



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

---

**Condensación de piones en colisiones de  
iones pesados relativistas con campos  
magnéticos**

---

**TESIS**  
que presenta

**Pedro Roberto MERCADO Lozano**

*para obtener el título de  
Físico*

*Director de Tesis:*  
**Dr. José Alejandro AYALA Mercado**

Ciudad Universitaria, CDMX.  
24 de mayo de 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*1. Datos del Alumno:*

Mercado  
Lozano  
Pedro Roberto  
52517786  
Universidad Nacional Autónoma  
de México  
Facultad de Ciencias  
Física 31052539-4

*2. Datos del Tutor:*

Dr.  
Ayala  
Mercado  
José Alejandro

*3. Datos del Sinodal 1:*

Dr.  
Chávez  
Lomelí  
Efraín Rafael

*4. Datos del Sinodal 2:*

Dra.  
Murguía  
Romero  
Gabriela

*5. Datos del Sinodal 3:*

Dr.  
Cuautle  
Flores  
Eleazar

*6. Datos del Sinodal 4:*

Dr.  
Chernicoff  
Minsberg  
Mariano

*«The first principle is that you must not fool yourself and you are the easiest person to fool.»*

Richard Feynman

Universidad Nacional Autónoma de México

## *Resumen*

Facultad de Ciencias  
Departamento de Física

Licenciatura en Física

### **Condensación de piones en colisiones de iones pesados relativistas con campos magnéticos**

por Pedro Roberto MERCADO Lozano

En esta tesis se estudia el proceso de condensación de Bose-Einstein de un gas de piones bajo varias consideraciones. Primero, se estudia el proceso de condensación en el límite termodinámico, i.e.  $V \rightarrow \infty$ , en donde  $V$  es el volumen del sistema. Posteriormente, se estudia el caso en el cual consideramos que el volumen del sistema, aunque grande, es de tamaño finito. Por último, se considera que el sistema tiene volumen finito y además tiene la presencia de un campo magnético. Al considerar que el volumen del sistema es finito la temperatura crítica de condensación aumenta con respecto al caso del límite termodinámico. Se dice entonces que se promueve el proceso de condensación. Más aún, al considerar la presencia de un campo magnético la temperatura crítica experimenta un mayor incremento con respecto al caso de un volumen finito.

Para poder estudiar estos fenómenos esta tesis comienza con una revisión de principios básicos de la Física Estadística en el capítulo 3, los cuales son suficientes para entender el origen de la condensación de Bose-Einstein. Con esta base, en el capítulo 4 se estudian con mayor detalle las características de un condensado de Bose-Einstein, así como su tratamiento teórico. Haciendo uso de estas herramientas, en el capítulo 5 se estudian las consecuencias de considerar volumen finito en el gas ideal de piones. Posteriormente, en el capítulo 6 se estudian algunos conceptos importantes de las colisiones de iones pesados. Entre ellos se habla de la multiplicidad de piones producidos, la centralidad de las colisiones y la generación de campos magnéticos producidos en las colisiones periféricas. Finalmente, en el capítulo 7 se estudian los efectos que tiene un campo magnético externo en la condensación de un gas ideal de piones.

## *Agradecimientos*

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo del Dr. Alejandro Ayala, a quien le estoy profundamente agradecido pues sobre todo me enseñó lo que es realmente hacer física. A través de su paciencia y entusiasmo aprendí más de lo que se puede aprender en cualquier libro.

Quiero agradecer también a Cristian Villavicencio, quien contribuyó en gran medida con el desarrollo del proyecto. De igual manera, quiero agradecer al Dr. Eleazar Cuautle, quien aportó opiniones muy valiosas para desarrollar una imagen física realista del fenómeno estudiado. Al Dr. Luis Hernández, quien con sus numerosas observaciones elevó la calidad de esta tesis.

Sobre todo, quiero agradecer a mi familia y amigos que me han acompañado en este proceso. A Juliet que con su amor me ha motivado a siempre seguir adelante. A mi padre y mi abuela, cuyo cariño me ha impulsado. Y más que a nadie a mi madre, quien siempre ha creído en mí y me ha apoyado a lo largo de mi desarrollo.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Planteamiento del problema y objetivos</b>	<b>2</b>
<b>3. Física Estadística</b>	<b>3</b>
3.1. El gas ideal clásico . . . . .	3
3.2. Física estadística de partículas cuánticas . . . . .	4
3.3. Estadística de Bose-Einstein . . . . .	6
<b>4. Condensación de Bose-Einstein</b>	<b>10</b>
4.1. Formalismo . . . . .	10
4.2. Condiciones operacionales para la condensación . . . . .	13
4.3. Relación entre densidad y temperatura en la condensación . . . . .	14
Condensación de Piones vs. Condensación de Átomos* . . . . .	17
<b>5. Volumen finito</b>	<b>18</b>
5.1. Cuantización de momento en un gas ideal . . . . .	18
5.2. Efectos de volumen finito en la densidad . . . . .	20
Función de Onda en un Sistema con Volumen Finito* . . . . .	24
<b>6. Colisiones de Iones Pesados</b>	<b>27</b>
6.1. Centralidad en las colisiones . . . . .	29
6.2. Campos magnéticos en la colisión . . . . .	30
<b>7. Condensación de piones en un campo magnético</b>	<b>35</b>
7.1. Cuantización en niveles de Landau . . . . .	35
7.1.1. Densidad de estados en cada nivel de Landau . . . . .	38
7.2. Física Estadística en presencia de un campo magnético . . . . .	39
7.2.1. Método de integración de Euler-Maclaurin . . . . .	40
<b>8. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>

# Índice de figuras

4.1. Diagrama de fase en el plano $T$ vs $\rho$ . . . . .	16
5.1. Se muestran las tres posibilidades de longitud de onda más bajas para una partícula confinada en una caja de lado $L$ . La cuantización en las longitudes de onda se da para las tres dimensiones de la caja. . . . .	19
5.2. Diagrama de fase en el plano $T$ vs $\rho$ . . . . .	24
6.1. Representación conceptual del $\pi^+$ . . . . .	28
6.2. Representación conceptual de una colisión de iones pesados . . . . .	30
6.3. Relación entre el parámetro de impacto y la centralidad . . . . .	31
7.1. Diagrama de fase en el plano $T$ vs $\rho$ en presencia de un campo magnético . . . . .	47



# Constantes Físicas

Constante de Boltzmann	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ m}^2\text{kg/s}^2\text{K}$
Constante de Planck	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$
Constante de Planck reducida	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$
Velocidad de la luz	$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Masa de los piones cargados	$m_{\pi^\pm} = 139.57 \text{ MeV}$
Flujo Magnético Elemental	$\Phi_0 = 2.067 \times 10^{-15} \text{ Wb}$

## Equivalencias

Sistema natural de unidades	$\hbar = c = G = k = 1$
Temperatura	$300\text{K} = \frac{1}{40}\text{eV}$
Campo Magnético	$1\text{eT} = 5.98 \times 10^{-11}\text{MeV}^2$

# 1 Introducción

Desde el descubrimiento del núcleo, los experimentos de dispersión han ganado mucha atención tanto en el ámbito teórico como en el experimental. Dichos experimentos han traído una serie de descubrimientos sumamente relevantes, dando lugar así a confirmar las predicciones del Modelo Estándar de las partículas elementales. Sin embargo, aún hay varios problemas en nuestro entendimiento de la física que el Modelo Estándar no puede resolver. Un entendimiento completo de los procesos que se llevan a cabo en las colisiones de partículas es crucial si queremos resolver estas incógnitas.

Cuando se tiene una colisión de iones pesados a altas energías la temperatura y densidad del sistema es tal que se forma un plasma de quarks y gluones. Se cree que este era el estado de la materia en el universo apenas algunos microsegundos después del Big-Bang. A medida que el sistema se enfría, los quarks y gluones comienzan a estar en un estado confinado y se empiezan a formar hadrones. Por esta razón, a esta fase de la colisión se le llama de hadronización. Entre los hadrones que se producen, los más abundantes son los piones, dado que estos son los mesones más ligeros que hay. Al ser mesones pseudoescalares (espín cero), estos obedecen la estadística bosónica. A pesar de que la temperatura del sistema es muy elevada, la densidad es a su vez tan grande que la condensación de Bose-Einstein se tiene que considerar al estudiar el sistema. Al ser un fenómeno relativamente joven, la condensación de Bose-Einstein es difícil de observar. Es necesario entonces saber tanto como se pueda del fenómeno para lograr su observación.

En años recientes, la comunidad se ha percatado de la presencia de campos magnéticos muy intensos producidos en colisiones periféricas de iones pesados. A pesar de decaer rápidamente en el tiempo, el campo magnético es tan intenso que se espera que este permee la región de la colisión incluso durante la fase hadrónica. Es natural entonces preguntarse, ¿Cuál, si alguno, es el efecto del campo magnético en la condensación del gas ideal de piones?

## 2 Planteamiento del problema y objetivos

La condensación de piones es un fenómeno que ha recibido mucha atención por parte de la comunidad científica. Se han llevado a cabo varios estudios en los cuales se toman en cuenta consideraciones cada vez más realistas. Por ejemplo, se ha estudiado cual es el efecto de considerar que el gas de piones es un sistema con volumen finito. Sin embargo, no hay estudios que consideren la presencia de un campo magnético en el sistema y su efecto en la condensación de Bose-Einstein. Esto nos lleva a plantearnos los siguientes objetivos:

- Estudiar el fenómeno de la Condensación de Bose-Einstein, así como las herramientas de la Física Estadística necesarias,
- Entender cómo pueden influir las características del sistema en el proceso de condensación, usando como ejemplo el caso del volumen finito,
- Analizar las condiciones del sistema producido en una colisión periférica de piones pesados, de manera que podamos formar una imagen realista del proceso y
- Descubrir los efectos que tiene la presencia de un campo magnético en el proceso de condensación de Bose-Einstein en un gas ideal de piones.

## 3 Física Estadística

La física estadística ha sido una herramienta de suma importancia, ya que nos permite estudiar los fenómenos físicos asociados a la materia formada por una gran cantidad de partículas a partir de las propiedades intrínsecas de dichas partículas (R K Pathria, 2011). De esta manera, podemos determinar el comportamiento de un sistema formado por abundantes partículas, el cual en principio sería muy complicado, estudiando el comportamiento de cada partícula y sus posibles interacciones, lo cual suele ser más sencillo.

La física estadística posee una conexión intrínseca con la termodinámica. A pesar de que la termodinámica antecede a la física estadística, se pueden entender muchos de sus resultados utilizando la maquinaria desarrollada por la física estadística.

### 3.1. El gas ideal clásico

Un ejemplo de la relación entre la termodinámica y la física estadística es el estudio de los gases ideales. En este caso se considera que no existe ninguna interacción entre las partículas constituyentes del gas y que su estructura es irrelevante. Pensemos que el gas que queremos estudiar es un sistema aislado por lo que la energía  $E$ , el volumen  $V$  y el número de partículas  $N$  permanecen constantes. Este gas se puede encontrar en un gran número de microestados, en donde un microestado se entiende como una de las muchas posibles configuraciones del gas que satisfaga que la energía total del sistema sea  $E$  y su volumen  $V$ . El estudio estadístico de este sistema depende únicamente del número total de microestados en los cuales podamos encontrar al sistema. Se define entonces la cantidad  $\Omega(E, V, N)$  como:

$\Omega(E, V, N) \equiv$  Número de microestados accesibles por el sistema con energía  $E$ ,  
volumen  $V$  y número de partículas  $N$ .

Al querer encontrar un puente entre la física estadística y la termodinámica, Boltzmann (R K Pathria, 2011) se percató de que existía una relación entre la entropía de un sistema y el número de estados accesibles  $\Omega(E, V, N)$  del mismo. Esto lo llevó a formular lo que actualmente conocemos como la definición estadística de la entropía:

$$S = k \ln \Omega(E, V, N), \quad (3.1)$$

donde  $k$  es conocida como la constante de Boltzmann. Una vez con estas definiciones, podemos empezar a estudiar los gases ideales. Lo primero que podemos notar es que el número de posibles lugares en los cuales se puede encontrar una partícula debe ser proporcional al volumen total del sistema. Al ser un gas ideal, no se tiene ningún tipo de interacción entre las partículas. Por esta razón, la posición de cada partícula es completamente independiente de la posición de las demás. Por lo tanto, dado que el número de posibles microestados del sistema corresponderá al producto de los distintos estados accesibles para cada una de las partículas tendremos entonces

$$\Omega(E, V, N) \propto V^N. \quad (3.2)$$

Utilizando el resultado en 3.1 es directo ver que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} &= \frac{\partial}{\partial V} (kN \ln V) \\ &= \frac{kN}{V} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por otra parte, sabemos por relaciones termodinámicas que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \frac{P}{T}. \quad (3.4)$$

Juntando 3.3 y 3.4 se llega a que

$$PV = kNT, \quad (3.5)$$

lo cual coincide con ser la ley de los gases ideales encontrada en la termodinámica. Vemos entonces cómo al tomar una suposición simple del comportamiento individual de cada partícula encontramos una expresión que define el comportamiento macroscópico del gas.

## 3.2. Física estadística de partículas cuánticas

Formalismos análogos al desarrollo previo se pueden aplicar para estudiar sistemas más complejos. Se pueden incluir en la teoría más características de las partículas constituyentes, lo cual tendrá como consecuencia que los resultados obtenidos sean cada vez más realistas (suponiendo que se pueda llegar a dicho resultado). Una de las características que podemos agregar a nuestra descripción es, por ejemplo, la posibilidad de interacción entre las partículas. Si bien esto suena razonable, agregar este simple hecho complica considerablemente el desarrollo matemático que se debe realizar para llegar al resultado deseado. Podemos entonces buscar otra característica de las partículas que haga más realista nuestra descripción.

A principios del siglo XX había una serie de fenómenos que no lograban explicarse con las teorías clásicas de la mecánica y el electromagnetismo. Un ejemplo de esto es el Efecto Zeeman Anómalo. El científico Neerlandés Pieter Zeeman logró observar el desdoblamiento de líneas espectrales del Sodio al colocar la fuente de estas en un campo magnético<sup>1</sup>. Este efecto se puede explicar mediante el momento angular de los electrones. Sin embargo, observaciones posteriores encontraron desdoblamientos a múltiples líneas, lo cual no puede ser explicado con el momento angular de los electrones. A este fenómeno se le denominó Efecto Zeeman Anómalo justamente por la imposibilidad de describirlo. Para poder explicar este nuevo fenómeno se necesitaría entonces que el electrón tuviera algo así como un momento angular distinto al que conocíamos. Actualmente, sabemos que los electrones tienen un número cuántico adicional correspondiente al espín. La presencia del espín en el electrón es entonces el responsable del desdoblamiento en múltiples líneas espectrales y, por lo tanto, el Efecto Zeeman Anómalo. No fue sino hasta 1922 que Stern y Gerlach encontraron una prueba directa de la existencia del espín, en la cual además encuentran que este presenta una cuantización.

Al estudiar más acerca del espín, se encontró que las partículas pueden tener espín entero o semientero (en unidades de  $\hbar$ ). Uno de los principales precursores

<sup>1</sup>Esta observación lo hizo acreedor del premio Nóbel de 1902 (*The Nobel Prize in Physics, 1902*).

en los estudios del espín fue Wolfgang Pauli. Él logró observar que la invariancia de Lorentz, energías positivas, amplitudes de probabilidad positivas y la causalidad implican que aquellas partículas con espín entero obedecen la estadística de Bose-Einstein y aquellas con espín semientero obedecen la estadística de Fermi-Dirac (Peskin y Schroeder, 1995), resultado conocido como el Teorema Espín-Estadística. De manera natural, se les llamó bosones a esas partículas con espín entero y fermiones a aquellas con espín semientero. Una de las consecuencias del Teorema Espín-Estadística con las que Pauli se encontró al querer estudiar las partículas en el marco de la Teoría Cuántica de Campos fue que, para obtener un desarrollo consistente, los bosones deberían seguir relaciones de conmutación. Contrariamente, los fermiones deberían seguir relaciones de anticonmutación. Esto a su vez implica que la función de onda total del sistema debe ser simétrica bajo el intercambio de dos partículas en el caso de un sistema bosónico y antisimétrica para un sistema fermiónico. Tan simple como suena esto, este resultado tiene consecuencias muy importantes.

Supongamos que tenemos un gas compuesto de partículas cuánticas, en el cual la  $i$ -ésima partícula se puede describir mediante el conjunto de números cuánticos  $s_i$ . Por lo tanto, lo único que necesitamos para describir al sistema es el conjunto de números cuánticos

$$\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

y por lo tanto la función de onda total cumple que

$$\Psi = \Psi_{\{s_1, s_2, \dots, s_N\}}(Q_1, Q_2, \dots, Q_N), \quad (3.6)$$

en donde  $Q_i$  representa a las coordenadas generalizadas de la  $i$ -ésima partícula. Consideremos que las partículas  $i$  y  $j$  de nuestro sistema se encuentran en el mismo estado cuántico  $s$ . Al compartir el estado, podemos intercambiar una con otra sin modificar el sistema. Es decir,

$$\Psi(\dots Q_i \dots Q_j \dots) = \Psi(\dots Q_j \dots Q_i \dots). \quad (3.7)$$

Sin embargo, habíamos visto que en un sistema de fermiones la función de onda total del sistema debe ser antisimétrica bajo el intercambio de dos partículas. Por lo tanto,

$$\Psi(\dots Q_i \dots Q_j \dots) = -\Psi(\dots Q_j \dots Q_i \dots). \quad (3.8)$$

Juntando los resultados en 3.7 y 3.8 concluimos que para un sistema fermiónico

$$\Psi \equiv 0 \quad (3.9)$$

cuando dos de sus partículas comparten un mismo estado cuántico  $s$ . A este resultado se le conoce como el Principio de Exclusión de Pauli (Reif, Belarra y Rubia Pacheco, 1967). Concluimos entonces que en un sistema fermiónico ninguna de sus partículas puede compartir un mismo estado. Por otro lado, para un sistema bosónico no encontramos ninguna restricción en el número de partículas que pueden compartir un mismo estado.

