}$ ideales), y unirlos por una arista cuando son vecinos, obtenemos realizaciones geométricas del apeirogon $\{\infty\}$ “alrededor de” (o que se “aproximan a”) cada vértice. Considerando a estos como caras, se obtiene el dual $\{\infty, 3\}$. En las Figuras 4.6a y 4.6b, se muestran en negro las teselaciones $\{3, \infty\}$ y $\{4, \infty\}$ y en rojo sus respectivos duales $\{\infty, 3\}$ e $\{\infty, 4\}$ en el modelo de Poincaré.



Figuras 4.6a y 4.6b

Estos apeirogonos $\{\infty\}$ serán llamados *horocíclicos* pues sus vértices están dentro de un *horociclo* (en verde en las figuras), que se define como una curva perpendicular a un haz paralelo (en nuestro caso el haz que confluye al vértice correspondiente). En el modelo de Poincaré, los horociclos son círculos tangentes al círculo al infinito.

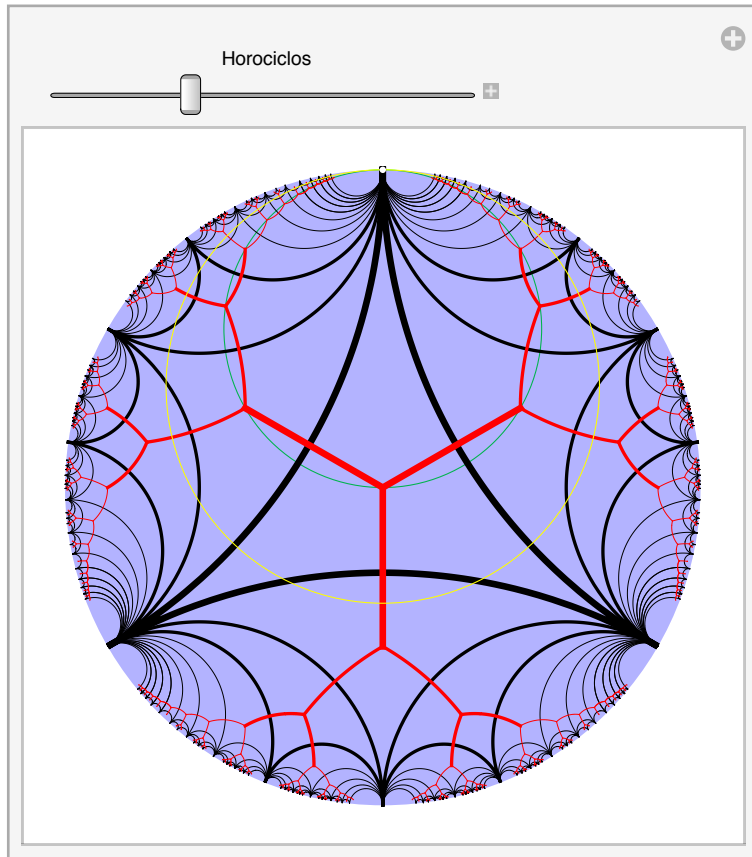


Figura 4.6c

Para que la dualidad entre poliedros tenga sentido en el nuevo caso de caras horocíclicas, es natural pensar que el *centroide* de un apeirogon horocíclico es el punto al infinito asociado al horociclo en que están sus vértices. Entonces el dual de $\{\infty, p\}$ es, geoméricamente, la teselación $\{p, \infty\}$ por p -gonos ideales.

En el espacio hiperbólico, el análogo de los horociclos son las *horosferas*, definidas como las superficies perpendiculares a un haz paralelo, y que en el modelo de Poincaré resultan ser esferas tangentes al infinito. Por supuesto, las horosferas son realmente esferas menos un punto (el de tangencia) y al proyectar estereográficamente desde ese punto a un plano euclidiano, se pueden identificar, más precisa y biyectivamente, las horosferas con un plano. Pero más aún, cuando se considera al grupo de transformaciones hiperbólicas que dejan en su lugar a una horosfera, resulta ser que coincide justo con el de isometrías euclidianas de ese plano.

Así, obtenemos 3 nuevos tipos de poliedros hiperbólicos, los *horosféricos* o, mejor, *planos*, que provienen de las teselaciones regulares del plano $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$. En las Figura 4.6d, 4.6e y 4.6f, se representan ejemplos en el modelo de Klein. De nuevo, vienen en familias continuas que dependen de la geometría hiperbólica de la tesela básica, pero no tienen caso “ideal” como en el caso de los polígonos esféricos.

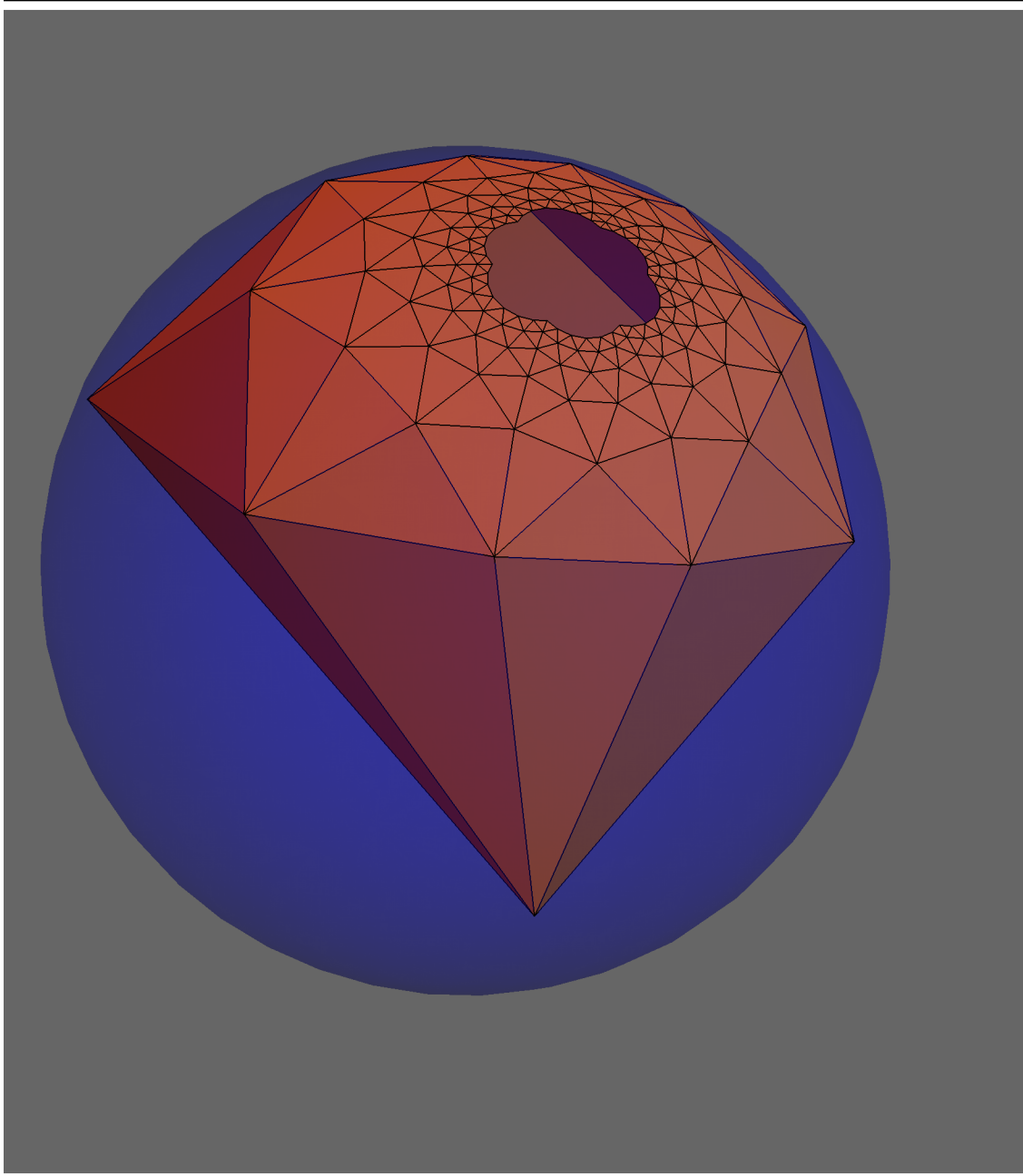


Figura 4.6d

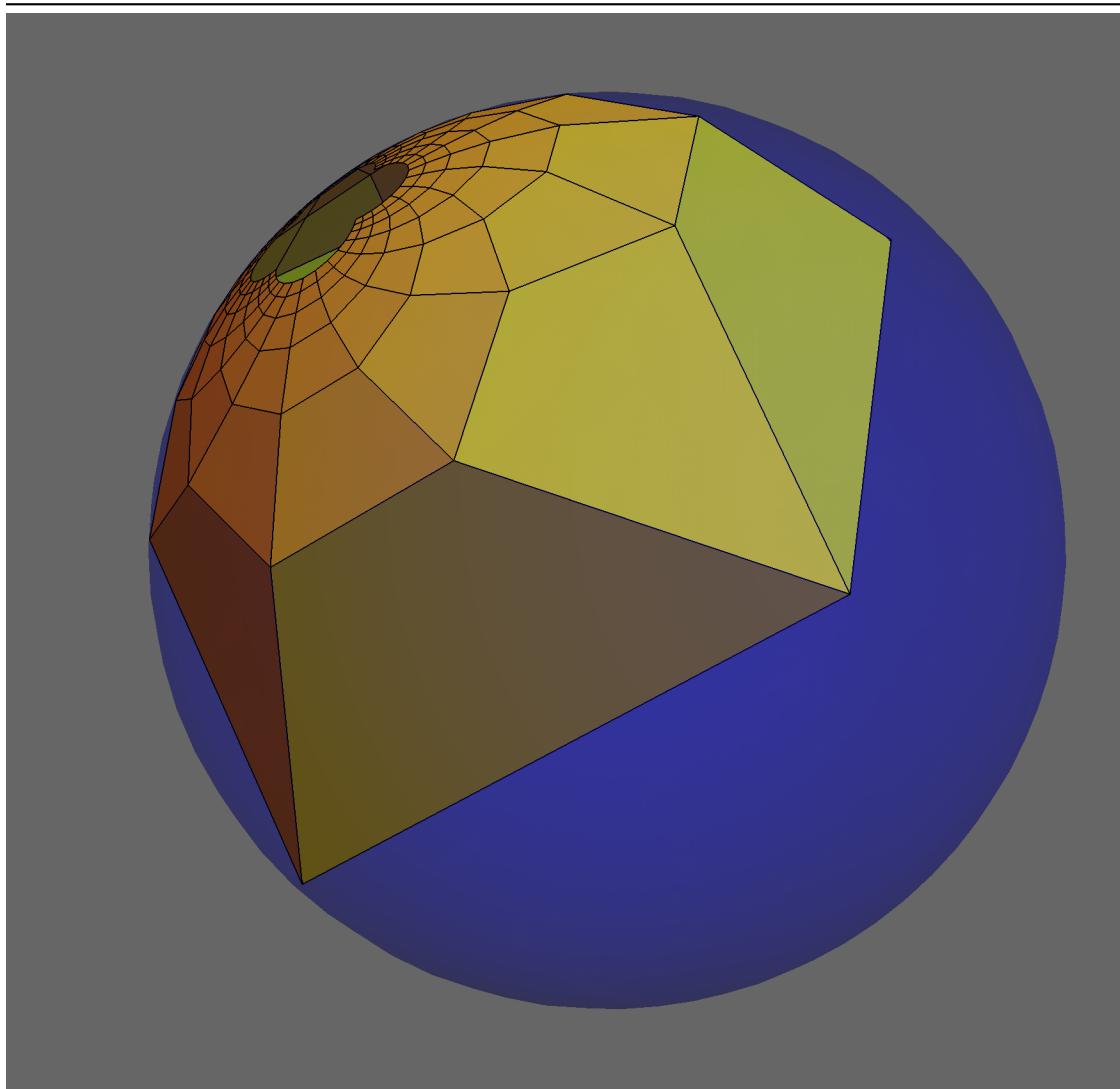


Figura 4.6e

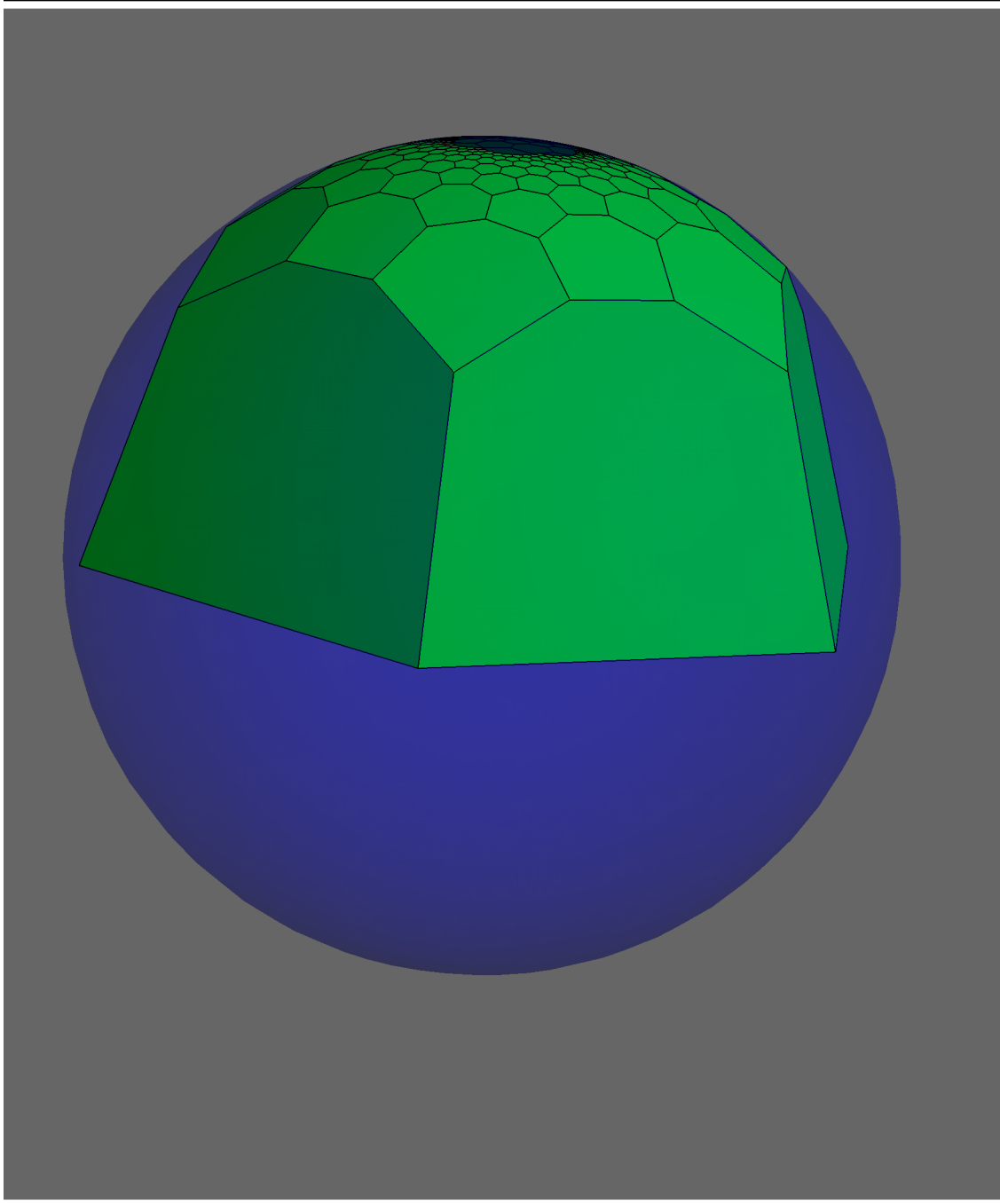


Figura 4.6f

5

Teselaciones regulares del espacio hiperbólico

5.1) La restricción

(Fragmentos de Coxeter, [C1]. Sección 3)

Harold Scott MacDonald Coxeter (1907- 2003), uno de los geómetras más importantes del siglo XX, en su artículo Regular Honeycombs in Hiperbolic Space [RH], mediante una justificación comprimida, clasifica todas las teselaciones regulares del espacio hiperbólico de la dimensión 2 a la 5. Como se mencionó en la introducción de la presente tesis, los objetivos principales de esta son: la ilustración de la parte 3-dimensional de dicho artículo, al igual que una justificación un poco más detallada de sus construcciones.

