UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRANDES RETÍCULAS ASOCIADAS A UN ANILLO Y EL CASO DE LOS ENTEROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

ERIK MÁRQUEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

2017

Ciudad Universitaria, CDMX

Márquez
Hernández
Erik
58 63 03 97
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
410031191

Doctor
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

Dr. Manuel Gerardo
Zorrilla
Noriega

Dr. Alejandro
Alvarado
García

Dra. Bertha María
Tomé
Arreola

Dra. Martha Lizbeth Shaid
Sandoval
Miranda

Grandes retículas asociadas a un anillo y el caso de los enteros.
91 p
2017

Índice general

Capítulo 1

Grandes Retículas

Introducción

Empezaremos con algunas definiciones necesarias para después iniciar con el contenido de este trabajo que se enfoca en el estudio de las grandes retículas y que pone especial atención en el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros.
Este capítulo se enfoca en $\mathcal{L}_{\leq}$ que es la clase propia de clases de submódulos que es cerrada bajo isomorfismos y submódulos, así como $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ y $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$. Definiremos lo que es seudocomplemento, seudocomplemento fuerte y $Skel(\mathcal{L}_A)$, el cual tiene una gran importancia en el tema de las grandes retículas. Concluiremos con la demostración de $Skel(\mathcal{L}_{\leq}) = \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$.

1.1. Conceptos preliminares

Definición 1.1. *Un conjunto parcialmete ordenado (COPO) es una pareja* $(S, \leq)$ *donde* S *es un conjunto y* $\leq$ *es una relación de orden en* S *es decir* *que cumple con:*

1. $\forall x \in S,\ x \leq x$. *($\leq$ es reflexiva)*
2. *Sean* $x, y \in S$ *donde* $x \leq y$ *y* $y \leq x$ *entonces* $x = y$. *($\leq$ es antisimétrica)*
3. *Sean* $x, y, z \in S$ *donde* $x \leq y$ *y* $y \leq z$ *entonces* $x \leq z$. *($\leq$ es transitiva)*

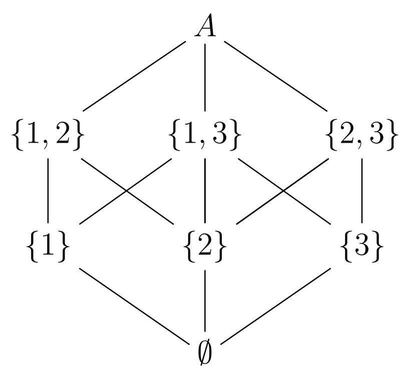
Definición 1.2. *Si* $S \in COPO$ *y* $A \subseteq S$*, decimos que* $x \in S$ *es:*

1. *Cota superior de* A *si:* $\forall y \in A,\ y \leq x$.
2. *Cota inferior de* A *si:* $\forall y \in A,\ x \leq y$.
3. *Máximo en* A *si:* $x \in A$ *y* $\forall y \in A,\ x \leq y \Rightarrow x = y$.
4. *Mínimo en* A *si:* $x \in A$ *y* $\forall y \in A,\ y \leq x \Rightarrow x = y$.
5. *Mayor elemento de* A *si:* $x \in A$ *y* $\forall y \in A,\ y \leq x$.
6. *Menor elemento de* A *si:* $x \in A$ *y* $\forall y \in A,\ x \leq y$.
7. *Supremo de* A *si es la menor de las cotas superiores de* A.
8. *Ínfimo de* A *si es la mayor de las cotas superiores de* A.

Definición 1.3. *Sea* $S \in COPO$*, decimos que* S *es una retícula si* $\forall x, y \in S$*, el conjunto* $\{x, y\}$ *tiene supremo e ínfimo. Decimos que* S *es una retícula completa si:* $\forall A \subset S$*,* A *tiene supremo e ínfimo.*

Ejemplo 1.4.

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ entonces $(\wp(A), \subseteq)$ es una retícula ya que $\wp(A) \in COPO$ donde la relación de orden es la contención. Está retícula la podemos ver graficamente de la siguiente manera:



2. En general, sea $\emptyset \neq X$ un conjunto entonces $(\wp(X), \subseteq)$ es una retícula debido a que $\forall A, B \in \wp(X)$ $A \cup B$ es el supremo y $A \cap B$ es el ínfimo de $\{A, B\}$.

3. Sea $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$, tomamos $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y la relación " $\mid$ "dada en $\mathbb{Z}$, es decir $n \mid m$ si y sólo si $m \in n\mathbb{Z}$. Demostraremos que $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \mid)$ es una retícula.

   Primero veamos que $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \mid)$ es un *COPO*. Observemos que la relación de " $\mid$ " queda restringida a $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

   Sea $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ entonces $m \cdot 1 = m$, por lo tanto $m \mid m$.

   Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ donde $m \mid n$ y $n \mid m$, por demostrar que $m = n$. Dado que $m \mid n$ y $n \mid m$ entonces existen z_1y z_2 tales que $n = z_1 \cdot m$ y $m = z_2 \cdot n \Rightarrow m = z_2 \cdot z_1 \cdot m$.

   Caso 1) Si $m = 0$ entonces $0 \mid n$, por lo que $n = 0$.

   Caso 2) Si $m \neq 0$ entonces $z_2 \cdot z_1 = 1$ pero z_2, $z_1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, por lo cual $z_2 = 1 = z_1$. Por lo tanto $n = m$.

   Además por las definiciones de mínimo común múltiplo $[a; b]$ y máximo común divisor $(a; b)$ estos serán el supremo e ínfimo de $\{a, b\}$ $\forall a, b \in$

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ bajo la relación " $|$ ".

Definición 1.5. *Gran Retícula. Una gran retícula es un par* $(X, \leq)$ *tal que* X *es una clase propia y* $\leq$ *cumple las propiedades de retícula, es decir, es una retícula salvo que* X *no es un conjunto.*

Observación 1.6. R *denotará un anillo asociativo con uno.*

En este trabajo consideraremos clases de módulos que son cerradas bajo algunas propiedades de cerradura. Las propiedades de cerradura que más nos interesan, por la frecuencia con que se usan, son: cerradura bajo tomar submódulos, bajo tomar cocientes, bajo tomar sumas directas de familias (finitas o arbitrarias), bajo tomar productos, bajo tomar cápsulas inyectivas, bajo tomar extensiones (esenciales) y bajo tomar cubiertas proyectivas.
Decimos que una clase $\mathcal{A}$ de módulos es cerrada bajo tomar extensiones si:
$0 \to A \to B \to C \to 0$, con $A, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.
Consideraremos los siguientes símbolos para describir propiedades de cerradura:

Símbolo	Propiedad de cerradura
$\leq$	submódulos
$\twoheadrightarrow$	cocientes
ext	extensiones
$\oplus$	sumas directas
$\prod$	productos
E	cápsulas inyectivas
P	cubiertas proyectivas

Así, consideraremos el siguiente conjunto de símbolos:
$\{\leq, \twoheadrightarrow, ext, \oplus, E(\,), \prod, P(\,)\}$ al que llamaremos conjunto de símbolos elementales.
De acuerdo con esto, si $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos elementales, denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ la clase de las clases de módulos cerradas bajo las operaciones de $\mathcal{P}$.

Definición 1.7. *Sea* $A \subseteq \{\leq, \twoheadrightarrow, ext, \oplus, E(\,), \prod, P(\,)\}$. *Definimos*
$\mathcal{L}_A = \{\mathcal{B} \subseteq R - mod \mid \mathcal{B}\, es\, no\, vacía\, y\, cerrada\, bajo\, isomorfismos\, y\, las\, operaciones\, indicadas\, por\, A\}$.
$(\mathcal{L}_A, \subseteq, \cap, \cup, \{0\}, R - mod)$ *es una gran retícula completa.*

Ejemplo 1.8. *Si* $R = \mathbb{Z}$, *el anillo de los enteros, entonces*
$\mathcal{L}_{\leq} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\, es\, una\, clase\, no\, vacía\, de\, grupos\, abelianos\, cerrada\, bajo\, isomorfismos\, y\, submódulos\}$.

Proposición 1.9. *Si* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq}$ *entonces* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $N \hookrightarrow M$ entonces $N \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es una clase hereditaria. De igual manera, $N \in \mathcal{B}$. Esto implica que $N \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
Por lo tanto $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq}$.

□

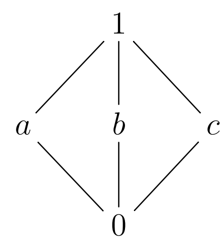
Análogamente, si $\{\mathcal{A}_i\}_I$ es una familia de clases hereditarias, entonces $\cap \{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ es hereditaria para cualquier conjunto de índices I.
Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z} - mod$. $\xi_{\leq}(\mathcal{A}) = \{N \in \mathbb{Z} - mod \mid \exists M \in \mathcal{A}\, tal\, que\, N \rightarrowtail M\}$, es la menor clase hereditaria que contiene a $\mathcal{A}$.

Observación 1.10. $\vee \{\mathcal{A}_i\}_I = \xi_{\leq}(\underset{i \in I}{\cup} \mathcal{A}_i) = \underset{i \in I}{\cup} \{\mathcal{A}_i\}$ *describe los supremos en* $\mathcal{L}_{\leq}$.

Teorema 1.11. *$(\mathcal{L}_{\leq}, \subseteq, \cap, \cup, \{0\}, \mathbb{Z}-mod)$ Es una retícula completa y distributiva.*

Definición 1.12. *b es un seudocomplemento de a si b es máximo respecto de la propiedad $a \wedge b = 0$.*

Ejemplo 1.13. *En la retícula*



b y c son seudocomplementos de a.

Definición 1.14. *b es seudocomplemento fuerte de a si b es el mayor elemento tal que $a \wedge b = 0$.*

Definición 1.15. *Si $S \in \mathcal{L}_A$, denotamos con $S^{\perp_A}$ el seudocomplemento de S, cuando este exista y sea único. Además, $Skel(\mathcal{L}_A)$ será la clase de seudocomplementos en $\mathcal{L}_A$.*

Teorema 1.16. *Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ ($\mathcal{A}$ es una clase hereditaria de grupos abelianos). Entonces $\mathcal{A}$ tiene seudocomplemento fuerte en $\mathcal{L}_{\leq}$, que se describe como $\mathcal{A}' = \{_{\mathbb{Z}}M \mid M\, no\, tiene\, subgrupos \neq 0 \text{ en } \mathcal{A}\}$.*

Demostración. $\mathcal{A}'$ es una clase hereditaria. Por demostrar que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$.
Sea $M \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ entonces $M \in \mathcal{A}$ y $M \in \mathcal{A}'$. Como $M \in \mathcal{A}$ y M no tiene submódulos distintos de 0 en $\mathcal{A}$ y $M \hookrightarrow M$, entonces $M = 0$. Por lo tanto $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = 0$.

Si $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq}$ es tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ entonces, $\forall 0 \leq M \in \mathcal{B}$, los subgrupos de M que están en $\mathcal{A}$, están en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ entonces $M \in \mathcal{A}'$. Por lo anterior $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}'$.
Por lo tanto $\mathcal{A}'$ es un seudocomplemento fuerte de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{L}_{\leq}$. □

Teorema 1.17. $\mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$ *es cerrada bajo extensiones, sumas directas y cápsulas divisibles.*

Demostración. Extensiones⌋ Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es exacta con $L, N \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$, por demostrar que $M \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$.
Si $A \leq M$ donde $A \in \mathcal{A}$ entonces $A \overset{i}{\hookrightarrow} M$. Como $A \cap L \leq L$ y $L \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$ entonces $A \cap L = 0$. Entonces

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r, "p"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & & A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, dashed, "p|_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

se tiene que $p|_A$ es un monomorfismo, pero como $N \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$, entonces $A = 0$.
Sumas directas⌋ Para demostrar que $\mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$ es cerrado bajo sumas directas finitas hay que tener en cuenta que podemos formar la siguiente sucesión exacta $0 \to A_1 \to A_1 \oplus A_2 \to A_2 \to 0$ con A_1 y $A_2 \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$.
En general $\mathcal{A}^{\perp_{\leq}}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias.
Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria con $M_i \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}}\, \forall i \in I$ y supongamos que existe $0 \neq A \in \mathcal{A}$ tal que $A \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I}\{M_i\}$. Tomemos $0 \neq x \in A$ tal que $x = m_{i_1} \oplus \cdots \oplus m_{i_K}$ donde $m_{i_j} \in M_{i_j}$ y k la mínima posible. Si $k = 1$ entonces $0 \neq x \in A \cap M_{i_1}$, pero $0 \neq A \cap M_{i_1} \in \mathcal{A}$ y $M_{i_1} \in \mathcal{A}^{\perp}$. Contradicción.
Si $k > 1$ notemos que el $(0 : m_{i_j}) = (0 : x)$. Sea $\alpha \in (0 : x)$ entonces $0 = \alpha x = \alpha(m_{i_1} \oplus \cdots \oplus m_{i_K}) = \alpha m_{i_1} + \cdots + \alpha m_{i_K}$ entonces $\alpha m_{i_j} = 0\, \forall j \in \{1, .., k\}$.

Por lo que $\alpha \in (0 : m_{i_j})$. Por lo tanto $(0 : x) \subseteq (0 : m_{i_j})$. Si la inclusión fuera propia entonces existe r tal que $r \in (0 : m_{i_j})$ y $r \notin (0 : x)$, por lo que $0 \neq rx = rm_{i_1} + \cdots + rm_{i_j} + \cdots + rm_{i_k} = rm_{i_1} + \cdots + 0 + \cdots + rm_{i_k}$ y esto contradice la elección de x. Por lo tanto, $(0 : m_{i_j}) = (0 : x)$ y así $0 \neq Rx \cong Rm_{i_j} \leq M_{i_j}$ pero $Rx \in \mathcal{A}$. Contradicción. En conclusión $\bigoplus\limits_{i \in I}\{M_i\}$ no tiene submódulos distintos de cero en $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo cápsulas (inyectivas) divisibles.

Sea $M \in \mathcal{A}^{\perp_\leq}$ y sea $E(M)$ la cápsula divisible de M entonces $M \leq_{es} E(M)$. Supongamos que existe $0 \neq A \in \mathcal{A}$ tal que$A \hookrightarrow E(M)$, así que $0 \neq A \cap M \leq A$, por lo que $A \cap M \in \mathcal{A}$ pero $A \cap M \leq M$.Contradicción ya que $M \in \mathcal{A}^{\perp_\leq}$. Por lo tanto $\mathcal{A}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo cápsulas (inyectivas) divisibles.

□

Definición 1.18. $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}\}$ *donde*

$\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\, es\, una\, clase\, no\, vacía\, de\, grupos\, abelianos\, cerrada\, bajo$

$isomorfismos\, y\, cocientes\}$.

Si $\mathcal{B}$ es una clase de grupos abelianos definimos:

$\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{B}) = \{M \in \mathbb{Z} - mod \mid \exists N \in \mathcal{B}\, y\ un\ epimorfismo\ N \twoheadrightarrow M\}$

Notemos que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{B})$ es la menor clase cerrada bajo cocientes que contiene a $\mathcal{B}$

Lema 1.19. $\xi_{\twoheadrightarrow} \circ \xi_{\leq} = \xi_{\leq} \circ \xi_{\twoheadrightarrow} = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow}$.

Demostración. Sea $M \in \xi_{\twoheadrightarrow} \circ \xi_{\leq}(\mathcal{A})$ entonces existe
$$\begin{tikzcd} A \\ B \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd}$$
con $A \in \mathcal{A}$. Tomando el coproducto fibrado (Pushout U) podemos extender a un

cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] & U \\ B \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads] & M \arrow[u, tail] \end{tikzcd}$ y así $M \in \xi_{\leq} \circ \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$.

Sea $M \in \xi_{\leq} \circ \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$ entonces existe $\begin{tikzcd} & A \arrow[d, two heads] \\ M \arrow[r, tail] & B \end{tikzcd}$ con $A \in \mathcal{A}$. Por el producto fibrado (P) obtenemos $\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\ M \arrow[r, tail] & B \end{tikzcd}$. Por lo que $M \in \xi_{\twoheadrightarrow} \circ \xi_{\leq}(\mathcal{A})$. Por lo tanto $\xi_{\twoheadrightarrow} \circ \xi_{\leq} = \xi_{\leq} \circ \xi_{\twoheadrightarrow}$.

Así $\xi_{\leq} \circ \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$ es una clase hereditaria y cohereditaria que contiene a $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ entonces $\xi_{\leq}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ y también $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{B}$. Por lo tanto $\xi_{\twoheadrightarrow} \circ \xi_{\leq}(\mathcal{A})$ es la menor clase hereditaria y cohereditaria que contiene a $\mathcal{A}$, es decir, $\xi_{\twoheadrightarrow} \circ \xi_{\leq} = \xi_{\twoheadrightarrow,\leq}$.

$\square$

Observación 1.20. $(\mathcal{A}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} = \{M \mid \forall N,\ N \overset{f\neq 0}{\rightarrowtail} M\ \exists\ 0 \neq A \rightarrowtail N\ ,\ A \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 1.21. *En una retícula fuertemente seudocomplementada* $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$.

Demostración. Notemos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}^{\perp} = 0$, si tomamos ahora $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ este tiene la propiedad de $\mathcal{A}^{\perp} \wedge \mathcal{A}^{\perp\perp} = 0$ y es el mayor elemento con esta propiedad Por lo tanto $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}^{\perp\perp}$.

Por otra parte, Si $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp} \leq \mathcal{A}^{\perp}$ ya que, si $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp} \wedge \mathcal{A} \leq \mathcal{B}^{\perp} \wedge \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp} \wedge \mathcal{A} = 0$ y por ser fuertemente seudocomplementada con respecto a $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}^{\perp} \leq \mathcal{A}^{\perp}$. Por lo anterior, concluimos que $\mathcal{A}^{\perp\perp\perp} \leq \mathcal{A}^{\perp}$.

Ahora tomemos $\mathcal{A}^{\perp} \wedge \mathcal{A}^{\perp\perp} = 0$ por definición de $\mathcal{A}^{\perp\perp}$, pero si consideramos

$\mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$ entonces $\mathcal{A}^{\perp\perp} \wedge \mathcal{A}^{\perp\perp\perp} = 0$ y es el mayor elemento, por lo cual $\mathcal{A}^{\perp} \leq \mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$. Por lo tanto $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$. □

1.2. La clase de seudocomplementos en $\mathcal{L}_{\leq}$

Proposición 1.22. *$Skel(\mathcal{L}_{\leq}) = \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$.*

Ya hemos visto que $Skel(\mathcal{L}_{\leq}) \subseteq \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$. Así que solo falta demostrar la otra contención, para esto utilizaremos el siguiente lema.

Lema 1.23. *Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{L}$ retículas de clases de módulos definidas mediante propiedades de cerradura con $0 \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{R} \leq \mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ es fuertemente seudocomplementada y $Skel(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{R}$. Entonces $\mathcal{R}$ es fuertemente seudocomplementeda y $Skel(\mathcal{R}) = Skel(\mathcal{L})$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{R} \leq \mathcal{L}$ y como $\mathcal{L}$ es fuertemente seudocomplementada entonces $a^{\perp_{\mathcal{L}}} \in \mathcal{L}$ y el $Skel(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{R}$ en consecuencia, $a^{\perp_{\mathcal{L}}} \in \mathcal{R}$.
Si $b \in \mathcal{R}$ y $a \wedge b = 0$ entonces $b \in \mathcal{L}$, además $b \leq a^{\perp_{\mathcal{L}}}$, $a^{\perp_{\mathcal{L}}}$ es un seudocomplemento fuerte de a en $\mathcal{R}$, por lo tanto $\mathcal{R}$ es fuertemente seudocomplementada y $Skel(\mathcal{R}) \subseteq Skel(\mathcal{L})$.
Si $b = a^{\perp_{\mathcal{L}}} = (a^{\perp_{\mathcal{L}}\perp_{\mathcal{L}}})^{\perp_{\mathcal{L}}}$ pero $a^{\perp_{\mathcal{L}}\perp_{\mathcal{L}}} \in Skel(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es fuertemente seudocomplementado entonces $b = a^{\perp_{\mathcal{L}}} = (a^{\perp_{\mathcal{L}}\perp_{\mathcal{L}}})^{\perp_{\mathcal{L}}} = (a^{\perp_{\mathcal{L}}\perp_{\mathcal{L}}})^{\perp_{\mathcal{R}}}$. Por lo tanto $Skel(\mathcal{L}) \subseteq Skel(\mathcal{R})$. □

Observación 1.24. *Dado que $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E} \subseteq \mathcal{L}_{\leq}$, $\mathcal{L}_{\leq}$ es fuertemente seudocomplementada y $Skel(\mathcal{L}_{\leq}) \subseteq \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ y por el lema anterior concluimos que $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ es fuertemente seudocomplementada y $Skel(\mathcal{L}_{\leq}) = Skel(\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E})$.*

Definición 1.25. *Una familia $\mathfrak{F}$ de conjuntos es de carácter finito cuando $A \in \mathfrak{F}$ si y sólo si todo subconjunto finito de A pertenece a $\mathfrak{F}$.*

Ejemplo 1.26. *La familia de conjuntos linealmente independientes de un espacio vectorial es de carácter finito.*

Lema 1.27 (de Tukey)**.** *Toda familia de carácter finito tiene máximo.*

Es un teorema de la teoría de conjuntos, que el Lema de Tukey es equivalente al Axioma de Elección.