Esto nos lleva entonces a obtener tres estadísticas distintas para describir un sistema de  $N$  partículas:

1. **Estadística de Maxwell-Boltzmann.**- Esta corresponde al caso clásico, en el cual las partículas se consideran distinguibles y no hay restricción en el número de partículas que pueden ocupar el mismo estado.

2. **Estadística de Bose-Einstein (Estadística BE).**- Esta corresponde al caso de sistemas con partículas indistinguibles con espín entero. La función de onda debe ser simétrica ante el intercambio de dos partículas y por lo tanto no existe ninguna restricción en el número de partículas que pueden ocupar un mismo estado.
3. **Estadística de Fermi-Dirac (Estadística FD).**- Esta corresponde a partículas indistinguibles con espín semientero. La función de onda total del sistema debe ser antisimétrica ante el intercambio de dos de sus partículas, lo cual restringe a que ninguna partícula pueda compartir un estado con otra partícula del sistema.

A lo largo de este trabajo nos concentraremos principalmente en la estadística BE, aunque a veces usaremos otras estadísticas con fines comparativos.

### 3.3. Estadística de Bose-Einstein

Una de las cantidades más importantes de la física estadística es la función de partición. En esta se concentra abundante información del sistema en estudio. Esta se define como

$$Z = \sum_R e^{\beta E_R} = \sum_R e^{\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}, \quad (3.10)$$

donde  $\epsilon_i$  representa el  $i$ -ésimo nivel energético,  $n_i$  el número de partículas en dicho estado energético y  $R$  representa los distintos posibles estados cuánticos en los que se puede encontrar al sistema. El estado cuántico del sistema se define por todos los conjuntos

$$\{n_1, n_2, \dots\}$$

en los cuales se pueda encontrar el sistema. Si además queremos que el número de partículas  $N$  sea fijo, entonces debemos pedir la restricción

$$\sum_i n_i = N. \quad (3.11)$$

Sabemos que el valor medio de partículas en el estado  $s$  está dado por

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_R n_s e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}}{\sum_R e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}}, \quad (3.12)$$

lo cual se puede reescribir como

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_R -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}}{\sum_R e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}} = -\frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln Z. \quad (3.13)$$

Vemos entonces que usando la función de partición pudimos encontrar el número promedio de partículas en un estado  $s$  en una expresión compacta y sencilla. De igual manera, muchas otras magnitudes físicas se pueden extraer de la función de partición; entre ellas se encuentra la entropía (Reif, Belarra y Rubia Pacheco, 1967). La dificultad entonces radica en hallar una expresión exacta para la función de partición en el sistema que se esté estudiando.

Consideremos el caso específico de un sistema bosónico en el cual el número de partículas no está fijo. Un ejemplo de este caso puede ser el de fotones confinados

en un volumen en el cual las paredes pueden emitir y absorber fotones. De manera general podemos reescribir 3.12 como

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta \epsilon_s n_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta \epsilon_s n_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}} = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta \epsilon_s n_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta \epsilon_s n_s}}, \quad (3.14)$$

en donde el superíndice  $(s)$  indica que la suma no incluye al estado  $s$ . Análogamente a 3.13, la expresión anterior se transforma en

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln \sum_{n_s} e^{-\beta \epsilon_s n_s}. \quad (3.15)$$

Dado que estamos considerando que el número de partículas es indefinido podemos entonces hacer la serie geométrica en 3.15 y llegar a que

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}} \right) = \dots = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1}. \quad (3.16)$$

A esto se le conoce como distribución de Planck (Reif, Belarra y Rubia Pacheco, 1967).

Consideremos ahora el caso de un sistema bosónico en el cual el número de partículas  $N$  sí está fijo. De los estados cuánticos en los que se encuentra el sistema, hay muchos en los cuales no hay ninguna partícula ocupando un estado  $s$ . Para describir entonces un estado cuántico del sistema de  $N$  partículas en el cual ninguna de ellas se encuentra en el estado  $s$  es conveniente definir la abreviatura

$$Z_s(N) \equiv \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}; \quad (3.17)$$

esto es, si se satisface que

$$\sum_i^{(s)} n_i = N. \quad (3.18)$$

Recordamos que en ambos casos el superíndice  $(s)$  representa que la suma excluye al estado  $s$ .

Por razones que serán claras más adelante será útil encontrar una relación entre  $Z_s(N)$  y  $Z_s(N - \Delta N)$ . Dado que estamos considerando un formalismo estadístico, el número de partículas  $N$  que componen al sistema es enorme, siendo del orden de  $N_A \sim 10^{23}$ . Por esta razón, no es difícil pedir que  $\Delta N \ll N$ . Tenemos entonces para un caso general que

$$\ln Z_s(N - \Delta N) \approx \ln Z_s(N) - \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N} \Delta N, \quad (3.19)$$

de donde se puede llegar a que

$$\frac{Z_s(N)}{Z_s(N - \Delta N)} = e^{\alpha_s \Delta N}. \quad (3.20)$$

En la ecuación anterior definimos  $\alpha_s$  como

$$\alpha_s \equiv \frac{\partial \ln Z_s}{\partial N}. \quad (3.21)$$



Sin embargo, dado el elevado número de estados, la variación del logaritmo no tendrá impacto alguno por el estado específico que se haya removido de la suma. De igual manera, la función de partición  $Z$  será aproximadamente igual a  $Z_s(N)$  (Reif, Belarra y Rubia Pacheco, 1967). Tenemos entonces que

$$\alpha \equiv \frac{\partial \ln Z}{\partial N}. \quad (3.22)$$

Calculemos entonces el valor de  $\bar{n}_s$  para dicho sistema. Como ya vimos,

$$\begin{aligned} \bar{n}_s &= \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta \epsilon_s n_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta \epsilon_s n_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \dots)}} \\ &= \frac{0e^{-\beta \epsilon_s 0} Z_s(N) + 1e^{-\beta \epsilon_s} Z_s(N-1) + 2e^{-2\beta \epsilon_s} Z_s(N-2) + \dots}{Z_s(N) + e^{-\beta \epsilon_s} Z_s(N-1) + e^{-2\beta \epsilon_s} Z_s(N-2)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si además usamos el resultado obtenido en 3.20, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\bar{n}_s = \frac{Z_s(N) [0 + 1e^{-\beta \epsilon_s} e^{-\alpha} + 2e^{-2\beta \epsilon_s} e^{-2\alpha} + \dots]}{Z_s(N) [1 + e^{-\beta \epsilon_s} e^{-\alpha} + e^{-2\beta \epsilon_s} e^{-2\alpha} + \dots]} = \frac{\sum_s n_s e^{-n_s(\beta \epsilon_s + \alpha)}}{\sum_s e^{-n_s(\beta \epsilon_s + \alpha)}}, \quad (3.24)$$

llegando a una suma que ya hemos hecho varias veces. Trabajando idénticamente que en los casos anteriores se encuentra que

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s + \alpha} - 1}. \quad (3.25)$$

A pesar de que el resultado en 3.25 está completo, no nos da mucha información física pues no sabemos realmente el significado físico de  $\alpha$ . Debemos entonces expresarla en términos de algo conocido.

Recordamos que la energía libre está dada por

$$F = -kT \ln Z, \quad (3.26)$$

lo cual nos permite ver que

$$\alpha = \frac{\partial \ln Z}{\partial N} = -\frac{1}{kT} \frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{1}{kT} \mu = -\beta \mu, \quad (3.27)$$

donde  $\mu$  es el potencial químico por partícula.

Por lo tanto,

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}. \quad (3.28)$$

A esto se le conoce como la distribución de Bose-Einstein. Notamos que si el potencial químico en la ecuación anterior se anula, el resultado corresponde al obtenido en 3.16. De igual manera, podemos observar que el resultado 3.28 tiene ciertas implicaciones sobre el potencial químico. Lo primero que se puede observar es que si permitimos cualquier valor del potencial químico, entonces sería posible que para valores de  $\mu$  tales que  $\mu > \epsilon_s$  entonces el número promedio de partículas en ese estado sería negativo. Esto claramente no puede ser. Tenemos entonces la primera condición para el valor de  $\mu$  con respecto a los niveles energéticos

$$\mu \leq \epsilon_s \quad \forall s \quad (3.29)$$

Si en la relación anterior se satisficiera la igualdad para algún estado  $s$ , vemos de 3.28 que el número de partículas promedio en ese estado sería infinito. Esto obliga a que la condición anterior sea más estricta, con lo que  $\mu$  debe cumplir que

$$\mu < \epsilon_s \quad \forall s, \quad (3.30)$$

con lo que podemos asegurar que

$$\mu < \epsilon_0, \quad (3.31)$$

en donde  $\epsilon_0$  representa al estado base de la energía.

Vale la pena recordar que los resultados anteriores fueron obtenidos para el caso en el cual el número de partículas  $N$  permanece fijo. Por esta razón, se debe cumplir que

$$N = \sum_s \bar{n}_s = \sum_s \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}. \quad (3.32)$$

Sin embargo, mientras que el número de partículas está fijo, la temperatura del sistema puede variar. Recordando que  $\beta = \frac{1}{kT}$ , si disminuimos la temperatura del sistema, el valor de  $\mu$  debe disminuir. Esto implicará a su vez que el número de partículas promedio en el estado base comience a aumentar. Más adelante estudiaremos con detenimiento dicho fenómeno.

## 4 Condensación de Bose-Einstein

### 4.1. Formalismo

Al observar ciertos fenómenos cuánticos en los cuales las partículas presentaban un comportamiento ondulatorio, Louis de Broglie propone que las partículas tienen asociada una función de onda, la cual depende de la temperatura a la cual se encuentren y de su masa. Actualmente, esto es lo que nosotros conocemos como la Longitud de Onda de de Broglie o longitud de onda térmica y está dada por

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi mkT)^{1/2}} = \hbar \left( \frac{2\pi\beta}{m} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $\hbar = h/2\pi$  es la constante de Planck reducida. Esta cantidad resulta muy práctica, pues nos permite condensar información importante del sistema. Como se puede ver de su definición, la longitud de onda térmica es inversamente proporcional a la temperatura. Esto nos indica que a medida que la temperatura disminuye, la longitud de onda crece. Esto hace más factible la observación de fenómenos cuánticos, pues la posición de la partícula tiene una mayor incertidumbre. Dicho de otra manera, al momento de calcular la amplitud de probabilidad de la partícula en el espacio encontraremos que esta está menos localizada, contrario a lo que se esperaría en el caso clásico en el cual se puede determinar su ubicación con precisión. De manera similar, la densidad de partículas  $n$  en el sistema también juega un papel importante en este tipo de efectos. Sin embargo, es realmente la combinación de la temperatura y la densidad la que nos indica si estamos trabajando en un régimen clásico o en uno cuántico. Es conveniente entonces usar el parámetro

$$n\lambda^3 = \frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}. \quad (4.2)$$

Si nuestro sistema es tal que  $n\lambda^3 \ll 1$ , entonces los efectos cuánticos son despreciables y podemos pensar que nuestro sistema es clásico. Sin embargo, si  $n\lambda^3$  llega a ser del orden de la unidad, entonces los efectos cuánticos estarán presentes en el sistema. Dicho de otra manera,

$$n\lambda^3 \rightarrow 0 \quad \text{Caso clásico} \quad (4.3)$$

$$n\lambda^3 \rightarrow 1 \quad \text{Caso cuántico.} \quad (4.4)$$

Gracias a esto, a medida que el parámetro  $n\lambda^3$  va de cero a uno se puede hacer un desarrollo en serie de potencias alrededor de este parámetro para entender cómo se van presentando poco a poco los fenómenos cuánticos.

Una vez definido este parámetro, podemos regresar a estudiar las características de un gas de bosones. Podemos reescribir la ecuación 3.32 como

$$N = \sum_s \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_s} - 1}, \quad (4.5)$$

en donde  $z$  se conoce como la fugacidad del sistema y está definida por

$$z \equiv e^{\beta\mu}. \quad (4.6)$$

Los sistemas que queremos estudiar se caracterizan por tener volúmenes demasiado grandes. Por esta razón, el espectro energético que podemos encontrar es prácticamente continuo. Este hecho nos permite sustituir la suma en 4.5 por una integral, tomando en cuenta dos aspectos importantes. La primera es que debemos incluir la densidad de estados energéticos para que la sustitución sea válida. La segunda es consecuencia de la primera, razón por la cual se tratará más adelante.

Si consideramos el caso de un ensamble microcanónico<sup>1</sup>, el volumen del espacio fase se obtiene integrando sobre todas las posiciones y momentos posibles de todas las partículas en el sistema. La integración sobre las posiciones es muy sencilla, pues el sistema está restringido al volumen  $V$ . Tendremos entonces un factor de  $V^N$ . Sin embargo, la integración sobre el espacio de los momentos tiene mayores complicaciones. Al ser un ensamble microcanónico, la energía del sistema debe ser  $E$ . Por esta razón, la integración sobre los momentos tiene la restricción

$$\left(E - \frac{1}{2}\Delta\right) 2m \leq \sum_i^{3N} p_i^2 \leq \left(E + \frac{1}{2}\Delta\right) 2m. \quad (4.7)$$

En el caso que solo se tuviera una partícula en la esfera, la integral que tendríamos que hacer sobre el espacio de momentos sería

$$\int_{(E - \frac{1}{2}\Delta) 2m \leq p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq (E + \frac{1}{2}\Delta) 2m} d^3p, \quad (4.8)$$

integral que coincide con ser el volumen del cascarón de una esfera tridimensional. Al agregar más partículas, esta estructura se mantiene igual, con la diferencia de que ahora estamos calculando el volumen del cascarón de una hipersfera. Se puede hallar una expresión para calcular estos volúmenes, lo cual a su vez nos permite hallar la densidad de estados con momento  $p + \Delta p$ . Una vez con esta relación, se puede encontrar que

$$a(\epsilon)d\epsilon \approx \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (4.9)$$

es la densidad de estados para una cierta energía  $\epsilon$ <sup>2</sup> (ver R K Pathria (2011) para el cálculo completo).

Una vez con esta cantidad, uno se vería tentado a reescribir 4.5 simplemente como

$$N = \int a(\epsilon) \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon_s} - 1} d\epsilon. \quad (4.10)$$

Sin embargo, al hacer esto se le está otorgando peso cero al estado base de la energía, siendo este el segundo detalle que debemos arreglar. Esto es incorrecto pues todos los niveles energéticos no degenerados deben recibir un peso estadístico unitario (R K Pathria, 2011). Para arreglar esto se puede simplemente agregar el término asociado al estado base de la energía, lo que nos da una expresión correcta para el valor de

<sup>1</sup>En este caso el sistema está aislado. La energía y el volumen están fijos.

<sup>2</sup>Para lograr esto se parte de la densidad de estados en función del momento. Posteriormente, se utiliza la relación no relativista  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ , de manera que el resultado es clásico.

$N$ ,

$$N = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \int_0^\infty \frac{a(\epsilon)}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_s} - 1} d\epsilon = \frac{z}{1 - z} + \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon. \quad (4.11)$$

De la ecuación anterior podemos identificar el número de partículas en el estado base  $N_0$  como

$$N_0 = \frac{z}{1 - z}. \quad (4.12)$$

De igual manera, podemos invertir 4.12 para obtener la fugacidad  $z$  en función del número de partículas en el estado base  $N_0$

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1} \approx 1 - \frac{1}{N_0}. \quad (4.13)$$

Notamos que cuando  $z \ll 1$  entonces el número de partículas en el estado base es despreciable. Contrariamente, a medida que  $z$  se acerca a la unidad, el valor de  $N_0$  aumenta, haciéndose así una fracción considerable del número total de partículas  $N$ . Estamos viendo entonces que conforme  $z$  crece y se aproxima a la unidad, las partículas se comienzan a agrupar en el estado base. A esta agrupación se le conoce como Condensación de Bose-Einstein. Veamos esto desde otra perspectiva.

Sea  $N_\epsilon$  el número de partículas en los estados excitados, i.e.  $N_\epsilon = N - N_0$ . De 4.11 es directo ver que

$$N_\epsilon = \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_s} - 1} d\epsilon. \quad (4.14)$$

Dividiendo por  $V$  y haciendo un cambio de variable vemos que

$$\frac{N_\epsilon}{V} = \frac{2\pi (2m)^{3/2}}{h^3 \beta^{3/2}} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \frac{1}{\lambda^3 \Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx, \quad (4.15)$$

donde usamos que  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$  y 4.1. Podemos también usar las funciones de Bose-Einstein  $g_\nu(z)$ , las cuales se definen como

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx \quad (4.16)$$

para reescribir 4.15 y llegar a que

$$\frac{N_\epsilon}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z). \quad (4.17)$$

Podemos notar de 4.17 que el número de partículas en los estados excitados depende tanto de la temperatura, incluido en la longitud de onda térmica  $\lambda$ , como de la fugacidad del sistema, dependencia que carga la función de Bose-Einstein. A su vez, la fugacidad tiene dependencia con el potencial químico  $\mu$  y por lo tanto se tiene una relación sutil con la densidad del sistema. Para tener un mejor entendimiento del comportamiento del sistema, podemos expresar las funciones de Bose-Einstein en serie de potencias alrededor de  $z$

$$g_\nu(z) = z + \frac{z^2}{2^\nu} + \frac{z^3}{3^\nu} + \dots \quad (4.18)$$

De este desarrollo podemos notar que  $g_\nu$  es una función de  $z$  monótonamente creciente y acotada en el intervalo  $[0, 1]$ . Esto implica entonces que el número de partículas en estados excitados tiene un límite, el cual está dado por

$$\frac{N_\epsilon^{\max}}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(1) = \frac{1}{\lambda^3} \left( 1 + \frac{1^2}{2^{3/2}} + \frac{1^3}{3^{3/2}} + \dots \right) \equiv \frac{1}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{1}{\lambda^3} 2.612. \quad (4.19)$$

El número de partículas en el sistema puede ser menor que este valor. Sin embargo, cuando el número de partículas en el sistema sobrepasa a  $N_\epsilon^{\max}$ , las partículas restantes no tienen otro lugar a donde ir más que al estado base. La capacidad del estado base es esencialmente ilimitada (R K Pathria, 2011). En este caso, el número de partículas en el estado base será

$$N_0 = N - \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (4.20)$$

Recordando la relación 4.13, el valor de la fugacidad se definirá entonces por 4.20, relación que además determinará el potencial químico del sistema.