Como vimos en el capítulo anterior, todos los poliedros regulares en el espacio hiperbólico cumplen que sus ángulos diédricos están acotados por arriba por los ángulos diédricos de su respectivas versiones euclidianas (sección 1.5) y por abajo por los ángulos de sus versiones ideales (sección 4.2). Pero de toda esa gama de posibles poliedros geoméricamente distintos que habitan en el espacio hiperbólico, solo unos cuantos pueden teselar dicho espacio.

Para que un poliedro sea la faceta base de una teselación en el espacio hiperbólico; Coxeter en su artículo [RH] nos da una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra:

Un $\{p, q, r\}$ será una teselacion del espacio hiperbólico si y solo si

$$\begin{aligned} i) \quad & \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} < \cos \frac{\pi}{q} \\ ii) \quad & (p - 2)(q - 2) \leq 4 \\ iii) \quad & (q - 2)(r - 2) \leq 4 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La condición *i)* es la condición de Schläfli aplicada al espacio hiperbólico donde si se cumple la igualdad o la desigualdad en sentido contrario estamos en el caso euclidiano o esférico respectivamente, como lo muestra Coxeter en [RP] en la página 135. Mientras que las condiciones *ii)* y *iii)* son la consecuencia de (1.8) aplicada a la faceta y a la figura del vértice. Que la desigualdad sea estricta o se de la igualdad depende de si son esféricos (combinatoriamente uno de los sólidos platónicos) o planos (horosférico).

Aun que para no meternos con los ángulos (la primera condición), se puede ver fácilmente que de las 22 soluciones para *ii)* y *iii)*, una es la $\{4,3,4\}$ la cual es la única teselación euclidiana de tres dimensiones, 6 son de la esfera incluyendo la $\{4,3,3\}$ y las 15 restantes son las hiperbólicas.

Esto da lugar a la presentación de los politopos hiperbólicos en tres casos.

5.2) Esférico-esférico

Para empezar nuestra clasificación pensemos en los p , q y r que satisfacen 5.1 de tal manera que su poliedro (faceta base) y el de su dual están completamente contenidos en el espacio y son sólidos platónicos, a estos los llamaremos “*esférico-esférico*”.

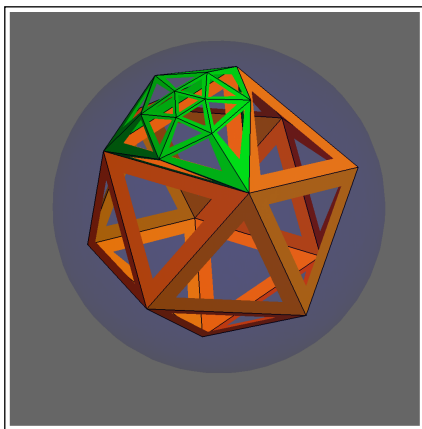
En este caso estamos pensando que existen r - $\{p, q\}$'s alrededor de una misma arista añadiéndose así $\{p, q\}$'s indefinidamente. Este tipos de teselaciones hiperbólicas 3-dimensionales $\{p, q, r\}$ constan entonces de una colección infinita de $\{p, q\}$, de tal manera que hay r de estos alrededor de cada arista. El arreglo de poliedros o celdas alrededor de un vértice será conforme al poliedro $\{q, r\}$ que es su figura-vértice y también un sólido platónico. A la vez, tenemos que los centroides de las facetas de $\{p, q, r\}$ son los vértices de su dual $\{r, q, p\}$, cuyas aristas cruzan a los $\{p\}$'s del original $\{p, q, r\}$ ortogonalmente en sus centros.

Los p, q y r que satisfacen esto son: $\{3, 5, 3\}$, $\{5, 3, 5\}$, $\{5, 3, 4\}$, $\{4, 3, 5\}$

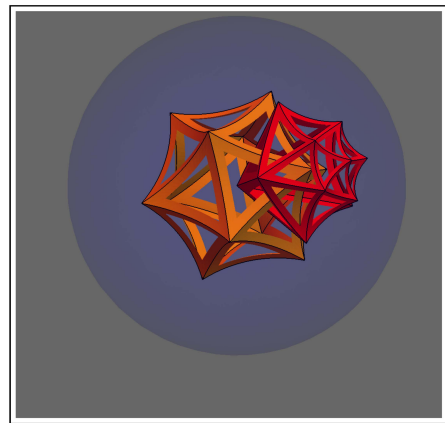
cuyas celdas básicas o facetas consisten del icosaedro con ángulo diédrico de $2\pi/3$ (que es autodual), el dodecaedro con ángulo diédrico de $2\pi/5$ (que es autodual), el dodecaedro con ángulo diédrico de $2\pi/4$ cuyo dual es el cubo con ángulo diédrico $2\pi/5$.

El $\{3, 5, 3\}$ autodual

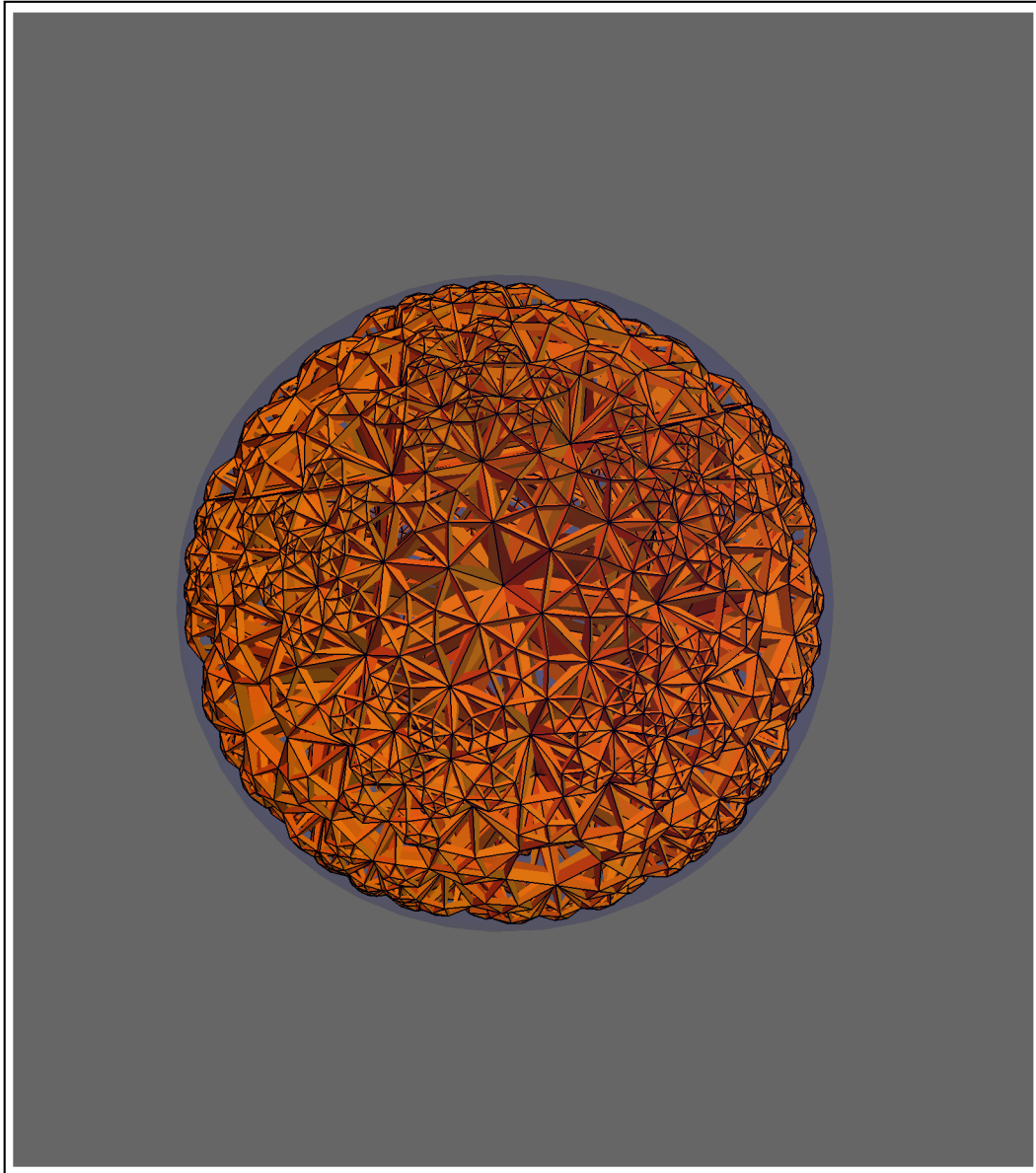
La primera faceta de la teselación en color naranja y en verde el reflejo de dicho icosaedro en una cara, en el modelo de Klein.



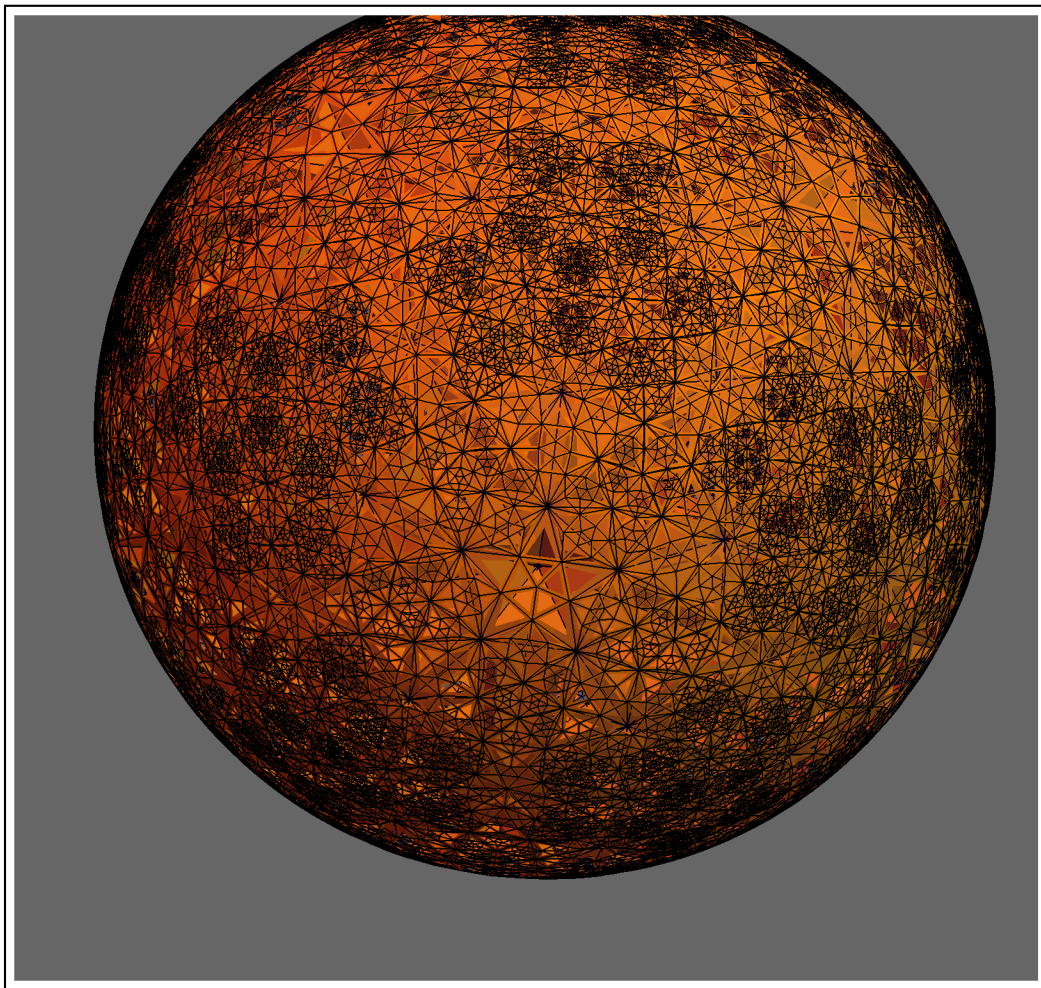
La primera faceta de la teselación en naranja y en rojo la primera faceta del dual en el modelo de Poincaré.



La capa 4 de la teselación en modelo de Poincaré.

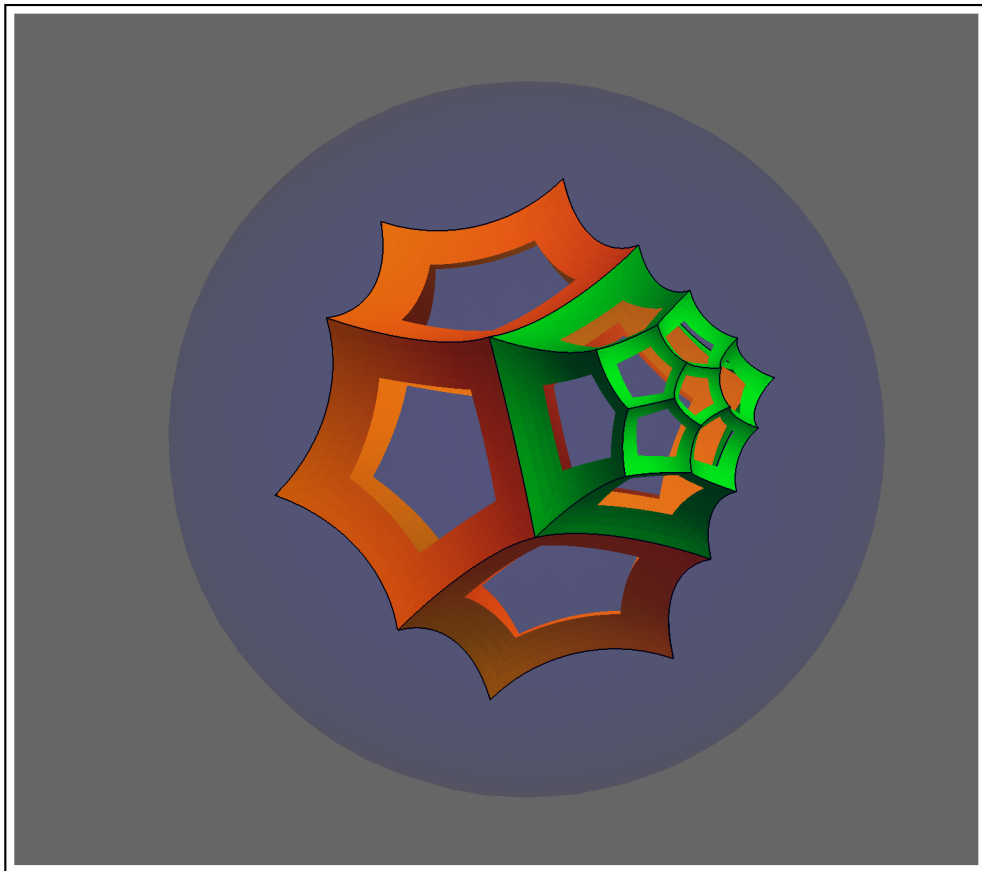


La capa 4 de la teselación en modelo de Klein.