Ejemplo 1.28. *Un espacio vectorial tiene conjuntos linealmente independientes máximos.*

Definición 1.29. *Una familia de $\{N_i\}_I$ de submódulos de M es independiente, si*

$$N_i \cap (\sum_{j \in I \setminus \{i\}} N_j) = 0 \ \ \forall i \in I.$$

Proposición 1.30. *$\{N_i\}_I$ es independiente si y sólo si $\{N_i\}_F$ es independiente $\forall F \subseteq I$ finito.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si $\{N_i\}$ es independiente entonces lo es para todo subconjunto finito.
$\Leftarrow$] (Contrarecíproca) Si $\{N_i\}$ no es independiente entonces existe alguna $i \in I$ tal que $N_i \cap (\sum_{j \in I \setminus \{i\}} N_j) \neq 0$ entonces $0 \neq x \in N_i \cap (N_{j_1} + ... + N_{j_k})$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{N_i\} \cup \{N_{j_1}, ..., N_{j_k}\}$ no es independiente. $\square$

Proposición 1.31. *$Skel(\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}) = \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$.*

Demostración. Recordemos que $Skel(\mathcal{L}_{\leq}) = Skel(\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E})$. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ entonces para demostrar la proposición basta comprobar que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$ Siempre se tiene que $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}^{\perp_{\leq}\perp_{\leq}}$ solo falta demostrar la otra desigualdad.
Sea $0 \neq M \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq}\perp_{\leq}}$. Sea $\{Rx_i\}_I$ una familia independiente máxima de cíclicos (que existe por el Lema de Tukey) de submódulos de M que pertenecen a $\mathcal{A}$.
Notemos que $\oplus\{R_{x_i}\} \overset{es}{\hookrightarrow} M$ ya que $\forall 0 \neq y$ $Ry \cap (\oplus_I\{Rx_i\}) \neq 0$ por ser máxima $\{Rx_i\}_I$ y teniendo en cuenta lo observado en 1.20.
Entonces $\oplus_I\{Rx_i\} \leq M$, además $Rx_i \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$, por lo cual $\oplus_I\{Rx_i\}$ y $E(\oplus_I\{Rx_i\}) \in \mathcal{A}$. Veamos que

$$\begin{tikzcd}
\oplus\{R_{x_i}\} \arrow[r, hook, "es"] \arrow[dr, hook, "es"'] & M \arrow[r, hook, "es"] & E(M) \\
& E(\oplus\{R_{x_i}\}) &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que la cápsula inyectiva es única salvo isomorfismo, entonces $E(M) \cong E(\oplus_I\{Rx_i\}) \in \mathcal{A}$, así que $E(M) \in \mathcal{A}$. Como $M \leq E(M)$, tenemos que $M \in \mathcal{A}$. Con esto demostramos que $\mathcal{A}^{\perp_{\leq}\perp_{\leq}} \leq \mathcal{A}$.
Por lo tanto, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$ con $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$.
Por lo anterior, concluimos que $Skel(\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}) = \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$. $\square$

Capítulo 2

Generación de clases de módulos.

En el anterior capítulo ya vimos que dada $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ podemos generar la menor clase que contiene a $\mathcal{A}$ y pertenece a $\mathcal{L}_{\leq}$, $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ y $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ respectivamente. Por lo cual nos enfocaremos ahora en mostrar de manera explícita la menor clase que contenga a $\mathcal{A}$ y pertenezca a $\mathcal{L}_{ext}$, $\mathcal{L}_{E}$ y $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ respectivamente.

Definición 2.1. *Sea H una clase de módulos definimos* $\xi_A(H) = \cap\{\mathcal{A} \in \mathcal{L}_A \mid H \subseteq \mathcal{A}\} \in \mathcal{L}_A$

Observación 2.2. $\xi_A(H)$ *es la menor clase en* $\mathcal{L}_A$ *que contiene a* H.

Demostración. Supongamos que existe $\mathcal{B}$ una clase en $R-mod$ con las siguientes propiedades $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_A$, $H \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subseteq \xi_A(H)$, entonces $\mathcal{B} \in \{\mathcal{A} \in \mathcal{L}_A \mid H \subseteq \mathcal{A}\}$ esto implica que $\xi_A(H) = \cap\{\mathcal{A} \in \mathcal{L}_A \mid H \subseteq \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{B} = \xi_A(H)$.

□

Ejemplo 2.3.

1. Consideremos $A = \{\leq\}$ entonces $\xi_{\leq}(\mathcal{A}) = \{M \in R - mod \mid \exists M \rightarrowtail A,\ A \in \mathcal{A}\}$.

2. Si $A = \{\twoheadrightarrow\}$ entonces $\xi_{\leq}(\mathcal{A}) = \{M \in R - mod \mid \exists M \rightarrowtail A,\ A \in \mathcal{A}\}$.

Para hablar de $\xi_{ext}(\mathcal{A})$, primero veamos la siguiente definición.

Definición 2.4. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases en $R-mod$ definimos la operación $- : -$ de la siguiente forma $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \{M \mid 0 \to A \to M \to B \to 0$ con $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}\}$.*

Lema 2.5. *La operación $- : -$ es asociativa, es decir $(\mathcal{A} : \mathcal{B}) : \mathcal{C} = \mathcal{A} : (\mathcal{B} : \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $M \in (\mathcal{A} : \mathcal{B}) : \mathcal{C}$, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta corta $0 \to X \to M \to C \to 0$ con $X \in \mathcal{A} : \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{C}$.

Pero como $X \in \mathcal{A} : \mathcal{B}$ implica que existe $0 \to A \to X \to B \to 0$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$.

Recordemos que al tener sucesiones exactas podemos ver a $B \cong X/A$ y $C \cong M/X$, Ahora notemos lo siguiente,

$0 \to X/A \to M/A$ y $\frac{M/A}{X/A} \cong M/X$ ya que $0 \to A \to X$ y $0 \to X \to M$

Con lo anterior podemos construir el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & A \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & A \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X/A \arrow[r] \arrow[d] & M/A \arrow[r] \arrow[d] & M/X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Concluimos que $M/A \in (\mathcal{B} : \mathcal{C})$, por lo cual $M \in \mathcal{A} : (\mathcal{B} : \mathcal{C})$.

Sea $M \in \mathcal{A} : (\mathcal{B} : \mathcal{C})$ entonces existe la sucesión exacta $0 \to A \to M \to X \to 0$ con $A \in \mathcal{A}$ y $X \in (\mathcal{B} : \mathcal{C})$, esto último da pié a la siguiente sucesión exacta $0 \to B \to X \to C \to 0$ donde $B \in \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{C}$. Tomemos $X \cong M/A$ y como $0 \to B \to X$, podemos decir $B \cong K/A$ con $A \leq K \leq M$, lo cual induce $C \cong M/K$. Lo anterior justifica el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M/K \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & M/K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que $A \in \mathcal{A}$ y $K/A \cong B \in \mathcal{B}$ esto implica que $K \in (\mathcal{A} : \mathcal{B})$, ademas $M/K \cong C \in \mathcal{C}$, por lo tanto $M \in (\mathcal{A} : \mathcal{B}) : \mathcal{C}$. $\square$

Proposición 2.6. *Sea $\mathcal{A}$ una clase con cero ($\{_R0\} \subseteq \mathcal{A}$), $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{ext}$ si y sólo si $\mathcal{A} : \mathcal{A} = \mathcal{A}$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ $\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{A} : \mathcal{A}$ entonces existen L, $N \in \mathcal{A}$ tal que $0 \to L \to M \to N \to 0$. Por hipótesis $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{ext}$, por lo tanto $M \in \mathcal{A}$
$\supseteq$) Si $M \in \mathcal{A}$ entonces podemos tomar la siguiente sucesión exacta $0 \to M \to M \to 0 \to 0$. Por lo tanto $M \in \mathcal{A} : \mathcal{A}$.
$\Leftarrow\rfloor$ Sean L, $N \in \mathcal{A}$ tal que $0 \to L \to M \to N \to 0$ es exacta entonces $M \in \mathcal{A} : \mathcal{A} = \mathcal{A}$. □

Observación 2.7. *Si $\mathcal{A}$ es una clase con cero entonces*
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A} : \mathcal{A}) : \mathcal{A} \subseteq ....$
Definimos. $\mathcal{A}^{:0} = \{0\}$, $\quad \mathcal{A}^{:1} = \mathcal{A}$, $\qquad \mathcal{A}^{:n+1} = (\mathcal{A}^{:n}) : \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A}^{:\infty} = \cup_{n \in N}\{\mathcal{A}^{:n}\}$.
Tenemos que $\mathcal{A}^{:0} \subseteq \mathcal{A}^{:1} \subseteq \mathcal{A}^{:2} \subseteq ... \subseteq \mathcal{A}^{:\infty}$.

Proposición 2.8. $\xi_{ext}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{:\infty}$.

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{A}^{:\infty}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que ver que A, $B \in \mathcal{A}^{:\infty}$ y $0 \to A \to M \to B \to 0$ exacta implican que $M \in \mathcal{A}^{:\infty}$.
Como A, $B \in \mathcal{A}^{:\infty}$ entonces existen i, $j \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{A}^{:i}$ y $B \in \mathcal{A}^{:j}$, por lo que entonces $M \in \mathcal{A}^{:i+j}$ por el lema **2.2**. Por lo anterior tenemos que $\xi_{ext}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^{:\infty}$, para la otra contención basta demostrar que $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{ext}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A}^{:\infty} \subseteq \mathcal{B}$. Procedemos por inducción.
Base de la inducción con $n = 1$. Sabemos que $\mathcal{A}^{:1} = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ por hipótesis.
Hipótesis de Inducción. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}^{:k} \subseteq \mathcal{B}$. P.D. $\mathcal{A}^{:k+1} \subseteq \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A}^{:k} \subseteq \mathcal{B}$ por H.I. y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A}^{:k+1} = \mathcal{A}^{:k} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} : \mathcal{B} = \mathcal{B}$ ya que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{ext}$. En conclusión $\mathcal{A}^{:\infty} \subseteq \xi_{ext}(\mathcal{A})$. □

Hasta este momento ya tenemos definidos a los siguientes generadores: $\xi_{\leq}(\mathcal{A})$, $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$, $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$ y $\xi_{ext}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ una clase de $R-mod$, ahora hablaremos del generador $\xi_E(\mathcal{A})$ para esto veamos la siguiente observación.

Observación 2.9. *Dada $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ tenemos $\xi_E(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{E(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ la menor clase cerrada bajo cápsula inyectivas que contiene a $\mathcal{A}$.*

Lema 2.10. $\xi_{\leq,E,\oplus}(\mathcal{A}) = \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$ *con* $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I\}$.

Demostración. $\leq\rfloor$ Sea $N \leq M$ con $M \in \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$ con $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I\}$ entonces $N \hookrightarrow M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$. Por lo tanto $N \in \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$ con $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I\}$.
$E\rfloor$ Sea $M \in \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$ con $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I\}$ entonces

$$\begin{tikzcd}
E(M) \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
M \arrow[u] \arrow[r, tail] & E(\bigoplus_I \{A_i\})
\end{tikzcd}$$

con f monomorfismo. Por lo tanto $E(M) \in \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$ con $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I\}$.
$\oplus\rfloor$ Sean $\{M_j\}_J \in \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus_I \{A_i\})$ con $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I\}$ entonces $\forall j \in J$ tenemos $M_j \overset{f_j}{\rightarrowtail} E(\bigoplus_{i \in \chi_j} \{A_{j,i}\})$ con $A_{j,i} \subseteq \mathcal{A}$ para cada $i \in X_j$, en consecuencia existe $f : \bigoplus_{j \in J} \{M_j\} \rightarrowtail \bigoplus_{j \in J} (E(\bigoplus_{i \in \chi_j} \{A_{j,i}\}))$. Por otra parte, recordemos que si $N_j \leq_{es} M_j$ entonces $\bigoplus_J \{N_j\} \leq_{es} \bigoplus_J \{M_j\}$. Dado que $\bigoplus_{i \in \chi_j} \{A_{j,i}\} \leq_{es} E(\bigoplus_{i \in \chi_j} \{A_{j,i}\})$ entonces $\bigoplus_J (\bigoplus_{i \in \chi_j} \{A_{j,i}\}) \leq_{es} \bigoplus_J (E(\bigoplus_{i \in \chi_j} \{A_{j,i}\}))$.
Construimos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus\limits_{j\in J}\{M_j\} \arrow[d, tail] \\
\bigoplus\limits_{J}(\bigoplus\limits_{i\in\chi_j}\{A_{j,i}\}) \arrow[r, hook, "es"'] \arrow[dr, hook, "es"'] & \bigoplus\limits_{J}(E(\bigoplus\limits_{i\in\chi_j}\{A_{j,i}\})) \arrow[d, dashed, "g"] \\
 & E(\bigoplus\limits_{J}(\bigoplus\limits_{i\in\chi_j}\{A_{j,i}\}))
\end{tikzcd}$$

la existencia de monomorfismo g se debe a que la cápsula injectiva es la mayor extensión esencial. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{j\in J}\{M_j\} \in \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{I}\{A_i\}) \text{ con } A_i \in \mathcal{A},\, i \in I\}$.

Por lo anterior $\xi_{\leq,E,\oplus}(\mathcal{A}) \subseteq \{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{I}\{A_i\}) \text{ con } A_i \in \mathcal{A},\, i \in I\}$ y es claro que $\{M \mid \exists M \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{I}\{A_i\}) \text{ con } A_i \in \mathcal{A},\, i \in I\} \subseteq \xi_{\leq,E,\oplus}(\mathcal{A})$.

$\square$

Capítulo 3

Teorías de torsión

Introducción

En este capítulo hablaremos sobre sobre clases de torsión hereditarias y libres de torsión. También veremos que entre las retículas $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ y $\mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ existe un antiisomorfismo, además demostraremos que ${}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ}) = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$.
Más adelante definiremos lo que es una teoría de torsión hereditaria y así hablar de $R-tors$. Mostraremos que $R-tors$ es seudocomplementada y distributiva. Concluiremos con un teorema que nos indica las equivalencias para que $R-tors$ sea de Boole.

3.1. Clases de torsión hereditarias y clases libres de torsión

Definición 3.1. *Para $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$, $t_{\mathcal{A}}(M)$ será el mayor submódulo de M que este contenido en $\mathcal{A}$.*

Consideremos las retículas $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ y $\mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ y las operaciones:

$$(\ )^{\circ} : \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext} \longrightarrow \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$$

$$(\ )_{\circ} : \mathcal{L}_{\leq,\prod,E} \longrightarrow \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$$

donde,

$$(\mathcal{A})^{\circ} = \{N \mid Hom(M, E(N)) = 0\, \forall M \in \mathcal{A}\}$$
$$_{\circ}(\mathcal{B}) = \{M \mid Hom(M, E(B)) = 0\, \forall B \in \mathcal{B}\}$$
$$_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ}) = \{M \mid Hom(M, E(N)) = 0\, \forall N \in \mathcal{A}^{\circ}\}$$

Lema 3.2. *Sea* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ *entonces* $\mathcal{A} = {}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ})$.

Demostración. $\subseteq\rfloor$ Supongamos que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \notin {}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ})$ entonces $Hom(A, E(N)) \neq 0$ para algún $N \in \mathcal{A}^{\circ}$, por lo que existe $0 \neq f : A \to E(N)$ pero $N \in \mathcal{A}^{\circ}$, esto significa que $Hom(M, E(N)) = 0\, \forall M \in \mathcal{A}$. Contradicción ya que $f \neq 0$.

$\supseteq\rfloor$ Supongamos que existe $M \in {}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ})$ y $M \notin \mathcal{A}$ entonces $M \neq 0$. Además $M \notin \mathcal{A}^{\circ}$, pues si $M \in \mathcal{A}^{\circ}$ y dado que $M \in {}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ})$ entonces $Hom(M, E(M)) = 0$, contradicción ya que $M \overset{i \neq 0}{\hookrightarrow} E(M)$. Así pues, $M \notin \mathcal{A}^{\circ}$ lo que significa que $Hom(A, E(M)) \neq 0$ para algún $A \in \mathcal{A}$ por lo que existe $0 \neq f : A \to E(M)$ con $A \in \mathcal{A}$, además $f(A) \in \mathcal{A}$ ya que hay un epimorfismo de A a $f(A)$ y $0 \neq f(A) \leq E(M)$. Entonces $0 \neq f(A) \cap M \in \mathcal{A}$, en consecuencia M tiene un submódulo distinto de cero en $\mathcal{A}$.

Ahora, $M \in {}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ})$ y $M \notin \mathcal{A}$ implica que $0 \neq \frac{M}{t_{\mathcal{A}}(M)} \in {}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ})$ y $\frac{M}{t_{\mathcal{A}}(M)}$ no tiene submódulos distintos de cero en $\mathcal{A}$. Contradicción. $\square$

Definición 3.3. *Una clase $\mathcal{C}$ no vacía de R-módulos se llama una clase de torsión hereditaria si es cerrada bajo $\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext$.*

Lema 3.4. *Si $\mathcal{A}$ es una clase de módulos entonces ${}_\circ(\mathcal{A}^\circ) = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$.*

Demostración. $\subseteq\rfloor$ Supongamos que ${}_\circ(\mathcal{A}^\circ) \nsubseteq \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$ entonces existe $0 \neq M \in {}_\circ(\mathcal{A}^\circ)$ y $M \notin \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$. Recordando la demostración del lema anterior tenemos que $M \notin \mathcal{A}^\circ$. Por lo que existe $0 \neq f : A \to E(M)$ con $A \in \mathcal{A}$. Además $0 \neq f(A) \cap M \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$ y $f(A) \cap M \leq M$. Con esto vemos que $t_{\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})}(M) \neq 0$. Pero $M \notin \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$ entonces $\frac{M}{t_{\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})}(M)} \neq 0$ y éste no tiene submódulos distintos de cero en $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$. Contradicción. Por lo tanto ${}_\circ(\mathcal{A}^\circ) \subseteq \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$.
$\supseteq\rfloor$ Esta desigualdad se obtiene del hecho de que $\mathcal{A} \subseteq {}_\circ(\mathcal{A}^\circ)$ y ${}_\circ(\mathcal{A}^\circ) \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ entonces $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}) \leq {}_\circ(\mathcal{A}^\circ)$. $\square$

Lema 3.5. *Sea $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ entonces $(\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}))^\circ = \mathcal{A}^\circ$.*

Demostración. $\subseteq\rfloor$ Sabemos que $\mathcal{A} \subseteq \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$, si tomamos $K \in (\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}))^\circ$ por definición $Hom(G, E(K)) = 0\,\forall G \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$ en particular esto se cumple $\forall G \in A$. Por lo tanto $(\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}))^\circ \subseteq \mathcal{A}^\circ$.
$\supseteq\rfloor$ Si $0 \neq E(N) \in \mathcal{A}^\circ$ y $E(N) \notin (\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}))^\circ$ entonces existe $M \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}) =_\circ (\mathcal{A}^\circ)$ y $0 \neq f : M \to E(N)$. Como $M \in {}_\circ(\mathcal{A}^\circ)$ por definición $Hom(M, E(N)) = 0\,\forall N \in \mathcal{A}^\circ$ esto implica que $f = 0$ Contradicción. Por lo tanto $\mathcal{A}^\circ \subseteq (\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}))^\circ$. $\square$

Lema 3.6. *Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ entonces $N \in \mathcal{A}^\circ$ si y sólo si $t_{\mathcal{A}}(N) = 0$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$Por Contradiccíon. Sea $N \in \mathcal{A}^\circ$, supongamos que $t_{\mathcal{A}}(N) \neq 0$ entonces existe $0 \neq A \in \mathcal{A}$ tal que $A \leq N$, así que $A \hookrightarrow N \hookrightarrow E(N)$, por lo que $A \hookrightarrow E(N)$. Contradicción ya que $Hom(M, E(N)) = 0\ \forall M \in \mathcal{A}$.

$\Leftarrow \rfloor$ Esta demostración se hará por contrarecíproca. Supongamos que $N \notin \mathcal{A}^{\circ}$ entonces existe $0 \neq f : A \to E(N)$ donde $A \in \mathcal{A}$. Por lo que $0 \neq f(A)$ y $N \leq_{es} E(N)$, así que $0 \neq f(A) \cap N \leq f(A)$. Y como $A \in \mathcal{A} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{A}$, en consecuencia $f(A) \cap N \in \mathcal{A}$ pero $0 \neq f(A) \cap N \leq N$. Por lo tanto $t_{\mathcal{A}}(N) \neq 0$. □

Por lo anterior podemos decir que si $\mathcal{J} \in \mathcal{L}_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}$ entonces $\mathcal{J}^{\circ} = \{M \mid t_{\mathcal{J}}(M) = 0\}$. Recordando que $t_{\mathcal{J}}(M)$ es el mayor submódulo de M que esta contenido en $\mathcal{J}$.