Obtenemos entonces dos condiciones para observar la condensación de Bose-Einstein. La primera, asociada al número de partículas en el sistema, es

$$N > N_\epsilon^{\max} = \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (4.21)$$

Para lograr apreciar la segunda condición, conviene escribir explícitamente  $\lambda$ . Esto nos permite encontrar la segunda condición para el comienzo de la condensación de Bose-Einstein en función de la temperatura, manteniendo fijo el volumen y el número de partículas en el sistema. La condición está dada por

$$T < T_C = \left( \frac{N}{V \zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k} = \left( \frac{n}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k}. \quad (4.22)$$

De las condiciones 4.21 y 4.22 es más clara la importancia del parámetro  $n\lambda^3$  y la razón por la cual se deben considerar la temperatura y la densidad simultáneamente.

## 4.2. Condiciones operacionales para la condensación

Encontramos entonces que el proceso de condensación se puede dar ya sea gracias a la temperatura o al número de partículas en el sistema. Sin embargo, operacionalmente esto puede ser un poco complicado. Por esta razón sería conveniente contar con una condición equivalente que sea más fácil de aplicar en la práctica. Para encontrar dicha condición debemos recordar las propiedades estudiadas en el capítulo 3. Recordamos de 3.28 que

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}.$$

En particular, la expresión anterior también aplica para el caso del estado base, en cuyo caso se tiene que

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1}. \quad (4.23)$$

Por otra parte, sabemos gracias a la ecuación de Einstein que la energía de una partícula con masa  $m$  y momento  $p$  está dada por

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (4.24)$$

Dada la complicada estructura que tiene esta cantidad, es conveniente trabajar en un sistema de unidades en el cual sea un poco más sencilla. A este sistema se le llama el sistema de unidades naturales, en el cual las constantes fundamentales de la naturaleza se igualan a la unidad. Explícitamente,

$$\hbar = c = G = k = 1, \quad (4.25)$$

en donde el último 1 es totalmente adimensional. Este sistema trae varias consecuencias, así como el hecho que la distancia y el tiempo tienen la misma dimensión pues  $1 = [c] = \text{distancia}/\text{tiempo}$ , mientras que la energía tiene la unidad inversa del tiempo dado que  $1 = [c] = \text{energía} \times \text{tiempo}$ . A partir de este momento se trabajará únicamente en este sistema de unidades. En nuestro caso, la utilidad radica en que podemos reescribir 4.24 como

$$E^2 = m^2 + p^2. \quad (4.26)$$

El estado base es, por definición, el estado de menor energía. Observando 4.26 notamos que esto sucede cuando  $p = 0$ , dejando  $\epsilon_0 = m$ . El número de partículas en el estado base es

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(m-\mu)} - 1}. \quad (4.27)$$

Como ya se vio en la sección anterior, la condensación de Bose-Einstein consiste en una agrupación macroscópica de partículas en el estado base. En la ecuación 4.27 se puede ver que a medida que  $\mu \rightarrow m$ ,  $N_0$  empieza a crecer considerablemente. Por esta razón, operacionalmente se utiliza la condición  $\mu = m$  cuando se quiere considerar condensación en el sistema. De esta manera, llegamos equivalentemente a que la temperatura crítica  $T_c$  es aquella para la cual se cumple la igualdad entre la masa y el potencial químico. Formalmente, la masa y el potencial químico no pueden ser idénticos, pues esto llevaría a una ocupación infinita del estado base. Como se verá más adelante, hacer esta igualación es válida en el límite termodinámico, en el cual se considera que  $V \rightarrow \infty$ , dado que la diferencia  $m - \mu$  debe ser inversamente proporcional al volumen  $V$  del sistema.

### 4.3. Relación entre densidad y temperatura en la condensación

Como vimos en la sección 4.2, el estado condensado consiste en una agrupación de partículas con momento nulo. Por esta razón, sería conveniente escribir la ecuación 4.11 en función del momento en lugar de la energía. En este caso, la densidad de estados en función del momento es

$$g(p)dp = V \frac{p^2}{2\pi^3}.$$

Recordamos también que para llegar a 4.11, supusimos que el tamaño del sistema era tan grande que podíamos realizar sin ninguna complicación la sustitución  $\sum \rightarrow \int a(\epsilon)d\epsilon$ . Conviene entonces dividir entre el volumen y expresar este resultado en

términos de la densidad de partículas. Explícitamente,

$$\rho(T, \mu) = \rho_0 + \rho_\epsilon = \rho_0 + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} dp, \quad (4.28)$$

donde  $\rho_0$  corresponde a la densidad de partículas en el estado base y  $\rho_\epsilon$  es la densidad de partículas en estados excitados. Necesitamos entonces encontrar una expresión que nos permita analizar los distintos casos que podemos tener. Gracias a los cálculos realizados en el capítulo 3, es fácil notar que

$$\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} = \frac{e^{-\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)}}. \quad (4.29)$$

Por otra parte, podemos expresar el denominador utilizando la serie geométrica gracias a que  $e^{-\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} < 1$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} = e^{-\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)}. \quad (4.30)$$

Sustituyendo en 4.28 únicamente para  $\rho_\epsilon$  se llega a

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} p^2 e^{-n\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} dp = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta n \mu} \int_0^\infty p^2 e^{-n\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp. \quad (4.31)$$

Para lograr llegar a una expresión analítica debemos hacer uso de la ecuación 4.26 para hacer un cambio de variable en la integral anterior. Esta expresión es

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta n \mu} \int_m^\infty \sqrt{E^2 - m^2} E e^{-n\beta E} dp. \quad (4.32)$$

Todo este proceso es útil pues la integral en la expresión anterior se puede resolver analíticamente, llegando a que

$$\rho_\epsilon(T, \mu) = \frac{m^2}{2\pi^2 \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n\beta \mu} K_2(mn\beta), \quad (4.33)$$

en donde  $K_2$  es la función de Hankel modificada.

Encontramos una expresión analítica que nos permite estudiar la densidad de partículas en estados excitados en función de la temperatura y el potencial químico. Vale la pena recordar que para temperaturas  $T_c \leq T$  la densidad de partículas en el estado base es despreciable, razón por la cual

$$\rho(T, \mu) \cong \rho_\epsilon(T, \mu). \quad (4.34)$$

De igual manera, en la sección 4.2 vimos que el punto en el cual la temperatura cumplía con que  $T_c = T$  era equivalente al punto en el cual  $\mu = m$ . Por esta razón, podemos definir la densidad crítica  $\rho_c$  como la densidad que tiene el sistema cuando



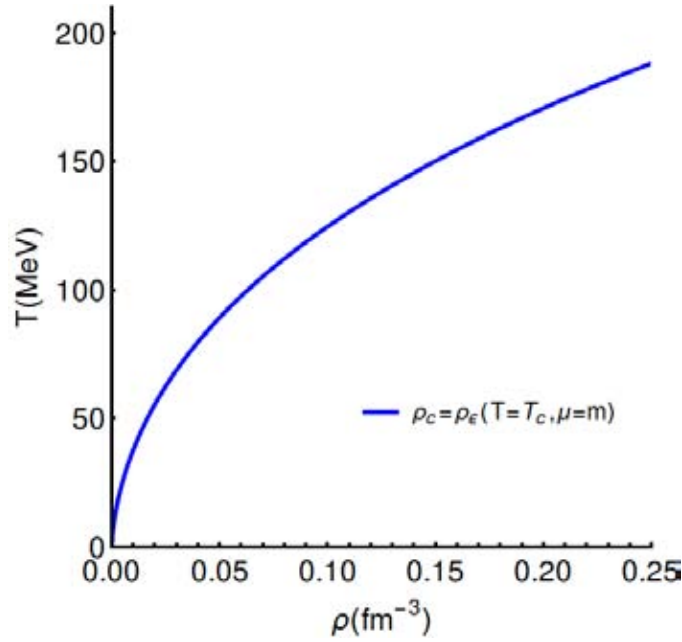


FIGURA 4.1: Diagrama de fase en el plano  $T$  contra  $\rho$ . La línea denota la transición de fase. Debajo de la línea la densidad total del sistema se compone tanto de partículas en estados excitados y en el condensado mientras que por encima de la línea se tienen únicamente partículas en estados excitados. En este caso específico se utiliza la masa de los piones cargados  $\pi^\pm = 139.57\text{MeV}$ . Ver Begun y Gorenstein (2008).

$T = T_c$ . Esto nos deja con que

$$\rho_c = \frac{m^2 T_c}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{mn}{T_c}} K_2\left(\frac{mn}{T_c}\right). \quad (4.35)$$

Hay que recalcar que para asegurar que esta sea la densidad que estamos buscando se evalúa cuando  $T = T_c$  y  $\mu = m$ . Al encontrar esta relación podemos obtener un diagrama de fase en el cual tengamos tanto la temperatura  $T$  como la densidad  $\rho$ .

En el diagrama de fase que se muestra en la figura 4.1 se puede apreciar la relación que existe entre la temperatura y la densidad que permite la formación de un estado condensado en el sistema. La región que se encuentra por encima de  $\rho_c$  es aquella en la cual prácticamente todas las partículas del sistema se encuentran en estados energéticos excitados. Dicho de otra manera, la población en el estado base de la energía es despreciable. Contrariamente, la región comprendida debajo de  $\rho_c$  corresponde a los valores de la temperatura y densidad que permiten que se tenga una agrupación macroscópica en el estado base. Notamos que, a medida que la densidad es mayor, la temperatura del sistema puede ser elevada y aún así el sistema puede presentar condensación de Bose-Einstein. Sin embargo, a medida que la densidad es menor la temperatura del sistema debe a su vez disminuir si queremos observar el fenómeno de la condensación.

### Condensación de Piones vs. Condensación de Átomos\*

Como se mencionó en la Introducción, el objetivo final de este estudio consiste en analizar la condensación de piones. Sin embargo, estudiar los procesos formados en una colisión de iones pesados es muy complicado. La única información directa que se puede extraer es de los productos finales que llegan a los detectores. Aunado a esto, la condensación de Bose-Einstein ha sido un gran reto experimental. Su producción y observación fue tan complicada que la primera señal concluyente de la observación de este estado fue realizada por Anderson y col. (1995). Uno pudiera pensar entonces que, dadas estas dos dificultades, no tiene sentido alguno estudiar la condensación de piones en colisiones de iones pesados. A continuación se muestra por qué sí es conveniente estudiarla.

Supongamos primero que estamos estudiando el caso no relativista en el cual se tiene la relación  $T_c/m \ll 1$ . En este límite, la función de Bessel  $K_2$  que se tiene en la ecuación 4.35 se puede aproximar por

$$K_2\left(\frac{mn}{T_c}\right) \approx \sqrt{\frac{\pi T_c}{2mn}} \exp\left[\frac{T_c}{mn}\right]. \quad (4.36)$$

Sustituyendo este límite en la ecuación 4.35 encontramos que

$$\rho_c \cong \left(\frac{mT_c}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow T_c \cong \frac{2\pi}{m} \left(\frac{\rho_c}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \cong 3.31m^{-1}\rho_c^{2/3}, \quad (4.37)$$

en donde usamos que  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ . Si ahora nos vamos al límite ultrarelativista, encontramos que  $K_2\left(\frac{mn}{T_c}\right) \approx 2\left(\frac{T_c}{mn}\right)^2$ . En este caso, al sustituir en la ecuación 4.35 se obtiene

$$\rho_c \cong \frac{\zeta(3)T_c^3}{\pi^2} \Rightarrow T_c \cong 2.01\rho_c^{1/3}. \quad (4.38)$$

Uniando los resultados obtenidos anteriormente podemos ver cómo se comparan las temperaturas críticas cuando comparamos un sistema formado por átomos y otro sistema formado por piones:

$$\frac{T_c(\pi)}{T_c(A)} \cong \begin{cases} \frac{m_A}{m_\pi} \left(\frac{r_A}{r_\pi}\right)^2 \cong \frac{m_A}{m_\pi} 10^{10} & \text{no - relativista} \\ \left(\frac{r_A}{r_\pi}\right) \cong 10^5 & \text{ultrarelativista} \end{cases} \quad (4.39)$$

en donde usamos que  $r_A \cong 10^{-10}m$  y que  $r_\pi \cong 10^{-15}m$  (Begun y Gorenstein, 2008). Notamos entonces que en el caso no relativista las temperaturas a las cuales un sistema de piones puede presentar condensación es cercana a la temperatura del universo 1 segundo después del Big Bang (Wolfram Alpha). Por esta razón, estudiar la condensación de piones en el caso de colisiones de iones pesados, tanto en el caso relativista como en el no relativista, pudiera incluso proporcionarnos más información acerca de este estado de la materia que lo observado en experimentos controlados con átomos.

## 5 Volumen finito

Todo lo que se ha desarrollado hasta este momento es formal. Sin embargo, todo se basa en la suposición de que el volumen del sistema es infinito. En general esta suposición es válida pues el tamaño del sistema suele ser tan grande en comparación con las partículas que estamos estudiando que, para todo fin práctico, puede ser considerado como infinito. Si queremos obtener una imagen más realista del sistema debemos considerar el volumen como finito y, en todo caso, tomar el límite termodinámico *después* de haber encontrado los resultados que buscamos. De igual manera, los resultados pueden tener la dependencia explícita del volumen ya que todos los fenómenos físicos que podemos estudiar tienen un volumen finito y esta información mejora la descripción del sistema estudiado. En esta sección estudiaremos las consecuencias que trae el hecho de considerar un volumen finito en lugar de considerar el límite termodinámico desde un inicio. El desarrollo de esta sección se basa en los resultados obtenidos por Begun y Gorenstein (2008).

Lo primero que notamos es que en las secciones anteriores el hecho de considerar el volumen infinito no afecta la densidad con la que estamos trabajando. Esto se logra pues al considerar el límite termodinámico el número de partículas crece de tal manera que la densidad del sistema sigue siendo finita. Sin embargo, se puede ver de la ecuación 4.27 que si usamos la condición operacional para la condensación, i.e.  $\mu = m$ , la densidad de partículas en el estado base será infinita bajo la suposición de que el volumen  $V$  es finito. Esto nos da entonces la primera restricción en el sistema al considerar un sistema con volumen finito.

La segunda restricción viene de la manera en la cual cuantizamos los niveles energéticos para el caso de un gas ideal. Debemos entonces estudiar dicha cuantización para entender los efectos del volumen finito.

### 5.1. Cuantización de momento en un gas ideal

La temperatura tiene una relación directa con la energía cinética y por lo tanto con el momento de las partículas en un sistema. Sabiendo que las partículas tienen una longitud de onda asociada dependiente de la temperatura, podemos imaginarnos que una relación similar se pueda hallar en términos del momento de la partícula. Naturalmente, esta relación existe y es conocida como la longitud de onda de Broglie. En este caso,

$$\lambda = \frac{2\pi}{p}. \quad (5.1)$$

Supongamos por simplicidad que el sistema que queremos estudiar es un cubo de lado  $L$  y volumen  $V = L^3$ . Queremos pensar que las partículas se encuentran confinadas en este volumen, por lo que debemos pedir que las paredes del sistema sean infinitamente rígidas. La rigidez de las paredes evitará que fenómenos como el tunelaje cuántico permitan escapar a las partículas. El hecho de estar dentro de una caja obliga a que los nodos de la longitud de onda asociada a cada partícula deba coincidir con las paredes de la caja (ver figura 5.1). Esta restricción es la que impone

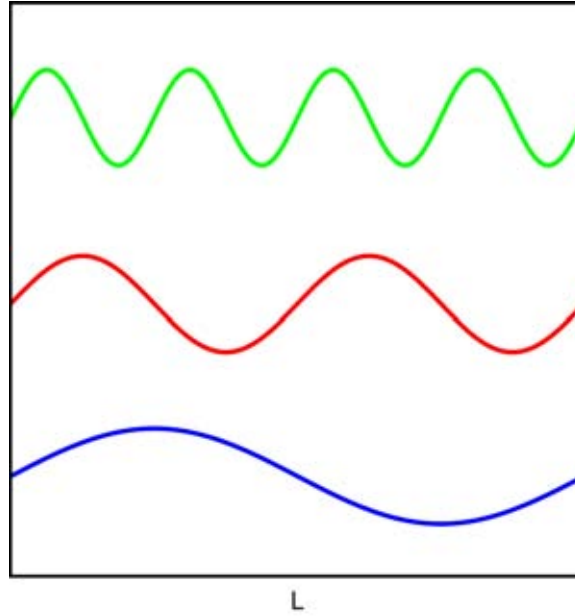


FIGURA 5.1: Se muestran las tres posibilidades de longitud de onda más bajas para una partícula confinada en una caja de lado  $L$ . La cuantización en las longitudes de onda se da para las tres dimensiones de la caja.

la cuantización sobre los momentos. La restricción se dará para las tres dimensiones que se tienen, por lo que tenemos entonces restricciones individuales para las componentes del momento. Reescribimos la ecuación 5.1 como

$$|p_i| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad i = x, y, z. \quad (5.2)$$

Por otra parte, la condición de cuantización obliga a que el número de longitudes de onda que puedan estar contenidas dentro de la caja sea entero. A dichas condiciones se les llama condiciones de frontera periódicas. Esto garantizará que los nodos de la onda coincidan con las paredes de la caja, así como se muestra en la figura 5.1. Esto es equivalente a pedir que

$$\frac{L}{\lambda_j} = l_j, \quad (5.3)$$

en donde  $l_j \in \mathbb{Z}^+$ .