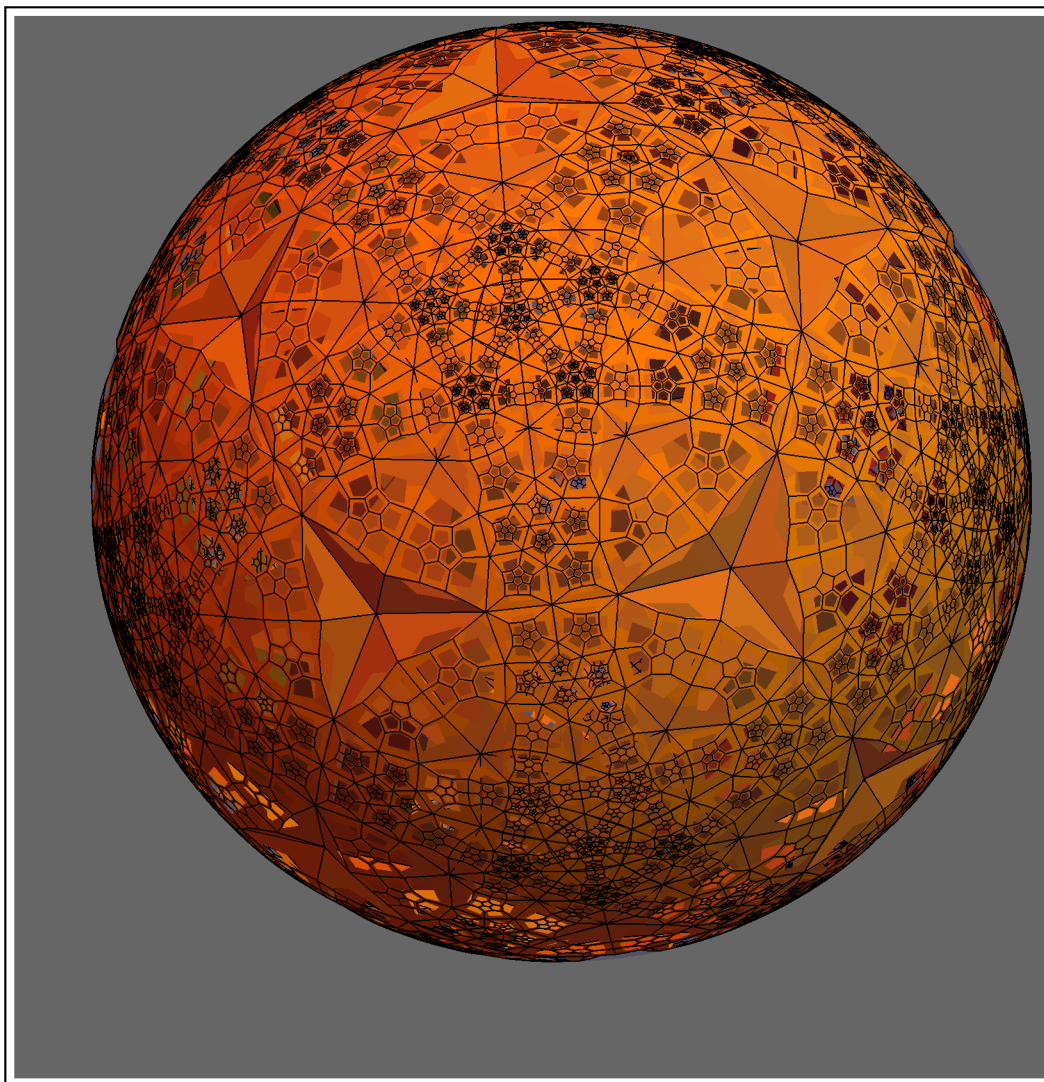


El {5, 3, 5} autodual

Primer faceta en color naranja y una reflexión en uno de sus lados en color verde en el modelo de Poincaré.

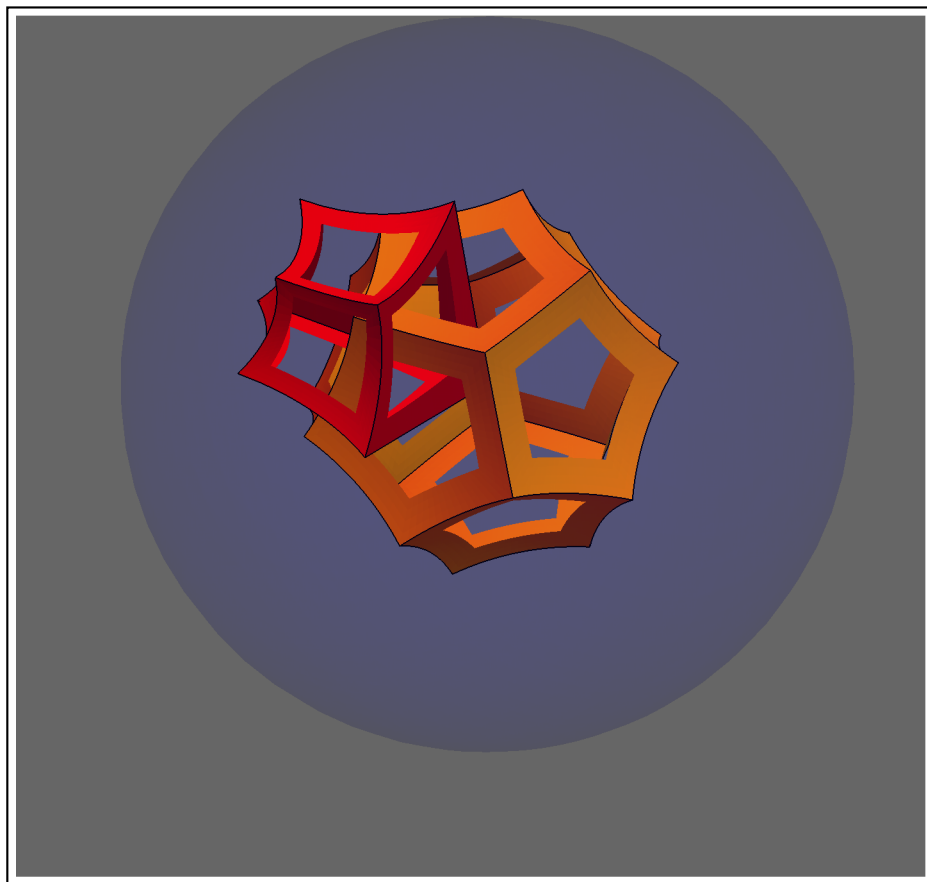


La capa 4 de la teselacion en el modelo de Klein

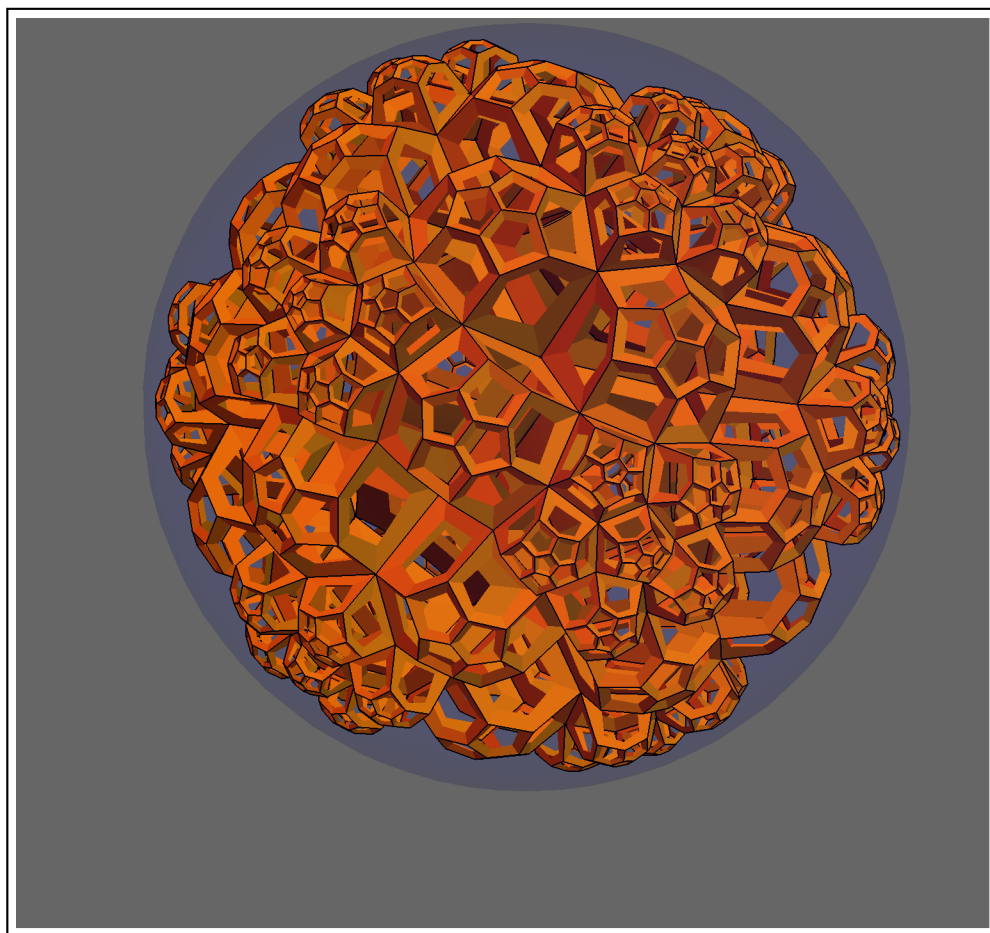


EI {5, 3, 4}

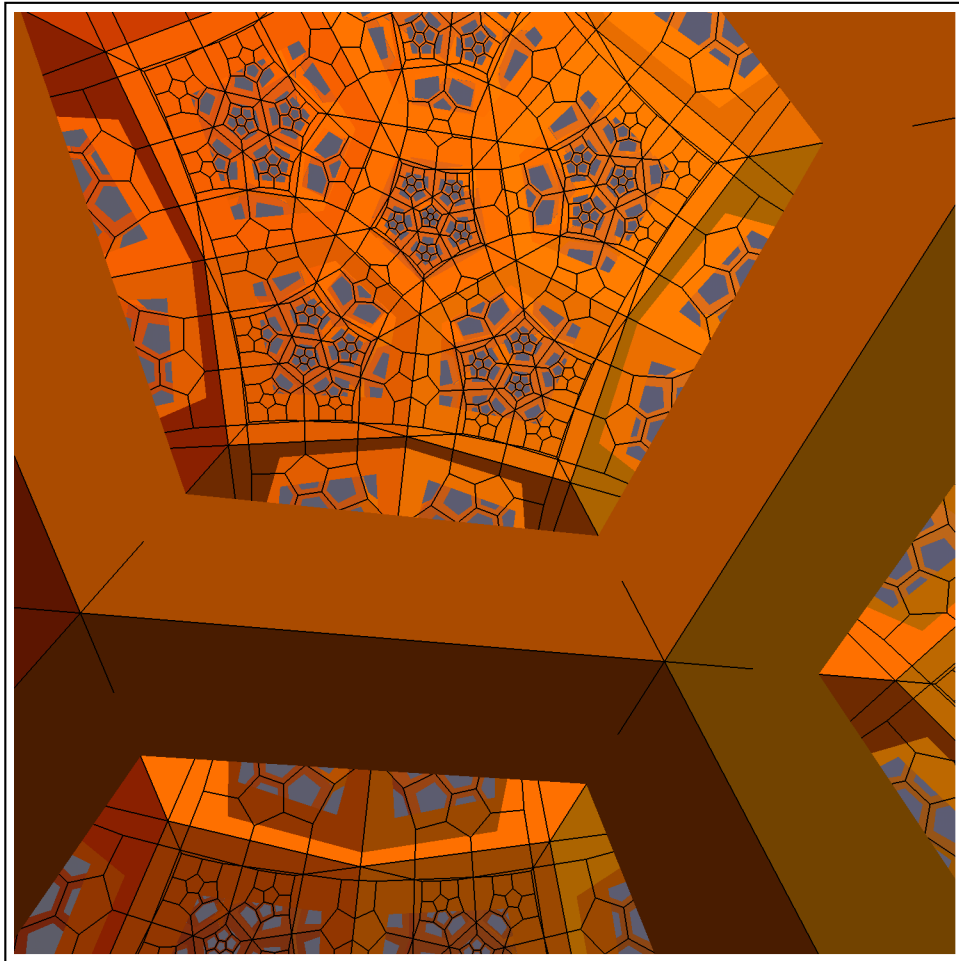
En naranja la primera faceta de la teselación con un vértice en el centro y en rojo su respectiva faceta dual, en el modelo de Poincaré.



La teselación hasta la capa 3 en el modelo de Poincaré.

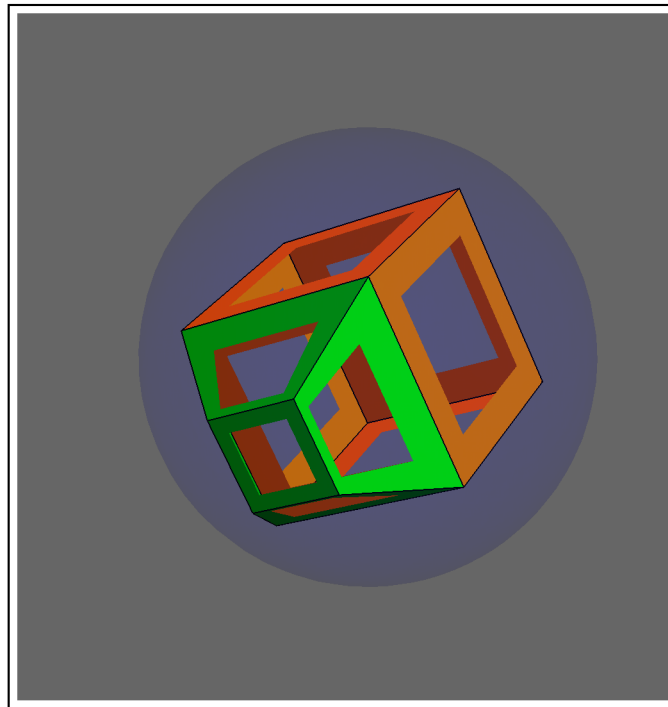


La teselación hasta la capa 4 en el modelo de Klein vista desde adentro.

