



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Fuerzas ópticas negativas en sistemas de dipolos  
acoplados

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Erick Estuardo Rodríguez Salas

TUTOR

Dr. Alejandro Vásquez Arzola





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Rodríguez

Salas

Erick Estuardo

55 39 78 03

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Física

308742008

2. Datos del tutor

Dr

Alejandro

Vásquez

Arzola

3. Datos del sinodal 1

Dr

Enrique

López

Moreno

4. Datos del sinodal 2

Dra

Martha

Rosete

Aguilar

5. Datos del sinodal 3

Dra

Karen Patricia

Volke

Sepúlveda

6. Datos del sinodal 4

Dr

Mayo

Villagrán

Muniz

7. Datos del trabajo escrito

Fuerzas ópticas negativas en sistemas  
de dipolos acoplados

113 p

2017

*¿Qué es la vida? Un frenesí.  
¿Qué es la vida? Una ilusión,  
una sombra, una ficción,  
y el mayor bien es pequeño:  
que toda la vida es sueño,  
y los sueños, sueños son.*

*La vida es sueño  
Pedro Calderón de la Barca*

# Agradecimientos

Para mis padres Raúl y Patricia, quienes me han apoyado toda mi vida para cumplir mis objetivos, han sido los pilares más importantes de mi vida y por los valores que me han inculcado.

A mi hermano Luis, con quien he compartido toda mi vida. A mi primo Héctor, quien es otro hermano y a toda mi familia por el apoyo que me han dado a través de los años.

A todas las amistades que hice durante mi estancia en la facultad, pero sobre todo a Fernando, Homero, Alejandro, Hiroki, Gustavo, Jimena y Alejandra, quienes me han apoyado hasta en los momentos más difíciles de mi vida, y con quienes me quedaba hasta tarde por "tareas", pláticas, juegos, pero sobre todo tonterías.

Gracias a mi asesor Alejandro por tanta paciencia y conocimiento que me concedió para poder realizar este trabajo. A mis sinodales Enrique, Martha, Karen y Mayo por tener interés en mi tesis y ayudarme a mejorarlo lo más posible.

A Arian, por haber sido tan comprensivo conmigo en esta etapa tan complicada, y sobre todo, por tu amistad.

A Daniela, con quien he compartido mi vida desde que empecé éste viaje y que me apoya, con cariño y hasta con regañones, para que alcance mis metas. Te amo.

Muchas gracias!

También agradezco los recursos económicos brindados por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, UNAM, proyecto PAPIIT-IA103615.

# Índice General

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos generales</b>	<b>7</b>
2.1. Conservación de momento . . . . .	7
2.2. Tensor de esfuerzos . . . . .	8
2.3. Momento electromagnético . . . . .	9
2.4. Fuerzas ópticas . . . . .	10
2.4.1. Aproximación de rayos . . . . .	11
2.4.2. Presión de radiación . . . . .	12
2.4.3. Aproximación de Rayleigh . . . . .	12
2.4.4. Promedio temporal de la fuerza . . . . .	14
2.4.5. Campos monocromáticos . . . . .	14
2.4.6. Ecuación de Clausius-Mossotti y reacción de radiación . . . . .	16
2.5. Métodos de integrales de volumen . . . . .	16
2.5.1. Lorenz-Mie . . . . .	17
2.5.2. Dipolos acoplados . . . . .	19
<b>3. Fuerzas ópticas en sistemas discretos de dipolos</b>	<b>26</b>
3.1. Interferencia de dos ondas planas . . . . .	26
3.2. Un dipolo . . . . .	28
3.3. Sistema de dos dipolos . . . . .	30
3.3.1. Arreglo de dos dipolos sobre el eje Z . . . . .	30
3.3.2. Arreglo de dos dipolos sobre el eje Y . . . . .	37
3.3.3. Arreglo de dos dipolos sobre el eje X . . . . .	38
3.4. Línea de dipolos (filamento) . . . . .	39
3.5. Arreglos bidimensionales . . . . .	42
3.5.1. Triángulo . . . . .	42
3.5.2. Disco . . . . .	52
<b>4. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>58</b>
<b>Apéndice A. Interferencia de dos ondas planas</b>	<b>62</b>
<b>Apéndice B. Método de Dipolos Acoplados para ondas planas</b>	<b>64</b>
<b>Apéndice C. Cálculo directo de la fuerza sobre 2 dipolos sobre el eje Z</b>	<b>66</b>

<b>Apéndice D. El haz gaussiano</b>	<b>84</b>
D.1. Haz gaussiano colimado . . . . .	86
D.1.1. Propagación y difracción . . . . .	86
D.2. Haz gaussiano enfocado . . . . .	87
D.2.1. Lentes . . . . .	87
D.2.2. Campos longitudinales en la región focal . . . . .	87
<b>Apéndice E. Código en Matlab</b>	<b>89</b>
E.1. matrizME.m . . . . .	89
E.2. matrizM.m . . . . .	91
E.3. campoDipolos.m . . . . .	93
E.4. campoVecEsn.m . . . . .	94
E.5. trianguloDipolos.m . . . . .	95
E.6. discoDipolos.m . . . . .	96
E.7. Ej1.m . . . . .	98
E.8. FuerzaCDM.m . . . . .	104
E.9. FuerzaDipolon.m . . . . .	105
E.10. FuerzaDipolosSobreXYZ.m . . . . .	107
E.11. FuerzaCDM2DipolosSobreZ.m . . . . .	110

# Índice de guras

1.1. Intercambio de momento lineal de un haz y una partícula en la aproximación de rayos [24]. . . . .	4
1.2. Intercambio de momento al incidir dos ondas electromagnéticas con un ángulo $\theta$ respecto al eje Z [24]. . . . .	4
1.3. Arreglo experimental de O.Brzobohatý, V. Karásek, et.al. . . . .	5
1.4. Perfil de intensidad Gaussiano a lo largo del eje Z (arriba). Comportamiento de partículas de poliestireno de radio 410 nm iluminados por un haz Gaussiano. Las curvas fueron calculadas utilizando el método de dipolos acoplados con una cintura de haz de $w_0 = 23.5\mu m$ con una potencia incidente de 3.2 W (abajo) [3]. . . . .	6
2.1. Fuerza inducida por un campo electromagnético incidente. . . . .	10
2.2. Fuerzas de gradiente y scattering inducidas por un haz con perfil de intensidad gaussiano. . . . .	11
2.3. Intercambio de momento lineal de un haz y una partícula en la aproximación de rayos. . . . .	11
2.4. Representación de un dipolo iluminado por un campo electromagnético. . . . .	13
2.5. Esfere de radio $r > r_{>}$ mínimo que encierra a una partícula. . . . .	17
2.6. Tiempo de retardo. . . . .	19
2.7. Modelo del dipolo. . . . .	20
2.8. Perfil de intensidad de la radiación de un dipolo excitado por un campo eléctrico con frecuencia $\omega$ . . . . .	22
3.1. Dos ondas planas incidiendo con un ángulo $\theta$ respecto al eje Z. [3] . . . . .	26
3.2. Parte real del campo eléctrico en V/m, ecuación (3.1), de la interferencia de dos ondas planas incidiendo con un ángulo $\theta = 79^\circ$ respecto al eje Z en $t = 0$ . . . . .	27
3.3. Intensidad en $V^2/m^2$ de la interferencia de dos ondas planas incidiendo con un ángulo $\theta = 79^\circ$ respecto al eje Z. . . . .	28
3.4. a) Parte real del campo eléctrico irradiado (V/m) en el plano ZX de un dipolo al ser excitado por un campo eléctrico incidente de la forma $\mathbf{E} = E_0 e^{ik \cos \theta z} 2 \cos(k \sin \theta y) \hat{\mathbf{r}}_z$ , con $\theta = 79^\circ$ . b) Parte real del campo eléctrico irradiado en el plano ZX de un dipolo al ser excitado por un campo eléctrico incidente de la forma $\mathbf{E} = E_0 e^{ik \cos \theta z} 2 \cos(k \sin \theta y) \hat{\mathbf{r}}_z$ . . . . .	29
3.5. Diagrama del sistema de dos dipolos sobre los cuales inciden dos campos electromagnéticos polarizados sobre el eje Z. . . . .	30
3.6. Mapa de la fuerza, en Newtons, sobre dos dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje Z. . . . .	31
3.7. Regiones de fuerza negativa, en Newtons, en función de la separación $D$ de 2 dipolos y el ángulo de iluminación $\theta$ acomodados sobre el eje Z. . . . .	31
3.8. Fuerza óptica sobre dos dipolos para diferentes separaciones y ángulos de iluminación de $75^\circ$ hasta $90^\circ$ . . . . .	32

3.9.	Análisis de máximos (líneas continuas) y mínimos (líneas punteadas) de la radiación de cada dipolo al ser excitados por el campo electromagnético incidente separados $D_{pos} = 5.05 \times 10^{-7} m$ e iluminados con un ángulo $\theta = 79^\circ$ . Cada conjunto de líneas (rojas o azules) es la radiación que emitiría un dipolo al ser excitado solamente por el campo eléctrico incidente. . . . .	33
3.10.	a) Interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a $\theta = 79^\circ$ para generar una fuerza positiva cuando los dos dipolos están separados una distancia $D = 5.05 \times 10^{-7}m$ . b) Superficie de la interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a $\theta = 79^\circ$ para generar una fuerza positiva cuando los dos dipolos están separados una distancia $D = 5.05 \times 10^{-7}m$ . . . . .	34
3.11.	Análisis de máximos (líneas continuas) y mínimos (líneas punteadas) de la radiación de cada dipolo al ser excitados por el campo electromagnético incidente separados $D_{neg} = 2.47 \times 10^{-7} m$ e iluminados con un ángulo $\theta = 79^\circ$ . Cada conjunto de líneas (rojas o azules) es la radiación que emitiría un dipolo al ser excitado solamente por el campo eléctrico incidente. . . . .	35
3.12.	a) Interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a $\theta = 79^\circ$ para generar una fuerza negativa al estar separados una distancia $D = 2.47 \times 10^{-7}m$ . b) Superficie de la interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a $\theta = 79^\circ$ para generar una fuerza negativa al estar separados una distancia $D = 2.47 \times 10^{-7}m$ . . . . .	36
3.13.	Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre dos dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $Y$ . . . . .	37
3.14.	Fuerza negativa ( $N$ ) que actúa sobre dos dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $Y$ . . . . .	37
3.15.	Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre dos dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $X$ . . . . .	38
3.16.	Fuerza negativa ( $N$ ) que actúa sobre dos dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $X$ . . . . .	39
3.17.	Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 6 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $Z$ . . . . .	40
3.18.	Fuerza negativa ( $N$ ) que actúa sobre 6 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $Z$ . . . . .	40
3.19.	Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $Z$ . . . . .	41
3.20.	Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ acomodados sobre el eje $Z$ . . . . .	41
3.21.	Arreglo triangular de dipolos creado a partir de una red hexagonal con constante de red $D$ . a) Triángulo de dipolos orientados de manera que un lado del triángulo está sobre el eje $X$ . b) Triángulo de dipolos orientado con un vértice sobre el eje $X$ y un lado paralelo al mismo eje. . . . .	43
3.22.	Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 6 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a). . . . .	44
3.23.	Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 6 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a)	44
3.24.	Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a). . . . .	45

3.25. Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a)	45
3.26. Mapa de la fuerza normalizada con el campo incidente ( $Nm/V$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21b).	46
3.27. Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21b)	46
3.28. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 45 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a).	47
3.29. Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 45 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a)	47
3.30. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a).	48
3.31. Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a)	48
3.32. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21b).	49
3.33. Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21b)	49
3.34. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a).	50
3.35. Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados de manera triangular en el plano $ZX$ como en la Figura (3.21a)	50
3.36. Disco de dipolos creado a partir de una red cuadrada con constante de red $D$ y radio $r$ .	52
3.37. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 5 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36).	53
3.38. Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 5 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36).	53
3.39. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 13 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36).	54
3.40. Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 13 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36).	54
3.41. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 49 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36).	55
3.42. Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 49 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36).	55

3.43. Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 113 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36). . . . .	56
3.44. Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 113 dipolos a diferentes distancias $D$ , iluminados a diferentes ángulos $\theta$ y acomodados como un disco en el plano $ZX$ como en la Figura (3.36). . . . .	56
3.45. Tiempo que tarda en correr el algoritmo que calcula la fuerza sobre dipolos. . . . .	57
4.1. Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo $\theta$ . . . . .	59
A.1. Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo $\theta$ . . . . .	62
C.1. Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo $\theta$ . . . . .	67
C.2. Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo $\theta$ . . . . .	67
D.1. Tamaño transverso de un haz Gaussiano paraxial. . . . .	85
D.2. Hiperboloide que describe al haz Gaussiano. . . . .	85
D.3. Sistema de propagación de haces. . . . .	86
D.4. a) Lente positivo enfocando una onda plana y b) lente positivo colimando una onda esférica. . . . .	87
D.5. Campos del haz Gaussiano en el plano de polarización ( $x,y$ ). La longitud de onda es $\lambda = 800$ y el ángulo del haz es $\theta = 28.65$ . a) Densidad de potencia dependiente del tiempo. b) Intensidad del campo eléctrico total ( $\mathbf{E}^2$ ). c) Intensidad del campo eléctrico longitudinal ( $\mathbf{E}_z^2$ ) . . . . .	88

# Resumen

En esta tesis se estudiaron las fuerzas ópticas producidas al incidir dos ondas planas (patrón de interferencia) sobre una partícula modelada con el método de dipolos acoplados (CDM por sus siglas en inglés). El método de dipolos acoplados es una aproximación en la cual se asume que la partícula es una colección de dipolos los cuales interactúan con un campo eléctrico externo y con los campos eléctricos radiados por todos los demás dipolos. Se encontró bajo qué condiciones de ángulo de incidencia, distancia entre dipolos y número de dipolos se presentan fuerzas ópticas de esparcimiento en la dirección contraria a la propagación de los haces (fuerzas ópticas negativas). Se calcularon las fuerzas ópticas negativas en tres tipos de ordenamientos bi-dimensionales de dipolos (filamento, triángulo y disco).

En el Capítulo 1 se introduce el origen de las fuerzas ópticas como producto de la conservación del momento electromagnético y se menciona un arreglo experimental sobre el cual se basa el sistema de estudio de esta tesis, además, al final de ese capítulo se detallan los objetivos de este trabajo. El Capítulo 2 (Conceptos Generales) es una introducción al formalismo de las fuerzas ópticas basándose en la conservación del momento lineal. Después se introduce el tensor de esfuerzos de Maxwell para calcular el momento que lleva una onda electromagnética y la fuerza mecánica que actúa sobre cualquier objeto encerrado por una superficie dada. Se introducen los conceptos de fuerza de gradiente y fuerza *scattering* (presión de radiación) utilizando la aproximación de rayos para entender de manera intuitiva las fuerzas ópticas. Más adelante se discute la aproximación dipolar o de Rayleigh la cual modela una partícula como un dipolo. Se calcula la fuerza óptica que actúa sobre ésta partícula introduciendo el momento dipolar y la polarizabilidad de Clausius-Mossotti y reacción de radiación. Después se discuten brevemente otros métodos y aproximaciones para calcular fuerzas ópticas, como el método de Lorenz-Mie y el método de dipolos acoplados. En el Capítulo 3 (Fuerzas Ópticas en Sistemas Discretos de Dipolos) se presentan los resultados de las simulaciones sobre diferentes arreglos de dipolos. En el Capítulo 4 se muestran las conclusiones de este trabajo y se plantean posibles líneas de investigación a futuro en este tema. El Capítulo 5 (Códigos) muestra los programas escritos en Matlab con los cuales se hicieron las simulaciones.

# Capítulo 1

## Introducción

En el siglo XVII, con la invención del telescopio, se pudo observar que los cometas tienen una cola. Por ello, aunque las fuerzas ópticas o fuerzas debidas a la luz parezcan un concepto reciente, se ha pensado que tienen un efecto en los fenómenos de diario. Por ejemplo, el físico Johannes Kepler tuvo la idea de que las colas de los cometas que entran al sistema solar se debían a un efecto mecánico producido por la luz solar. En el siglo XIX, Maxwell con su teoría electromagnética demostró que los campos electromagnéticos tienen un momento, el cual puede ser intercambiado con objetos, pudiendo producir fuerzas como “presión de radiación”. Fue hasta las investigaciones de Max Planck, Albert Einstein y la interpretación corpuscular de la luz que se introdujo el concepto de *fotón*, con el cual la idea de transferencia de momento electromagnético se pudo entender de mejor manera. Einstein demostró la validez de esta idea con el efecto fotoeléctrico al mostrar que la transferencia de energía entre luz y materia ocurre de manera discreta, que después sería probado por los experimentos de Compton en 1925, forjando así las bases para la mecánica cuántica [20].

Antes de los años 70, no se habían encontrado aplicaciones concretas de las fuerzas ópticas debido a su magnitud tan pequeña. Durante ese tiempo, las fuerzas ópticas se estudiaban en aplicaciones espaciales. Esto debido a que en el espacio no se presentan efectos por fricción, por lo que una aceleración, aunque fuera muy pequeña, podía provocar grandes cambios en velocidad de objetos a lo largo del tiempo. Durante la década de los 70s, investigadores de los Laboratorios Bell, estudiaron la acción de fotones en átomos neutrales. Este grupo, liderado por Ashkin propuso enfocar haces de luz láser para atrapar átomos. Trabajos posteriores del mismo grupo llevaron al desarrollo de las "pinzas ópticas."

Al poderse probar que las fuerzas ópticas se podían utilizar para atrapar y manipular objetos muy pequeños, se desarrollaron dos ramas de la física: 1) átomos fríos y 2) trampas ópticas [18]. Ésto resultó en dos Premios Nobel, uno en 1997 [5, 6, 21] y otro en 2001 [7, 15]. Durante esa época, científicos se dieron cuenta que si enfocaban fuertemente un rayo láser, podían atrapar partículas microscópicas en tres dimensiones, técnica que se conoce como pinza óptica. Con estos resultados, estas herramientas resultaron muy atractivas para la investigación biológica, ya que se podría atrapar y manipular microorganismos de manera no invasiva [2, 25], dando oportunidad hasta de manipular organelos en células vivas [11].

La principal dificultad de utilizar fuerzas ópticas es que la razón de flujo de momento y de energía es muy pequeño. Suponiendo una onda plana y un haz colimado tenemos

$$p = \frac{nP}{c}, \quad (1.1)$$

siendo  $p$  el momento,  $n$  el índice de refracción,  $P$  la potencia y  $c$  la velocidad de la luz. Podemos estimar de manera sencilla la fuerza que sentiría un espejo totalmente reflejante sobre el cual incide un haz de luz [1]. Sabemos que el momento de un fotón está dado por

$$p = \frac{h}{v}, \quad (1.2)$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $v$  es la frecuencia. Con esto la fuerza de un rayo de luz sobre el espejo sería

$$F_{rad} = \underbrace{\frac{P}{hv}}_A \cdot \underbrace{\frac{2hv}{c}}_B = \frac{2P}{c}, \quad (1.3)$$

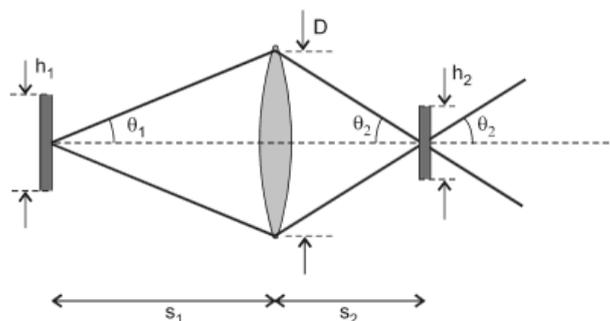
con el término **A** el número de fotones por segundo y el término **B** el momento transmitido al espejo. Nótese que el factor de 2 es porque el espejo es 100% reflejante. Entonces, la fuerza máxima en el aire es menor a  $10 \text{ nN/W}$ . [18]

Para que un haz de luz de  $1 \text{ W}$  levante una partícula sólida, la partícula tendría que tener un radio menor a  $100 \mu\text{m}$  y ese rayo tendría que ser enfocado a aproximadamente el tamaño de la partícula. La fuerza que ejerce un haz de luz es proporcional a su intensidad, es decir a la potencia por unidad de área, y es ésta razón principalmente que la invención del láser hizo posible el desarrollo de éstas técnicas.

Sin una fuente de luz coherente la radiancia en el foco está limitada por el Teorema de la Radiancia [18]. La radiancia está definida como la potencia óptica emitida por unidad de ángulo sólido, por unidad de área de la superficie emisora ( $\text{W}/(\text{m}^2\text{sr})$  en S.I.). Una fuente tiene una alta radiancia cuando emite luz por un pequeño ángulo sólido. Los Láseres tienen una radiancia más alta que las fuentes de luz convencionales, ya que son altamente direccionables y coherentes.<sup>1</sup>

Como ya vimos, el concepto de fuerzas ópticas no es nada nuevo. Pero si hablamos de fuerzas ópticas, especialmente de presión de radiación, ¿podemos suponer que existen fuerzas ópticas que tienen una dirección contraria a la propagación de la luz? Resulta que sí, siempre y cuando se encuentre la manera de aumentar el momento de la luz esparcida por una partícula en la dirección de propagación del haz. La ley de conservación de momento haría el resto. Por ello, para estudiar las fuerzas ópticas

<sup>1</sup>Uno pensaría que la radiancia de una fuente convencional puede ser mejorada simplemente enfocándola con un lente, sin embargo, un lente también cambia la distribución angular, por lo tanto, tiende a contrarrestar el aparente crecimiento de la radiancia. Supongamos un cuadrado que emite luz de lado  $h_1$  que es transformado por un lente a una imagen de lado  $h_2$  (ver figura en el pie de página).



Se puede pensar en esta imagen como otra fuente de luz, con diferente área y diferente ángulo sólido de emisión. Se puede demostrar que las radiancias  $L_1$  y  $L_2$  de la fuente original y de su imagen cumplen  $L_1 = L_2$ , lo que nos dice que la radiancia de la imagen es igual a la del objeto original sin importar cuanto enfoque el lente. En general, la radiancia de una fuente de luz no puede aumentar al pasar por un componente óptico pasivo como lentes, espejos o guías de onda.

negativas, se buscan maneras de incrementar el momento de la radiación dispersada. Una manera de incrementar el momento del campo esparcido es utilizar medios activos como se sugieren A. Mizrahi y Y. Fainman en [17], sin embargo, éste acercamiento es poco práctico debido a que muy pocos materiales presentan amplificación óptica (emisión estimulada).

Existe otro acercamiento más sencillo para buscar las condiciones para producir fuerzas negativas, el cual se abordará más adelante en este capítulo, el cual expone un sistema de dos ondas electromagnéticas incidiendo con un ángulo, produciendo interferencia, sobre una partícula dieléctrica. Este sistema es un símil al que se presenta en [3] el cual trata de un haz láser que es reflejado con un ángulo  $\theta$  al incidir sobre un espejo. El haz reflejado interfiere con el haz incidente produciendo un patrón de interferencia, que cuando colocamos partículas dieléctricas en él, bajo ciertas condiciones, éstas son movidas en dirección contraria al vector de onda total, encontrando así una fuerza negativa.

Es bien sabido que la luz puede producir fuerzas conservativas y no conservativas. Cuando tratamos con partículas muy pequeñas (menores a la longitud de onda), la fuerza óptica está descrita por una fuerza de gradiente y una fuerza de esparcimiento (*scattering*):

$$F_g = \frac{\alpha}{2} \nabla E^2, \quad (1.4)$$

$$F_s = \omega \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

donde  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$  es la polarizabilidad compleja de la partícula,  $E^2$  es la intensidad del haz incidente,  $\omega$  es la frecuencia, y  $\mathbf{B}$  es el campo magnético del campo incidente. La fuerza de scattering es una fuerza no conservativa que siempre actúa en dirección del vector de Poynting  $\mathbf{S} = (1/\mu)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  con  $\mu$  la permeabilidad magnética del medio [24].

Consideremos el problema donde una onda plana se propaga en dirección  $Z$  e incide sobre un objeto [3]. Parte del momento de la onda se transfiere con la radiación dispersada por el objeto. Por la ley de conservación de momento, la diferencia de momento entre la radiación incidente y la radiación dispersada en dirección  $Z$  es compensada por transferencia de momento al objeto sobre el que incide la radiación, lo cual se traduce en que el objeto siente una fuerza. Los detalles de estos cálculos se explicarán más adelante en el capítulo 2.

Para que esa fuerza sea negativa, es decir, que su dirección sea la contraria a la dirección de propagación del haz, el momento que debe tener la radiación dispersada debe ser mayor al momento de la onda incidente, todo en la dirección  $Z$ . La forma más sencilla para hacer esto es iluminar un objeto no puntual con ondas con cierto ángulo  $\theta$  respecto al eje  $Z$ . Si este objeto puede dispersar las ondas incidentes en ondas paralelas al eje  $Z$ , entonces la condición anterior se cumpliría. Es decir, la ley de conservación de momento es simplemente  $k_{wave} \cos \theta = k_{wave} + k_{box}$  (ver figura 1.1), por lo que la fuerza sobre el objeto sería  $F_z = (P/c)(\cos \theta - 1)$ , donde  $P$  es la potencia óptica que incide en el objeto y  $c$  es la velocidad de la luz.

La fuerza resultante sobre el objeto es negativa para  $\theta = 0^\circ$ . Un ejemplo sencillo es lo que Sukhov y Dogariu [24] explican. Supongamos que tenemos dos ondas planas que inciden con cierto ángulo respecto al eje  $Z$ , la primera con un ángulo  $\theta$  y la segunda con un ángulo  $-\theta$ . Al interferir producen un campo dado por

$$E = 2E_0 \exp(ik_z z) \cos(k_x x), \quad (1.6)$$

con  $k_z = k \cos \theta$ ,  $k_x = k \sin \theta$  y  $k = 2\pi/\lambda$ . Cuando los parámetros del prisma mostrado en la figura 1.2 se eligen de cierto modo, tal que los rayos incidentes son transmitidos por el prisma y dispersados

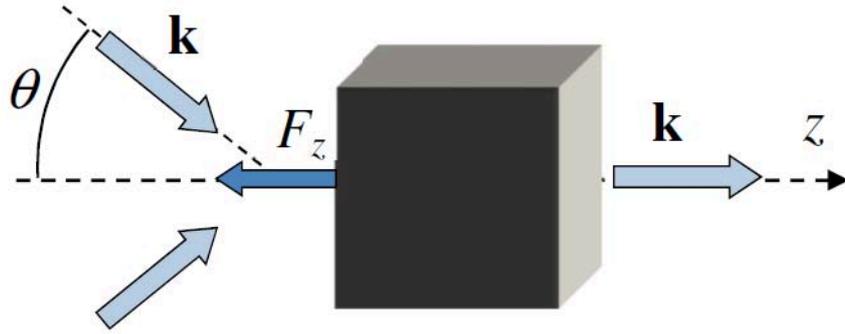


Figura 1.1: Intercambio de momento lineal de un haz y una partícula en la aproximación de rayos [24].

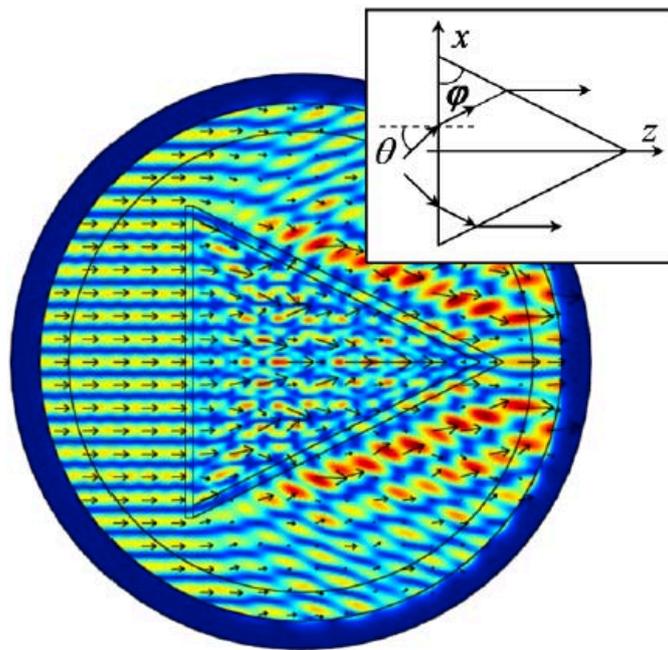


Figura 1.2: Intercambio de momento al incidir dos ondas electromagnéticas con un ángulo  $\theta$  respecto al eje Z [24].

de manera paralela al eje Z, el momento lineal proyectado sobre el eje  $z$  aumenta respecto al incidente. Como consecuencia, el prisma experimenta una fuerza negativa  $F_z$ . La figura 1.2 corresponde a un prisma con ángulo  $\phi = 64^\circ$  y  $n = 1.5$  que es iluminado con  $\lambda = 532 \text{ nm}$ ,  $E_0 = 10^6 \text{ V/m}$ , polarizado en el plano XZ y con un ángulo de  $\theta = 42^\circ$ , siente una fuerza óptica de  $F_z = -4.9 \text{ pN}$ .

Las fuerzas negativas no solamente se han demostrado de manera teórica, sino también se han encontrado de manera experimental, afirmando su existencia. Un ejemplo es el artículo de O.Brzobohatý, V. Karásek, et.al., *Experimental demonstration of optical transport, sorting and self-arrangement using a 'tractor beam'* [3]. La idea es tener dos haces incidiendo con cierto ángulo  $\theta$  respecto al eje Z sobre una partícula. Ellos simplificaron su arreglo experimental reemplazando un haz por un espejo, simulando así la interferencia de dos haces como la interferencia de un haz con el mismo haz reflejado

como en la Figura 1.3. Encuentran que las fuerzas negativas se dan cuando iluminan con un ángulo

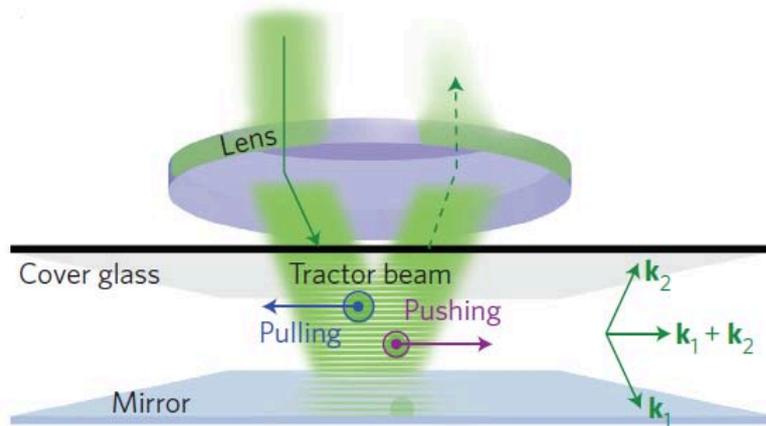


Figura 1.3: Arreglo experimental de O.Brzobohatý, V. Karásek, et.al.

cercano a  $90^\circ$  y con haces con polarización  $S$  (perpendicular al plano de incidencia). Si se utiliza un material en el cual se pueda inducir emisión estimulada, el efecto de la fuerza negativa se puede amplificar [3].

Ellos utilizaron un haz con perfil de intensidad Gaussiano. La envolvente Gaussiana sobre el eje  $Z$  induce una fuerza de gradiente  $F_{grad}$  que atrae a las esferas de poliestireno con radio de  $410\text{ nm}$  hacia el centro del haz. Esta fuerza tiene el mismo o distinto signo a la fuerza negativa actuando sobre la partícula localizada en  $Z < 0$  o  $Z > 0$ . Cuando la partícula llega a la posición de estabilidad, la desviación de esa posición sobre el eje  $Z$  revela la magnitud de la fuerza negativa (Figura 1.4).

Este fenómeno es escalable con el ancho del haz. Con un haz más ancho, las partículas pueden ser jaladas una distancia de  $30\ \mu\text{m}$ , y el factor limitante es la potencia del láser. Esta sensibilidad de la fuerza óptica sobre partículas de diferentes tamaños, tiene aplicación en clasificación de objetos. Otros estudios muestran resultados de fuerzas negativas utilizando campos electromagnéticos sin gradientes de intensidad. En este estudio se encontró que el criterio más importante para que se produzcan fuerzas negativas es la no paraxialidad del haz de luz, la cual contribuye a la fuerza negativa por a la conservación de momento debido a la creación de un patrón de dispersión asimétrico [19].

Esta tesis tiene como finalidad el inicio de un estudio de las fuerzas ópticas negativas en sistemas discretos de dipolos acoplados. El principal objetivo es poder comprender a profundidad las bases teóricas de esta aproximación para desarrollar un algoritmo con el cual se puedan calcular las fuerzas ópticas sobre partículas de tamaño menor a la longitud de onda con la cual se iluminen.

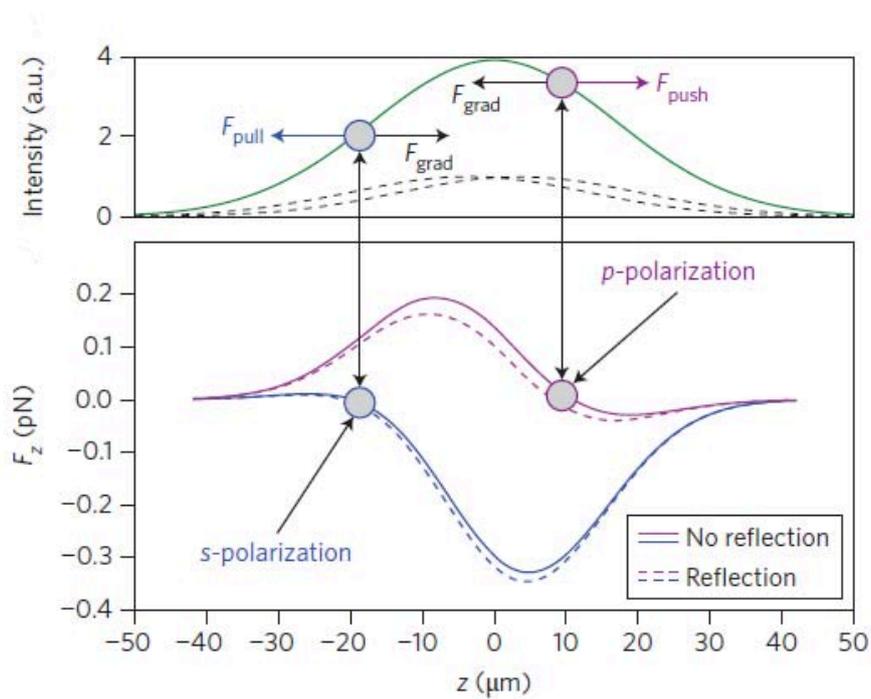


Figura 1.4: Perfil de intensidad Gaussiano a lo largo del eje  $Z$  (arriba). Comportamiento de partículas de poliestireno de radio  $410 \text{ nm}$  iluminados por un haz Gaussiano. Las curvas fueron calculadas utilizando el método de dipolos acoplados con una cintura de haz de  $w_0 = 23.5 \mu\text{m}$  con una potencia incidente de  $3.2 \text{ W}$  (abajo) [3].

# Capítulo 2

## Conceptos generales

### 2.1. Conservación de momento

La *cantidad de movimiento* o *momento lineal* es una cantidad física fundamental que describe el movimiento de un cuerpo en cualquier teoría mecánica. Su definición formal varía dependiendo si estamos en un formalismo de mecánica clásica o cuántica, sin embargo, en todas las teorías, las propiedades del momento lineal son de gran importancia.

En mecánica newtoniana el momento lineal se define como

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (2.1)$$

donde  $m$  es la masa y  $\mathbf{v}$  es la velocidad.

Uno de los conceptos de mayor importancia en la física es la *conservación de momento lineal*. Por ejemplo, en un sistema cerrado si dos partículas interactúan, entonces

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, \quad (2.2)$$

con  $m_1$  y  $m_2$  las masas de las partículas 1 y 2,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  las velocidades antes de la interacción de las partículas 1 y 2, y  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  las velocidades después de la interacción.

Este concepto de gran importancia ya que de él nace el concepto de fuerza. Como sabemos, la fuerza está definida como el cambio en el tiempo del momento lineal, i.e.,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (2.3)$$

con  $\mathbf{a}$  la aceleración.

El concepto de momento lineal también se extiende al electromagnetismo. Como sabemos, toda onda electromagnética tiene asociada un momento lineal. Con esto se puede decir que la ley de conservación de momento lineal también se puede aplicar a ondas electromagnéticas y por tanto, concluimos que las ondas electromagnéticas pueden producir fuerzas sobre objetos.

Esto se puede pensar de manera más clara si entramos al formalismo de la *mecánica cuántica*. En este formalismo pensamos en la luz como cuantos de energía o *fotones*. Estos fotones podemos pensarlos como pelotitas que tienen asociado un momento lineal  $\mathbf{p} = h/\lambda$  y que inciden sobre objetos, transmitiendo momento.

En este trabajo se utilizará un formalismo ondulatorio para describir el momento y las fuerzas producidas por campos electromagnéticos.

## 2.2. Tensor de esfuerzos

Como siempre, cuando hablamos de fuerza en cualquier disciplina, estamos tomando en cuenta la ley de conservación de momento lineal. Consideremos las ecuaciones de Maxwell en el vacío. En este caso tenemos que  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . La ley de conservación de momento es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.7)$$

y la Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \int_V [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] dV. \quad (2.8)$$

La primera expresión se aplica para una carga  $q$  moviéndose con velocidad  $v$  y la segunda expresión se aplica a una distribución de cargas y corrientes que satisfacen la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.9)$$

que es consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell. La Fuerza de Lorentz hace la conexión entre el mundo electromagnético y el mundo mecánico.

Si operamos la primera ecuación de Maxwell con  $\times \epsilon_0 \mathbf{E}$  y la segunda ecuación de Maxwell con  $\times \mu_0 \mathbf{H}$  y sumamos ambas expresiones obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + \mu_0(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \times \mathbf{E} \right] + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right], \quad (2.10)$$

Se han omitido los argumentos de los campos y también se ha hecho la sustitución  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ . Es importante notar que los últimos dos términos pueden combinarse y escribirse como  $(1/c^2)d/dt[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ .

El primer término de la ecuación (2.10) lo podemos escribir como

$$\epsilon_0(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} = \epsilon_0 \left( \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}(E_x^2 - E^2/2) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x E_z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y^2 - E^2/2) + \frac{\partial}{\partial z}(E_y E_z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(E_x E_z) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y E_z) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z^2 - E^2/2) \end{array} \right) - \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (2.11)$$

$$= \nabla \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} - (\epsilon_0/2) E^2 \mathbf{I}] - \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E},$$

en el último paso se utilizó la ecuación (2.6). La notación  $\mathbf{EE}$  y  $\mathbf{BB}$  denota el producto exterior <sup>1</sup>,  $E^2$  es la norma del campo eléctrico y  $\mathbf{I}$  es el tensor unidad de orden 2. El segundo término de la ecuación (2.10) también lo podemos escribir de manera similar como

$$\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \mathbf{EE} + \mu_0 \mathbf{HH} - \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \mathbf{I} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

La expresión en corchetes es el Tensor de Esfuerzos de Maxwell ( $\mathbf{T}$ ) en el vacío.

Si lo expresamos en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{T} = \left( \epsilon_0 \mathbf{EE} + \mu_0 \mathbf{HH} - \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \mathbf{I} \right) = \begin{pmatrix} \epsilon_0(E_x^2 - E^2/2) + \mu_0(H_x^2 - H^2/2) & \epsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y & \epsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z \\ \epsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y & \epsilon_0(E_y^2 - E^2/2) + \mu_0(H_y^2 - H^2/2) & \epsilon_0 E_y E_z + \mu_0 H_y H_z \\ \epsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z & \epsilon_0 E_y E_z + \mu_0 H_y H_z & \epsilon_0(E_z^2 - E^2/2) + \mu_0(H_z^2 - H^2/2) \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

Si el objeto esta rodeado por un medio que puede ser representado por una constante dieléctrica no dispersiva  $\epsilon$  y una susceptibilidad magnética  $\mu$ , entonces la fuerza mecánica puede ser calculada de la misma manera si se reemplaza el tensor de Maxwell de la ecuación (2.12) por

$$\mathbf{T} = \left( \epsilon_0 \epsilon \mathbf{EE} + \mu_0 \mu \mathbf{HH} - \frac{1}{2}(\epsilon_0 \epsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2) \mathbf{I} \right). \quad (2.14)$$

## 2.3. Momento electromagnético

Si integramos la ecuación (2.12) sobre un volumen  $V$  que contiene  $\rho$  y  $j$  obtenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \frac{d}{dt} \frac{1}{c^2} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV + \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV. \quad (2.15)$$

Notemos que el último término es igual a la Fuerza de Lorentz, es decir, el término mecánico (ecuación (2.8)). Si le aplicamos el Teorema de Gauss al primer término de la ecuación anterior obtenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} da, \quad (2.16)$$

donde  $\partial V$  denota la superficie de  $V$ ,  $\mathbf{n}$  es el vector unitario perpendicular a la superficie y  $da$  es un diferencial de área. Ahora podemos llegar a la Ley de Conservación de Momento Lineal

$$\int_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) da = \frac{d}{dt} [\mathbf{G}_{field} + \mathbf{G}_{mech}]. \quad (2.17)$$

Los términos  $\mathbf{G}_{mech}$  y  $\mathbf{G}_{field}$  denotan el momento mecánico y el momento del campo electromagnético respectivamente. Entonces ya encontramos una definición para el momento que lleva un campo electromagnético en un volumen  $V$  como

$$\mathbf{G}_{field} = \frac{1}{c^2} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV. \quad (2.18)$$

---

<sup>1</sup> $\mathbf{EE} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x E_x & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y E_y & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z E_z \end{pmatrix}$

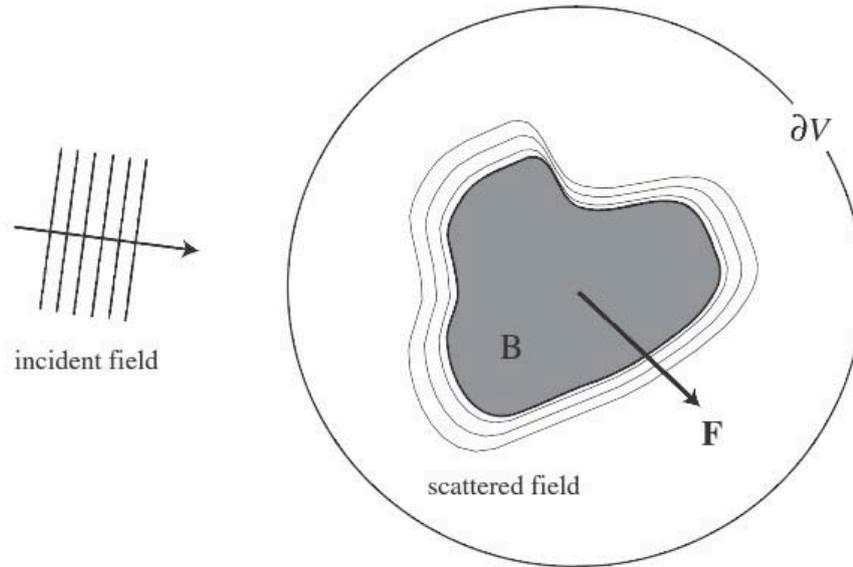


Figura 2.1: Fuerza inducida por un campo electromagnético incidente.