Encontramos entonces que existe una relación intrínseca entre los posibles valores que puede adquirir el momento de las partículas y las dimensiones del sistema en el que se encuentra. Explícitamente,

$$|p_i| = \frac{2\pi l_i}{L}. \quad (5.4)$$

Dado que estamos considerando el caso de un gas ideal, lo único que necesitamos para describir una partícula es su momento. El conjunto de números cuánticos  $\mathbf{j} = \{l_x, l_y, l_z\}$  es entonces suficiente para describir el estado de una partícula.

## 5.2. Efectos de volumen finito en la densidad

Al considerar el caso en el que el volumen del sistema es infinito, la diferencia de momento entre un estado y el siguiente más energético es infinitesimal. Esto permitió que sustituyéramos la suma de estados por una integral en la ecuación 4.11. En este caso, dado que la diferencia no es infinitesimal, debemos ser más cuidadosos al tratar con esta suma. Conviene entonces escribir explícitamente los primeros dos términos, para lo cual utilizamos que lo único que necesitamos para describir un estado es definir el valor de  $j$ . Tenemos entonces que

$$\rho(T, \mu) = \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(m-\mu)} - 1} + \frac{1}{V} \frac{6}{e^{\beta(\sqrt{p_1^2+m^2}-\mu)} - 1} + \frac{1}{V} \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p_j^2+m^2}-\mu)}}, \quad (5.5)$$

en donde el 6 en el segundo término del lado derecho corresponde a la degeneración del estado. Dicho de otra manera, dado que hay 3 dimensiones y las partículas se pueden mover en dirección positiva y negativa de estas dimensiones, existen 6 configuraciones distintas que corresponden al mismo nivel energético.

Veamos entonces qué información podemos extraer de esta relación. Por una parte, recordamos que cuando  $\mu \rightarrow m$  el estado base se comienza a poblar macroscópicamente. Por otra parte, sabemos que la densidad de partículas en el estado base debe ser finita. Esto nos da cierta información del sistema. Vemos que, dado que  $\beta(m - \mu) \ll 1$ , el término asociado al estado base se puede aproximar a primer orden por

$$\frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(m-\mu)} - 1} \approx \frac{1}{V} \frac{1}{\beta(m - \mu)}. \quad (5.6)$$

Para que esta cantidad permanezca finita en el límite termodinámico requerimos que  $\beta(m - \mu) \propto V^{-1}$ .

Analicemos ahora el término asociado al primer nivel excitado. Al ser el primer nivel, el momento que adquieren las partículas es muy bajo en comparación con la masa de las mismas. Por esta razón, podemos aproximar también

$$\sqrt{p_1^2 + m^2} \approx m + \frac{p_1^2}{2m}. \quad (5.7)$$

Este término entonces es, a primer orden, la masa más la energía cinética clásica de las partículas. Nuevamente, dado que es la energía del primer estado excitado, podemos escribir este término como

$$\frac{1}{V} \frac{6}{e^{\beta(\sqrt{p_1^2+m^2}-\mu)} - 1} \approx \frac{1}{V} \frac{6}{\frac{p_1^2}{2mT} + \beta(m - \mu)}. \quad (5.8)$$

De la ecuación 5.4 podemos ver que  $p_1^2 \propto V^{-2/3}$ , con lo que el término asociado al estado base satisface

$$\frac{1}{V} \frac{6}{e^{\beta(\sqrt{p_1^2+m^2}-\mu)} - 1} \propto \frac{V^{-1}}{V^{-2/3}} = V^{-1/3}. \quad (5.9)$$

Para sistemas con tamaño finito pero grande este término será entonces despreciable. Este hecho nos permite integrar en lugar de considerar una suma discreta sobre los estados energéticos. Dado que la suma la estamos expresando sobre un conjunto de

tres valores, la suma se convertirá en tres integrales. Es decir,

$$\sum_j \rightarrow \int dl_x dl_y dl_z. \quad (5.10)$$

De la ecuación 5.4 vemos que  $dl_i = \frac{L}{2\pi} d|p_i|$ . Por otra parte, dado que en la expresión que vamos a integrar todos los momentos se encuentran al cuadrado podemos deshacernos del valor absoluto. Esto nos lleva a que la densidad de partículas para el caso de volumen finito está dada por

$$\rho(T, \mu) = \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(m-\mu)} - 1} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} dp. \quad (5.11)$$

Notamos que en la expresión anterior sustituimos una integral triple sobre los momentos  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$  por una única integral sobre  $p$ , lo cual saca un factor de  $4\pi$  al integrar sobre el ángulo sólido. De igual manera, vemos que los tres factores de  $L$  en los elementos diferenciales de momento se anulan con el factor de  $V^{-1}$  que teníamos originalmente. Finalmente, vemos que el límite de integración se considera desde  $p = 0$  ya que en la ecuación 5.9 vimos que la contribución del primer estado excitado es despreciable para volúmenes grandes.

Esta expresión coincide con la obtenida para el caso de volumen infinito. Vemos entonces que, para  $V$  grande pero finito, el estado base define completamente los efectos de tamaño finito en el sistema. En particular, dichos efectos estarán contenidos en la relación entre  $m$  y  $\mu$ . Es conveniente entonces definir la cantidad

$$\delta \equiv \beta(m - \mu) \quad (5.12)$$

y ver cómo se comporta para distintos casos de la temperatura. Dado que queremos estudiar la condensación de Bose-Einstein nos concentraremos en el límite  $\mu \rightarrow m$ . Bajo este límite, podemos escribir la densidad de partículas como

$$\rho \cong \frac{1}{V\delta} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} dp = \frac{1}{V} \frac{1}{\delta} + \rho_\epsilon(T, \mu). \quad (5.13)$$

Como ya mencionamos anteriormente, los efectos de considerar un sistema con volumen finito estarán reflejados en la relación entre  $m$  y  $\mu$ . Es conveniente entonces encontrar una expresión asintótica para  $\rho_\epsilon(T, \mu)$ . Sabemos por su definición que

$$\rho_\epsilon(T, m) - \rho_\epsilon(T, \mu) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left[ \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} \right]. \quad (5.14)$$

Es conveniente realizar un cambio de variable que nos permita simplificar estas integrales. Hacemos

$$p = \sqrt{2}m^{1/2}(m - \mu)^{1/2}x. \quad (5.15)$$

De igual manera, utilizamos la identidad

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{\coth\left(\frac{y}{2}\right) - 1}{2} \quad (5.16)$$

y vemos que

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon(T, m) - \rho_\epsilon(T, \mu) &= \frac{m^{3/2}(m - \mu)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2}} \int_0^\infty dx x^2 \left[ \coth \left( \frac{\beta}{2} \left( \sqrt{2m(m - \mu)x^2} - m \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. - \coth \left( \frac{\beta}{2} \left( \sqrt{2m(m - \mu)x^2} - \mu \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dado que estamos estudiando el límite  $m - \mu \ll 1$ , podemos hacer la aproximación

$$\sqrt{2m(m - \mu)x^2 + m^2} = m \left( \sqrt{1 + \frac{2(m - \mu)x^2}{m}} \right) \approx m + (m - \mu)x^2. \quad (5.18)$$

Esto nos permite aproximar la relación buscada como

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon(T, m) - \rho_\epsilon(T, \mu) &= \frac{m^{3/2}(m - \mu)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2}} \int_0^\infty dx x^2 \left[ \coth \left( \frac{\beta}{2} (m - \mu)x^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. - \coth \left( \frac{\beta}{2} (m - \mu)(x^2 + 1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Aprovechándonos una vez más del límite en el cual estamos trabajando, podemos hacer un desarrollo en serie de potencias alrededor de  $x \rightarrow 0$ , el cual será

$$\coth \left( \frac{\delta x^2}{2} \right) \approx \frac{2}{\delta x^2}$$

y el análogo para el otro cotangente hiperbólico. Juntando los resultados llegamos a que

$$\rho_\epsilon(T, m) - \rho_\epsilon(T, \mu) \approx \frac{m^{3/2}(m - \mu)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2}\delta} \int_0^\infty dx x^2 \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right] = \frac{(mT)^{3/2}\delta^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.20)$$

Podemos finalmente reescribir 5.13 usando los resultados obtenidos como

$$\rho(T, \mu) \cong \frac{1}{V\delta} + \rho_\epsilon(T, m) - \frac{(mT)^{3/2}\delta^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (5.21)$$

o bien,

$$V \frac{(mT)^{3/2}\delta^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} + V\delta [\rho(T, \mu) - \rho_\epsilon(T, m)] - 1 = 0. \quad (5.22)$$

Para entender el significado del término  $\rho_\epsilon(T, m)$  hay que ver la figura ???. Este término corresponde a las líneas de la figura. Para una temperatura dada, el término  $\rho_\epsilon(T, m)$  representa el límite entre un sistema que presente condensación y uno que no. Si la densidad del sistema es mayor que este límite entonces la diferencia entre estas densidades será la densidad de partículas condensadas, mientras que si la densidad del sistema es menor entonces todas las partículas del sistema se encuentran en estados excitados.

Estamos buscando el comportamiento de  $\delta$  para distintos casos de la temperatura. Podemos entonces escribir la relación que cumple como

$$a(T)V\delta^{3/2} + b(T)V\delta - 1 = 0, \quad (5.23)$$

donde  $a(T) = \frac{(mT)^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}$  y  $b(T) = [\rho(T, \mu) - \rho_\epsilon(T, m)]$ . Veamos entonces qué sucede para cada caso.

- $T < T_c$  Si estuviéramos en el caso de volumen infinito, tendríamos que  $\delta \equiv 0$ . Sin embargo, al considerar volumen finito recordamos que no puede llegar nunca a cero. Aún así, su valor es tan pequeño que podemos despreciar las potencias mayores a 1 en el polinomio 5.23. Esto nos deja con que

$$\delta \cong \frac{1}{b(T)} V^{-1}. \quad (5.24)$$

También notamos que en este caso  $b(T) > 0$ , pues el término  $\rho_\epsilon(T, m)$  corresponde a una densidad menor que la del sistema (ver figura ??). Esto mantiene el hecho de que  $\delta > 0$ .

- $T = T_c$  En este caso tenemos que  $b(T) = 0$  pues estamos considerando densidades iguales. Esto transforma la ecuación 5.23 en

$$\delta \cong \frac{1}{(a(T))^{2/3}} V^{-2/3}. \quad (5.25)$$

- $T > T_c$  Contrario al caso  $T < T_c$ , en este caso tendremos que  $b(T) < 0$ . Esto nos permite encontrar una solución completa para el polinomio 5.23, encontrando que

$$\delta \cong \left( \frac{b(T)}{a(T)} \right)^2. \quad (5.26)$$

Encontramos entonces algo muy interesante. Cuando consideramos los efectos de volumen finito encontramos que el valor de  $\delta$  está acotado inferiormente cuando  $T > T_c$ . De igual manera, para los casos  $T \leq T_c$  el valor de  $\delta$  está definido por el volumen del sistema. Vemos que a medida que bajamos la temperatura y elevamos el volumen del sistema la diferencia entre  $m$  y  $\mu$  disminuye, hasta que estas cantidades se igualan en el límite.

Habíamos encontrado en la ecuación 4.33 una expresión para la densidad de partículas en estados excitados en función de la temperatura. Para encontrar la temperatura crítica en función de la densidad sustituimos el valor de  $\mu$  por el de  $m$ , ya que esta era nuestra condición para la condensación. Al considerar el caso del volumen finito hemos encontrado una nueva condición que satisface la temperatura crítica. Tendremos entonces una nueva expresión que satisface la densidad evaluada en la temperatura crítica. Vemos de la ecuación 5.25 que el valor de  $\mu$  en la temperatura crítica está dada por

$$\mu \cong m - \frac{(2\pi^2)^{1/3}}{m} V^{-2/3}. \quad (5.27)$$

Con esto podemos reescribir la expresión 4.33 como

$$\rho_c = \frac{m^2 T_c}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[ \frac{n \left( m - \frac{(2\pi^2)^{1/3}}{m} V^{-2/3} \right)}{T_c} \right] K_2 \left( \frac{mn}{T_c} \right). \quad (5.28)$$

Podemos notar de esta expresión que, en el límite  $V \rightarrow \infty$  se recupera el resultado obtenido en las secciones anteriores. Haciendo uso de esta expresión podemos ver



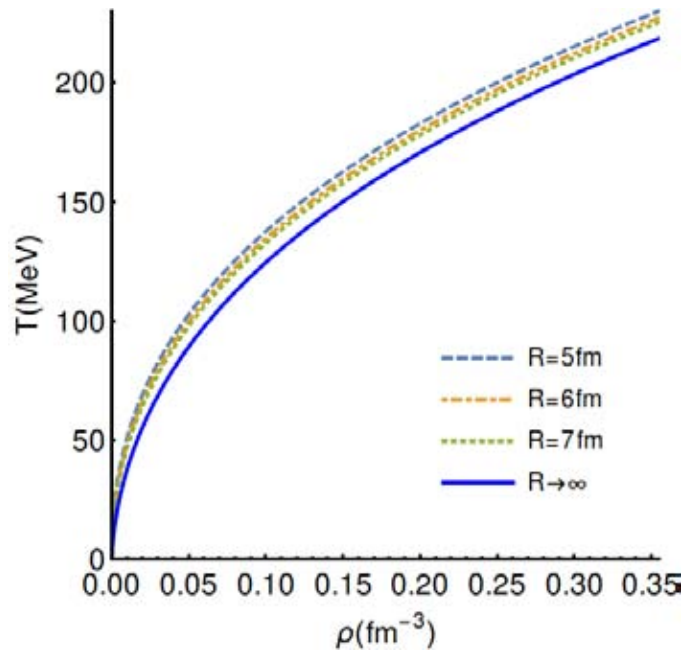


FIGURA 5.2: Diagrama de fase en el plano  $T$  contra  $\rho$ . Al igual que en la figura 4.1, se muestra la transición de fase del sistema considerando partículas con la masa del pión. Se compara la transición de fase para un sistema esférico con radio  $r = 5, 6, 7\text{fm}$  y el caso de volumen infinito.

cómo afecta la consideración de volumen finito a la relación entre la densidad y la temperatura del sistema. Esto se muestra en la figura 5.2.

Observando el diagrama de fase en la figura 5.2 es fácil notar que al considerar un sistema con un volumen finito la transición de fase se da para temperaturas más elevadas. En otras palabras, los efectos de volumen finito promueven la condensación del sistema. Esto concuerda con lo planteado en el capítulo 4, en el que vimos que la condensación se da cuando los estados disponibles para el sistema no son suficientes para albergar todas las partículas contenidas en el mismo. En este caso, al considerar un sistema de volumen finito estamos restringiendo una cantidad considerable de estados energéticos disponibles en el sistema, ya que el momento debe estar cuantizado. Esto entonces obliga a muchas partículas a ubicarse en el estado base antes que cuando teníamos un sistema de volumen infinito.

### Función de Onda en un Sistema con Volumen Finito\*

En las secciones anteriores supusimos, por simplicidad, que la restricción que viene de considerar un sistema de volumen finito está dada únicamente por la ecuación 5.4. Sin embargo, si queremos una descripción más realista del sistema físico que estamos estudiando debemos analizar con detalle las consecuencias que esta restricción tiene sobre la función de onda  $\psi(\vec{r}, t)$  de las partículas analizadas. Ayala y Smerzi (1997) estudiaron esto con detalle. A continuación se resumen los resultados encontrados.

Recordamos una vez más que el objetivo final de este estudio es analizar el comportamiento de los piones producidos en la fase de hadronización de una colisión de iones pesados. Después de los momentos iniciales de la colisión, la *bola de fuego* (fireball) producida comienza a expandirse lentamente en comparación con las

colisiones entre las partículas del medio. Esto nos permite que, como una primera aproximación, pensemos que el volumen de la bola de fuego es una esfera. Dado que los piones están confinados a este volumen, decimos que las condiciones de frontera de la función de onda de las partículas son aquellas de una pared rígida. Es decir,

$$\psi(R, t) = 0. \quad (5.29)$$

Ahora, dado que los piones son partículas de espín cero sabemos que estos deben obedecer la ecuación de Klein-Gordon, razón por la cual la función de onda deberá satisfacer

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.30)$$

La solución normalizada de esta ecuación es (Ayala y Smerzi, 1997)

$$\psi_{klm}(\vec{r}, t) = \frac{1}{R J_{l+3/2}(kR)} \left( \frac{1}{r E_{kl}} \right)^{1/2} Y_{lm}(\hat{r}) J_{l+1/2}(kr) e^{-iE_{kl}t}, \quad (5.31)$$

donde  $k, l, m$  son los números cuánticos que determinan el estado de la partícula,  $J_i$  representa a la  $i$ -ésima función de Bessel de primer tipo,  $Y_{lm}$  representa a los armónicos esféricos y  $R$  es el radio de la esfera. La energía  $E_{kl}$  satisface la relación  $E_{kl} = \sqrt{k^2 + m^2}$  (Ayala y Smerzi, 1997). Además, la solución que encontramos debe satisfacer 5.29 y la única manera en la que esto suceda es si

$$J_{l+1/2}(kR) = 0. \quad (5.32)$$

Esto nos da entonces los posibles valores de  $k$  y, por lo tanto, nos da los posibles momentos que pueden adquirir las distintas partículas. Más aún, la relación anterior nos da también la relación directa que hay entre  $k$  y  $l$ , lo cual será de utilidad más adelante.