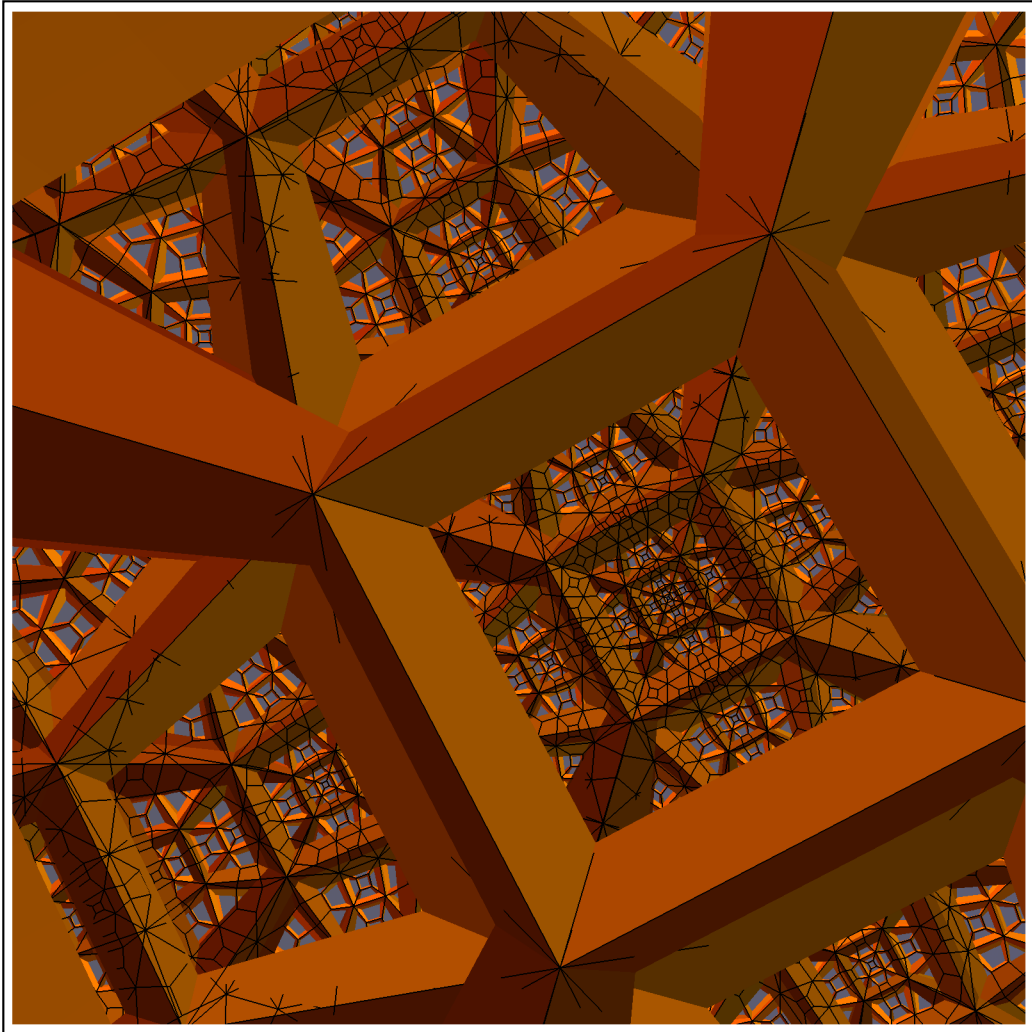


EI {4, 3, 5}

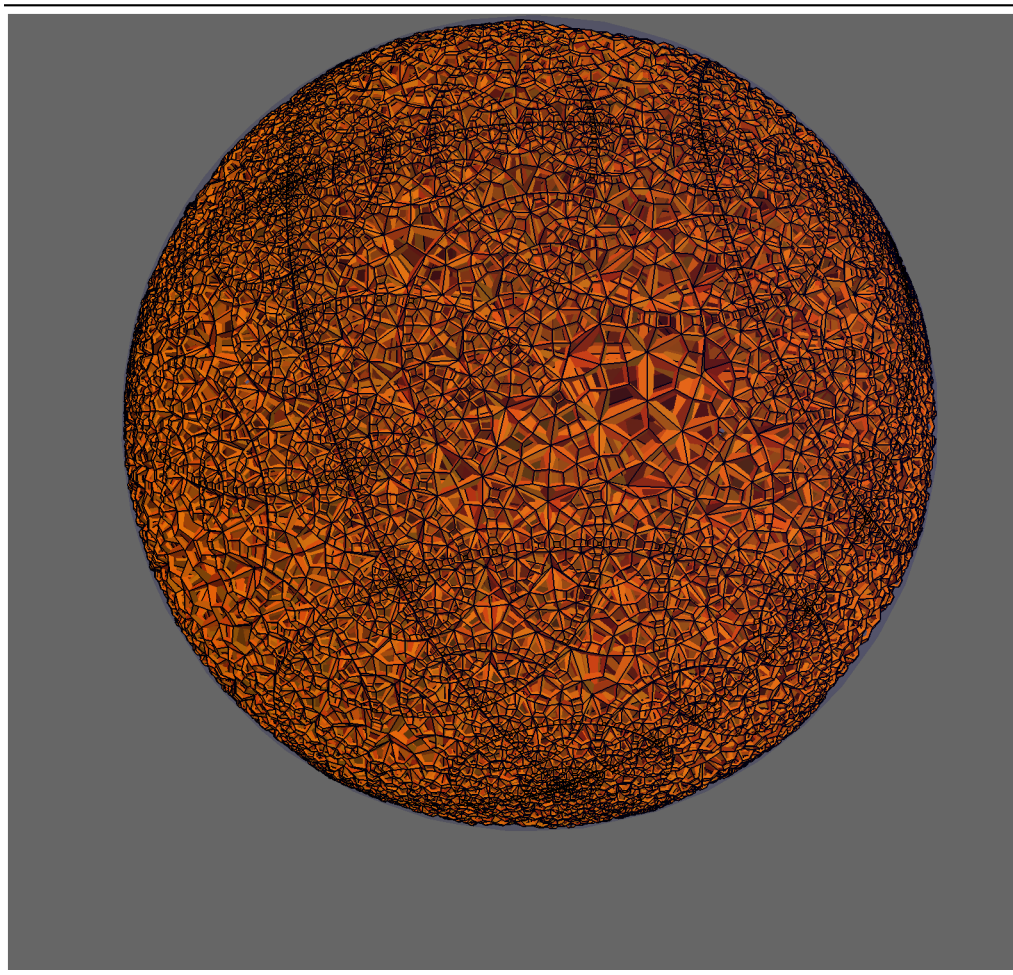
En color naranja la primera faceta de la teselación y en color verde su reflejo en uno de sus lados en el modelo de Klein.



Hasta la 7 capa de la teselación en el modelo de Poincaré vista desde adentro.



Hasta la 7 capa de la teselación en el modelo de Poincaré.



5.3) Planos-Esfericos

Por otra parte también tenemos los que tienen polígonos ideales en su faceta iniciales, los cuales resultan ser los sólidos platónicos con la excepción que acabamos de ver el caso del icosaedro. De esta manera los poliedros $\{p, q\}$ que cumplen que su ángulo diedrico es de $(1 - \frac{2}{q})\pi$, los cuales por consecuencia, tienen una infinidad numerable de vértices al infinito son

$\{3, 4, 4\}$, $\{3, 3, 6\}$, $\{4, 3, 6\}$, $\{5, 3, 6\}$

y sus respectivos duales:

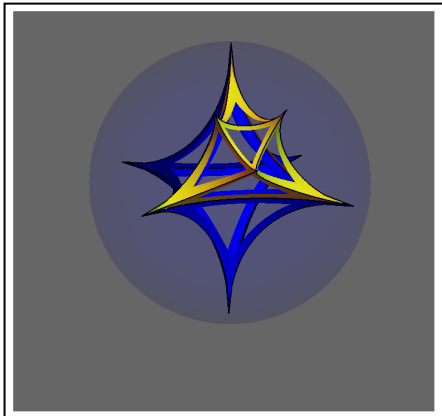
$\{4, 4, 3\}$, $\{6, 3, 3\}$, $\{6, 3, 4\}$, $\{6, 3, 5\}$

esto se debe como ya vimos, por (2.5), lo podemos poner en términos de r . En el primer bloque tenemos las facetas iniciales que constan de: un octaedro con ángulo diédrico de $2\pi/4$, un tetraedro con ángulo diédrico de $2\pi/6$, un cubo con ángulo diedrico de $2\pi/6$ y un dodecaedro con ángulo diédrico de $2\pi/6$.

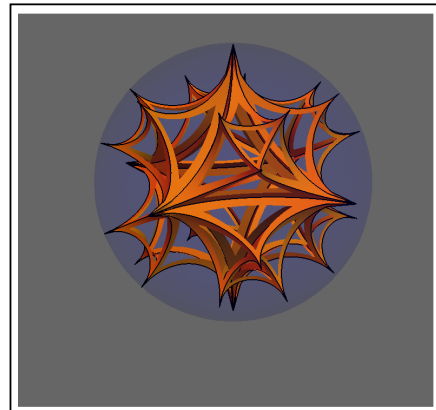
Las facetas iniciales de los duales de los platónicos, están contenidas en una horoesfera; donde el punto al infinito que pertenece a dicha horoesfera es un vértice de su dual.

El $\{3, 4, 4\}$

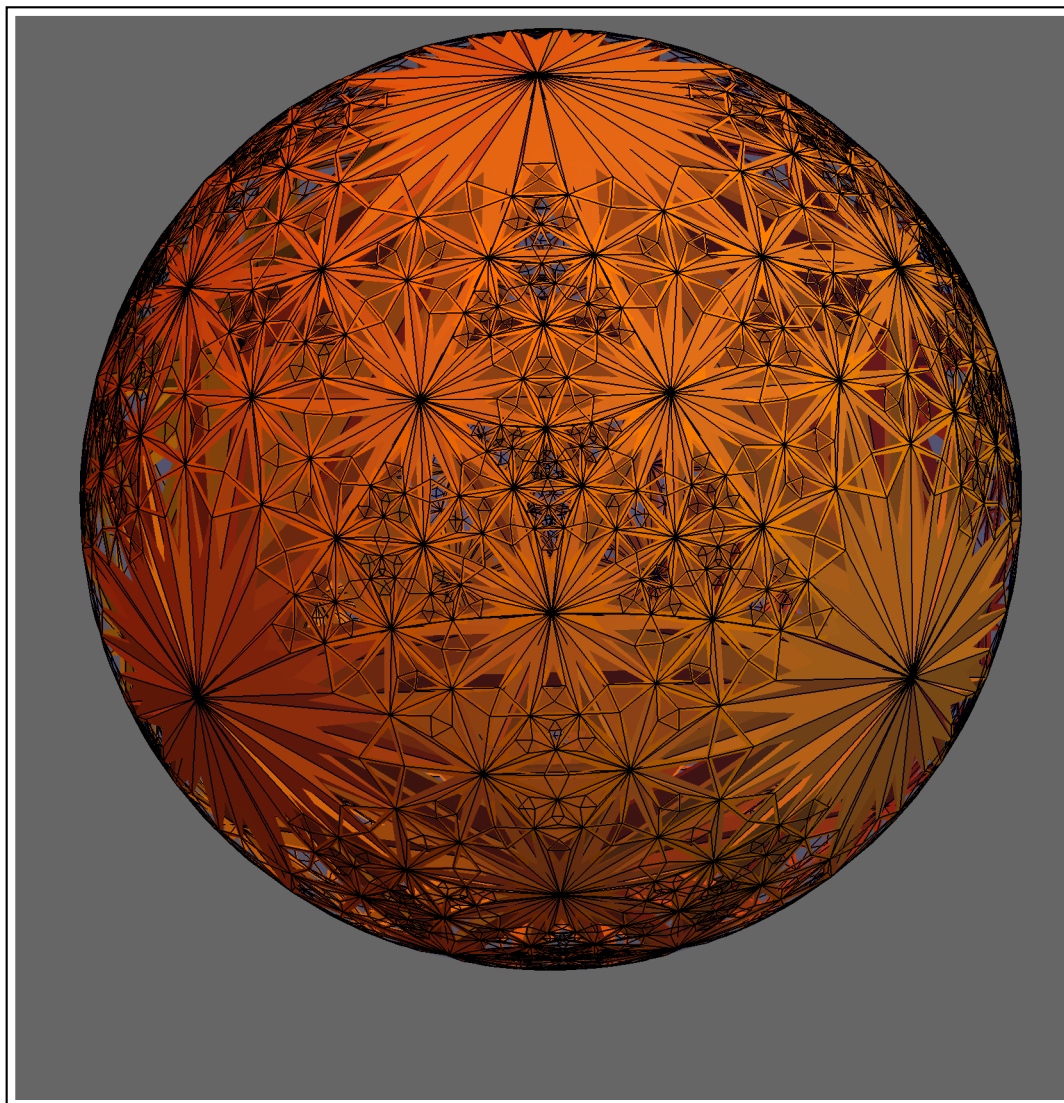
La primera faceta de la teselación en color azul y en amarillo su reflejo en uno de sus lados en el modelo de Poincaré.



Primera y segunda capa de la teselación en el modelo de Poincaré.

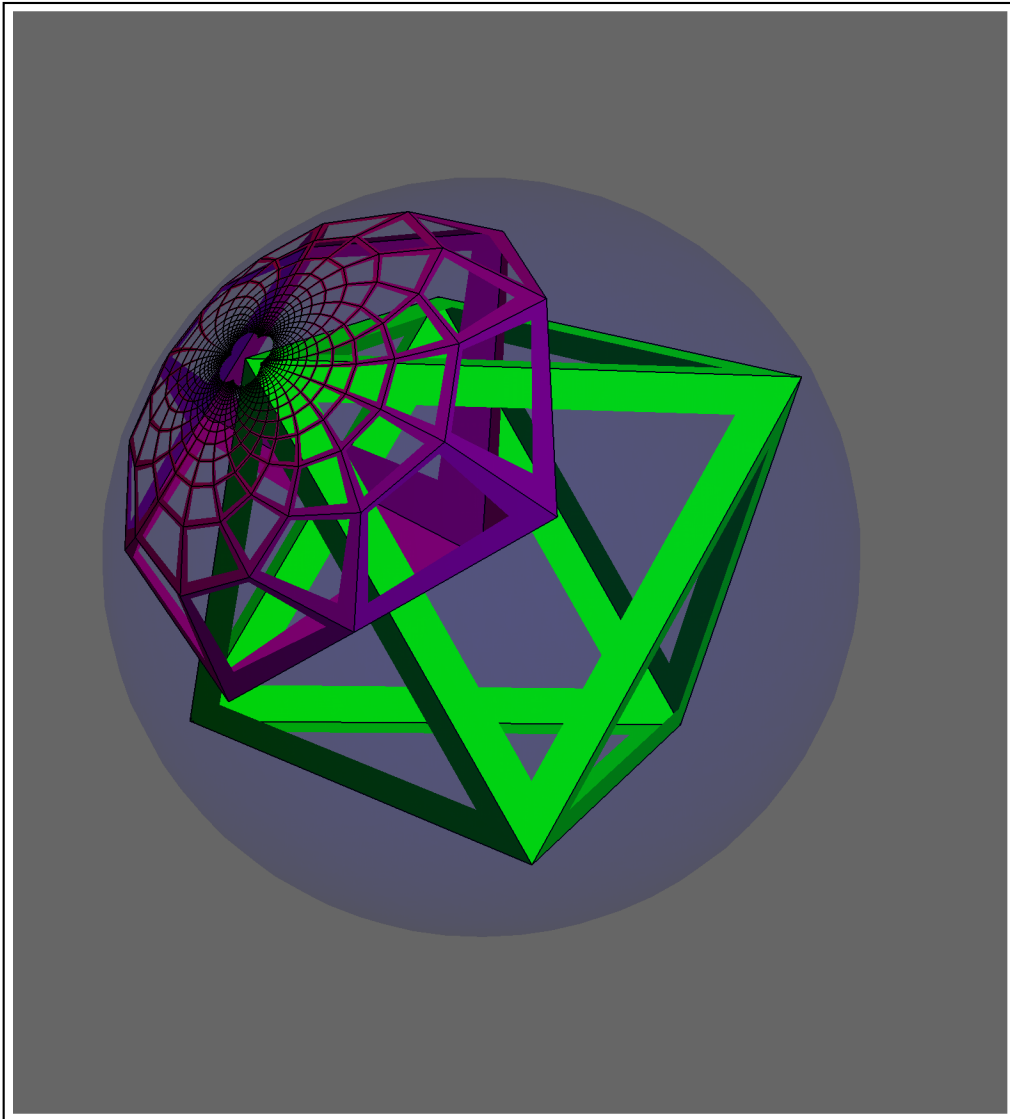


La teselación en el modelo de Klein hasta la quinta capa.

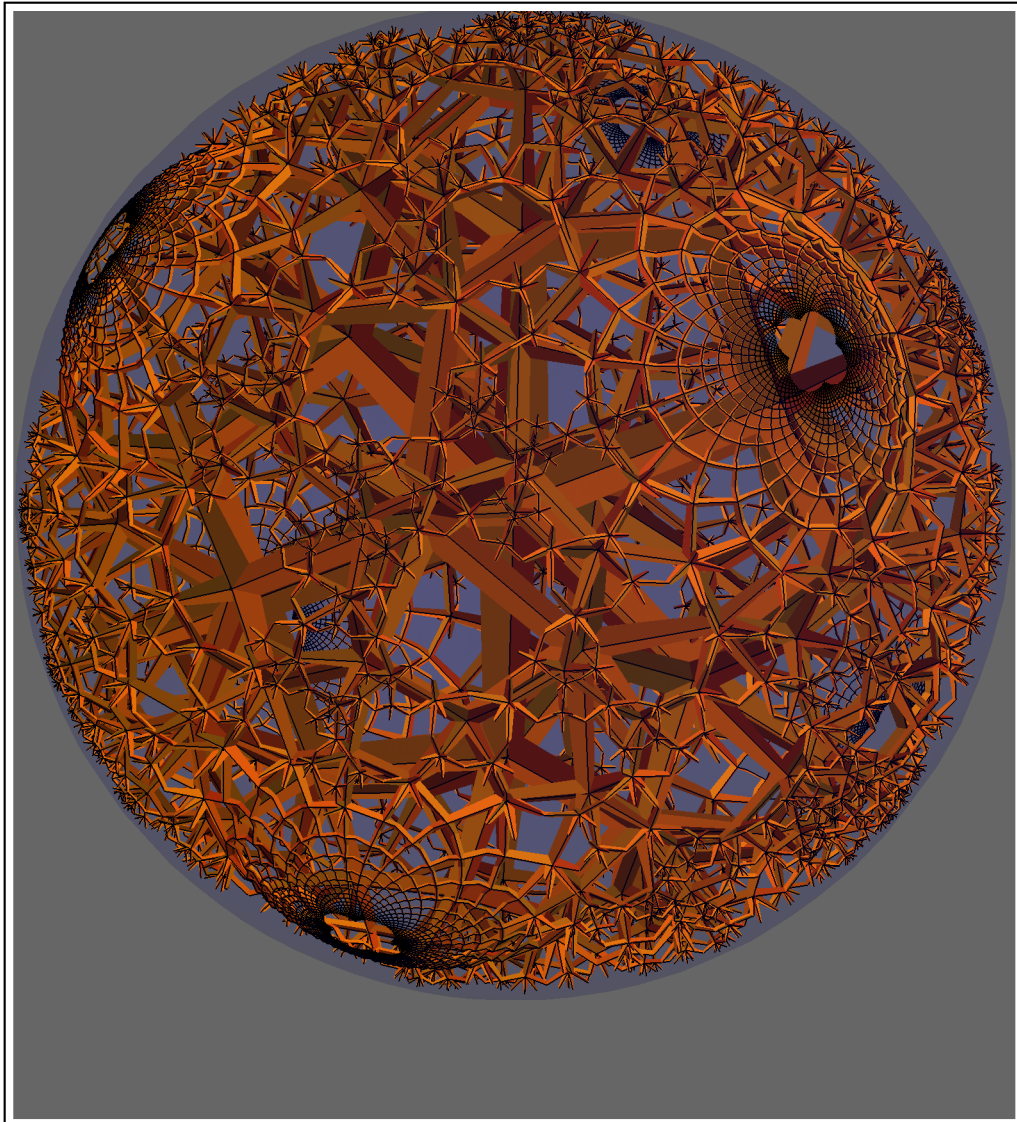


EI {4, 4, 3}

En morado la capa 24 de la primera faceta con un vértice en el origen y en verde su faceta dual en el modelo de Klein.