Proposición 3.7. *Si $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq, \prod, E}$ entonces para todo módulo $_RM$ existe $U \leq M$ tal que U es el menor submódulo de M con la propiedad de que $\frac{M}{U} \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $\{L \leq M \mid \frac{M}{L} \in \mathcal{L}\}$. La familia $\{M \overset{p_L}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{L}\}_{\frac{M}{L} \in \mathcal{L}}$ induce un morfismo $M \xrightarrow{\varphi} \prod\limits_{\frac{M}{L} \in \mathcal{L}} \{\frac{M}{L}\}$ Notemos que $\prod\limits_{\frac{M}{L} \in \mathcal{L}} \{\frac{M}{L}\} \in \mathcal{L}$. ya que $\mathcal{L}$ es cerrada bajo productos. Además $Nuc\,\varphi = \cap\{L \mid \frac{M}{L} \in \mathcal{L}\}$. Pero existe $\frac{M}{Nuc\,\varphi} \rightarrowtail \prod\limits_{\frac{M}{L} \in \mathcal{L}} \{\frac{M}{L}\}$ por el primer teorema de isomorfismo. Por lo que $\frac{M}{Nuc\,\varphi} \in \mathcal{L}$. Sea $U = Nuc\,\varphi$, que es el menor submódulo de M que produce cociente en $\mathcal{L}$. □

Observación 3.8. *Sea $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq, \prod, E}$, si $M \notin {}_{\circ}\mathcal{L}$ entonces M tiene un cociente distinto de cero en $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $M \notin_{\circ} \mathcal{L}$ entonces existe $0 \neq f : M \to E(L)$ con $L \in \mathcal{L}$ pero $0 \neq f(M) \leq E(L) \in \mathcal{L}$, por lo tanto $M \twoheadrightarrow f(M)$ con $f(M) \in \mathcal{L}$. □

Observación 3.9. *Sea $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq, \prod, E}$, si $M \notin_{\circ} \mathcal{L}$ y $M \notin \mathcal{L}$ entonces existe $0 \to V \to M \to \dfrac{M}{V} \to 0$ exacta, con $V \neq 0 \neq \dfrac{M}{V} \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Como $M \notin_\circ \mathcal{L}$ por la observación anterior tenemos $0 \neq \dfrac{M}{V} \in \mathcal{L}$ con $V \neq 0$ ya que si $V = 0$ entonces $\dfrac{M}{V} = M \in \mathcal{L}$. Contradicción por hipótesis $M \notin \mathcal{L}$. Por lo tanto existe $0 \to V \to M \to \dfrac{M}{V} \to 0$. $\square$

Proposición 3.10. *Si $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ entonces $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{ext}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ entonces $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ y supongamos que $0 \to A \to B \to C \to 0$ con $A, C \in \mathcal{L}$. Construyamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\mu"] \arrow[dr, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0 . \\
0 \arrow[r] & E(A) \arrow[r] & E(A) \oplus E(C) \arrow[r] & E(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El morfismo α existe ya que f es mono y $E(A)$ es inyectivo, $\beta = i \circ g$ y por la propirdad universal del producto existe μ morfismo tal que el diagrama conmuta. Como $E(A), E(C) \in \mathcal{L}$ entonces $E(A) \oplus E(C) \in \mathcal{L}$ además es inyectivo por ser suma directa finita de inyectivos. Por el lema del quinto μ es monomorfismo. Por lo tanto $B \in \mathcal{L}$. $\square$

Teorema 3.11. *Si $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ entonces $\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \in \mathcal{L}$, $\forall M \in R-mod$.*

Demostración. Si $M \in_\circ \mathcal{L}$ entonces $\dfrac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} = \dfrac{M}{M} = 0 \in \mathcal{L}$.

Supongamos que $M \notin_\circ \mathcal{L}$ y supongamos por contradicción que $0 \neq \dfrac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \notin \mathcal{L}$. Si suponemos que $\dfrac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \in {}_\circ\mathcal{L}$ entonces formamos la siguiente sucesión exacta $0 \to t_{\circ\mathcal{L}}(M) \to M \to \dfrac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \to 0$ pero $t_{\circ\mathcal{L}}(M), \dfrac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \in_\circ \mathcal{L}$ entonces $M \in_\circ \mathcal{L}$. Contradicción ya que $M \notin_\circ \mathcal{L}$. Por lo tanto $\dfrac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \notin_\circ \mathcal{L}$. Por la proposición 3.7 tenemos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \longrightarrow \frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \longrightarrow \frac{\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}}{\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}} \cong \frac{M}{U} \longrightarrow 0$$ donde $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}$ es el menor submódulo de $\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}$ tal que $\frac{M}{U} \in \mathcal{L}$, notemos que $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \neq 0$ ya que $\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \notin \mathcal{L}$. $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \notin \mathcal{L}$ pues $\mathcal{L}$ es cerrada bajo extensiones y $\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \notin \mathcal{L}$.

Tenemos que $t_{\circ\mathcal{L}}(M) \leq U$, así que $t_{\circ\mathcal{L}}(M) \leq t_{\circ\mathcal{L}}(U)$, pero $U \leq M$ por lo que $t_{\circ\mathcal{L}}(U) \leq t_{\circ\mathcal{L}}(M)$. Por lo tanto $t_{\circ\mathcal{L}}(M) = t_{\circ\mathcal{L}}(U)$. En consecuencia, $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} = \frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)}$ y no tiene submódulos distintos de cero en ${}_\circ\mathcal{L}$ entonces $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)} \notin_\circ \mathcal{L}$ y $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)} \notin \mathcal{L}$. Por la observación 3.9 tenemos

$$0 \longrightarrow 0 \neq \frac{V}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)} \longrightarrow \frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)} \longrightarrow \frac{\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)}}{\frac{V}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)}} \cong \frac{U}{V} \longrightarrow 0 \quad \text{con } \frac{U}{V} \in \mathcal{L}.$$

Ahora construyamos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & . \\
 & \frac{V}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)} \arrow[r, "="] \arrow[d] & \frac{V}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(U)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M}{U} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{U}{V} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M}{V} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M}{U} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Observemos que $\frac{U}{V}, \frac{M}{U} \in \mathcal{L}$ entonces $\frac{M}{V} \in \mathcal{L}$, pero $\frac{M}{V} = \dfrac{\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}}{\frac{V}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}}$ y por la elección de $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}$, tenemos que $\frac{U}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \leq \frac{V}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)}$ entonces $U \leq V$. Por lo que $U = V$ y $\frac{U}{V} = 0$. Contradicción. Por lo tanto $\frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \in \mathcal{L}$.

□

Corolario 3.12. $\mathcal{L} = ({}_\circ\mathcal{L})^\circ$ *donde* $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$.

Demostración. Es claro que $\mathcal{L} \subseteq ({}_\circ\mathcal{L})^\circ$. Si $M \in ({}_\circ\mathcal{L})^\circ$, entonces por el Lema 4.6 tenemos que $t_{\circ\mathcal{L}}(M) = 0$. Usando el teorema anterior tenemos $M \cong \frac{M}{0} \cong \frac{M}{t_{\circ\mathcal{L}}(M)} \in \mathcal{L}$. Por lo tanto $\mathcal{L} = ({}_\circ\mathcal{L})^\circ$. □

Por todo lo anterior podemos afirmar que tanto $(\,)^\circ$ como ${}_\circ(\,)$ invierten el orden, además ${}_\circ(\,) \circ (\,)^\circ = 1_{\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}}$ y $(\,)^\circ \circ {}_\circ(\,) = 1_{\mathcal{L}_{\leq,\prod,E}}$. Por lo tanto $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext} \xrightarrow[\cong]{(\,)^\circ} \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ es un antiisomorfismo de retículas completas.

3.2. Teorías de torsión hereditarias

Definición 3.13. *Si* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ *entonces* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\circ})$ *es una pareja ordenada donde* $\mathcal{A}^{\circ} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$*. A una pareja así se le llama* ***teoría de torsión hereditaria****. llamamos la clase* $\mathcal{A}$ *de torsión y* $\mathcal{A}^{\circ}$ *se llama la clase libre de torsión.*

Observación 3.14. *Si* $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}$ *entonces* $({}_{\circ}\mathcal{B}, \mathcal{B})$ *también es una teoría de torsión hereditaria, pues hemos visto que en este caso* ${}_{\circ}\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$

Definición 3.15. *Definiremos a* $R-tors = \{\tau \mid \tau$ *es una teoría de torsión hereditaria*$\}$

Definición 3.16. *Para una pareja de teorías de torsión hereditarias* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\circ}) \leq (\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\circ})$ *si y sólo si se cumple que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ *si y sólo si* $\mathcal{C}^{\circ} \subseteq \mathcal{A}^{\circ}$.

También hemos demostrado que $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}) =_{\circ} (\mathcal{A}^{\circ})$ es la menor clase de torsión hereditaria que contiene a $\mathcal{A}$.
Así $({}_{\circ}(\mathcal{A}^{\circ}), \mathcal{A}^{\circ}) = \xi(\mathcal{A})$ es la teoría de torsión hereditaria menor que contiene a $\mathcal{A}$ en su clase de torsión. Y si $\mathcal{B}$ es una clase de módulos entonces $({}_{\circ}\mathcal{B}, ({}_{\circ}\mathcal{B})^{\circ}) = \chi(\mathcal{B})$ es una teoría de torsión hereditaria, y es la mayor tal que todo elemento de $\mathcal{B}$ es libre de torsión.

Ejemplo 3.17. *En* $\mathbb{Z}-mod$ $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión hereditaria donde* $\mathbb{T} = \{M \mid o(x) < \infty \, \forall x \in M\}$ *y* $\mathbb{F} = \{M \mid o(x) = \infty \, \forall 0 \neq x \in M\}$.

Lema 3.18. *Si* $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión hereditaria y* $t_{\tau}(M)$ *denota el mayor submódulo de* M *en* $\mathbb{T}$*, entonces* $t_{\tau}(M)$ *es el menor submódulo de* M *tal que* $\frac{M}{t_{\tau}(M)} \in \mathbb{F}$.

Demostración. Por definición $t_\tau(\frac{M}{t_{\tau(M)}}) = 0$ y por el Lema 3.6. $\frac{M}{t_\tau(M)} \in \mathbb{T}^\circ = \mathbb{F}$. Supongamos que existe $N \leq M$ tal que $N < t_\tau(M)$ y $\frac{M}{N} \in \mathbb{F}$. Entonces $t_\tau(M) \twoheadrightarrow \frac{t_\tau(M)}{N}$ y como $t_\tau(M) \in \mathbb{T}$, en consecuencia $\frac{t_\tau(M)}{N} \in \mathbb{T}$. Por otra parte, como $N < t_\tau(M) \leq M$ entonces $\frac{t_\tau(M)}{N} \hookrightarrow \frac{M}{N} \in \mathbb{F}$ por lo que $\frac{t_\tau(M)}{N} \in \mathbb{F}$. Contradicción ya que $\frac{t_\tau(M)}{N} \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{F}$. Por lo tanto $t_\tau(M)$ es el menor submódulo de M tal que $\frac{M}{t_\tau(M)} \in \mathbb{F}$. $\square$

En particular: $t_\tau(\frac{M}{t_\tau(M)}) = 0$, $\frac{M}{t_\tau(M)} \in \mathbb{F}$ y si $\frac{M}{K} \in \mathbb{F}$ entonces $t_\tau(M) \leq K$.
La mayor teoría de torsión hereditaria es $(R - mod, \{0\}) = \chi$ y la menor teoría de torsión hereditaria es $(\{0\}, R - mod) = \xi$.

Definición 3.19. *Sea $\{\tau_i\}_I \subseteq R - tors$ definimos a los infimos y supremos de $R - tors$ como $\bigwedge\limits_I \tau_i$ es la teoría de torsión hereditaria con clase de torsión $\bigcap\limits_I \{\mathbb{T}_{\tau_i}\}$ y $\bigvee\limits_I \tau_i$ es la teoría de torsión hereditaria con clase de torsión $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}\left(\bigcup\limits_I \{\mathbb{T}_{\tau_i}\}\right)$ respectivamente.*

Observación 3.20. *Si $R \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria entonces $\mathbb{T} = R - mod$. Pues para todo ${}_RM$ existe $R^{(X)} \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ y como $R \in \mathbb{T}$ implica que $R^{(X)} \in \mathbb{T}$, tenemos que $M \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $\mathbb{T} = R - mod$. Así que $(\mathbb{T}, \mathbb{F}) = \chi$.*
Si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión hereditaria en $\mathbb{Z} - mod$ propia entonces $\mathbb{Z} \notin \mathbb{T}$, por lo cual si $x \in M \in \mathbb{T}$ entonces $o(x) < \infty$. (si $o(x) = \infty$ entonces $\mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z} \in \mathbb{T}$). Por lo tanto $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ del ejemplo 3.17 es la mayor teoría de torsión hereditaria propia.

Ejemplo 3.21. $\xi(\mathbb{Z}_p) = (\{M \mid es\, de\, p - torsión\}, \{M \mid no\, tiene\, elemento\, de\, orden\, p\})$.

Demostración. $\{\mathbb{Z}_p\}^\circ = \{_{\mathbb{Z}}N \mid Hom(\mathbb{Z}_p, E(N)) = 0\}$, por lo cual $E(N) = \mathbb{Q}^{(X)} \oplus (\bigoplus_{q\in P\setminus\{p\}} \{\mathbb{Z}_{q^\infty}^{(X_q)}\})$, $E(N)$ es divisible sin elementos de orden p^n. Entonces $\{\mathbb{Z}_p\}^\circ = \{N \mid \forall x \in N,\, o(x) \neq p^n \,\forall n\}$.
$_\circ(\{\mathbb{Z}_p\}^\circ) = \{M \mid Hom(M, \mathbb{Q}^{(X)} \oplus (\bigoplus_{q\in P\setminus\{p\}} \{\mathbb{Z}_{q^\infty}^{(X_q)}\})) = 0\}$.
En particular, la cápsula divisible de M no tiene copias de $\mathbb{Q}$ ni de $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ como sumandos. En consecuencia, $E(M) = \mathbb{Z}_p^{(X_p)}$. Por lo tanto M es un p-grupo. Así, $\xi(\mathbb{Z}_p) = (p - grupos,\, grupos\, sin\, elementos\, de\, orden\, p)$. □

Si $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria propia y $M \in \mathbb{T}$ entonces M es de torsión. Si $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}$ entonces todo p-grupo está contenido en $\mathbb{T}$, ya que $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_p) \subseteq \mathbb{T}$.
Recíprocamente si $M \in \mathbb{T} \subsetneq \mathbb{Z}-mod$, $\mathbb{T}$ clase de torsión hereditaria entonces $M \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_p) \vee \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_q) \vee ...$ para el conjunto de primos que dividen al orden de un elemento de algún módulo en $\mathbb{T}$.
Por lo tanto una teoría de torsión hereditaria propia en $\mathbb{Z}-mod$ es $\bigvee_{p\in A} \xi(\mathbb{Z}_p)$ con $A \subseteq P = conjunto\, de\, primos$.

Proposición 3.22. *$R - tors$ es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Tomemos $\tau \in R - tors$ entonces $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ con $\mathbb{T}$ una clase de torsión hereditaria. Sea $\mathbb{T}' = \{_RM \mid M\, \text{no tiene subcocientes} \neq 0\, \text{en}\, \mathbb{T}\}$.
$\mathbb{T}'$ es una clase de torsión hereditaria:
$\leq\rfloor$Sea $M \in \mathbb{T}'$, $N \leq M$ y $_R0 \neq L$ subcociente de N, tomando el coproducto fibrado (Pushout U) construimos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d, dashed] \\ L \arrow[r, tail] & Q \arrow[r, dashed] & U \end{tikzcd},$$

así que $L \notin \mathbb{T}'$ pues L también es un subcociente de M.

$\twoheadrightarrow\rfloor$Sea $M \in \mathbb{T}'$, $M \twoheadrightarrow K \neq 0$ y ${}_R0 \neq L$ subcociente de K, entonces
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] & K \arrow[d] \\ L \arrow[r, tail] & Q \end{tikzcd}$$
, por lo que $L \notin \mathbb{T}'$ pues L es un subcociente de M.

$ext\rfloor$ Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ con $A, C \in \mathbb{T}'$. Supongamos que $0 \neq U \in \mathbb{T}$ un subcociente de B entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "h"] & C \arrow[r] & 0\,. \\ & U \arrow[r, hook] & Q & & \end{tikzcd}$$

Observemos que $h \circ f(A)$ es isomorfo a un cociente de A, $U \cap h \circ f(A) \leq h \circ f(A)$ entonces $U \cap h \circ f(A)$ es un subcociente de A y pertenece a $\mathbb{T}$ pues $U \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{T}$ es hereditaria. Como $A \in \mathbb{T}'$ entonces $U \cap h \circ f(A) = 0_R$. Así que,
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "h"] & C \arrow[r] & 0 \\ U \arrow[r, hook] \arrow[dr, tail] & Q \arrow[d, two heads] & & & \\ & \dfrac{Q}{h \circ f(A)} & & & \end{tikzcd}$$
y por la propiedad del conúcleo existe $\alpha : C \twoheadrightarrow \frac{Q}{h \circ f(A)}$. Por lo tanto $U \in \mathbb{T}$ y es un subcociente distinto de ${}_R0$ de C. Contradicción. Por lo que $B \in \mathbb{T}'$.

$\oplus\rfloor$ Sea $\{A_i\}_I \subseteq \mathbb{T}'$y supongamos que U es un subcociente de $\bigoplus\limits_I \{A_i\}$ tal que $0 \neq U \in \mathbb{T}$ entonces
$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_I \{A_i\} \arrow[r, two heads, "f"] & Q \\ & U \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
. Sea $0 \neq x \in U$ entonces $x \in Q$, por lo que $x = f(a_{i_i}) + ... + f(a_{i_n})$ con $a_{i_j} \in A_{i_j}\ \forall j \in \{1, ..., n\}$. Observemos que

$$\begin{tikzcd} A_{i_1} \oplus ... \oplus A_{i_n} \arrow[r] & f(A_{i_1} \oplus ... \oplus A_{i_n}) \\ & 0 \neq Rx \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$ notemos que $Rx \in \mathbb{T}$ ya que $U \in \mathbb{T}$.

Por lo tanto $A_{i_1} \oplus ... \oplus A_{i_n}$ tiene un subcociente distinto de 0 en $\mathbb{T}$ contradiciendo que $\mathbb{T}'$ es cerrada bajo extensiones. En conclusión $\mathbb{T}'$ es una clase de torsión hereditaria.

Notemos que $\mathbb{T} \cap \mathbb{T}' = \{_R 0\}$ ya que si existiera $0 \neq M \in \mathbb{T}' \cap \mathbb{T}$ en particular $M \in \mathbb{T}$ y M es un subcociente de M. Por lo tanto $M \notin \mathbb{T}'$ contradicción.

Por otra parte supongamos que existe $\mathbb{S}$ clase de torsión hereditaria tal que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{_R 0\}$ y que $\mathbb{S} \subsetneq \mathbb{T}'$ entonces $\exists M \in \mathbb{S} \backslash \mathbb{T}'$ por lo que M tiene un subcociente distinto de 0 en $\mathbb{T}$, este subcociente está en $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ así que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{0\}$ contradicción. Por lo tanto $\mathbb{T}'$ corresponde a la teoría de torsión hereditaria que es el seudocomplemento fuerte de τ en $R - tors$.

$\square$

Observación 3.23. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus ext}$ y de acuerdo con la definición 3.19 definimos $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} = \xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \{_R M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N \, con \, 0 \neq A \in \mathcal{B} \, ó \, A \in \mathcal{C}\}$. Por lo que $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ es la menor clase de torsión hereditaria que contiene a $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.*

Proposición 3.24. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus ext}$ entonces $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$.*

Demostración. $\supseteq \rfloor$ Es clara

$\subseteq \rfloor$ Sea $M \in \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ y $M \twoheadrightarrow N \neq 0$, N tiene un submódulo $X \neq 0$ en $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ y $X \in \mathcal{A}$ pues $M \in \mathcal{A}$. Así que si $X \in \mathcal{B}$ entonces $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y si $X \in \mathcal{C}$ implica que $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$. Por lo tanto cualquier cociente distinto de cero de M tiene un submódulo distinto de cero en $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$.

□

Por lo anterior, concluimos que $R-tors$ es distributiva ya que las clases de torsión hereditarias lo son también.

Definición 3.25. *Una teoria τ de torsión hereditaria es de tipo simple si $\tau = \bigvee_{\mathcal{A}} \xi(S)$ con $\mathcal{A} \subseteq R-simp$.*

Ejemplo 3.26. $\xi(\{R-simp\}) = (\{semiartinianos\}, \{Módulos\, sin\, submódulos\, simples\})$ *es la Teoría de torsión de Dickson.*

Teorema 3.27. *Son equivalentes*

1. *R es semiartiniano*
2. *Toda teoría de torsion hereditaria es de tipo simple.*
3. *χ es de tipo simple.*
4. *Toda teoría de torsión hereditaria tiene un complemento en $R-tors$.*
5. *Un seudocomplemento de una teoría de torsión hereditaria es un complemento.*
6. *$R-tors$ es de Boole.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 3) Como R es semiartiniano entonces $R \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(R-simp)$ por lo cual $\xi(R-simp) = \xi(R) = \chi$.