Sabemos que la función de onda nos da la amplitud de probabilidad de encontrar una partícula en un punto  $\vec{r}$  del espacio. Si entonces nosotros pasamos al espacio de momentos mediante una transformada de Fourier, i.e.

$$\psi_{klm}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \psi_{klm}(\vec{r}), \quad (5.33)$$

la función  $\psi(\vec{p})$  nos dirá entonces la amplitud de probabilidad de encontrar una partícula con momento  $\vec{p}$ . Por esta razón, se debe cumplir la relación

$$\frac{d^3N}{d^3p} \propto |\psi_{klm}(\vec{p})|^2. \quad (5.34)$$

Ayala y Smerzi (1997) encontraron que la relación está dada por

$$\frac{d^3N}{d^3p} = \sum_{k,l} \frac{1}{e^{\beta(E_{kl}-\mu)} - 1} \frac{(2l+1)}{2\pi p} \left( \frac{k J_{l+1/2}(pR)}{k^2 - p^2} \right)^2. \quad (5.35)$$

Con lo que para un número  $N$  de partículas fijo se tiene que

$$N = \sum_{k,l} \frac{(2l+1)}{e^{\beta(E_{kl}-\mu)} - 1}. \quad (5.36)$$

Se tienen entonces dos distinciones considerables con los resultados que se obtuvieron anteriormente. La primera es la modificación del espectro energético accesible para las partículas del sistema. Dado que en este caso  $k$  se escoge para ser el  $n$ -ésimo cero de  $J_{l+1/2}$  dividido entre  $R$  la cuantización del momento será muy distinta al obtenido en la ecuación 5.4. Sin embargo, dado que estamos considerando volúmenes grandes en comparación con el tamaño de las partículas, el espectro será tan denso que en ambos casos podemos hacer el cambio al continuo y obtener el mismo espectro en ambos casos. La diferencia más significativa radica en el factor  $(2l + 1)$ . Dada la relación 5.32, se puede ver que mayores valores de  $l$  corresponden a mayores valores del momento. Vemos entonces que se le está dando un peso mayor en la distribución de momento a las partículas con momento más elevado.

Para poder entender realmente los efectos que provienen directamente del Plasma de Quarks y Gluones se deben comparar las mediciones hechas en colisiones de iones pesados con las mediciones hechas en colisiones p-p. Si las mediciones obtenidas en las colisiones de iones pesados corresponden a la misma medición del caso p-p escalada al número de participantes que se tienen en el caso de los iones pesados entonces uno podría decir que las colisiones de iones pesados no son más que superposiciones incoherentes de colisiones p-p. La implicación que esto tendría sería que en la colisión no se produce un Plasma de Quarks y Gluones, o bien que este no tiene ningún efecto en las partículas producidas. Afortunadamente, sí se han observado varias discrepancias entre los espectros medidos en una colisión de iones pesados y las mediciones escaladas de p-p. Esto, además de confirmar la producción del Plasma de Quarks y Gluones, nos da información del comportamiento de las partículas derivado de la presencia del plasma. Una de estas discrepancias es el exceso en la producción de piones a bajo y alto momento (Ayala y Smerzi, 1997). Como se vio en el capítulo anterior, la temperatura del medio es más que suficiente como para que el sistema contenga una acumulación significativa de partículas en el estado energético más bajo. Esto puede explicar el exceso de partículas con bajo momento. Como acabamos de ver, el hecho de considerar un sistema de volumen finito le asigna un peso mayor a las partículas con momento elevado. Estos dos hechos pueden entonces explicar el exceso de partículas observado a bajo y elevado momento.

A pesar de haber mostrado su importancia, en lo que resta del estudio no utilizaremos la cuantización de momento encontrada aquí. La cuantización del momento propuesta en 5.4 sigue proporcionando una imagen física realista del proceso y además simplifica el estudio.

## 6 Colisiones de Iones Pesados

Desde que Rutherford descubrió la existencia del núcleo en los átomos usando dispersión de partículas  $\alpha$  (*The Nucleus, Rutherford 1911*), los experimentos de dispersión ganaron mucha atracción en el mundo de la física. Haciendo uso de partículas cargadas aceleradas a velocidades cercanas a la de la luz, se han podido descubrir características del mundo atómico, nuclear y subnuclear que serían impensables de otra manera. Por esta razón, los aceleradores de partículas son en la actualidad el mejor recurso con el que contamos para estudiar procesos fundamentales de la naturaleza. Para lograr una colisión de iones pesados se deben realizar muchas tareas antes de poder llegar a la colisión. Este es un proceso muy complejo, razón por la cual se requieren laboratorios muy sofisticados e instalaciones muy grandes para realizarlas. Sin embargo, a muy grandes razgos el proceso consiste en los siguientes pasos. Primero, se necesita conseguir los iones que se van a colisionar. Un ion se define como un átomo con carga neta. En el caso de las colisiones de iones pesados, a los átomos con los que se trabaja se les quitan todos sus electrones (*Brookhaven National Laboratory*) con la finalidad de tener partículas muy cargadas. Además, los iones usados en estas colisiones tienen un número elevado de protones y neutrones, adquiriendo así el adjetivo de pesados. Usualmente se utilizan iones de oro o de plomo. Posteriormente, los iones se aceleran mediante el uso de campos electromagnéticos. Cuando estas partículas alcanzan la energía necesaria se hacen incidir con un blanco fijo o con otro grupo de partículas viajando en sentido contrario. Dadas las altas energías con las que impactan los iones pesados, se tienen colisiones altamente inelásticas, dando lugar a un nuevo estado de la materia conocido como el Plasma de Quarks y Gluones. Se tiene entonces un medio en el cual los grados de libertad están dados por quarks y gluones, los cuales hacen que el medio se asemeje a un líquido. Se dice que estos se encuentran en un estado deconfinado, contrario a cuando se encuentran dentro de los hadrones (Martin, 2006). Se cree que este fue el estado de la materia nuclear microsegundos después del Big-Bang. Dicha colisión sucede en lugares controlados, en los cuales se tiene una gran variedad y cantidad de detectores de partículas. Con la información obtenida de estos detectores, podemos *observar* la colisión y estudiar los procesos que se llevan a cabo. En la actualidad hay muchos problemas abiertos en la física, así como la formación nuclear, que se podrían explicar si tuviésemos una mejor descripción de lo que sucede en un plasma de quarks y gluones. Esto hace que el estudio de las colisiones de iones pesados sea de gran interés en la comunidad científica.

Gracias al desarrollo de estos métodos experimentales y de la tecnología necesaria para llevarlos a cabo, durante los años 60s se descubrieron una serie de partículas inestables cuya descripción evadía a cualquier modelo teórico de esa época. Esto llevó a Murray Gell-Mann y George Zweig, independientemente, a proponer un modelo de *quarks* que explicaría estas nuevas partículas y algunas, como los nucleones, que ya se conocían anteriormente. Este y otros resultados, así como la postulación del fotón por Planck en 1900 y la postulación de los neutrinos por Fermi para explicar el espectro de momentos en el decaimiento  $\beta$  (Martin, 2006), sentaron las bases para lo que hoy conocemos como el *Modelo Estándar* de las partículas elementales.

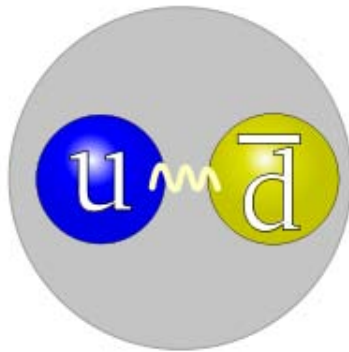


FIGURA 6.1: Representación conceptual del  $\pi^+$ . Un quark  $u$  unido por un gluón al antiquark  $\bar{d}$  forman esta partícula. Imagen de [Wikipedia, The Pion](#)

Este explica las interacciones fundamentales, excepto la gravedad, en términos de distintas partículas.

Este modelo permitió categorizar a todas las partículas encontradas en los experimentos de colisiones de partículas a altas energías. En particular, sabemos ahora que el neutrón y el protón no son partículas fundamentales. Más bien, estas son partículas compuestas, a primera aproximación, de tres quarks de valencia. Por esta razón, los nucleones entrarían en la categoría de los bariones. Un barión es una partícula compuesta de tres quarks o antiquarks. Además, dado que los quarks interactúan fuertemente, los bariones son a su vez hadrones, ya que un hadrón se define como una partícula que interactúa fuertemente. Dentro de los hadrones podemos encontrar muchas más categorías. Entre ellas se encuentran los mesones, los cuales son partículas compuestas de un quark y un antiquark.

Como se puede ver en la ecuación 4.26, la energía de las partículas tiene una relación directa con su masa. Las leyes de la cinemática relativista entonces nos dicen que la energía necesaria para producir una partícula es su masa como mínimo. Esto hace que las partículas ligeras se produzcan copiosamente en un experimento de altas energías, tales como una colisión de iones pesados, mientras que las partículas más pesadas serán menos abundantes. Esto hace que los piones, los mesones más ligeros, se produzcan en grandes cantidades en las colisiones de iones pesados.

Los quarks son partículas de espín semientero, i.e. fermiones. Por lo tanto, los mesones, al estar compuestos por dos fermiones, tienen espín entero. Sabemos entonces que los mesones obedecerán la estadística de Bose-Einstein. Si queremos entonces entender más a fondo las colisiones de iones pesados debemos considerar la posibilidad de que se produzca un estado condensado de piones. Begun y Gorenstein (2008) estudiaron la condiciones para la condensación de un gas ideal de piones en el cual se consideran los efectos de volumen finito. Estos resultados se mostraron en el capítulo 5. En este capítulo vamos a estudiar más características de las colisiones que nos pueden dar una idea más realista del proceso de condensación de piones en la fase de hadronización de una colisión de iones pesados.

## 6.1. Centralidad en las colisiones

Al considerar procesos de dispersión en una colisión elástica básicamente nos preguntamos por el ángulo de dispersión dado el parámetro de impacto  $b$  (Griffiths, 2005). En el caso de las colisiones de iones pesados, el parámetro de impacto se define como la distancia entre el centro de los núcleos en un plano transversal al movimiento del haz de partículas (Bruno, 2013). Cuando tenemos una colisión de iones pesados ciertamente no será una colisión elástica. Sin embargo, el parámetro de impacto sigue siendo de gran importancia. Al darse la colisión de los iones, los núcleos cargados interactúan uno con el otro mediante el campo de color y posteriormente dan lugar al plasma de quark y gluones (Martin, 2006). Sin embargo, la región de interacción tiene una relación inversa con el parámetro de impacto de la colisión. Para entender mejor este concepto debemos pensar a los núcleos como esferas grandes compuestas de nucleones. Cuando los núcleos colisionan solo algunos de los nucleones interactuarán. A aquellas que sí se encuentran dentro de la región de interacción se les denomina como partículas participantes, mientras que aquellas que están fuera de esta región son conocidas como espectadoras (ver figura 6.2). Entre menor sea el parámetro de impacto, mayor será el número de partículas participantes y viceversa. Conocer tanto el parámetro de impacto así como el número de partículas producidas en estas colisiones es muy valioso, pues nos permite realizar cálculos teóricos apegados a las observaciones experimentales. Desafortunadamente, estas cantidades no se pueden medir directamente (Bruno, 2013). Tenemos entonces que encontrar parámetros que dependan directamente de estos para determinar indirectamente los valores buscados. Por ejemplo, si queremos saber el número de partículas participantes podemos colocar calorímetros a cero grados (con respecto al haz) y contar el número de partículas que llegan. El número de partículas depositadas en el detector tiene una relación muy fuerte con las partículas espectadoras, pues, al no interactuar, muchas de ellas continúan viajando en la dirección del haz.

Un concepto muy útil que nos permite extraer la información de la colisión es la centralidad. Como su nombre lo indica, la centralidad nos dice que tan alineados están los núcleos al momento del impacto. Formalmente, la centralidad  $c$  se define como

$$c = \frac{1}{\sigma_{inel}} \int_0^b \frac{d\sigma}{db'} db', \quad (6.1)$$

donde  $\sigma_{inel}$  es la sección eficaz total en la colisión (Bruno, 2013). Este parámetro es conveniente, pues se puede expresar en términos de cantidades que podemos medir. En particular, se puede calcular en términos de la energía depositada en los calorímetros a cero grados,  $E_{ZDC}$ , como

$$c \approx \frac{1}{\sigma_{inel}} \int_0^{E_{ZDC}^{THR}} \frac{d\sigma}{dE'_{ZDC}} dE'_{ZDC} \quad (6.2)$$

(Bruno, 2013), o bien, en términos del número de partículas cargadas producidas

$$c \approx \frac{1}{\sigma_{inel}} \int_{N_{ch}^{THR}}^{\infty} \frac{d\sigma}{dN'_{ch}} dN'_{ch}. \quad (6.3)$$

A partir de esta cantidad podremos determinar el valor de otras variables que no podríamos medir directamente.

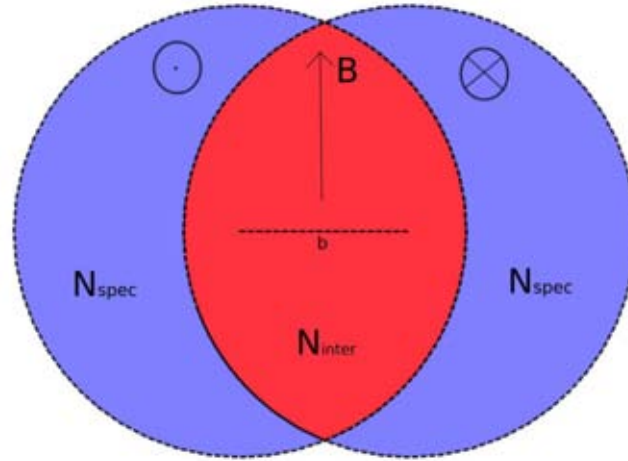


FIGURA 6.2: Representación conceptual de una colisión de iones pesados, vista frontal. Se muestra el instante en el cual los núcleos están superpuestos. Se puede apreciar el parámetro de impacto  $b$  el cual se define como la distancia entre el centro de ambos núcleos en el plano perpendicular al momento de las partículas (línea horizontal). La región de interacción (zona roja) es aquella en la cual se tiene un empalme entre los núcleos, lo cual permite interacciones binarias entre los nucleones. Fuera de esta región se encontrarán los nucleones espectadores (zona azul), los cuales no tendrán interacción con los nucleones del núcleo opuesto. Por esta razón, muchos de estos seguirán la trayectoria del haz (sentido indicado por la notación vectorial) e incidirán en los calorímetros de cero grados.

Al estar estudiando colisiones de iones pesados podemos usar una relación geométrica entre el parámetro de impacto y la centralidad, el cual está dado por

$$c \cong \frac{\pi b^2}{\sigma_{inel}} \quad b < \bar{R}. \quad (6.4)$$

En la relación anterior  $\bar{R}$  representa el radio medio de los núcleos involucrados en la colisión. Broniowski y Florkowski (2002) encontraron que esta relación tiene un nivel de precisión muy bueno. Usando el modelo de Glauber e información de Adcox y col. (2001), Broniowski y Florkowski (2002) encuentran que  $\sigma_{inel} = 7.05b$ . Usando entonces esta relación, podemos entonces observar la relación de la centralidad con respecto al parámetro de impacto. Esta se muestra en la figura 6.3. Gracias a esto podemos conocer la centralidad a partir del parámetro de impacto y viceversa, con lo cual nos será más sencillo acceder a la información reportada de los experimentos.

## 6.2. Campos magnéticos en la colisión

Como vimos en la sección anterior, el parámetro de impacto juega un papel importante en las características de cada colisión. Otra de las características en las cuales el parámetro de impacto juega un papel importante es en la formación de campos magnéticos. Antes de estudiar la formación de campos magnéticos en la colisión es conveniente definir la unidad que definirá a estos campos magnéticos en el sistema natural de unidades.

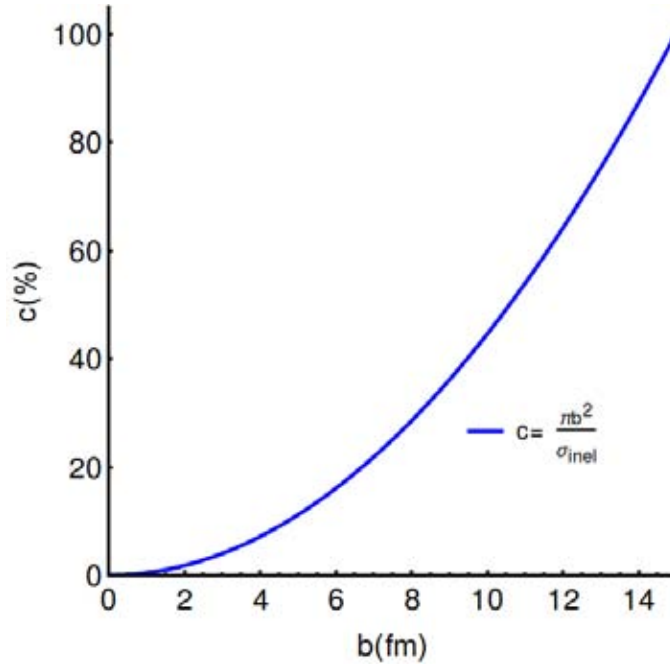


FIGURA 6.3: Relación entre el parámetro de impacto y la centralidad usando la relación geométrica  $c \cong \pi b^2 / \sigma_{inel}$ . En este caso se utiliza  $\sigma_{inel} = 7.05b$ . Esta relación solo es válida para colisiones no muy centrales ( $b > 2\text{fm}$ ) y colisiones no muy periféricas ( $b < 14\text{fm}$ ). Ver Broniowski y Florkowski (2002).