Este momento es creado por los términos dinámicos de las ecuaciones de Maxwell rotacionales. La derivada temporal del momento del campo es cero cuando se promedia sobre un periodo de oscilación, por lo que la fuerza mecánica promedio es

$$\mathbf{F} = \int_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) da \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) tiene validez general y permite calcular la fuerza mecánica actuando sobre cualquier objeto encerrado en la superficie  $\partial V$ . Podemos notar que la fuerza está determinada por los campos eléctrico y magnético en  $\partial V$ . Como la superficie  $\partial V$  es arbitraria, el resultado es el mismo sin importar que los campos sean evaluados en la superficie del objeto o en el campo lejano. En este desarrollo los campos utilizados son autoconsistentes con el problema, es decir, son una superposición de los campos incidentes y dispersados. Por lo tanto, antes de calcular la fuerza, se debe resolver para el campo electromagnético.

## 2.4. Fuerzas ópticas

Como sabemos, las fuerzas se producen por cambios en el momento lineal. Hablando de luz, las fuerzas producidas por esta no son la excepción. Si tomamos en cuenta un haz láser cualquiera con una distribución de intensidad gaussiana, las fuerzas que produce sobre partículas son de dos tipos: 1) fuerza de gradiente y 2) presión de radiación o de *scattering*.

La fuerza de gradiente está producida por el gradiente de intensidad del haz y actúa en el plano perpendicular a la dirección de propagación de éste. La presión de radiación o de *scattering* es debida por la transmisión de momento del haz a la partícula, y actúa en la dirección de propagación del haz.

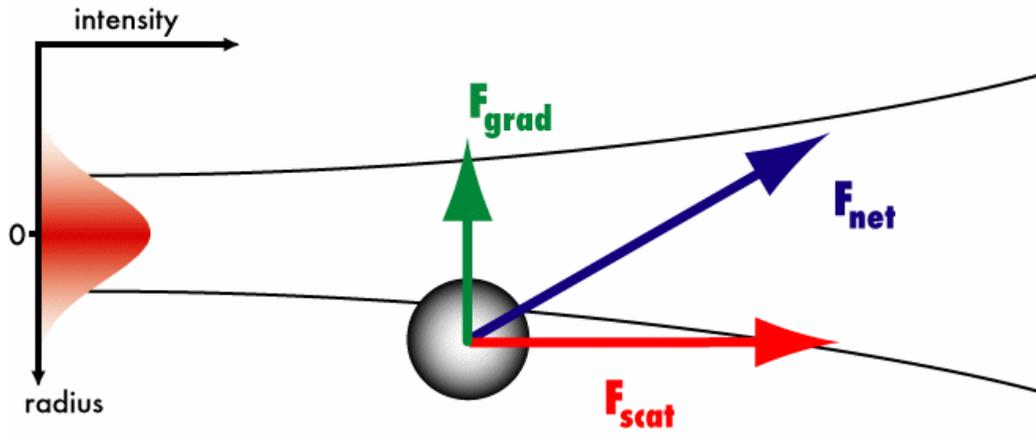


Figura 2.2: Fuerzas de gradiente y scattering inducidas por un haz con perfil de intensidad gaussiano.

### 2.4.1. Aproximación de rayos

Existen varias aproximaciones para obtener las fuerzas ópticas producidas por algún campo electromagnético que incide sobre un objeto, sin embargo, la más sencilla e intuitiva es la *aproximación de rayos*. La aproximación de rayos se puede utilizar cuando  $\lambda \ll d$  con  $d$  el diámetro de la partícula. Es decir, cuando la longitud de onda es mucho más pequeña que el tamaño de la partícula.

En la aproximación de rayos, el momento que lleva el haz está dado completamente en la dirección de propagación del rayo, es decir, en la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$ . Cuando el haz pasa por un objeto, este rayo se transmite. Pero la manera en que se transmite está dada completamente por el índice de refracción del objeto y su geometría.

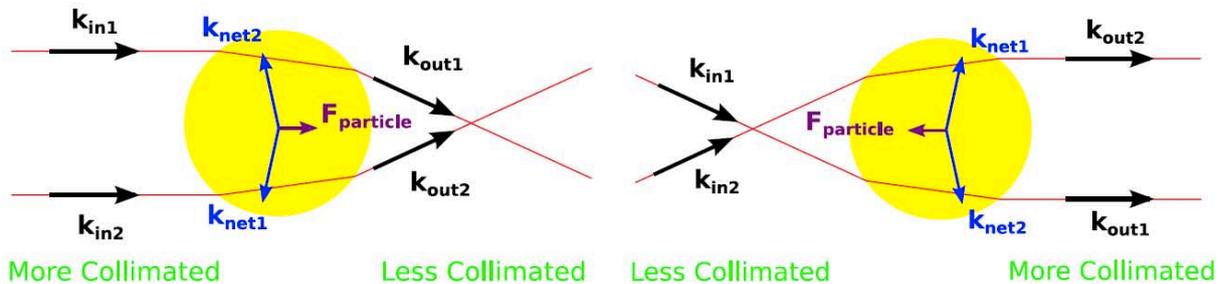


Figura 2.3: Intercambio de momento lineal de un haz y una partícula en la aproximación de rayos.

Por ejemplo [18], en la Figura 2.3, notamos que del lado izquierdo, un haz colimado incide (con todo el momento lineal en la misma dirección) sobre una partícula esférica. Al pasar por el objeto el haz ya no está colimado, por lo que lleva menor momento en la dirección original, por lo que la partícula siente una fuerza de presión de radiación. Del lado derecho, un haz no colimado incide en el objeto. Al refractarse, el haz sale completamente colimado, por lo que el momento del haz a la salida es mayor que el momento al incidir. Por lo tanto, la fuerza siente una fuerza negativa (dirección contraria a la dirección de propagación).

En este trabajo nos centraremos en el cálculo de fuerzas de *scattering* ya que para el problema que modelaremos se utilizará una aproximación con ondas planas, de las cuales el perfil de intensidad es constante.

## 2.4.2. Presión de radiación

Supongamos que tenemos un placa plana infinita sobre la cual incide una onda plana monocromática perpendicularmente. Sea  $r$  el coeficiente complejo de reflexión, entonces el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \text{Re} \left\{ [e^{ikz} + re^{-ikz}] e^{-i\omega t} \right\} \mathbf{n}_x, \quad (2.20)$$

Obtenemos el campo magnético

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \text{Re} \left\{ [e^{ikz} - re^{-ikz}] e^{-i\omega t} \right\} \mathbf{n}_y, \quad (2.21)$$

Utilizando la ecuación rotacional de Maxwell para el campo eléctrico, calculamos la presión de radiación en el plano infinito como

$$P_{\mathbf{nz}} = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_z \, da. \quad (2.22)$$

Por la forma de los campos, (2.20) y (2.21), podemos ver que los primeros dos términos de la ecuación (2.13) son cero, ya que los campos solo tienen componentes en las direcciones  $\mathbf{n}_x$  y  $\mathbf{n}_y$ . Por esto, tenemos que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_z = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2 \mathbf{n}_z = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 [1 + r^2] \mathbf{n}_z \quad (2.23)$$

Pero sabemos que la intensidad de una onda plana es  $I_0 = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2$  obtenemos finalmente que

$$P = \frac{I_0}{c} (1 + R) \quad (2.24)$$

con  $R = r^2$  la reflectancia. Es claro que cuando el material es perfectamente reflejante, es decir  $R = 1$ , la función de presión de radiación es máxima. Por lo que  $P_{max} = 2I_0/c$ .

## 2.4.3. Aproximación de Rayleigh

La aproximación de Rayleigh para calcular fuerzas producidas por campos electromagnéticos se basa en principios muy prácticos: 1)  $\lambda < d$  con  $d$  el tamaño de la partículas y 2) la partícula es suficientemente pequeña para poder aproximarla como un dipolo [20].

Al incidir un campo electromagnético sobre un dipolo, el dipolo es excitado. Por ejemplo, si incide un campo electromagnético propagándose sobre el eje  $Z$  y polarizado sobre el eje  $Y$ , el dipolo será excitado y acelerado de manera oscilatoria sobre el eje  $Y$  y emitirá radiación de manera toroidal, ecuaciones (2.87), (2.88) y Figura (2.8).

Para derivar la fuerza electromagnética actuando sobre un dipolo localizado en  $r_0$  se introduce la polarizabilidad

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.25)$$

en la densidad de fuerza de Lorentz. También se puede expresar el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el tensor de esfuerzos de Maxwell  $\mathbf{T}$  con el campo incidente y el campo dispersado por el dipolo.

El siguiente desarrollo para obtener la fuerza óptica con la aproximación de Rayleigh se basa en el desarrollo en [20]. Consideremos dos partículas cargadas con masa  $m_1$  y  $m_2$  separadas por una

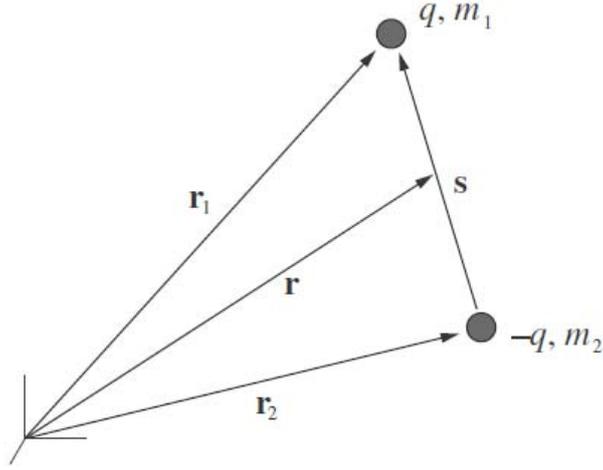


Figura 2.4: Representación de un dipolo iluminado por un campo electromagnético.

distancia  $\mathbf{S}$  e iluminados por algún campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Las partículas tienen carga de la misma magnitud pero diferente polaridad y están *amarradas* por un potencial  $U$ .

Podemos escribir las ecuaciones de movimiento utilizando la fuerza de Lorentz como

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t) + \dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1, t)] - \nabla U(\mathbf{r}_1, t), \quad (2.26)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -q[\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t) + \dot{\mathbf{r}}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2, t)] - \nabla U(\mathbf{r}_2, t). \quad (2.27)$$

Al tener dos partículas, para simplificar el problema nos fijamos en el centro de masa, es decir

$$\mathbf{r} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.28)$$

Con lo anterior se separa el movimiento interno de las dos partículas del movimiento del centro de masa. Expandiendo en Serie de Taylor obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \nabla]^n \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{E}(\mathbf{r}) \dots, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \cdot \nabla]^n \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{E}(\mathbf{r}) \dots \quad (2.30)$$

Se obtienen expresiones similares para los campos  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_1)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)$ . Las expresiones anteriores las podemos truncar al segundo término cuando  $s \ll \lambda$ . A esto se le llama la **aproximación dipolar**. Utilizando las ecuaciones (2.29) y (2.30) junto con el momento dipolar  $p = qs$ , encontramos que [20]

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (2.31)$$

es la fuerza mecánica ejercida por un campo electromagnético sobre las dos partículas representadas por un momento dipolar  $p$ . Para velocidades no relativistas, es decir,  $r \ll c$  el tercer término se omite.

En [20] se describe también otro método para obtener la fuerza mecánica ejercida por un campo electromagnético sobre un dipolo utilizando la densidad de fuerza de Lorentz  $f(\mathbf{r}, t)$ , sin embargo, no se describirá aquí.

#### 2.4.4. Promedio temporal de la fuerza

El primero término de la ecuación (2.31) lo podemos reescribir como

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} = -\mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}) = \sum_i p_i \nabla E_i + \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}) \quad (2.32)$$

con  $i \in [x, y, z]$ . Si ahora promediamos en el tiempo, obtenemos la fuerza

$$\mathbf{F} = \sum_i p_i(t) \nabla E_i(t) . \quad (2.33)$$

La fuerza óptica es aditiva por lo que se pueden sumar fuerzas actuando en subvolúmenes individuales dipolares para obtener la fuerza actuando sobre un objeto macroscópico. Es decir, si representamos la ecuación (2.33) por un dipolo por unidad de volumen (polarización  $\mathbf{P}$ ) y sumamos todas las fuerzas en el volumen, calculamos el promedio temporal de la fuerza como

$$\mathbf{F} = \int_V \sum_i P_i(\mathbf{r}, t) \nabla E_i(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.34)$$

con  $P_i$  las componentes cartesianas de la polarización  $\mathbf{P}$ .

#### 2.4.5. Campos monocromáticos

Si consideramos un dipolo que es irradiado por un campo electromagnético monocromático con frecuencia angular  $\omega$ , los campos los podemos escribir como<sup>2</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = Re \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} , \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = Re \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} . \quad (2.36)$$

Cuando existe una relación lineal entre los campos y el dipolo, el dipolo toma la misma dependencia temporal que lo campos, por lo tanto

$$\mathbf{p}(t) = Re \underline{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} . \quad (2.37)$$

Cuando la partícula no tiene un momento dipolar estático, a primer orden, el momento dipolar inducido es proporcional al campo eléctrico en la posición ( $\mathbf{r}$ ) de la partícula

$$\underline{\mathbf{p}} = \alpha(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \quad (2.38)$$

con  $\alpha$  la polarizabilidad de la partícula, cuya forma depende de la naturaleza de ésta. La polarizabilidad es una característica importante de átomos y partículas microscópicas la cual describe la respuesta a un campo electromagnético externo. Dicho de otra manera, es la tendencia de una distribución de cargas de ser desplazada por un campo eléctrico externo. Para un medio isotrópico se define como la razón del momento dipolar inducido y el campo eléctrico externo. Generalmente,  $\alpha$  es un tensor de rango dos, pero para átomos y moléculas se puede utilizar la representación escalar ya que la proyección de  $p$  a lo largo de la dirección del campo eléctrico es la importante.

Si promediamos la ecuación (2.31), omitiendo su tercer término por las razones que ya se mencionaron, entonces el promedio temporal de la fuerza es

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} Re (\underline{\mathbf{p}}^* \cdot \nabla) \underline{\mathbf{E}} - i\omega (\underline{\mathbf{p}}^* \times \underline{\mathbf{B}}) = \sum_i \frac{1}{2} Re p_i^* \nabla E_i^* . \quad (2.39)$$

<sup>2</sup> $\underline{\mathbf{E}}$  y  $\underline{\mathbf{B}}$  son las amplitudes complejas.

Si ahora introducimos el momento dipolar de la ecuación (2.38), reordenamos los términos y utilizamos la polarizabilidad como  $\alpha = \alpha + i\alpha$  (ecuación (2.51))

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{2} \sum_i \text{Re} \underline{E}_i^* \nabla \underline{E}_i + \frac{\alpha}{2} \sum_i \text{Im} \underline{E}_i^* \nabla \underline{E}_i . \quad (2.40)$$

El primer término es la *fuerza de gradiente* o *fuerza de dipolo*  $\mathbf{F}_{grad}$  y lo podemos reescribir como  $(\alpha/4)\nabla(\underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{E}})$ , lo cual implica que es una fuerza conservativa, es decir,  $\nabla \times \mathbf{F}_{grad} = 0$ . El segundo término no se puede representar como el gradiente de un potencial, por lo que es una fuerza no conservativa. A esa fuerza se le llama *fuerza de dispersión* o de *scattering*  $\mathbf{F}_{scatt}$ . Con ambos términos se determina el promedio temporal de la fuerza mecánica.

La fuerza de *scattering* se considera como una consecuencia de la transferencia de momento del campo electromagnético a la partícula, por lo que generalmente empuja a la partícula en la dirección de propagación del campo electromagnético, mientras que la fuerza de gradiente acelera a la partícula hacia los puntos extremos de la intensidad del campo. Por ello, los láseres enfocados fuertemente pueden atrapar partículas en todas las dimensiones.

Para una esfera homogénea pequeña con una polarizabilidad real cuasiestática, la parte imaginaria es

$$\alpha = \frac{k^3}{6\pi\epsilon_0} \alpha^2, \quad (2.41)$$

donde  $k = n(2\pi/\lambda)$  con  $n$  el índice de refracción del medio. Ver sección (2.4.6).

Tomemos como ejemplo un campo eléctrico del cual su amplitud compleja es

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}\mathbf{n}_E \quad (2.42)$$

donde  $E_0$  es la amplitud real del campo y  $\mathbf{n}_E$  es el vector unitario en dirección de la polarización. Si calculamos el promedio temporal con la ecuación (2.39) obtenemos

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{4} \nabla E_0^2 + \frac{\alpha}{2} E_0^2 \nabla \phi. \quad (2.43)$$

Si sustituimos la ecuación (2.42) en la ecuación (2.35), el campo eléctrico se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}) \cos[\omega t - \phi(\mathbf{r})], \quad (2.44)$$

con el cual calculamos el campo magnético con las ecuaciones de Maxwell, con lo que nos da

$$E_0^2 \nabla \phi = 2\omega \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad E_0^2 = 2 \mathbf{E}^2 \quad (2.45)$$

que si sustituimos en la ecuación (2.43) obtenemos finalmente

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{2} \nabla \mathbf{E}^2 + \omega \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{E}$  denota la magnitud dependiente del tiempo del campo eléctrico. La ecuación (2.46) indica que la fuerza de *scattering* es proporcional al momento del campo electromagnético definido por la ecuación

$$\mathbf{G}_{field} = \frac{1}{c^2} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (2.47)$$

que es la definición de momento que lleva una onda electromagnética dentro de un volumen  $V$ . Mayores detalles sobre los cálculos se pueden encontrar en [20].

## 2.4.6. Ecuación de Clausius-Mossotti y reacción de radiación

Si un campo eléctrico externo incide en un dipolo, entonces el momento dipolar inducido es

$$\mathbf{p} = \alpha_{lin} \mathbf{E}_{inc}, \quad (2.48)$$

donde  $\alpha_{lin}$  es la polarizabilidad del átomo o partícula. Éste campo eléctrico polariza los átomos o moléculas resultando en un campo de polarización que es proporcional al campo eléctrico incidente dentro del material dado por

$$\mathbf{P} = \frac{N}{V} \mathbf{p}. \quad (2.49)$$

con  $N$  es el número de átomos o moléculas en un volumen  $V$  de material.  $\mathbf{P}$  es el momento dipolar por unidad de área y  $\mathbf{p}$  es el momento dipolar por átomo o molécula. Para una esfera en el límite estático, la relación de Clausius-Mossotti esta dada por

$$\alpha_{CM} = 3V\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, \quad (2.50)$$

donde  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$  es el volumen de la esfera y  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa. Si ahora se hace incidir un campo eléctrico oscilante en una partícula, la respuesta de polarización de la partícula depende del campo incidente así como en el campo dispersado por él mismo. Ésta interacción con su propio campo dispersado introduce algunas correcciones a la ecuación de Clausius-Mossotti, la cual se derivó para un campo eléctrico incidente estático. La polarizabilidad resultante será

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha_{CM}}{1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \left[ (k_0 a)^2 + \frac{2i}{3} (k_0 a)^3 \right]}, \quad (2.51)$$

donde  $\alpha_{CM}$  es la polarizabilidad de Clausius-Mossotti. Podemos notar que la ecuación (2.51) introduce un término imaginario. Éste término se debe a la interacción del dipolo con su propio campo dispersado y produce la llamada *reacción de radiación*. Los detalles de la derivación de las ecuaciones (2.50) y (2.51) se pueden encontrar en [14].

## 2.5. Métodos de integrales de volumen

Partículas pequeñas pueden ser aproximadas por dipolos. El momento dipolar inducido en estas partículas es proporcional al campo local en la posición del dipolo. El campo local corresponde al campo incidente que ilumina al dipolo. Sin embargo, cuando se consideran muchas partículas, el campo local es la superposición de la radiación incidente y todos los campos parciales dispersados por las partículas alrededor. Por lo que todas las partículas dependen de todas las demás [20].

Para este problema, no se requiere que las partículas estén separadas unas de las otras. Pueden estar juntas formando un objeto macroscópico. Por lo tanto, la respuesta de materia a la incidencia de luz se puede formular como una respuesta colectiva de dipolos individuales que ocupan algún elemento de volumen. Ésta superposición de campos de los dipolos se debe hacer de manera auto consistente ya que la magnitud y orientación de cada dipolo son funciones del campo local definido por la excitación y por los demás dipolos. Éstos métodos involucran sumas sobre todas las posiciones de los dipolos. Cuando el tamaño de los dipolos se acerca a cero, las sumas se convierten en integrales de volumen. Una vez que se resuelve el problema de dispersión de campos, la fuerza se calcula como en (2.40), es decir, como en la aproximación dipolar.

En las siguientes secciones se explicará de manera breve el método de Lorenz-Mie y el método de dipolos acoplados (CDM), el cual será el método utilizado en éste trabajo.

### 2.5.1. Lorenz-Mie

El método de Lorenz-Mie para calcular los campos electromagnéticos dispersados por partículas esféricas de materiales isotrópicos está basado en el *principio de Huygens*. El principio de esta técnica es expandir el campo incidente y el campo dispersado en combinaciones lineales de funciones esféricas, usualmente armónicos esféricos. El problema se reduce a encontrar los coeficientes de estas expansiones. Considerando una onda electromagnética plana

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0^{inc} e^{ik_1 \hat{\mathbf{n}}^{inc} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}_0^{inc} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{inc} = 0, \quad (2.52)$$

que incide sobre una partícula, si expandimos los campos incidentes y dispersados en funciones de onda esféricas, obtenemos

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} Rg\mathbf{M}_{mn}(k_1 \mathbf{r}) + b_{mn} Rg\mathbf{N}_{nm}(k_1 \mathbf{r})], \quad (2.53)$$

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [p_{mn} \mathbf{M}_{mn}(k_1 \mathbf{r}) + q_{mn} \mathbf{N}_{nm}(k_1 \mathbf{r})], \quad \mathbf{r} > r_>, \quad (2.54)$$

donde  $k_1$  es el número de onda en el medio y  $r_>$  el radio de la esfera más pequeña que encierra la partícula como en la Figura 2.5.  $Rg\mathbf{M}_{mn}$  y  $Rg\mathbf{N}_{nm}$  son las funciones esféricas con las cuales se asegura que se cumpla la condición de radiación en el infinito, es decir, que la componente transversal del campo dispersado decae como  $1/r$ , mientras que la componente radial decae más rápido que  $1/r$ .

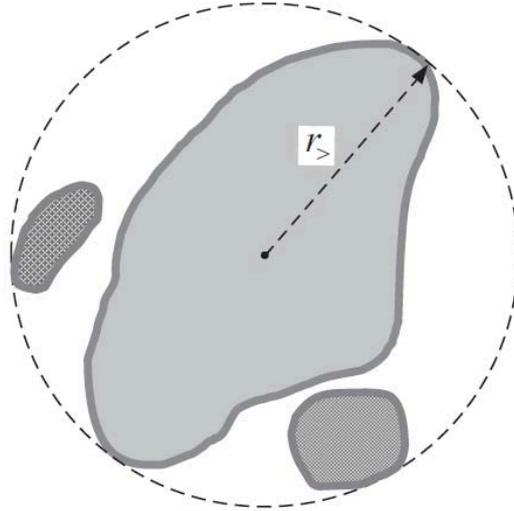


Figura 2.5: Esfere de radio  $r > r_>$  mínimo que encierra a una partícula.

Los coeficientes de la ecuación (2.53) son

$$a_{mn} = 4\pi(-1)^m i^n d_n \mathbf{E}_0^{inc} \cdot \mathbf{C}_{mn}^*(\vartheta^{inc}) \exp(im\varphi^{inc}), \quad (2.55)$$

$$b_{mn} = 4\pi(-1)^m i^{n-1} d_n \mathbf{E}_0^{inc} \cdot \mathbf{B}_{mn}^*(\vartheta^{inc}) \exp(im\varphi^{inc}), \quad (2.56)$$

con

$$\mathbf{C}_{mn}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{n(n+a)} [\mathbf{C}_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + i\mathbf{C}_{mn}^o(\vartheta, \varphi)], \quad (2.57)$$

$$\mathbf{B}_{mn}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{n(n+a)} [\mathbf{B}_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + i\mathbf{B}_{mn}^o(\vartheta, \varphi)], \quad (2.58)$$

y

$$\mathbf{C}_{mn}^e(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{-i} \frac{(-1)^m}{2\sqrt{n(n+1)}} [\mathbf{C}_{mn}(\vartheta, \varphi) \pm \mathbf{C}_{mn}^*(\vartheta, \varphi)], \quad (2.59)$$

$$\mathbf{B}_{mn}^e(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{-i} \frac{(-1)^m}{2\sqrt{n(n+1)}} [\mathbf{B}_{mn}(\vartheta, \varphi) \pm \mathbf{B}_{mn}^*(\vartheta, \varphi)], \quad (2.60)$$

con los super índices  $e$  y  $o$  representan función par e impar respectivamente.

Al conocer el campo incidente, se conocen los coeficientes  $a_{mn}$  y  $b_{mn}$  por lo que nos falta conocer los coeficientes del campo dispersado. Como las ecuaciones de Maxwell son lineales, suponemos que  $p_{mn}$  y  $q_{mn}$  se relacionan de manera lineal con  $a_{mn}$  y  $b_{mn}$ . Esta relación lineal estará dada por una matriz  $\mathbf{T}$  tal que

$$p_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (T_{mnmn}^{11} a_{mn} + T_{mnmn}^{12} b_{mn}), \quad (2.61)$$

$$q_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (T_{mnmn}^{21} a_{mn} + T_{mnmn}^{22} b_{mn}), \quad (2.62)$$

que se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12} \\ \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

lo que implica que para encontrar el campo eléctrico dispersado, solamente tenemos que encontrar la matriz  $\mathbf{T}$ . El método anterior se conoce como el *Método de la Matriz de Transición*.

En el caso más simple, cuando se trata de una partícula esférica, todo se simplifica mucho y se llama la *aproximación de Lorenz-Mie*. En este caso, se encuentra que la matriz  $\mathbf{T}$  es una matriz diagonal, es decir

$$T_{mnmn}^{12} = T_{mnmn}^{21} = 0, \quad (2.64)$$

$$T_{mnmn}^{11} = -\delta_{mm} \delta_{nn} b_n, \quad (2.65)$$

$$T_{mnmn}^{22} = -\delta_{mm} \delta_{nn} a_n, \quad (2.66)$$

con

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi_n(x) - \psi_n(x)\psi_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n(x) - \xi_n(x)\psi_n(mx)}, \quad (2.67)$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(x)(mx)\psi_n(mx) - \psi_n(mx)\psi_n(x)}{m\xi_n(x)\psi_n(mx) - \psi_n(mx)\xi_n(x)}, \quad (2.68)$$

donde  $m$  es el índice de refracción relativo y  $\xi_n(z) = zh_n^{(1)}(z)$  con  $h_n^{(1)}(z)$  las funciones de Hankel de primer tipo y  $\psi_n = zj_n(z)$  con  $j_n(z)$  las funciones de Bessel de primer tipo. Para más detalles en los cálculos se puede consultar el libro *Scattering, Absorption, And Emission of Light by Small Particles* de Mishchenko, M [16].

## 2.5.2. Dipolos acoplados

Como hemos visto anteriormente, para calcular la fuerza óptica que actúa sobre una partícula suficientemente pequeña se utiliza la aproximación dipolar o de Rayleigh. Con esta aproximación se asume que la partícula sobre la cual queremos calcular las fuerzas ópticas es un dipolo que es excitado por el campo electromagnético incidente. Sin embargo, cuando las partículas que queremos estudiar tienen un tamaño considerable ( $d > \lambda$ ) debemos utilizar alguna aproximación más adecuada para modelar el sistema. Una de estas aproximaciones es el Método de Dipolos Acoplados (CDM por sus siglas en inglés). Éste método modela una partícula como un sistema de muchos dipolos sobre el cual incide un campo electromagnético. Al incidir este campo electromagnético, cada dipolo del sistema es excitado, por lo cual empieza a emitir radiación. Ésta radiación, a su vez, excita a todos los demás dipolos, por lo que su manera de irradiar se modifica. Por ello se dice que los dipolos están *acoplados*.

### Radiación del dipolo

Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas, una positiva y una negativa, que interactúan entre sí. Para que quede más claro, tomemos como ejemplo a un par de cargas eléctricas de diferente signo pero de igual magnitud separadas una distancia  $d$ . Los dipolos se caracterizan por una cantidad vectorial llamada *momento dipolar*, que es un vector que va desde la carga negativa hacia la carga positiva, es decir

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{d}, \quad (2.69)$$

donde  $q$  es la carga y  $\mathbf{d}$  es el vector de posición que va desde la carga positiva a la carga negativa.

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (2.70)$$

donde  $\alpha$  es la polarizabilidad electrónica.

Como se explica en *Introduction to Electrodynamics* de David J. Griffiths [10]

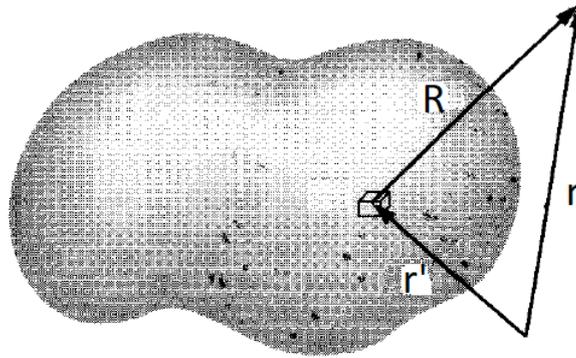


Figura 2.6: Tiempo de retardo.

para calcular el campo electromagnético producido por un dipolo se deben utilizar los potenciales retardados

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} d\tau, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{R} d\tau, \quad (2.72)$$

donde  $R$  es la distancia de la fuente localizada en  $\mathbf{r}$  al punto  $\mathbf{r}$  donde se mide el campo y

$$t_r = t - \frac{R}{c} \quad (2.73)$$

es el tiempo de retardo, es decir, el tiempo que tarda la distribución de carga en afectar el campo en  $\mathbf{R}$ , ya que no es un efecto instantáneo (Figura (2.6)).

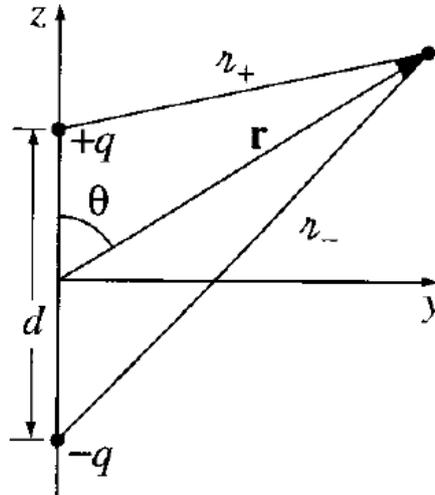


Figura 2.7: Modelo del dipolo.

Para sistemas de cargas y corrientes que varían con el tiempo, podemos hacer un análisis de Fourier y tratar cada componente por separado. Podemos considerar campos y potenciales de un sistema localizado de cargas y corrientes que varíen de manera sinusoidal con el tiempo, es decir

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (2.75)$$

La ecuación (2.72) se puede escribir como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x \int dt \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t'\right), \quad (2.76)$$

donde  $\delta$  es la función delta de Dirac. Como supusimos que la corriente, ecuación (2.75), varía sinusoidalmente con el tiempo, entonces la solución a la ecuación anterior se escribe como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.77)$$

con  $k$  el número de onda. El campo magnético y el campo eléctrico se pueden calcular como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{E} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (2.79)$$

con  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  es la impedancia del espacio.

Se puede expandir el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  en armónicos esféricos, que si lo evaluamos en campo lejano, es decir, cuando  $kr \gg 1$ , podemos notar que la parte exponencial de la ecuación (2.77) oscila rápidamente, determinando el comportamiento del potencial vectorial. Si hacemos la aproximación  $\mathbf{x} - \mathbf{x} \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$  donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{x}$ . Si además, la distancia inversa se reemplaza con  $r$ , el potencial vectorial nos queda

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} d^3x. \quad (2.80)$$

Podemos notar que en el campo lejano, el potencial vectorial se comporta como una onda esférica. Ahora, si expandimos la integral de la ecuación anterior en potencias de  $k$ , obtenemos

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) (k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^n d^3x. \quad (2.81)$$

Si nos quedamos con el primer término, el potencial vectorial es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2.82)$$

por lo que podemos escribir la integral de la ecuación anterior si integramos por partes como

$$\int \mathbf{J} d^3x = - \int \mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3x + i\omega \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2.83)$$

donde utilizamos la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho, \quad (2.84)$$

y la definición de [13] del momento dipolar

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2.85)$$

por lo tanto, el potencial vectorial es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{\mathbf{p} e^{ikr}}{r}. \quad (2.86)$$

Ya teniendo el potencial vectorial, podemos calcular el campo eléctrico y el campo magnético utilizando las ecuaciones (2.78) y (2.79)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (2.88)$$

Ya que tenemos el campo electromagnético radiado por un dipolo, podemos calcular la energía radiada. Ésto está determinada por el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.89)$$

que en coordenadas esféricas y haciendo un promedio en el tiempo (sobre un ciclo) nos da

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.90)$$

Podemos ver con la ecuación (2.90) que no hay radiación a lo largo del eje del dipolo, es decir, cuando  $\theta = 0$ . El perfil de intensidad tiene forma *toroidal*, Figura (2.8), por lo que la mayoría de la energía es radiada de manera perpendicular al momento dipolar y no hay radiación en la dirección del dipolo.

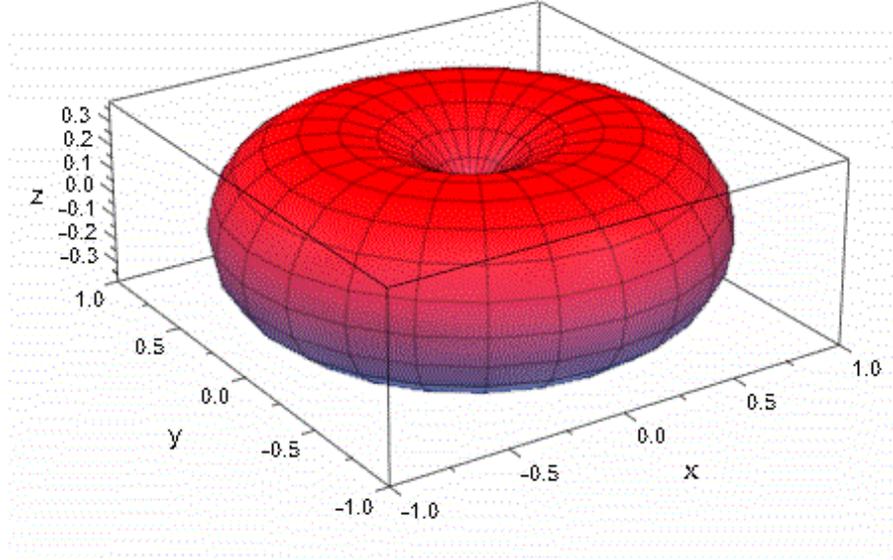


Figura 2.8: Perfil de intensidad de la radiación de un dipolo excitado por un campo eléctrico con frecuencia  $\omega$ .

### Cálculo del campo eléctrico en el método de dipolos acoplados (CDM)

Supongamos que tenemos una partícula de tamaño  $d \gg \lambda$ . Podemos representar esta partícula por un arreglo cúbico tridimensional de  $N$  unidades polarizables (dipolos). El campo eléctrico en la posición de cada unidad es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_j) + \sum_{l=1, l \neq j}^N \mathbf{T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l) \mathbf{p}(\mathbf{r}_l), \quad (2.91)$$

donde  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_j)$  es el campo incidente,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$  es el campo local en la posición  $\mathbf{r}_j$  y  $\mathbf{p}(\mathbf{r}_l) = \alpha(\mathbf{r}_l) \mathbf{E}(\mathbf{r}_l)$  es el momento dipolar de la unidad  $l$ .  $\mathbf{T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l)$  es un tensor de segundo orden que describe la interacción entre los dipolos  $j$  ésimo y  $l$  ésimo. Se utiliza la polarizabilidad con la relación de Clausius-Mossotti de la ecuación (2.50).  $\alpha(\mathbf{r}_l)$  es la polarizabilidad dinámica, de la unidad  $l$ , ecuación (2.51)

$$\alpha_0(\mathbf{r}_j) = 3V\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, \quad (2.92)$$

$$\alpha(\mathbf{r}_j) = \alpha_0 \left\{ 1 - i \frac{k^3 \alpha_0}{6\pi\epsilon_0} \right\}^{-1}, \quad (2.93)$$

con  $\alpha_0$  la de Clausius-Mossotti,  $\alpha$  es la expansión en serie hasta orden 1 de la ecuación (2.51),  $V = \frac{4}{3}\pi d^3$ ,  $d$  el radio de los dipolos,  $\epsilon_r$  la permitividad relativa del objeto y  $k$  el número de onda. Ya teniendo campo eléctrico de la ecuación (2.91), el promedio temporal de la fuerza [4] actuando sobre cada dipolo es la ecuación (2.40).

Al tener la fuerza sobre cada dipolo, podemos obtener la fuerza actuando sobre la partícula sumando las contribuciones de cada dipolo como

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_j). \quad (2.94)$$

Nos damos cuenta que si queremos calcular la fuerza total sobre una partícula, solamente es necesario conocer el campo incidente, el campo sobre cada dipolo y las posiciones de los dipolos. Para calcular el campo eléctrico en la posición de cada dipolo utilizamos la ecuación (2.91). Por ejemplo, para el dipolo  $j$  ésimos tendríamos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_j) + \mathbf{T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_1)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) + \dots + \mathbf{T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{j-1})\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_{j-1}) \\ + \mathbf{T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{j+1})\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_{j+1}) + \dots + \mathbf{T}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_N)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_N). \quad (2.95)$$

La ecuación (2.91) nos define un sistema de  $N$  ecuaciones que se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_j) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \dots & \mathbf{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_1) & \dots & \mathbf{T}(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_{N-1}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

con lo que tenemos un sistema de  $N$  ecuaciones de la forma

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_0 + \alpha \mathbf{T} \mathbf{E}_T, \quad (2.97)$$

por lo tanto

$$\mathbf{E}_T = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{T})^{-1} \mathbf{E}_0 \quad (2.98)$$

es el campo eléctrico en la posición de todos los dipolos e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Es importante notar que  $\mathbf{E}_T$  es una matriz de  $N \times 1$  debido a que  $\mathbf{E}_T = (\mathbf{E}(\mathbf{r}_1), \mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \dots, \mathbf{E}(\mathbf{r}_N))^T$ . Ya que tenemos el campo eléctrico total en la posición de cada dipolo, queremos encontrar el campo eléctrico en cualquier posición  $\mathbf{r}$  del espacio. Este campo está dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_j). \quad (2.99)$$

Ahora necesitamos una expresión de  $\mathbf{T}$ . De acuerdo a [13], el campo radiado por un dipolo al ser excitado por un campo eléctrico es

$$\mathbf{E}_{sca,j} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{l=j}^N \frac{e^{ikr_{jl}}}{r_{jl}^3} \left[ k^2 \mathbf{r}_{jl} \times (\mathbf{p}_l \times \mathbf{r}_{jl}) + \frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\mathbf{r}_{jl}(\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l) - r_{jl}^2 \mathbf{p}_l] \right], \quad (2.100)$$

donde  $\mathbf{r}_{jl} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l$  y los subíndices  $j$  y  $l$  nos indican a los dipolo  $j$  ésimos y  $l$  ésimos respectivamente. Si nos fijamos en la parte dentro de los corchetes cuadrados

$$\underbrace{k^2 \mathbf{r}_{jl} \times (\mathbf{p}_l \times \mathbf{r}_{jl})}_{\mathbf{1}} + \overbrace{\frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\mathbf{r}_{jl}(\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l) - r_{jl}^2 \mathbf{p}_l]}^{\mathbf{2}}, \quad (2.101)$$

el término  $\mathbf{1}$  se puede escribir como

$$\mathbf{1} = k^2 \mathbf{r}_{jl} \times (\mathbf{p}_l \times \mathbf{r}_{jl}) = k^2 \mathbf{p}_l (\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{r}_{jl}) - k^2 \mathbf{r}_{jl} (\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l) = k^2 \alpha \mathbf{E}_l (\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{r}_{jl}) - k^2 \alpha \mathbf{r}_{jl} (\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{E}_l) \quad (2.102)$$

con  $\mathbf{r}_{jl} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l = (x_j - x_l, y_j - y_l, z_j - z_l)$ .