3) $\Rightarrow$ 1) Tenemos que $R \in \mathbb{T}_\chi = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ un conjunto de simples. Por lo cual todo cociente de R no nulo tiene un submódulo simple en $\mathcal{A}$. Por lo tanto R es semiartiniano.

3) $\Rightarrow$ 2) Recordemos que $\chi = (R - mod, \{0\})$ y por hipótesis es de tipo simple entonces $\forall_R M \neq 0$ es semiartiniano es decir, $\forall M \twoheadrightarrow L \neq 0$, $\exists K \rightarrowtail L$ con $K \in R - simp$. Sea $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría de torsión hereditaria. Por demostrar que $\mathbb{T} = \xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\{_R H \mid H\, simple,\, H \in \mathbb{T}\})$.

$\subseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbb{T}$ y por hipótesis es semiartiniano entonces $\forall M \twoheadrightarrow N \neq 0$, $\exists S \rightarrowtail N$ con S simple, además $S \in \mathbb{T}$ ya que $M \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $M \in \xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\{_R H \mid H\, simple,\, H \in \mathbb{T}\})$

$\supseteq\rfloor$ Sabemos que si $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{T}$ entonces $\xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{T}$ y dado que $\{_R H \mid H\, simple,\, H \in \mathbb{T}\} \subseteq \mathbb{T}$. Por lo tanto $\xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\{_R H \mid H\, simple,\, H \in \mathbb{T}\}) \subseteq \mathbb{T}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Esto es cierto ya que por hipótesis toda teoria de torsión hereditaria es de tipo simple en partícular χ.

2) $\Rightarrow$ 4) Si τ es una teoría de torsión hereditaria por hipótesis $\tau = \xi(\mathcal{A})$ con $0 \neq \mathcal{A} \subseteq R - simp$. Sea $\mathcal{B} = R - simp \backslash \{\mathcal{A}\}$. $\xi(\mathcal{A}) \wedge \xi(\mathcal{B}) = \xi$ de lo contrario tendriamos que $M \in \mathbb{T}_{\xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\mathcal{A})} \cap \mathbb{T}_{\xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus, ext}(\mathcal{B})}$ para algún M distinto de cero entonces los subcocientes simples de M estarían en $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, contradicción. Además $\chi = \xi(R - simp) \leqslant \xi(\mathcal{A}) \vee \xi(\mathcal{B})$.

4) $\Rightarrow$ 5) Digamos que τ tiene complemento τ' y sea $\tau^{\perp}$ su seudocomplemento. Entonces $\tau \wedge \tau' = \xi$ por ser $\tau^{\perp}$ un seudocomplemento fuerte de τ tenemos $\tau' \leq \tau^{\perp}$. Por otro lado, $\tau^{\perp} = \tau^{\perp} \wedge \chi = \tau^{\perp} \wedge (\tau \vee \tau') = \xi \vee (\tau^{\perp} \wedge \tau') = \tau^{\perp} \wedge \tau' = \tau'$. Por lo tanto, $\tau^{\perp} = \tau'$.

5) $\Rightarrow$ 4) Esto se cumple ya que $R - tors$ es seudocomplementada.

4) $\Leftrightarrow$ 6) Ya que $R - tors$ es distributiva.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea $\xi(R - simp) = \tau_D$ por hipótesis tiene complemento γ que cumple $\tau_D \vee \gamma = \chi$ y $\tau_D \wedge \gamma = \xi$. Si $\gamma \neq \xi$ entonces existe $0 \neq M \in \gamma$ pero M tendría

un subcociente simple ${}_RS$. En consecuencia $\xi(S) \leq \tau_D \wedge \gamma = \xi$, contradicción. Por lo cual $\gamma = \xi$ y así $\tau_D = \chi$. Por lo tanto $R \in \mathbb{T}_{\tau_D}$ esto significa que R es semiartiniano. $\square$

Capítulo 4

Prerradicales

Introducción

Iniciaremos con la definición de prerradical para definir la clase de pretorsión y la clase libre de pretorsión. Hablaremos de las clases $R-pr, R-pid, R-pei$ y $R-rei$ que corresponde a la clase de los radicales exactos izquierdos. Demostraremos que existe una biyección entre $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}, \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}, \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ y $R-pid, R-pei, R-rei$ respectivamente. También demostraremos que $\mathcal{L}_{\leq,\prod}, \mathcal{L}_{\leq,\prod,E}, \mathcal{L}_{\leq,\prod,ext,E}$ y $R-rad, R-rid, R-rei$ existe una biyección respectivamente.

Posteriormente, dado que existe la biyección entre $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ y $R-rei$ veremos que si $R=\mathbb{Z}$ entonces para todo $r\neq \underline{1}$ radical exacto izquierdo en $\mathbb{Z}-mod$ $r=\vee\{t_{\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_p)} \mid \mathbb{Z}_p\in\mathbb{T}_r\}$. Y concluiremos con mostrar que $|\mathbb{Z}-rei|=|\mathbb{R}|$.

Definición 4.1. *Un prerradical r es un funtor $r: R-mod\to R-mod$, tal que satisface las siguientes condiciones:*

1. Para $\forall M \in R-mod\ r(M) \leq_R M$.

2. Para todo morfismo $f :_R M \to_R N$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} r(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r(f)=f(r(M))"'] & M \arrow[d, "f"] \\ r(N) \arrow[r, hook] & N \end{tikzcd}$$

es decir, $f(r(M)) \leq r(N)$.

Ejemplo 4.2.

1. Zoc es un prerradical, ya que $Zoc(M) \leq M$ y $f : M \to N$ morfismo tenemos que $f(Zoc(M)) \leq Zoc(N)$

2. Z definido por $Z(M) = \{x \in M \mid (0 : x) \leq_{es} R\}$, $Z(M)$ es un submódulo de M ya que $0 \in Z(M)$ pues $(0 : 0) = R \leq_{es} R$, además si $x, y \in Z(M)$ podemos ver que $x + y \in Z(M)$. Para comprobar esto recordemos las siguientes proposiciones:

   Proposición 4.3. *Si $I, J \leq_{es} R$ entonces $I \cap J \leq_{es} R$*

   Demostración. Por hipótesis, $\forall 0 \neq H \leq R$, $I \cap H \neq 0$ y $J \cap H \neq 0$. Ahora $(I \cap J) \cap H = I \cap (J \cap H)$ y como $0 \neq J \cap H \leq R$, entonces $I \cap (J \cap H) \neq 0$. $\square$

   Proposición 4.4. *Si $I \leq_{es} R$ e $I \leq J \leq R$ entonces $J \leq_{es} R$.*

Demostración. Por hipótesis $\forall 0 \neq H \leq R$ se tienen que $I \cap H \neq 0$. Como $I \leq J$ implica $0 \neq I \cap H \leq J \cap H$ entonces $0 \neq J \cap H$, por lo tanto $J \leq_{es} R$. $\square$

Con esto ya podemos demostrar que $x + y \in Z(M)$. Sean $x, y \in z(M)$ por definición $(0 : x), (0 : y) \leq_{es} R$ así que $(0 : x) \cap (0 : y) \leq_{es} R$. Observemos que $(0 : x) \cap (0 : y) \subseteq (0 : x + y)$ (pues si $\alpha \in (0 : x) \cap (0 : y)$ esto significa que $\alpha x = 0 = \alpha y \Rightarrow \alpha x + \alpha y = \alpha(x + y) = 0$ entonces $\alpha \in (0 : x + y)$). Usando la proposición anterior tenemos que $(0 : x + y) \leq_{es} R$. Por lo tanto $x + y \in Z(M)$.

Veamos ahora que si $x \in Z(M)$ entonces $rx \in Z(M) \forall r \in R$. $(0 : rx) = \{s \mid srx = 0\} = \{s \mid sr \in (0 : x)\} = ((0 : x) : r)$. Para ver que esto es esencial, basta demostrar que si ${}_RI \leq_{es} R$ entonces $(I : r) \leq_{es} R \forall r \in R$.
Supongamos que ${}_RI \leq_{es} R$ y $(I : r)$ no es esencial en R. Entonces $\exists 0 \neq J \leq R$ tal que $(I : r) \cap J =_R 0$. Si $x \in Jr \cap I$ entonces $x \in I$ y $x = jr$ p.a. $j \in J$, por lo que $j \in (I : r)$ y $j \in J$. Pero como $(I : r) \cap J = 0$ entonces $j = 0$ en consecuencia $x = 0$. Por lo tanto $Jr \cap I =_R 0$ pero I es esencial, así que $Jr =_R 0 \leq I$. Esto muestra que $J \subseteq (I : r)$. Por lo tanto $J = J \cap (I : r) =_R 0$ contradiciendo que supusimos que $J \neq 0$. Concluimos que $(I : r) \leq_{es} R$. Por lo tanto si $x \in Z(M)$ entonces $rx \in Z(M)$.

Ahora, si f es un morfismo tal que $f : M \to N$ y $x \in Z(M)$ entonces $(0 : x) \leq_{es} R$. Observemos que $f((0 : x) \cdot x) = f(0) = 0$ y que entonces $0 = f((0 : x) \cdot x) = (0 : x) \cdot f(x)$. Por lo tanto $(0 : x) \leq (0 : f(x))$. Así que $f(x) \in Z(N)$. Con esto hemos demostrado que Z es un prerradical.

3. *Rad*, definido por $Rad(M) = \cap\{N \leq M \mid N\, es\, máximo\, en\, M\}$. Para ver que Rad es un prerradical, demostraremos unas cuantas proposiciones.

Proposición 4.5. $Rad(M) = \sum\{U \leq M \mid U \ll M\}$.

Demostración. $\supseteq\rfloor$Si $U \ll M$ y $N \leq_{máx} M$ entonces $U \leq N$. Si no : $N \lneqq U + N$ y como $N \leq_{máx} M$, entonces $U + N = M$. Pero por hipótesis $U \ll M$ en consecuencia $N = M$, contradicción.

$\subseteq\rfloor$Si $x \in N$ $\forall N \leq_{máx} M$, entonces $Rx \ll M$.
Si nó, $Rx + U = M$ con $U \lneqq M$ entonces $\frac{M}{U} = \frac{Rx+U}{U} \cong \frac{Rx}{Rx\cap U}$ por el segundo teorema de isomorfismos, notemos que $\frac{Rx}{Rx\cap U}$ es cíclico por ser cociente de un cíclico, asi que tiene un máximo. Por lo que $\frac{M}{U}$ tiene un máximo $((\mathfrak{M}/U) \Rightarrow U \leq \mathfrak{M} \leq_{máx} M)$ entonces $M = Rx + U \leq Rx + \mathfrak{M}$=$\mathfrak{M}$ (esta igualdad se da ya que x está contenido en cualquier máximo, en particular $x \in \mathfrak{M}$). Por lo tanto $M = \mathfrak{M}$ y esto es una contradicción. Así que $Rx \ll M$. □

Lema 4.6. *Si $A \ll B$ y $B \leq M$ entonces $A \ll M$.*

Demostración. Supongamos que $A + U = M$, como $B = B \cap M = B \cap (A + B) = (B \cap A) + (B \cap U) = A + (B \cap U)$ y por hipótesis $A \ll B$ entonces $B = B \cap U$, por lo cual $B \leq U$. Pero $M = A + U \leq B + U = U$, por lo tanto $M = U$ y así demostramos que $A \ll M$. □

Lema 4.7. *Sea $A \ll M$ y $f : M \to N$ entonces $f(A) \ll N$.*

Demostración. Por el Lema anterior se puede suponer que f es un epimorfismo. Sea $U \leq N$ tal que $f(A) + U = N$ para un epimorfismo $M \overset{f}{\twoheadrightarrow} N$. $M = f^{-1}(N) = f^{-1}(f(A) + U)$, notemos que $f^{-1}(f(A) + U) = A + f^{-1}(U)$, sea $x \in f^{-1}(f(A) + U)$ entonces $f(x) \in f(A) + U$ así que $f(x) = f(a) + u$ para algún $a \in A$ y $u \in U$, entonces $u = f(x) - f(a) = f(x - a)$, por lo cual $x - a \in f^{-1}(U)$ en consecuencia $x \in A + f^{-1}(U)$. Para la otra contención $f(A + f^{-1}(U)) = f(A) + f(f^{-1}(U)) = f(A) + U$, por lo tanto $A + f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(f(A) + U)$. Por lo anterior, $M = A + f^{-1}(U)$ y como $A \ll M$ entonces $M = f^{-1}(U)$ en consecuencia $N = U$. Por lo tanto $f(A) \ll N$.

□

Proposición 4.8. *Si r es un prerradical entonces r conmuta con sumas directas, es decir, $r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i \in I} r(M_i)$.*

Demostración. $\leq\rfloor$ Como r es un prerradical, tenemos el siguiente diagrama, $r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i) \hookrightarrow \bigoplus\limits_{i \in I} M_i \xrightarrow{p_i} M_i$ donde p_i es $i - \acute{e}sima$ proyección, además $p_i(r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i)) \leq r(M_i)\, \forall i \in I$. Entonces $\bigoplus\limits_{i \in I} p_i(r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i)) = r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i) \leq \bigoplus\limits_{i \in I} r(M_i)$.
$\geq\rfloor$ Tenemos que $\{M_i\}_{i \in I}$ es independiente entonces $\{r(M_i)\}_{i \in I}$ es independiente, por lo que $\bigoplus\limits_{i \in I} r(M_i) = \sum\limits_{i \in I} r(M_i) \hookrightarrow r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i)$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i \in I} r(M_i) \leq r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i)$. □

Definición 4.9. *Sea r un prerradical definimos la clase de pretorsión de r $\mathbb{T}_r = \{M \mid r(M) = M\}$ y la clase libre de pretorsión $\mathbb{F}_r = \{M \mid r(M) = 0\}$.*

Proposición 4.10. $\mathbb{T}_r \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow, \oplus}$.

Demostración. Sea $M \in \mathbb{T}_r$ y $f : M \twoheadrightarrow N$. Por definición de prerradical tenemos que $f(r(M)) \leq r(N)$ pero $r(M) = M$ implica $f(M) \leq r(N)$, además

f es epi entonces $N \leq r(N)$. Por lo tanto $r(N) = N$ y con esto demostramos que $\mathbb{T}_r \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$.
Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}_r$, esto significa que $r(M_i) = M_i \, \forall i \in I$, además sabemos que r conmuta con sumas directas por lo que $r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$. Por lo tanto $\mathbb{T}_r \in \mathcal{L}_{\oplus}$. □

Proposición 4.11. $\mathbb{F}_r \in \mathcal{L}_{\leq,\prod}$.

Demostración. Sean $M \in \mathbb{F}_r$ y $N \overset{i}{\hookrightarrow} M$, entonces $i(r(N)) \leq r(M)$ Así que $r(N) \leq r(M) = 0$. Por lo tanto $r(N) = 0$ y así $\mathbb{F}_r \in \mathcal{L}_{\leq}$.
Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{F}_r$, así que $r(M_i) = 0 \, \forall i \in I$. Observemos que para la proyección $p_i : \prod\limits_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow M_i$, tenemos que $p_i(r(\prod\limits_{i\in I} M_i)) \leq r(M_i) = 0 \, \forall i \in I$. Por lo tanto $r(\prod\limits_{i\in I} M_i) = 0$, por lo que $\mathbb{F}_r \in \mathcal{L}_{\prod}$. □

Definición 4.12. *$R - pr = \{r \mid r$ es un prerradical$\}$.*
Definimos el orden en $R - pr$ como $r \leq s$ si $r(M) \leq s(M)$ $\forall M \in R - mod$. Los prerradicales se pueden componer: $(r \circ s)(M) = r(s(M))$ además $r(s(M)) \leq s(M) \leq M$.

Definición 4.13. *Un prerradical es idempotente si $r \circ r = r$.*

Ejemplo 4.14. *Si $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$ entonces $t_{\mathcal{C}}(M) = \sum\{N \leq M \mid N \in \mathcal{C}\}$ es un prerradical idempotente ya que $t_{\mathcal{C}}(M) \leq M$ por definición. Si $f : M \to K$ es un morfismo, como $t_{\mathcal{C}}(M) = \sum\{N \leq M \mid N \in \mathcal{C}\}$ entonces $f(t_{\mathcal{C}}(M)) = \sum\{f(N) \mid N \in \mathcal{C}\}$. Dado que $N \in \mathcal{C}$ implica que $f(N) \in \mathcal{C}$, en consecuencia se tiene que $\sum\{f(N) \mid N \in \mathcal{C}\} \leq \sum\{L \leq K \mid L \in \mathcal{C}\} = t_{\mathcal{C}}(K)$. Por lo que, $f(t_{\mathcal{C}}(M)) \leq t_{\mathcal{C}}(K)$ y así $t_{\mathcal{C}}$ es un prerradical. Además $t_{\mathcal{C}}(t_{\mathcal{C}}(M)) = t_{\mathcal{C}}(M)$ ya que $t_{\mathcal{C}}(M) \in \mathcal{C}$.*

Definición 4.15. *Una clase $\mathcal{C}$ no vacia de R-módulos se llama una clase de pretorsión si es cerrada bajo $\twoheadrightarrow$, $\oplus$.*

Teorema 4.16. *Hay una correspondencia biyectiva que preserva el orden entre prerradicales idempotentes ($R-pid$) y las clases de pretorsión $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$, dada por $R-pid \longleftrightarrow \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$ donde $\mathbb{T}_r = \{M \mid r(M) = M\}$.*

$$r \longmapsto \mathbb{T}_r$$

$$t_{\mathcal{C}} \longleftarrow\!\shortmid\, \mathcal{C}$$

Demostración. Para demostrar esto basta demostrar que si $r \in R-pid$ entonces $r = t_{\mathbb{T}_r}$ y si $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$ entonces $\mathcal{C} = \mathbb{T}_{t_{\mathcal{C}}}$.
Si $M \in R-mod$ y $r \in R-pid$ por definición $r(r(M)) = r(M)$ entonces $r(M) \in \mathbb{T}_r$ pero $t_{\mathbb{T}_r}(M) = \sum\{N \leq M \mid N \in \mathbb{T}_r\}$. Por lo tanto $r(M) \leq t_{\mathbb{T}_r}(M)$.
Recordemos que $t_{\mathbb{T}_r}(M) \leq M$, además $t_{\mathbb{T}_r}(M) \in \mathbb{T}_r$ entonces $t_{\mathbb{T}_r}(M) = r(t_{\mathbb{T}_r}(M)) \leq r(M)$ y así $t_{\mathbb{T}_r}(M) \leq r(M)$.
Si $M \in \mathcal{C}$ entonces $t_{\mathcal{C}}(M) = M$, por lo que $M \in \mathbb{T}_{t_{\mathcal{C}}}$. Por otra parte, si $M \in \mathbb{T}_{t_{\mathcal{C}}}$ implica que $t_{\mathcal{C}}(M) = M$ y así $M \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C} = \mathbb{T}_{t_{\mathcal{C}}}$.
Sean $r, s \in R-pid$ con $r \leq s$ y $M \in \mathbb{T}_r$ entonces $M = r(M) \leq s(M)$ así que $s(M) = M$, en consecuencia $M \in \mathbb{T}_s$. Por lo tanto $\mathbb{T}_r \subseteq \mathbb{T}_s$. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Tomemos $M \in R-mod$ entonces $t_{\mathcal{A}}(M) \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y por definición de $t_{\mathcal{C}}$ implica que $t_{\mathcal{A}}(M) \leq t_{\mathcal{C}}(M)$. Por lo tanto $t_{\mathcal{A}} \leq t_{\mathcal{C}}$. $\square$

Definición 4.17. *Un prerradical r es exacto izquierdo si dada una sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ entonces la sucesión $0 \to r(A) \to r(B) \to r(C)$ es exacta.*

Denotaremos con $R-pei$ la clase de los prerradicales exactos izquierdos.

Lema 4.18. *Son equivalentes para r un prerradical.*

1) r es exacto izquierdo.

2) Si $N \leq M$ entonces $r(N) = r(M) \cap N$.

3) r es idempotente y $\mathbb{T}_r \in \mathcal{L}_{\leq}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por hipótesis tenemos que

$$0 \longrightarrow N \overset{i}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow r(N) \overset{i_|}{\hookrightarrow} r(M) \xrightarrow{\pi_|} r(M/N)$$

Notemos que $Nuc(\pi_|) = r(M) \cap Nuc(\pi) = r(M) \cap N$. Además $Nuc(\pi_|) = Im(i_|) = r(N)$. Por lo tanto $r(N) = r(M) \cap N$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ por demostrar que $0 \to r(A) \overset{f_|}{\to} r(B) \overset{g_|}{\to} r(C)$ es exacta. Sabemos que la restricción de un monomorfismo es monomorfismo y también que $f(r(A)) \leq r(B)$ por ser r prerradical. Falta ver que $Im\, f_| = Nuc\, g_|$. Tenemos que $Nuc\, g_| = Nuc\, g \cap r(B) = Im\, f \cap r(B) = f(r(A))$

Observemos que
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\cong"] & f(A) \\ r(A) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"] & r(f(A)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
. Por lo que $r(f(A)) = f(r(A))$ pero $f(r(A)) = Imf_|$. Por lo tanto r es exacto izquierdo.