En general, nos interesará más la cantidad  $eB$  que la cantidad  $B$ , en donde  $B$  representa campo magnético. Por esta razón, la conversión a unidades del sistema natural será la cantidad  $eB$ . Recordamos que en el Sistema Internacional de Unidades, la unidad de campo magnético es el Tesla T, la cual se define como

$$T = \frac{\text{kg}}{\text{C s}}. \quad (6.5)$$

Dado que nosotros queremos saber las unidades de la cantidad  $eB$ , conviene escribir  $C$  en términos de la carga elemental  $e$  para obtener que

$$eT = \frac{1}{6.2 \times 10^{18}} \text{kg s}^{-1}. \quad (6.6)$$

Queremos entonces encontrar una conversión para kg y s. De la ecuación 4.25, podemos ver que

$$3 \times 10^8 \text{m s}^{-1} = c = 1. \quad (6.7)$$

Sabemos por definición que

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J} = 1.6 \times 10^{-19} \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}, \quad (6.8)$$

por lo que al elevar la ecuación 6.7 al cuadrado y despejar  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$  encontramos que

$$1\text{eV} = 1.78 \times 10^{-36} \text{kg} \Rightarrow 1\text{kg} = 5.625 \times 10^{29} \text{MeV}. \quad (6.9)$$



Ahora solo debemos encontrar la expresión análoga para los segundos. Nuevamente, tenemos de la relación 4.25 que

$$1.05 \times 10^{-34} \text{kg m}^2 \text{s}^{-1} = \hbar = 1. \quad (6.10)$$

Usando la relación 6.7 al cuadrado, podemos reescribir la expresión anterior como

$$1 = 1.17 \times 10^{-51} \text{kgs} = 6.59 \times 10^{-22} \text{MeV s}, \quad (6.11)$$

en donde utilizamos la expresión de kg en MeV obtenida en la ecuación 6.9. De aquí vemos que la expresión que buscamos es

$$1 \text{s} = 1.57 \times 10^{21} \text{MeV}^{-1}. \quad (6.12)$$

Uniendo todos estos resultados llegamos a la conversión que estábamos buscando,

$$1 \text{eT} = 5.98 \times 10^{-11} \text{MeV}^2. \quad (6.13)$$

Ahora que sabemos cómo expresar los campos magnéticos en unidades naturales podemos analizar la presencia de estos campos en una colisión de iones pesados. Clásicamente no es complicado imaginarnos por qué una colisión periférica de los iones daría lugar a la formación de un campo magnético. Como se vio en la sección 6.1, una colisión periférica da lugar a una región de interacción en donde se encuentran los nucleones participantes. Por otra parte, las partículas restantes, las espectadoras, pueden seguir su camino si la colisión es suficientemente periférica. Muchos de estos nucleones son protones, i.e. son partículas cargadas. Esto nos da entonces un par de corrientes, cuyo sentido está dado por los círculos azules en la figura 6.2.

Sabemos que una corriente  $i$  generará un campo magnético. Cuantitativamente, el campo magnético se puede determinar a partir de la ley de Biot-Savart, la cual nos dice que

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (6.14)$$

siendo  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío. Para el caso de una corriente continua, al integrar esta expresión obtenemos el campo magnético formado. Sin embargo, para el caso de una carga en movimiento la expresión anterior no nos da el resultado correcto pues al querer expresar la carga únicamente como  $j = idl$  se violaría la ecuación de continuidad (Jackson y Fox, 1999). Lo correcto en este caso es simplemente sustituir  $idl$  por  $qv$ , con lo que el campo magnético de una carga en movimiento está dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (6.15)$$

Si queremos entonces una estimación del orden de magnitud en el campo magnético que deberíamos esperar hay que introducir los valores relacionados al problema. Supongamos que estamos considerando una colisión Pb – Pb, con lo que cada núcleo tendrá una carga positiva de  $82e$ . Dado que estamos hablando de colisiones periféricas, solo una fracción de estas partículas cargadas serán espectadoras. Supongamos por simplicidad que en este caso la distancia entre el centro de la región de interacción y las partículas espectadoras sea  $\sim 5\text{fm}$ , estimación que será más clara más adelante. De igual manera, podemos pensar por simplicidad que  $N_{\text{spec}}^{\pm} = N_{\text{inter}}^{\pm} = Z/2 = 41$ . Además, dadas las altas energías involucradas, es una buena aproximación el pensar que la velocidad de las partículas coincide con ser la

velocidad de la luz. Como se ve en la figura 6.2, tendremos dos corrientes, una en sentido contrario de la otra. Por esta razón, el campo magnético en el centro está dado aproximadamente por

$$B \cong 2 \frac{\mu_0}{4\pi} (41e) \frac{c}{(5\text{fm})^2} \cong 1.57 \times 10^{13} \text{T}. \quad (6.16)$$

Utilizando la ecuación 6.13, vemos que el campo magnético  $B$  formado en el centro de la región de interacción es

$$eB \sim 950 \text{MeV}^2. \quad (6.17)$$

Expresado de esta manera, este resultado no nos dice mucho. Es conveniente entonces tener un punto de comparación con el cual podamos tener una mejor noción del valor obtenido. Observando la ecuación 6.9, vemos que los kg tienen la misma dimensión que MeV, por lo que podemos expresar el resultado anterior en función de una masa al cuadrado. Por convención, estos valores se expresan en términos de la masa del pión al cuadrado. Dado que la masa de los piones cargados es 139.57 MeV (*Particle Data Group*), la masa del pión al cuadrado correspondería a

$$m_\pi^2 = 19,479.8 \text{MeV}^2. \quad (6.18)$$

Expresado en términos de la masa del pión al cuadrado, el valor calculado para la región de interacción sería

$$eB \cong 4.83 \times 10^{-2} m_\pi^2. \quad (6.19)$$

Este es un campo magnético muy intenso, teniendo un valor cercano al encontrado en los magnetares (*Magnetars*). Sin embargo, en una colisión de iones pesados como la que estamos considerando los campos magnéticos son algunos órdenes de magnitud mayores. Skokov, Illarionov y Toneev (2009) estimaron los campos magnéticos producidos en la región de interacción para los aceleradores SPS, RHIC y LHC. Ellos estiman que los campos magnéticos producidos son

$$\begin{array}{ll} \text{SPS} & eB \sim 10^{-1} m_\pi^2 \\ \text{RHIC} & eB \sim m_\pi^2 \\ \text{LHC} & eB \sim 15 m_\pi^2 \end{array}$$

Estos campos magnéticos son tan intensos que incluso superan por varios órdenes de magnitud a los campos magnéticos de superficie observados en los magnetares (*Magnetars*). Para mejorar nuestra estimación hay que tomar en cuenta correcciones relativistas y a estas escalas debemos considerar los efectos cuánticos. Además, las partículas en la región de interacción también forman una corriente. Dada la geometría de la colisión, se formará un gradiente de corriente que contribuirá a la formación de campo magnético. Para estimar los campos magnéticos en los distintos aceleradores, Skokov, Illarionov y Toneev (2009) utilizan un modelo Ultrarelativista de Dinámica Molecular Cuántico, UrQMD por sus siglas en inglés, el cual además complementan con consideraciones analíticas. Este modelo es mucho más sofisticado y toma en cuenta consideraciones más realistas de la colisión que las que se utilizaron para llegar a la estimación 6.16, las cuales pueden ser responsables de la discrepancia de los resultados.

Ya vimos en los capítulos anteriores que los piones creados en una colisión de iones pesados se encuentran en características muy extremas, las cuales permiten que el sistema de piones presente el fenómeno de condensación. Ahora estamos viendo que en una colisión periférica, los campos magnéticos producidos son tan intensos que incluso superan a aquellos observados en los magnetares. Dado que dos tipos

de piones son cargados, el campo magnético debe tener una fuerte influencia sobre ellos. Es natural entonces preguntarnos cual, si es que alguno, es el efecto de un campo magnético en el proceso de condensación. El siguiente capítulo estará dedicado a resolver esta incógnita.

## 7 Condensación de piones en un campo magnético

Con lo aprendido en los capítulos anteriores puede resultar natural preguntarse, ¿cuál es el efecto que tiene la presencia de un campo magnético en el proceso de condensación de los piones producidos en una colisión de iones pesados? Este capítulo está dedicado a resolver esta pregunta.

### 7.1. Cuantización en niveles de Landau

Si queremos considerar la presencia de un campo electromagnético en nuestra teoría, debemos encontrar una manera de acoplarlo con las partículas del sistema. Generalmente, la forma de hacer esto es promover las derivadas de nuestra teoría por la derivada covariante; es decir,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu. \quad (7.1)$$

La derivada covariante  $D_\mu$  considera el hecho que los puntos en el espacio no son iguales, en este caso debido a la presencia del campo electromagnético. Al trabajar con un campo electromagnético, la sustitución pertinente es

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (7.2)$$

donde  $e$  es la carga de las partículas que queremos acoplar al campo y  $A_\mu$  es el potencial electromagnético. El potencial  $A_\mu$  se define como

$$A_\mu \equiv (\phi, \mathbf{A}), \quad (7.3)$$

donde  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  y  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , en donde supusimos que no hay dependencia temporal en el potencial vectorial. Dado que podemos determinar tanto  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{E}$ , toda la información del campo electromagnético se encuentra condensada en el potencial  $A_\mu$ . La sustitución 7.2 es entonces capaz de acoplar a las partículas satisfactoriamente con el campo electromagnético. A la sustitución 7.2 se le conoce como *acoplamiento mínimo*.

Para entender lo que está pasando aquí y para lograr acoplar el campo magnético conviene primero analizar el caso no relativista. Como una primera aproximación, este desarrollo es bueno pues principalmente queremos estudiar el comportamiento de los piones en el estado base de la energía, i.e.  $p = 0$ . Además, dado que los piones son partículas con espín  $s = 0$  la ecuación de Schrödinger debería darnos una buena estimación del comportamiento de las partículas. Por último, supondremos que estamos en un sistema en equilibrio, lo cual nos permite además utilizar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. En este desarrollo seguiremos el trabajo realizado por Landau y col. (1958).

Sabemos que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo está dada por

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z), \quad (7.4)$$

lo que nos obliga a encontrar la estructura del Hamiltoniano para resolver el problema. Cuando se hace la transición de una teoría clásica a una teoría cuántica, debemos promover algunas variables a operadores. En el caso del momento tenemos que hacer

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla \quad (7.5)$$

y en el de la energía se toma

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (7.6)$$

recordando que estamos trabajando en un sistema de unidades en el cual  $\hbar = 1$ . Comparando estas sustituciones con 7.2, vemos que al considerar la presencia de un campo electromagnético el cuadrivector  $p_\mu$  se debe sustituir como

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + eA_\mu. \quad (7.7)$$

Para lograr tener una imagen física del fenómeno que estamos estudiando es conveniente estudiar primero una versión semiclásica del mismo y posteriormente considerar el caso relativista. Por esta razón, podemos considerar primero el caso de partículas no relativistas que no interactúan entre sí. Gracias a estas consideraciones, el hamiltoniano se puede escribir como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}. \quad (7.8)$$

Trabajaremos en una situación en la que no hay campo eléctrico. Además, supondremos sin pérdida de generalidad que el campo magnético está orientado a lo largo del eje  $z$ , i.e.  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Al trabajar con el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  tenemos lo que se conoce como libertad de norma, lo cual nos permite escribir el potencial vectorial en distintas normas y conseguir el mismo campo magnético  $\mathbf{B}$ . En este caso, trabajaremos en la norma de Landau, con lo que el potencial se escribe como

$$\mathbf{A} = (-By, 0, 0). \quad (7.9)$$

Es directo comprobar que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, B)$ . Al haber definido la norma, podemos escribir explícitamente cómo cambia  $p_\mu$  al considerar la presencia del campo magnético. Al no tener campo eléctrico la entrada temporal del cuadrivector permanece intacta, mientras que la parte espacial se escribe como

$$\mathbf{p} = (p_x - eBy, p_y, p_z). \quad (7.10)$$

Con esto, podemos escribir el hamiltoniano como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ (\hat{p}_x - eB\hat{y})^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \rightarrow \frac{1}{2m} \left[ (-i\partial_x - eB\hat{y})^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 \right]. \quad (7.11)$$

Notamos que, dado que en el Hamiltoniano no aparece ni  $x$  ni  $z$ , tanto  $p_x$  como  $p_z$  son variables cíclicas. Esto nos asegura que estos momentos sean cantidades conservadas y además nos permite escribir  $\psi$  como

$$\psi(x, y, z) = e^{i(p_x x + p_z z)} \chi(y). \quad (7.12)$$

Darrollando el cuadrado en el hamiltoniano y aplicándolo a esta función obtenemos

$$\hat{H}e^{i(p_x x + p_y y)}\chi(y) = \frac{1}{2m} [p_x^2 - 2eBp_x y + (eB)^2 y^2 - \partial_y^2 - p_z^2] e^{i(p_x x + p_y y)}\chi(y). \quad (7.13)$$

Si ahora definimos

$$y_0 \equiv \frac{p_x}{eB}, \quad (7.14)$$

la expresión anterior se puede reescribir como

$$\hat{H}e^{i(p_x x + p_y y)}\chi(y) = \left[ -\frac{\partial_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m \left( \frac{eB}{m} \right)^2 (y - y_0)^2 - \frac{p_z^2}{2m} \right] e^{i(p_x x + p_y y)}\chi(y). \quad (7.15)$$

La parte de esta expresión asociada a la componente  $y$  se puede identificar como un oscilador armónico con  $\omega_B = eB/m$ , mientras que la parte de  $z$  corresponde a una partícula libre. Por esta razón, ya sabemos cuál es la contribución energética de ambas partes. La energía total está dada entonces por

$$E_l = \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{eB}{m} + \frac{p_z^2}{2m} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (7.16)$$

Vemos que la energía está cuantizada y a estos niveles energéticos se les conoce como *Niveles de Landau*.

Ahora que ya vimos cuál es la consecuencia de acoplar el campo magnético podemos resolverlo para el caso de piones relativistas. Al ser partículas con espín  $s = 0$ , la ecuación que obedece la función de onda de los piones  $\phi$  es la ecuación de Klein-Gordon. Esta nos dice que

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (7.17)$$

En la ecuación anterior el operador  $\square$  se llama operador D Alambertiano y está definido en unidades naturales como  $\square \equiv \partial_t^2 - \nabla^2$ . Podemos entonces escribir explícitamente la ecuación de Klein-Gordon como

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2)\phi = -m^2\phi. \quad (7.18)$$

Ahora, dado que queremos acoplar el campo electromagnético a los piones, debemos realizar el acoplamiento mínimo mostrado en 7.2. Tenemos entonces

$$\left( \partial_t^2 - (\partial_x - ieBy)^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 \right) \phi = -m^2\phi, \quad (7.19)$$

en donde utilizamos el mismo potencial  $A_\mu$  que en el caso no relativista. Nuevamente, observamos que no están ni  $x$  ni  $z$ , con lo que podemos escribir a  $\phi$  análogamente al caso anterior. Sin embargo, en este caso sí debemos tomar en cuenta la dependencia temporal. Escribimos a  $\phi$  como

$$\phi(t, x, y, z) = e^{i(p_x x + p_z z)}\chi(t, y). \quad (7.20)$$

Sustituyendo esta función en la ecuación 7.19 y desarrollando llegamos a que

$$\left( \partial_t^2 + m^2 \left( \frac{eB}{m} \right)^2 (y - y_0)^2 - \partial_y^2 + p_z^2 \right) \chi(t, y) = -m^2\chi(t, y), \quad (7.21)$$

en donde introdujimos un factor de 1 en forma de  $m^2/m^2$  y  $y_0$  está dado por 7.14.

Notamos que una parte de esta ecuación se puede identificar como el oscilador armónico que encontramos en el caso no relativista. Dado que ya conocemos la solución, podemos escribir

$$\left(-\partial_y^2 + m^2 \left(\frac{eB}{m}\right)^2 (y - y_0)^2\right) \chi(t, y) = 2mE_l \chi(t, y) = (2l + 1) eB \chi(t, y). \quad (7.22)$$

Sustituyendo este valor en 7.21, llegamos a la ecuación

$$(\partial_t^2 + m^2 + p_z^2 + (2l + 1) eB) \chi(t, y) = 0. \quad (7.23)$$

Esta ecuación corresponde al oscilador armónico simple (Peskin y Schroeder, 1995), cuya energía está dada por

$$E_{p_z, l} = \sqrt{m^2 + p_z^2 + (2l + 1) eB}. \quad (7.24)$$

Se puede observar que en el caso de bajo momento y campo débil, ( $p_z \ll m$ ,  $eB \ll m^2$ ), un desarrollo en serie nos da el resultado obtenido en el caso semiclásico dado por la ecuación 7.16.

### 7.1.1. Densidad de estados en cada nivel de Landau

Si queremos estudiar el comportamiento del gas ideal de piones con el formalismo desarrollado en los capítulos 3, 4 y 5, debemos encontrar la densidad de estados por cada nivel de Landau.

Supongamos que el sistema es una caja de volumen  $V = L_x L_y L_z$ , en donde  $L_i$  denota la longitud de la caja en la dirección  $i$ . Dado que  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , el campo magnético es transversal al área  $A = L_x L_y$ . Como ya vimos, al aplicar un campo magnético al sistema obtenemos un conjunto de osciladores en  $y$ , razón por la cual podemos olvidarnos del momento  $p_y$ . Sin embargo, encontramos en el capítulo 5 que, al estar en una caja, los momentos  $p_x$  y  $p_z$  estarán cuantizados. Estos obedecen la ecuación 5.4 y en particular  $p_x$  satisface

$$|p_x| = \frac{2\pi l_i}{L_x}. \quad (7.25)$$

Dado que los centros de oscilación están dados en términos del momento  $p_x$ , podemos ver que la distancia entre dos centros consecutivos está dada por

$$\Delta y_0 = y_{0_{i+1}} - y_{0_i} = \frac{2\pi}{eBL_x} (i + 1 - i) = \frac{2\pi}{eBL_x}. \quad (7.26)$$

Por lo tanto, el número de centros de oscilación en el volumen  $V$  es

$$N = \frac{L_y}{\Delta y_0} = \frac{eBL_x L_y}{2\pi}. \quad (7.27)$$

Consecuentemente, la densidad de estados es

$$\frac{N}{V} = \frac{eB}{2\pi L_z}. \quad (7.28)$$

Notamos que obtuvimos una densidad de estados uniforme para todos los niveles de Landau. Esto era de esperarse pues la distancia entre los centros de oscilación depende únicamente de  $L_x$  y de  $eB$ . Usando estos resultados podemos ahora describir el gas de piones.