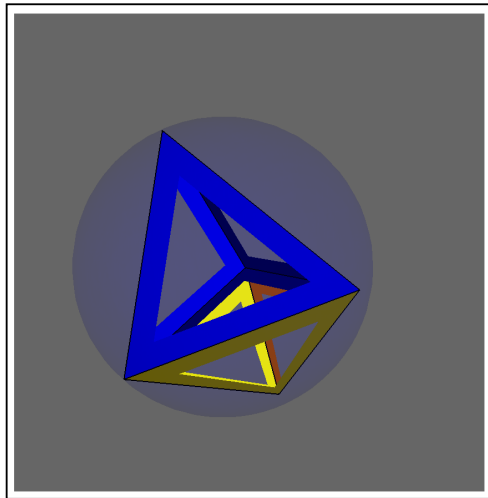


En el modelo de Poincaré hasta la capa 5 de la teselación, junto con las “tapas” alrededor del los vértices de la faceta inicial dual hasta la capa 24.

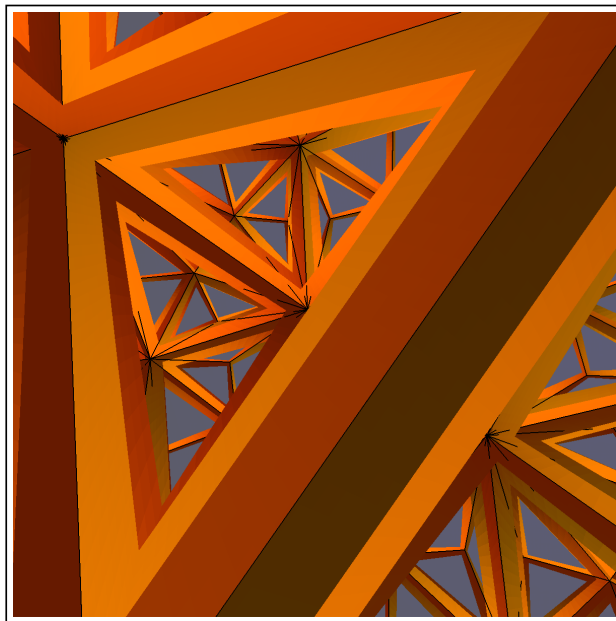


El {3, 3, 6}

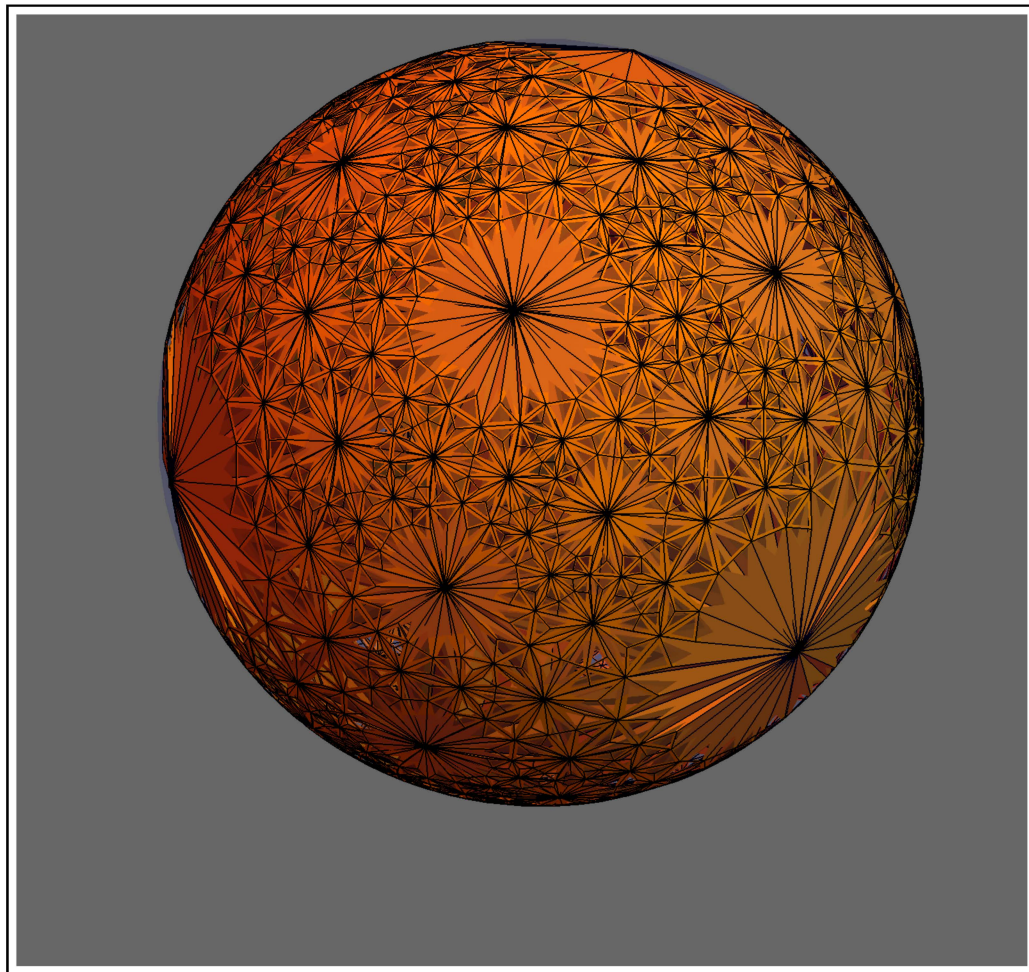
En azul la faceta inicial de la teselación y en amarillo su reflejo en uno de sus lados en el modelo de Klein.



La teselación vista desde adentro en el modelo de Poincaré hasta la capa 6.

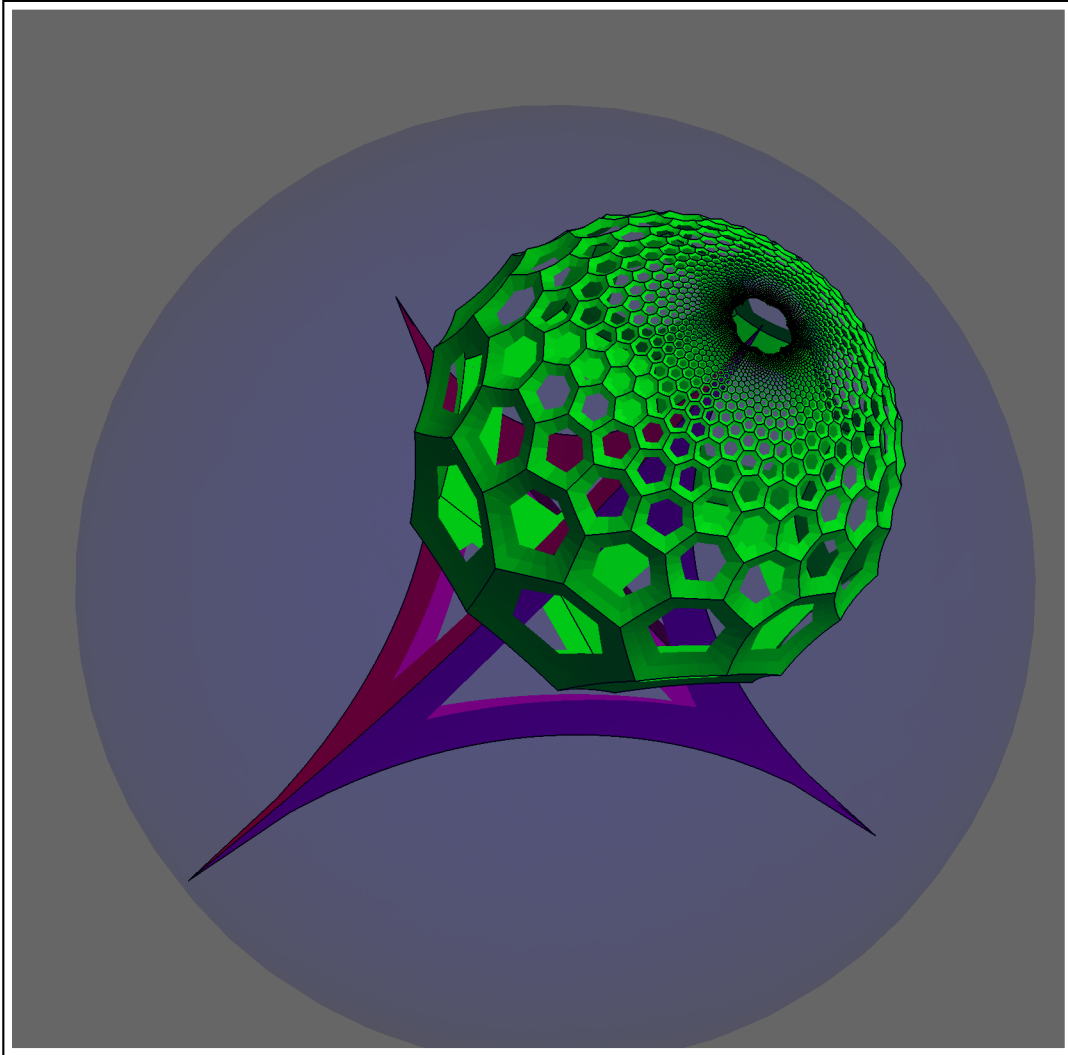


La teselación hasta la capa 9 en el modelo de Klein.

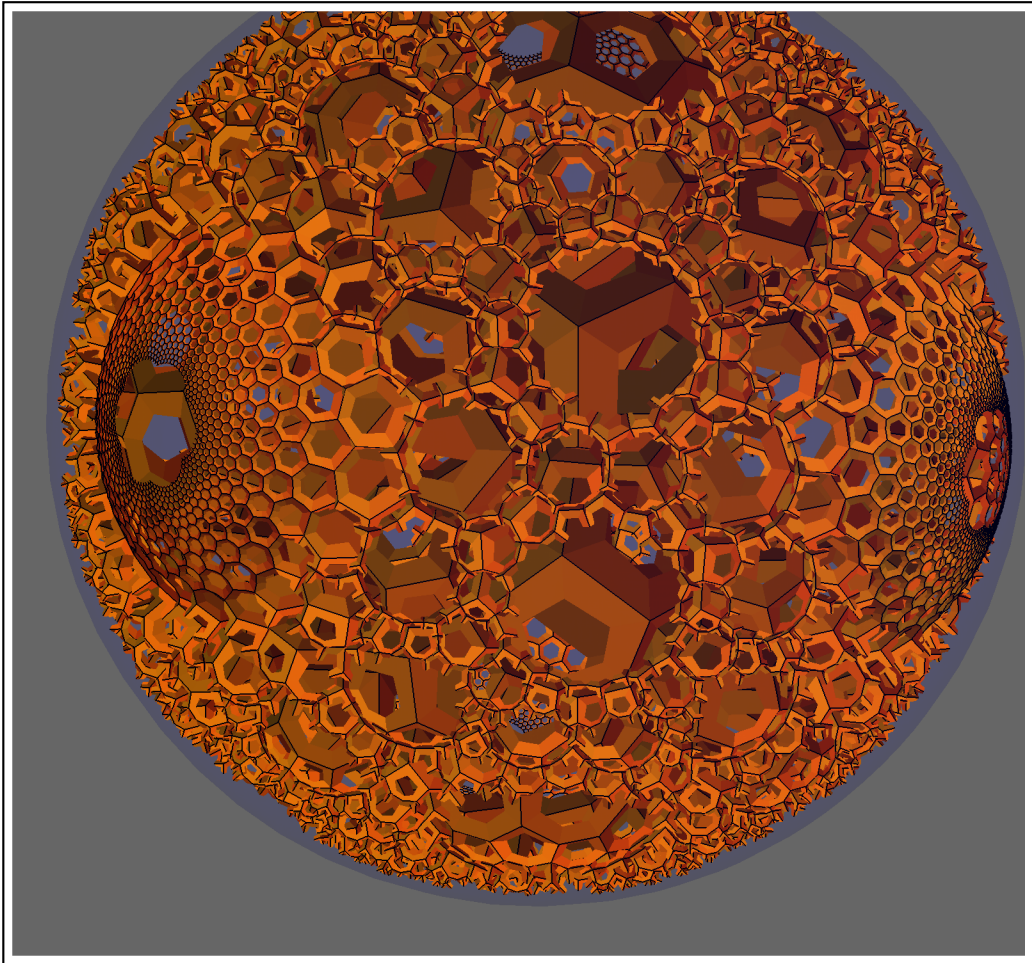


EI {6, 3, 3}

En verde hasta la capa 30 de la faceta inicial de la teselación con un vértice en el origen y en morado su faceta dual en el modelo de Poincaré.

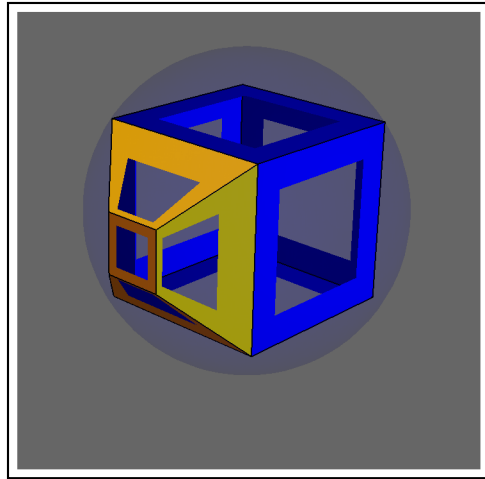


La teselación hasta la capa 9 y con las "tapas" al rededor de los vértices de su faceta inicial dual hasta la capa 30 en el modelo de Poincaré.

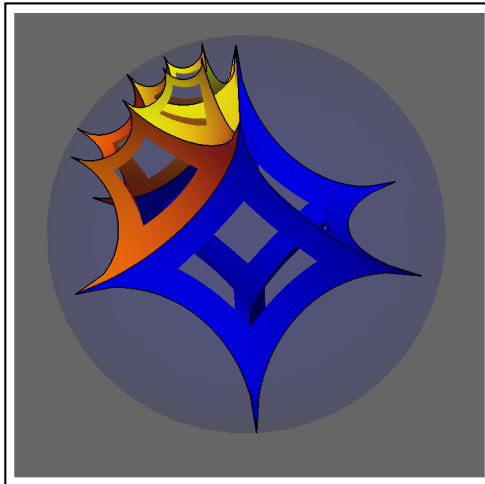


EI {4, 3, 6}

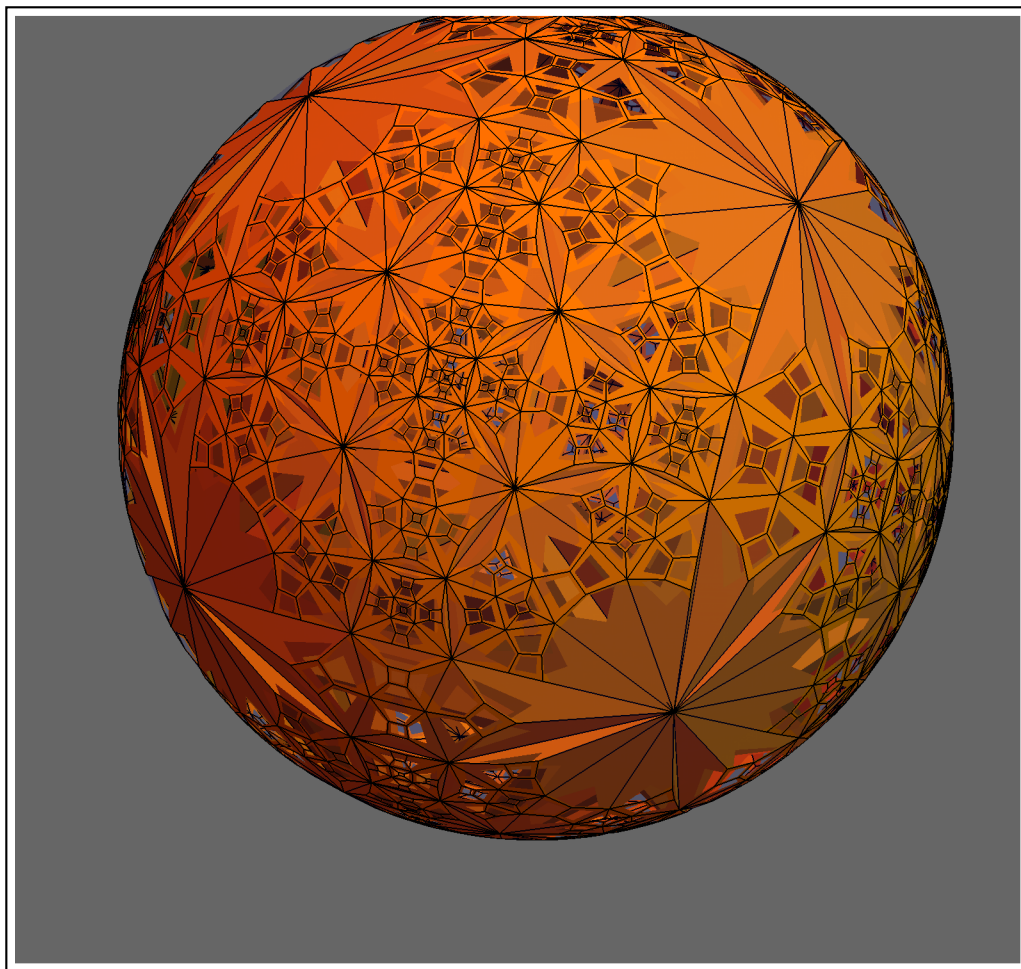
En azul la faceta inicial de la teselación y en amarillo su reflejo en uno de sus lados en el modelo de Klein.