De la ecuación anterior, si nos fijamos en la componente  $X$  obtenemos

$$k^2 \alpha E_l^x r_{jl}^2 - k^2 \alpha (x_j - x_l) [(x_j - x_l) E_l^x + (y_j - y_l) E_l^y + (z_j - z_l) E_l^z], \quad (2.103)$$

la componente  $Y$

$$k^2 \alpha E_l^y r_{jl}^2 - k^2 \alpha (y_j - y_l) [(x_j - x_l) E_l^x + (y_j - y_l) E_l^y + (z_j - z_l) E_l^z], \quad (2.104)$$

y la componente  $Z$

$$k^2 \alpha E_l^z r_{jl}^2 - k^2 \alpha (z_j - z_l) [(x_j - x_l) E_l^x + (y_j - y_l) E_l^y + (z_j - z_l) E_l^z]. \quad (2.105)$$

que si lo escribimos en forma matricial obtenemos

$$\mathbf{1} = k^2 \alpha \begin{pmatrix} r_{jl}^2 - (x_j - x_l)^2 & -(x_j - x_l)(y_j - y_l) & -(x_j - x_l)(z_j - z_l) \\ -(x_j - x_l)(y_j - y_l) & r_{jl}^2 - (y_j - y_l)^2 & -(y_j - y_l)(z_j - z_l) \\ -(x_j - x_l)(z_j - z_l) & -(y_j - y_l)(z_j - z_l) & r_{jl}^2 - (z_j - z_l)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l^x \\ E_l^y \\ E_l^z \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

siendo  $\mathbf{A}$  la matriz de  $3 \times 3$ . Ahora, el término  $\mathbf{2}$  de la ecuación (2.101) se puede escribir como

$$\mathbf{2} = \frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\mathbf{r}_{jl}(\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l) - r_{jl}^2 \mathbf{p}_l] = \frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\alpha \mathbf{r}_{jl}(\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{E}_l) - \alpha r_{jl}^2 \mathbf{E}_l], \quad (2.107)$$

que su coordenada  $X$  es

$$\frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\alpha (x_j - x_l) [(x_j - x_l) E_l^x + (y_j - y_l) E_l^y + (z_j - z_l) E_l^z] - \alpha r_{jl}^2 E_l^x], \quad (2.108)$$

su coordenada  $Y$  es

$$\frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\alpha (y_j - y_l) [(x_j - x_l) E_l^x + (y_j - y_l) E_l^y + (z_j - z_l) E_l^z] - \alpha r_{jl}^2 E_l^y], \quad (2.109)$$

y su coordenada  $Z$  es

$$\frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\alpha (z_j - z_l) [(x_j - x_l) E_l^x + (y_j - y_l) E_l^y + (z_j - z_l) E_l^z] - \alpha r_{jl}^2 E_l^z], \quad (2.110)$$

que en forma matricial se puede escribir como

$$\mathbf{2} = \frac{1 - ikr_{jl}}{r_{jl}^2} \begin{pmatrix} 3\alpha (x_j - x_l)^2 - \alpha r_{jl}^2 & 3\alpha (x_j - x_l)(y_j - y_l) & 3\alpha (x_j - x_l)(z_j - z_l) \\ 3\alpha (x_j - x_l)(y_j - y_l) & 3\alpha (y_j - y_l)^2 - \alpha r_{jl}^2 & 3\alpha (y_j - y_l)(z_j - z_l) \\ 3\alpha (x_j - x_l)(z_j - z_l) & 3\alpha (y_j - y_l)(z_j - z_l) & 3\alpha (z_j - z_l)^2 - \alpha r_{jl}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l^x \\ E_l^y \\ E_l^z \end{pmatrix}, \quad (2.111)$$

siendo  $\mathbf{B}$  la matriz de  $3 \times 3$ . Por lo tanto, el campo dispersado por el dipolo  $j$  ésimo (2.100) es

$$\mathbf{E}_{scat,j} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{l=j} \frac{e^{ikr_{jl}}}{r_{jl}^3} \left[ k^2 \alpha \mathbf{A} + \frac{1 - ikr_{jl}}{r_{jl}^2} \mathbf{B} \right] \mathbf{E}_l^T, \quad (2.112)$$

donde el superíndice  $T$  indica la matriz transpuesta.

Como ejemplo tomemos  $N = 2$ , entonces los campos en las posiciones de los dos dipolos serán

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \quad (2.113)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_2) + \mathbf{T}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_1), \quad (2.114)$$

donde  $\mathbf{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  y  $\mathbf{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)$  son matrices de  $3 \times 3$ . Escribiendo lo anterior con  $\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  y  $\mathbf{N} = \mathbf{T}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) + \mathbf{M}\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \quad (2.115)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_2) + \mathbf{N}\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_1). \quad (2.116)$$

Si combinamos estas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \\ \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_2) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

con lo que tenemos un sistema de la forma

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_0 + \alpha\bar{\mathbf{X}}\mathbf{E}_T, \quad (2.118)$$

con  $\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{N} & 0 \end{pmatrix}$  una matriz de  $6 \times 6$ , por lo tanto

$$\mathbf{E}_T = (I - \alpha\bar{\mathbf{X}})^{-1}\mathbf{E}_0 \quad (2.119)$$

es el campo eléctrico en la posición de todos los dos dipolos e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. El campo eléctrico en cualquier posición  $\mathbf{r}$  del espacio es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \quad (2.120)$$

con  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  y  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  calculadas de acuerdo a la ecuación (2.97). Este caso se estudiará por separada para poder compara los resultados obtenidos con los cálculos realizados en esta sección con las simulaciones. Este procedimiento se encuentra en el Apéndice C.

# Capítulo 3

## Fuerzas ópticas en sistemas discretos de dipolos

### 3.1. Interferencia de dos ondas planas

En este trabajo queremos calcular la fuerza óptica sobre diferentes arreglos de dipolos utilizando el Método de Dipolos Acoplados. El campo incidente que utilizaremos es el producido por dos ondas planas incidiendo sobre la partícula en el plano  $XZ$  con polarización  $S$  como se muestra en la Figura 3.1

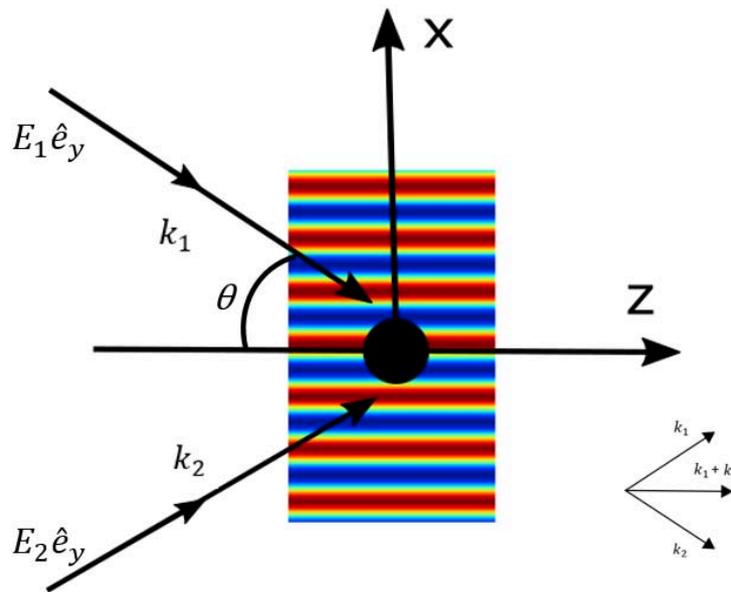


Figura 3.1: Dos ondas planas incidiendo con un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $Z$ . [3]

donde  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  son los vectores de onda de las ondas planas incidentes, y  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  es el vector de onda resultante de la interferencia de los campos.

Como vimos en la introducción, el campo resultante de la interferencia de dos ondas planas que inciden a un ángulo  $\theta$  esta dada por la ecuación (1.6). Ahora, si ambas ondas planas inciden paralelas al plano  $XZ$  y polarizadas en el eje  $Y$ , entonces

$$\mathbf{E} = E_0 e^{ik\cos\theta z} 2\cos(k\sin\theta y) e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{f}}_y. \quad (3.1)$$

Cabe señalar que  $2\pi/\Lambda = k\cos\theta = 2\pi/\lambda\cos\theta$  por lo que  $\Lambda = \lambda/\cos\theta$  es la longitud de onda efectiva del patrón de interferencia. Ver Apéndice A

Para realizar las simulaciones numéricas se escribieron programas en MATLAB para calcular los campos eléctricos incidentes y resultantes para diversos arreglos de dipolos.

En la Figura (3.2) se muestra el campo eléctrico para dos ondas planas que inciden con un ángulo  $\theta = 79^\circ$  respecto al eje  $Z$ , en un medio con índice de refracción  $n_m = 1$ , con  $\lambda = 532 \text{ nm}$  y para todos los casos la amplitud del campo eléctrico incidente de cada onda  $E_0 = 1 \text{ V/m}$ .

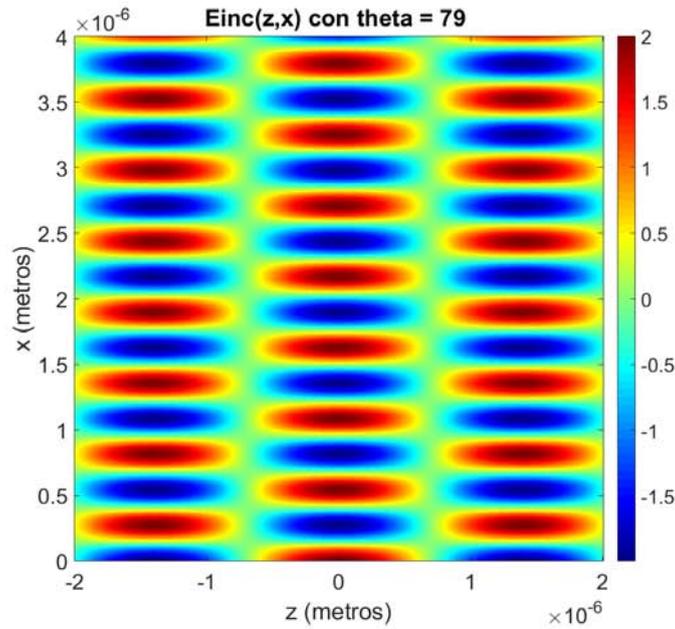


Figura 3.2: Parte real del campo eléctrico en  $V/m$ , ecuación (3.1), de la interferencia de dos ondas planas incidiendo con un ángulo  $\theta = 79^\circ$  respecto al eje  $Z$  en  $t = 0$ .

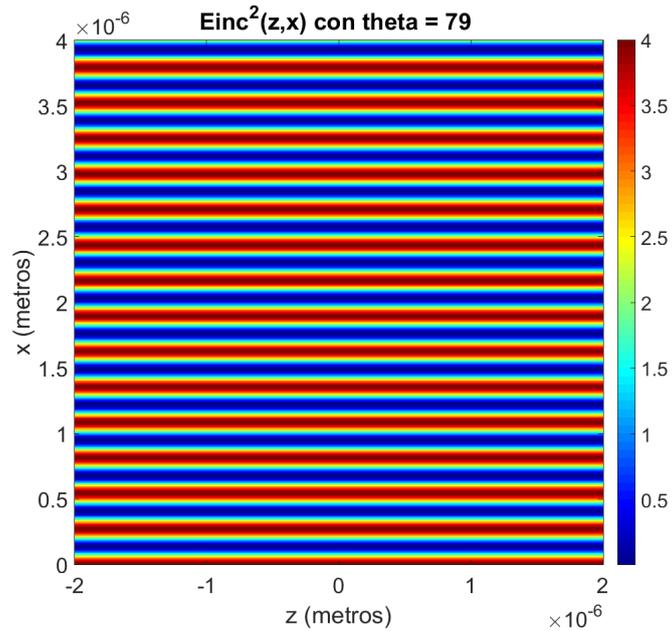
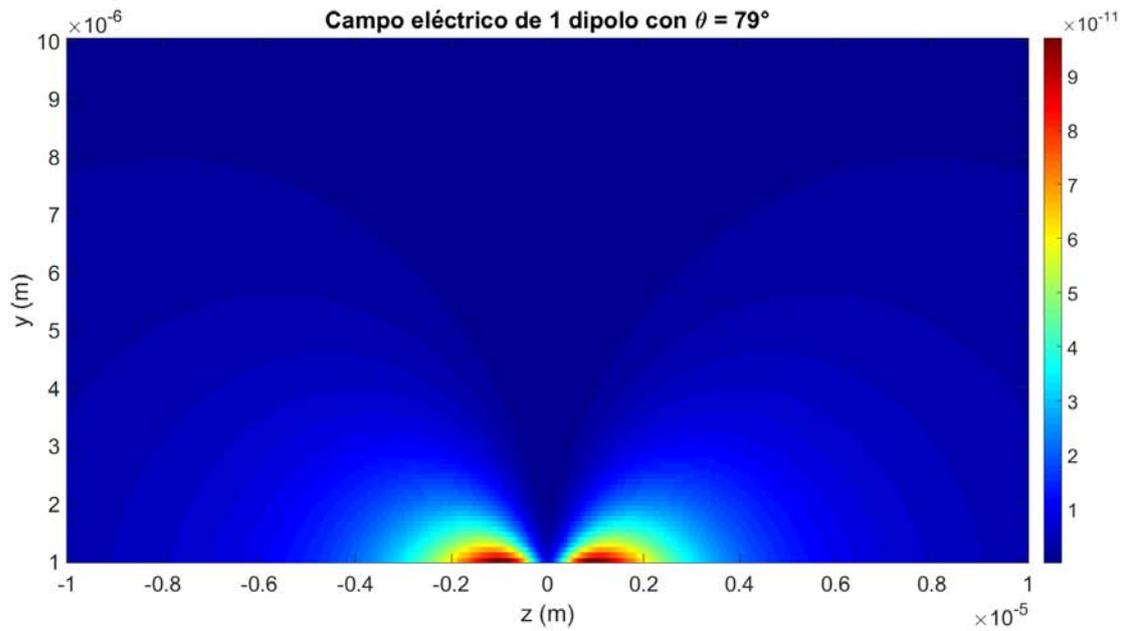


Figura 3.3: Intensidad en  $V^2/m^2$  de la interferencia de dos ondas planas incidiendo con un ángulo  $\theta = 79^\circ$  respecto al eje Z.

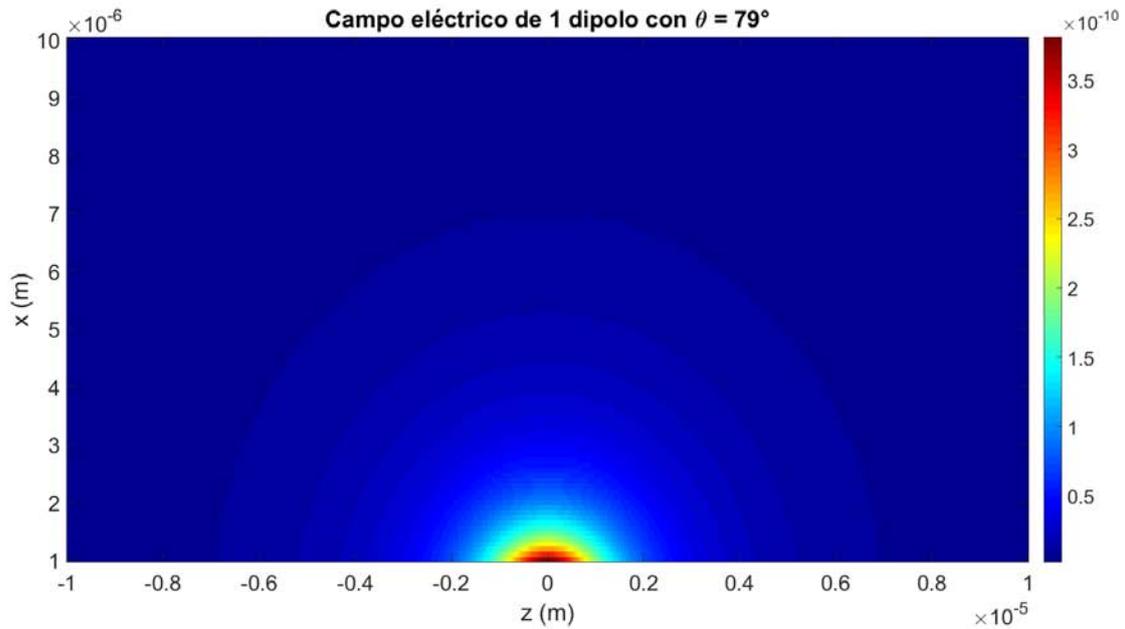
Como se muestra en las figuras (3.2) y (3.3) se obtienen franjas de interferencia a lo largo del eje  $x$  con una intensidad variable. Cabe mencionar que de la figura (3.2) la longitud de onda efectiva es  $\Lambda = 0.407 \times 10^{-6} \mu m$ .

## 3.2. Un dipolo

Ahora consideraremos una partícula que tiene un índice de refracción  $n_p = 1.55$  y un diámetro  $d = 0.01 \times 10^{-6} m$ . Suponiendo que la partícula se puede modelar como un dipolo, si la partícula es excitada por un campo eléctrico incidente como el de la ecuación (3.1), el campo eléctrico irradiado por el dipolo será como el de las figuras (3.4a) y (3.4b).



(a)



(b)

Figura 3.4: a) Parte real del campo eléctrico irradiado ( $V/m$ ) en el plano  $ZX$  de un dipolo al ser excitado por un campo eléctrico incidente de la forma  $\mathbf{E} = E_0 e^{ik \cos \theta z} 2 \cos(k \sin \theta y) \hat{\mathbf{r}}_z$ , con  $\theta = 79^\circ$ . b) Parte real del campo eléctrico irradiado en el plano  $ZX$  de un dipolo al ser excitado por un campo eléctrico incidente de la forma  $\mathbf{E} = E_0 e^{ik \cos \theta z} 2 \cos(k \sin \theta y) \hat{\mathbf{r}}_z$ .

Es importante recalcar, que de acuerdo a la ecuación (2.90), la radiación del dipolo es cero en la dirección paralela al momento dipolar  $\mathbf{p}$  del dipolo. Como habíamos mencionado anteriormente, en este caso no se espera ninguna fuerza negativa, sino simplemente la fuerza de presión de radiación que es proporcional a la intensidad del campo. Al correr el programa de la fuerza, no se encontró fuerza negativa para ningún ángulo de iluminación.

### 3.3. Sistema de dos dipolos

Para un sistema de dos dipolos, se estudió la relación que hay entre la fuerza que actúa sobre los dipolos en función de la separación entre ellos y el ángulo de incidencia de las ondas planas. Se simularon tres escenarios: dos dipolos sobre el eje Z, dos dipolos sobre el eje X y dos dipolos sobre el eje Y.

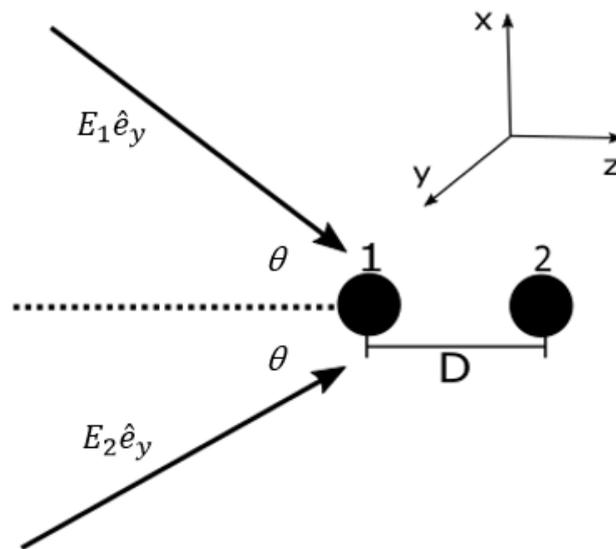


Figura 3.5: Diagrama del sistema de dos dipolos sobre los cuales inciden dos campos electromagnéticos polarizados sobre el eje Z.

#### 3.3.1. Arreglo de dos dipolos sobre el eje Z

En la figura (3.6) se muestra un mapa de la fuerza en función de la separación y el ángulo de iluminación

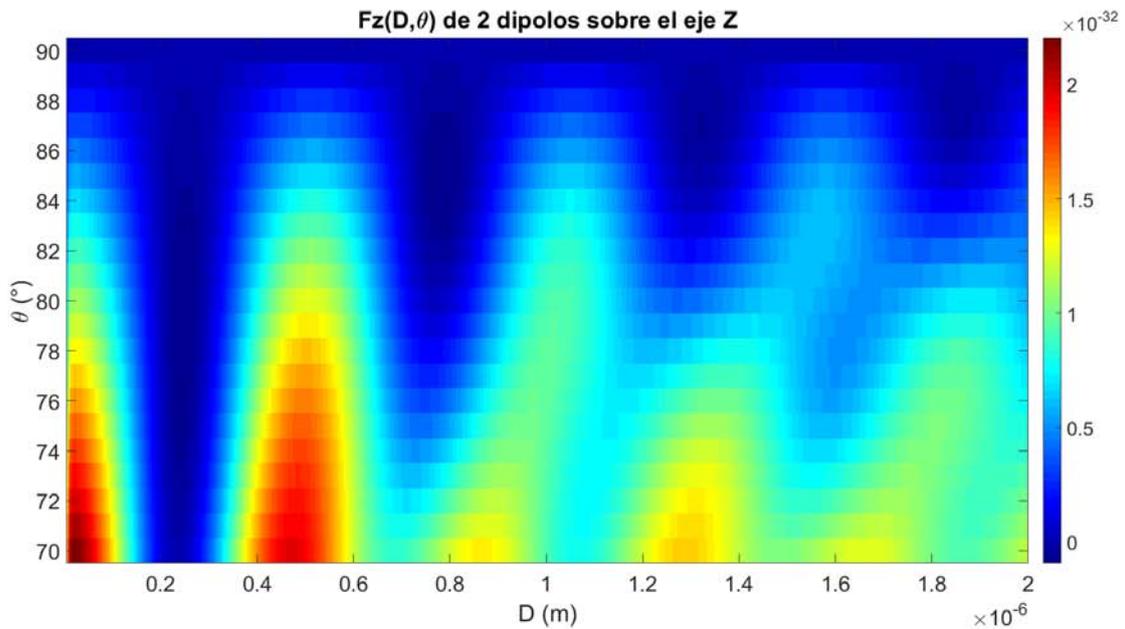


Figura 3.6: Mapa de la fuerza, en Newtons, sobre dos dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje  $Z$ .

Ya teniendo la fuerza en cada combinación de distancia y ángulo de iluminación, se filtraron las fuerzas mayores a cero para hacer un mapa que muestre en qué combinaciones se presentan fuerzas negativas. Ésto se muestra en la figura (3.7).

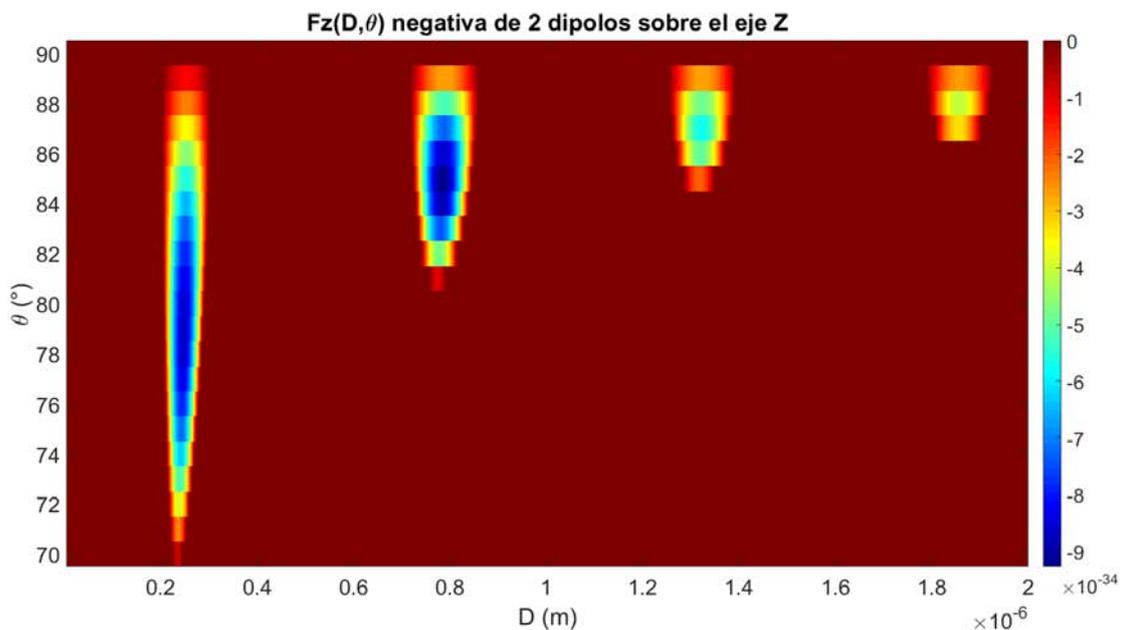


Figura 3.7: Regiones de fuerza negativa, en Newtons, en función de la separación  $D$  de 2 dipolos y el ángulo de iluminación  $\theta$  acomodados sobre el eje  $Z$ .

Para comprobar que el algoritmo de las simulaciones funciona, se calculó directamente el campo eléctrico dispersado utilizando el desarrollo de la sección 2.5.2 del Capítulo 2 usando la ecuación (2.120). Con ello se obtuvieron las figuras C.1 y C.2 (Apéndice C) que son resultados idénticos a las figuras (3.6) y (3.7) respectivamente.

Para que quede un poco mas claro, se hicieron varias gráficas (Figura 3.8) de distancia entre dipolos ( $D$ ) contra la fuerza que actúa sobre los dipolos, a diferentes ángulos.

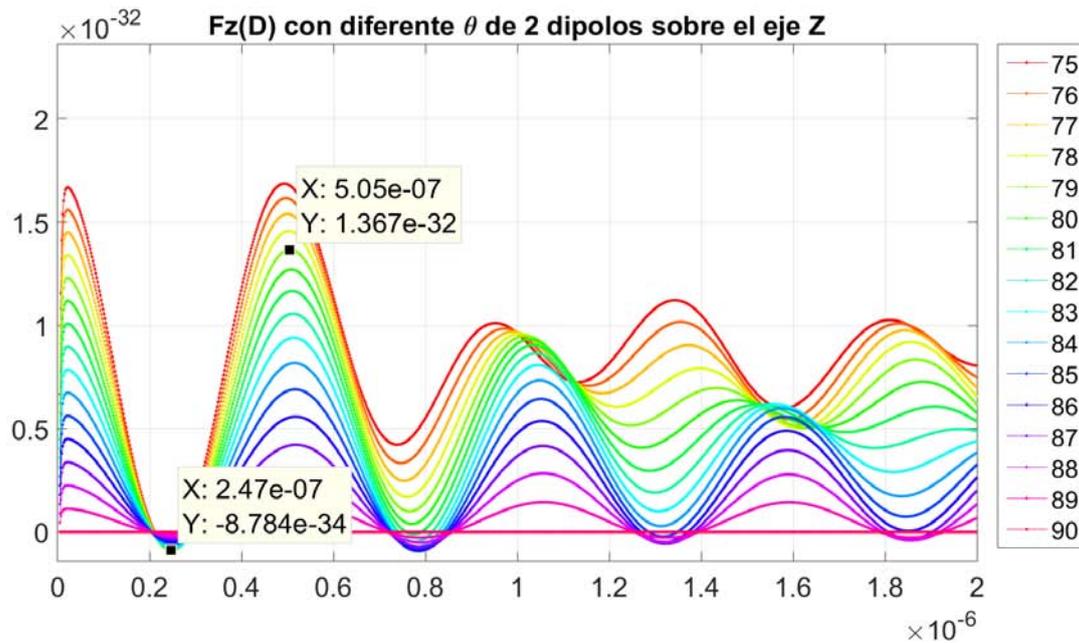


Figura 3.8: Fuerza óptica sobre dos dipolos para diferentes separaciones y ángulos de iluminación de  $75^\circ$  hasta  $90^\circ$ .

Para un ángulo de  $79^\circ$  se encontró una fuerza negativa máxima de  $-8.784 \times 10^{-34}$  N a una distancia de separación de  $D_{neg} = 2.47 \times 10^{-7}$  m, y una fuerza positiva máxima de  $1.367 \times 10^{-32}$  N a una distancia de separación de  $D_{pos} = 5.05 \times 10^{-7}$  m. Los subíndices *neg* y *pos* denotan los casos de fuerza negativa y fuerza positiva respectivamente. Es importante notar que la fuerza óptica negativa es muy pequeña comparada con los valores máximos de la fuerza positiva, en este caso dos órdenes de magnitud mas pequeña.

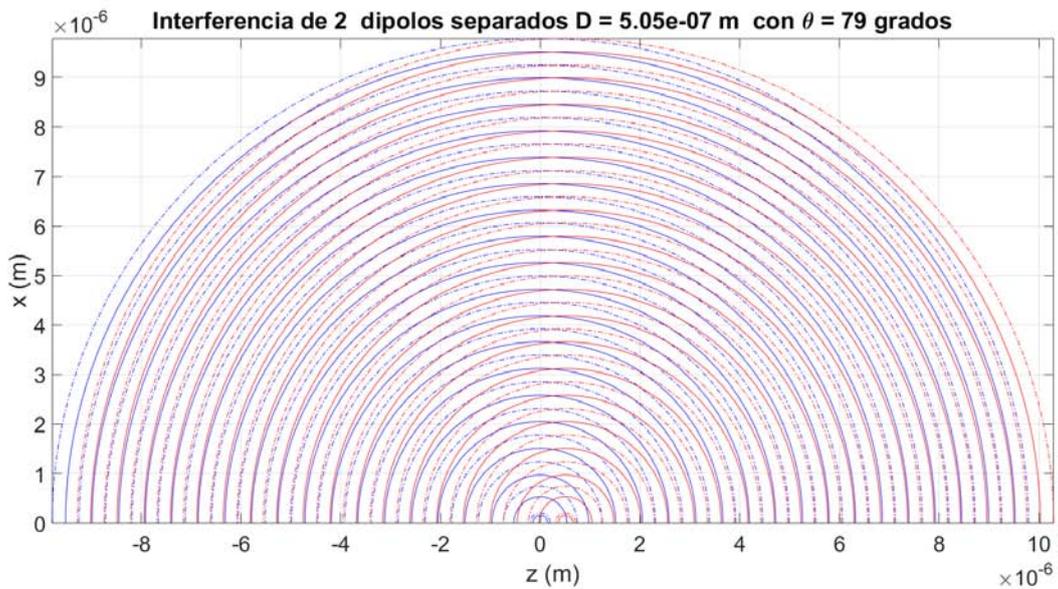
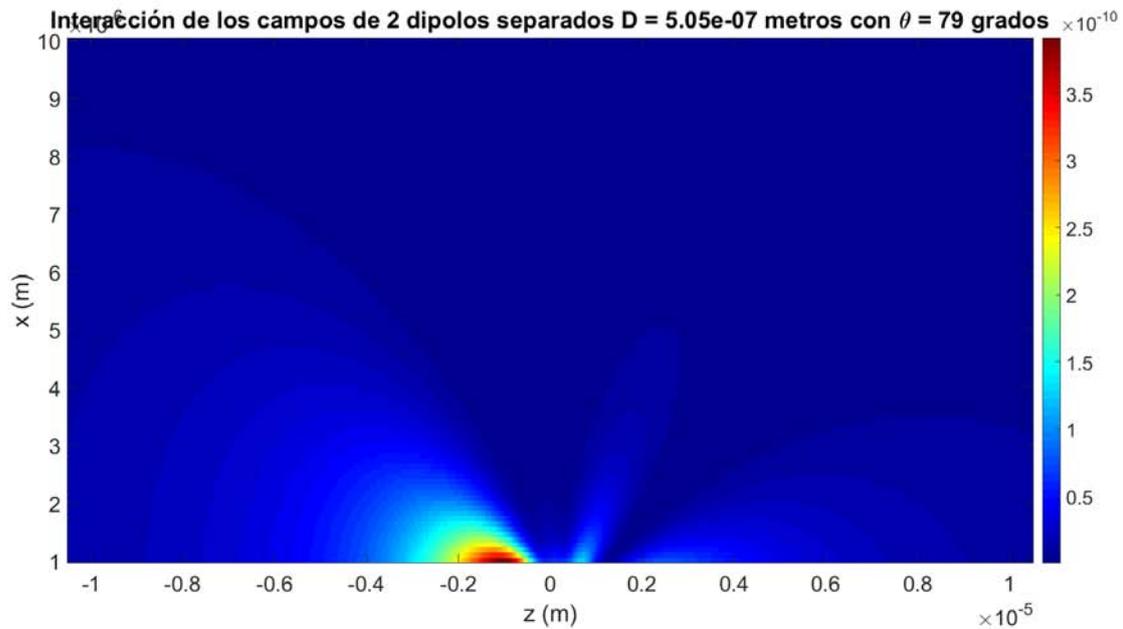
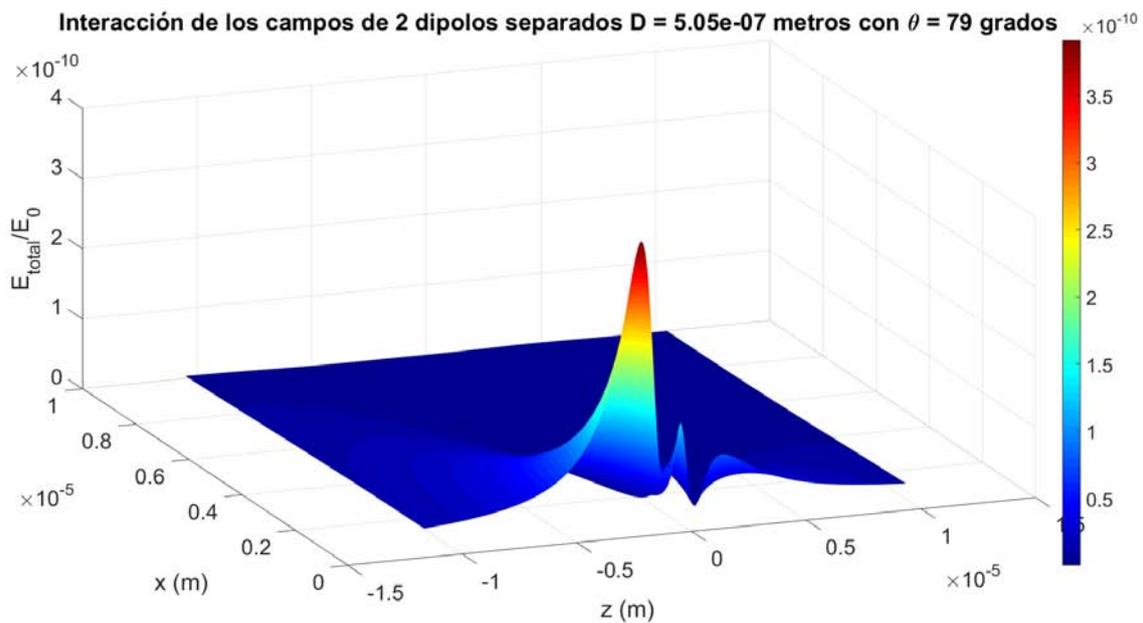


Figura 3.9: Análisis de máximos (líneas continuas) y mínimos (líneas punteadas) de la radiación de cada dipolo al ser excitados por el campo electromagnético incidente separados  $D_{pos} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}$  e iluminados con un ángulo  $\theta = 79^\circ$ . Cada conjunto de líneas (rojas o azules) es la radiación que emitiría un dipolo al ser excitado solamente por el campo eléctrico incidente.

Si calculamos el campo de la interacción de los campos de cada dipolo cuando se presenta una fuerza positiva obtenemos las figuras (3.10a) y (3.10b)



(a)



(b)

Figura 3.10: a) Interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a  $\theta = 79^\circ$  para generar una fuerza positiva cuando los dos dipolos están separados una distancia  $D = 5.05 \times 10^{-7}m$ . b) Superficie de la interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a  $\theta = 79^\circ$  para generar una fuerza positiva cuando los dos dipolos están separados una distancia  $D = 5.05 \times 10^{-7}m$ .

De las Figuras (3.10a) y (3.10b) se puede notar que el campo dispersado por el dipolo es mayor en la dirección negativa del eje Z por lo, por conservación del momento electromagnético no se presenta una fuerza negativa.

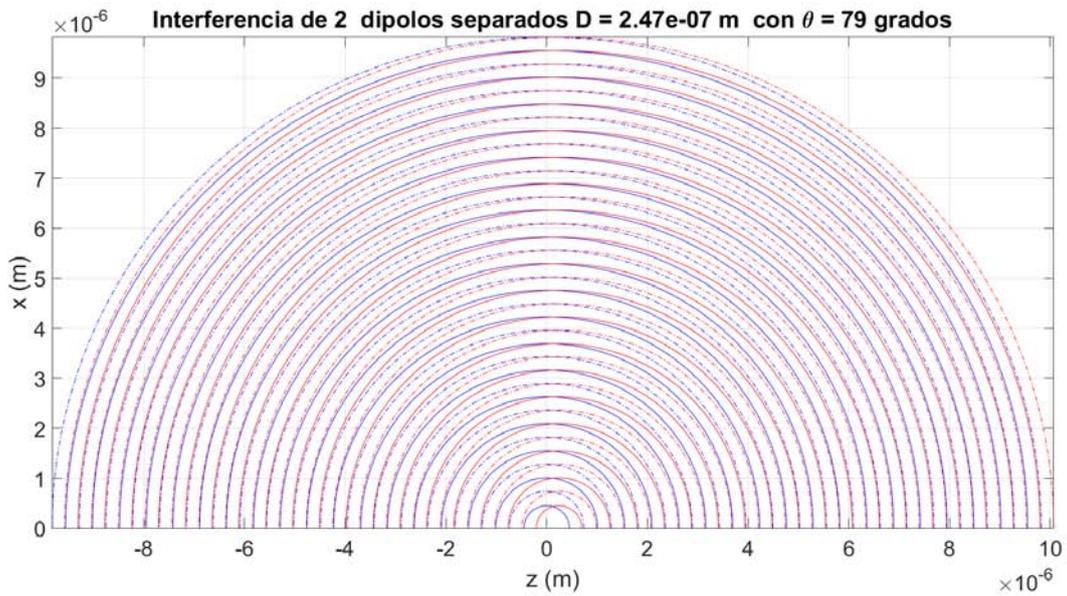
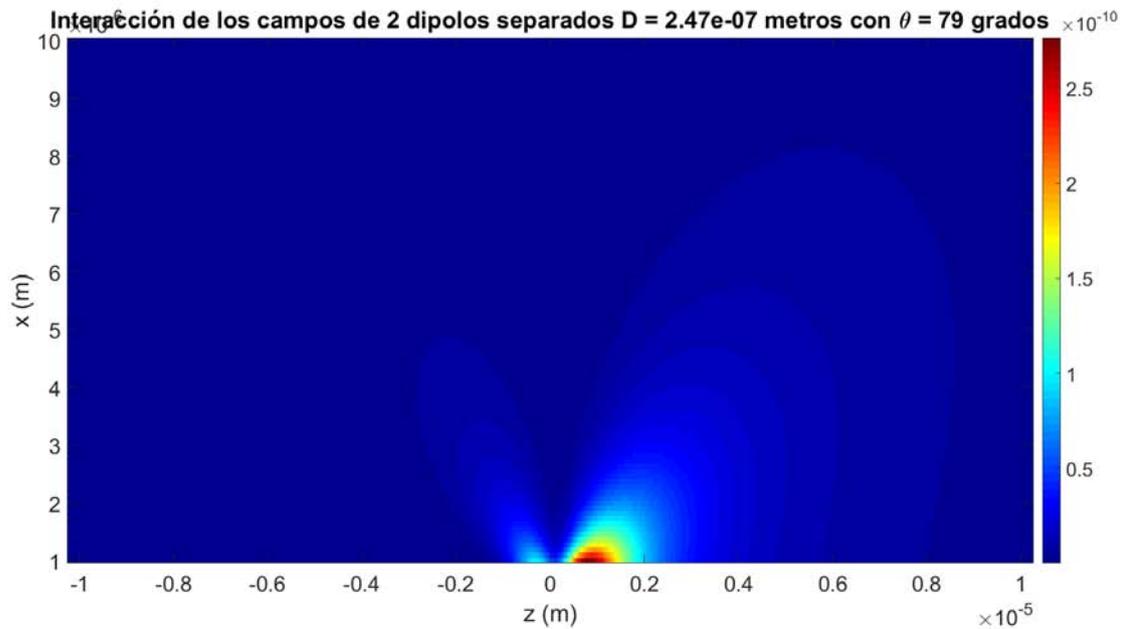
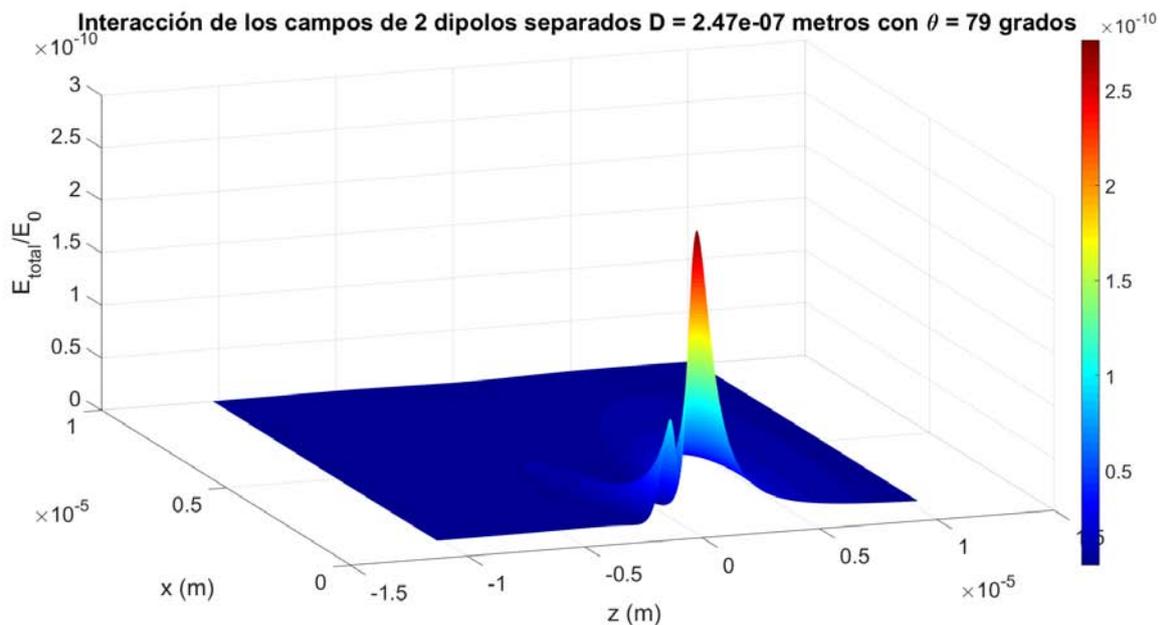


Figura 3.11: Análisis de máximos (líneas continuas) y mínimos (líneas punteadas) de la radiación de cada dipolo al ser excitados por el campo electromagnético incidente separados  $D_{neg} = 2.47 \times 10^{-7} \text{ m}$  e iluminados con un ángulo  $\theta = 79^\circ$ . Cada conjunto de líneas (rojas o azules) es la radiación que emitiría un dipolo al ser excitado solamente por el campo eléctrico incidente.