2) $\Rightarrow$ 3) Como $r(M) \leq M$ entonces $r(r(M)) = r(M) \cap r(M) = r(M)$. Por lo tanto r es idempotente.

Sea $N \leq M$ y $M \in \mathbb{T}_r$ entonces $r(N) = r(M) \cap N = M \cap N = N$, en conclusión $r(N) = N$.

3) $\Rightarrow$ 2) Por hipótesis r es idempotente, entonces $r(M) \in \mathbb{T}_r$. Además $\mathbb{T}_r \in$

$\mathcal{L}_{\leq}$ implica que $N \cap r(M) \in \mathbb{T}_r$, es decir $r(N \cap r(M)) = N \cap r(M)$.

Por otra parte, $N \cap r(M) \leq N$. Así que $r(N \cap r(M)) \leq r(N)$, además $r(N) \leq N$ y si $N \leq M$ entonces $r(N) \leq r(M)$, por lo que $r(N) \leq N \cap r(M) = r(N \cap r(M))$ y por doble desigualdad tenemos $r(N) = r(N \cap r(M)) = N \cap r(M)$. Por lo tanto $r(N) = N \cap r(M)$. $\square$

Definición 4.19. *r es un radical si r es un prerradical y $r(M/r(M)) = 0$ $\forall M \in R - mod$.*

Proposición 4.20. *Si $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ entonces $t_{\mathcal{C}}$ es un radical exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ entonces $t_{\mathcal{C}}$ es un prerradical exacto izquierdo. Sólo falta demostrar que es un radical. Tomemos $M \in R - mod$ y formemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t_{\mathcal{C}}(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & \dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & t_{\mathcal{C}}(M) \arrow[r] & \pi^{-1}\left(t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right)\right) \arrow[r, "\pi|"] \arrow[u, hook] & t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $t_{\mathcal{C}}(M)$ y $t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right) \in \mathcal{C}$ entonces $\pi^{-1}\left(t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right)\right) \in \mathcal{C}$ pero $\pi^{-1}\left(t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right)\right) \leq M$ así que $\pi^{-1}\left(t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right)\right) = t_{\mathcal{C}}(M)$. Por lo tanto $t_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}\right) = 0$. $\square$

Proposición 4.21. *Si r es un radical entonces $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Supongamos que tenemos la siguiente sucesión exacta

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ con $A, C \in \mathbb{T}_r$ por demostrar que $B \in \mathbb{T}_r$. Construimos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} & & r(B) \arrow[d, hook] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\overline{\gamma}"] & 0 \\ & & \dfrac{B}{r(B)} & & \end{tikzcd}$$

Como $A \in \mathbb{T}_r$ y $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo cocientes entonces $\gamma \circ \alpha(A) \in \mathbb{T}_r$ donde $\gamma \circ \alpha(A) \subseteq \frac{B}{r(B)}$. Pero $\gamma \circ \alpha(A) = r(\gamma \circ \alpha(A)) \subseteq r(\dfrac{B}{r(B)}) = 0$. Por lo que $\gamma \circ \alpha = 0$ y por la propiedad del conúcleo existe $\overline{\gamma} : C \twoheadrightarrow \dfrac{B}{r(B)}$. Recordemos que $C \in \mathbb{T}_r$, esto implica que $\dfrac{B}{r(B)} \in \mathbb{T}_r$. Entonces $\dfrac{B}{r(B)} = r(\dfrac{B}{r(B)}) = 0$. Por lo tanto $r(B) = B$ es decir $B \in \mathbb{T}_r$. $\square$

Proposición 4.22. *Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow, \oplus}$, si $\mathcal{C}$ cerrada bajo extensiones entonces $t_{\mathcal{C}}$ es un radical.*

Demostración. Supongamos que $t_{\mathcal{C}}(\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}) \neq 0$ entonces sea $0 \neq \dfrac{T}{t_{\mathcal{C}}(M)}$ el mayor submódulo de $\dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)}$ en $\mathcal{C}$, construimos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & t_{\mathcal{C}}(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & \dfrac{M}{t_{\mathcal{C}}(M)} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & t_{\mathcal{C}}(M) \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[u, hook] & \dfrac{T}{t_{\mathcal{C}}(M)} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $t_{\mathcal{C}}(M)$, $\dfrac{T}{t_{\mathcal{C}}(M)} \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones entonces $T \in \mathcal{C}$ pero $T \leq M$. Por lo tanto $\dfrac{T}{t_{\mathcal{C}}(M)} = 0$. Contradicción. □

Con esto demostramos que hay una biyección entre $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ y $R - rei$ (la clase de los radicales exactos izquierdos). En conclusión tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus} \arrow[r, leftrightarrow] & R - pid \\
\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u, hook] & R - pei \arrow[u, hook] \\
\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u, hook] & R - rei \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C} \longmapsto t_{\mathcal{C}}$$

$$\mathbb{T}_r \longleftarrow\!\shortmid\; r$$

Definición 4.23. *Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod}$ definimos $r^{\mathcal{C}}(M) = men\{N \leq M \mid M/N \in \mathcal{C}\}$.*

Proposición 4.24. *$r^{\mathcal{C}}(M)$ está bien definido y es un prerradical.*

Demostración. Para demostrar que $r^{\mathcal{C}}(M)$ está bien definido recordemos la porposición 4.7 donde se demustra esto. Ahora demostraremos que $r^{\mathcal{C}}$ es un prerradical, por definición $r^{\mathcal{C}}(M) \leq M$. Sea $f : M \to N$ por demostrar que $f(r^{\mathcal{C}}(M)) \leq r^{\mathcal{C}}(N)$, es equivalente a probar que $r^{\mathcal{C}}(M) \subseteq f^{-1}(r^{\mathcal{C}}(N))$. Como $r^{\mathcal{C}}(M)$ es el menor submódulo de M tal que $M/r^{\mathcal{C}}(M) \in \mathcal{C}$, bastará demostrar que $M/f^{-1}(r^{\mathcal{C}}(N)) \in \mathcal{C}$. Notemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(r^{\mathcal{C}}(N)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & r^{\mathcal{C}}(N) \arrow[d, hook] \\
M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
\frac{M}{f^{-1}(r^{\mathcal{C}}(N))} \arrow[r, "\overline{f}"] & \frac{N}{r^{\mathcal{C}}(N)}
\end{tikzcd}$$

Sea $\overline{m} \in Nuc\,\overline{f}$ por definición $\overline{f(m)} = \overline{0}$ entonces $f(m) \in r^{\mathcal{C}}(N)$ implica que $m \in f^{-1}(r^{\mathcal{C}}(N))$, por lo que $\overline{m} = \overline{0}$ y así $\overline{f}$ es mono.

Por lo tanto $M/f^{-1}(r^{\mathcal{C}}(N)) \in \mathcal{C}$ y concluimos que $r^{\mathcal{C}}$ es un prerradical. □

Proposición 4.25. *$r^{\mathcal{C}}$ es un radical.*

Demostración. Por definición de $r^{\mathcal{C}}$ tenemos $M/r^{\mathcal{C}}(M) \in \mathcal{C}$ entonces $\dfrac{M/r^{\mathcal{C}}(M)}{\{0\}} \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $r^{\mathcal{C}}(M/r^{\mathcal{C}}(M)) = 0$. □

Lema 4.26. *Si r es un radical y $N \leq r(M)$ entonces $r(\dfrac{M}{N}) = \dfrac{r(M)}{N}$.*

Demostración. Como $N \leq r(M)$ construimos la siguiente sucesión $r(\dfrac{M}{N}) \hookrightarrow \dfrac{M}{N} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \dfrac{M}{r(M)}$, así que $r(\dfrac{M}{N}) \subseteq Nuc\,\pi = \dfrac{r(M)}{N}$.

Por otra parte, dada la siguiente sucesión exacta $N \hookrightarrow M \overset{f}{\twoheadrightarrow} \dfrac{M}{N}$ donde f es la proyección y como r es radical entonces $f(r(M)) = \dfrac{r(M)}{N} \leq r(\dfrac{M}{N})$. Por lo tanto $r(\dfrac{M}{N}) = \dfrac{r(M)}{N}$. □

Teorema 4.27. *Hay una biyección entre $R-rad$ (la clase de los radicales) y $\mathcal{L}_{\leq,\prod}$ que invierte el orden dada por,* $R-rad \longrightarrow \mathcal{L}_{\leq,\prod}$

$$r \longmapsto \mathbb{F}_r$$

$$r^{\mathcal{C}} \longleftarrow\!\shortmid \mathcal{C}$$

Demostración. Basta demostrar que las correspondecias son inversas una de la otra e invierten el orden, es decir $\mathcal{C} = \mathbb{F}_{r^{\mathcal{C}}}$ y $r = r^{\mathbb{F}_r}$.

Sea $M \in \mathcal{C}$ entonces $\dfrac{M}{\{0\}} \in \mathcal{C}$, por lo que $r^{\mathcal{C}}(M) = 0$. Por lo tanto $M \in \mathbb{F}_{r^{\mathcal{C}}}$.

Si $M \in \mathbb{F}_{r^{\mathcal{C}}}$ entonces $r^{\mathcal{C}}(M) = 0$ y así $\dfrac{M}{\{0\}} \in \mathcal{C}$, en consecuencia $M \in \mathcal{C}$.

Sea $M \in R-mod$ y $r \in R-rad$ entonces $M/r(M) \in \mathbb{F}_r$, por lo que $r^{\mathbb{F}_r}(M) \leq r(M)$ y por el Lema 4.26 tenemos que $0 = r(\dfrac{M}{r^{\mathbb{F}_r}(M)}) = \dfrac{r(M)}{r^{\mathbb{F}_r}(M)}$.

Por lo tanto $r = r^{\mathbb{F}_r}$ y con esto hemos demostrado que hay una biyección entre $R-rad$ y $\mathcal{L}_{\leq,\prod}$ las clases libres de pretorsión.

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod}$ tal que $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ y $M \in R-mod$ entonces $\dfrac{M}{r^{\mathcal{C}}(M)} \in \mathcal{C}$, en consecuencia $\dfrac{M}{r^{\mathcal{C}}(M)} \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $r^{\mathcal{D}}(M) \leq r^{\mathcal{C}}(M)$.

Sean $r, s \in R-rad$ tal que $r \leq s$ y $M \in \mathbb{F}_s$ entonces $r(M) \leq s(M) = 0$, por lo que $r(M) = 0$ y así $M \in \mathbb{F}_r$. □

Proposición 4.28. *Existe una biyección que invierte el orden entre $\mathcal{L}_{\leq,\prod,ext}$ y $R-rid$. Dada por $\mathcal{L}_{\leq,\prod,ext} \longrightarrow R-rid$ donde $R-rid$ es la clase de los*

$$\mathcal{C} \longmapsto r^{\mathcal{C}}$$

$$\mathbb{F}_r \longleftarrow r$$

radicales idempotentes.

Demostración. Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,ext}$ por demostar que el menor submódulo de $r^{\mathcal{C}}(M)$ que produce cociente en $\mathcal{C}$ es $r^{\mathcal{C}}(M)$. Tomemos $N \leq r^{\mathcal{C}}(M)$ tal que $\dfrac{r^{\mathcal{C}}(M)}{N} \in \mathcal{C}$, formemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, hook] & & & \\
r^{\mathcal{C}}(M) \arrow[d, two heads] & & & \\
\dfrac{r^{\mathcal{C}}(M)}{N} \arrow[r, hook] & \dfrac{M}{N} \arrow[r, two heads] & \dfrac{M/N}{r^{\mathcal{C}}(M)/N} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \dfrac{M}{r^{\mathcal{C}}(M)}
\end{tikzcd}$$

Observemos que $\dfrac{r^{\mathcal{C}}(M)}{N}, \dfrac{M}{r^{\mathcal{C}}(M)} \in \mathcal{C}$ entonces $\dfrac{M}{N} \in \mathcal{C}$. Por lo cual $N \geq r^{\mathcal{C}}(M)$. Por lo tanto $r^{\mathcal{C}}(M) = N$ y así demostramos que $r^{\mathcal{C}}(r^{\mathcal{C}}(M)) = r^{\mathcal{C}}(M)$ es decir $r^{\mathcal{C}}$ es idempotente.

Ahora supongamos que $r \in R-rid$ solo tendríamos que demostrar que $\mathbb{F}_r \in \mathcal{L}_{ext}$, es decir, dada una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \dfrac{B}{A} \longrightarrow 0$ con $A, \dfrac{B}{A} \in \mathbb{F}_r$ por demostrar que $B \in \mathbb{F}_r$.

Caso 1) Si $A \cap r(B) = 0$ entonces tenemos el siguiente diagrama donde $f = \beta \circ i$

$$\begin{tikzcd}
 & & r(B) \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, dashed, "f"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & \dfrac{B}{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$Nuc\, f = Nuc\, \beta \cap r(B) = Im\, \alpha \cap r(B) = A \cap r(B) = 0$, lo que significa que f es mono entonces $r(B) \in \mathbb{F}_r$ y r es idempotente. Por lo que $r(B) = r(r(B)) = 0$. Por lo tanto $B \in \mathbb{F}_r$.

Caso 2) Si $A \cap r(B) \neq 0$ formemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \cap r(B) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & r(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \dfrac{r(B)}{A \cap r(B)} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \dfrac{A + r(B)}{A} \arrow[d, hook] \\
A \arrow[r, hook, "\alpha"] & B \arrow[rr, two heads, "\beta"] & & \dfrac{B}{A}
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\beta(r(B)) \hookrightarrow \dfrac{B}{A}$ con $\dfrac{B}{A} \in \mathbb{F}_r$ ya que este es cerrado bajo submódulos entonces $\beta(r(B)) \in \mathbb{F}_r$.

Por otra parte $r(r(B)) = r(B)$ entonces $r(B) \in \mathbb{T}_r$ pero $\mathbb{T}_r$ es cerrado bajo cocientes, en consecuencia $\beta(r(B)) \in \mathbb{T}_r$. Por lo que $\beta(r(B)) \in \mathbb{T}_r \cap \mathbb{F}_r$. Así que $\beta(r(B)) = 0$ esto implica $r(B) \leq Nuc\,\beta = Im\,\alpha = A$ pero $A \in \mathbb{F}_r$ entonces $r(B) \in \mathbb{F}_r$, además $r(r(B)) = r(B)$ implica que $r(B) \in \mathbb{T}_r$. Por lo tanto $r(B) = 0$ Contradicción ya que $A \cap r(B) \neq 0$. $\square$

Proposición 4.29. *Existe una biyección que invierte el orden entre* $\mathcal{L}_{\leq,\prod,ext,E}$ *y* $R-rei$*. Dada por* $\mathcal{L}_{\leq,\prod,ext,E} \longrightarrow R-rei$ *donde* $R-rei$ *es la clase de*

$$\mathcal{C} \longmapsto r^{\mathcal{C}}$$

$$\mathbb{F}_r \longleftarrow\!\shortmid\, r$$

radicales exactos izquierdos.

Demostración. Dada $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,ext,E}$ queremos demostrar que $r^{\mathcal{C}} \in R-rei$, para esto utilizaremos la equivalencia del Lema 4.18 entonces basta demostrar que $r^{\mathcal{C}}$ es idempotente y $\mathbb{T}_{r^{\mathcal{C}}}$ es hereditaria. $r^{\mathcal{C}}$ es idempotente ya que en particular $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,ext}$.

Sea $M \in \mathbb{T}_{r^{\mathcal{C}}}$ y $N \leq M$, supongamos que $K \leq N$ tal que $\dfrac{N}{K} \in \mathcal{C}$. Formemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ \dfrac{N}{K} \arrow[r, hook] & E\left(\dfrac{N}{K}\right) \end{tikzcd}$$

conmutativo, donde φ existe ya que $E\left(\dfrac{N}{K}\right)$ es inyectivo, además $E\left(\dfrac{N}{K}\right) \in \mathcal{C}$ ya que $\dfrac{N}{K} \in \mathcal{C}$.

Por otra parte $Im\,\varphi \leq E\left(\dfrac{N}{K}\right)$ entonces $Im\,\varphi \in \mathcal{C}$, pero $M \in \mathbb{T}_{r^{\mathcal{C}}}$, en consecuencia $Im\,\varphi \in \mathbb{T}_{r^{\mathcal{C}}}$. Por lo que $Im\,\varphi \in \mathbb{T}_{r^{\mathcal{C}}} \cap \mathcal{C}$ esto significa que $Im\,\varphi = r^{\mathcal{C}}(Im\,\varphi) = \{0\}$ entonces $\dfrac{N}{K} = 0$ así que $N = K$. Por lo tanto $r^{\mathcal{C}}(N) = N$ con esto concluimos que $r^{\mathcal{C}} \in R-rei$.

Sea $r \in R-rei$ entonces r es un radical idempotente, por lo que $\mathbb{F}_r \in \mathcal{L}_{\leq,\prod,ext}$ falta demostrar que $\mathbb{F}_r \in \mathcal{L}_E$.

Recordemos que r es exacto izquierdo es equivalente a que $\forall N \leq M\ r(N) = r(M) \cap N$. Utilizando esto con la cápsula inyectiva de M tenemos que $r(M) = M \cap r(E(M))$.

Sea $M \in \mathbb{F}_r$ por definición $r(M) = 0$ y por lo anterior $0 = r(M) = M \cap r(E(M))$ pero $M \leq_{es} E(M)$ entonces $r(E(M)) = 0$. Por lo tanto $E(M) \in \mathbb{F}_r$. □

4.1. Prerradicales en $\mathbb{Z} - mod$

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \cdot \_ : \mathbb{Z} - mod \longrightarrow \mathbb{Z} - mod$ es un radical cohereditario,

$$M \longmapsto nM$$

es decir, $n \cdot \_$ es un radical y la clase $\mathbb{F}_{n\cdot\_}$ es cerrada bajo cocientes.

Primero demostraremos que $n \cdot \_$ es un prerradical, claramente $nM \leq M$. Sea $f :_{\mathbb{Z}} M \rightarrow_{\mathbb{Z}} N$ entonces $f(nM) = nf(M) \leq nN$.

Por otra parte $n(\dfrac{M}{nM}) = \dfrac{nM + nM}{nM} = 0$. Por lo tanto, $n \cdot \_$ es un radical.

Ya solo falta ver que $\mathbb{F}_{n\cdot\_} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$. Sea $M \in \mathbb{F}_{n\cdot\_}$ y $f :_{\mathbb{Z}} M \twoheadrightarrow_{\mathbb{Z}} N$ entonces $nN = nf(M) = f(nM) = f(0)$, por lo que $N \in \mathbb{F}_{n\cdot\_}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ definimos $An_n : \mathbb{Z} - mod \longrightarrow \mathbb{Z} - mod$.

$$M \longmapsto An_n(M) = \{x \in M \mid nx = 0\}$$

Proposición 4.30. *An_n es un prerradical exacto izquierdo.*

Demostración. Es claro que $An_n(M) \leq M$. Sea $f :_{\mathbb{Z}} M \to_{\mathbb{Z}} N$ entonces $nf(An_n(M)) = f(n \cdot An_n(M)) = f(0) = 0$, por lo que $f(An_n(M)) \leq An_n(N)$ y así demostramos que An_n es un prerradical.
Observemos que $An_n(An_n(M)) = \{x \in An_n(M) \mid nx = 0\} \subseteq An_n(M)$. Ahora tomemos $x \in An_n(M)$ entonces $nx = 0$, en consecuencia $x \in An_n(An_n(M))$. Por lo tanto An_n es idempotente.
$\mathbb{T}_{An_n} = \{M \mid An_n(M) = M\} = \{M \mid nM = 0\}$, por lo tanto $\mathbb{T}_{An_n}$ es una clase de pretorsión hereditaria esto significa que An_n es un prerradical exacto izquierdo. $\square$

Proposición 4.31. *An_n no es un radical.*

Demostración. Supongamos que An_n es un radical, entonces $An_n \in \mathbb{Z} - rei$, en consecuencia $\mathbb{T}_{An_n} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$. Tomemos la siguiente sucesión exacta. $0 \longrightarrow 2\mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \dfrac{\mathbb{Z}_4}{2\mathbb{Z}_4} \longrightarrow 0$ notemos que $2\mathbb{Z}_4$ y $\dfrac{\mathbb{Z}_4}{2\mathbb{Z}_4} \in \mathbb{T}_{An_2}$ pero $\mathbb{Z}_4 \notin \mathbb{T}_{An_2}$. $\square$

4.2. Clases de torsión hereditarias en $\mathbb{Z} - mod$

Definición 4.32. *Sea r un prerradical si $r = \underline{1}$ si y solo si $r(M) = M$ $\forall_R M$.*

Observación 4.33. *Sea r un prerradical en general $r = \underline{1}$ si y sólo si $R \in \mathbb{T}_r$.*

$\Rightarrow\rfloor$ $r = \underline{1}$ entonces $r(R) = \underline{1}(R) = R$. Por lo tanto $R \in \mathbb{T}_r$.
$\Leftarrow\rfloor$ Si $R \in \mathbb{T}_r$ entonces $R^{(X)} \in \mathbb{T}_r$ y como todo ${}_RM$ es un cociente de un módulo libre entonces todo ${}_RM$ pertenece a $\mathbb{T}_r$. Por lo tanto $r = \underline{1}$.
Si $0 \neq r \neq \underline{1}$ es un radical exacto izquierdo en $\mathbb{Z}-mod$ entonces $r(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z} \Rightarrow r(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ya que $r(\mathbb{Z})$ es in ideal de $\mathbb{Z}$.