En azul la faceta inicial de la teselación , y la reflexion aplicada dos veces en una cara de la faceta inicial en el modelo de Poincaré.

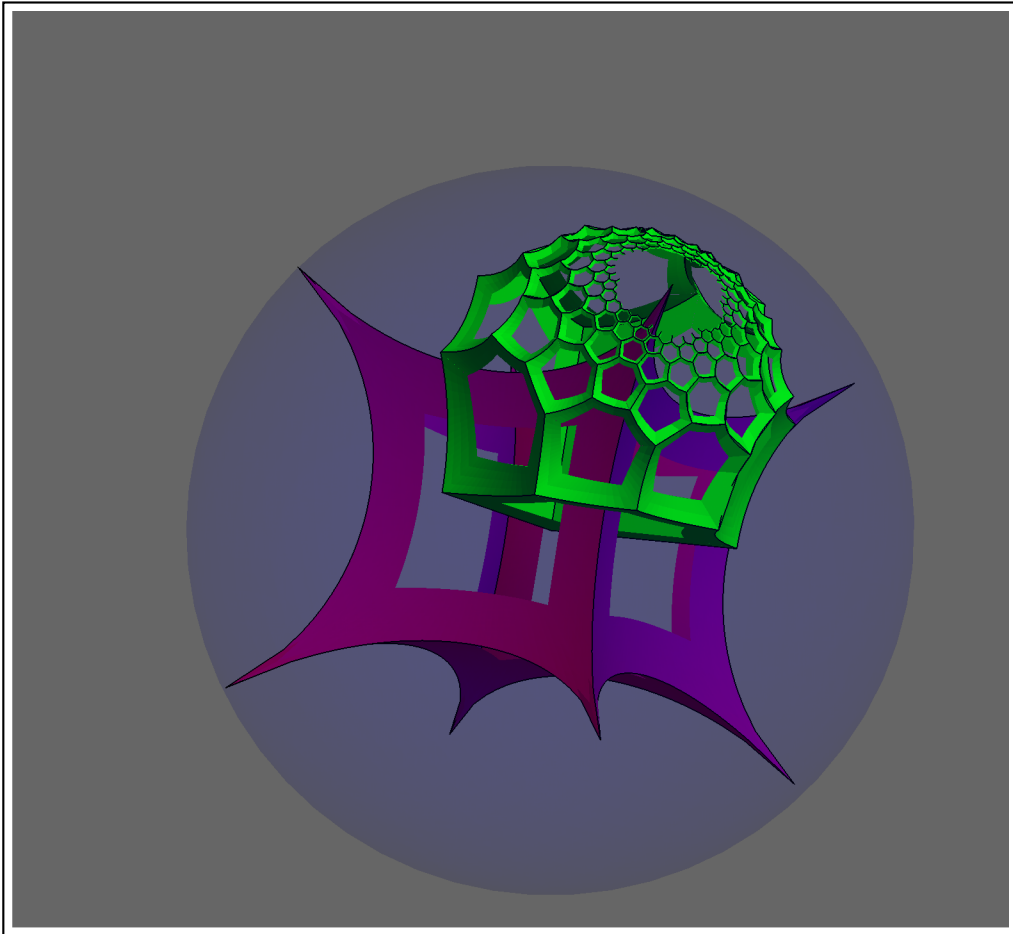


Hasta la quinta capa de la teselación en el modelo de Klein.

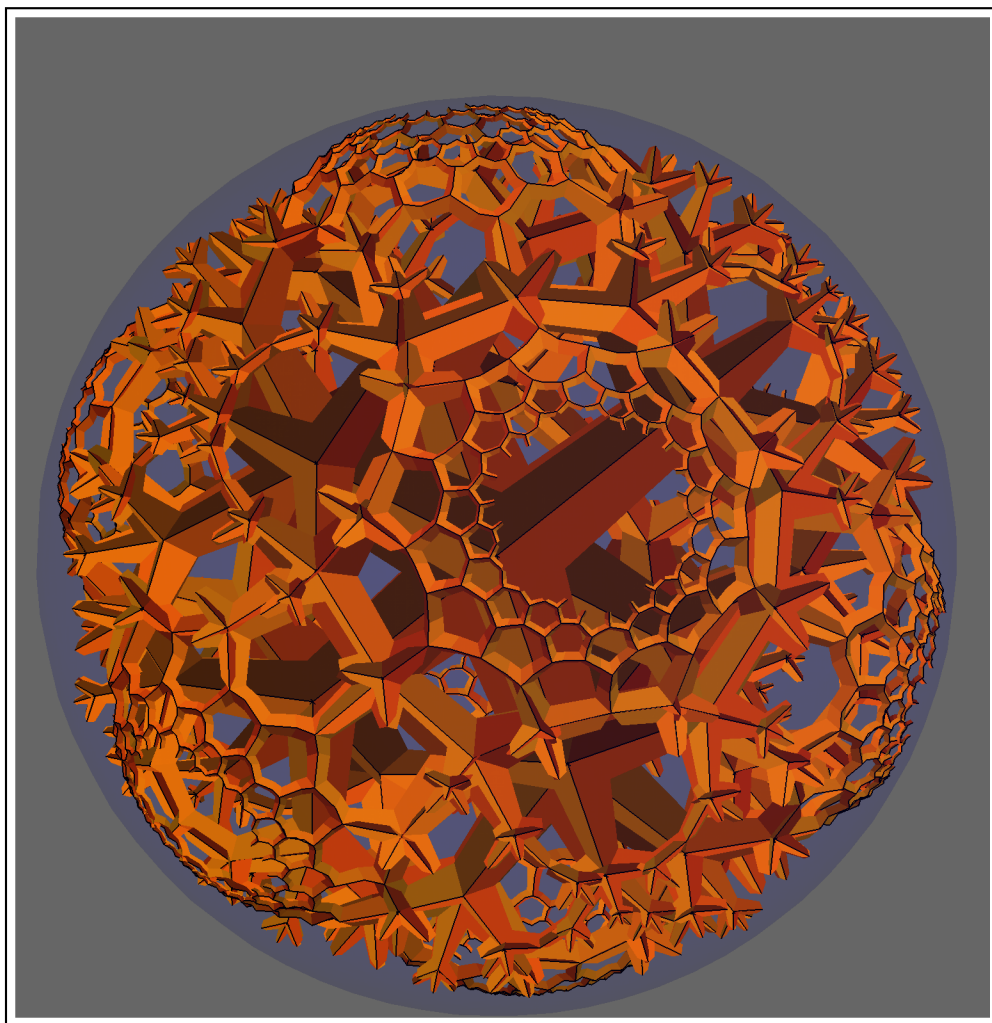


EI {6, 3, 4}

En verde la capa 9 de la faceta inicial de la teselación con un vértice en el origen, y en morado su faceta dual en el modelo de Poincaré.

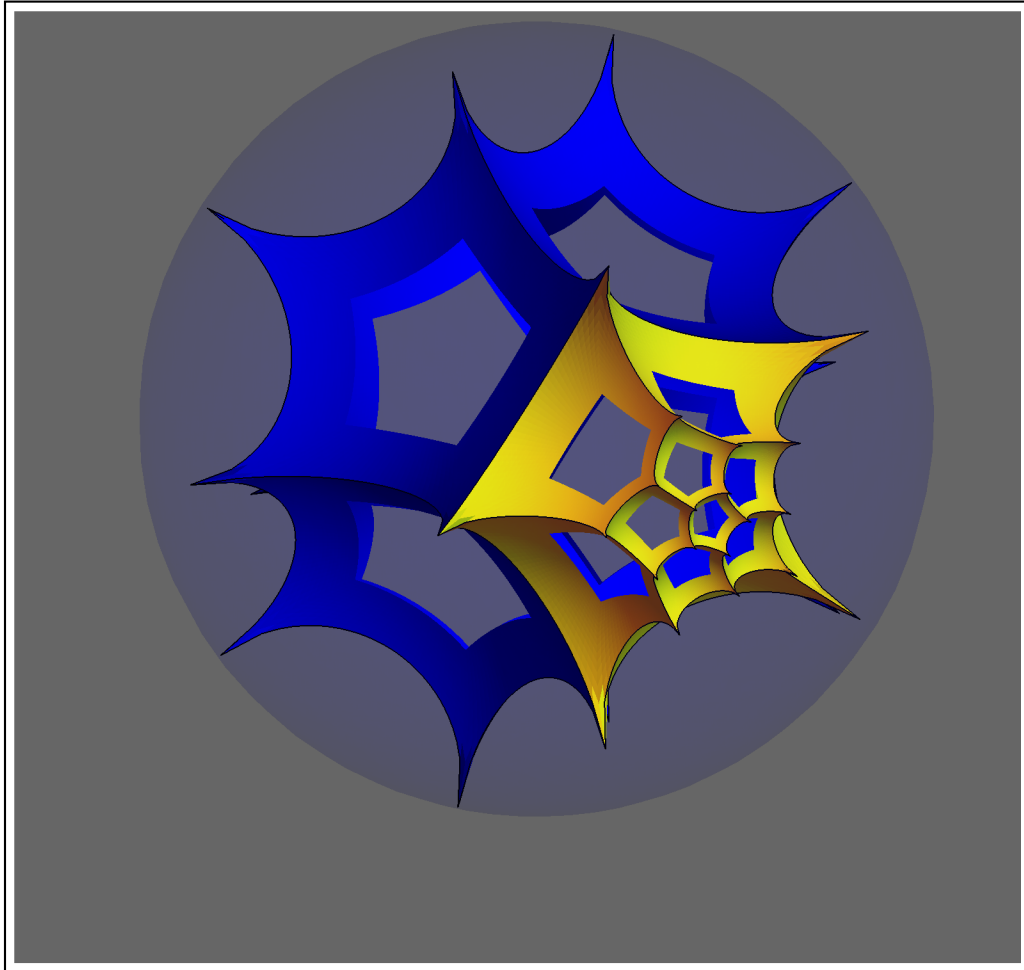


La teselación hasta la cuarta capa, con las "tapas" al rededor de los vértices de la faceta dual inicial hasta la capa 9 en el modelo de Poincaré.



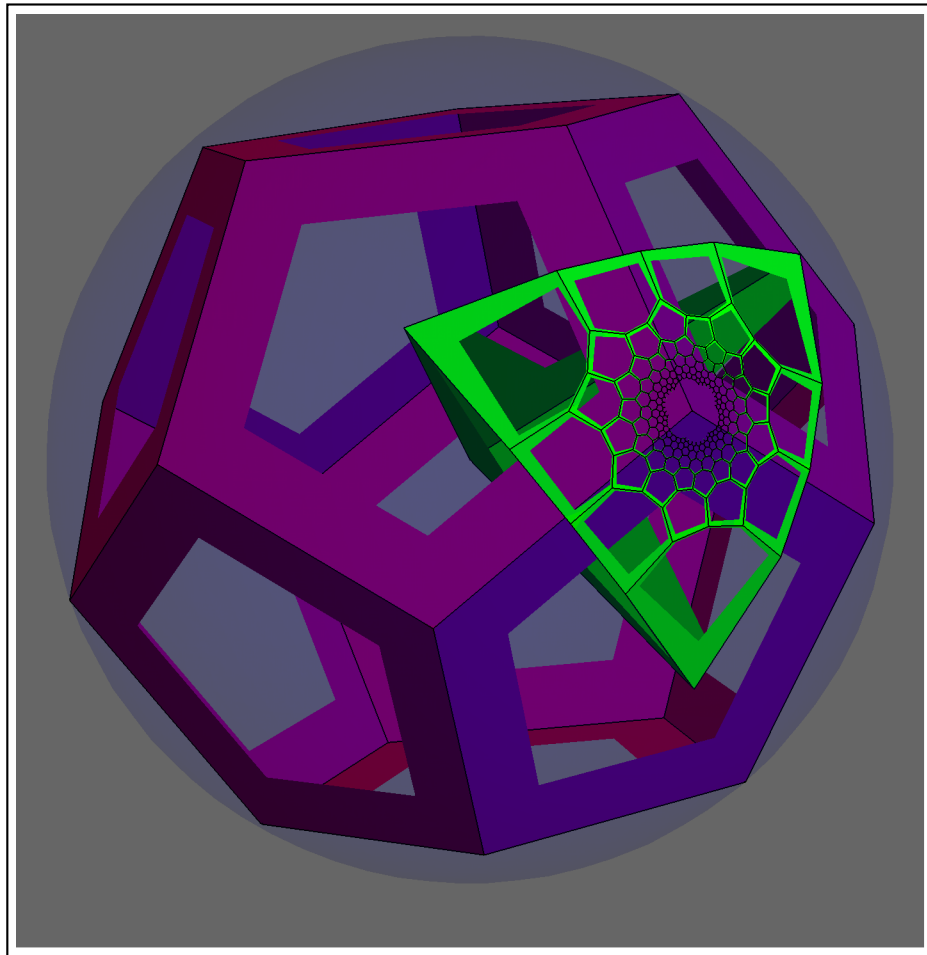
EI {5, 3, 6}

En color azul la faceta inicial de la teselación y en amarillo su reflejo en uno de sus lados en el modelo de Poincaré.