De manera similar al caso anterior, si calculamos el campo de la interacción de los campos de cada dipolo obtenemos cuándo se presenta una fuerza negativa. (Figuras (3.12a) y (3.12b)).



(a)



(b)

Figura 3.12: a) Interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a  $\theta = 79^\circ$  para generar una fuerza negativa al estar separados una distancia  $D = 2.47 \times 10^{-7}m$ . b) Superficie de la interacción de los campos de dos dipolos al ser excitados por un campo externo a  $\theta = 79^\circ$  para generar una fuerza negativa al estar separados una distancia  $D = 2.47 \times 10^{-7}m$ .

De las Figuras (3.12a) y (3.12b) se puede notar que el campo dispersado por el dipolo es mayor en la dirección positiva del eje Z, por lo que por conservación del momento electromagnético se presenta una fuerza negativa. Es bastante claro de las figuras (3.10a), (3.10b), (3.12a) y (3.12b) la fuerza negativa se presenta cuando el campo eléctrico transmitido es mayor al campo eléctrico reflejado, por lo que la tarea principal al tratar de producir fuerzas en dirección contraria a la dirección de propagación de los haces es encontrar alguna configuración, geometría, etc, para maximizar la transmisión de luz.

### 3.3.2. Arreglo de dos dipolos sobre el eje Y

Al acomodar dos dipolos a diferentes distancias entre ellos sobre el eje de polarización del campo eléctrico incidente, calculamos la fuerza que actúa sobre ellos en la dirección del eje Z. Con ello obtuvimos la Figura (3.13)

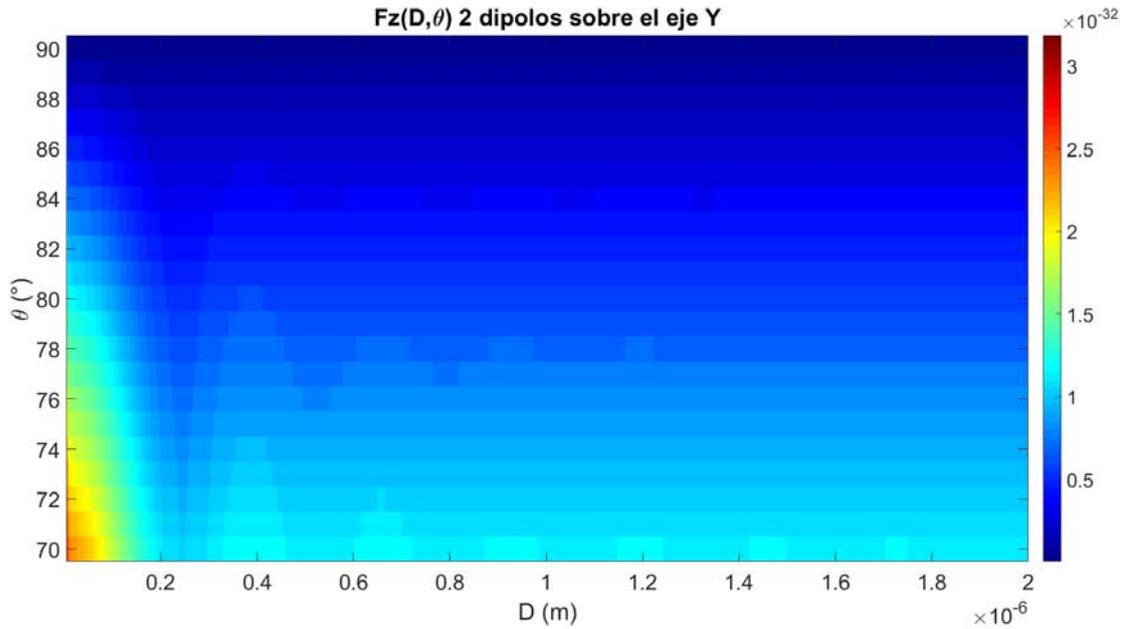


Figura 3.13: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre dos dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje Y.

Si filtramos estas fuerzas para encontrar en que combinación se presenta fuerza negativa encontramos la siguiente figura

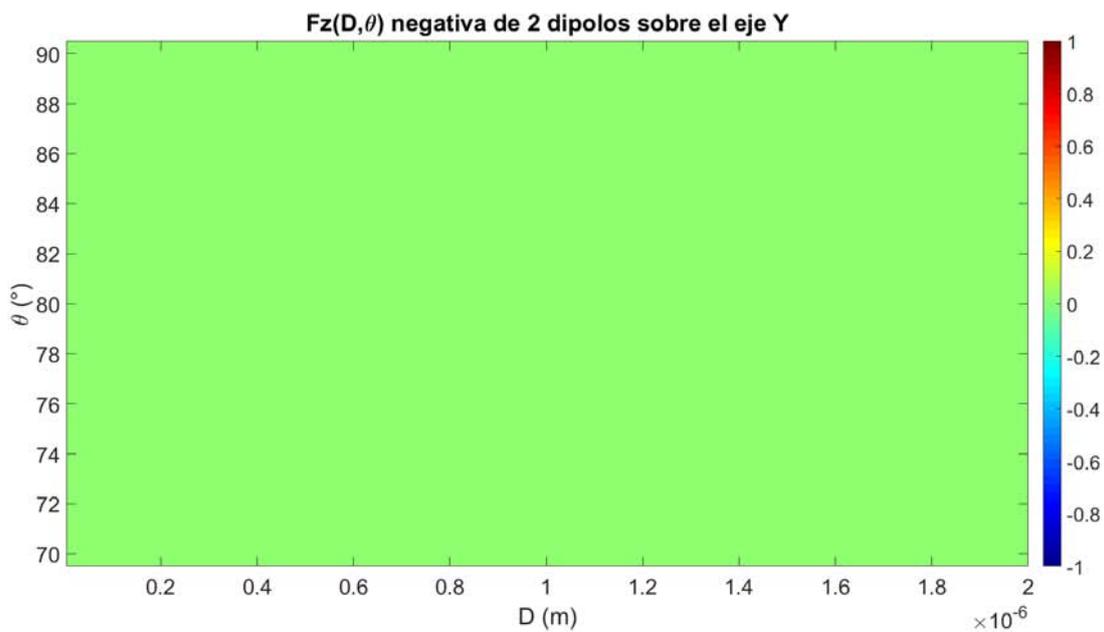


Figura 3.14: Fuerza negativa ( $N$ ) que actúa sobre dos dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje Y.

De la Figura (3.14) podemos ver claramente que no se presentan fuerzas negativas en ninguna combinación del ángulo de iluminación  $\theta$  y la distancia entre dipolos  $D$ . Esto se atribuye a la manera de emitir radiación de los dipolos, Figura (2.8) y ecuación (2.90), debido a que como están acomodados sobre el eje de polarización del campo eléctrico, la radiación que emite cada dipolo al ser excitado no tiene componentes en dirección del momento dipolar. Por ello no incide radiación de un dipolo sobre el otro dipolo. Prácticamente es como si estuvieran desacoplados debido a que no interactúan entre sí.

### 3.3.3. Arreglo de dos dipolos sobre el eje X

Si ahora hacemos los cálculos para dos dipolos sobre el eje X, es decir, de manera transversal a la dirección de polarización del campo eléctrico incidente, obtenemos la Figura (3.15)

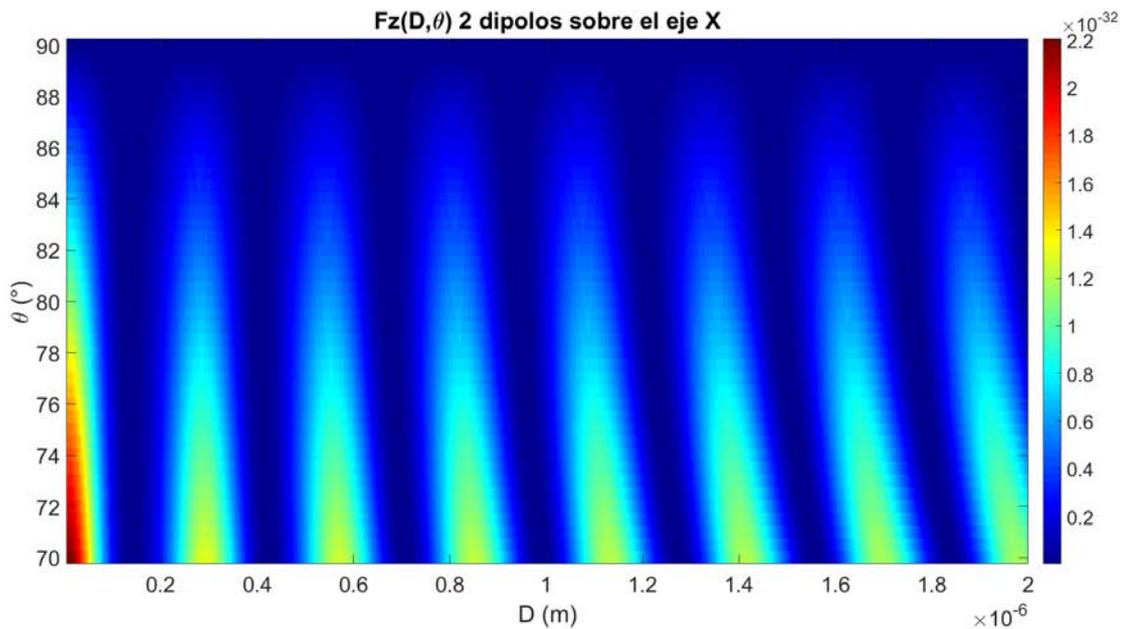


Figura 3.15: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre dos dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje X.

Análogamente, si filtramos las fuerzas para encontrar las combinaciones con las cuales se presenten fuerzas negativas, encontramos

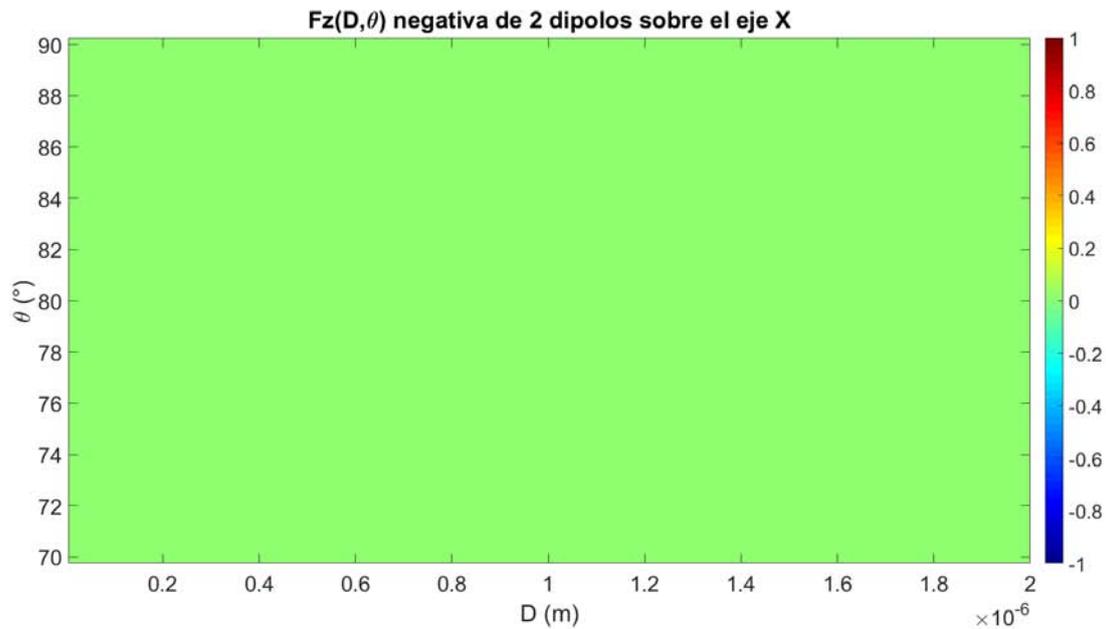


Figura 3.16: Fuerza negativa ( $N$ ) que actúa sobre dos dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje  $X$ .

Con la Figura (3.16) notamos que para este caso tampoco se presentan fuerzas negativas en dirección del eje  $Z$ .

Al no presentar fuerzas negativas en los casos cuando los dipolos estaban localizados sobre los ejes  $Y$  y  $X$ , el análisis de la sección (3.4) se enfocará solamente en dipolos ordenados sobre el eje  $Z$ .

### 3.4. Línea de dipolos ( lamento)

Se hicieron simulaciones para obtener el campo eléctrico y la fuerza que sienten *lamentos* de diferentes números de dipolos acomodados sobre el eje  $Z$ .

Para 6 dipolos se analizaron los mismos tres casos que en la sección anterior. Si calculamos la fuerza para las combinaciones de distancia y ángulo de iluminación obtenemos la Figura (3.17)

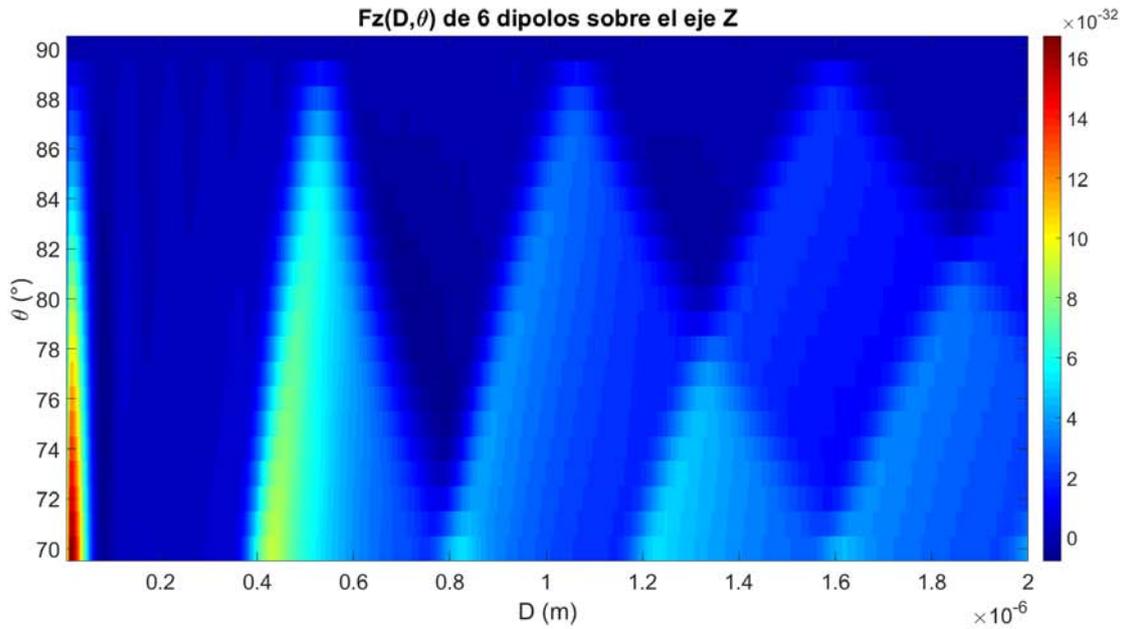


Figura 3.17: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 6 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje  $Z$ .

Al filtrar las fuerzas para obtener las fuerzas negativas, obtenemos la Figura (3.18).

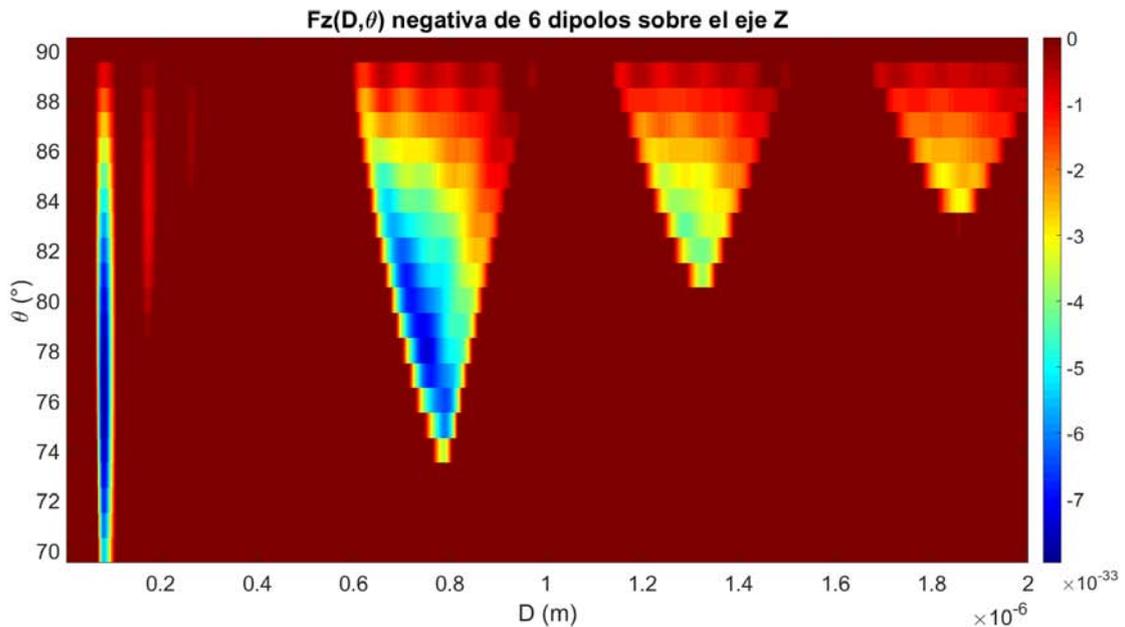


Figura 3.18: Fuerza negativa ( $N$ ) que actúa sobre 6 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje  $Z$ .

Al analizar la Figura (3.18) podemos notar que hay varios lóbulos de combinaciones en los cuales se presentan fuerzas negativas, sin embargo, el más intenso es el que está hasta la izquierda y que corresponde a  $D = 0.081 \mu m$  con  $\theta = 77^\circ$  con  $F_{max} = -7.979 \times 10^{-33} N$ . Nótese que al escribir  $F_{max}$  se refiere al máximo valor de la fuerza negativa, es decir, la fuerza negativa con mayor magnitud.

Al calcular la fuerza sobre 120 dipolos obtenemos la Figura (3.19)

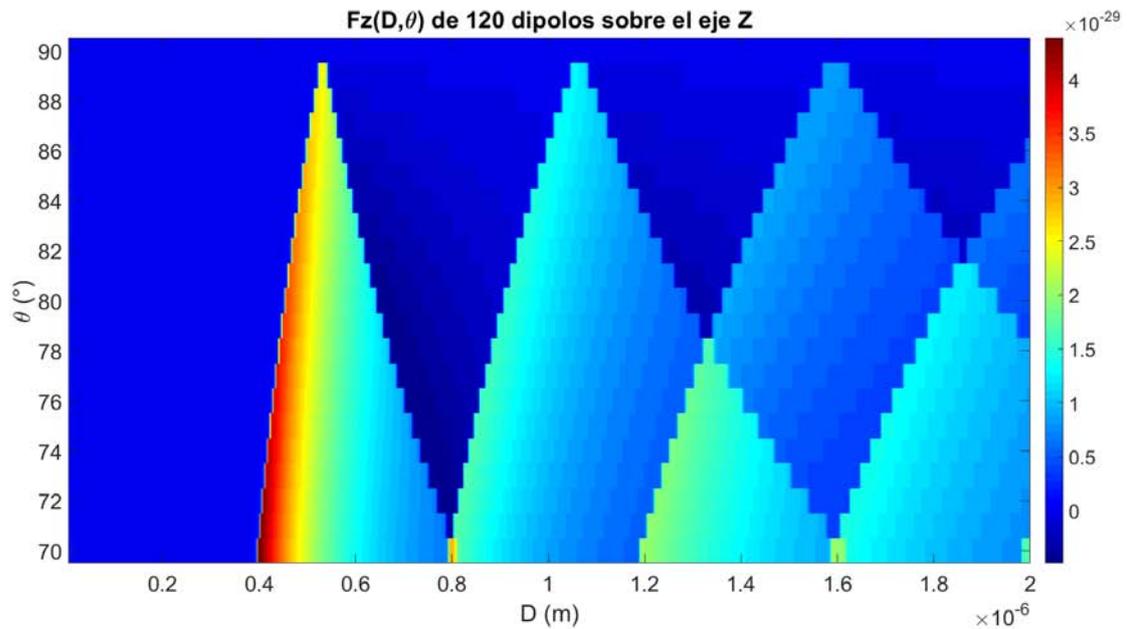


Figura 3.19: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje  $Z$ .

y si filtramos la fuerzas para encontrar dónde se presentan fuerzas negativas obtenemos la Figura (3.20)

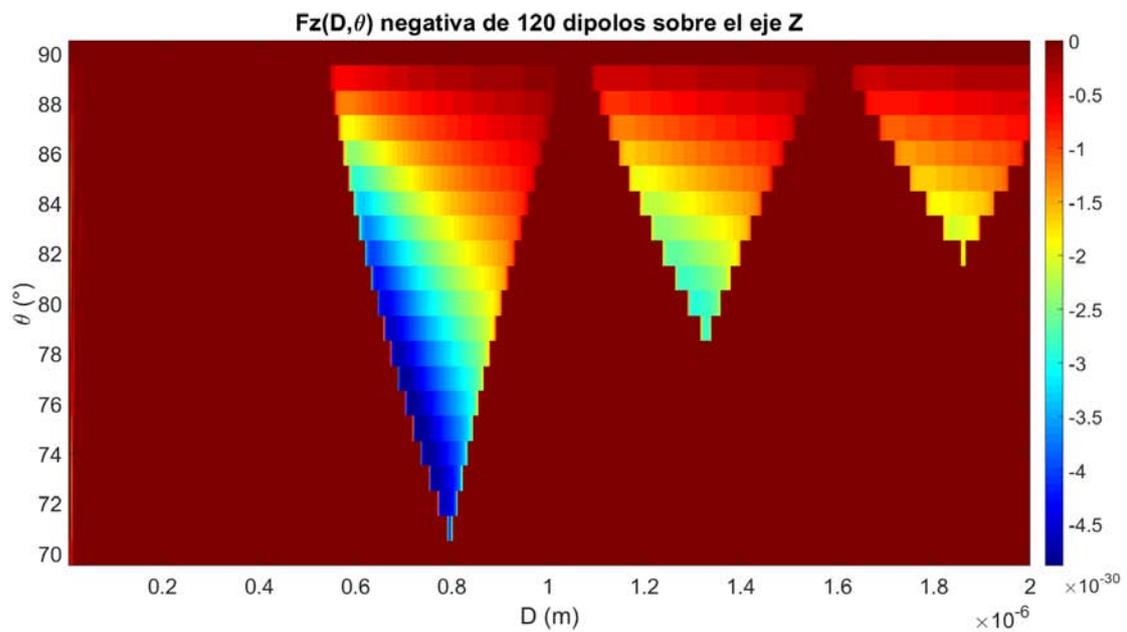


Figura 3.20: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  acomodados sobre el eje  $Z$ .

Al analizar la Figura (3.20) podemos notar que hay varios lóbulos de combinaciones en los cuales se presentan fuerzas negativas. Analizando los datos, encontramos que el máximo de fuerza negativa se encuentra en  $D = 0.729 \mu m$  con  $\theta = 75^\circ$  con  $F_{max} = -4.892 \times 10^{-30} N$ .

Si comparamos los resultados de las simulaciones para 6 y 120 dipolos sobre el eje  $Z$  podemos notar que al incrementar el número de dipolos la fuerza óptica se incrementa drásticamente, ya que de 2 dipolos a 6 dipolos incrementa un orden de magnitud, y cuatro órdenes de magnitud cuando son 120 dipolos. También la separación entre dipolos aumenta respecto al número de dipolos. Además la fuerza óptica máxima se va presentando cada vez con ángulos menores (Cuadro (3.1)).

<b>Dipolos sobre el eje Z</b>			
<b>Número de dipolos</b>	<b>D(<math>\mu m</math>)</b>	<b><math>\theta</math>(<math>^\circ</math>)</b>	<b>F(N)</b>
2	0.247	79	$-8.784 \times 10^{-34}$
6	0.081	77	$-7.979 \times 10^{-33}$
120	0.729	75	$-4.892 \times 10^{-30}$

Cuadro 3.1: Comparación de fuerzas ópticas negativas con diferente cantidad de dipolos sobre el eje  $Z$ .

## 3.5. Arreglos bidimensionales

En esta sección se estudiaron dos tipos de arreglos de dipolos un poco más complejos con la intención de simular una partícula un poco más realista. El primer caso fue el de un arreglo bidimensional sobre el plano  $Y = 0$  de dipolos formado por triángulos equiláteros de lado  $D$ . El segundo y último arreglo que se estudió fue un disco de dipolos en el plano  $Y = 0$  formado por una red cuadrada con una constante de red de tamaño  $D$ .

El estudio se realizó de la misma manera que los casos anteriores, variando la distancia de separación entre dipolos  $D$  y variando el ángulo de iluminación de  $70^\circ$  a  $90^\circ$ .

### 3.5.1. Triángulo

Para que el algoritmo del cálculo de fuerza funcione, es necesario introducir las coordenadas de los dipolos como tres arreglos diferentes, es decir,  $x_d = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $y_d = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  y  $z_d = [z_1, z_2, \dots, z_n]$  con  $n$  el número total de dipolos y  $r_i = (x_i, y_i, z_i)$  las coordenadas del dipolo  $i$ ésimo. Nótese que  $x_i$  es múltiplo de la constante de red  $D$  y que  $z_i$  es múltiplo de  $D \cos \pi/3$  ya que es un triángulo equilátero, Figuras (3.21a) y (3.21b).

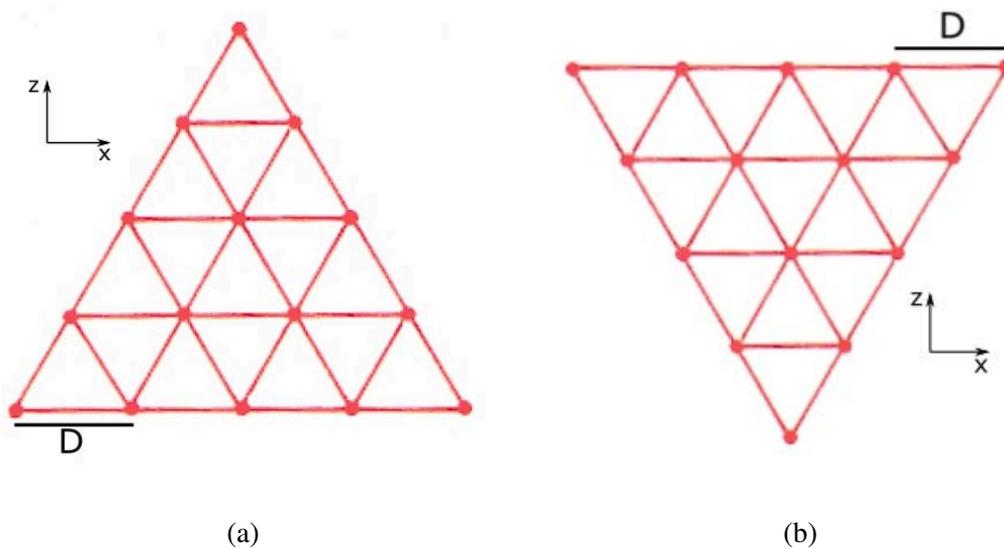


Figura 3.21: Arreglo triangular de dipolos creado a partir de una red hexagonal con constante de red  $D$ . a) Triángulo de dipolos orientados de manera que un lado del triángulo está sobre el eje  $X$ . b) Triángulo de dipolos orientado con un vértice sobre el eje  $X$  y un lado paralelo al mismo eje.

Para obtener las coordenadas de los dipolos se escribió la función *discoDipolos.m*. Cabe recalcar que solo se obtienen triángulos con una base de un número de dipolos impar mayor a 1, es decir, un número  $h$  que satisfaga la ecuación  $h = 2m + 1$  con  $m \geq 1$ , resultando en un número total de dipolos  $h(h + 1)/2$ .

Debido al tiempo de cómputo, se limitó el número de dipolos. En éste caso se utilizaron triángulos con 6, 15, 45, 91 y 120 dipolos orientados como en la Figura (3.21a) y dos triángulos de  $x$  y dipolos orientados como en la Figura (3.21b)

Para el caso de 6 dipolos se obtuvo (Figura 3.22)

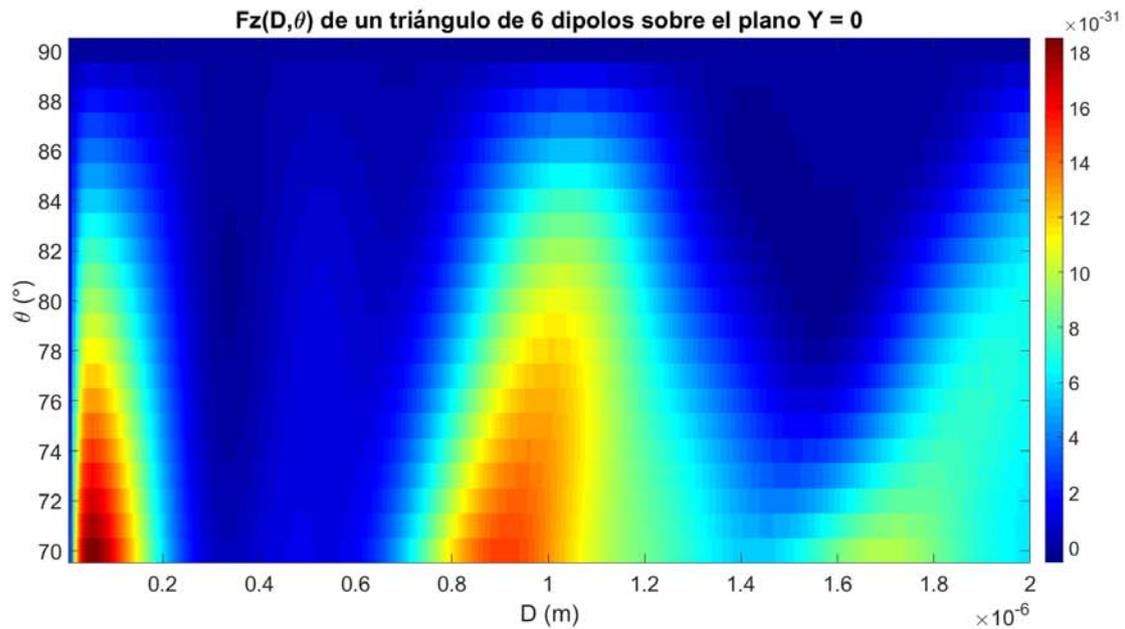


Figura 3.22: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 6 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.23)

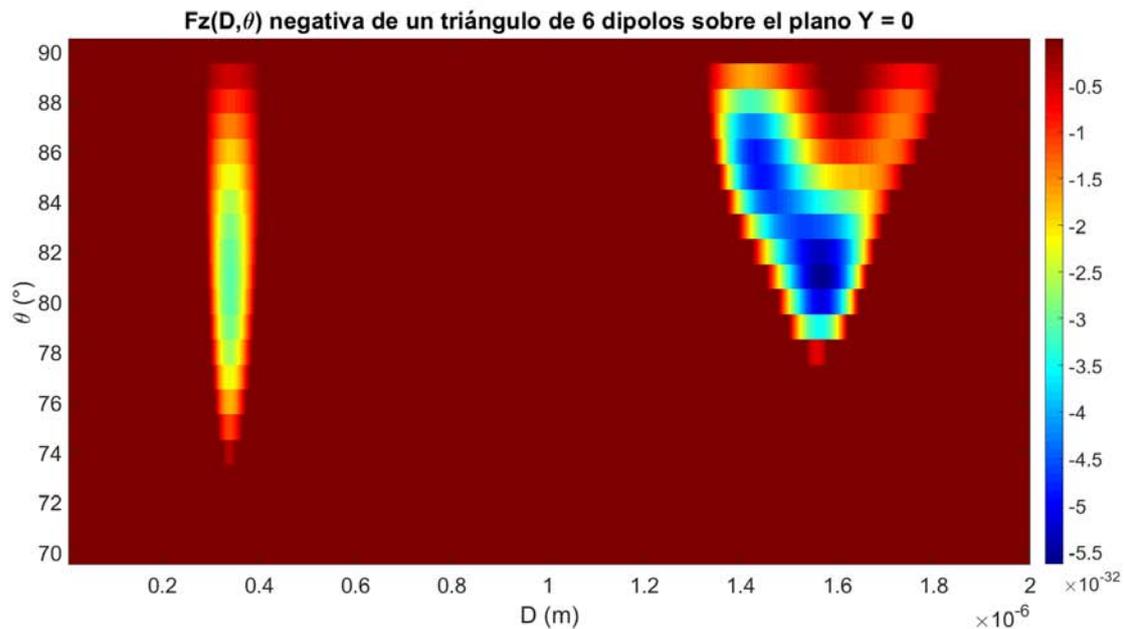


Figura 3.23: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 6 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a)

de la cual se puede ver que existen tres lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 1.567 \mu m$ ,  $\theta = 81^\circ$  con valor de  $-5.635 \times 10^{-32} N$ .

Para el caso de 15 dipolos se obtuvo (Figura 3.24)

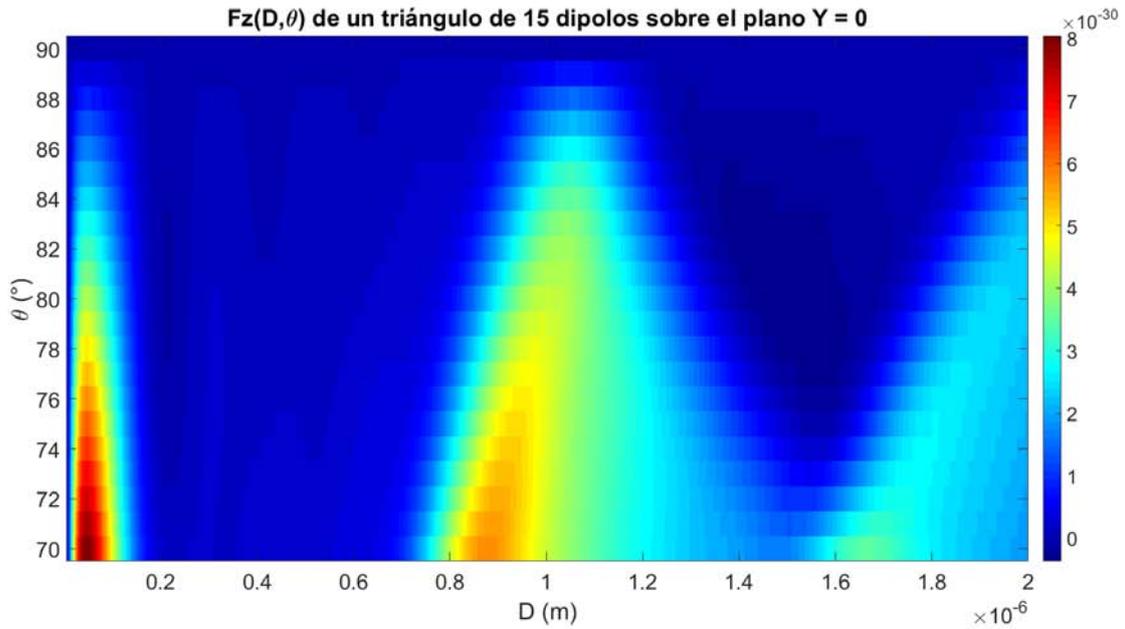


Figura 3.24: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.25)

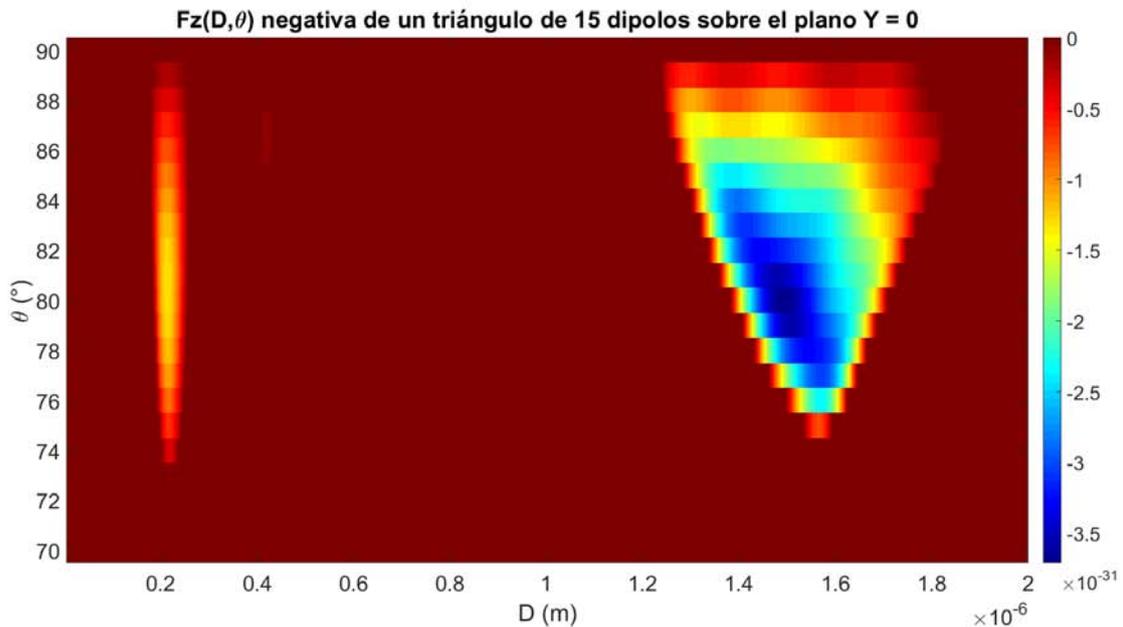


Figura 3.25: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a)

de la cual se puede ver que existen tres lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 1.493 \mu m$ ,  $\theta = 80^\circ$  con valor de  $-3.711 \times 10^{-31} N$ .