Proposición 4.34. *Si $r \neq \underline{1}$ radical exacto izquierdo y $r(M) = M$ entonces M es de torsión (es decir, todos sus elementos son de orden finito).*

Demostración. Si $\exists x \in M$ tal que $o(x) = \infty$ entonces $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}x \hookrightarrow M \in \mathbb{T}_r$, en consecuencia $\mathbb{Z}x \in \mathbb{T}_r$ implica $r(\mathbb{Z}x) = \mathbb{Z}x$. Por lo tanto $r(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Contradicción ya que $r \neq \underline{1}$. □

Denotemos $t(M) = \{x \in M \mid o(x) < \infty\}$ y $\underline{1} \neq r \in R-rei$. $\forall_{\mathbb{Z}}M$, $r(M) \in \mathbb{T}_r$ ya que r es idempotente esto significa que $r(M) \leq t(M)$. Por lo tanto $r \leq t$ y $\mathbb{T}_r \subseteq \{M \mid M\, es\, de\, torsión\}$.
En conclusión t es el mayor de los radicales exactos izquierdos propios.
Sea $\mathbb{Z}_n \in \mathbb{T}_r$ si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ entonces $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$. Además si $\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}} \in \mathbb{T}_r$ si y solo si $\mathbb{Z}_{p_i} \in \mathbb{T}_r$.
$\Rightarrow\rfloor$ Si $\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}} \in \mathbb{T}_r$ entonces existe $f : \mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{p_i}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_{p_i} \in \mathbb{T}_r$.
$\Leftarrow\rfloor$ Si $\mathbb{Z}_{p_i} \in \mathbb{T}_r$ tomamos la siguiente sucesión exacta $0 \to \mathbb{Z}_{p_i} \to \mathbb{Z}_{p_i^2} \to \dfrac{\mathbb{Z}_{p_i^2}}{\mathbb{Z}_{p_i}} \cong \mathbb{Z}_{p_i} \to 0$. Como $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo extensiones entonces $\mathbb{Z}_{p_i^2} \in \mathbb{T}_r$ y esto lo hacemos hasta llegar a la $\alpha_i - esima$ potencia.
Por lo tanto r está determinado por sus subgrupos simples de torsión, es decir, si $M \in \mathbb{T}_r$ y $p|o(x)$ para algun $x \in M$ entonces $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r$ con p primo.

Proposición 4.35. *Si r es un radical exacto izquierdo en $\mathbb{Z}-mod$ entonces $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. Veamos primero que si $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r$ entonces $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \mathbb{T}_r$. Tomemos la siguiente sucesión $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \to \dfrac{\mathbb{Z}_{p^2}}{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}_p \to 0$ por hipótesis $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r$ y $\mathbb{T}_r$ es cerrado bajo extensiones entonces $\mathbb{Z}_{p^2} \in \mathbb{T}_r$. Por inducción $\mathbb{Z}_{p^n} \in \mathbb{T}_r \, \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \mathbb{T}_r$.
Supongamos que $r \neq \underline{1}$ y $M \in \mathbb{T}_r$ entonces $\forall x \in M$ $o(x) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Sea $Q = \{p \mid p \, \text{es primo y} \, p|o(x) \, \text{p.a.} x \in M\}$ entonces $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r \, \forall p \in Q$. Por lo que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \mathbb{T}_r$ $\forall p \in Q$ además $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X)} \in \mathbb{T}_r$ y $\bigoplus\limits_{p \in Q} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)} \in \mathbb{T}_r$ para algunos conjuntos X_p. Pero $E(M) = \bigoplus\limits_{p \in Q} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)}$. Por lo tanto $E(M) \in \mathbb{T}_r$. □

En conclusión si r es un radical exacto izquierdo en $\mathbb{Z}-mod$, $M \in \mathbb{T}_r$ si y sólo si $\mathbb{Z}x \in \mathbb{T}_r$ $\forall x \in M$. Por lo tanto r está determinado por sus cíclicos de torsión.

Proposición 4.36. *Si r es un radical exacto izquierdo y $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r$ entonces todo $p-grupo$ está contenido en $\mathbb{T}_r$.*

Demostración. Sea ${}_{\mathbb{Z}}H$ un $p-grupo$ por definición si $x \in H$ entonces $o(x) = p^n$ p.a. $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ y como $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r$ implica que $\mathbb{Z}_{p^n} \in \mathbb{T}_r$. Por lo tanto $H \in \mathbb{T}_r$. □

Si p es un primo, $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_p) = \{M \mid M \, es \, un \, p-grupo\}$. Denotaremos $t_{\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_p)} = t_p$.
Por lo anterior podemos describir a todo $r \neq \underline{1}$ radical exacto izquierdo en $\mathbb{Z}-mod$ como $r = \vee\{t_p \mid \mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r\}$ y $\mathbb{T}_r = \{M \mid o(x) \, \text{es divisible por primos} \, p \, \forall x \in M$ tal que $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{T}_r\}$.

Ejemplo 4.37. $(t_2 \vee t_3)({}_{\mathbb{Z}}M) = \{x \in M \mid o(x) = 2^i \cdot 3^j \, p.a \, i, j \in \mathbb{N}\}$. *Y así $M \in \mathbb{T}_r$ si y sólo si $o(x) = 2^i \cdot 3^j$ $\forall x \in M$.*

Por lo tanto, hay una correspondencia biyectiva entre los radicales exactos izquierdos propios y subconjuntos del conjunto de primos, es decir, si $P = \{p \mid p\, es\, un\, primo\}$ entonces $|\{r \mid r$ es un radical exacto izquierdo propio en $\mathbb{Z} - mod\}| = |\wp(P)| = |\wp(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Por lo tanto $|\mathbb{Z} - rei| = |\mathbb{R}|$.

Capítulo 5

Átomos en retículas de clases de grupos abelianos

Inrtoducción

Dada la teoría mostrada en los anteriores capítulos ahora nos enfocaremos en analizar los átomos de las siguientes retículas $\mathcal{L}_{\leq}$, $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$, $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ y $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ con $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

Se tienen las siguientes descripciones de los seudocomplementos $\mathcal{A}^{\perp_{\leq}} = \{M \mid_R M\, no\, tiene\, subm\acute{o}dulos\, \neq 0\, en\, \mathcal{A}\}$.

$\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{M \mid_R M\, no\, tiene\, cocientes\, \neq 0\, en\, \mathcal{A}\}$.

$\mathcal{A}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}} = \{M \mid_R M\, no\, tiene\, subcocientes\, \neq 0\, en\, \mathcal{A}\}$. Es fácil ver que estos seudocomplementos son fuertes.

Observación 5.1. *Recordemos algunas caraterísticas de los seudocomplementos fuertes.*

1. *Si* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ *entonces* $\mathcal{A}^{\perp_{\leq}} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$
2. *Si* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ *entonces* $\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,ext}$ *y es cerrada bajo sumas directas de simples.*
3. *Si* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ *entonces* $\mathcal{A}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$

Definición 5.2. *Sea* $\mathcal{L}$ *una retícula con elemento menor 0 y* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$*. Decimos que* $\mathcal{A}$ *es un átomo de* $\mathcal{L}$ *si este es mínimo en* $\mathcal{L}\backslash\{0\}$*.*

Definición 5.3. *Sea* $\mathcal{L}$ *una retícula con elemento mayor 1 y* $\mathcal{B} \in \mathcal{L}\backslash\{1\}$*. Decimos que* $\mathcal{B}$ *es un coátomo de* $\mathcal{L}$ *si este es máximo en* $\mathcal{L}\backslash\{1\}$*.*

5.1. Átomos en $\mathcal{L}_{\leq}(\mathbb{Z})$

Si $\mathcal{A}$ un átomo en $\mathcal{L}_{\leq}(\mathbb{Z})$ entonces $\mathcal{A} \neq \{0\}$ y $\mathcal{A} = \xi_{\leq}(M)$ $\forall 0 \neq M \in \mathcal{A}$ ya que $0 \neq \xi_{\leq}(M) \leq \mathcal{A}$ y como $\mathcal{A}$ es átomo entonces $\mathcal{A} = \xi_{\leq}(M)$.
En particular, si N, $M \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ entonces $\xi_{\leq}(N) = \xi_{\leq}(M)$, lo que muestra que N se sumerge en M y M se sumerge en N. Sea $0 \neq M \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ átomo. Si $0 \neq N \leq M$ entonces $\exists M \rightarrowtail N$, por lo tanto M se sumerge en cualquiera de sus submódulos $\neq_R 0$.
Consideremos los siguientes casos.
Caso 1)
Si M tiene un elemento de orden finito entonces M también tiene un elemento de orden primo, por lo tanto M tiene un submódulo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ y como $\exists M \rightarrowtail \mathbb{Z}_p$ entonces $M \cong \mathbb{Z}_p$.
En este caso $\mathcal{A} = \xi_{\leq}(M) = \xi_{\leq}(\mathbb{Z}_p) = \{0, \mathbb{Z}_p\}$
Caso 2)

Si M no tiene elementos de orden finito y $0 \neq x \in M$ entonces $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}x \hookrightarrow M$ y como $M \rightarrowtail \mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z}$, tenemos que $M \cong n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. En este caso $\mathcal{A} = \xi_{\leq}(\mathbb{Z}) = \{0, \mathbb{Z}\}$.

Definición 5.4. *Si M es no nulo y se sumerge en cada uno de sus submódulos distintos de cero, M se llama comprimible.*

Los comprimibles para $\mathbb{Z} - mod$ son $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}$.

5.2. Átomos en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$

Sea $\mathcal{A}$ un átomo en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$ entonces $\mathcal{A} = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ $\forall 0 \neq M \in \mathcal{A}$.
Si M, $N \in \mathcal{A} \backslash \{0\}$ entonces $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(N) = \mathcal{A}$, por lo tanto M es un cociente de N. En particular, M es un cociente de cualquiera de sus cocientes distintos de cero (M es cocomprimible). Sea $0 \neq M \in \mathcal{A}$.
Consideremos los casos:
Caso 1) Si M tiene un cociente simple entonces $M \in \mathcal{A} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z}_p) = \{0, \, \mathbb{Z}_p\}$, por lo tanto $M \cong \mathbb{Z}_p$
Caso 2) Si M no tiene cocientes simples entonces M no tiene submódulos máximos, lo que muestra que M es divisible.
En este caso, M es de torsión, pues si existe $x \in M$ tal que $o(x) = \infty$ entonces,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "es"] \arrow[dr, hook] & \mathbb{Q} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

donde $\exists \varphi : \mathbb{Q} \to M$ monomorfismo por la divisibilidad de M y porque $\mathbb{Z}$ es esencial en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ es un sumando directo de M entonces $M \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$

Pero existe
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \mathbb{Z}_{p^\infty} \\ & & \mathbb{Z}_{q^\infty} \end{tikzcd}$$
. Contradicción, porque $\mathcal{A}$ es un átomo y no hay morfismos distinto de cero entre $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathbb{Z}_{q^\infty}$.

Por lo tanto, M es divisible de torsión, así que $M \cong \bigoplus_{p \in P} (\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)})$. Como M genera un átomo entonces $M \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)}$ que tiene a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ como cociente.

$\therefore \mathcal{A} = \xi_{\twoheadrightarrow}(M) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ así que $\exists \mathbb{Z}_{p^\infty} \twoheadrightarrow M$.

Por lo tanto $M \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

En conclusión, los átomos en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$ son:

$$\left.\begin{array}{rcl} \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z}_p) & = & \{0, \mathbb{Z}_p\} \\ \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) & = & \{0, \mathbb{Z}_{p^\infty}\} \end{array}\right. \text{ con } p \text{ primo.}$$

5.3. Átomos en $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$

Si $\mathcal{A}$ es un átomo en $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$ entonces $\mathcal{A} = \xi_{\twoheadrightarrow,\leq}(M)$ $\forall 0 \neq M \in \mathcal{A}$.

Notemos que $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(M) = \{A \mid \exists M \twoheadrightarrow U \; y \; A \rightarrowtail U\}$.

Como $0 \neq M$ entonces existe $0 \neq Rx \hookrightarrow M$, que por ser cíclico tiene un cociente simple S. Así tenemos
$$\begin{tikzcd} M & \\ Rx \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & S \end{tikzcd}$$
. Por el coproducto fibrado tenemos el siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] & U \\ & S \arrow[u] \end{tikzcd}$$
.

Por lo tanto, $\mathcal{A} = \xi_{\twoheadrightarrow,\leq}(S) = \{0,\, S\}$ con S simple en $\mathcal{A}$. En particular los átomos en $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$ son de la forma $\{0,\, \mathbb{Z}_p\}$.

5.4. Átomos en $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z})$

En general $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ está determinada por sus cíclicos.

Proposición 5.5. *Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ entonces $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si $Rx \in \mathcal{C}$ $\forall x \in M$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ $Rx \leq M$ y $M \in \mathcal{C}$ entonces $Rx \in \mathcal{C}$.

$\Leftarrow\rfloor$Sea $\{Rx_i\}$ una familia independiente máxima de submódulos cíclicos de M que pertenece a $\mathcal{C}$ (que existe por el Lema de Tukey). Entonces tenemos:

$$\begin{tikzcd} \oplus\{Rx_i\} \arrow[r, hook, "es"] \arrow[dr, "es"'] & M \arrow[r, hook, "es"] & E(M) \arrow[dl, "\cong"] \\ & E(\oplus\{Rx_i\}) & \end{tikzcd}$$

De donde se tiene que, $M \leq E(M) \cong E(\oplus\{Rx_i\}) \in \mathcal{C}$. $\therefore M \in \mathcal{C}$. $\square$

Si $\mathcal{A}$ es un átomo entonces $\mathcal{A} = \xi_{\leq,\oplus,E}(Rx)\ \forall x \neq 0,\ x \in M,\ M \in \mathcal{A}$.

Notemos que si $\mathcal{A}$ es un átomo, entonces $\forall N,\ M \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, $N \in \xi_{\leq,\oplus,E}(M) = \{U \mid \forall 0 \neq A \hookrightarrow U, \exists Rx \hookrightarrow A\, con\, 0 \neq Rx \rightarrowtail M\}$. Así que cualesquiera dos módulos no nulos N y M en un átomo comparten un submódulo cíclico distinto de cero.

Para el caso de $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z})$. Si $\mathcal{A}$ es un átomo, $\mathcal{A} = \xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z}x)$. Consideremos los casos.

Caso 1) Si x es de orden finito entonces $\mathbb{Z}x$ contiene una copia de $\mathbb{Z}_p$ para algún primo p. Así que $\mathcal{A} = \xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z}_p) = \{{}_{\mathbb{Z}}M \mid \forall 0 \neq N \leq M, \mathbb{Z}_p \rightarrowtail N\} = \{{}_{\mathbb{Z}}M \mid zoc_p(M) \leq_{es} M\}$.

Así que existe un conjunto X tal que $(\mathbb{Z}_p)^{(X)} = zoc_p(M) \leq_{es} M$. Entonces $E(\mathbb{Z}_p^{(X)}) \cong E(M)$. Denotaremos $p-divisible$ a los módulos que son de p-torsión y divisibles. Así que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{M \mid E(M)\, es\, p-divisible\} \\ &= \{M \mid M\, es\, p-torsión\}. \end{aligned}$$

Caso 2) Si todos los elementos de M son de orden infinito entonces
$\mathcal{A} = \xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z}) = \xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Q}) = \{M \mid M\, es\, libre\, de\, torsi\acute{o}n\}$.

5.5. Átomos en $\mathbb{Z} - tors$

Teorema 5.6. *En general, si* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ *entonces*
$\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}) = \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\ 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$.

Demostración. Para empezar, notemos que $\mathcal{A} \subseteq \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$.
Sea $M \in \mathcal{A}$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ con $N \neq 0$, entonces $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ implica que $N \in \mathcal{A}$, como $N \rightarrowtail N$, tenemos que existe $0 \neq N = A \in \mathcal{A}$ tal que $A \rightarrowtail N$.
Veamos ahora que $\{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ cumple las propiedades de ser cerrado bajo $\leq, \twoheadrightarrow, ext, \oplus$
$\leq\rfloor$ Sea $M \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ y $L \hookrightarrow M$, supongamos que X es un cociente de L distinto de cero, es decir, $L \twoheadrightarrow X$ y por el coproducto fibrado tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, tail, "\varphi"] & Y \\
\varphi^{-1}(A) \arrow[u, hook] & A \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Observemos que $A \hookrightarrow Y$ se debe a que $M \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$, por lo que $0 \neq A \in \mathcal{A}$. Además $\varphi(X) \hookrightarrow Y$.
Caso 1) Si $\varphi(X) \leq_{es} Y$. Entonces $0 \neq \varphi(X) \cap A \in \mathcal{A}$, por lo que $X \cap \varphi^{-1}(A) \neq 0$ pero $X \cong \varphi(X)$ ya que φ es mono, así que $X \cap \varphi^{-1}(A) \cong \varphi(X) \cap A$. Por

lo tanto $X \cap \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ y $X \cap \varphi^{-1}(A) \hookrightarrow X$.

Caso 2) Si $\varphi(X)$ no es esencial en Y. Sea Z un seudocomplemento de $\varphi(X)$ en Y, entonces $\varphi(X) \oplus Z \leq_{es} Y$, por lo que

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi\prime"'] & Y \arrow[d, two heads] \\
 & \frac{Y}{Z} \\
 & A \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

notemos que $A \hookrightarrow \dfrac{Y}{Z}$ ya que $M \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ y que $\varphi\prime(X) \underset{es}{\rightarrowtail} \dfrac{Y}{Z}$ regresando al caso anterior. Por lo tanto $L \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$.

$\twoheadrightarrow\rfloor$ Sea $M \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ y $g:\, M \twoheadrightarrow U$. Queremos ver que $U \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$

Sea $f\,:\,U \twoheadrightarrow L$ entonces $M \overset{g}{\twoheadrightarrow} U \overset{f}{\twoheadrightarrow} L$ esto indica que $M \overset{f \circ g}{\twoheadrightarrow} L$ y por hipótesis $M \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ entonces existe $0 \neq A \in \mathcal{A}$ tal que $A \rightarrowtail L$, por lo tanto $U \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$

$ext\rfloor$ Sean $A, C \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ tal que $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$ P.D. $B \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$

Supongamos que $f:\, B \twoheadrightarrow B_1 \neq 0$, ahora tomemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & & B_1 & &
\end{tikzcd}$$

Caso 1) Si $f \circ \alpha \neq 0$ entonces $A \twoheadrightarrow Im(f \circ \alpha)$. Por la hipótesis sobre A existe $0 \neq K \in \mathcal{A}$ tal que $K \rightarrowtail Im(f \circ \alpha) \hookrightarrow B_1$, por lo tanto $K \rightarrowtail B_1$.

Caso 2) Si $f \circ \alpha = 0$. Por la propiedad universal del conúcleo $\exists h : C \to B_1$ tal que $h \circ \beta = f$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\
 & & B_1 & &
\end{tikzcd}$$

Pero f es epi entonces h es epi. Y por la hipótesis de C existe $0 \neq K \in \mathcal{A}$ tal que $K \rightarrowtail B_1$.

$\oplus\rfloor$ Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria con $M_i \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ $\forall i \in I$. Tomemos $0 \neq f : \bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \twoheadrightarrow N$ entonces existe $j \in I$ tal que $f \circ i_j \neq 0$, por lo cual tenemos
$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \arrow[r, two heads, "f"] & N \\
M_j \arrow[u, hook, "i_j"] \arrow[ur, "f|_{M_j}"'] &
\end{tikzcd}$$
, observemos que existe un epimorfismo dado por $M_j \xrightarrow{f|_{M_j}} f(M_j)$, además $f(M_j) \hookrightarrow N$ y como $M_j \in \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists A \rightarrowtail N\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}$ entonces existe $0 \neq A \in \mathcal{A}$ tal que $A \rightarrowtail f(M_j)$. Por lo tanto $A \rightarrowtail N$.

$\square$

Si recordamos que los átomos en $\mathcal{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathbb{Z})$ son de la forma $\{0, \mathbb{Z}_p\}$ con p primo entonces los átomos en $\mathbb{Z} - tors$ están generados por $\mathbb{Z}_p$ es decir,

$\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathbb{Z}_p) = \{_{\mathbb{Z}}M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists\, \mathbb{Z}_p \rightarrowtail N\}$ y esta es la clase de los grupos de $p - torsión$

Observación 5.7. $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(R - simp) = \{_R M \mid \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists\, S \rightarrowtail N\, con\, S \in R - simp\}$ *esta es la definición de los semiartinianos.*

Entonces para el caso de $\mathbb{Z}$. $_{\mathbb{Z}}M$ es semiartiniano si y sólo si $_{\mathbb{Z}}M$ es de torsión.