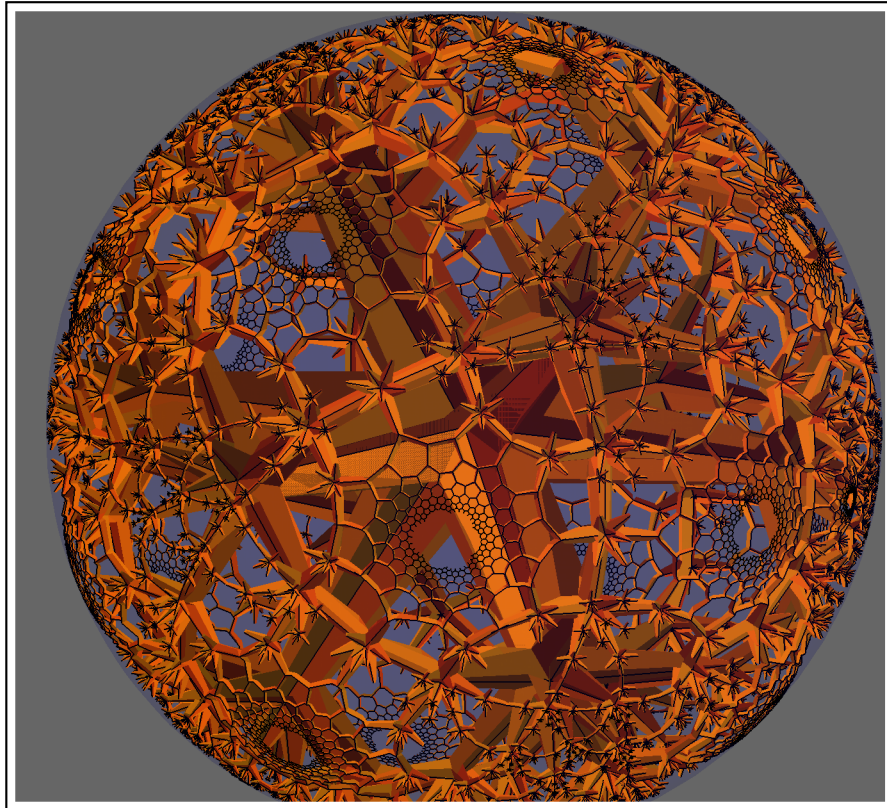


EI {6, 3, 5}

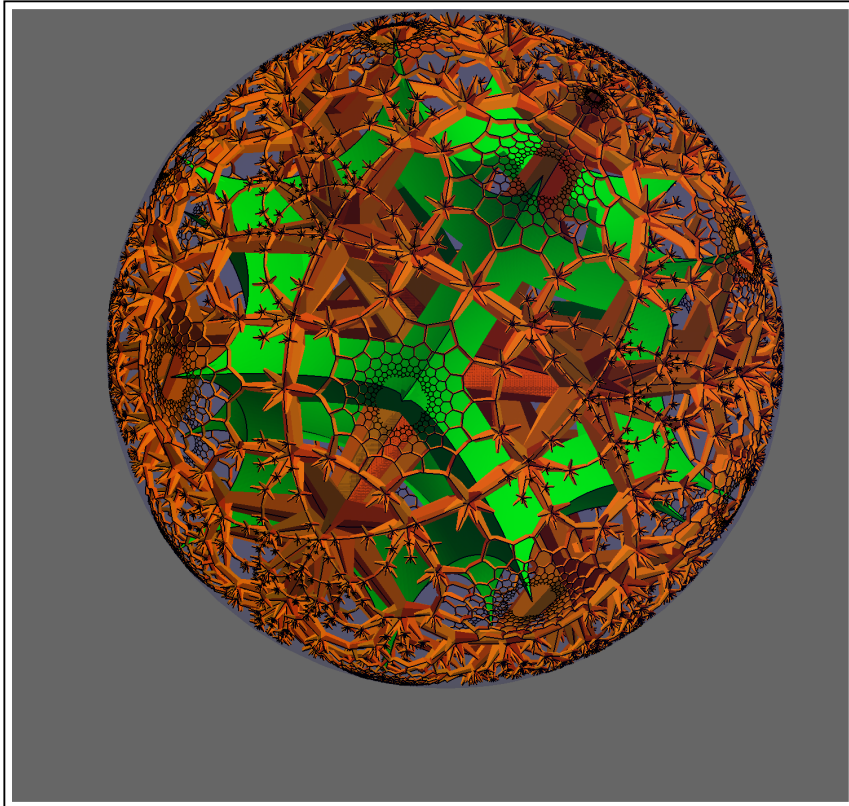
En verde la capa 15 de la faceta inicial de la teselacion con un vértice en el origen y en morado su faceta inicial dual en el modelo de Klein.



Hata la capa 4 de la taeselación, con las "tapas" al rededor de los vértices de la faceta inicial dual hasta la capa 15 en el modelo de Poincaré.



Hata la capa 4 de la taeselación, con las "tapas" al rededor de los vértices de la faceta inicial dual (esta en color verde) hasta la capa 15 en el modelo de Poincaré.



5.4) Planos-Planos

Por último tenemos 3 teselaciones auto-recíprocas. Quizás para una visión acostumbrada a la geometría euclidiana resulten ser las más extrañas, pues sus facetas iniciales constan de poliedros regulares con una infinidad de caras; dichas facetas al igual que las recíprocas del caso anterior están completamente contenidas en horoesferas. Además dichas facetas consisten con ser las tres teselaciones del plano euclidiano vistas en la sección 2.5 pero echas poliedros. Pero están generadas con la *traslación horocíclica*.

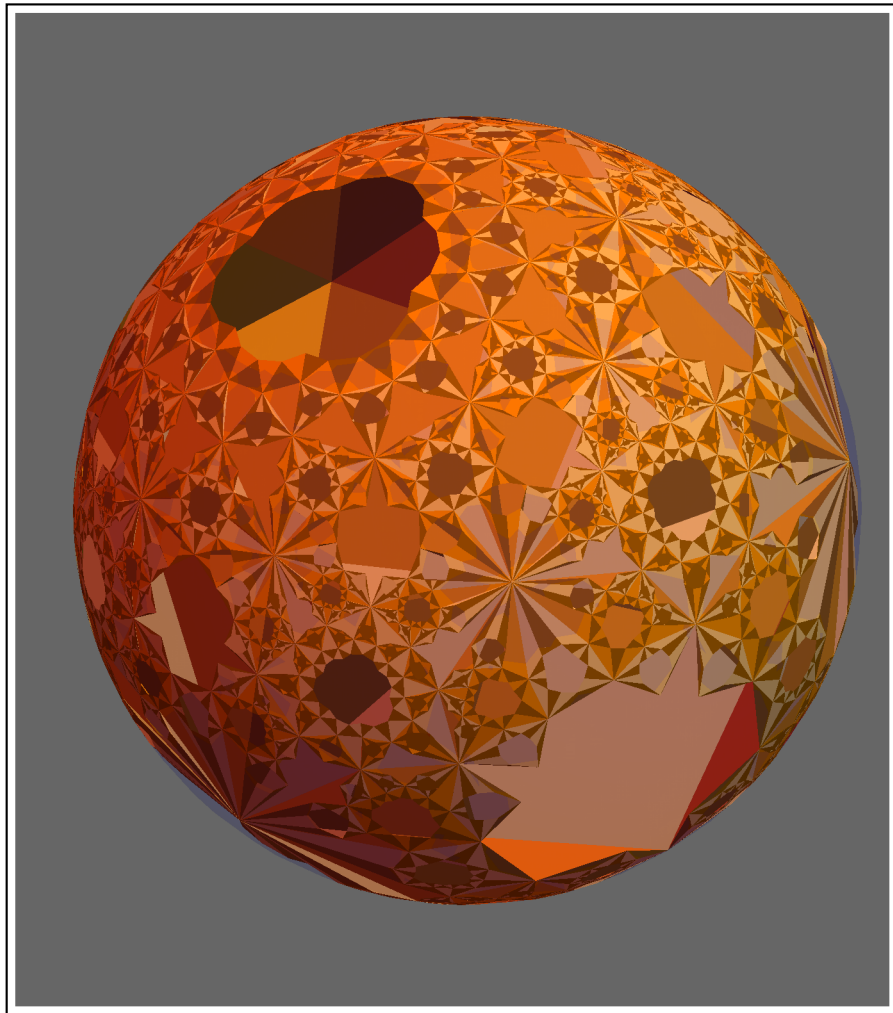
Como teselaciones cumplen la condición 5.1 con la igualdad en *ii*) y *iii*) estas son:

$\{3, 6, 3\}$, $\{4, 4, 4\}$, $\{6, 3, 6\}$

En esta última las caras de todas las facetas están dibujadas completas y no por listones como en las dos secciones anteriores del presente capítulo, y todas las facetas (incluyendo la inicial) solo están representadas un número finito de sus caras, de esta manera se entenderá el nivel de la faceta como el número traslaciones horocíclicas de la cara inicial en todas sus direcciones.

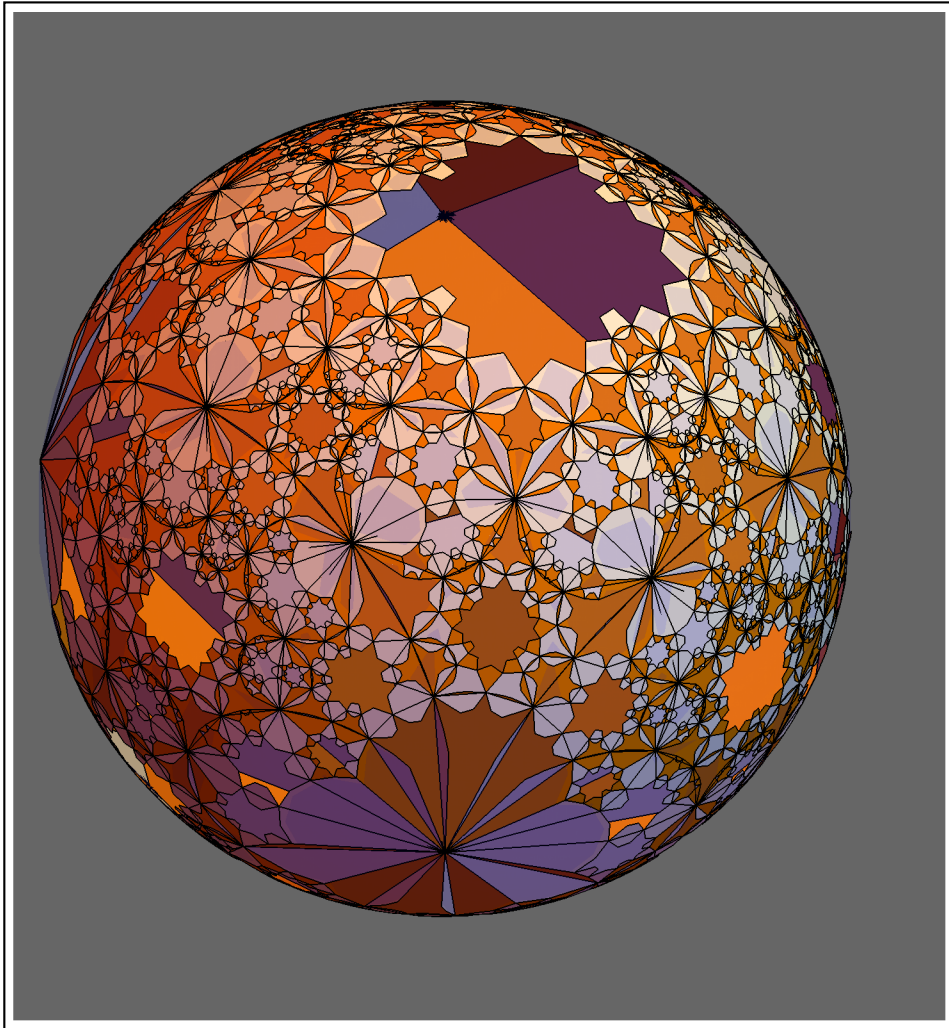
EI {3, 6, 3}

La faceta inicial pintada en tres colores hasta el cuarto nivel y hasta la cuarta capa de la teselación, representado en el modelo de Klein.



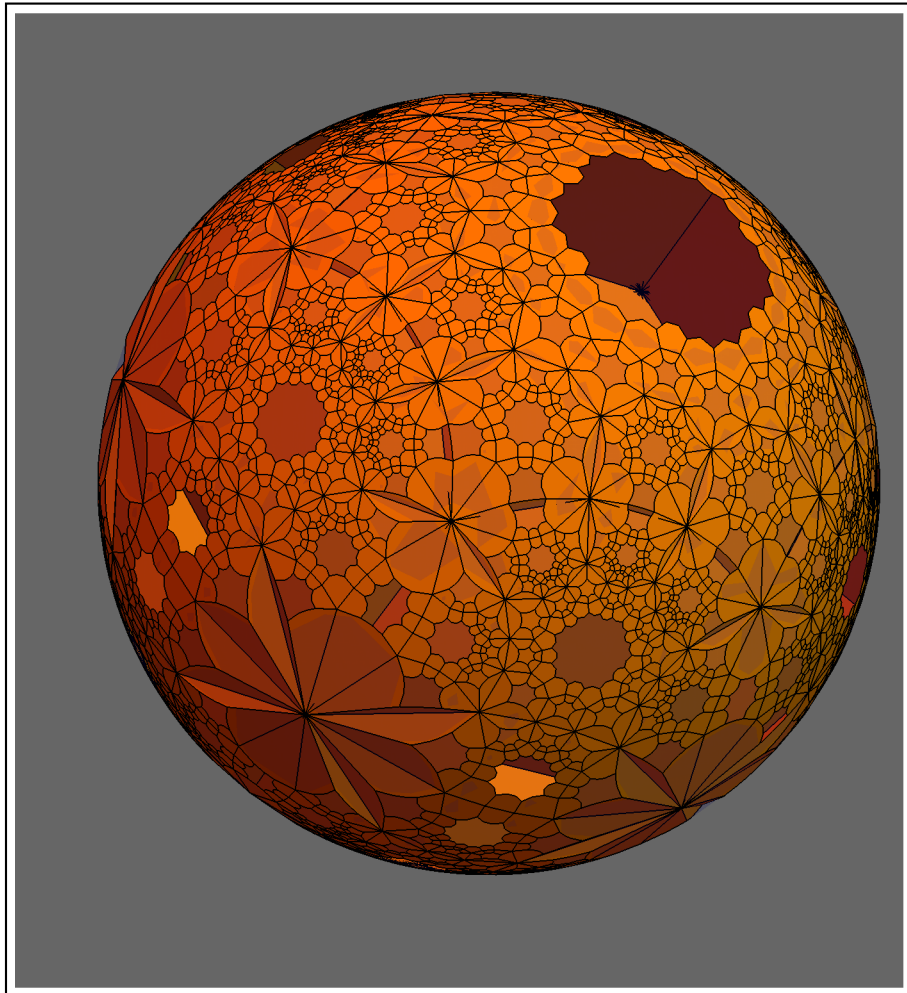
EI {4, 4, 4}

La faceta inicial en dos colores (como tablero de ajedrez) y hasta el nivel 4 y la teselación hasta la capa 5 en el modelo de Klein.



EI {6, 3, 6}

En color naranja la faceta inicial hasta el nivel 5 y toda la teselación hasta la capa 4 en el modelo de Klein.



5.5) Ideario

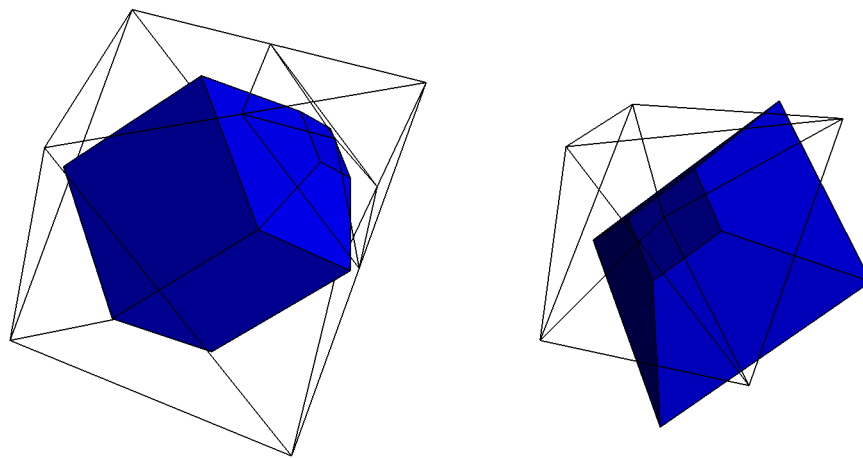
Yo creo que estos entes no se deberían de quedar encerrados en el museo de curiosidades matemáticas, yo considero que por sus propiedades fractálicas de auto simetría, debido al punto de vista proyectivo en que las estamos viendo, y por su propiedad de teselar podrían ser súper estructuras, además vistas desde el modelo de poincare y pensando que la esfera es la figura que optimiza mejor la energía (por eso en la naturaleza se repite constantemente dicha forma); podrían ser estas teselaciones en este modelo mucho más optimas, a la hora de aplicarse alguna energía a estos prospectos de súper estructuras.

Por otra parte creo que también nuestros *andamios proyectivos* son entes matemáticos los cuales no se han estudiado y que si bien al igual que los que acabamos de presentar, toda la información se encuentra en la faceta inicial; geométrica y algebraicamente tiene mucha tela que les corten. Y al tener la propiedad proyectiva de la dualidad podrían servir para generar cámaras que graben en 3D o que ~~re~~ ~~pro~~ ~~te~~ ~~olo~~ ~~gramas~~ en 3D o más.

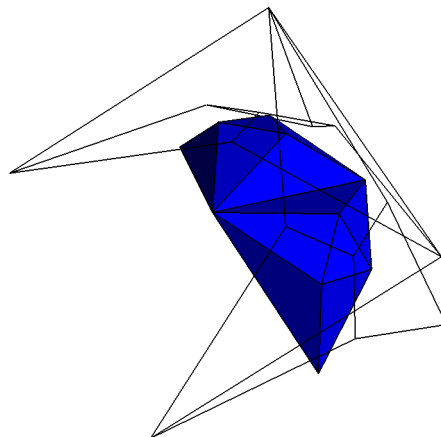
Espero tener la oportunidad de seguir estudiando estos objetos y sus posibles aplicaciones o que alguien más lo pueda hacer.