También se obtuvieron resultados para 15 dipolos pero con el triángulo orientado como en la Figura (3.21b). Se obtuvo el siguiente mapa de fuerza

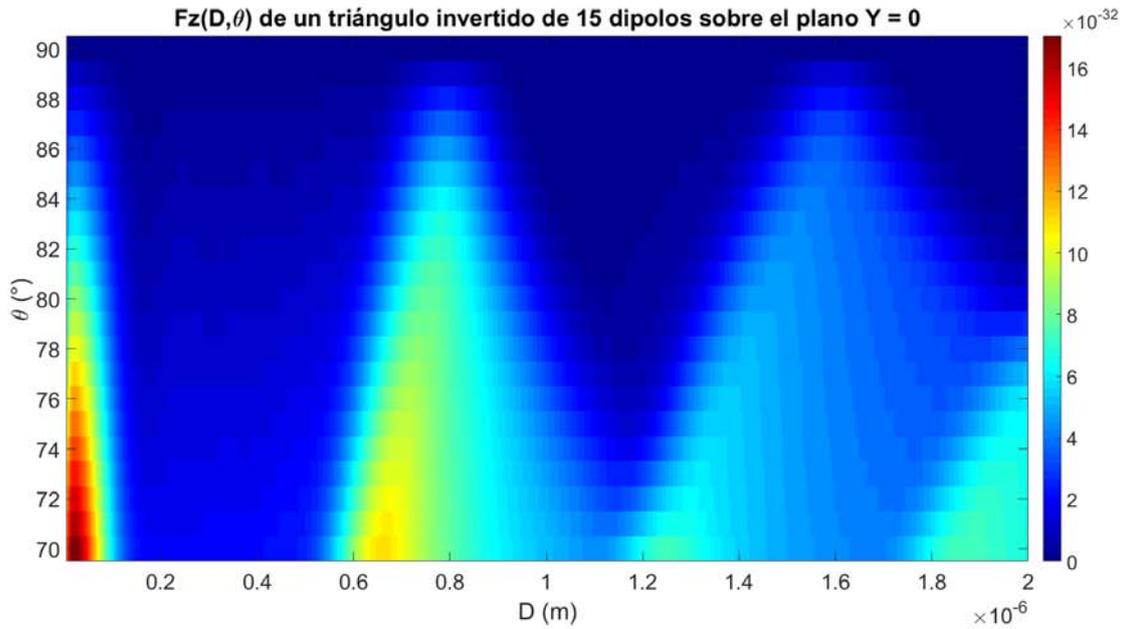


Figura 3.26: Mapa de la fuerza normalizada con el campo incidente (Nm/V) sobre 15 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano ZX como en la Figura (3.21b).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.27)

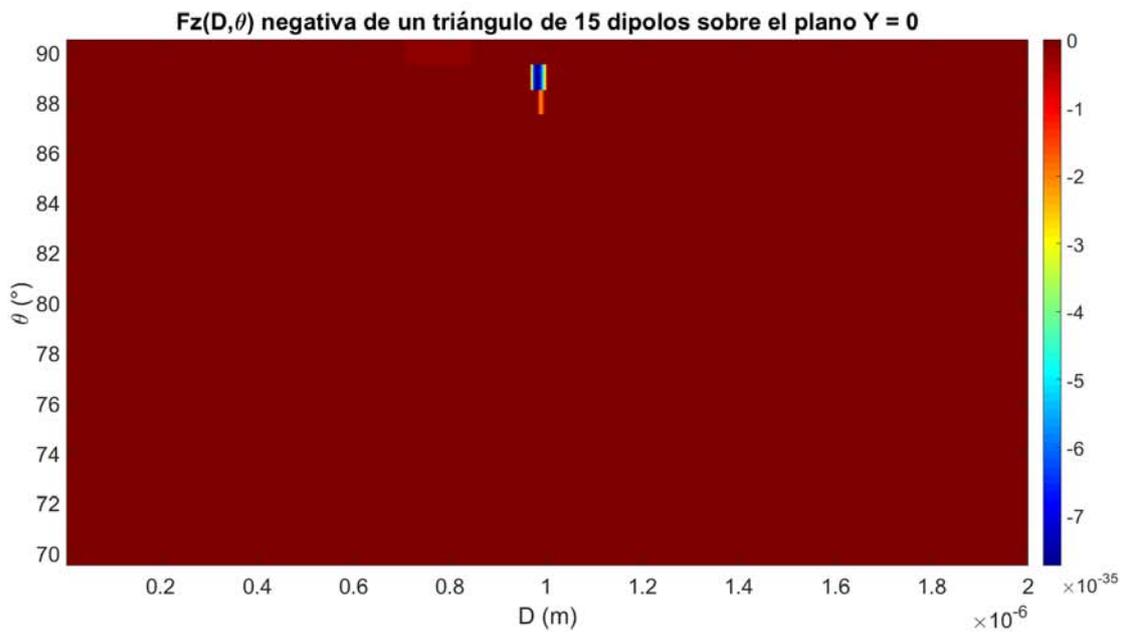


Figura 3.27: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 15 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano ZX como en la Figura (3.21b)

de la cual se puede ver que existe un fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.981 \mu\text{m}$ ,  $\theta = 89^\circ$  con valor de  $-7.738 \times 10^{-35} N$ .

Para el caso de 45 dipolos se obtuvo (Figura 3.28)

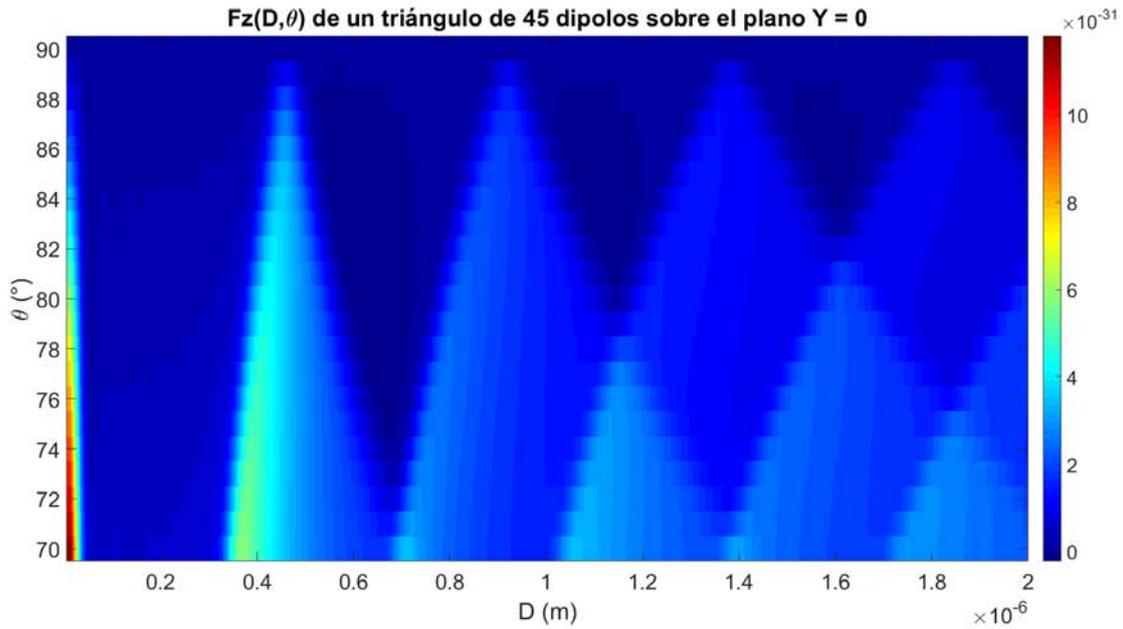


Figura 3.28: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 45 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.29)

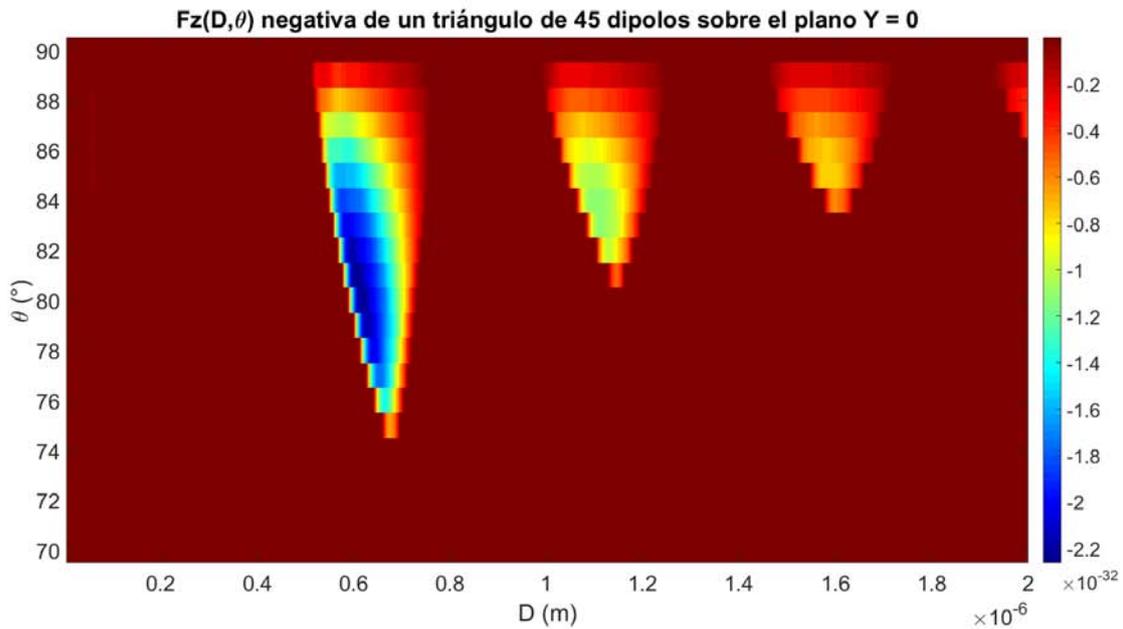


Figura 3.29: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 45 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a)

de la cual se puede ver que existen tres lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.619 \mu m$ ,  $\theta = 80^\circ$  con valor de  $-2.264 \times 10^{-32} N$ .

Para el caso de 91 dipolos se obtuvo (Figura 3.30)

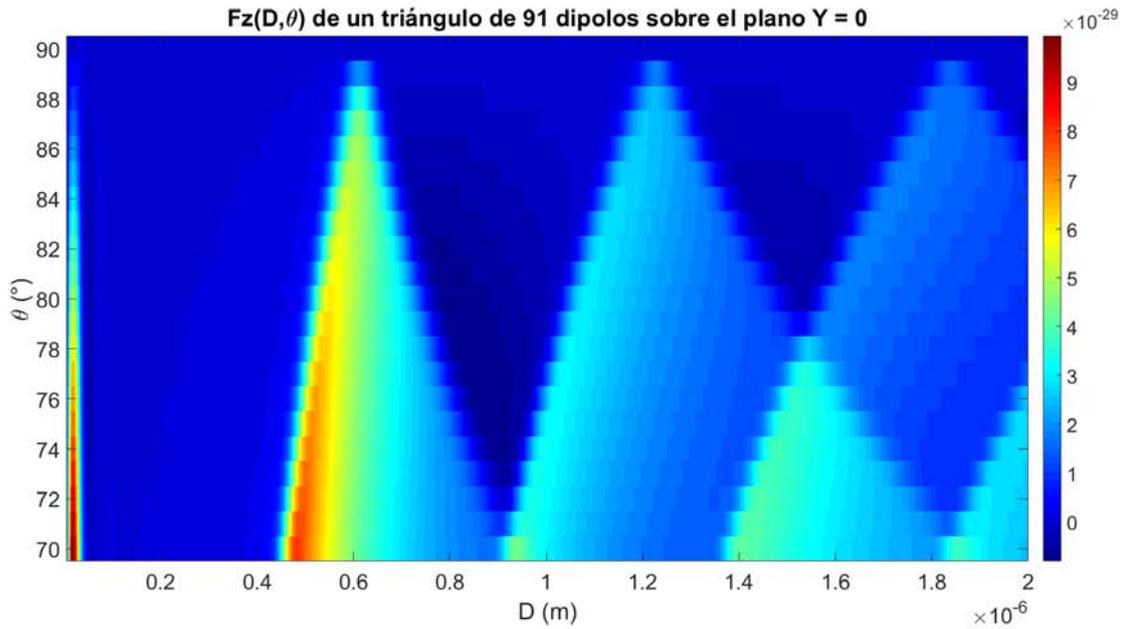


Figura 3.30: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.31)

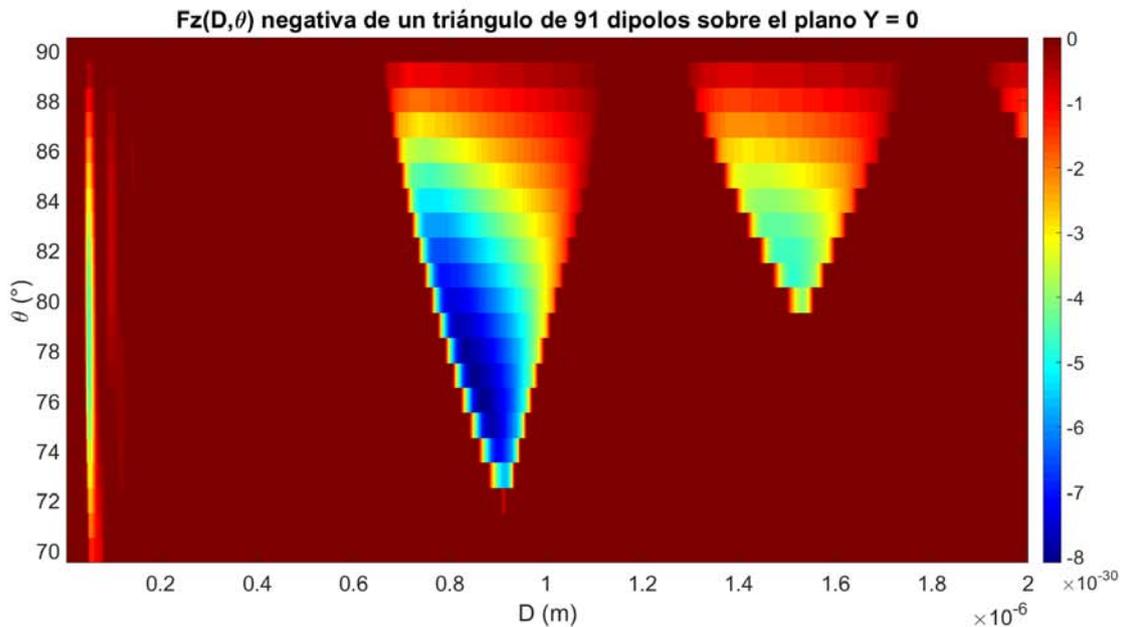


Figura 3.31: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a)

de la cual se puede ver que existen tres lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.851 \mu m$ ,  $\theta = 77^\circ$  con valor de  $-8.098 \times 10^{-30} N$ .

También se obtuvieron resultados para 91 dipolos pero con el triángulo orientado como en la Figura (3.21b). Se obtuvo el siguiente mapa de fuerza

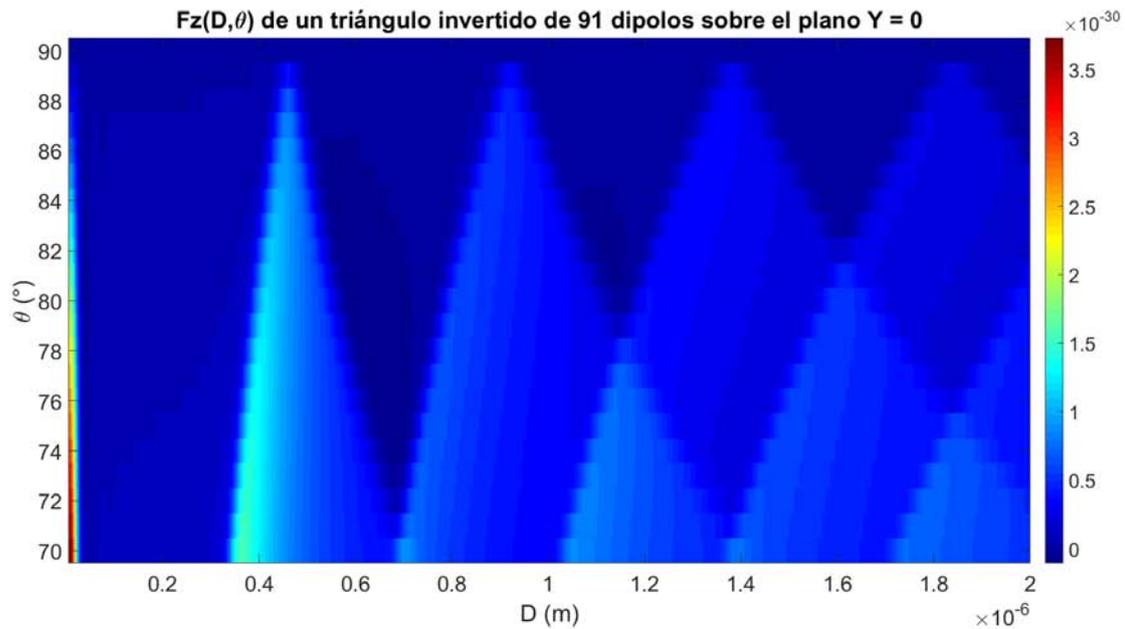


Figura 3.32: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21b).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.33)

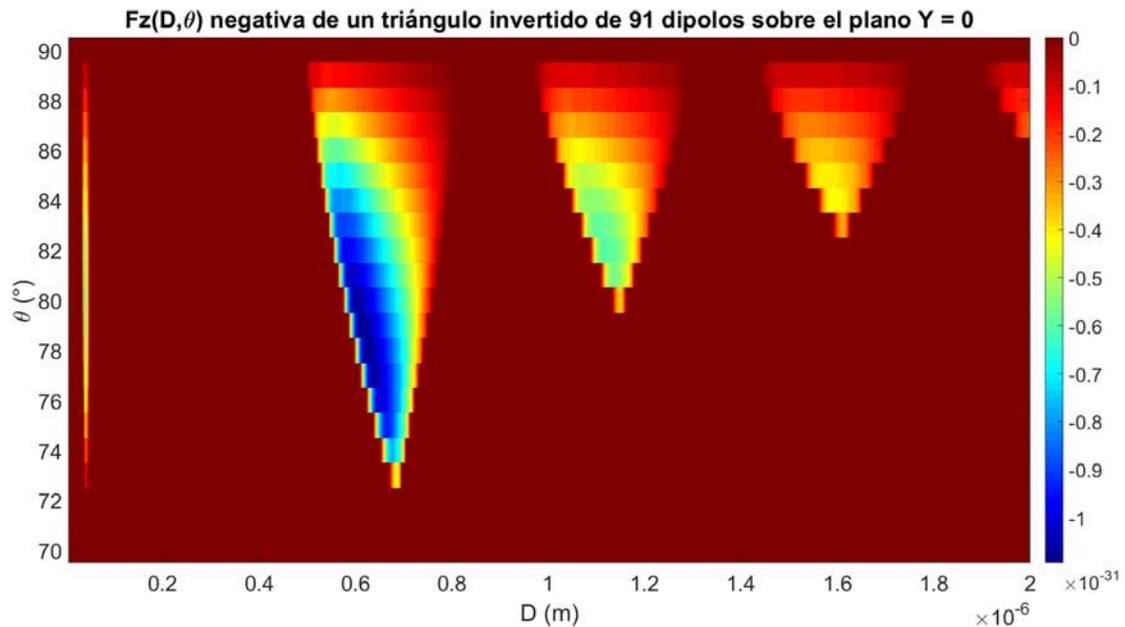


Figura 3.33: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 91 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21b)

de la cual se puede ver que existe un fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.613 \mu m$ ,  $\theta = 79^\circ$  con valor de  $-1.095 \times 10^{-31} N$ .

Para el caso de 120 dipolos se obtuvo (Figura 3.34)

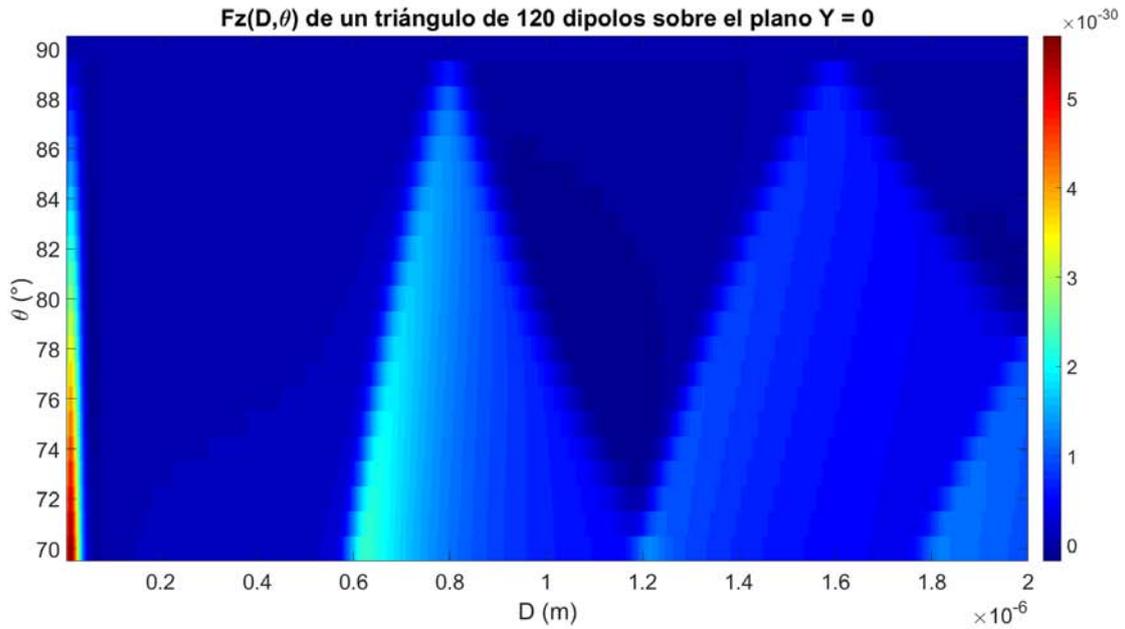


Figura 3.34: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo (Figura 3.35)

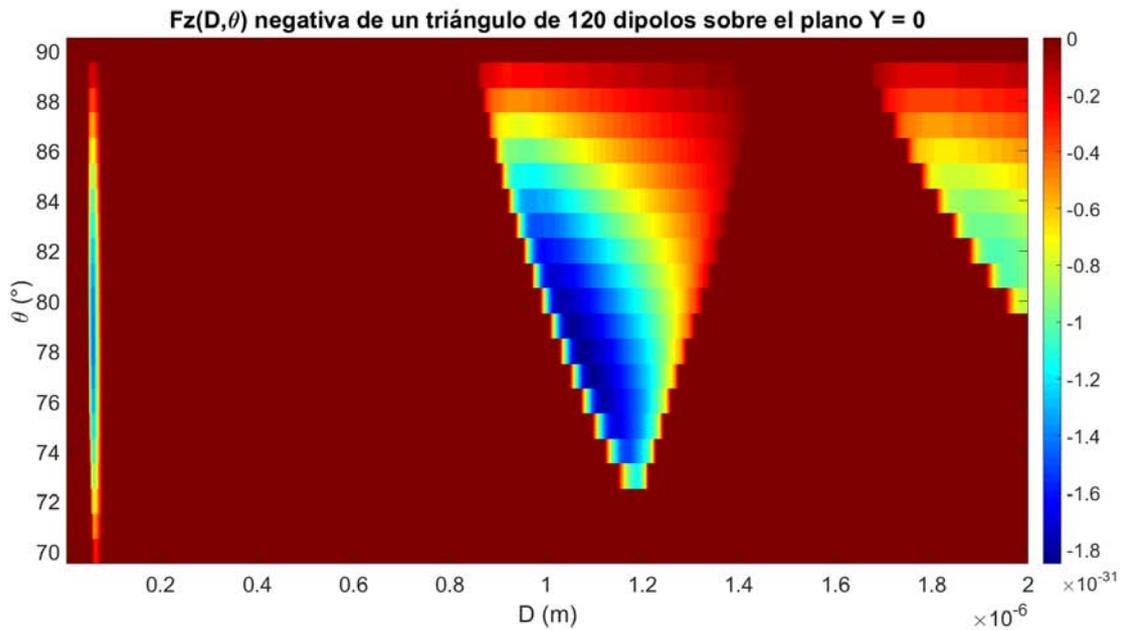


Figura 3.35: Fuerza negativa ( $N$ ) sobre 120 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados de manera triangular en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.21a)

de la cual se puede ver que existen tres lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 1.075 \mu m$ ,  $\theta = 78^\circ$  con valor de  $-1.852 \times 10^{-31} N$ .

Los resultados obtenidos para el triángulo de dipolos se muestran en el Cuadro (3.2).

Se puede notar que la orientación del triángulo que produce mayor fuerza negativa es cuando un lado del triángulo se encuentra sobre el eje  $X$ . También se distingue que la fuerza negativa aumenta

<b>Triángulo</b>				<b>Triángulo invertido</b>		
<b>Dipolos</b>	<b>D(<math>\mu\text{m}</math>)</b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>F(N)</b>	<b>D(<math>\mu\text{m}</math>)</b>	<b><math>\theta</math></b>	<b>F(N)</b>
6	1.567	81	$-5.635 \times 10^{-32}$	0.981	89	$-7.738 \times 10^{-35}$
15	1.493	80	$-3.711 \times 10^{-31}$			
45	0.619	80	$-2.264 \times 10^{-32}$			
91	0.851	77	$-8.098 \times 10^{-30}$	0.613	79	$-1.095 \times 10^{-31}$
120	1.075	78	$-1.852 \times 10^{-31}$			

Cuadro 3.2: Resultados de las simulaciones de fuerza para triángulos con diferente cantidad de dipolos.

sí el número de dipolos aumenta y el ángulo de incidencia se reduce hasta  $78^\circ$ . La distancia entre dipolos baja y sube mientras crece la fuerza negativa. Comparando con los casos en los que se acomodan dipolos sobre el eje Z, el filamento de 120 dipolos produce una fuerza negativa mayor que el triángulo de 120 dipolos con distancias entre dipolos un orden de magnitud menores y con ángulos de iluminación menores.

### 3.5.2. Disco

En el caso del disco de dipolos, se utilizó un red cuadrada para encontrar un disco de radio  $r$  que contiene a varios dipolos. Para esto se escribió la función *discoDipolos.m* la cual primero crea un cuadro de dipolos separados una distancia  $D$ . Después se define un centroide y un radio, y a partir de esto se filtran los dipolos que cumplan la condición  $x^2 + z^2 \leq r^2$ , (Figura 3.36).

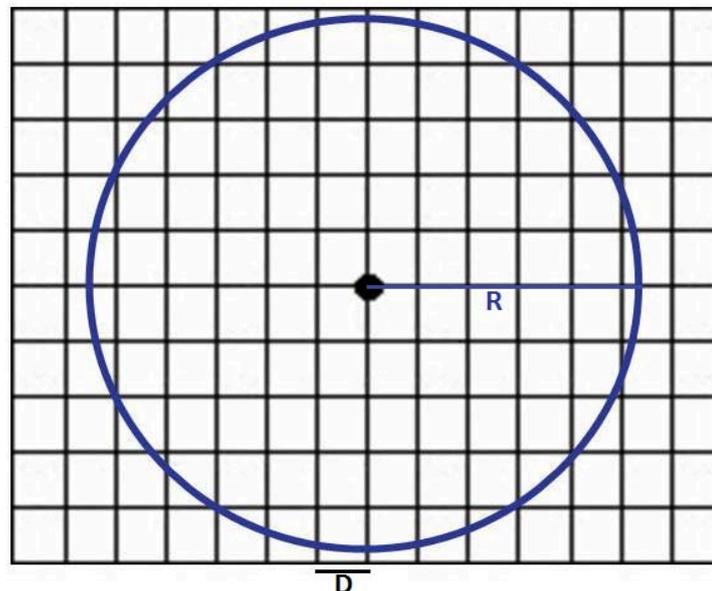


Figura 3.36: Disco de dipolos creado a partir de una red cuadrada con constante de red  $D$  y radio  $r$ .

La orilla del disco de dipolos intersectaba a la coordenada  $(0,0)$  y el eje  $Z$  los corta por la mitad. De igual manera al caso de los triángulos, se limitó el número de dipolos debido al tiempo de cómputo. Se simuló para 5, 13, 49 y 113 dipolos.

Para 5 dipolos se obtuvo, Figura 3.37

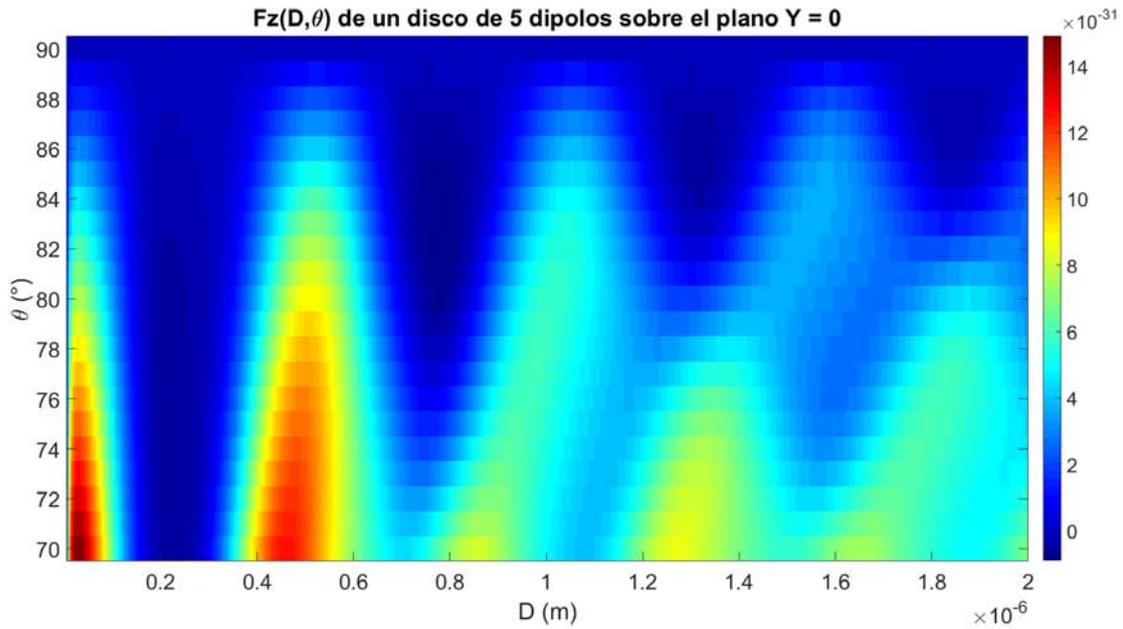


Figura 3.37: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 5 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo, Figura 3.38

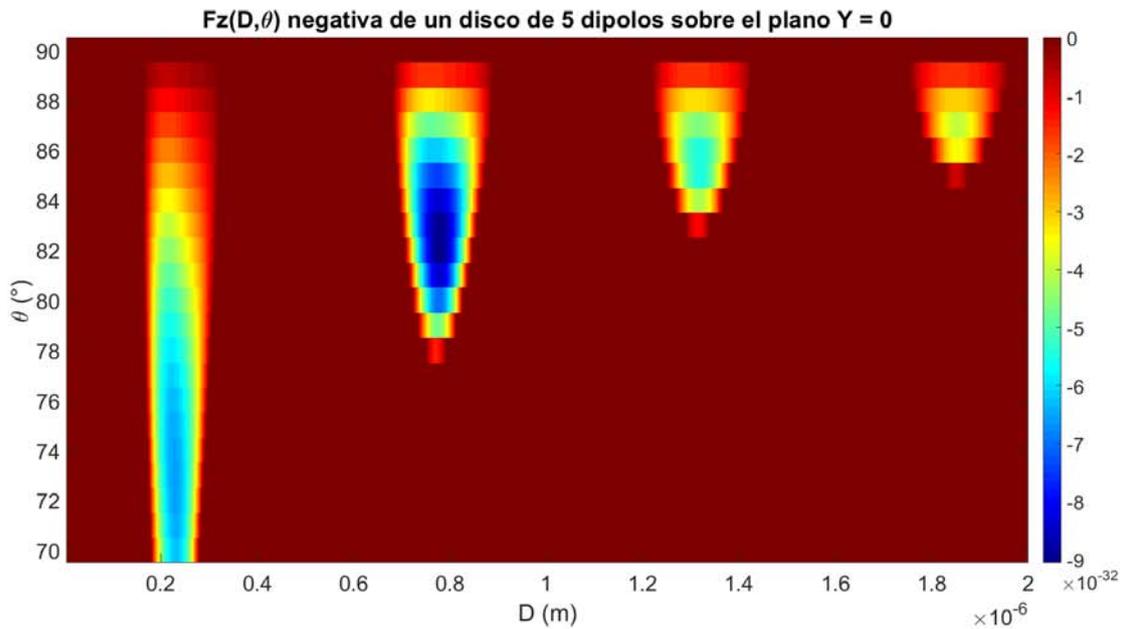


Figura 3.38: Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 5 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

de la cual se puede ver que existen cuatro lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.779 \mu m$ ,  $\theta = 82^\circ$  con valor de  $-9.059 \times 10^{-32} N$ .

Para 13 dipolos se obtuvo, Figura 3.39

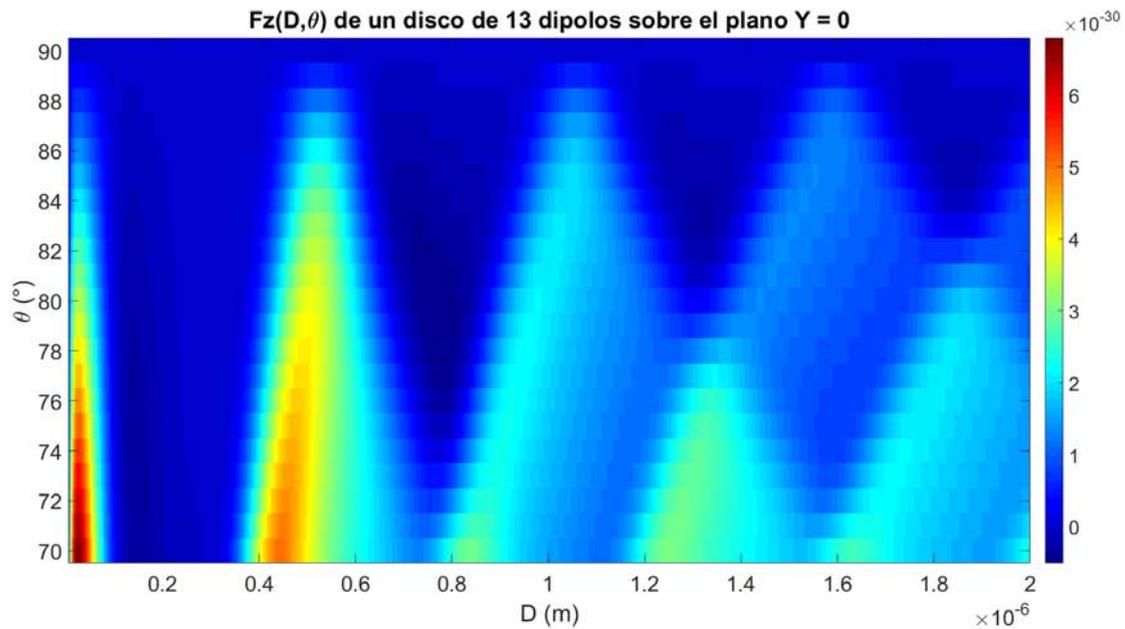


Figura 3.39: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 13 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo, Figura 3.40

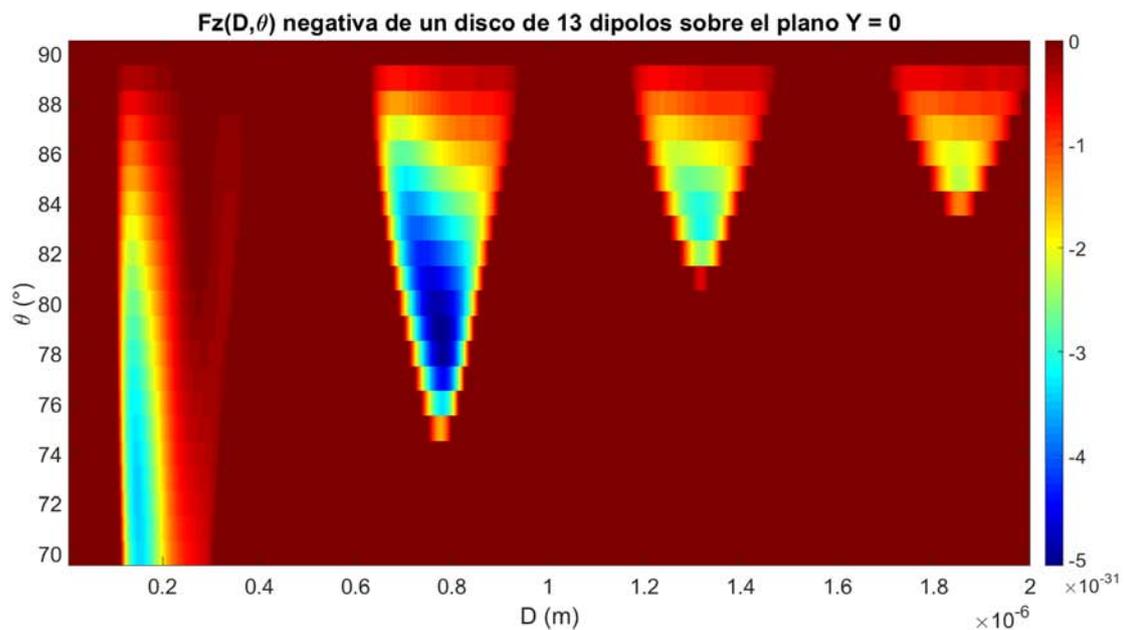


Figura 3.40: Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 13 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

de la cual se puede ver que existen cuatro lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.779 \mu m$ ,  $\theta = 79^\circ$  con valor de  $-5.064 \times 10^{-31} N$ .

Para 49 dipolos se obtuvo, Figura 3.41

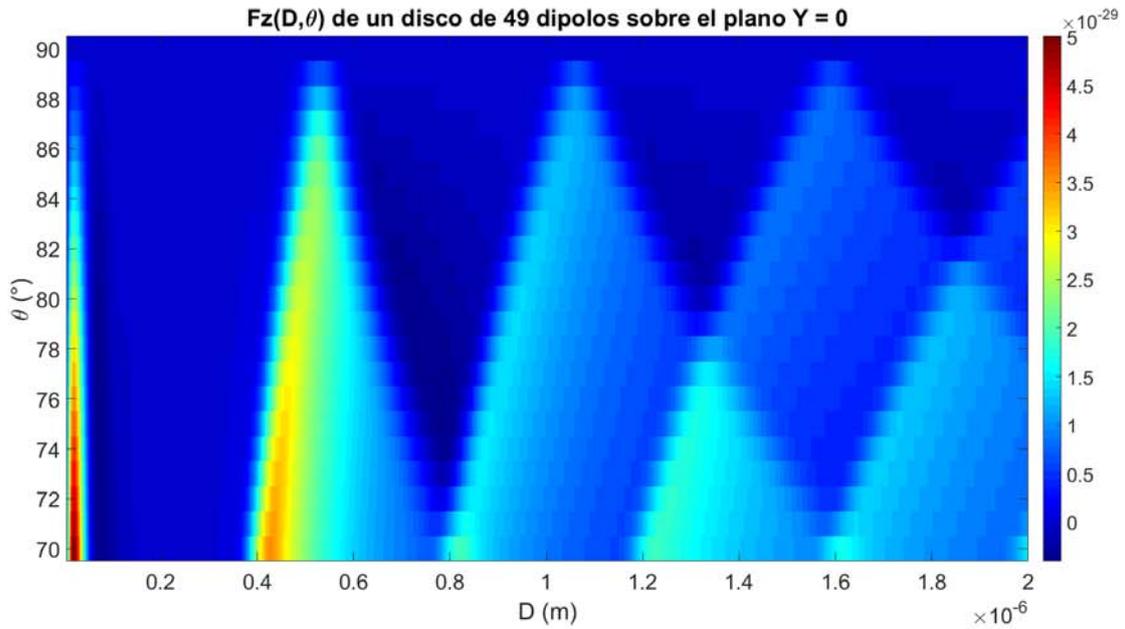


Figura 3.41: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 49 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo, Figura 3.42

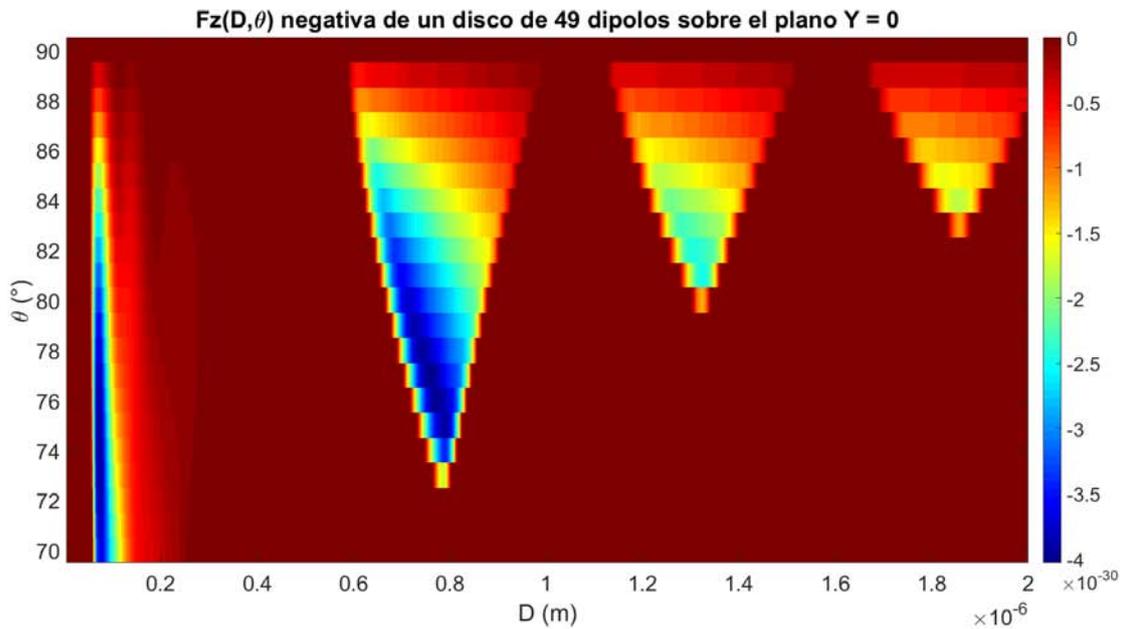


Figura 3.42: Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 49 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

de la cual se puede ver que existen cuatro lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.073 \mu m$ ,  $\theta = 74^\circ$  con valor de  $-4.031 \times 10^{-30} N$ .