## 7.2. Física Estadística en presencia de un campo magnético

Recordemos la situación física que estamos estudiando: durante la fase de hadronización de una colisión periférica de iones pesados se tiene una producción copiosa de piones. Supondremos que el número de piones producido de cada tipo es igual <sup>1</sup>, i.e.

$$N_+ = N_- = N_0. \quad (7.29)$$

Por esta razón, el sistema será globalmente neutro. Este hecho nos permite pensar que el potencial químico de las tres especies será idéntico. Ahora, de las tres especies que se producen sólo dos tienen carga,  $\pi_{\pm}$ , razón por la cuál estas serán las únicas que se acoplarán con el campo magnético producido en la colisión.

Observando la ecuación 3.32, podemos escribir la densidad de partículas como

$$\begin{aligned} \rho(T, \mu; B) &= \rho_0(T, \mu; B) + \rho_+(T, \mu; B) + \rho_-(T, \mu; B) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)} - 1} + 2 \frac{eB}{2\pi L} \sum_{p_z, l} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2+(2l+1)eB}-\mu)} - 1}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Como ya vimos anteriormente, es conveniente escribir la densidad como la suma de dos términos: la densidad de partículas en el estado base y la densidad de las partículas en los estados excitados. Como ya vimos en el capítulo 5, todos los efectos de considerar un sistema con volumen finito estarán incluidos en el término asociado al estado base, i.e.  $\rho(T, \mu; B) = \rho_0(T, \mu; B) + \rho_{\epsilon}(T, \mu; B)$ . Además, vimos que al escribir explícitamente el término del estado base, podemos convertir la suma sobre los estados en una integral. Vemos que

$$\rho_0(T, \mu; B) = \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(m-\mu)} - 1} + \frac{eB}{\pi L} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{m^2+2eB}-\mu)} - 1} \quad (7.31)$$

y que

$$\rho_{\epsilon}(T, \mu; B) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{m^2+p^2}-\mu)} - 1} + \frac{eB}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2+(2l+1)eB}-\mu)} - 1}. \quad (7.32)$$

En ambas expresiones, el primer término corresponde a la densidad de piones neutros  $\pi_0$  y el segundo corresponde a los piones cargados  $\pi_{\pm}$ .

Analicemos primero la densidad de partículas en el estado base. Lo primero que haremos será introducir el flujo magnético elemental. Notamos que en unidades del sistema internacional el flujo magnético se expresa en Webers (Wb), unidad que se define como

$$\text{Wb} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{A}}. \quad (7.33)$$

Notamos entonces que

$$\left[ \frac{h}{e} \right] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{A}}; \quad (7.34)$$

es decir, las unidades del flujo magnético. Por convención, se define el flujo magnético elemental como

$$\Phi_0 \equiv \frac{h}{e} = \frac{2\pi}{e}, \quad (7.35)$$

<sup>1</sup>Realmente, el número de piones cargados suele ser mayor que el de los neutros  $N_{\text{ch}} > N_{\gamma}$  (Seto, 1999). Sin embargo, esta suposición no es mala como una primera aproximación.



en donde cambiamos a unidades naturales en la segunda igualdad. Por otra parte, el flujo magnético está definido como

$$\Phi = AB, \quad (7.36)$$

donde  $A$  es el área transversal al campo magnético. Esto nos permite reescribir el término base de los piones cargados como

$$\frac{2}{V} \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{m^2+2eB}-\mu)} - 1}. \quad (7.37)$$

Queremos trabajar en la aproximación de campo magnético débil,  $eB < mT$ , lo que nos permite hacer aproximaciones que simplificarán las expresiones. Esto es válido pues, aunque los campos magnéticos que vimos en el capítulo 6 eran muy intensos, este campo es una función que decrece rápidamente en el tiempo. En la fase de hadronización el campo debe satisfacer esta condición. Lo primero que podemos escribir es

$$\frac{\sqrt{m^2 + eB}}{T} \approx \frac{m}{T} + \frac{eB}{2mT}, \quad (7.38)$$

lo cual a su vez nos permite hacer una aproximación similar a 5.13 y escribir la densidad de partículas en el estado base como

$$\rho_0(T, \mu; \Phi) \cong \frac{1}{V\delta} + \frac{2}{V} \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{e^{\delta + \frac{eB}{2mT}}}. \quad (7.39)$$

Trabajando en la situación en la que  $\delta > \frac{eB}{2mT}$  y en la cual además nos encontramos cerca de la condensación  $\delta \ll 1$ , podemos escribir

$$\rho_0(T, \mu; \Phi) \cong \frac{1}{V\delta} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{2}{V\delta}. \quad (7.40)$$

Notamos entonces que recuperamos el caso sin campo magnético en el límite  $\Phi \rightarrow \Phi_0$ .

La ecuación 7.40 nos da la densidad de partículas en el estado base al aplicar un campo magnético que satisfaga las condiciones antes mencionadas. Debemos ahora analizar la densidad de partículas en los estados excitados. Como ya vimos, la densidad de piones cargados en los estados excitados está dada por

$$\frac{eB}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2 + m^2 + (2l+1)eB} - \mu)} - 1}. \quad (7.41)$$

A primera vista, esta expresión parece muy complicada. Debemos entonces recurrir a una manera alternativa de resolverla.

### 7.2.1. Método de integración de Euler-Maclaurin

La fórmula de Euler-Maclaurin nos permite encontrar una relación entre una suma y una integral, lo cual permite pasar de una a la otra. En este caso, el objetivo que tenemos es transformar la suma sobre los niveles de Landau en la ecuación 7.41 en una integral que sí sepamos resolver.

Supongamos que tenemos una función  $f(x)$ . La fórmula de Euler-Maclaurin nos dice que

$$I \equiv \int_n^m f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-n} f(n+i) - \sum_{k=1}^p \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(m) - f^{(k-1)}(n)] + R, \quad (7.42)$$

en donde  $B_k$  es el  $k$ -ésimo número de Bernoulli y  $R$  es un residuo. Si eliminamos el residuo  $R$  de la relación anterior, esta deja de ser exacta. El parámetro  $p$  en la suma entonces determinará el grado al cual querramos trabajar. Tomemos en este caso  $p = 2$ , ya que con esto obtenemos términos que incluyen a la primera derivada de la función. Por esta razón, debemos utilizar únicamente los primeros dos números de Bernoulli, los cuales son  $B_1 = \frac{1}{2}$  y  $B_2 = \frac{1}{6}$ . Esto nos permite escribir a  $I$  como

$$I \cong \frac{1}{2}f(n) + f(n+1) + \dots + f(m-1) + \frac{1}{2}f(m) - \frac{1}{12} [f'(m) - f'(n)]. \quad (7.43)$$

Ahora, podemos definir una nueva función  $g$  en términos de la función  $f$  con la que estamos trabajando. Pedimos entonces que  $g$  satisfaga la relación

$$f(x) = hg(hx). \quad (7.44)$$

Esto resulta muy útil pues nos permite avanzar en pasos de tamaño  $h$ , en comparación a pasos unitarios. Sustituyendo en la expresión 7.43 se llega a que

$$I \cong h \left[ \frac{1}{2}g(a_i) + g(a_i + h) + \dots + g(a_f - h) + \frac{1}{2}g(a_f) \right] - \frac{h^2}{12} [g'(a_f) - g'(a_i)]. \quad (7.45)$$

Si en lugar de avanzar en pasos de tamaño  $h$  avanzáramos en pasos de tamaño  $\frac{h}{2}$  la expresión para  $I$  sería

$$I \cong h \left[ \frac{1}{2}g(a_i) + g\left(a_i + \frac{1}{2}h\right) + g(a_i + h) + \dots + g(a_f - h) + g\left(a_f - \frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}g(a_f) \right] - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{12} [g'(a_f) - g'(a_i)]. \quad (7.46)$$

Podemos entonces multiplicar la ecuación 7.46 por 2 y restarle la ecuación 7.45, con lo que se llega a que

$$\begin{aligned} I &\cong h \left[ g\left(a_i + h\frac{1}{2}\right) + g\left(a_i + h\frac{3}{2}\right) + \dots + g\left(a_f - h\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{h^2}{24} [g'(a_f) - g'(a_i)] \\ &= h \sum_{l=0}^{l_f} g\left(a_i + \left(l + \frac{1}{2}h\right)\right) + \frac{h^2}{24} [g'(a_f) - g'(a_i)], \end{aligned} \quad (7.47)$$

donde  $l_f = \frac{2(a_f - a_i)}{h}$ . De la ecuación 7.41 podemos tomar una idea de cómo debe ser nuestra función  $f$  de manera que podamos resolver el problema que estamos buscando. Vemos que si definimos

$$f(y) = \int_0^\infty \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2 + m^2 + y - \mu})} - 1} \quad (7.48)$$

y además llamamos  $h = 2eB$  entonces llegamos a que

$$\int f(y)dy \cong 2eB \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2+(2l+1)eB-\mu)} - 1}} + \frac{(eB)^2}{6} [g'(a_f) - g'(a_i)]. \quad (7.49)$$

De la última expresión es directo ver que

$$\frac{eB}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2+(2l+1)eB-\mu)} - 1}} \cong \frac{1}{2\pi^2} \int f(y)dy - \frac{(eB)^2}{12\pi^2} [g'(a_f) - g'(a_i)], \quad (7.50)$$

términos con los cuales será mucho más sencillo trabajar.

Analicemos primero el término asociado con la integral de  $f(y)$ . Notamos que si identificamos la variable  $y$  como

$$y = p_{\perp}^2, \quad (7.51)$$

donde  $p_{\perp}^2$  es tal que  $p^2 = p_z^2 + p_{\perp}^2$ , la función  $f(y)$  se convierte en

$$f(p_{\perp}^2) = \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+p_{\perp}^2+m^2-\mu)} - 1}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+p_{\perp}^2+m^2-\mu)} - 1}}. \quad (7.52)$$

Ahora, dada la definición de  $y$  sabemos que  $dy = 2p_{\perp} dp_{\perp}$ . Esto nos permite escribir

$$\int f(y)dy = 4\pi^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2-\mu)} - 1}}, \quad (7.53)$$

en donde además usamos que  $d^3p = p_{\perp} dp_{\perp} dp_z d\theta$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi^2} \int f(y)dy = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+m^2-\mu)} - 1}}. \quad (7.54)$$

Este término entonces resulta ser el correspondiente a la densidad de piones cargados en el caso en el que no se tuviera un campo magnético externo. La corrección estará dada entonces por la derivada de  $g$  evaluada en los extremos.

Al derivar la función  $g$  se llega a que

$$g'(y) = -2 \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2+y-\mu})}}{\left(e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2+y-\mu})} - 1\right)^2} \frac{\beta}{\sqrt{p_z^2 + m^2 + y}}. \quad (7.55)$$

De esta expresión podemos ver que  $g'(a_f \rightarrow \infty) = 0$ , con lo que únicamente resta encontrar el valor de esta expresión en el límite  $a_i = 0$ . Sustituyendo este valor vemos que

$$\begin{aligned} g'(0) &= -2 \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2-\mu})}}{\left(e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2-\mu})} - 1\right)^2} \frac{\beta}{\sqrt{p_z^2 + m^2}} \\ &= -2 \int_0^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{\beta}{\sqrt{p_z^2 + m^2}} \left[ \frac{1}{\left(e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2-\mu})} - 1\right)^2} + \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2+m^2-\mu})} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

A pesar de lo complicada que se puede llegar a ver esta expresión nosotros ya vimos anteriormente una técnica que nos ayuda a resolverla. Haremos pasos análogos a aquellos que hicimos en el capítulo 5, en donde hicimos el cambio de variable 5.15 y la identidad 5.16 para escribir

$$g'(0) = -2 \frac{\sqrt{2m}(m-\mu)^{1/2}}{2\pi T} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{m^2 + 2m(m-\mu)x^2}} \quad (7.57)$$

$$\times \left[ \frac{\coth\left(\frac{\beta}{2}(m-\mu)(x^2+1)\right) - 1}{2} + \left( \frac{\coth\left(\frac{\beta}{2}(m-\mu)(x^2+1)\right) - 1}{2} \right)^2 \right].$$

Simplificando la expresión en paréntesis cuadrados y usando igualdades trigonométricas se llega a que

$$g'(0) = -2 \frac{\sqrt{2m}(m-\mu)^{1/2}}{2\pi T} \int_0^\infty \frac{dx}{m\sqrt{1 + \frac{2T}{m}\delta x^2}} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\beta}{2}(m-\mu)(x^2+1)\right). \quad (7.58)$$

Como estamos estudiando el caso cerca de la condensación, sabemos que  $\delta$  satisface  $\delta \ll 1$ , con lo que nos podemos quedar con la contribución a primer orden de  $\operatorname{csch}^2\left(\frac{\beta}{2}(m-\mu)(x^2+1)\right)$  y llegar a que

$$g'(0) \cong \frac{2\sqrt{2mT}\delta}{(2\pi)\delta^2 m T} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2T}{m}\delta x^2}} \frac{1}{(x^2+1)^2}. \quad (7.59)$$

Al resolver la integral se llega a que

$$g'(0) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{mT\delta^3}}. \quad (7.60)$$

Sustituyendo todos los resultados hallados anteriormente en la ecuación 7.50 finalmente se llega a que

$$\frac{eB}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{dp_z}{e^{\beta(\sqrt{p_z^2 + m^2} + (2l+1)eB - \mu)} - 1} \cong 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2 + m^2} - \mu)} - 1} - \frac{(eB)^2}{48\pi^2} \sqrt{\frac{2}{mT\delta^3}}. \quad (7.61)$$

Debemos mantener presente el hecho de que estamos considerando el caso de campo magnético débil y volumen finito pero considerablemente grande. Ahora, definimos el volumen de nuestro sistema  $V$  como  $V = AL$ , en donde  $A$  representa el área del sistema transversal al campo magnético. De aquí podemos ver que la relación que mantienen el área y el volumen es  $A \sim V^{2/3}$ . Por otra parte, recordamos que el flujo magnético se define como  $\Phi = AB$  y que el flujo elemental está dado por  $\Phi_0 = \frac{\pi}{e}$ , con lo que el último término de la ecuación 7.61 se puede reescribir como

$$\frac{(eB)^2}{48\pi^2} \sqrt{\frac{2}{mT\delta^3}} = \frac{1}{48A^2} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{mT\delta^3}} \sim \frac{1}{48V^{4/3}} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{mT\delta^3}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0. \quad (7.62)$$

Estamos viendo entonces que en la aproximación que estamos considerando, la densidad de piones en los estados excitados  $\rho_\epsilon$  está dada por la misma expresión que cuando no se tiene campo magnético. Es decir,

$$\rho_\epsilon(T, \mu; B) \cong 3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{m^2+p^2}-\mu)} - 1}. \quad (7.63)$$

Este resultado es interesante pues estamos viendo que la contribución del campo magnético se refleja únicamente en el término que corresponde al estado base. Esto es completamente análogo a lo que vimos en el capítulo 5 en el cual encontramos que los efectos de considerar un volumen finito en el sistema se reflejaba únicamente en el término de los piones en el estado base.

Gracias a que el campo magnético modifica únicamente las densidades de piones en el estado base, la relación 5.20 se mantiene y en este caso se ve como

$$\rho_\epsilon(T, m; B) - \rho_\epsilon(T, \mu; B) \approx \frac{3(mT)^{3/2}\delta^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (7.64)$$

donde el factor de 3 que agregamos viene de que estamos considerando 3 tipos de partículas. La densidad de partículas total está dada entonces por

$$\rho(T, \mu; \Phi) \cong \rho_\epsilon(T, m; B) - \frac{3(mT)^{3/2}\delta^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{V\delta} \left(1 + 2\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (7.65)$$

Nuevamente, queremos encontrar una expresión algebraica para  $\delta$ . Esto nos lleva entonces a querer escribir la relación anterior como un polinomio. Multiplicando la ecuación anterior por  $V\delta/3$  obtenemos

$$V\delta \frac{\rho(T, \mu; \Phi) - \rho_\epsilon(T, m; \Phi)}{3} + \frac{V(mT)^{3/2}\delta^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{3} \left(1 + 2\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = 0. \quad (7.66)$$

Es conveniente definir

$$\begin{aligned} a(T) &= \frac{(mT)^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}, \\ b(T) &= \frac{\rho(T, \mu; \Phi) - \rho_\epsilon(T, m; B)}{3}, \\ c &= \frac{1}{3} \left(1 + 2\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Esto nos permite escribir el polinomio que estamos buscando como

$$a(T)V\delta^{3/2} + b(T)V\delta - c = 0. \quad (7.68)$$

De aquí podemos notar que en el límite  $\frac{\Phi}{\Phi_0} \rightarrow 1$ , se tiene que  $c \rightarrow 1$ . Esto hace que el polinomio obtenido para  $\delta$  sea idéntico que en el caso de volumen finito. Para resolver este polinomio debemos considerar tres casos de la temperatura del sistema, (i)  $T < T_c$ , (ii)  $T = T_c$  y (iii)  $T > T_c$ . Esto corresponde a los mismos tres casos que estudiamos cuando buscamos los efectos de volumen finito.