Anexo de imágenes

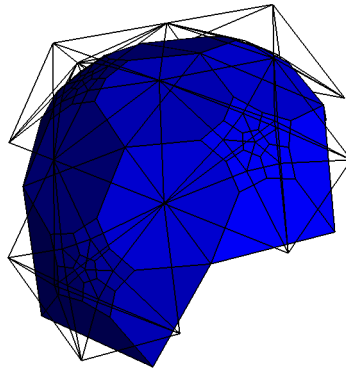
Reflexión en una cara del cubo ideal y la reflexión aplicada a su andamio proyectivo correspondiente a esa cara, en el modelo de Klein.



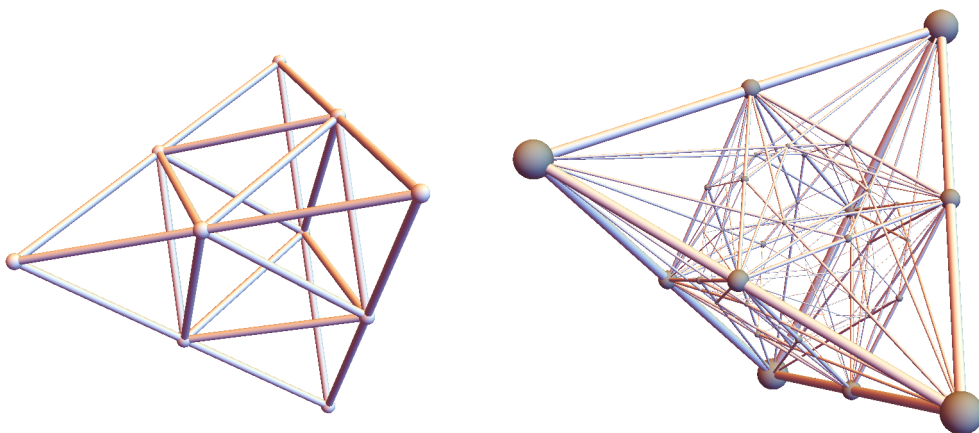
Reflexión en dos caras del octaedro ideal y la reflexión aplicada a su andamio proyectivo correspondiente a esas caras, en el modelo de Klein.



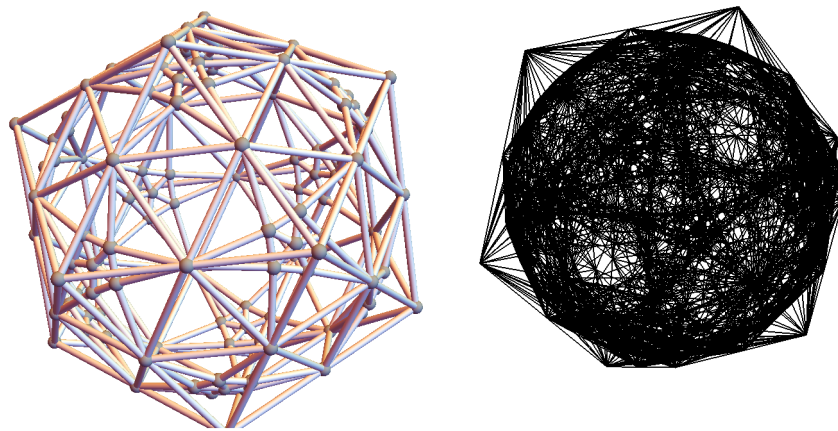
Reflexión en 5 caras del dodecaedro ideal y la reflexión aplicada a su andamio proyectivo correspondiente a esas caras, en el modelo de Klein.



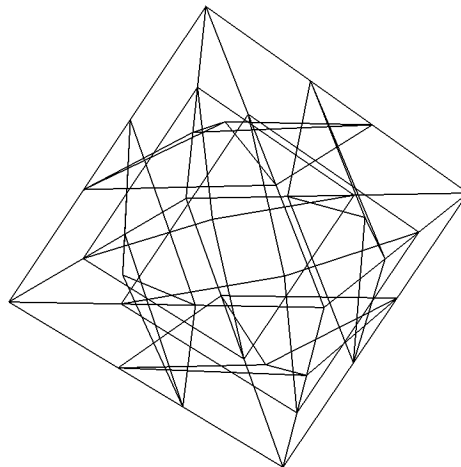
Capas 0 y 1 del andamio proyectivo del tetraedro ideal por tubos, a su derecha capas 0, 1, 2 y 3 del mismo andamio.



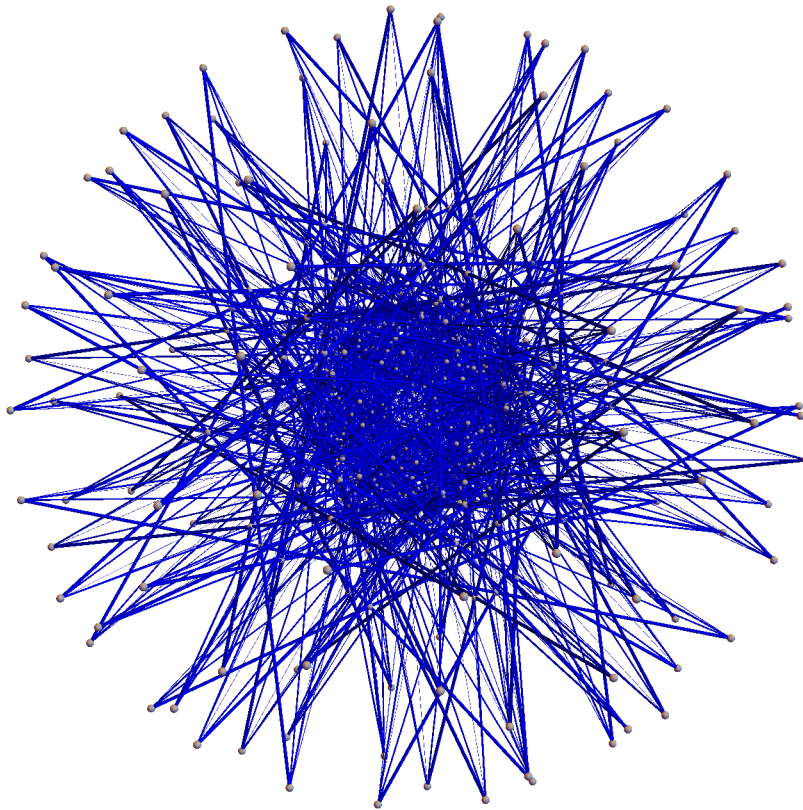
Capas 0, 1 y 2 del andamio proyectivo del dodecaedro ideal por tubos, asu derecha capas 0, 1, 2 y 3 del mismo andamio por líneas.
Reflexión en 5 caras del dodecaedro ideal y la reflexión aplicada a su andamio proyectivo correspondiente a esas caras, en el modelo de Klein.



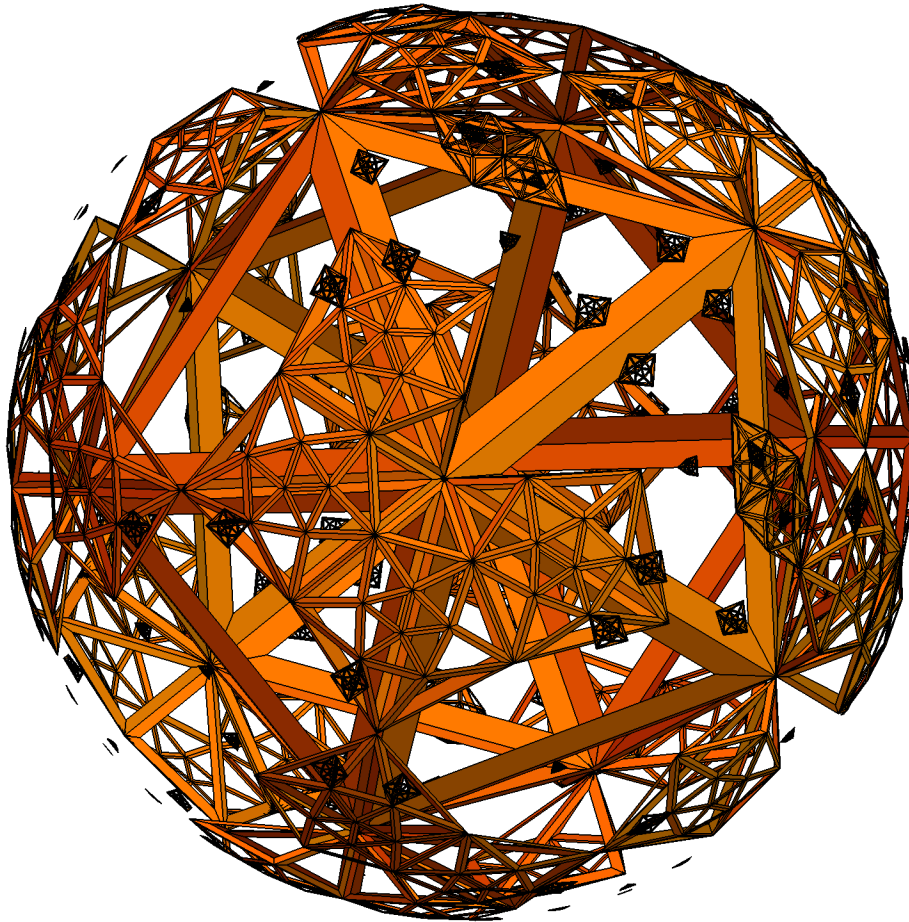
Capas 0 y 1 del andamio proyectivo de la faceta inicial del $\{4, 3, 5\}$ por líneas.



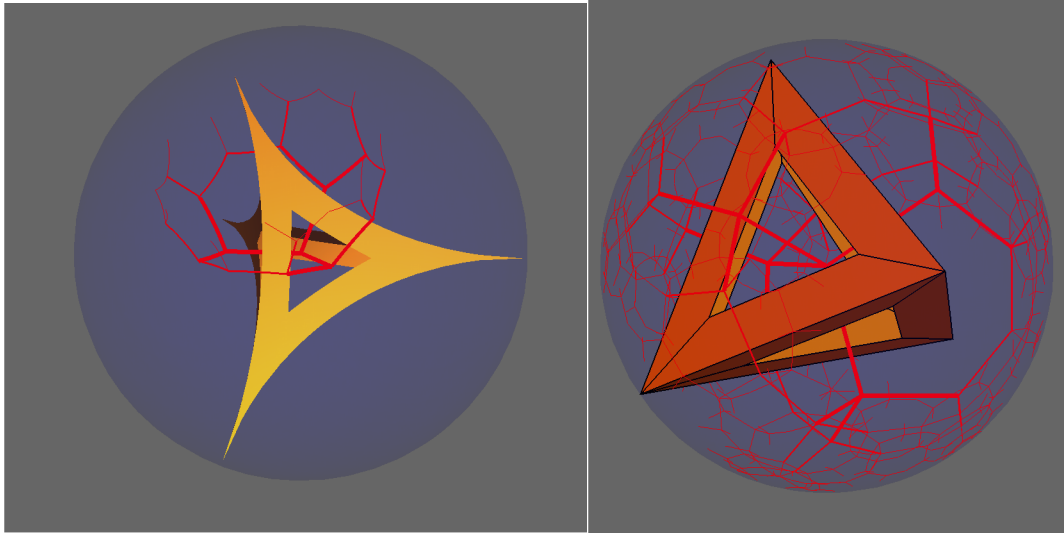
Capas 0, 1 y 2 del andamio proyectivo de la faceta inicial del $\{5, 3, 4\}$, por tubos.



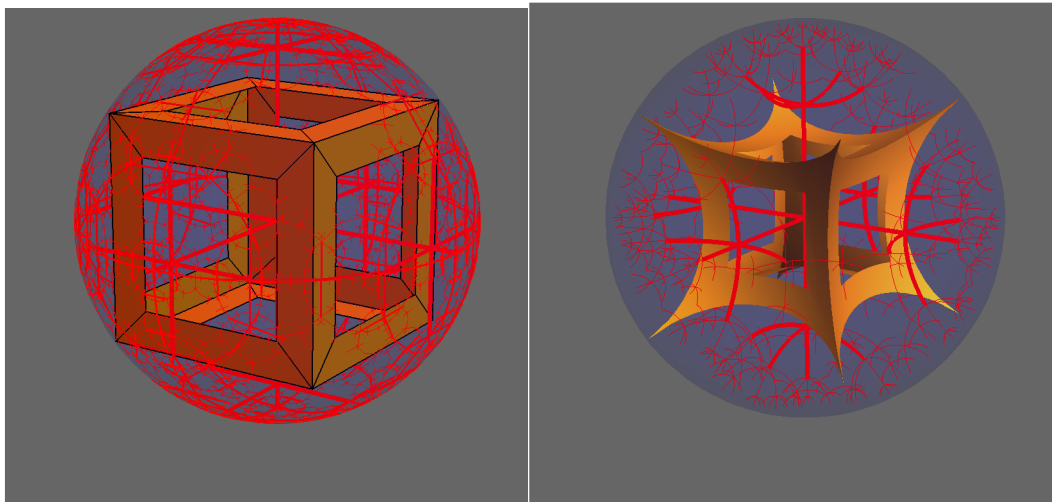
Capas 1, 3, 5 y 7 (incompletas) reflejando en 4 caras de la faceta inicial de la teselación $\{3,5,3\}$.



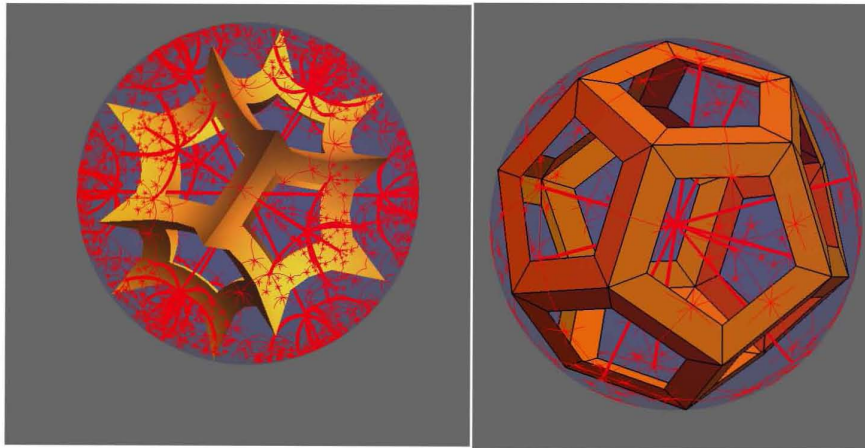
Hasta la capa 3 por aristas de la faceta inicial en la teselación $\{6,3,3\}$ junto con la faceta inicial de su dual por listones, en el modelo de Poincaré y a su derecha hasta la capa 5 de la misma teselacion (por aristas) junto con la faceta inicial de su teselación dual por listones, en el modelo de Klein.



Hasta la capa 5 de las aristas en la teselación $\{6,3,4\}$ junto con la faceta inicial por listones de su dual en el modelo de Klein y a su derecha hasta la capa 3 de la misma teselacion (por aristas) junto con la faceta inicial de su teselación dual por listones, en el modelo de Poincaré.



Hasta la capa 4 de las aristas en la teselación $\{6,3,5\}$ junto con la faceta inicial de su dual, en el modelo de Poincaré y a su derecha hasta la capa 2 (por aristas) de la misma teselación, junto a la faceta inicial de su teselacion dual (por listones), en el modelo de Klein.



Referencias:

- [A] D. Alatorre, Tesis doctoral: *Espacios de teselaciones y el toro irracional*, Ciudad Universitaria, Mexico, (2017).
- [B1] J. Bracho, *Introducción analítica a las geometrías*, Fondo de Cultura Económica, México, (2014).
- [C1] H.S.M. Coxeter, *Regular in Hyperbolic Space*. The Beauty of Geometry: Twelve Essays, Chapter 10. Dover Publications, (1999).
- [C2] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Third edition, Dover Publications, inc. New York, (1973).
- [K1] V. Kandinsky, *Punto y línea sobre el plano. Contribución al análisis de los elementos pictóricos*, Paidós SAICF Defensa 599, Buenos Aires (2003).
- [R1] A.I. Ramírez, G.Sienra *Invitación a las geometrías no euclidianas*, Las prensas de ciencias, Mexico, (2010).