Para 113 dipolos se obtuvo, Figura 3.43

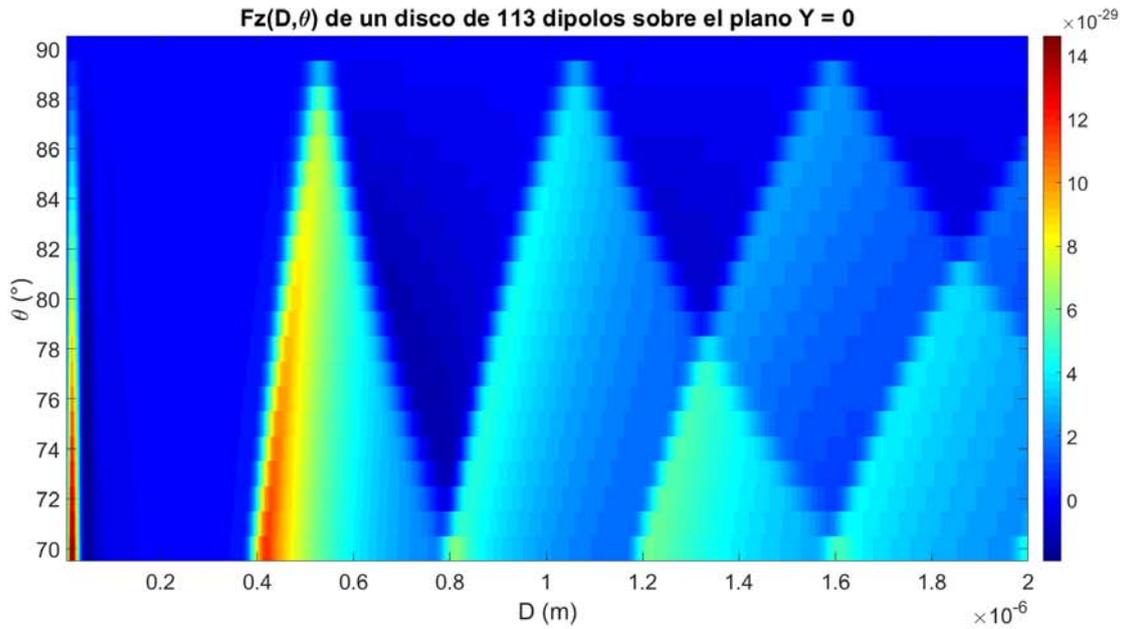


Figura 3.43: Mapa de la fuerza ( $N$ ) sobre 113 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

que al filtrar las fuerzas negativas se obtuvo, Figura 3.44

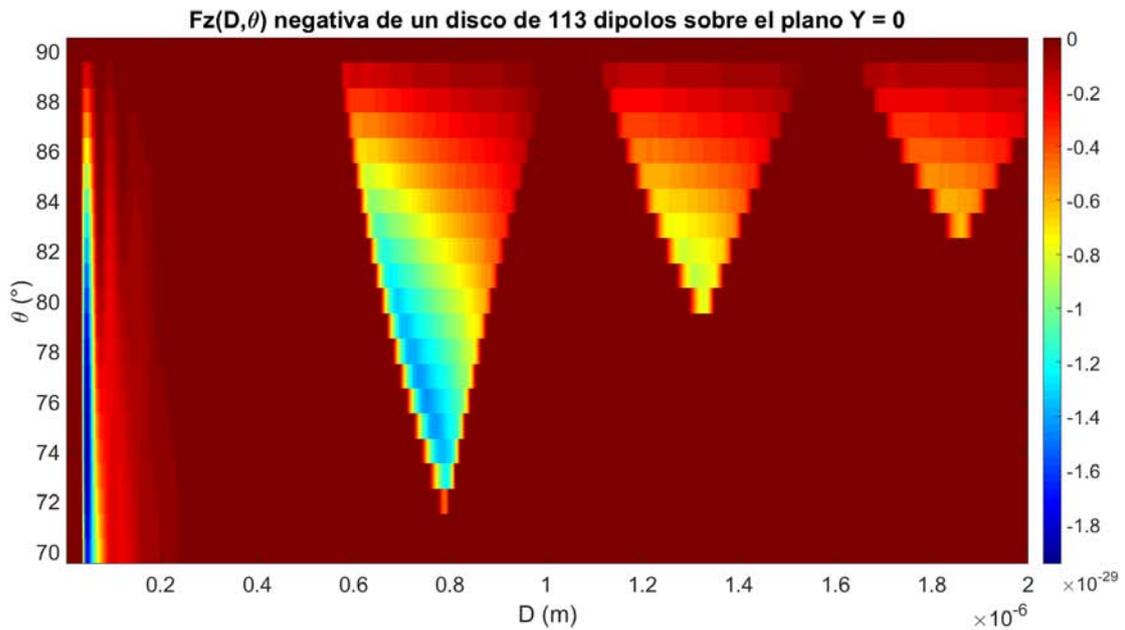


Figura 3.44: Mapa de la fuerza negativa ( $N$ ) sobre 113 dipolos a diferentes distancias  $D$ , iluminados a diferentes ángulos  $\theta$  y acomodados como un disco en el plano  $ZX$  como en la Figura (3.36).

de la cual se puede ver que existen cuatro lóbulos de fuerza negativa. Encontramos el máximo de fuerza negativa en  $D = 0.047 \mu m$ ,  $\theta = 74^\circ$  con valor de  $-1.946 \times 10^{-29} N$ .

Los resultados obtenidos para el disco de dipolos se muestran en el Cuadro (3.3).

Se puede notar que para la fuerza máxima negativa, la distancia entre dipolos y ángulo de iluminación disminuyen al aumentar la cantidad de dipolos. Además las fuerzas negativas crecen considera-

Disco			
Dipolos	D( $\mu\text{m}$ )	$\theta(^{\circ})$	F(N)
5	0.779	82	$-9.059 \times 10^{-32}$
13	0.779	79	$-5.064 \times 10^{-31}$
49	0.073	74	$-4.031 \times 10^{-30}$
113	0.047	74	$-1.946 \times 10^{-29}$

Cuadro 3.3: Resultados de las simulaciones de fuerza para discos con diferente cantidad de dipolos.

blemente, aproximadamente tres órdenes de magnitud, al aumentar el número de dipolos de 5 a 113. En comparación con los casos anteriores, con el disco de dipolos la distancia entre dipolos es menor, además de que el ángulo de iluminación también es menor. Si comparamos las fuerzas máximas sobre el filamento, el triángulo y el disco, generalmente se muestra que la fuerza aumente mientras hayan más dipolos, exceptuando el caso del triángulo, cuya fuerza disminuye pasando de 91 a 120 dipolos. Por lo anterior, la dependencia de la distancia de separación y magnitud de la fuerza negativa depende mucho de la localización bidimensional de los dipolos y su acoplamiento.

Se obtuvo el tiempo el cual el algoritmo tarda en simular las fuerzas ópticas y se encontró una dependencia cuadrática con el número de dipolos. Esto se muestra en la Figura (3.45).

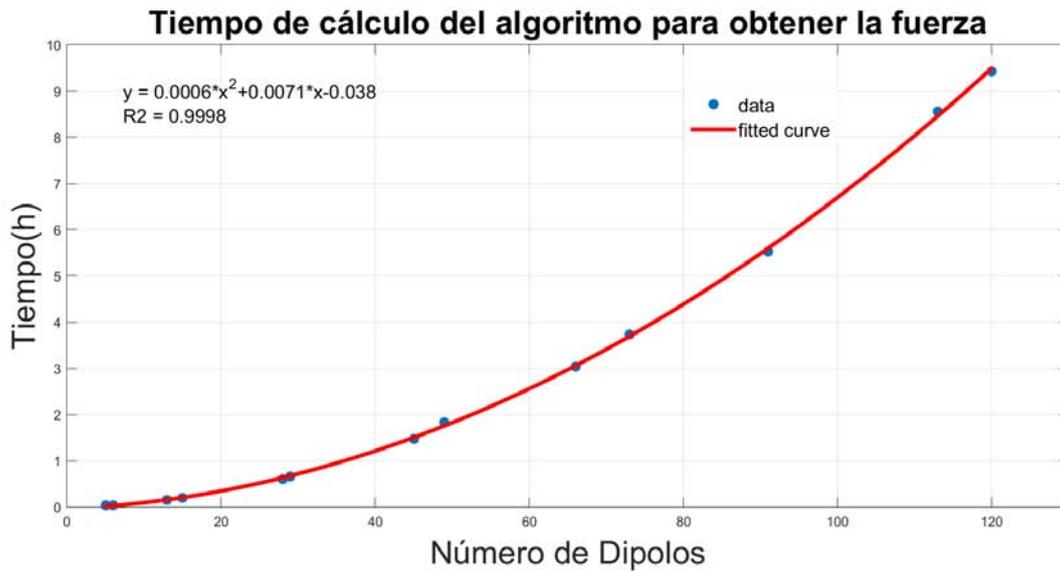


Figura 3.45: Tiempo que tarda en correr el algoritmo que calcula la fuerza sobre dipolos.

# Capítulo 4

## Conclusiones y trabajo a futuro

Durante este trabajo se estudiaron las fuerzas ópticas negativas al simular sistemas discretos de dipolos que interactúan entre sí en un campo óptico que resulta de la interferencia de dos haces. Dicho cómputo se realizó con el método de dipolos acoplados (CDM por sus siglas en inglés).

Se calculó la fuerza óptica para un dipolo y también para arreglos de dos dipolos a diferentes distancias y orientados de tres maneras diferentes: 1) sobre el eje Z, 2) sobre el eje X y 3) sobre el eje Y. Las siguientes simulaciones fueron para 6 y 120 dipolos acomodados en línea sobre el eje Z, haciendo el mismo tipo de análisis. También se trabajó con dos arreglos bidimensionales sobre el plano ZX. El primero fue un triángulo equilátero de dipolos orientado con un vértice sobre el eje Z. Con éste se calcularon las fuerzas ópticas para diferentes cantidades de dipolos. El otro arreglo bidimensional fue un disco de dipolos, con el cual se simularon las fuerzas ópticas para varias cantidades de dipolos.

Se encontró que al simular la partícula como un solo dipolo no se presentan fuerzas negativas para ningún ángulo de iluminación, sin embargo al hacer la aproximación con 2 o más dipolos sí se presentan fuerzas negativas. Con lo anterior, se puede concluir que el factor de mayor importancia para que se presenten fuerzas es la interacción entre dipolos, ya que al ser un problema de dispersión, la interacción entre dipolos propicia la amplificación de momento que resulta en el campo electromagnético dispersado en la dirección frontal. Se hicieron simulaciones para diferentes arreglos de dipolos pero solamente se presentan fuerzas negativas para los que tienen dipolos ordenados a lo largo de la propagación del campo óptico.

Si comparamos las fuerzas máximas sobre el filamento, el triángulo y el disco, generalmente se muestra que la fuerza aumente mientras más dipolos hayan, exceptuando el caso del triángulo, cuya fuerza disminuye pasando de 91 a 120 dipolos. Por lo anterior, la dependencia de la distancia de separación y magnitud de la fuerza negativa depende mucho de la localización bidimensional de los dipolos y su acoplamiento. También se encontró que en todos los casos las fuerzas negativas se presentan en diferentes regiones delimitadas cuando se grafica la fuerza en función de la distancia entre dipolos y el ángulo de iluminación. Cada región abarca varios ángulos de iluminación, pero sus máximos se encuentran en diferentes distancias entre dipolos. Con esto se pueden confirmar los resultados de [3] que indican que las fuerzas ópticas negativas, en su arreglo experimental similar al de esta tesis, se presentan con ángulos de iluminación grandes. La diferencia de su trabajo al de esta tesis es que, en su experimento, ellos iluminan la partícula con un haz gaussiano y no una onda plana, sin embargo, se escogió hacer éste trabajo con ondas planas ya que cerca de la cintura de un haz gaussiano, este se comporta muy parecido a una onda plana. También se decidió hacer el trabajo con ondas planas ya que el objetivo principal es entender a fondo como funciona la aproximación de dipolos acoplados en

el cálculo de fuerzas ópticas.

Es evidente que el perfil de intensidades del haz incidente juega un papel muy importante en éste fenómeno, por lo que en trabajos futuros se pretende estudiar las fuerzas ópticas negativas que actúan sobre partículas iluminadas con haces gaussianos y haces estructurados. Con lo anterior, se podrá hacer una análisis similar para encontrar bajo qué condiciones se presentan fuerzas negativas al usar diferentes tipos de haces. Al ser sistemas más realistas, se podrán comprobar experimentalmente las condiciones obtenidas con las cuales se presentan fuerzas negativas, por lo que después será posible comprobar de manera experimental dichos resultados. También en un futuro se usará el algoritmo desarrollado en esta tesis para el sistema de un prisma triangular que se presenta en [24], donde se obtiene la relación

$$\text{sen}\phi = \frac{\sqrt{1 + 8n^2} + 1}{4n}, \quad (4.1)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{4n^2 - 1 - \sqrt{1 + 8n^2}}}{8} \quad (4.2)$$

que deben cumplir los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  que corresponden a los de la Figura (4.1) y  $n$  es el índice de refracción del prisma.

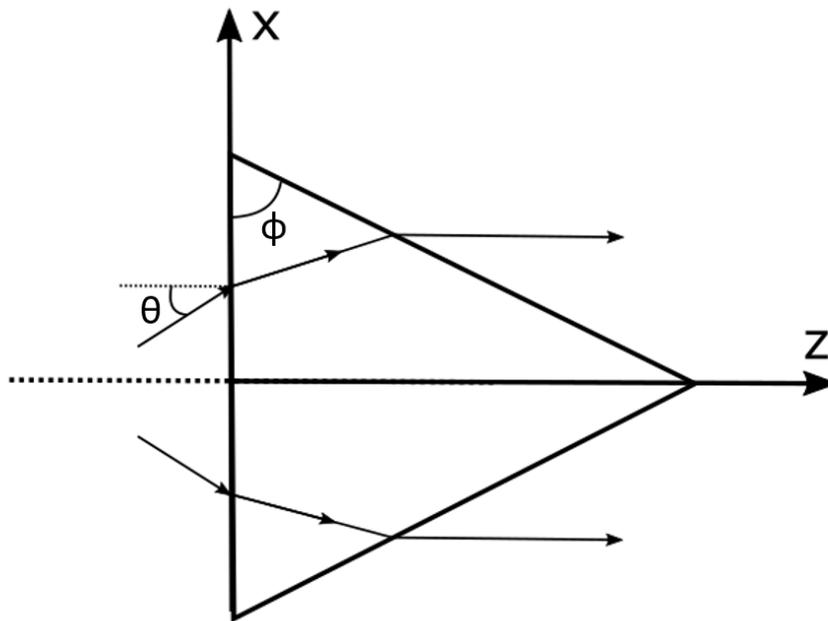


Figura 4.1: Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo  $\theta$ .

Una limitante importante que se tuvo durante este trabajo es que el algoritmo del cálculo de fuerza tarda en correr como el cuadrado del número de dipolos como se muestra en la Figura (3.45). Por esta razón, se decidió calcular la fuerza para arreglos de dipolos (triángulo y discos) sobre el plano ZX. Aun así es posible utilizar el algoritmo para calcular la fuerza sobre arreglos de dipolos en tres dimensiones (cubos, prismas y esferas) que representan a las partículas de forma más realista.

# Bibliografía

- [1] Arthur Ashkin. Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 94(10):4853–4860, 1997.
- [2] Michael W Berns. Optical tweezers: tethers, wavelengths, and heat. *Methods in cell biology*, 82:455–466, 2007.
- [3] O Brzobohaty, V Karásek, M Šiler, L Chvátal, T Ci már, and P Zemánek. Experimental demonstration of optical transport, sorting and self-arrangement using a tractor beam. *Nature Photonics*, 7(2):123–127, 2013.
- [4] Patrick C Chaumet, Adel Rahmani, Anne Sentenac, and Garnett W Bryant. Efficient computation of optical forces with the coupled dipole method. *Physical Review E*, 72(4):046708, 2005.
- [5] Steven Chu. Nobel lecture: The manipulation of neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 70:685–706, Jul 1998.
- [6] Claude N. Cohen-Tannoudji. Nobel lecture: Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.*, 70:707–719, Jul 1998.
- [7] E. A. Cornell and C. E. Wieman. Nobel lecture: Bose-einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Rev. Mod. Phys.*, 74:875–893, Aug 2002.
- [8] BT Draine and Joseph C Weingartner. Radiative torques on interstellar grains: I. superthermal spinup. *arXiv preprint astro-ph/9605046*, 1996.
- [9] Andrew Forbes. *Laser Beam Propagation: Generation and Propagation of Customized Light*. CRC Press, 2014.
- [10] David J Griffiths. Electrodynamics. *Introduction to Electrodynamics, 3rd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, pages 301–306, 1999.
- [11] Chris Hawes, Anne Osterrieder, Imogen A Sparkes, and Tijs Ketelaar. Optical tweezers for the micromanipulation of plant cytoplasm and organelles. *Current Opinion in Plant Biology*, 13(6):731 – 735, 2010.
- [12] Alfons G Hoekstra, M Frijlink, LBFM Waters, and PMA Sloot. Radiation forces in the discrete-dipole approximation. *JOSA A*, 18(8):1944–1953, 2001.
- [13] John David Jackson and Ronald F Fox. Classical electrodynamics. *American Journal of Physics*, 67(9):841–842, 1999.
- [14] Philip H Jones, Onofrio M Maragò, and Giovanni Volpe. *Optical tweezers: Principles and applications*. Cambridge University Press, 2015.

- [15] Wolfgang Ketterle. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-einstein condensation and the atom laser. *Rev. Mod. Phys.*, 74:1131–1151, Nov 2002.
- [16] Michael I Mishchenko, Larry D Travis, and Andrew A Lacis. *Scattering, absorption, and emission of light by small particles*. Cambridge university press, 2002.
- [17] Amit Mizrahi and Yeshaiahu Fainman. Negative radiation pressure on gain medium structures. *Optics letters*, 35(20):3405–3407, 2010.
- [18] Timo A Nieminen, Nathaniel du Preez-Wilkinson, Alexander B Stilgoe, Vincent LY Loke, Ann AM Bui, and Halina Rubinsztein-Dunlop. Opticaltweezers:theoryandmodelling. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 146:59–80, 2014.
- [19] Andrey Novitsky, Cheng-Wei Qiu, and Haifeng Wang. Single gradientless light beam drags particles as tractor beams. *Physical review letters*, 107(20):203601, 2011.
- [20] Lukas Novotny and Bert Hecht. *PrinciplesOfNano-optics*. Cambridge university press, 2012.
- [21] William D. Phillips. Nobel lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 70:721–741, Jul 1998.
- [22] Richard S Quimby. *PhotonicsAndLasers:AnIntroduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [23] G Roosen, B Delaunay, and C Imbert. Radiation pressure exerted by a light beam on refractive spheres: theoretical and experimental study. *Journal of Optics*, 8(3):181, 1977.
- [24] S Sukhov and A Dogariu. Negative nonconservative forces: optical “tractor beams” for arbitrary objects. *Physical review letters*, 107(20):203602, 2011.
- [25] Hu Zhang and Kuo-Kang Liu. Optical tweezers for single cells. *Journal of The Royal Society Interface*, 5(24):671–690, 2008.

# Apéndice A

## Interferencia de dos ondas planas

Supongamos dos ondas planas descritas como

$$\mathbf{E}_1 = E_1 e^{i\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_{1y}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 e^{i\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_{2y}, \quad (\text{A.2})$$

con  $\hat{\mathbf{k}}_1$  el vector de onda del primer campo en su sistema cartesiano  $S1$ ,  $\hat{\mathbf{k}}_2$  el vector de onda del segundo campo en su sistema cartesiano  $S2$  y  $\hat{\mathbf{e}}_{1y} = \hat{\mathbf{e}}_{2y} = \hat{\mathbf{e}}_y$  debido a que los campos están polarizados en el eje  $Y$ .

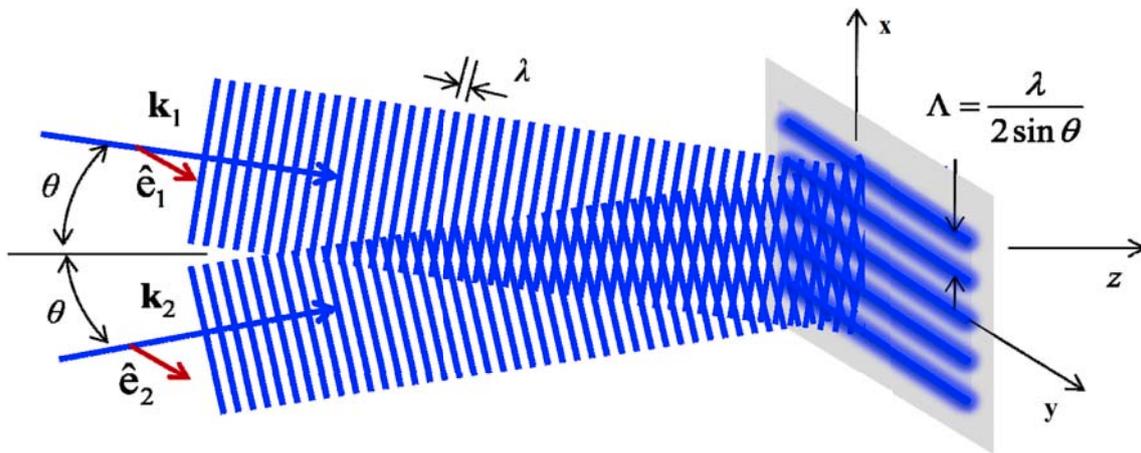


Figura A.1: Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo  $\theta$ .

Al incidir con cierto ángulo  $\theta$  respecto al eje  $Z$ , si escribimos los vectores de onda de cada campo en el sistema de referencia  $S$ , obtenemos

$$\hat{\mathbf{k}}_1 = k_1 \cos \theta \hat{\mathbf{z}} - k_1 \sin \theta \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{\mathbf{k}}_2 = k_2 \cos \theta \hat{\mathbf{z}} + k_2 \sin \theta \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.4})$$

Asumiendo que  $E_1 = E_2 = E_0$  y  $k_1 = k_2 = k$ , la interferencia de los campos será

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 &= E_0 \left[ e^{i[k \cos \theta \hat{z} - k \sin \theta \hat{x}] \cdot \mathbf{r}} + e^{i[k \cos \theta \hat{z} + k \sin \theta \hat{x}] \cdot \mathbf{r}} \right] \hat{\mathbf{e}}_y \\
 &= E_0 \left[ e^{ik \cos \theta z} \left( e^{-ik \sin \theta x} + e^{ik \sin \theta x} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_y \\
 &= E_0 \left[ e^{ik \cos \theta z} 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{ik \sin \theta x} \right\} \right] \hat{\mathbf{e}}_y \\
 &= E_0 \left[ e^{ik \cos \theta z} (2 \cos k \sin \theta x) \right] \hat{\mathbf{e}}_y \\
 &= 2E_0 e^{ik_z z} \cos(k_x x) \hat{\mathbf{e}}_y,
 \end{aligned}$$

con  $k_z = k \cos \theta$ ,  $k_x = k \sin \theta$  y  $2\pi/\Lambda = k \cos \theta = 2\pi/\lambda \cos \theta$  por lo que  $\Lambda = \lambda / \cos \theta$  es la longitud de onda efectiva del patrón de interferencia y  $\operatorname{Re}$  denotando la parte real.

# Apéndice B

## Método de Dipolos Acoplados para ondas planas

Asumiendo ondas planas, como Draine y Weingartner [8], obtenemos

$$\mathbf{E}_{inc} = \mathbf{E}_{inc,0} \exp(i\mathbf{k} \cdot -i\omega t), \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{B}_{inc} = \mathbf{B}_{inc,0} \exp(i\mathbf{k} \cdot -i\omega t), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{B}_{inc,0} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{inc,0}, \quad (\text{B.3})$$

donde  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  y  $h = \omega_0/c$ .

Como en el caso de la aproximación de Rayleigh, el dipolo en  $\mathbf{r}_j$  adquiere un momento dipolar,

$$\mathbf{p}_j(t) = \mathbf{p}_j(0) e^{-i\omega t} = \alpha_j \mathbf{E}_j, \quad (\text{B.4})$$

con  $\mathbf{E}_j$  el campo eléctrico en  $\mathbf{r}_j$  tomando en cuenta las contribuciones del campo electromagnético incidente y el de todos los dipolos excepto el dipolo  $j$  ésimo. Podemos separar el campo  $\mathbf{E}_j$  en dos, ya que está compuesto por el campo incidente  $\mathbf{E}_{inc,j}$  en el dipolo  $j$ , y el campo  $\mathbf{E}_{sca,j}$  resultante de todos los demás dipolos, exceptuando el dipolo  $j$ . Entonces

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_{inc,j} + \mathbf{E}_{sca,j}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{E}_{inc,j} = \mathbf{E}_{inc,0} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j - i\omega t). \quad (\text{B.6})$$

La radiación de un dipolo [13] es

$$\mathbf{E}_{sca,j} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{l=j} \frac{e^{ikr_{jl}}}{r_{jl}^3} \left[ k^2 \mathbf{r}_{jl} \times (\mathbf{p}_l \times \mathbf{r}_{jl}) + \frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\mathbf{r}_{jl}(\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l) - r_{jl}^2 \mathbf{p}_l] \right], \quad (\text{B.7})$$

donde  $r_{jl} = r_j - r_l$ .

Análogamente el campo magnético se separa en las partes incidentes y dispersadas. Las cuales se pueden obtener con las ecuaciones de Maxwell. Al tener campos armónicos, si promediamos la fuerza sobre cada dipolo en el tiempo obtenemos la ecuación (2.39), que se puede escribir como

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{2} \text{Re}[(\mathbf{p}_j^* \cdot \nabla_j) \mathbf{E}_j + ik\mathbf{p}_j^* \times \mathbf{B}_j], \quad (\text{B.8})$$

que a su vez se puede separar como

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_{inc,j} + \mathbf{F}_{sca,j}, \quad (\text{B.9})$$

con

$$\mathbf{F}_{inc,j} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{p}_{j,0} \cdot \nabla_j) [\mathbf{E}_{inc,0} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)] + ik\mathbf{p}_{l,0}^* \times [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{inc,0} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)], \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{F}_{sca,j} = \sum_{l=j} \frac{1}{2} \text{Re}[(\mathbf{p}_{j,0}^* \cdot \nabla_j) \mathbf{E}_{jl} + ik\mathbf{p}_{j,0}^* \times \mathbf{B}_{jl}], \quad (\text{B.11})$$

y

$$\mathbf{E}_{jl} = \frac{\exp(ikr_{jl})}{r_{jl}^3} k^2 \mathbf{r}_{jl} \times (\mathbf{p}_{l,0} \times \mathbf{r}_{jl}) + \frac{(1 - ikr_{jl})}{r_{jl}^2} [3\mathbf{r}_{jl}(\mathbf{r}_{jl} \cdot \mathbf{p}_{l,0}) - r_{jl}^2 \mathbf{p}_{l,0}], \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{B}_{jl} = k^2 \frac{\exp(ikr_{jl})}{r_{jl}^2} (\mathbf{r}_{jl} \times \mathbf{p}_{j,0}) \left(1 - \frac{1}{ikr_{jl}}\right), \quad (\text{B.13})$$

con  $r_{jl} = |\mathbf{r}_{jl}|$ ,  $\mathbf{r}_{jl} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l$ . Por lo tanto, la fuerza producida por el campo electromagnético incidente sobre una partícula formada por  $N$  dipolos es

$$\mathbf{F}_{rad} = \mathbf{F}_{inc} + \mathbf{F}_{sca} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{inc,j} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{sca,j}. \quad (\text{B.14})$$

Si evaluamos las ecuaciones (B.12) y (B.13) en (B.10) y (B.11) obtenemos que las fuerzas son

$$\mathbf{F}_{inc,j} = \frac{1}{2} \text{Re}[i\mathbf{k}(\mathbf{p}_{j,0}^* \cdot \mathbf{E}_{inc,0}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)], \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{F}_{sca,j} = \sum_{l=j} \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{F}_{jl}), \quad (\text{B.16})$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{jl} = \exp(ikr_{jl}) & [(\mathbf{p}_j^* \cdot \mathbf{p}_l) \hat{\mathbf{n}}_{jl} + \mathbf{p}_j^* (\hat{\mathbf{n}}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l) + (\mathbf{p}_j^* \cdot \hat{\mathbf{n}}_{jl}) \mathbf{p}_l \\ & - 5(\mathbf{p}_j^* \cdot \hat{\mathbf{n}}_{jl}) \hat{\mathbf{n}}_{jl} (\hat{\mathbf{n}}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l)] \times \left( -\frac{k^2}{r_{jl}^2} - \frac{3ik}{r_{jl}^2} + \frac{3}{r_{jl}^4} \right) \\ & + [(\mathbf{p}_j^* \cdot \mathbf{p}_l) \hat{\mathbf{n}}_{jl} - (\mathbf{p}_j^* \cdot \hat{\mathbf{n}}_{jl}) \hat{\mathbf{n}}_{jl} (\hat{\mathbf{n}}_{jl} \cdot \mathbf{p}_l)] \left( \frac{ik^3}{r_{jl}} - \frac{k^2}{r_{jl}^2} \right), \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

con  $\hat{\mathbf{n}}_{jl} = \mathbf{r}_{jl}/r_{jl}$  el vector unitario.

# Apéndice C

## Cálculo directo de la fuerza sobre 2 dipolos sobre el eje Z

Para el caso de dos dipolos sobre el el eje Z se calculó directamente el campo eléctrico dispersado utilizando el desarrollo de la sección 2.5.2 del Capítulo 2 utilizando la ecuación (2.120) para comprobar que las simulaciones estaban bien programadas. Se calculo con el script mostrado en la sección E.11 del Apéndice E. Con esto se obtuvieron las Figuras (C.1) y (C.2) las cuales dan resultados idénticos a las Figuras (3.6) y (3.7). Estos resultados se comparan en el Cuadro C.1.

Cálculo directo			Simulación		
$D_{neg}(m)$	$\theta(^{\circ})$	$F_{neg}(N)$	$D_{neg}(m)$	$\theta(^{\circ})$	$F_{neg}(N)$
$2.5 \times 10^{-7}$	79	$8.748 \times 10^{-34}$	$2.47 \times 10^{-7}$	79	$8.784 \times 10^{-34}$

Cuadro C.1: Comparación de fuerzas sobre dos dipolos sobre el eje Z obtenidas con el cálculo directo y el algoritmo de simulación.

Los parámetros utilizados en el cálculo se muestran en el Cuadro C.2.

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio del dipolo	d	$0.01 \times 10^{-6} m$
Magnitud Campo	E0	1 V/m
longitud de onda	$\lambda$	$532 \times 10^{-9} m$
Vector de onda	k	$2\pi/\lambda$
Permitividad eléctrica	eps	$8.854187 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$
índice de refracción de la partícula	np	1.55
índice de refracción del medio	nm	1
Polarizabilidad real	alfa1	$3 * eps * d^3 * (np^2/nm^2 - 1)/(np^2/nm^2 + 2)$
Polarizabilidad imaginaria	alfa2	$k^3/(6\pi * eps) * alfa1^2$
Constante de Coulomb en un medio con índice de refracción nm	cte	$1/(4\pi * eps * nm^2)$
Coordenadas del primer dipolo	(X1,Y1,Z1)	-
Coordenadas del segundo dipolo	(X2,Y2,Z2)	-

Cuadro C.2: Parámetros utilizados en el script (E.11 del Apéndice E) para el cálculo de la fuerza sobre dos dipolos utilizando el método de dipolos acoplados.

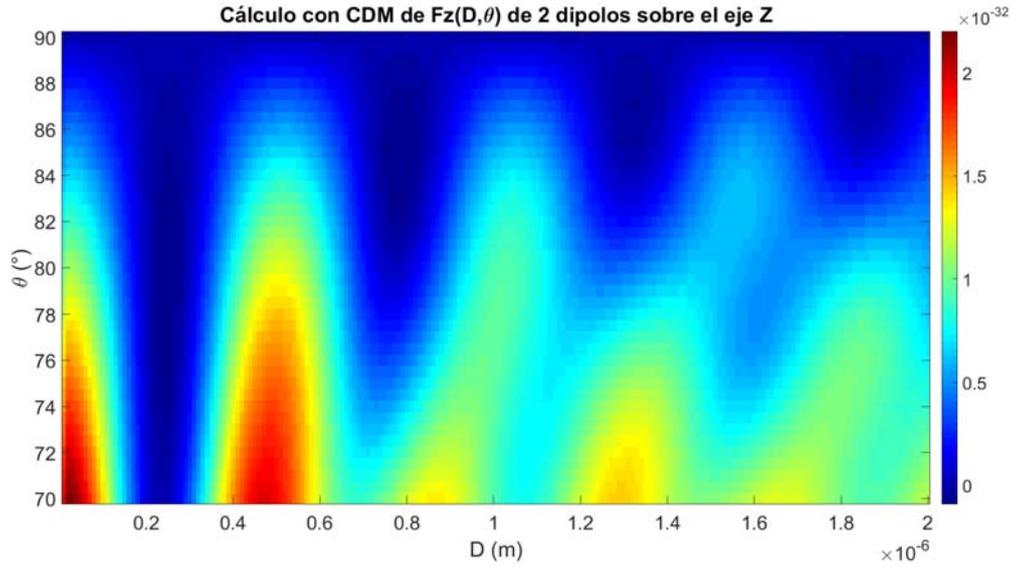


Figura C.1: Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo  $\theta$ .

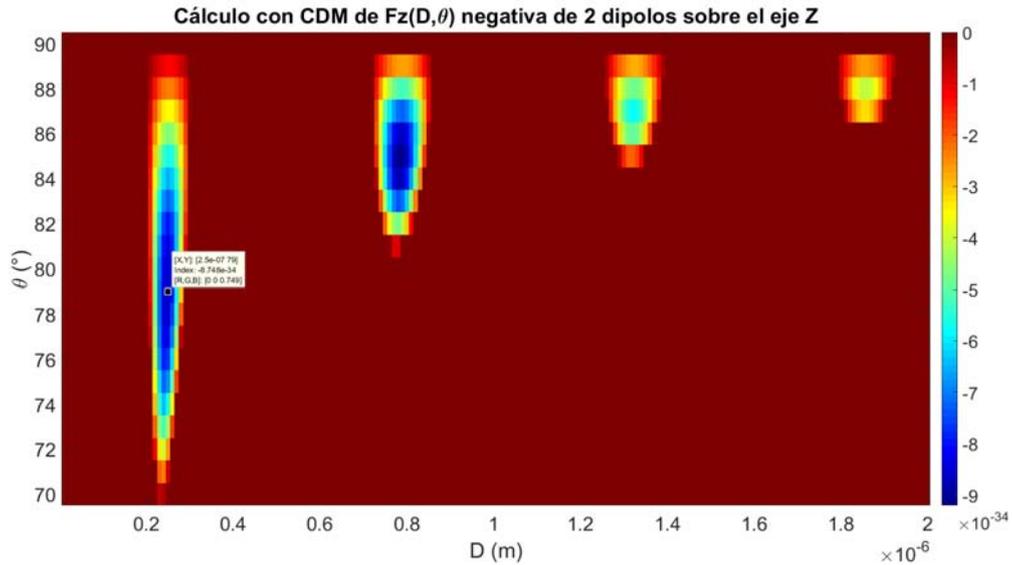


Figura C.2: Interferencia de dos ondas planas incidiendo a un ángulo  $\theta$ .