Capítulo 6

$\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ es átomica si $R = \mathbb{Z}$

Anteriormente ya hemos definido lo que es un átomo en una retícula, ahora veremos el concepto de una retícula átomica. En este capitulo, el objetivo es demostrar que $\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ es átomica y coátomica si $R = \mathbb{Z}$ pero antes mostraremos que $R-nat$ es de complementada y distributiva.

Definición 6.1. *Una retícula es átomica si* $\forall 0 \neq b \in \mathcal{L}$, *existe* a *átomo tal que* $a \leq b$.

Definición 6.2. *Una retícula es coátomica si* $\forall 0 \neq b \in \mathcal{L}$, *existe* a *coátomo tal que* $b \leq a$.

Observación 6.3. *Si* $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$ *es un átomo entonces* $\mathcal{C} \neq \{0\}$ *y* $\mathcal{C} = \xi_{\leq,\oplus,E}(M)$ $\forall 0 \neq M \in \mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ existe una menor clase natural que contiene $\mathcal{A}$ la cual es: $\xi_{\leq,\oplus,E}(\mathcal{A}) = \{M \mid M \rightarrowtail E(\bigoplus_{i\in I}\{A_i\}) \,\text{con}\, A_i \in \mathcal{A}\}$.
Si $R = \mathbb{Z}$ entonces ${}_{\mathbb{Z}}M$ es un grupo abeliano y si M tiene un elemento de orden finito, entonces tiene un elemento de orden p con p primo. Por lo que

$\mathbb{Z}_p \hookrightarrow M$. Si $\mathcal{C}$ es una clase natural donde hay módulos que no son libres de torsión, existen módulos simples en $\mathcal{C}$.
Así, en este caso $\{M \mid M \text{ es un grupo de p-torsión}\} = \xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z}_p) \leq \mathcal{C}$.
Si $\mathcal{C}$ consta de puros grupos abelianos libres de torsión, entonces $\mathbb{Q} \in \mathcal{C}$ ya que $0 \neq x \in M \Rightarrow \mathbb{Z}x \leq M \in \mathcal{C}$ pero $\mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z} \overset{es}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$, por lo tanto $\mathbb{Q} \in \mathcal{C}$.
$\xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Q}) = \{M \mid \exists M \rightarrowtail \mathbb{Q}^{(X)} \text{ para algun conjunto } X\}$, por lo que $\mathcal{C} = \{_{\mathbb{Z}}M \mid M \text{ es libre de torsión}\}$ y este es un átomo. Por lo tanto $\mathbb{Z}-nat$ es átomica con átomos: $\{\xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z}_p) \mid p \text{ es primo}\} \cup \{\xi_{\leq,\oplus,E}(\mathbb{Z})\}$.
Ya hemos visto que $Skel(\mathcal{L}_{\leq}) = Skel(\mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}) = \mathcal{L}_{\leq,\oplus,E}$. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos clases naturales definimos $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \{M \mid \forall 0 \neq N \leq M, \exists 0 \neq Rx \leq N \, con \, Rx \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}\}$.

Proposición 6.4. *Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq,\oplus E}$ entonces $\mathcal{C} \vee \mathcal{C}^{\perp_{\leq}} = R-mod$.*

Demostración. Sea $_RM \neq 0$ y $\{U_i\}_I$ una familia independiente máxima de submódulos de M que están en $\mathcal{C}$, además $\bigoplus_{i\in I}\{U_i\} \in \mathcal{C}$ y $E(\bigoplus_{i\in I}\{U_i\}) \in \mathcal{C}$ entonces $\bigoplus_{i\in I}\{U_i\} \leq M$ y $E(\bigoplus_{i\in I}\{U_i\}) \hookrightarrow M$, (podemos suponer que M es inyectivo), por lo que M tiene un sumando directo en $\mathcal{C}$ y es inyectivo(C). Así que $M = C \oplus D$. D no tiene submódulos distintos de cero en $\mathcal{C}$, si los tuviera $Rx \neq 0$ sería uno de ellos entonces $\{U_i\}_I \cup \{Rx\}$ y esta seria una familia independiente de submódulos de M en $\mathcal{C}$ contradición ya que $\{U_i\}_I$ era máxima. Por lo tanto $D \in \mathcal{C}^{\perp_{\leq}}$. En conclusión todo $_RM = C \oplus D$ con $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{C}^{\perp_{\leq}}$. □

Esto afirma que toda clase natural es complemento de su seudocomplemento.

Proposición 6.5. *$R-nat$ es distributiva, es decir, sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ clases naturales entonces $\mathcal{C} \wedge (\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) = (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \vee (\mathcal{C} \wedge \mathcal{E})$.*

Demostración. $\leq\rfloor$Por contradición. Supongamos que $M \in \mathcal{C}\wedge(\mathcal{D} \vee \mathcal{E})$ pero $M \notin (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \vee (\mathcal{C} \wedge \mathcal{E})$, entonces M tiene un submódulo $N \neq 0$ que no tiene submódulos en $(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \cup (\mathcal{C} \wedge \mathcal{E})$. Como $M \in \mathcal{C}$, esto significa que N (que pertenece a $\mathcal{C}$) no tienen submódulos en $\mathcal{D}$ ni en $\mathcal{E}$ pero esto contradice que $M \in \mathcal{C}\wedge(\mathcal{D} \vee \mathcal{E})$. Por lo tanto $\mathcal{C}\wedge(\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) \subseteq (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \vee (\mathcal{C} \wedge \mathcal{E})$.
$\geq\rfloor$ Es claro. $\square$

En conclusión $R - nat$ es de Boole. En particular $\mathbb{Z} - nat$ es de Boole y átomica entonces es coátomica. Los coatomos son los complementos de los atómos y recíprocamente.

Capítulo 7

Clases Conaturales

Introducción

En capítulos anteriores hemos definido a ciertos generadores $\xi_{\leq}(\mathcal{A}), \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$, $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathcal{A}), \xi_{E}(\mathcal{A}), \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ una clase en $R-mod$ pensando en el termino dual de generar obtenemos el concepto de cogenerador. Definiremos a $R-conat$, demostraremos que $\xi_{conat}(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$ y $R-conat$ es cardinable.

Mostraremos que $\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ es cerrada bajo cocientes, extensiones y sumas directas de simples, además veremos que propiedad necesitamos para que $\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ sea cerrado bajo sumas directas.

Por último, demostraremos los átomos en $\mathbb{Z}-conat$ y $\mathbb{Z}-conat$ es átomica.

7.1. Cogeneración de clases de módulos

Recordemos que $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ es no vacía, cerrada bajo isomorfismos y cocientes$\}$ y dada $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A}) = \{M \mid \exists A \twoheadrightarrow M\, con\, A \in \mathcal{A}\}$ que es la menor clase cerrada bajo cocientes que contiene a $\mathcal{A}$.

Definición 7.1. *Cogenerador*
Sea P un conjunto de propiedades de cerradura, $\mathcal{L}_P$ es una retícula cerrada bajo P. $\chi_P(\mathcal{A})$ es la mayor clase en $\mathcal{L}_P$ contenida en $\mathcal{A}$.

Ejemplos.

1. $\chi_{\leq}(\mathcal{A}) = \{M \mid \forall N \rightarrowtail M, N \in \mathcal{A}\}$ es la mayor clase hereditaria contenida en $\mathcal{A}$.

2. $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A}) = \{M \mid \forall M \twoheadrightarrow N, N \in \mathcal{A}\}$ es la mayor clase cerrada bajo cocientes contenida en $\mathcal{A}$.

3. $$\begin{aligned}\chi_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathcal{A}) &= \{M \mid Todo\, subcociente\, de\, M\, pertenece\, a\, \mathcal{A}\}\\ &= \{M \mid \begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads] \\ N \arrow[r, tail] & U \end{tikzcd} \Rightarrow N \in \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

Lema 7.2. *Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ entonces $\chi_{\leq}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$.*

Demostración. Sea $M \in \chi_{\leq}(\mathcal{A})$ todos los submódulos de M pertenecen a $\mathcal{A}$. Sea $N \in R-mod$ tal que existe $f : M \twoheadrightarrow N$. Si $L \rightarrowtail N$ entonces $\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & N \end{tikzcd}$, por lema del subcociente existe U tal que $\begin{tikzcd} U \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & M \\ L & \end{tikzcd}$. Como

$M \in \chi_{\leq}(\mathcal{A})$ implica que $U \in \mathcal{A}$ y por hipótesis $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ por lo que $L \in \mathcal{A}$. Por lo tanto todo submódulo de N pertenece a $\mathcal{A}$. $\square$

Lema 7.3. *Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq}$.*

Demostración. Sean $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$ y $L \leq M$, supongamos que existe $g : L \twoheadrightarrow K$ entonces
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, rightarrowtail, "i"] \arrow[d, "g"] & M \\ K & \end{tikzcd}$$
y por Lema de subcociente existe N tal que
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, rightarrowtail, "i"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[d] \\ K \arrow[r, rightarrowtail] & N \end{tikzcd}$$
como $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$ entonces $N \in \mathcal{A}$, además $K \leq N$ y por hipótesis $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ implica que $K \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $L \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{A})$. $\square$

7.2. $R - conat$

Ya hemos visto que $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ tiene seudocomplementos y estan expresados como: $\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{M \mid M \overset{f}{\twoheadrightarrow} N \, con \, N \in \mathcal{A} \Rightarrow N =_R 0\}$.

Lema 7.4. *Los seudocomplemetos de $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ son fuertes.*

Demostración. Dada $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ por demostrar que $\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es un seudocomplemento fuerte. Iniciaremos demostrando que $\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$.
Sea $M \in \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ y $N \neq 0$ tal que $M \twoheadrightarrow N$ y supongamos que $N \twoheadrightarrow A$ con $A \in \mathcal{A}$. Observemos que $M \twoheadrightarrow N \twoheadrightarrow A$ entonces $M \twoheadrightarrow A$ pero $M \in \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Por lo tanto $A = 0$. Claramente notamos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = 0$.
Ahora demostraremos que $\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es un seudocomplemento fuerte de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ tal que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = 0$, tomemos $M \in \mathcal{B}$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ con $N \in \mathcal{A}$ y como $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ entonces $N \in \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. Por lo tanto $N = 0$ y así $M \in \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$con esto demostramos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. $\square$

Lema 7.5. *Para $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ es una clase cerrada bajo $\twoheadrightarrow, ext$, y sumas directas de simples.*

Demostración. $\twoheadrightarrow\rfloor$ Sea $B \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ y $f : B \twoheadrightarrow C$. Si $C \overset{g}{\twoheadrightarrow} D$ con $D \in \mathcal{A}$ entonces $B \overset{f}{\twoheadrightarrow} C \overset{g}{\twoheadrightarrow} D \Rightarrow B \overset{g\circ f}{\twoheadrightarrow} D$. Por lo tanto $D = 0$ ya que $B \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$.
$ext\rfloor$ Sean $A, B \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ tal que $0 \to A \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} B \to 0$. P.D. $M \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Hagámoslo por contradicción. Sea $\alpha : M \twoheadrightarrow D$ con $0 \neq D \in \mathcal{A}$. Tomemos $\frac{D}{(\alpha\circ f)(A)} \in \mathcal{A}$, recordar que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$. Observemos que $\frac{D}{(\alpha\circ f)(A)} \neq 0$, de lo contrario $(\alpha \circ f)(A) = D$ y esto implica que $\alpha \circ f$ es epi y esto no puede pasar ya que $A \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$, por lo que $(\alpha \circ f)(A) \lneqq D$. Sea $\pi : D \twoheadrightarrow \frac{D}{(\alpha\circ f)(A)}$. Veamos que $ker\, g \subseteq ker\, \pi \circ \alpha$, tomemos $x \in ker\, g = Im\, f$ por ser sucesión exacta entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = x$ entonces $\pi \circ \alpha(x) = \pi \circ \alpha(f(a)) \subseteq \pi(\alpha(f(A))) = 0$ y así afirmamos que $x \in ker\, \pi \circ \alpha$. Por lo anterior tenemos que existe h tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\pi\circ\alpha"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \dfrac{D}{(\alpha\circ f)(A)} & \end{tikzcd}$$

por lo que h es epi contradicción ya que $B \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ y tenenmos h epi con $0 \neq \frac{D}{(\alpha\circ f)(A)} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ es cerrado bajo extensiones.
Sumas directas de simples$\rfloor$ Tomemos $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de simples tal que $S_i \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ y sea $f : \bigoplus_{i\in I}\{S_i\} \twoheadrightarrow A$ con $0 \neq A \in \mathcal{A}$, recordar que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$. Por lo que, existe $\emptyset \neq J \subseteq I$ tal que $A \cong \bigoplus_{j\in J}\{S_j\}$ entonces existe $A \twoheadrightarrow S_j$ para algún $j \in J$, en consecuencia $S_j \in \mathcal{A}$. Contradicción pues $S_j \in \mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I}\{S_i\}$ no tiene cocientes distintos de cero en $\mathcal{A}$.

$\square$

Por otra parte ya sabemos la descripición de $\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$ dado que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ pero cómo sería tomar el doble seudocomplento a $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} &= \{M \mid M\, no\, tiene\, cocientes\, distintos\, de\, cero\, en\, \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}\} \\ &= \{M \mid M \overset{\forall f}{\twoheadrightarrow} N \neq 0 \Rightarrow N \notin \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}\} \\ &= \{M \mid M \overset{\forall f}{\twoheadrightarrow} N \neq 0, \exists g : N \twoheadrightarrow A,\, con\, 0 \neq A \in \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

Definición 7.6. *Recordemos que* $Skel(\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}) = \{\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}\}$. *Si* $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ *para algún* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathcal{B}$ *se llama clase conatural y* $R{-}conat = Skel(\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow})$.

Teorema 7.7. $\xi_{conat}(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ con $\mathcal{B} \in R - conat$ entonces $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ donde $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \Rightarrow (\mathcal{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \Rightarrow (\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq ((\mathcal{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ pero $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ es fuertemente seudocomplementada por lo que, $((\mathcal{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \mathcal{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \mathcal{B}$. Por consiguiente, $(\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \mathcal{B}$ con $\mathcal{B} \in R - conat$. Por lo tanto $(\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \xi_{conat}(\mathcal{A})$. □

Por lo anterior, si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$, la menor clase conatural que contiene a $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

Ahora tomemos la clase de grupos abelianos simples es decir, $\mathbb{Z} - simp$.

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z} - simp)^{\perp_{\twoheadrightarrow}} &= \{{}_{\mathbb{Z}}M \mid M\, no\, tiene\, cocientes\, simples\} \\ &= \{{}_{\mathbb{Z}}M \mid M\, no\, tiene\, subgrupos\, máximos\} = \{{}_{\mathbb{Z}}M \mid M\, es\, divisible\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Div)^{\perp_{\twoheadrightarrow}} &= (\mathbb{Z} - simp^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \\ &= \{{}_{\mathbb{Z}}M \mid M \overset{\forall f}{\twoheadrightarrow} N \neq 0,\, N \overset{\exists g}{\twoheadrightarrow} A,\, con\, A \in \mathbb{Z} - simp\}.\end{aligned}$$

Esta es la clase de grupos abelianos tales que cualquier cociente no nulo tiene un cociente simple. Si M es así entonces, $M \overset{0\neq f}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{N} \overset{\exists g}{\twoheadrightarrow} \frac{\frac{M}{N}}{\frac{\mathcal{M}}{N}}$ con $\frac{\frac{M}{N}}{\frac{\mathcal{M}}{N}}$ simple, esto implica que $\frac{\mathcal{M}}{N} \leq_{máx} \frac{M}{N}$, por lo tanto $N \leq \mathcal{M} \leq_{máx} M$.
Esto significa que es la clase de los grupos abelianos tales que cualquier subgrupo propio está contenido en un subgrupo máximo.

Definición 7.8. $\mathbb{Z}{-}MAX = \{_{\mathbb{Z}}M \mid Todo\, subgrupo\, propio\, de\, M\, está\, contenido\, en\, un\, máximo\}$

Observación 7.9.

1. $\mathbb{Z}$ es un módulo en $\mathbb{Z} - MAX$ ya que cualquier ideal propio esta contenido en un máximo.

2. $\mathbb{Z} - MAX$ no es cerrada bajo sumas directas, si lo fuera entonces todos los grupos libres estarían en $\mathbb{Z} - MAX$ y todo grupo abeliano sería MAX aun los divisibles.

3. $\mathbb{Z} - MAX$ es cerrada bajo cocientes pues es un seudocomplemento en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$. Recordando que $\mathbb{Z} - MAX = (Div)^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = (\mathbb{Z} - simp^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

Definición 7.10. *En general un anillo es MAX si todo submódulo propio de cualquier módulo está contenido en un submódulo máximo.*

Es equivalente decir que todo módulo no nulo tiene cociente simple.

Ejemplo 7.11. *Un módulo neteriano es MAX.*

Proposición 7.12. *Un módulo $_RM$ es cíclico ($M = Rx\, para\, algun\, x \in M$) si y sólo si $\exists x \in M$ tal que $f : N \to M$ es epimorfismo $\Leftrightarrow x \in Im\, f$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $M = Rx$ y $N \xrightarrow{f} M$ con f morfismo, si $x \in Im\, f$ entonces $M = Rx \leq Im\, f$ en consecuencia $M = Im\, f$. Por lo tanto f es epi. Recíprocamente si f es epi entonces $x \in Im\, f$.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que x tiene la propiedad, como $\begin{array}{c} Rx \overset{i}{\hookrightarrow} M \\ x \longmapsto x \end{array}$ por hipótesis i es epi. Por lo tanto $Rx = M$. □

Definición 7.13. *Un módulo ${}_RM$ es cocíclico si: $\exists 0 \neq x \in M$ tal que $f : M \to N$ morfismo es mono si y sólo si $x \notin Nuc\, f$.*

Ejemplo 7.14. *Si ${}_RS$ es simple entonces $E(S)$ es cocíclico.*

Demostración. Sea $0 \neq x \in S$, supongamos que $E(S) \xrightarrow{f} N$ morfismo y que $x \notin Nuc\, f$. Veamos que el nucleo de f es cero; Si $Nuc\, f \neq 0$ y como $S \leq_{es} E(S)$ entonces $S \cap Nuc\, f \neq 0$ pero S es simple por lo que $x \in S \leq Nuc\, f$ así $x \in Nuc\, f$ Contradicción. Por lo anterior el nucleo de f es cero y por lo tanto f es mono.
Recíprocamente, si f es mono entonces $Nuc\, f = \{0\}$ por lo tanto $x \notin Nuc\, f$.
□

Proposición 7.15. *Sea $S \in R-simp$ y $S \hookrightarrow U \hookrightarrow E(S)$ entonces U es cocíclico.*

Demostración. Sea $0 \neq x \in S$, supongamos que $f : U \to N$ morfismo y que $x \notin Nuc\, f$. Veamos que el nucleo de f es cero; Si $Nuc\, f \neq 0$ y como $S \leq_{es} U$ ya que $S \leq_{es} E(S)$ y $S \leq U \leq E(S)$ entonces $S \cap Nuc\, f \neq 0$ pero S es simple por lo que $x \in S \leq Nuc\, f$ así $x \in Nuc\, f$ Contradicción. Por lo anterior el nucleo de f es cero y por lo tanto f es mono.

Recíprocamente, si f es mono entonces $Nuc\, f = \{0\}$ por lo tanto $x \notin Nuc\, f$.

$\square$

Esta proposición se puede interpretar como; todo submódulo distinto de cero de $E(S)$ (Todo módulo que tenga cápsula inyectiva isomorfa a $E(S)$ con $S \in R-simp$) es cocíclico. Todo módulo que tenga un submódulo simple esencial es cocíclico.

Teorema 7.16. *Si U es cocíclico entonces tiene un submódulo simple ${}_RS$ esencial.*

Demostración. Sea U cocíclico con elemento distinguido x. Como Rx es cíclico entonces tiene un submódulo máximo por lo que tenemos un epimofismo de Rx a S con $S \in R-simp$. Esto da pié al siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
Rx \arrow[ur, hook] \arrow[r, two heads, "g"] & S \arrow[r, hook, "h"'] & E(S)
\end{tikzcd}$$

Y como $E(S)$ es inyectivo existe f tal que conmuta el diagrama. Notemos que $f(x) \neq 0$, si $f(x) = 0 \Rightarrow h(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) \in Nuc\, h = \{0\}$ por que h es mono entonces $g(x) = 0$ así $g(Rx) = Rg(x) = 0$ en consecuencia $g = 0$ Contradicción ya que $S \neq 0$ pues es simple. Con esto afirmamos que $x \notin Nuc\, f$. Por lo tanto f es mono dado que U es cocíclico. Como $U \overset{f}{\rightarrowtail} E(S)$, $S \subseteq Im\, f$ pues S es simple y $S \leq_{es} E(S)$. $S \hookrightarrow f(U) \hookrightarrow E(S)$ pero $f(U) \cong U$ ya que f es mono entonces $S \hookrightarrow U \hookrightarrow E(S)$, además $S \leq_{es} E(S)$ por lo que $S \leq_{es} U$. $\square$

Sabemos que todo simple es un cociente de R, por lo tanto $\{\frac{R}{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \leq_{máx} R\}$ contiene una copia de cada simple.