- (i)  $T < T_c$  En este caso, si no consideráramos un sistema de volumen finito ni la presencia de un campo magnético externo entonces tendríamos  $\delta \equiv 0$ . Dado

que sí los estamos considerando no tenemos esta igualdad pero su valor debe ser muy cercano a cero. Por esta razón, los términos que tendrán la mayor contribución en 7.68 son aquellos con potencias menores de  $\delta$ , i.e.  $\delta^1$  y  $\delta^0$  mientras que el término con potencia  $\delta^{3/2}$  se vuelve despreciable. El polinomio 7.68 tiene una solución muy simple en este caso, la cual es

$$\delta \cong \frac{c}{b(T)V}. \quad (7.69)$$

- (ii)  $T = T_c$  Justo en este punto, se obtiene que  $b(T) = 0$ . Esto nos dice entonces que la solución para  $\delta$  está dada por

$$\delta = \left( \frac{c}{a(T)V} \right)^{2/3} = \left( \frac{1 + 2\frac{\Phi}{\Phi_0}}{3a(T)V} \right)^{2/3}. \quad (7.70)$$

- (iii)  $T > T_c$  Al igual que en el caso de volumen finito, tendremos  $b(T) < 0$ , lo que nos permite encontrar una solución para  $\delta$  de manera que

$$\delta \cong \left( \frac{b(T)}{a(T)} \right)^2, \quad (7.71)$$

en donde despreciamos términos con  $\mathcal{O}(V^{-1})$ . Vemos entonces que por encima de la temperatura crítica el campo magnético no tiene influencia alguna en el valor de  $\delta$ . Al obtener el mismo resultado para  $\delta$  que en el caso de volumen finito podemos concluir nuevamente que por encima de la temperatura crítica tenemos la desigualdad estricta  $\delta > 0$ .

Con el comportamiento de  $\delta$  en todos los distintos casos de la temperatura podemos estudiar la relación que mantienen la densidad de partículas del sistema y su temperatura en el punto crítico. Para esto, justo debemos utilizar la solución para  $\delta$  en  $T = T_c$ . Recordamos que  $\delta = \beta(m - \mu)$ , relación con la cual podremos obtener el valor de  $\mu$  a partir de  $\delta$ . Para diferenciar con el caso de volumen finito, denotaremos  $\mu^\Phi$  al potencial químico en el caso en el que se tiene un campo magnético externo en el sistema. De la ecuación 7.70 podemos ver que

$$\mu_c^\Phi = m - \frac{1}{m} \left( \frac{2\pi^2}{V^2} \right)^{1/3} \left( \frac{1 + 2\frac{\Phi}{\Phi_0}}{3} \right)^{2/3}. \quad (7.72)$$

En la relación anterior, el subíndice  $c$  de  $\mu_c^\Phi$  denota que este es el potencial químico evaluado en la temperatura crítica.

En la ecuación 4.33 vimos que la densidad de partículas en el punto crítico está dada por

$$\rho_c(T_c, \mu_c^\Phi) = \frac{3m^2 T_c}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[ \frac{n\mu_c^\Phi}{T_c} \right] K_2 \left( \frac{mn}{T_c} \right), \quad (7.73)$$

razón por la cual la densidad de partículas en el caso de un sistema con volumen  $V$  finito y flujo magnético  $\Phi$  será

$$\rho_c(T_c, \mu_c^\Phi) = \frac{3m^2 T_c}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[ n \frac{m - \frac{1}{m} \left( \frac{2\pi^2}{V^2} \right)^{1/3} \left( \frac{1+2\frac{\Phi}{\Phi_0}}{3} \right)^{2/3}}{T_c} \right] K_2 \left( \frac{mn}{T_c} \right). \quad (7.74)$$

Esta expresión nos permite entonces analizar la situación para distintos casos.

Al tener una colisión periférica con parámetro de impacto  $b$  en un sistema simétrico, el radio del área transversal al campo magnético cumple la relación

$$R = R_N - \frac{b}{2}, \quad (7.75)$$

siendo  $R_N$  el radio de los núcleos que impactan (Ayala, Mercado y Villavicencio, 2017). Consideremos entonces el caso de una colisión semicentral, i.e.  $b = R_N$ <sup>2</sup>. Usando además que el radio de los núcleos sigue la relación  $R_N \cong 1.21(A)^{1/3}$  (Martin, 2006), tenemos que para el caso de colisión Pb-Pb  $R_N \cong 7.16\text{fm}$ . El radio de la región de interacción será entonces  $R \cong 3.58\text{fm}$  en una colisión Pb-Pb semicentral. Este radio describe las condiciones iniciales de la colisión. Sin embargo, el presente estudio se basa en estudiar la fase de hadronización. En este punto, la región de interacción se ha expandido considerablemente, dejando un radio que ha sido estimado de  $R_f \sim 7\text{fm}$  (Abelev y col., 2014). Recordamos además que la centralidad está dada por la ecuación 6.4. Para el caso de una colisión Pb-Pb semicentral tendremos entonces una centralidad de  $c \sim 22.8\%$ . La colaboración ALICE (Abelev y col., 2014) encontró que en una colisión Pb-Pb con  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$  el número de piones cargados producidos en una colisión con centralidad de  $22\%$  es de  $N_\pi \approx 654$ . Sin embargo, se estima que menos de la mitad de estos provienen del decaimiento de resonancias hadrónicas, por lo que no las queremos considerar. En este estudio consideraremos que la mitad de los piones provienen de resonancias. Además, estamos trabajando en el supuesto que  $N_{\pi^+} = N_{\pi^-} = N_{\pi^0}$ . Todo esto nos deja entonces con un número total de  $N_\pi \approx 490$ . Juntando estos resultados obtenemos que la densidad esperada del sistema en una colisión de este tipo sea de  $\langle \rho \rangle \approx 0.34\text{fm}^{-3}$ . De igual manera, se puede leer del trabajo realizado por Broniowski y Florkowski (2002) que  $\Delta N = \sqrt{N}$ , con lo que esperaríamos que la densidad de nuestro sistema se encuentre en el rango  $0.32\text{fm}^{-3} < \rho < 0.35\text{fm}^{-3}$ . Estamos estudiando la etapa de la colisión en la cual el número de piones está fijo. Esto se logra cuando el sistema alcanza su temperatura de congelamiento químico. El sistema sigue evolucionando hasta que se llega a la temperatura de congelamiento cinético, en el cual el medio se desvanece y las partículas se dirigen a los detectores. Nosotros analizaremos el caso en el cual la temperatura del sistema está entre la temperatura de congelamiento químico y la temperatura de congelamiento cinético.

Con este parámetro en mente, observemos gráficamente en la figura 7.1 los resultados encontrados en la ecuación 7.74. La línea sólida muestra el caso en el cual consideramos  $R \rightarrow \infty$ , que corresponde al caso en el cual ni el volumen del sistema ni el campo magnético influyen en el proceso de condensación. Posteriormente, se muestra el caso en el cual  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = 1$ . Este caso corresponde al caso en el que únicamente se consideran los efectos de volumen finito del sistema. Recordamos del capítulo 5

<sup>2</sup>En algunos cálculos teóricos se toma esta igualdad como definición de una colisión semicentral.

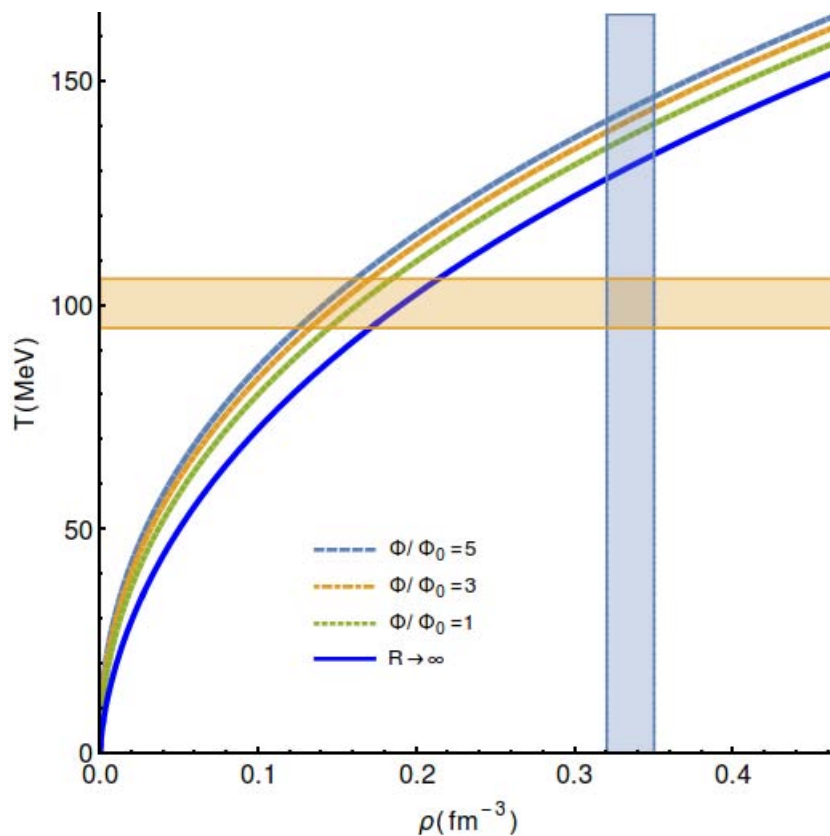


FIGURA 7.1: Diagrama de fase en el plano  $T$  vs  $\rho$  en presencia de un campo magnético. Se considera un radio en la región de interacción de  $R_f \cong 7\text{fm}$ . Se varía entre los posibles valores del campo magnético, tomando valores de  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = 5, 3, 1$ . Se muestra una región sombreada en la cual esperaríamos que se encuentre la densidad del sistema, la cual está dada por  $0.32\text{fm}^{-3} < \rho < 0.35\text{fm}^{-3}$ . De igual manera, se muestra la región esperada para la temperatura en donde la cota superior de la región corresponde al congelamiento químico y la cota inferior al congelamiento cinético.



que el considerar un sistema de volumen finito promueve el proceso de condensación, pues la temperatura crítica  $T_c$  aumenta para una densidad  $\rho$  dada. Por último, se muestran los casos en los cuales  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = 3, 5$ . En ambos casos, la presencia del campo magnético influye en el proceso de condensación del sistema. Estamos viendo en la figura 7.1 que el hecho de tener un campo magnético externo incrementa aún más la temperatura crítica  $T_c$  para una densidad  $\rho$  dada.

El hecho que un campo magnético externo promueva el proceso de condensación va de acuerdo a la imagen física que teníamos del proceso. Al considerar volumen finito en el sistema, lo que hicimos fue restringir los valores que podía tomar el momento. Dichos valores estarían dados por la cuantización obtenida al imponer condiciones de frontera periódicas en el sistema. Esto tiene como consecuencia que los estados energéticos accesibles al sistema disminuyen y por esta razón se comienza a poblar el estado base antes. Al agregar un campo magnético externo estamos restringiendo aún más los estados energéticos accesibles del sistema pues estamos obligando a las partículas a estar en niveles de Landau. Dicha restricción promueve entonces que el estado base del sistema deba ocuparse mucho antes de lo que lo haría si no tuviera estas restricciones.

Recordamos que la figura 7.1 corresponde a un diagrama de fase en el plano  $(T, \rho)$ , en el cual cada línea corresponde a la temperatura crítica de condensación del sistema en una densidad dada. El empalme de las regiones amarilla y azul corresponde al sistema físico que estamos estudiando. Se puede notar entonces que incluso en el caso en el que se considera un volumen infinito, el sistema presenta condensación de Bose-Einstein. A medida que el campo magnético en el sistema aumenta, la densidad de partículas en el estado base aumenta. Esto lo podemos asegurar ya que la línea de la temperatura crítica aumenta para una densidad dada.

## 8 Conclusiones

En este trabajo se pudieron determinar las condiciones de condensación para un gas ideal de piones en presencia de un campo magnético. Se encontró que, al igual que en el caso de un sistema con volumen finito, la información de los efectos del campo magnético en la densidad de partículas está codificada principalmente en la densidad de piones en el estado base de la energía. Trabajando en el esquema de quark ujo magnético  $\Phi$  y comparándolo con el cuanto de quark ujo magnético elemental  $\Phi_0$  se encontró que si se tiene  $\Phi/\Phi_0 > 1$  en la fase de hadronización entonces la presencia del campo magnético aumenta la temperatura crítica de condensación para una densidad dada. Decimos entonces que la presencia de un campo magnético en la región de interacción promueve el proceso de condensación de Bose-Einstein del gas ideal de piones. Sin embargo, vale la pena recalcar que se trabajó en el caso de campo magnético débil, de manera que  $eB < mT$ . Observando la figura 7.1 esperaríamos que al considerar campos magnéticos fuertes la temperatura crítica aumentaría cada vez más. Sin embargo, esta consideración supone complicaciones teóricas considerables que no nos permitieron su estudio.

Los resultados obtenidos se alinean con la imagen física que nos hicimos en los capítulos 4 y 5 de la condensación de Bose-Einstein. Al incluir la presencia de un campo magnético en el estudio de la densidad de partículas estamos restringiendo los niveles energéticos accesibles al sistema. Esto se debe a que al incluir dicho campo las partículas cargadas se restringen a los niveles de Landau. El hecho de tener menos niveles energéticos accesibles tiene como consecuencias que los bosones se agrupan antes en el estado base de la energía, el cual tiene en principio capacidad de ocupación ilimitada. Esto es similar a las consecuencias que tiene el considerar un sistema de volumen finito, ya que en ese caso el momento de las partículas tenía también un proceso de cuantización debido al volumen.

Usando valores reportados experimentalmente del tamaño del sistema, de los piones producidos en estas colisiones y las temperaturas del sistema se encontró que las condiciones son tales que una fracción considerable de los piones se encuentran en el estado base de la energía y, por lo tanto, en un estado condensado. Al promover el proceso de condensación, la presencia del campo magnético puede hacer más probable la detección experimental de un condensado de Bose-Einstein.

Como una primera aproximación, los resultados encontrados son válidos. No obstante, si se quiere llegar a resultados más precisos se debe considerar una imagen más realista. Un ejemplo de esto sería considerar las interacciones que tienen los piones. Sin embargo, al tomar consideraciones más realistas el problema se complica considerablemente. Un posible estudio subsecuente puede analizar dichas interacciones o estudiar posibles señales que pueda producir el condensado para lograr su detección experimental.

Los resultados obtenidos se publicaron en la revista *Physical Review C* **95**, 014904 (2017) bajo el nombre **Magnetic catalysis of a finite-size pion condensate** (Ayala, Mercado y Villavicencio, 2017).

# Bibliografía

- Abelev, B. y col. (2014). «Freeze-out radii extracted from three-pion cumulants in pp, p–Pb and Pb–Pb collisions at the LHC». En: *Physics Letters B* 739, págs. 139 -151. ISSN: 0370-2693. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2014.10.034>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269314007576>.
- Adcox, K y col. (2001). «Suppression of Hadrons with Large Transverse Momentum in Central Au-Au Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  GeV». En: *Physical Review Letters* 88.2, pág. 022301.
- Anderson, Mike H y col. (1995). «Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor». En: *science* 269.5221, pág. 198.
- Ayala, Alejandro, Pedro Mercado y C. Villavicencio (2017). «Magnetic catalysis of a finite-size pion condensate». En: *Physical Review C* 95 (1), pág. 014904. DOI: [10.1103/PhysRevC.95.014904](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.95.014904). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.014904>.
- Ayala, Alejandro y Augusto Smerzi (1997). «Density and boundary effects on pion distributions in relativistic heavy-ion collisions». En: *Physics Letters B* 405.1, págs. 20 -24. ISSN: 0370-2693. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)00627-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00627-8). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397006278>.
- Begun, VV y MI Gorenstein (2008). «Bose-Einstein condensation in the relativistic pion gas: Thermodynamic limit and finite size effects». En: *Physical Review C* 77.6, pág. 064903.
- Broniowski, Wojciech y Wojciech Florkowski (2002). «Geometric relation between centrality and the impact parameter in relativistic heavy-ion collisions». En: *Physical Review C* 65.2, pág. 024905. Brookhaven National Laboratory. <https://www.bnl.gov/science/accelerators.php>. Consultado: 08/02/2017.
- Bruno, GE (2013). «Centrality determination of Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV in the ALICE experiment». En: *Physical Review C*.
- Duncan, Robert C. *Magnetars*. [http://solomon.as.utexas.edu/magnetar.html#Strong\\_Magnetic\\_Fields](http://solomon.as.utexas.edu/magnetar.html#Strong_Magnetic_Fields). Consultado: 16/02/2017.
- Griffiths, David Jeffery (2005). *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Education India.
- Jackson, John David y Ronald F Fox (1999). «Classical electrodynamics». En: *American Journal of Physics* 67.9, págs. 175-176.
- Landau, Lev Davidovich y col. (1958). *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory: Vol. 3 of Course of Theoretical Physics*.
- Martin, Brian R (2006). *Nuclear and particle physics: An introduction*. John Wiley & Sons, págs. 5-7. Particle Data Group. <http://www-pdg.lbl.gov/2016/listings/rpp2016-list-pi-plus-minus.pdf>. Consultado: 16/02/2017.
- Peskin, Michael E y Daniel V Schroeder (1995). *Quantum field theory*, págs. 57,58.

- R K Pathria, Paul D. Beale (2011). *Statistical Mechanics*. Ed. por Academic Press. Tercera Edición, pág. xxi.
- Reif, Frederick, José Bescós Belarra y Juan de la Rubia Pacheco (1967). *Fundamentos de física estadística y térmica*. Ediciones del Castillo, págs. 334-336.
- Seto, Richard (1999). *Heavy Ion Physics from Bevalac to RHIC: Proceedings of the Relativistic Heavy Ion Symposium, APS Centennial Meeting 99*. World Scientific, págs. 104-105.
- Skokov, VV, A Yu Illarionov y VD Toneev (2009). «Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions». En: *International Journal of Modern Physics A* 24.31, págs. 5925-5932.
- The Nobel Prize in Physics, 1902*. [https://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1902/](https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1902/). Consultado: 01/02/2017.
- The Nucleus, Rutherford 1911*. [http://www-outreach.phy.cam.ac.uk/camphy/nucleus/nucleus5\\_1.htm](http://www-outreach.phy.cam.ac.uk/camphy/nucleus/nucleus5_1.htm). Consultado: 06/02/2017.
- Wikipedia, The Pion*. By No machine-readable author provided. Harp assumed (based on copyright claims). - No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims)., CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=637403>. Consultado: 06/02/2017.
- Wolfram Alpha*. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=10%5E10+kelvin>. Consultado: 24/04/2017.