El vector de la fuerza que resulta del script se muestra a continuación:

$$F_x = 0$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = (alfa2 * imag((2 * E0 + (cte * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * ((E0 * (Z2^2)^{5/2}) * (Z2^2 * cte^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * cte * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z2^{10} * cte * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z2^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z2^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{1/2} + Z2^2 * cte * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z2^2)^{7/2} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2}) * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{3/2} + 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 *$$

$$\begin{aligned}
& \exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1-alfa2*1i)^3*(Z^2)^{(1/2)*2i})/(Z^2^6+4*Z^2^4*cte^4*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4-5*Z^2^10*cte^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2-32*Z^2^6*cte^4*k^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4+7*Z^2^12*cte^2*k^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2+32*Z^2^8*cte^4*k^4*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4-Z^2^14*cte^2*k^4*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2-4*Z^2^10*cte^4*k^6*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4-Z^2^4*cte^2*k*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(7/2)*10i+Z^2^4*cte^4*k*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*16i-Z^2^4*cte^4*k^3*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*16i+Z^2^6*cte^2*k^3*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(7/2)*2i-Z^2^6*cte^4*k^3*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*24i+Z^2^6*cte^4*k^5*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*8i+Z^2^8*cte^4*k^5*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*8i)-(2*E0*Z^2^4*\exp(-Z^2*kz*1i)*(Z^2^8-4*Z^2^2*cte^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2+4*Z^2^4*cte^2*k^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2-Z^2^2*cte^2*k*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(1/2)*8i}))/Z^2^12+4*cte^4*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4-5*Z^2^6*cte^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2-cte^4*k^3*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*16i-32*Z^2^2*cte^4*k^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4+7*Z^2^8*cte^2*k^2*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2-cte^2*k*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(7/2)*10i+cte^4*k*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*16i+32*Z^2^4*cte^4*k^4*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4-Z^2^10*cte^2*k^4*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2-4*Z^2^6*cte^4*k^6*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4+Z^2^2*cte^2*k^3*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1-alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(7/2)*2i-Z^2^2*cte^4*k^3*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*24i+Z^2^2*cte^4*k^5*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*8i+Z^2^4*cte^4*k^5*\exp(-k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1-alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*8i})*(k*(Z^2)^{(1/2)*1i-Z^2^2*k^2+1}))/Z^2^3(2))*((E0*kz*2i+(cte*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*1i))*((E0*(Z^2)^{(5/2))*(Z^2^8*cte*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*1i)*(alfa1+alfa2*1i)*1i-Z^2^2*cte^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1+alfa2*1i)^3*4i-Z^2^10*cte*k^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*1i)*(alfa1+alfa2*1i)*1i+Z^2^4*cte^3*k^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1+alfa2*1i)^3*16i-Z^2^6*cte^3*k^4*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1+alfa2*1i)^3*4i-12*Z^2^2*cte^3*k*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1+alfa2*1i)^3*(Z^2)^{(1/2)+Z^2^2*cte*k*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*1i)*(alfa1+alfa2*1i)*(Z^2)^{(7/2)+4*Z^2^2*cte^3*k^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1+alfa2*1i)^3*(Z^2)^{(3/2)+8*Z^2^4*cte^3*k^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*3i)*(alfa1+alfa2*1i)^3*(Z^2)^{(1/2)*2i}))/5*Z^2^10*cte^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2-4*Z^2^4*cte^4*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4-Z^2^16+32*Z^2^6*cte^4*k^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4-7*Z^2^12*cte^2*k^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2-32*Z^2^8*cte^4*k^4*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4+Z^2^14*cte^2*k^4*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2+4*Z^2^10*cte^4*k^6*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4-Z^2^4*cte^2*k*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(7/2)*10i+Z^2^4*cte^4*k*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*16i-Z^2^4*cte^4*k^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*16i+Z^2^6*cte^2*k^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(7/2)*2i-Z^2^6*cte^4*k^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*24i+Z^2^6*cte^4*k^5*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*8i+Z^2^8*cte^4*k^5*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(1/2)*8i}+(2*E0*Z^2^4*\exp(Z^2*kz*1i)*(Z^2^8-4*Z^2^2*cte^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2+4*Z^2^4*cte^2*k^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2+Z^2^2*cte^2*k*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2*(Z^2)^{(1/2)*8i}))/5*Z^2^6*cte^2*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*2i)*(alfa1+alfa2*1i)^2-4*cte^4*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4-Z^2^12-cte^4*k^3*\exp(k*(Z^2)^{(1/2)*4i)*(alfa1+alfa2*1i)^4*(Z^2)^{(3/2)*16i+32*Z^2^2*cte^4*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + \\
& cte^4 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * 10 * cte^2 * k^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * cte^2 * k^3 * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^2 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 8i) * (2 * Z^2 * k^2 + (Z^3 * k * 1i) / (Z^2)^{(3/2)}) * (alfa1 + alfa2 * 1i) / (Z^2)^{(3/2)} + (cte * \\
& k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((E0 * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^8 * cte * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i) * 1i - Z^2 * cte^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^2 * 10 * cte * k^2 * \exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z^4 * cte^3 * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^3 * 16i - Z^6 * cte^3 * k^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + Z^2 * cte * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * cte^3 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)}) * \\
& 2i) / (5 * Z^2 * 10 * cte^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^4 * cte^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^2 * 16 + 32 * Z^6 * cte^4 * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^4 - 7 * Z^2 * 12 * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^8 * cte^4 * k^4 * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * 14 * cte^2 * k^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^2 * 10 * cte^4 * k^6 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + Z^4 * cte^4 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * \\
& (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + \\
& Z^6 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) + (2 * E0 * Z^4 * \exp(Z^2 * kz * 1i) * \\
& (Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^4 * cte^2 * k^2 * \exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z^2 * cte^2 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) / (5 * Z^6 * cte^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^2 * 12 - cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z^2 * cte^4 * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - \\
& 7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * 10 * cte^2 * \\
& k^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * cte^2 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 2i - Z^2 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * \\
& \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2 * k^2 + k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 1i - 1) * 1i) / Z^3 - (3 * Z^2 * cte * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((E0 * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^8 * cte * \exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i - Z^2 * cte^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^3 * 4i - Z^2 * 10 * cte * k^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z^4 * cte^3 * k^2 * \exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 16i - Z^6 * cte^3 * k^4 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + \\
& Z^2 * cte * k * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * cte^3 * k^3 * \exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) / (5 * Z^2 * 10 * cte^2 * \exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1i)^2 - 4 * Z2^4 * cte^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^16 + 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * \\
& exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z2^12 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^8 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^14 * cte^2 * \\
& k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^10 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * cte^2 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z2^4 * cte^4 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * cte^4 * k^3 * \\
& exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) + \\
& (2 * E0 * Z2^4 * exp(Z2 * kz * 1i) * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + \\
& 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z2^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) / (5 * Z2^6 * cte^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^12 - cte^4 * k^3 * exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z2^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * \\
& k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z2^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 + Z2^10 * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * \\
& exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + \\
& Z2^4 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i) * (Z2^2 * k^2 + k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i - 1) / (Z2^2)^{(5/2)})) / 2 + (alfa2 * imag((2 * E0 * exp(-Z2 * kz * \\
& 1i) - (cte * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * ((2 * E0 * Z2^4 * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * \\
& exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - Z2^2 * cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 8i) / (Z2^12 + 4 * cte^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^6 * cte^2 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z2^2 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * \\
& Z2^8 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z2^4 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - \\
& Z2^10 * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^4 * cte^4 * \\
& k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i - (E0 * exp(-Z2 * kz * 1i) * \\
& (Z2^2)^{(5/2)} * (Z2^2 * cte^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * cte * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z2^10 * cte * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i) * 1i - Z2^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z2^6 * cte^3 * \\
& k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} + Z2^2 * cte * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i) * (Z2^2)^{(7/2)} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(3/2)} + \\
& 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) / (Z2^16 + 4 * \\
& Z2^4 * cte^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^10 * cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + \\
& 7 * Z2^12 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + 32 * Z2^8 * cte^4 * k^4 * exp(-k *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (Z^2)^{(1/2)*4i} * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^14 * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*2i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^10 * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*4i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*2i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*4i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*4i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*2i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*4i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*4i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)*4i}) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) * (k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i - Z^2 * k^2 + 1) / (Z^2)^{(3/2)} * (E0 * kz * exp(Z^2 * kz * 1i) * 2i - (cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((2 * E0 * Z^4 * (Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) / (5 * Z^6 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^12 - cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^10 * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^2 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) + (E0 * exp(Z^2 * kz * 1i) * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^8 * cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i - Z^2 * cte^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^10 * cte * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z^4 * cte^3 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 16i - Z^6 * cte^3 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + Z^2 * cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)}) * 2i) / (5 * Z^10 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^16 + 32 * Z^6 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^12 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^8 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^14 * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^10 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) * (2 * Z^2 * k^2 + (Z^3 * k * 1i) / (Z^2)^{(3/2)}) * (alfa1 + alfa2 * 1i) / (Z^2)^{(3/2)} - (cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((2 * E0 * Z^4 * (Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) / (5 * Z^6 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^12 - cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2 * k^2 + k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i - 1)) / (Z^2)^{(5/2)})) / 2 + (alfa1 * ((2 * E0 + \\
& (cte * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * ((E0 * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^2 * cte^3 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^8 * cte * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i) * 1i + Z^10 * cte * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z^4 * cte^3 * k^2 * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} + Z^2 * cte * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * \\
& cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)}) * 2i) / (Z^16 + 4 * Z^4 * cte^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z^10 * cte^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * \\
& Z^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z^12 * cte^2 * k^2 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + 32 * Z^8 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 - Z^14 * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^10 * cte^4 * k^6 * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * \\
& 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * \\
& k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) - (2 * E0 * Z^4 * exp(-Z^2 * kz * 1i) * (Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^4 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - Z^2 * cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 8i)) / (Z^12 + 4 * cte^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z^6 * cte^2 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z^2 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * \\
& Z^8 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - \\
& Z^10 * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^2 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * \\
& k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) * (k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i - Z^2 * \\
& k^2 + 1)) / (Z^2)^{(3/2)} * (E0 * kz * 2i + (cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((E0 * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^8 * cte * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i - Z^2 * cte^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^10 * cte * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z^4 * cte^3 * \\
& k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 16i - Z^6 * cte^3 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} + Z^2 * cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * \\
& cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)}) * 2i) / (5 * Z^10 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^16 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z2^{12} * cte^2 * k^2 * \exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^8 * cte^4 * k^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 + Z2^{14} * cte^2 * k^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^{10} * cte^4 * k^6 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * cte^2 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + Z2^4 * cte^4 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + \\
& Z2^6 * cte^2 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i + (2 * E0 * Z2^4 * \exp(Z2 * kz * 1i) * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z2^2 * \\
& cte^2 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) / (5 * Z2^6 * cte^2 * \exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - \\
& Z2^{12} - cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z2^2 * cte^4 * \\
& k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + \\
& cte^4 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z2^4 * cte^4 * k^4 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^{10} * cte^2 * k^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * cte^2 * k^3 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^4 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) * (2 * Z2 * k^2 + (Z2^3 * k * 1i) / (Z2^2)^{(3/2)}) * (alfa1 + alfa2 * 1i) / (Z2^2)^{(3/2)} + (cte * \\
& k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * ((E0 * (Z2^2)^{(5/2)} * (Z2^8 * cte * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i) * 1i - Z2^2 * cte^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^{10} * cte * k^2 * \exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z2^4 * cte^3 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^3 * 16i - Z2^6 * cte^3 * k^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} + Z2^2 * cte * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z2^2)^{(7/2)} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^3 * (Z2^2)^{(3/2)} + 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)}) * \\
& 2i) / (5 * Z2^{10} * cte^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^4 * cte^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^{16} + 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^4 - 7 * Z2^{12} * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^8 * cte^4 * k^4 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^{14} * cte^2 * k^4 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^{10} * cte^4 * k^6 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * cte^2 * k * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + Z2^4 * cte^4 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * \\
& (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + \\
& Z2^6 * cte^4 * k^5 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i + (2 * E0 * Z2^4 * \exp(Z2 * kz * 1i) * \\
& (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * \exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z2^2 * cte^2 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) / (5 * Z2^6 * cte^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * \\
& \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^{12} - cte^4 * k^3 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z2^2 * cte^4 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - \\
& 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * \exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^2^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2^{10} * cte^2 * \\
& k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^2^6 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2^2 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 2i - Z^2^2 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2^2 * cte^4 * k^5 * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^2^4 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2^2 * k^2 + k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 1i - 1) * 1i) / Z^2^3 - (3 * Z^2 * cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((E0 * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^2^8 * cte * exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i - Z^2^2 * cte^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^3 * 4i - Z^2^{10} * cte * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z^2^4 * cte^3 * k^2 * exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 16i - Z^2^6 * cte^3 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2^2 * cte^3 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + \\
& Z^2^2 * cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2^2 * cte^3 * k^3 * exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^2^4 * cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)}) * 2i) / (5 * Z^2^{10} * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^2 - 4 * Z^2^4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^2^{16} + 32 * Z^2^6 * cte^4 * k^2 * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^2^{12} * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^2^8 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2^{14} * cte^2 * \\
& k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^2^{10} * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^2^4 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z^2^4 * cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^2^4 * cte^4 * k^3 * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^2^6 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^2^6 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2^6 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^2^8 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) + \\
& (2 * E0 * Z^2^4 * exp(Z^2 * kz * 1i) * (Z^2^8 - 4 * Z^2^2 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + \\
& 4 * Z^2^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z^2^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) / (5 * Z^2^6 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^2^{12} - cte^4 * k^3 * exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z^2^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^2^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * \\
& k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^2^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 + Z^2^{10} * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^2^6 * cte^4 * k^6 * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2^2 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^2^2 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2^2 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + \\
& Z^2^4 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i) * (Z^2^2 * k^2 + k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i - 1)) / (Z^2)^{(5/2)} + (2 * E0 - (cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * \\
& ((E0 * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^2^8 * cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i - Z^2^2 * cte^3 * exp(k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^2^{10} * cte * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i) * 1i + Z^2^4 * cte^3 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 16i - Z^2^6 * cte^3 * \\
& k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2^2 * cte^3 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + Z^2^2 * cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * \\
& (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2^2 * cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * \\
& Z^2^4 * cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)}) * 2i) / (5 * Z^2^{10} * cte^2 * \\
& exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^2^4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 - Z^2^{16} + 32 * Z^2^6 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^2^{12} * \\
& cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^2^8 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^{14} * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * \\
& Z2^{10} * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * cte^2 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + Z2^4 * cte^4 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - \\
& Z2^6 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * \\
& exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) + (2 * E0 * Z2^4 * exp(Z2 * kz * 1i) * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * \\
& cte^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z2^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 8i)) / (5 * Z2^6 * cte^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z2^{12} - cte^4 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * \\
& 16i + 32 * Z2^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * \\
& (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * \\
& Z2^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^{10} * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * \\
& cte^2 * k^3 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * exp(k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^4 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z2^2 * k^2 + k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i - 1)) / (Z2^2)^{(3/2)} * \\
& ((cte * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (2 * Z2 * k^2 - (Z2^3 * k * 1i) / (Z2^2)^{(3/2)}) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * \\
& ((E0 * (Z2^2)^{(5/2)} * (Z2^2 * cte^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * cte * \\
& exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z2^{10} * cte * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z2^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + \\
& Z2^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} + Z2^2 * cte * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i) * (Z2^2)^{(7/2)} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& (Z2^2)^{(3/2)} + 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)}) * \\
& 2i) / (Z2^{16} + 4 * Z2^4 * cte^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^{10} * cte^2 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^{12} * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + 32 * Z2^8 * cte^4 * \\
& k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^{14} * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^{10} * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * \\
& cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + Z2^4 * cte^4 * k * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + \\
& Z2^8 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) - (2 * E0 * Z2^4 * \\
& exp(-Z2 * kz * 1i) * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * \\
& cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - Z2^2 * cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i)) / (Z2^{12} + 4 * cte^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^6 * cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^4 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z2^2 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - \\
& cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z2^4 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^{10} * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - \\
& 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * cte^2 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{7/2} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{3/2} * 8i + Z2^4 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 8i)) / (Z2^2)^{3/2} - E0 * kz * 2i + (cte * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i) * ((E0 * (Z2^2)^{5/2} * (Z2^2 * cte^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * \\
& cte * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z2^{10} * cte * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z2^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& 16i + Z2^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * \\
& exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{1/2} + Z2^2 * cte * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z2^2)^{7/2} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{3/2} + 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& (Z2^2)^{1/2}) * 2i) / (Z2^{16} + 4 * Z2^4 * cte^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^{10} * \\
& cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^{12} * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 + \\
& 32 * Z2^8 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^{14} * cte^2 * k^4 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^{10} * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{7/2} * 10i + \\
& Z2^4 * cte^4 * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * 16i - Z2^4 * cte^4 * \\
& k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{3/2} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{7/2} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{3/2} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 8i) - (2 * E0 * Z2^4 * exp(-Z2 * kz * 1i) * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - Z2^2 * cte^2 * \\
& k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{1/2} * 8i)) / (Z2^{12} + 4 * cte^4 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^6 * cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^2 - cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{3/2} * 16i - 32 * Z2^2 * cte^4 * \\
& k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{7/2} * \\
& 10i + cte^4 * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * 16i + 32 * Z2^4 * cte^4 * \\
& k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^{10} * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * \\
& cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{7/2} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{3/2} * 8i + Z2^4 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{1/2} * 8i)) * (k * (Z2^2)^{1/2} * 1i - Z2^2 * k^2 + 1) * 1i) / Z2^3 + (3 * Z2 * cte * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * ((E0 * (Z2^2)^{5/2} * (Z2^2 * cte^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * cte * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z2^{10} * \\
& cte * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z2^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z2^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{1/2} + Z2^2 * cte * k * \\
& exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z2^2)^{7/2} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{3/2} + 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 3i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{1/2}) * 2i) / (Z2^{16} + 4 * Z2^4 * cte^4 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 - 5 * Z2^{10} * cte^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * \\
& (Z2^2)^{1/2} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^{12} * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z2^2)^{1/2} * 2i) * (alfa1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{alfa2} * 1i)^2 + 32 * Z2^8 * \text{cte}^4 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - Z2^4 * \text{cte}^2 * k^4 * \\
& \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - 4 * Z2^10 * \text{cte}^4 * k^6 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - Z2^4 * \text{cte}^2 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z2^4 * \text{cte}^4 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * \text{cte}^4 * \\
& k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * \text{cte}^2 * k^3 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * \text{cte}^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * \text{cte}^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * \text{cte}^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 8i) - (2 * E0 * Z2^4 * \exp(-Z2 * kz * 1i) * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * \text{cte}^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * \text{cte}^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - Z2^2 * \text{cte}^2 * \\
& k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i)) / (Z2^12 + 4 * \text{cte}^4 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - 5 * Z2^6 * \text{cte}^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * \\
& 1i)^2 - \text{cte}^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z2^2 * \text{cte}^4 * \\
& k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 + 7 * Z2^8 * \text{cte}^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - \text{cte}^2 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + \text{cte}^4 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z2^4 * \text{cte}^4 * \\
& k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - Z2^10 * \text{cte}^2 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - 4 * Z2^6 * \text{cte}^4 * k^6 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 + Z2^2 * \\
& \text{cte}^2 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * \text{cte}^4 * k^3 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^2 * \text{cte}^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^4 * \text{cte}^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i)) * (k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i - Z2^2 * k^2 + 1) / (Z2^2)^{(5/2)})) / 4 + (\text{alfa1} * \\
& ((2 * E0 * \exp(-Z2 * kz * 1i) - (\text{cte} * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i) * ((2 * E0 * \\
& Z2^4 * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * \text{cte}^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * \text{cte}^2 * k^2 * \\
& \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - Z2^2 * \text{cte}^2 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i)) / (Z2^12 + 4 * \text{cte}^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - \\
& 5 * Z2^6 * \text{cte}^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - \text{cte}^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z2^2 * \text{cte}^4 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i)^4 + 7 * Z2^8 * \text{cte}^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - \text{cte}^2 * k * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 10i + \text{cte}^4 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z2^4 * \text{cte}^4 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i)^4 - Z2^10 * \text{cte}^2 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - 4 * Z2^6 * \text{cte}^4 * \\
& k^6 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 + Z2^2 * \text{cte}^2 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * \text{cte}^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^2 * \text{cte}^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * \\
& 8i + Z2^4 * \text{cte}^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) - (E0 * \exp(-Z2 * \\
& kz * 1i) * (Z2^2)^{(5/2)} * (Z2^2 * \text{cte}^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * \text{cte} * \\
& \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i) * 1i + Z2^10 * \text{cte} * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i) * 1i - Z2^4 * \text{cte}^3 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^3 * 16i + \\
& Z2^6 * \text{cte}^3 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^3 * 4i - 12 * Z2^2 * \text{cte}^3 * k * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} + Z2^2 * \text{cte} * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i) * (Z2^2)^{(7/2)} + 4 * Z2^2 * \text{cte}^3 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^3 * \\
& (Z2^2)^{(3/2)} + 8 * Z2^4 * \text{cte}^3 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)}) * \\
& 2i) / (Z2^16 + 4 * Z2^4 * \text{cte}^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - 5 * Z2^10 * \text{cte}^2 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - 32 * Z2^6 * \text{cte}^4 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \\
& \text{alfa2} * 1i)^4 + 7 * Z2^12 * \text{cte}^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 + 32 * Z2^8 * \text{cte}^4 * \\
& k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - Z2^14 * \text{cte}^2 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^2 - 4 * Z2^10 * \text{cte}^4 * k^6 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (\text{alfa1} - \text{alfa2} * 1i)^4 - Z2^4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(-k * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
&(alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * \\
&1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * \\
&k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) * (k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i - Z^2 * \\
&k^2 + 1)) / (Z^2)^{(3/2)} * (E0 * kz * exp(Z^2 * kz * 1i) * 2i - (cte * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * ((2 * E0 * Z^4 * \\
&(Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * \\
&1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) / (5 * Z^6 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * \\
&exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^12 - cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
&alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - \\
&7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
&(alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^10 * cte^2 * \\
&k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
&(alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
&2i - Z^2 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * \\
&exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) + (E0 * exp(Z^2 * kz * 1i) * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^8 * cte * exp(k * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i - Z^2 * cte^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * \\
&1i)^3 * 4i - Z^10 * cte * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * 1i + Z^4 * cte^3 * k^2 * exp(k * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * 16i - Z^6 * cte^3 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + \\
&alfa2 * 1i)^3 * 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + \\
&Z^2 * cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 + alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * cte^3 * k^3 * exp(k * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
&(alfa1 + alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) / (5 * Z^10 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * \\
&1i)^2 - 4 * Z^4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^16 + 32 * Z^6 * cte^4 * k^2 * \\
&exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^12 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
&alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^8 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^14 * cte^2 * \\
&k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^10 * cte^4 * k^6 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
&(alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
&10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * k^3 * \\
&exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
&alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * \\
&(Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) * \\
&(2 * Z^2 * k^2 + (Z^3 * k * 1i) / (Z^2)^{(3/2)}) * (alfa1 + alfa2 * 1i) / (Z^2)^{(3/2)} - (cte * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&1i) * ((2 * E0 * Z^4 * (Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * \\
&Z^4 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + Z^2 * cte^2 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i)) / (5 * Z^6 * cte^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + \\
&alfa2 * 1i)^2 - 4 * cte^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - Z^12 - cte^4 * k^3 * exp(k * \\
&(Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + 32 * Z^2 * cte^4 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 - 7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * \\
&k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 10i + cte^4 * k * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
&4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - 32 * Z^4 * cte^4 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + \\
&alfa2 * 1i)^4 + Z^10 * cte^2 * k^4 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * \\
&exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 + alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * cte^2 * k^3 * exp(k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 +
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i - (E0 * exp(-Z^2 * kz * 1i) * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^2 * cte^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^8 * cte * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z^10 * \\
& cte * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + Z^2 * cte * k * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) / (Z^16 + 4 * Z^4 * cte^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 - 5 * Z^10 * cte^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z^12 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 + 32 * Z^8 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^14 * cte^2 * k^4 * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^10 * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 * \\
& k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i + Z^6 * cte^2 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^6 * cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^6 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^8 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 8i) / (Z^2)^{(3/2)} - E0 * kz * exp(-Z^2 * kz * 1i) * 2i + (cte * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * ((2 * E0 * Z^4 * (Z^8 - 4 * Z^2 * cte^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z^4 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - Z^2 * cte^2 * \\
& k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i) / (Z^12 + 4 * cte^4 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z^6 * cte^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^2 - cte^4 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z^2 * cte^4 * \\
& k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z^8 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + cte^4 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z^4 * cte^4 * \\
& k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^10 * cte^2 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^6 * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + Z^2 * \\
& cte^2 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * 2i - Z^2 * cte^4 * k^3 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 24i + Z^2 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(3/2)} * 8i + Z^4 * cte^4 * k^5 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 8i - (E0 * exp(-Z^2 * kz * 1i) * (Z^2)^{(5/2)} * (Z^2 * cte^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z^8 * cte * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z^10 * \\
& cte * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z^4 * cte^3 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z^6 * cte^3 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& 4i - 12 * Z^2 * cte^3 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} + Z^2 * cte * k * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z^2)^{(7/2)} + 4 * Z^2 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(3/2)} + 8 * Z^4 * cte^3 * k^3 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^3 * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) / (Z^16 + 4 * Z^4 * cte^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 - 5 * Z^10 * cte^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z^6 * cte^4 * k^2 * exp(-k * \\
& (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z^12 * cte^2 * k^2 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 + 32 * Z^8 * cte^4 * k^4 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^14 * cte^2 * k^4 * \\
& exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z^10 * cte^4 * k^6 * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z^4 * cte^2 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z^4 * cte^4 * k * exp(-k * (Z^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z^2)^{(1/2)} * 16i - Z^4 * cte^4 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 8i) * (k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i - Z2^2 * k^2 + 1) * 1i) / Z2^3 + (3 * Z2 * cte * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * ((2 * E0 * Z2^4 * (Z2^8 - 4 * Z2^2 * cte^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 + 4 * Z2^4 * cte^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - Z2^2 * cte^2 * \\
& k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i)) / (Z2^12 + 4 * cte^4 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - 5 * Z2^6 * cte^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^2 - cte^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i - 32 * Z2^2 * cte^4 * \\
& k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^8 * cte^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - cte^2 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + cte^4 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i + 32 * Z2^4 * cte^4 * \\
& k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^10 * cte^2 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^6 * cte^4 * k^6 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + Z2^2 * \\
& cte^2 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^2 * cte^4 * k^3 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^2 * cte^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^4 * cte^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 8i - (E0 * \exp(-Z2 * kz * 1i) * (Z2^2)^{(5/2)} * (Z2^2 * cte^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 4i - Z2^8 * cte * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i + Z2^10 * \\
& cte * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * 1i - Z2^4 * cte^3 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * 16i + Z2^6 * cte^3 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * \\
& 4i - 12 * Z2^2 * cte^3 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} + Z2^2 * cte * k * \\
& \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i) * (alfa1 - alfa2 * 1i) * (Z2^2)^{(7/2)} + 4 * Z2^2 * cte^3 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 3i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(3/2)} + 8 * Z2^4 * cte^3 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 3i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^3 * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) / (Z2^16 + 4 * Z2^4 * cte^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 - 5 * Z2^10 * cte^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 32 * Z2^6 * cte^4 * k^2 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 + 7 * Z2^12 * cte^2 * k^2 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - \\
& alfa2 * 1i)^2 + 32 * Z2^8 * cte^4 * k^4 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^14 * cte^2 * k^4 * \\
& \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 - 4 * Z2^10 * cte^4 * k^6 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 - Z2^4 * cte^2 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * \\
& 10i + Z2^4 * cte^4 * k * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 16i - Z2^4 * cte^4 * \\
& k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 16i + Z2^6 * cte^2 * k^3 * \exp(-k * \\
& (Z2^2)^{(1/2)} * 2i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^2 * (Z2^2)^{(7/2)} * 2i - Z2^6 * cte^4 * k^3 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * \\
& (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * 24i + Z2^6 * cte^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * \\
& 1i)^4 * (Z2^2)^{(3/2)} * 8i + Z2^8 * cte^4 * k^5 * \exp(-k * (Z2^2)^{(1/2)} * 4i) * (alfa1 - alfa2 * 1i)^4 * (Z2^2)^{(1/2)} * \\
& 8i) * (k * (Z2^2)^{(1/2)} * 1i - Z2^2 * k^2 + 1)) / (Z2^2)^{(5/2)})) / 4
\end{aligned}$$

# Apéndice D

## El haz gaussiano

Un haz Gaussiano es aquel que tiene como perfil de intensidad una distribución Gaussiana.

Supongamos un haz linealmente polarizado con distribución Gaussiana en la cintura ( $z=0$ ), entonces el campo eléctrico tiene la forma [20]

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}}. \quad (\text{D.1})$$

Entonces, el espectro de Fourier en  $z = 0$  es

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}} e^{-i[k_x x + k_y y]} dx dy = \mathbf{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} e^{-(k_x^2 + k_y^2) \frac{w_0^2}{4}}. \quad (\text{D.2})$$

Ahora insertamos este espectro en la representación espectral angular y reemplazamos  $k_z$  por la aproximación paraxial

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2 + k_y^2) \left( \frac{w_0^2}{4} + \frac{iz}{2k} \right)} e^{i[k_x x + k_y y]} dk_x dk_y \quad (\text{D.3})$$

Integrando obtenemos

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{E}_0 e^{ikz}}{1 + 2iz/kw_0^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \frac{1}{1 + 2iz/kw_0^2}}. \quad (\text{D.4})$$

La expresión anterior es la Representación Paraxial de un Haz Gaussiano. Haciendo  $\rho = x^2 + y^2$  y  $z_0 = kw_0^2/2$  podemos reescribir la expresión anterior como

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \frac{w_0}{x(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{i[kz - \eta(z) + k\rho^2/2R(z)]}, \quad (\text{D.5})$$

con

$$w(z) = w_0(1 + z^2/z_0^2)^{1/2} \quad \text{Radio del haz} \quad (\text{D.6})$$

$$R(z) = z(1 + z^2/z_0^2) \quad \text{Radio del frente de onda,} \quad (\text{D.7})$$

$$\eta(z) = \arctan(z/z_0) \quad \text{Corrección de fase.} \quad (\text{D.8})$$

Definimos el tamaño transverso del haz la  $\rho$  para la cual la amplitud de  $E$  decrece hasta un valor de  $1/e$  de su valor central, es decir

$$\mathbf{E}(x, y, z) / \mathbf{E}(0, 0, z) = 1/e, \quad (\text{D.9})$$

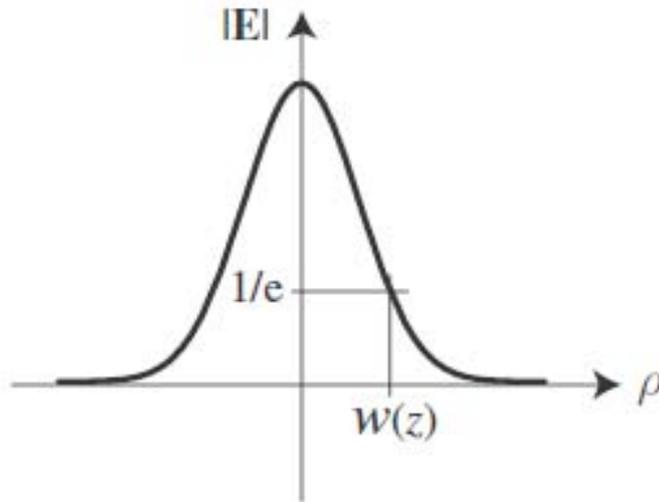


Figura D.1: Tamaño transverso de un haz Gaussiano paraxial.

la cual define un hiperboloide que encierra un ángulo

$$\theta = \frac{2}{kw_0} \quad (\text{D.10})$$

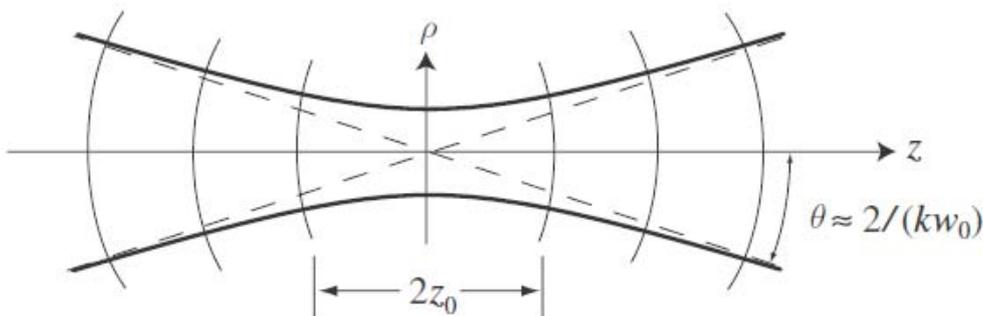


Figura D.2: Hiperboloide que describe al haz Gaussiano.

Para ángulos pequeños podemos encontrar la relación con la apertura numérica ( $NA = n \sin \theta$ ) como  $NA \approx 2n/kw_0$ . Lo anterior se puede hacer porque estamos utilizando la aproximación paraxial, por lo cual  $\theta$  esta restringido a ángulos pequeños. De la imagen (D.2) podemos notar que cerca del foco el haz permanece casi colimado por una distancia aproximada de  $2z_0$ . A la distancia  $z_0$  de le llama *Rango de Rayleigh* y denota la distancia de la cintura a la cual el radio ha incrementado por un factor de  $\sqrt{2}$ . También podemos notar que en el eje del haz ( $\rho = 0$ ) la fase se cambia con la propagación del haz, es decir, si en  $z = -\infty$  el haz estaba en fase con una onda plana de referencia,

entonces en  $z = \infty$  esa onda estará exactamente desfasada con esa onda. A esta fase se le llama *Fase de Gouy*. La variación de la fase se describe con el factor  $\eta(z)$ . Mientras mas pequeño sea la cintura del haz ( $w_0$ ), la variación de fase será más rápida.

## D.1. Haz gaussiano colimado

### D.1.1. Propagación y difracción

Se puede pensar, de manera común, que la difracción es el resultado del paso de luz on orillas delgadas y obstáculos. Aunque lo anterior es verdadero, el proceso de difracción es lo que sucede al rayo cuando se propaga. En algún punto el haz tiene un distribución de intensidad, mientras que en algún otro punto esa distribución es diferente. Este cambio es el resultado de la difracción. Cuando un haz incide sobre un obstáculo, este obstáculo introduce condiciones a la frontera, las cuales afectan el campo eléctrico en la vecindad del obstáculo. Cuando este campo eléctrico se propaga, es cuando ocurre difracción. Para no confundirnos con dispersión, definimos difracción como la propagación del campo eléctrico que se propaga desde el obstáculo, mientras dispersión es el efecto del obstáculo en el campo eléctrico cerca de éste.

Ahora consideremos un haz que se propaga en dirección al eje  $z$ . Ahora definimos el *plano de entrada* como  $z = z_1$  y supongamos que las coordenadas transversales en éste plano son  $x$  y  $y$ . Consideremos otro plano en  $z = z_2$  con  $z_2 > z_1$  y lo llamamos *plano de salida*, en el cual, sus coordenadas transversales con  $u$  y  $v$ . El haz en el plano de entrada está dado por una función compleja  $g(x, y)$  a la cual llamaremos *función de entrada*. Para esta función de entrada queremos calcular la función  $h(u, v)$  para el campo eléctrico en el plano de salida y la llamamos *función de salida*. Éste proceso define la propagación del haz de luz desde el plano  $z = z_1$  hasta el plano  $z = z_2$ .

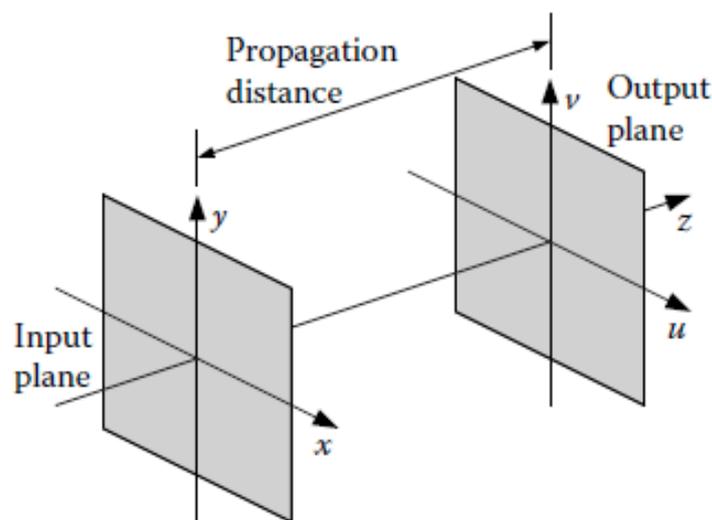


Figura D.3: Sistema de propagación de haces.

Por lo tanto, queremos encontrar una función  $f(x, y, z)$  tal que  $g(x, y) = f(x, y, z = z_1)$  y  $h(u, v) = f(x = u, y = v, z = z_2)$ .

## D.2. Haz gaussiano enfocado

### D.2.1. Lentes

Los lentes son objetos ópticos con la capacidad de cambiar el radio de curvatura del frente de onda de un haz. Por convención, una lente *positivo* con superficies curvas de forma esférica que pueden enfocar luz.

Si una onda plana incide sobre un lente positivo a lo largo de su *eje óptico* (eje de simetría), el haz convergerá o se enfocará en un punto llamado *foco* o *punto focal* a una distancia llamada *distancia focal* del lente. En caso contrario, si existe una fuente puntual de luz a esa misma distancia del lente, las ondas esféricas serán colimadas en ondas planas.

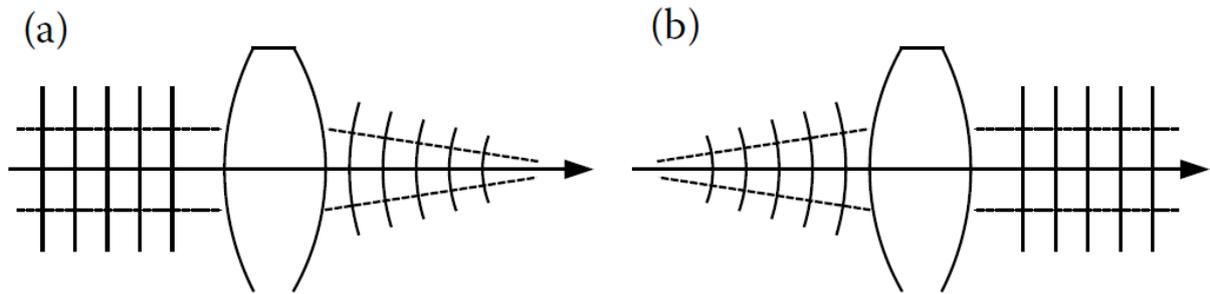


Figura D.4: a) Lente positivo enfocando una onda plana y b) lente positivo colimando una onda esférica.

En caso contrario, si existe una fuente puntual de luz a esa misma distancia del lente, las ondas esféricas serán colimadas en ondas planas.

### D.2.2. Campos longitudinales en la región focal

Un campo electromagnético en el cual se asume que el campo eléctrico y campo magnético siempre son transversos a la dirección de propagación se denomina campo transverso (TEM). El haz Gaussiano paraxial se considera como uno. Sin embargo, la única solución real a estos campos TEM son campos infinitamente extendidos como las ondas planas. Por lo tanto, el haz Gaussiano debe tener componentes polarizadas en la dirección de propagación. Para calcular estos campos longitudinales aplicamos la condición de divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  al campo polarizado en  $x$

$$E_z = - \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} E_x \right] dz. \quad (\text{D.11})$$

$E_z$  se puede derivar utilizando la representación angular espectral del haz Gaussiano paraxial (??). En el plano focal,  $z = 0$

$$E_z(x, y, 0) = -i \frac{2x}{kw_0^2} E_x(x, y, 0), \quad (\text{D.12})$$

donde  $E_x$  corresponde al perfil del haz Gaussiano representado como en la ecuación (D.4). El factor de esta ecuación nos indica que el campo longitudinal está desfasado  $90^\circ$  respecto al campo transverso y que es cero en el eje óptico, además, su magnitud depende del tamaño del foco.

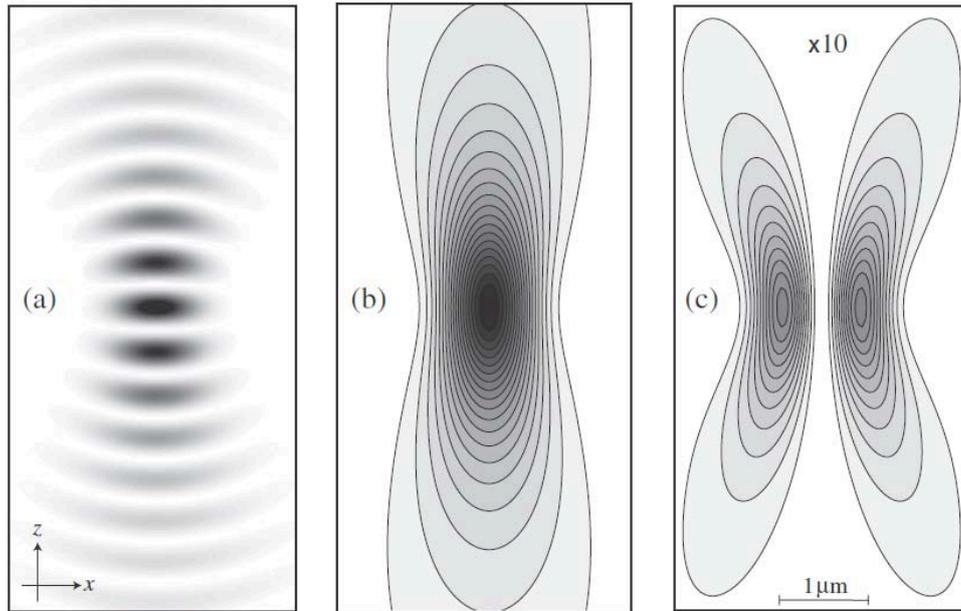


Figura D.5: Campos del haz Gaussiano en el plano de polarización  $(x,y)$ . La longitud de onda es  $\lambda = 800$  y el ángulo del haz es  $\theta = 28.65$ . a) Densidad de potencia dependiente del tiempo. b) Intensidad del campo eléctrico total ( $\mathbf{E}^2$ ). c) Intensidad del campo eléctrico longitudinal ( $\mathbf{E}_z^2$ )

En la figura (D.5) se puede ver que el campo eléctrico longitudinal del haz Gaussiano fundamental es siempre cero en el eje óptico y se ven dos lóbulos a los lados del eje óptico. En el plano  $(x,y)$  en  $z = 0$  los dos lóbulos son alineados a lo largo de la dirección de polarización [20].