Entonces $\{N \mid \exists f : N \rightarrowtail E(\frac{R}{\mathcal{M}})\, con\, \mathcal{M} \leq_{máx} R\}$ es una familia que contiene una copia de cada cocíclico.

Proposición 7.17. *Para todo $0 \neq M \in R-mod$ tiene un cociente cocíclico.*

Demostración. Sea $0 \neq M \in R - mod$ entonces existe $0 \neq x \in M$ y $0 \neq Rx \leq M$, tomemos a S un cociente simple de Rx. Construimos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Rx \arrow[r, two heads] \arrow[dr, hook] & S \arrow[r, hook] & E(S) \\
& M \arrow[ur, dashed, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $M \twoheadrightarrow Im\, f$ y $S \leq_{es} Im\, f$ y por la proposición 7.15. $Im\, f$ es cocíclico. $\square$

Proposición 7.18. *Si $\mathcal{C}$ $\in R-conat$ entonces $\mathcal{C} = \xi_{conat}(\{M \mid M\, es\, cocíclico,\ M \in \mathcal{C}\})$.*

Demostración. $\supseteq\rfloor$ Es clara

$\subseteq\rfloor$ Sea $0 \neq K \in \mathcal{C}$ y $K \twoheadrightarrow N \neq 0$, por la proposición 7.17. existe $0 \neq U$ cociente cocíclico de N entonces $K \twoheadrightarrow N \twoheadrightarrow U$ por lo que $U \in \mathcal{C}$ y es cocíclico. Por lo tanto $K \in \xi_{conat}(\{M \mid M\, es\, cocíclico,\ M \in \mathcal{C}\})$. $\square$

Corolario 7.19. *$R - conat$ es cardinable.*

Demostración. Definimos $\mathcal{C}_0 = E(\oplus R - simp)$ este es el cogenerador inyectivo mínimo. Como cada cocíclico se sumerge en $\mathcal{C}_0$ (teorema 7.16.) entonces cada clase conatural está generada por una familia de submódulos de $\mathcal{C}_0$ (Proposición 7.18. De hecho está generada por los submódulos cocícilicos de $\mathcal{C}_0$ que pertenecen a $\mathcal{C}$). Por lo que existe f función inyectiva.

$$f : R - conat \longrightarrow \wp(\wp(\mathcal{C}_0))$$

$$\mathcal{C} \longmapsto \{M \leq \mathcal{C}_0 \mid M \, es \, cocíclico \, y \, M \in \mathcal{C}\}$$

Por lo tanto $R - conat$ es cardinable. □

Corolario 7.20. *Si R es MAX (todos los módulos no nulos tienen cocientes simples) y $\mathcal{C}$ es conatural entonces $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si todos los cocientes simples de M pertenecen a $\mathcal{C}$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Como $M \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es conatural esta es cerrada bajo cocientes en particular para los cocientes simples de M.

$\Leftarrow\rfloor$ Por demostrar que M pertenece a $\mathcal{C}$ si todos sus cocientes simples están en $\mathcal{C}$. Sea $V \neq 0$ un cociente de M es decir $f : M \twoheadrightarrow V$ y como R es MAX entonces existe $g : V \twoheadrightarrow S$ con S simple, además por hipótesis $S \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $M \in \mathcal{C}$ ya que $\mathcal{C} = \{M \mid M \overset{\forall f}{\twoheadrightarrow} N \neq 0, \exists N \twoheadrightarrow C \neq 0 \, con \, C \in \mathcal{C}\}$. □

Proposición 7.21. *R es MAX si y sólo si cada clase conatural es cerrada bajo sumas directas.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sean $\mathcal{C}$ una clase conatural y $\bigoplus_{i\in I}\{M_i\}$ con $M_i \in \mathcal{C}$. Basta ver que $\bigoplus_{i\in I}\{M_i\}$ tiene todos sus cocientes simples en $\mathcal{C}$. Sea $0 \neq f : \bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \twoheadrightarrow S$ con S simple. Entonces existe $j \in J$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \arrow[r, "f"] & S \\
M_j \arrow[u, hook, "i_j"] \arrow[ur, "0\neq f_j = f|_{M_j}"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que f_j es sobre ya que su imagen esta en un simple y $f_j \neq 0$. Así que S es un cociente de M_j con $M_j \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $S \in \mathcal{C}$.

$\Leftarrow\rfloor$ $R-MAX$ la clase de los módulos MAX es conatural ya que proviene de $((R - simp)^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$. $R \in R - MAX$ porque todos sus ideales propios están contenidos en uno máximo por el Lema de Zorn, entonces todo libre es MAX y todo cociente de un libre es MAX. Por lo tanto todo módulo es MAX. $\square$

7.3. Átomos en $\mathbb{Z} - conat$

Recordemos que $\{\mathbb{Z}_p, 0\}$ es cerrado bajo cocientes (salvo copias), entonces podemos tomar $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_p) = \{_{\mathbb{Z}}M \mid \forall f : M \twoheadrightarrow N \neq 0\, \exists g : N \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p\}$.

Observación 7.22. *Esta clase contiene a los p-grupos de orden acotado:*
Si G es un p-grupo de orden acotado entonces $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}^{(X_n)} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n-1}}^{(X_{n-1})} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p^{(X_1)}$, un cociente de G es de la forma $\frac{G}{H} = \mathbb{Z}_{p^n}^{(Y_n)} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n-1}}^{(Y_{n-1})} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p^{(Y_1)}$ con $\mid Y_n \mid \leq \mid X_n \mid, ..., \mid Y_1 \mid \leq \mid X_1 \mid$.
Si el cociente $\frac{G}{H}$ es distinto de cero, $\frac{G}{H}$ tiene un cociente simple $\mathbb{Z}_p$.

Si $0 \neq M \in \xi_{conat}(\mathbb{Z}_p)$ entonces M tiene un cociente isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ así $\mathbb{Z}_p \in \xi_{conat}(M)$ ya que es cerrada bajo cocientes.
Por lo tanto $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_p) \leq \xi_{conat}(M) \leq \xi_{conat}(\mathbb{Z}_p)$.
$\xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \{_{\mathbb{Z}}M \mid \forall f : M \twoheadrightarrow N \neq 0\, \exists g : N \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}\}$. Esta clase consta de divisibles es decir, $M \in \xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ entonces M no tiene máximos, si $M \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_q$ pero $\mathbb{Z}_q$ no tiene cociente isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Por lo cual $M = \bigoplus_{p \in P} (\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)}) \oplus \mathbb{Q}^{(X)}$ donde $P = \{p \mid p\, es\, primo\}$. Pero como $M \in \xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ esto significa que M no puede tener copias de $\mathbb{Q}$ ni de cualquier $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ con $q \neq p$ ya que $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ no tiene cociente isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. En consecuencia $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)}$. Por lo tanto $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \{\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X)} \mid X\, conjunto\}$.

Por lo anterior $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_p)$ y $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ con $p \in P$ son átomos en $\mathbb{Z}-conat$. Ahora veamos que son todos.
Sea $\mathcal{A}$ un átomo en $\mathbb{Z}-conat$, si algun módulo $M \neq 0$ en $\mathcal{A}$ tiene cociente $\mathbb{Z}_p$, entonces $\mathbb{Z}_p \in \mathcal{A} \Rightarrow \xi_{conat}(\mathbb{Z}_p) \leq \mathcal{A}$. Por lo tanto $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_p) = \mathcal{A}$.
Si $\mathcal{A}$ es un átomo y cada módulo en $\mathcal{A}$ no tienen máximos, $\mathcal{A}$ consta de grupos divisibles. Sea $0 \neq M \in \mathcal{A}$ por lo anterior M es divisible entonces M es una suma directa de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ con $p \in P$ y de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ no puede ser cociente pues tiene a cada $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ como cociente $\forall p \in P$ ($\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \bigoplus\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^\infty}$). Entonces $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X)}$ (no puede tener sumandos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ con $p \neq q$, pues $\mathcal{A}$ es átomo), asi pues si $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M = \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X)}$ esto implica que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \mathcal{A}$ y $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \leq \mathcal{A}$. Por lo tanto $\xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathcal{A}$.

Corolario 7.23. *$\mathbb{Z}-conat$ es átomica.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es una clase conatural no nula se cumple una de las dos.

1. $\mathcal{C}$ tiene simples.

2. $\mathcal{C}$ consta de grupos divisibles.

En el primer caso $\mathcal{C}$ contiene un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Por lo tanto

$$\xi_{conat}(\mathbb{Z}_p) \leq \mathcal{C}.$$

En el segundo caso $\mathcal{C}$ contiene un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Por lo tanto

$$\xi_{conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \leq \mathcal{C}.$$

□

Capítulo 8

Clases de torsión no hereditarias

Introducción

Este capítulo está motivo para que el lector tenga en cuenta que no todas las grandes retículas son fuertemente seudocomplementadas para esto utilizaremos las clase de torsión no hereditarias. Además veremos que $\xi_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}) =_{*} (\mathcal{A}^{*})$ con $\mathcal{A}$ una clase de módulos. Por último demostraremos si $R = \mathbb{Z}$ en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ la clase de los módulos divisibles no tiene seudocomplemento fuerte.

Definición 8.1. *Si $\mathcal{A}$ es una clase de módulos, denotamos por* $\mathcal{A}^{*} = \{N \mid Hom(A, N) =_{R} 0, \forall A \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 8.2. *$\mathcal{A}^{*}$ es una clase que pertenece a $\mathcal{L}_{\leq,\prod,ext}$.*

Demostración. $\leq\rfloor$ Sea $N \in \mathcal{A}^{*}$ y $L \leq N$. Consideremos $A \xrightarrow{f} L$, observando

$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r, hook, "i"] & N \end{tikzcd}$, tenemos que $A \xrightarrow{i\circ f=0} N$, por hipótesis, dado que $N \in \mathcal{A}^*$. Como i es monomorfismo, entonces $f = 0$. Por lo tanto $Hom(A, L) = 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$, es decir que $L \in \mathcal{A}^*$.

Cerradura bajo productos: Supongamos que $\{N_i\}_I$ es una familia de módulos en $\mathcal{A}^*$. Sea $A \xrightarrow{f} \prod\limits_I \{N_i\}$, componiendo f con una proyección p_j : $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & \prod \{N_i\} \arrow[d, "p_j"] \\ & N_i \end{tikzcd}$ conmuta, porque por hipótesis $N_i \in \mathcal{A}^*$. Entonces $f = 0$, así que $\prod\limits_I \{N_i\} \in \mathcal{A}^*$.

$ext\rfloor$ Supongamos $0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ es una sucesión exacta con X y $Y \in \mathcal{A}^*$. Si $f : A \to Y$, con $A \in \mathcal{A}$. $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, "f"] & & \end{tikzcd}$. Por hpótesis, $g \circ f = 0$. Por la propiedad universal del nucleo, $\exists h : A \to X$ tal que $i \circ h = f$. Por hipótesis $h = 0$, así que $f = i \circ h = i \circ \bar{0} = 0$. $\square$

Teorema 8.3. *Si* $\mathcal{B}$ *es una clase de módulos entonces* ${}_*\mathcal{B} = \{M \mid Hom(M, B) = 0,\ \forall B \in \mathcal{B}\}$ *es una clase en* $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$.

Demostración. $\twoheadrightarrow\rfloor$ Si $M \in_* \mathcal{B}$ y $M \overset{f}{\twoheadrightarrow} L$ es un epimorfismo, entonces, dado $L \xrightarrow{g} B$ tenemos que $\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & L \arrow[d, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$, por hipótesis. Como $g \circ f = 0$ y f es epimorfismo, tenemos que $g = 0$ lo que demuestra que $Hom(L, B) = 0$ $\forall B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto $L \in_* \mathcal{B}$.

$\oplus\rfloor$ Si $\{M_i\}_I$ es una familia de módulos en ${}_*\mathcal{B}$, entonces dado un morfismo

$\bigoplus_I \{M_i\} \xrightarrow{f} B$, tenemos que $\begin{tikzcd} \oplus M_i \arrow[r, "f"] & B \\ M_j \arrow[u, hook, "i_j"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$ $\forall j \in I$. Entonces $f = 0$, lo que demuestra $Hom(\oplus\{M_i\}, B) = 0$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

$ext]$ Supongamos que $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta con $X, Z \in {}_*\mathcal{B}$, si $Y \xrightarrow{f} B$ es un morfismo con $B \in \mathcal{B}$, entonces: $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r] & 0 \\ & & B & & \end{tikzcd}$, por hipótesis $f \circ \alpha = 0$. Así que por la propiedad universal del conúcleo, $\exists h : Z \to B$ tal que $h \circ \beta = f$. Por hipótesis $h = 0$, así que $f = 0$. Por lo que $Hom(Y, B) = 0$ $\forall B \in \mathcal{B}$. De donde vemos que ${}_*\mathcal{B}$ es cerrada bajo extensiones. $\square$

Teorema 8.4. *Si $\mathcal{A}$ es una clase de módulos, entonces ${}_*(\mathcal{A}^*)$ es la menor clase de módulos en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ que contiene a $\mathcal{A}$. En otras palabras, ${}_*(\mathcal{A}^*) = \xi_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $C \in {}_*(\mathcal{A}^*)$ si y sólo si $Hom(A, B) = 0$ $\forall B \in \mathcal{A}^*$. En vista de esto, tenemos que $\mathcal{A} \subseteq {}_*(\mathcal{A}^*)$. Ya vimos que ${}_*(\mathcal{A}^*)$ es una clase que pertenece a $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$. Por lo que $\xi_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(\mathcal{A}) \subseteq {}_*(\mathcal{A}^*)$.

Ahora si $\mathcal{C}$ es una clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ que contiene a $\mathcal{A}$, demostraremos que ${}_*(\mathcal{A}^*) \subseteq \mathcal{C}$. Supongamos que no; es decir, supongamos que $\exists 0 \neq M \in {}_*(\mathcal{A}^*) \backslash \mathcal{C}$. Tomemos $N \leq M$ tal que N es el mayor submódulo de M que pertenece a la clase $\mathcal{C}$. Notemos que N existe, dado que $\mathcal{C}$ es una clase de pretorsión. Entonces $\frac{M}{N} \in {}_*(\mathcal{A}^*)$ y $\frac{M}{N}$ no tiene submódulos distintos de cero en $\mathcal{C}$, pues si existiera $0 \neq C \leq \frac{M}{N}$ y $C \in \mathcal{C}$, entonces tendríamos el siguiente

diagrama
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & \frac{M}{N} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \pi^{-1}(C) \arrow[u, hook] \arrow[r] & C \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Pero como $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo extensiones, entonces $\pi^{-1}(C) \in \mathcal{C}$ y $N = \pi^{-1}(C)$ contradiciendo la elección de N.

Así, $0 \neq \frac{M}{N} \in {}_*(\mathcal{A}^*)$ y $\frac{M}{N}$ no tiene submódulos distintos de 0 en $\mathcal{C}$, y por lo tanto no tiene submódulos distintos de cero en $\mathcal{A}$.

Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $Hom(A, \frac{M}{N}) = 0$, porque de otra manera si existiera $0 \neq f : A \to \frac{M}{N}$ implica que $0 \neq f(A) \leq \frac{M}{N}$ con $f(A) \in \mathcal{C}$, contradiciendo que $\frac{M}{N}$ no tienen submódulos distintos de cero en $\mathcal{C}$. Por lo cual $\frac{M}{N} \in \mathcal{A}^*$.

Pero como $\frac{M}{N} \in {}_*(\mathcal{A}^*)$, por hipótesis, entonces $Hom(\frac{M}{N}, \frac{M}{N}) = 0$, tomemos en cuenta que $1d_{\frac{M}{N}} \neq 0$. Contradicción.

Esto muestra que ${}_*(\mathcal{A}^*) \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto ${}_*(\mathcal{A}^*)$ es la menor clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ que contiene a $\mathcal{A}$. $\square$

Proposición 8.5. *La clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ generada por los módulos simples es hereditaria.*

Demostración. Notemos que si $\mathcal{A}$ es una clase cerrada bajo submódulos, entonces $\mathcal{A}^*$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Sea $M \in \mathcal{A}^*$ con $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$. Por demostrar que $Hom(A, E(M)) = 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Si $0 \neq f : A \to E(M)$, entonces $M \cap f(A) \neq_R 0$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & E(M) \\ f^{-1}(M \cap f(A)) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "f_|"] & M \cap f(A) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Ya demostramos que $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}_{\leq,\prod}$, así que $M \cap f(A) \in \mathcal{A}^*$, por ser submódulo de M y $M \in \mathcal{A}^*$. Por otra parte, $f^{-1}(M \cap f(A)) \in \mathcal{A}$, pues $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$, por hipótesis. Pero $f_| : f^{-1}(M \cap f(A)) \twoheadrightarrow M \cap f(A)$ con $f^{-1}(M \cap f(A)) \in \mathcal{A}$ y $M \cap f(A) \in \mathcal{A}^*$. Contradicción. Por lo tanto $E(M) \in \mathcal{A}^*$.

Notemos ahora que si $\mathcal{B}$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas, entonces ${}_*\mathcal{B}$ es una clase hereditaria.

Supongamos que ${}_*\mathcal{B}$ no es hereditaria entonces existe $M \in_* \mathcal{B}$ con $N \leq M$ tal que $N \notin_* \mathcal{B}$, por lo que existe $0 \neq f : N \to B$ con $B \in \mathcal{B}$ y por hipótesis $E(B) \in \mathcal{B}$, ahora veamos el siguiente diagrama.
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & M \\ B \arrow[d, hook, "g"] & \\ E(B) & \end{tikzcd}$$
y como $E(B)$ es inyectivo entonces
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "0 \neq g \circ f"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ E(B) & \end{tikzcd}$$
. En consecuencia tenemos $0 \neq h : M \to E(B)$. Por lo tanto $M \notin_* \mathcal{B}$.

En vista de lo anteriormente señalado, tenemos que la clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ generada por los simples, que es ${}_*((R - simp)^*)$ es una clase hereditaria. $\square$

Por lo anterior, ${}_*((R - simp)^*)$ es una clase de torsión hereditaria. Así que $R - simp \subseteq {}_*((R - simp)^*)$. Por lo que ${}_*((R - simp)^*)$ contiene a la clase de torsión hereditaria generada por los módulos simples , es decir contiene a la clase de los módulos semiartinianos.

Por otra parte, como la clase de los módulos semiartinianos es una clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$, debe contener a ${}_*((R - simp)^*)$. Por lo tanto la clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ generada por los módulos simples es precisamente la clase de los módulos semiartinianos.

8.1. La clase de los módulos divisibles no tiene seudocomplemento fuerte

Teorema 8.6. *Si $R = \mathbb{Z}$ en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$, Div la clase de los módulos divisibles es una clase que no tiene un seudocomplemento fuerte.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}'$ es un seudocomplemento fuerte de Div en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$.

La clase SS de los módulos semisimples es una clase en $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$ y SS no contiene módulos divisibles distintos de ${}_R0$.

Recordemos que $\xi_{ext}(SS) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(SS)^{:n}$

Notemos también que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq}$ entonces $\xi_{ext}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\leq,ext}$ y que si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow}$ entonces $\xi_{ext}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,ext}$

Para ver que $\xi_{ext}(SS) \subseteq \mathcal{D}'$, hay que ver que $\xi_{ext}(SS) \cap Div =_R 0$. Para esto basta demostrar que $(SS)^{:n} \cap Div =_R 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

En caso contrario, si existiera $0 \neq D$ un grupo divisible que pertenece a $(SS)^{:n}$ con $n \in \mathbb{N}$. En tal caso escojamos D tal que n es la menor posible . Notemos que $n \neq 1$ ya que no hay semisimples divisibles no nulos.

Entonces existe $0 \to X \to D \to Y \to 0$ sucesión exacta con $X \in (SS)^{:n-1}$ y Y semisimple, pero entonces Y es divisible, siendo un cociente de D. Por lo tanto $Y = 0$ y esto implica que $D \cong X$, con $X \in (SS)^{:n-1}$. Contradicción con la elección de n. Por lo tanto $\xi_{ext}(SS) \subseteq \mathcal{D}'$.

Por lo anterior $SS \subseteq \mathcal{D}' \in \mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus.ext}$ entonces $\xi_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(SS) \subseteq \mathcal{D}'$. Pero como ya vimos, $\xi_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}(SS)$ es la clase de los grupos abelianos semiartinianos, que

coincide con los grupos abelianos de torsión. En particular, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es de torsión así que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq \mathcal{D}'$, pero $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tambien es divisible. Contradicción.
La contradición viene de suponer que Div tiene seudocomplemento fuerte. Por lo tanto $\mathcal{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$ es una gran retícula que no es fuertemente seudocomplementada cuando $R = \mathbb{Z}$. $\square$

Bibliografía

[1] A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos, *On big lattices of classes of R-modules defined by closure properties*, Trends in mathematics. Birkhauser-Basel, 2000.

[2] A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos, *On lattices of natural and conatural classes in R-mod*, Comm. Algebra. 2001.

[3] F.W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag. New York, 1978.

[4] F. Kasch, *Modules and Rings*, Academic Press Inc. New York, 1982.

[5] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Fourth edition. Springer-Verlag. New York. 1995.

[6] Fernando Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos Una introducción*, Tercera edición. Sociedad Matemática Mexicana. México. 2011.