# Apéndice E

## Código en Matlab

### E.1. matrizME.m

Con esta función se obtienen las matrices  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  para calcular el campo eléctrico en cualquier posición del espacio. Específicamente para calcular el campo el eléctrico en una vecindad de cada dipolo con el fin de obtener la derivada del campo eléctrico para calcular la fuerza sobre cada dipolo.

```
1 function ME=matrizME(x,y,z,xd,yd,zd,alpha,k)
2 % Determina el campo electrico en cada uno de los dipolos en la
   posicion
3 % rdn
4 Nd=length(xd);
5 for jj=1:Nd;
6     cord=(jj-1)*3+1;
7     rr=[x-xd(jj),y-yd(jj),z-zd(jj)];
8     ME(1:3,cord:cord+2)=tensorT(rr,k,alpha);
9 end
10
11
12 function T=tensorT(rr,k,alpha)
13 % Ed=(T11 T12 T13
14 %     T21 T22 T23
15 %     T31 T32 T33)(Eix Eiy Eiz) ;
16 % rr: distancia entre el dipolo y el punto de observacion rr=r-rd
17 % k: numero de onda en el medio
18 % alpha: polarizabilidad dinamica
19
20 r=sqrt(abs(rr(1)).^2+abs(rr(2)).^2+abs(rr(3)).^2);
21 ex=rr(1)/r;
22 ey=rr(2)/r;
23 ez=rr(3)/r;
24 eps=8.854187e-12;
25 nm=1;
26 cte1=1/(4*pi*r^3*eps*nm^2)*exp(1i*k*r)*alpha;
27
28 T(1,1)=(-1+1i*k*r+(ey^2+ez^2)*k^2*r^2+ex^2*(3-3*1i*k*r));
29 T(1,2)=(3-3*1i*k*r-k^2*r^2)*ex*ey;
```

```

30 T(1,3)=(3 - 3*1i*k*r - k^2*r^2)*ex*ez;
31
32 T(2,1)=T(1,2); % (3 - 3*1i*k*r - k^2*r^2)*ex*ey;
33 T(2,2)=(k^2*r^2*(ex^2+ez^2)+(1 - 1i*k*r)*(-1 + 3*ey^2));
34 % T(2,2)=k^2*r^2*(ex^2+ez^2)+(-1 + 1i*k*r+ey^2*(3 - 3*1i*k*r));
35
36 T(2,3)=(-k^2*r^2*ey*ez+(1 - 1i*k*r)*3*ey*ez);
37
38 T(3,1)=T(1,3); % (-k^2*r^2*ex*ez+(3 - 3*1i*k*r)*ex*ez);
39 T(3,2)=T(2,3); % (-k^2*r^2*ey*ez+(1 - 1i*k*r)*3*ey*ez);
40 T(3,3)=(k^2*r^2*(ex^2+ey^2)+(1 - 1i*k*r)*(-1 + 3*ez^2));
41
42 T=T*cte1;

```

## E.2. matrizM.m

Con esta función se obtiene la matriz diagonal de dimensión  $3 \times N$  con  $N$  el número de dipolos y los elementos de la diagonal las matrices  $\mathbf{T}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ .

```

1 function M=matrizM(xd,yd,zd,alpha,k)
2 % Determina el campo electrico en cada uno de los dipolos en la
   posicion
3 % rdn
4 Nd=length(xd);
5 %Construimos la matriz
6 A=1*[1,0,0;0,1,0;0,0,1];
7 M=A;
8 for jj=1:Nd;
9     for kk=1:Nd
10        cord1=(jj-1)*3+1;
11        cord2=(kk-1)*3+1;
12        if jj==kk
13            M(cord1:cord1+2,cord2:cord2+2)=A;
14        else
15            rr=[xd(jj)-xd(kk),yd(jj)-yd(kk),zd(jj)-zd(kk)];
16            M(cord1:cord1+2,cord2:cord2+2)=-tensorT(rr,k,alpha);
17        end
18    end
19 end
20
21 function T=tensorT(rr,k,alpha)
22 % Ed=(T11 T12 T13
23 %     T21 T22 T23
24 %     T31 T32 T33)(Eix Eiy Eiz) ;
25 % rr: distancia entre el dipolo y el punto de observacion rr=r-rd
26 % k: numero de onda en el medio
27 % alpha: polarizabilidad dinamica
28
29 r=sqrt(abs(rr(1)).^2+abs(rr(2)).^2+abs(rr(3)).^2);
30 ex=rr(1)/r;
31 ey=rr(2)/r;
32 ez=rr(3)/r;
33 eps=8.854187e-12;
34 nm=1;
35 cte1=1/(4*pi*r^3*eps*nm^2)*exp(1i*k*r)*alpha;
36
37 T(1,1)=(-1+1i*k*r+(ey^2+ez^2)*k^2*r^2+ex^2*(3-3*1i*k*r));
38 T(1,2)=(3-3*1i*k*r-k^2*r^2)*ex*ey;
39 T(1,3)=(3-3*1i*k*r-k^2*r^2)*ex*ez;
40
41 T(2,1)=T(1,2); %(-k^2*r^2*ex*ey+(3-3*1i*k*r)*ex*ey);
42 T(2,2)=(k^2*r^2*(ex^2+ez^2)+(1-1i*k*r)*(-1+3*ey^2));
43 T(2,3)=(-k^2*r^2*ez*ey+(1-1i*k*r)*3*ey*ez);

```

```

44
45 T(3,1)=T(1,3); %(-k^2*r^2*ex*ez+(3 - 3*i*k*r)*ex*ez);
46 T(3,2)=T(2,3); %(-k^2*r^2*ey*ez+(1 - i*k*r)*3*ey*ez);
47 T(3,3)=(k^2*r^2*(ex^2+ey^2)+(1 - i*k*r)*(-1 + 3*ez^2));
48
49 T=T*cte1;

```

### E.3. campoDipolos.m

Calcula el campo en la posición de cada dipolo.

```
1 function ET=campoDipolos(xd,yd,zd,alpha,k,E0x,E0y,E0z)
2 % Calcula el campo en la posición de cada uno de los dipolos
3 % xd,yd,zd: coordenadas de los dipolos xd=[x1,x2,x3,...],
4 % yd=[y1,y2,y3,...], zd=[z1,z2,z3,...];
5 % alpha: polarizabilidad compleja
6 % E0x: función del campo eléctrico incidente a lo largo de x
7 % E0y: función del campo eléctrico incidente a lo largo de y
8 % E0z: función del campo eléctrico incidente a lo largo de z
9 M=matrizM(xd,yd,zd,alpha,k);
10 Nd=length(xd);
11 for jj=1:Nd
12     cord=3*(jj-1)+1;
13     Einc(cord:cord+2,1)=[E0x(xd(jj),yd(jj),zd(jj));E0y(xd(jj),yd(jj)
14         ),...
15         zd(jj));E0z(xd(jj),yd(jj),zd(jj))];
16 end
17 ET=linsolve(M,Einc);
```

## E.4. campoVecEsn.m

Obtiene el campo eléctrico en una vecindad de la posición de cada dipolo. También obtiene el campo eléctrico total, es decir, el campo eléctrico incidente más el campo producido por todos los dipolos exceptuando el campo eléctrico del dipolo localizado en donde estamos calculando el campo eléctrico total.

```
1 function [Exsn , Eysn , Ezsn]=campoVecEsn(x , y , z , n , xd , yd , zd , alpha , ...
2     k , ET , E0x , E0y , E0z)
3 % Para el calculo de las fuerzas , necesitamos calcular el campo
4 % que incide sobre cada dipolo en una vecindad (dx , dy , dz) .
5 % Para esto necesitamos hacer el calculo removiendo el dipolo de
6 % interes .
7 % xyz : son las coordendas donde se calcula el campo (sin considerar
8 % el dipolo n)
9 % xd , yd , zd : coordendas de los dipolos xd=[x1 , x2 , x3 , ...]
10 % n : numero de dipolo en el vector xd , yd , zd
11 % ET : Campo electrico total en la posicion de los dipolos (Nx1)
12 % Ed=[Ex1 ; Ey1 ; Ez1 ; Ex2 , Eyz ; Ez2 ; ...]
13 % E0x , E0y , E0z : funciones del campo electrico incidente evaluado
14 % Esn : campo en la posicion indicada (x , y , z) sin contar el dipolo n
15 .
16 % Esn=[Esnx(x , y , z) ; Esny(x , y , z) ; Esnz(x , y , z)]
17 E0n=[E0x(x , y , z) ; E0y(x , y , z) ; E0z(x , y , z)] ;
18
19 % De ET removemos el campo correspondiente al dipolo de interes ,
20 % esto para no tomarlo en cuenta en el calculo .
21 cordn=3*(n-1)+1 ;
22 ETsn=ET ;
23 ETsn(cordn : cordn+2) = [] ;
24 xdsn=xd ;
25 xdsn(n) = [] ;
26 ydsn=yd ;
27 ydsn(n) = [] ;
28 zdsn=zd ;
29 zdsn(n) = [] ;
30
31 % calcula ME para los dipolos restantes
32 MEsn=matrizME(x , y , z , xdsn , ydsn , zdsn , alpha , k) ;
33 Es=MEsn*ETsn ;
34 Esn=E0n+Es ;
35 % Esn = transpose(Esn) ;
36 Exsn = Esn(3) ;
37 Eysn = Esn(2) ;
38 Ezsn=Esn(3) ;
```

## E.5. trianguloDipolos.m

Esta función crea un arreglo de dipolos en forma de triángulo solamente definiendo cuantos dipolos ( $q$ ) se quieren en cada lado del eje  $Z$ . Se crea una línea de dipolos sobre el eje  $X$  con  $2q + 1$  dipolos y se crean sucesivamente líneas de dipolos con  $(2q + 1) - 1$  dipolos desplazados en el eje  $Z$  una distancia de  $d * \cos(\pi/6)$  con  $d$  la distancia entre dipolos y suponiendo que los triángulos son equiláteros, es decir, que los dipolos son equidistantes. Con esto se de El número de dipolos del triángulo es igual a  $(2q + 1)(2q + 2)/2$ .

```
1 function [xd,zd,numDip] = trianguloDipolos(d,q)
2 % d es la distancia entre dipolos
3 % q es cuantos dipolos hay de cada lado del cero en el eje Z = 0, Y
  = 0.
4 % q siempre sera impar
5
6 x{1} = (-q*d:d:q*d);
7 z{1} = zeros(size(x{1}));
8 l = length(x{1});
9
10 for jj = 1:length(x{1})
11     for ii = 1:length(x{jj})-1
12         m = 2*ii - 1;
13         x{jj+1}(ii) = x{jj}(1) + m*d/2;
14         z{jj+1}(ii) = jj*d*cos(pi/6);
15     end
16 end
17
18 xd = zeros(1);
19 zd = xd;
20 for ii = 1:length(x)
21     xd = horzcat(xd,x{ii});
22     zd = horzcat(zd,z{ii});
23 end
24 xd(1) = [];
25 zd(1) = [];
26
27 figure(9)
28 for ii = 1:length(x{1})
29     plot(x{ii},z{ii}, '* )
30     hold on
31     axis tight;
32     grid on
33 end
34
35 numDip = l*(l+1)/2;
36
37 end
```

## E.6. discoDipolos.m

Esta función crea un arreglo de dipolos en forma de disco. Primero se crea un cuadrado de lado  $2q + 1$  para después obtener un disco de dipolos con la condición de que se conserven sólo los dipolos que cumplan  $(x - cx)^2 + (z - cz)^2 \leq r^2$  con  $(x, z)$  las coordenadas de los dipolos en el plano  $ZX$ ,  $(cx, cz)$  las coordenadas del centro del cuadrado y  $r$  el radio del disco que queremos encontrar.

```
1 function [xd,zd,numDip] = discoDipolos(d,q)
2 % Las posiciones de los dipolos estan dadas por (xd,zd)
3 % numDip es el numero de dipolos generados a partir del
4 % d es la distancia entre dipolos
5 % q es cuantos dipolos hay de cada lado del cero en el eje Z = 0, Y
   = 0.
6 % q siempre sera impar
7
8 x(1,:) = (-q*d:d*q*d);
9 z(1,:) = zeros(size(x(1,:)));
10 l = length(x);
11
12 for ii = 2:length(x)
13     x(ii,1:length(x)) = x(1,:);
14     z(ii,1:length(x)) = (ii-1)*d;
15 end
16
17 x1 = zeros(1);
18 z1 = x1;
19
20 for ii = 1:length(x)
21     x1 = horzcat(x1,x(ii,:));
22     z1 = horzcat(z1,z(ii,:));
23 end
24
25 x1(1) = [];
26 z1(1) = [];
27
28 cx = 0;
29 cz = (l-1)*d/2;
30 r = cz ;
31
32 for i = 1:length(x1)
33     if (x1(i)-cx)^2 + (z1(i)-cz)^2 <= r^2
34         xd(i) = x1(i);
35         zd(i) = z1(i);
36     else
37         xd(i) = nan;
38         zd(i) = nan;
39     end
40 end
41
```

```
42 xd(isnan(xd)) = [];  
43 zd(isnan(zd)) = [];  
44  
45 numDip = length(zd);  
46  
47 figure(9)  
48 for ii = 1:length(x)  
49     plot(x,z, '*')  
50     grid on  
51     hold on  
52     axis equal;  
53 end  
54  
55 figure(10)  
56 plot(xd,zd, '*')  
57 grid on  
58 axis equal;  
59  
60 end
```

## E.7. Ej1.m

```
1 %% Grafica Einc(z,x) e Iinc(z,x) para un angulo theta
2 clear
3 theta = 79;
4 th=theta*pi/180;
5 %xd=zeros(1,1)*0.1e-6;
6 %yd=[0]*0.1e-6;
7 %zd=[0]*0.1e-5;
8
9 d=0.01e-6; % radio del dipolo.
10 nm=1;
11 np=1.55;
12 eps=8.854187e-12;
13 c=3e8;
14 mu0 = 1/(eps*c^2);
15 lambda=0.532e-6/nm;
16 w=c*2*pi/lambda;
17 k=2*pi/lambda;
18 alpha0=3*eps*d^3*(np^2/nm^2-1)/(np^2/nm^2+2); % definicion del
    novotny
19 alpha=alpha0+1i*k^3/(6*pi*eps)*alpha0^2;
20 alphaim=k^3/(6*pi*eps)*alpha0^2;
21 % campo electrico de la interferencia de dos ondas planas que
    inciden en
22 % con un angulo 2*th en el plano XZ. El campo electrico apunta en
    la
23 % direccion y.
24 E0x=@(x,y,z)0;
25 E0y=@(x,y,z)2*exp(1i*k*cos(th)*z).*cos(k*sin(th)*x);
26 E0z=@(x,y,z)0;
27
28 xx= 0.0e-6:0.01e-6:4e-6;
29 yy = 0;
30 zz = -2e-6:0.01e-6:2e-6;
31
32 [z,x] = meshgrid(zz,xx);
33 y = zeros(length(zz),length(xx));
34
35 ET = E0y(x,y,z);
36
37 figure(1)
38 imagesc(zz,xx, real(ET)); shading interp; axis xy;axis equal;...
39     axis tight; colorbar; colormap jet;
40 str = sprintf( ET(z,x) con theta = %s grados ,num2str(theta) ,...
41     FontSize ,24 );
42 title (str)
43 title ([ Einc(z,x) con theta = num2str(theta) ], FontSize ,24)
```

```

44 set(gca, FontSize ,24)
45 xlabel( z (metros) , FontSize ,24)
46 ylabel( x (metros) , FontSize ,24)
47
48 figure (2)
49 imagesc(zz,xx, real(ET).^2); shading interp; axis xy;...
50     axis equal;axis tight;colorbar; colormap jet;
51 str = sprintf( ET(z,x) con theta = %s grados ,num2str(theta) ,...
52     FontSize ,24 );
53 title (str)
54 title ([ Einc^2(z,x) con theta = num2str(theta) ], FontSize
55     ,24)
56 set(gca, FontSize ,24)
57 xlabel( z (metros) , FontSize ,24)
58 ylabel( x (metros) , FontSize ,24)
59 %% Grafica Z vs Einc(X,Y,Z) con X,Y fijos para el rango de angulos
60 % thet(theta1 ,theta2 ,...)
61 clear
62 d=0.01e-6; % radio del dipolo.
63 nm=1.333;
64 np=1.5;
65 eps=8.854187e-12;
66 c=3e8;
67 mu0 = 1/(eps*c^2);
68 lambda=0.532e-6/nm;
69 w=c*2*pi/lambda;
70 k=2*pi/lambda;
71 alpha0=3*eps*d^3*(np^2/nm^2-1)/(np^2/nm^2+2); % definicion del
72 novotny
73 alpha=alpha0+1i*k^3/(6*pi*eps)*alpha0^2;
74 alphaim=k^3/(6*pi*eps)*alpha0^2;
75 % campo electrico de la interferencia de dos ondas planas que
76 inciden en
77 % con un angulo 2*th en el plano XZ. El campo electrico apunta en
78 la
79 % direccion y.
80 z = -5e-6:0.01e-6:5e-6;
81 y = zeros (size (z));
82 x = 0*ones (size (z));
83 thet=[79];
84 % str = sprintf( ET para varios angulos en y = %s , x = %s ,num2str(
85     y(1)),
86     % num2str(x(1)));
87 figure (3)
88 color = hsv (length (thet));
89 for ii=thet
90     th=ii*pi/180;
91     t = num2str (ii);

```

```

87     leg{ii-min(thet)+1} = t;
88     E0x=@(x,y,z)0;
89     E0y=@(x,y,z)2*exp(1i*k*cos(th)*z).*cos(k*sin(th)*x);
90     E0z=@(x,y,z)0;
91     %     x = ones(size(z))*((-1.5 + (ii-75)*0.01)*10^(-6));
92
93     ET = E0y(x,y,z);
94
95     plot(z,real(ET), color ,color(ii-min(thet)+1,:), LineWidth ,2)
96     grid on
97     hold on
98 end
99 title([ Einc para varios angulos en y = num2str(y(1)) , x = ...
100         num2str(x(1)) ])
101 xlabel( Z (metros) , FontSize ,24)
102 ylabel( ET (V/m) , FontSize ,24)
103 legend(leg , location , NorthEastOutside )
104 %%
105 %% Grafica (Esx,Esy,Esz) que emiten solo length(zd) dipolos al ser
106 % excitados solo por
107 % el campo incidente Einc
108 % Grafica 1: Maximos y minimos del campo de 1 dipolo
109 % Grafica 2: E(z,x) de length(zd) dipolos separados D con el angulo
110 % theta
111 % Grafica 3: Etotal(z,x) de Einc+E(z,x)
112 % Grafica 4: Interferencia de length(zd) dipolos separados D con
113 % angulo
114 % theta
115 clear
116 tic
117 theta = 79;
118 th=theta*pi/180;
119 lambda=0.532e-6;
120 k=2*pi/lambda;
121 d=0.01e-6; % radio del dipolo.
122 nm=1.333;
123 np=1.5;
124 alpha0=3*eps*d^3*(np^2/nm^2-1)/(np^2/nm^2+2); % definicion del
125 novotny
126 alpha=alpha0+1i*k^3/(6*pi*eps)*alpha0^2;
127 alphaim=k^3/(6*pi*eps)*alpha0^2;
128
129 E0x=@(x,y,z)0;
130 E0y=@(x,y,z)2*exp(1i*k*cos(th)*z).*cos(k*sin(th)*x);
131 E0z=@(x,y,z)0;
132
133 xx= 0.05e-6:0.01e-6:10e-6;

```

```

132 yy = 0;
133 zz = -8e-6:0.01e-6:8e-6;
134
135 % Se obtienen con el programa FuerzaDipolosSobreZ.m
136 D = 0.185e-6; % Distancia entre dipolos de maximo de fuerza
      negativa
137 % D = 0.379e-6; % Distancia entre dipolos del maximo de fuerza
      positiva
138
139 numDipolos = 2;
140 zd = [0,D];
141 xd = [0,0];
142 yd = [0,0];
143
144 ET=campoDipolos(xd,yd,zd,alpha,k,E0x,E0y,E0z);
145
146 Exyz = zeros(length(xx));
147 Esx = zeros(length(xx),length(zz));
148 Esy = Esx;
149 Esz = Esx;
150
151 ExyzT = Exyz;
152 EsxT = Esx;
153 EsyT = Esy;
154 EszT = Esz;
155
156 for ii=1:length(xx)
157     for kk=1:length(zz)
158         Exyz=campoEsolodipolos(xx(ii),yy,zz(kk),xd,yd,zd,alpha,k,
            ET);
159         Esx(ii,kk)=Exyz(1);
160         Esy(ii,kk)=Exyz(2);
161         Esz(ii,kk)=Exyz(3);
162
163         ExyzT = campoE(xx(ii),yy,zz(kk),xd,yd,zd,alpha,k,ET,E0x,E0y
            ,E0z);
164         EsxT(ii,kk)=ExyzT(1);
165         EsyT(ii,kk)=ExyzT(2);
166         EszT(ii,kk)=ExyzT(3);
167     end
168 end
169
170 Ey = real(Esy);
171 EyT = real(EsyT);
172 figure(4)
173 plot(xx,Ey(:,ceil(length(Ey)/2)))
174 hold on
175 [pks,locs] = findpeaks(Ey(:,ceil(length(Ey)/2)));

```

```

176 [mins,locmins] = findpeaks(-Ey(:,ceil(length(Ey)/2)));
177 plot(xx(locs),pks, '* '); hold on;
178 % plot(xx(locmins),Ey(locmins), x )
179 grid on
180 title ([ Maximos de intensidad de campo electrico con D = ...
181         num2str(max(zd)) m y theta = num2str(theta) grados ],...
182         FontSize ,24)
183 set(gca, FontSize ,24)
184 xlabel( x (m) , FontSize ,24)
185 ylabel( E (V/m) , FontSize ,24)
186
187 figure (5)
188 imagesc(zz,xx,abs(Esy).^(1/2)); axis xy;axis equal;axis tight;
189     colorbar ;...
190     colormap jet;
191 title ([ E(z,x) de num2str(length(zd)) dipolos separados D =
192         ...
193         num2str(max(zd)) ...
194         , con theta = num2str(theta) grados ], FontSize ,24)
195 set(gca, FontSize ,24)
196 xlabel( z (m) , FontSize ,24)
197 ylabel( x (m) , FontSize ,24)
198
199 figure (6)
200 imagesc(zz,xx,real(EsyT)); axis xy;axis equal;axis tight; colorbar
201     ;...
202     colormap jet;
203 title ([ ET(z,x) de num2str(length(zd)) dipolos separados D =
204         ...
205         num2str(max(zd)) ...
206         , con theta = num2str(theta) grados ], FontSize ,24)
207 set(gca, FontSize ,24)
208 xlabel( z (m) , FontSize ,24)
209 ylabel( x (m) , FontSize ,24)
210
211 figure (7)
212 for ii = 1:length(pks) % plot E maxima of dipole at z = 0;
213     t = linspace(0,pi,100);
214     X = xx(locs(ii))*cos(t);
215     Y = xx(locs(ii))*sin(t);
216     plot(X,Y, 'b-'); axis equal;axis tight; hold on
217 end
218 for ii = 1:length(locmins) %plot E minima of dipole at z = 0;
219     t = linspace(0,pi,100);
220     X = xx(locmins(ii))*cos(t);
221     Y = xx(locmins(ii))*sin(t);
222     plot(X,Y, 'b-'); axis equal;axis tight; hold on
223 end

```

```

220 for ii = 1:length(pks)          %plot E maxima of dipole at z = D;
221     t = linspace(0,pi,100);
222     X = max(zd) + xx(locs(ii))*cos(t);
223     Y = xx(locs(ii))*sin(t);
224     plot(X,Y, 'r-'); axis equal;axis tight; hold on
225 end
226 for ii = 1:length(locmins)      %plot E minima of dipole at z = D;
227     t = linspace(0,pi,100);
228     X = max(zd) + xx(locmins(ii))*cos(t);
229     Y = xx(locmins(ii))*sin(t);
230     plot(X,Y, 'r-'); axis equal;axis tight; hold on
231 end
232 % for ii = 1:length(pks)        %plot E maxima of dipole at z = 2D;
233 %     t = linspace(0,pi,100);
234 %     X = 2*D + xx(locs(ii))*cos(t);
235 %     Y = xx(locs(ii))*sin(t);
236 %     plot(X,Y, 'g-'); axis equal;axis tight; hold on
237 % end
238 % for ii = 1:length(locmins)    %plot E minima of dipole at z = 2
    D;
239 %     t = linspace(0,pi,100);
240 %     X = 2*D + xx(locmins(ii))*cos(t);
241 %     Y = xx(locmins(ii))*sin(t);
242 %     plot(X,Y, 'g-'); axis equal;axis tight; hold on
243 % end
244
245
246 title ([ Interferencia de    num2str(length(zd)) ...
247         dipolos separados D =    num2str(max(zd))    m con theta =
    ...
248         num2str(theta) ...
249         grados ], FontSize ,24)
250 set(gca, FontSize ,24)
251 xlabel( z (m) , FontSize ,24)
252 ylabel( x (m) , FontSize ,24)
253 grid on
254 toc

```

## E.8. FuerzaCDM.m

Esta función calcula la fuerza óptica actuando sobre un dipolo la aproximación de Rayleigh (ecuación (2.40)).

```

1  function [Fx, Fy, Fz] = FuerzaCDM( fieldEsn , x, y, z, n, h, w, c, alpha1 ,
    alpha2 )
2  [Ex, Ey, Ez] = fieldEsn(x, y, z, n);
3  [Exdyp, Eydyp, Ezdyp] = fieldEsn(x+h/2, y, z, n);
4  [Exdxn, Eydxn, Ezdxn] = fieldEsn(x-h/2, y, z, n);
5  [Exdyp, Eydyp, Ezdyp] = fieldEsn(x, y+h/2, z, n);
6  [Exdyn, Eydyn, Ezdyn] = fieldEsn(x, y-h/2, z, n);
7  [Exdyp, Eydyp, Ezdyp] = fieldEsn(x, y, z+h/2, n);
8  [Exdzn, Eydzn, Ezdzn] = fieldEsn(x, y, z-h/2, n);
9
10 DxEx = (Exdyp-Exdyn)/h;
11 DxEy = (Eydyp-Eydyn)/h;
12 DxEx = (Exdyp-Exdxn)/h;
13
14 DyEx = (Exdyp-Exdyn)/h;
15 DyEy = (Eydyp-Eydyn)/h;
16 DyEz = (Ezdyp-Ezdyn)/h;
17
18 DzEx = (Exdyp-Exdzn)/h;
19 DzEy = (Eydyp-Eydzn)/h;
20 DzEz = (Ezdyp-Ezdzn)/h;
21
22 Fx = (alpha1/2)*real(conj(Ex).*DxEx+conj(Ey).*DxEy+conj(Ez).*DxEz)
    ...
23     + (alpha2/2)*imag(conj(Ex).*DxEx+conj(Ey).*DxEy+conj(Ez).*DxEz
    );
24 Fy = (alpha1/2)*real(conj(Ex).*DyEx+conj(Ey).*DyEy+conj(Ez).*DyEz)
    +...
25     (alpha2/2)*imag(conj(Ex).*DyEx+conj(Ey).*DyEy+conj(Ez).*DyEz);
26 Fz = (alpha1/2)*real(conj(Ex).*DzEx+conj(Ey).*DzEy+conj(Ez).*DzEz)
    +...
27     (alpha2/2)*imag(conj(Ex).*DzEx+conj(Ey).*DzEy+conj(Ez).*DzEz);
28
29 end
30
31 function [DxE, DyE, DzE]=gradxyz( fieldE , h, x, y, z)
32 DxE = (fieldE(x+h/2, y, z)-fieldE(x-h/2, y, z))/h;
33 DyE = (fieldE(x, y+h/2, z)-fieldE(x, y-h/2, z))/h;
34 DzE = (fieldE(x, y, z+h/2)-fieldE(x, y, z-h/2))/h;
35 end

```

## E.9. FuerzaDipolon.m

Esta función se usa para calcular la fuerza óptica sobre un arreglo de dipolos utilizando la función **FuerzaCDM.m**.

```

1  function [Fx ,Fy ,Fz]=FuerzaDipolon (xd ,yd ,zd , theta )
2  % coordenadas de los dipolos en metros .
3  % xd=[x1 ,x2 ,x3 ,x4 ,... ] ; yd=[y1 ,y2 ,y3 ,y4 ,... ] ; zd=[z1 ,z2 ,z3 ,z4 ,... ]
4
5  th=theta *pi /180 ;
6  d=0.01e -6 ; % radio del dipolo .
7  nm=1 ;
8  np=1.55 ;
9  eps=8.854187e -12 ;
10 c=3e8 ;
11 mu0 = 1/( eps *c ^2 ) ;
12 lambda=532e -9/nm ;
13 w=c *2 *pi /lambda ;
14 k=2 *pi /lambda ;
15 % definicion del novotny
16 alpha0=3 *eps *(4/3 *+ pi *d ^3 ) *( np ^2 /nm ^2 -1 ) / ( np ^2 /nm ^2 +2 ) ;
17 alpha=alpha0 +1 i *k ^3 / (6 *pi *eps ) *alpha0 ^2 ;
18 alphaim=k ^3 / (6 *pi *eps ) *alpha0 ^2 ;
19 % campo electrico de la interferencia de dos ondas planas que
    inciden en
20 % con un angulo 2*th en el plano XZ. El campo electrico apunta en
    la
21 % direccion y .
22 E0x=@( x ,y ,z ) 0 ;
23 E0y=@( x ,y ,z ) 2 *exp (1 i *k *cos ( th ) *z ) *cos ( k *sin ( th ) *x ) ;
24 E0z=@( x ,y ,z ) 0 ;
25
26 % Calcula el campo electrico incidente sobre cada uno de los
    dipolos .
27 % Es un vector columna con dimensiones (3*Nx1) ,con N el numero de
    % dipolos .
28 % ET=[ETx(xd(1) ,yd(1) ,zd(1)) ;ETy(xd(1) ,yd(1) ,zd(1)) ,ETz(xd(1) ,yd(1)
    ,
30 % zd(1))ETx(xd(2) ,yd(2) ,zd(2)) ,... ]
31
32 ET=campoDipolos (xd ,yd ,zd , alpha , k ,E0x ,E0y ,E0z ) ;
33 h=0.001e -6 ;
34 Fx=0 ;Fy=0 ;Fz=0 ;
35
36 function [ex ,ey ,ez]=fEsn (xx ,yy ,zz , n)
37 [ex ,ey ,ez]=campoVecEsn (xx ,yy ,zz , n ,xd ,yd ,zd , alpha , k ,ET ,E0x ,E0y ,E0z ) ;
38 end
39
40 for n=1:length (zd)

```

```
41     xx=xd(n);
42     yy=yd(n);
43     zz=zd(n);
44     %Se calcula el vector del campo en la poscion del dipolo n
45
46     [Fnx ,Fny ,Fnz] = FuerzaCDM(@fEsn, xx, yy, zz,n, h, w, c,...
47         alpha0 , alphaim);
48     Fx = Fnx+Fx;
49     Fy = Fny+Fy;
50     Fz = Fnz+Fz;
51     end
52     end
```

## E.10. FuerzaDipolosSobreXYZ.m

Este script utiliza las funciones anteriores para calcular y graficar el mapa de fuerza óptica en función del ángulo de iluminación y distancia entre dipolos.

```
1 %% Calcula F(D,theta) y Grafica
2 clear
3 tic
4 nm = 1;
5 np = 1.55;
6 d=0.01e-6; % radio del dipolo.
7 lambda=0.532e-6/nm;
8 % Coordenadas de los dipolos xd=[x1,...,xn], yd=[y1,...,yn],
9 % zd=[z1,...,zn]
10 zd = [0,d];
11 xd = [0,0];
12 yd = [0,0];
13 % Angulo de iluminacion y distancia entre dipolos
14 theta = (70:1:90);
15 D = (0.5:0.2:200);
16
17 fx = zeros(length(theta),length(D));
18 fy = fx;
19 fz = fx;
20 time = zeros(1,length(theta));
21 for ii=1:length(theta)
22     disp(ii)
23     for jj=1:length(D)
24         F = zeros(1,3);
25         [Fx,Fy,Fz] = FuerzaDipolon(xd,yd,zd*D(jj),theta(ii));
26         fx(ii,jj) = Fx;
27         fy(ii,jj) = Fy;
28         fz(ii,jj) = Fz;
29     end
30     time(ii) = toc
31 end
32 figure(1)
33 imagesc(D*d,theta,fz); axis xy; colorbar; colormap jet;
34 title([ Fz(D,theta) de num2str(length(zd)) dipolos ],FontSize
35     ,24);
36 set(gca,FontSize,24)
37 xlabel(D(metros),FontSize,24);
38 ylabel(theta(grados),FontSize,24);
39
40 sz = size(fz);
41 efez = fz;
42 for ii = 1:sz(1)
43     for jj = 1:sz(2)
44         if efez(ii,jj) >= 0
```

```

44         evez(ii , jj) = 0;
45     end
46 end
47 end
48
49 figure(2)
50 imagesc(D*d, theta , evez); axis xy; colorbar; colormap jet;
51 title([ Fz(D,theta) negativa de num2str(length(zd)) ...
52         dipolos sobre el eje Z ], FontSize ,24);
53 set(gca , FontSize ,24)
54 xlabel( D (metros) , FontSize ,24);
55 ylabel( theta (grados) , FontSize ,24);
56 time = toc/60
57 %% Calcula Fz(D) para varios dipolos para varios theta y plot(D,Fz)
58 clear
59 tic
60 d=0.01e-6; % radio del dipolo.
61 zd= [0 ,d];
62 xd= [0 ,0];
63 yd= [0 ,0];
64 theta = (70:0.5:90);
65 D = (0.5:0.2:200);
66
67 color = hsv(length(theta));
68 for kk = 1:length(theta)
69     disp(theta(kk))
70     fx = zeros(length(theta(kk)),length(D));
71     fy = fx;
72     fz = fx;
73     for ii=1:length(theta(kk))
74         for jj=1:length(D)
75             F = zeros(1,3);
76             [Fx,Fy,Fz] = FuerzaDipolon(xd,yd,zd*D(jj),theta(kk));
77             fx(ii ,jj) = Fx;
78             fy(ii ,jj) = Fy;
79             fz(ii ,jj) = Fz;
80         end
81     end
82 figure(3)
83 th = num2str(theta(kk));
84 leg{kk} = th;
85 %str = sprintf( Fz(D) con diferente theta de %s dipolos sobre
86 %el eje Z
87 % ,num2str(length(zd)), FontSize ,24 );
88 plot(D*d,fz , .- , color ,color(kk,:)); colormap jet;
89 grid on
90 title([ Fz(D) con diferente theta de num2str(length(zd)) ...
91         dipolos sobre el eje Z ], FontSize ,24);

```

```
92     set(gca, FontSize ,24)
93     xlabel( D (metros) , FontSize ,24);
94     ylabel( Fz (N) , FontSize ,24);
95     legend()
96     hold on
97 end
98 legend(leg , location , NorthEastOutside )
99 % axis tight;
100 time = toc/60
```

## E.11. FuerzaCDM2DipolosSobreZ.m

```

1 clear
2 tic
3 syms X Y Z X1 Y1 Z1 DX DY DZ k kx kz E0 Rj1 alfa alfa1 alfa2 X2...
4     Y2 Z2 th cte;
5 assume([X Y Z X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2,DX,DY,DZ,k,kx,kz,E0,Rj1,alfa1,...
6     alfa2,th,cte],real)
7 assume([k,kx,kz,E0,Rj1,alfa1,alfa2,th,cte]>0)
8
9 % X1, Y1, Z1 son las posiciones del dipolo 1
10 % DX=X2-X1, ...
11 % Rj1=sqrt((DX)^2+(DY)^2+(DZ)^2);
12
13 ID=[1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0;0,0,0,1,0,0;0,0,0,0,1,0;...
14     0,0,0,0,0,1];
15 TT =cte*exp(1i*k*Rj1)/Rj1^3*alfa*(k^2*[0,0,0,Rj1^2 - DX^2,-DX*DY
16     ,...
17     -DX*DZ;0,0,0,-DX*DY,Rj1^2 - DY^2,-DY*DZ;0,0,0,-DX*DZ,-DY*DZ
18     ,...
19     Rj1^2 - DZ^2;...
20     Rj1^2 - DX^2,-DX*DY,-DX*DZ,0,0,0;-DX*DY,Rj1^2 - DY^2,-DY*DZ
21     ,0,0,0;...
22     -DX*DZ,-DY*DZ,Rj1^2 - DZ^2,0,0,0,]+...
23     ((1 - 1i*k*Rj1)/Rj1^2)*[0,0,0,3*DX^2 - Rj1^2,3*DX*DY,3*DX*DZ
24     ;0,0,0,...
25     3*DX*DY,3*DY^2 - Rj1^2,3*DY*DZ;...
26     0,0,0,3*DX*DZ,3*DY*DZ,3*DZ^2 - Rj1^2;3*DX^2 - Rj1^2,3*DX*DY,...
27     3*DX*DZ,0,0,0;3*DX*DY,3*DY^2 - Rj1^2,3*DY*DZ,0,0,0;3*DX*DZ,3*DY*DZ
28     ,...
29     3*DZ^2 - Rj1^2,0,0,0]);
30 XX = ID-TT;
31 XX=subs(XX,Rj1,sqrt(DX^2+DY^2+DZ^2));
32 %XX=simplify(XX);
33 %T tensor T de la definicion de la ec. 3.60
34
35 M = inv(XX);
36 %M = simplify(M);
37 Einc0 = [0;2*E0*exp(1i*kz*Z)*cos(kx*X);0]; %E incidente en el
38     dipolo 1
39 Einc1=subs(Einc0,[Z,X],[Z1,X1]);
40 Einc2 = subs(Einc0,[Z,X],[Z2,X2]); %E incidente en el dipolo 2
41 % hay que tomar en cuenta mas adelante que x2=x1;
42
43 Einc = [Einc1;Einc2];
44
45 %%Campo total en la posicion de los 2 dipolos. Et es una matriz de
46     6x1

```

```

40 Et = M*Einc ;
41
42 %Et=subs (Et ,[X1,Y1,Z1,X2,Y2],[0,0,0,0,0]);
43
44 %Et=simplify (Et);
45 %Et=simplify (Et);
46
47 syms DX2 DY2 DZ2 %Para cada dipolo TT2 es una matriz de 3x3
48 assume ([DX2,DY2,DZ2] , real )
49
50 % en este caso DX2=X-X1, DY2=Y-Y1; ...
51
52 % TT2 son las matrices de 3x3 de cada dipolo para calcular el
53 % campo en algun punto r
54
55 TT2 =cte*exp(1i*k*Rj1)/Rj1^3* alfa *(k^2*[Rj1^2 - DX2^2,-DX2*DY2,...
56 -DX2*DZ2;-DX2*DY2,Rj1^2 - DY2^2,-DY2*DZ2;...
57 -DX2*DZ2,-DY2*DZ2,Rj1^2 - DZ2^2]+...
58 ((1 - 1i*k*Rj1)/Rj1^2)*[3*DX2^2 - Rj1^2,3*DX2*DY2,3*DX2*DZ2;...
59 3*DX2*DY2,3*DY2^2 - Rj1^2,3*DY2*DZ2;...
60 3*DX2*DZ2,3*DY2*DZ2,3*DZ2^2 - Rj1^2]);
61 TTd21=subs (TT2,[DX2, DY2, DZ2, Rj1],[X-X2,Y-Y2,Z-Z2, sqrt((X-X2)...
62 ^2+(Y-Y2)^2+(Z-Z2)^2]);
63 TTd12=subs (TT2,[DX2, DY2, DZ2, Rj1],[X-X1,Y-Y1,Z-Z1, sqrt((X-X1)...
64 ^2+(Y-Y1)^2+(Z-Z1)^2]);
65
66 % El campo en el dipolo 1 es
67
68 Ed1=Einc0+TTd21*[Et(4);Et(5);Et(6)];
69
70 % El campo en el dipolo 2 es
71
72 Ed2=Einc0+TTd12*[Et(1);Et(2);Et(3)];
73
74 %el campo en todo el espacio es, excepto en los dipolos es
75 ET=Einc0+TTd12*[Et(1);Et(2);Et(3)]+TTd21*[Et(4);Et(5);Et(6)];
76
77 % Fuerzas opticas sobre cada uno de los dipolos
78
79
80 EE1=Ed1(1)*conj (Ed1(1))+Ed1(2)*conj (Ed1(2))+Ed1(3)*conj (Ed1(3));
81 EE2=Ed2(1)*conj (Ed2(1))+Ed2(2)*conj (Ed2(2))+Ed2(3)*conj (Ed2(3));
82
83 %Fuerza de gradiente
84 F1=1/4* alfa 1 *gradient (EE1,[X,Y,Z]);
85 F1=subs (F1,[X,Y,Z],[X1,Y1,Z1]);
86 F2=1/4* alfa 1 *gradient (EE2,[X,Y,Z]);
87 F2=subs (F2,[X,Y,Z],[X2,Y2,Z2]);

```

```

88
89 FgT=F1+F2; % Fuerza de gradiente
90
91 % Para la fuerza de scattering tenemos
92 Fs1=1/2* alfa2 *( imag ( conj ( Ed1 ( 1 ) ) * gradient ( Ed1 ( 1 ) , [ X , Y , Z ] ) ) + ...
93     imag ( conj ( Ed1 ( 2 ) ) * gradient ( Ed1 ( 2 ) , [ X , Y , Z ] ) ) + imag ( conj ( Ed1 ( 3 ) )
94     * ...
95     gradient ( Ed1 ( 3 ) , [ X , Y , Z ] ) ) );
96 Fs1=subs ( Fs1 , [ X , Y , Z ] , [ X1 , Y1 , Z1 ] );
97 Fs2=1/2* alfa2 *( imag ( conj ( Ed2 ( 1 ) ) * gradient ( Ed2 ( 1 ) , [ X , Y , Z ] ) ) + ...
98     imag ( conj ( Ed2 ( 2 ) ) * gradient ( Ed2 ( 2 ) , [ X , Y , Z ] ) ) + imag ( conj ( Ed2 ( 3 ) )
99     * ...
100     gradient ( Ed2 ( 3 ) , [ X , Y , Z ] ) ) );
101 Fs2=subs ( Fs2 , [ X , Y , Z ] , [ X2 , Y2 , Z2 ] );
102
103 FFgT=subs ( FgT , [ X1 , Y1 , Z1 , X2 , Y2 , DX , DY , DZ , alfa ] , [ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , Z2 , ...
104     alfa1 + 1i * alfa2 ] );
105
106 FFsT=subs ( FsT , [ X1 , Y1 , Z1 , X2 , Y2 , DX , DY , DZ , alfa ] , [ 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , Z2 , ...
107     alfa1 + 1i * alfa2 ] );
108
109 FT=FFgT+FFsT;
110 %% Calcula y grafica la fuerza para combinaciones de D y theta
111
112 d=0.01e-6; % radio del dipolo.
113 E0 = 1;
114 nm=1;
115 np=1.55;
116 eps=8.854187e-12;
117 c=3e8;
118 mu0 = 1/( eps*c ^2 );
119 lambda=532e-9 %nm;
120 k=2*pi/lambda;
121 alfa0=3*eps*d^3*( np^2/nm^2-1)/( np^2/nm^2+2);
122 alfaim=k^3/(6*pi*eps)*alfa0^2;
123 cte=1/(4*pi*eps*nm^2);
124
125 ft=matlabFunction(FT(3));
126
127 ZZ=0.1e-6*(0.1:0.1:20);
128 TH=70:1:90;
129
130 for ii=1:length(ZZ)
131     for jj=1:length(TH)
132         fuerza(jj,ii)=ft(E0,ZZ(ii), alfa0, alfaim, cte, k, k*cos(TH(jj))*pi
133             /180);

```

```

133     end
134 end
135
136 figure(1)
137 imagesc(ZZ,TH,real(fuerza))
138 title([ Calculo con CDM de Fz(D,\theta) de 2 dipolos sobre el eje Z
139         ],...
140         FontSize ,24);
141 axis xy
142 colormap jet; colorbar
143 set(gca, FontSize ,24)
144 xlabel( D (m) , FontSize ,24);
145 ylabel( \theta (^{\circ}) , FontSize ,24);
146
147 sz = size(fuerza);
148 ezez = real(fuerza);
149 for ii = 1:sz(1)
150     for jj = 1:sz(2)
151         if ezez(ii,jj) >= 0
152             ezez(ii,jj) = 0;
153         end
154     end
155 end
156
157 figure(2)
158 imagesc(ZZ,TH,ezez); axis xy; colorbar; colormap jet;
159 title([ Calculo con CDM de Fz(D,\theta) ...
160         negativa de 2 dipolos sobre el eje Z ], FontSize ,24);
161 set(gca, FontSize ,24)
162 xlabel( D (m) , FontSize ,24);
163 ylabel( \theta (^{\circ}) , FontSize ,24);

```