



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Modelo físico de transiciones entre patrones
transversales en láseres multimodo de He-Ne

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Romero Huerta Roberto Carlos

TUTOR

Dr. Vicente Torres Zúñiga

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2017





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Romero
Huerta
Roberto Carlos
5558460830
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
305218052

2. Datos del tutor

Dr.
Vicente
Torres
Zúñiga

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Marcela Dolores
Grether
González

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Jesús
Garduño
Mejía

5. Datos del sinodal 3

Fís.
Margarita
Sánchez
y Sánchez

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Omar Guillermo
Morales
Saavedra

7. Datos del trabajo escrito

Modelo físico de transiciones entre patrones transversales en láseres multi-
modo de He-Ne
99 p.
2017

Resumen

El presente trabajo consistió en la observación y el desarrollo de modelos físico-teóricos para describir los patrones –cíclicos y atípicos– de modos transversales electromagnéticos (TEM), emitidos por un láser de He-Ne. Para ello, videograbamos los patrones en diferentes condiciones, por ejemplo, atravesando polarizadores lineales o bajando la temperatura de la cavidad. Enseguida, programamos un método de procesamiento de imágenes que correlaciona los patrones como una combinación lineal de polinomios de Hermite-Gauss. Con el fin de obtener una teoría que describa el mecanismo fundamental productor de los patrones observados, desarrollamos algunos modelos numéricos. Primero, para comprender la naturaleza general de las cavidades y obtener un modelo inicial, encontramos una solución a la ecuación de onda para una cuerda sometida a una fuerza en función del tiempo. Encontramos que los armónicos generados muestran variación morfológica en dependencia de las condiciones de frontera del resonador. Después, este modelo mecánico se sofisticó a uno electromagnético. Elaboramos un algoritmo que resuelve la ecuación integral de Huygens-Fresnel. Se obtuvieron patrones que simulan los que emitiría una cavidad láser, que presente asimetrías graduales. Si bien este modelo cuenta con un sustento físico sólido y que sus patrones exhiben variaciones más notables al crecer la asimetría, es pequeña la correlación morfológica con los patrones observados en el láser He-Ne. Este último resultado conlleva al descarte de mecanismos de generación y la confirmación de que los patrones son dependientes del número de Fresnel, que es una comparación de las dimensiones de la cavidad óptica.

Índice general

Resumen	I
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
1. Modelos Mecánicos Exploratorios: Ecuaciones de onda unidimensionales	3
1.1. Modos en una cuerda sometida a tensión constante	6
1.1.1. Visualización del modelo mecánico	8
1.2. Modos en una cuerda sometida a tensión temporalmente variable	10
1.2.1. Visualización del modelo mecánico con tensión temporalmente variable	13
1.3. Comparación entre modelos mecánicos	14
1.4. Conclusiones del capítulo	15
2. Aspectos generales de resonadores ópticos	17
2.1. Principios fundamentales del láser	17
2.2. Resonadores ópticos	25
2.3. Modos transversales en una cavidad rectangular	26
2.4. Ecuación de onda paraxial.	28
3. Métodos numéricos para la Ecuación de Fresnel	41
3.1. Kernel de propagación y aberración de inclinación en espejos.	48
3.2. Resultados	49
3.2.1. Resultados del modelo plano con inclinación	50
3.3. Modos TEM con inclinación: patrón completo	58
3.4. Conclusiones del capítulo	60
4. Modos híbridos y el algoritmo de correlación de imágenes	63
4.1. Condiciones de observación	63
4.2. Algoritmo de reconocimiento de imágenes	64

4.2.1. Evaluación de los patrones obtenidos	67
4.3. Escalares y componentes TEM de los patrones láser	69
4.4. Matriz de comparación	71
4.5. Conclusiones del capítulo	72
5. Conclusiones generales y prospectiva del trabajo	73
Anexos	75
A. Códigos	77
A.1. Código de soluciones de la cuerda a tensión constante y proporcional al tiempo	77
A.2. Código para identificación de modos por procesamiento de imagen	78
A.2.1. Función generadora de polinomios de Hermite	78
A.2.2. Función generadora de modos TEM-HG	79
A.2.3. Función de comparación por correlación de imágenes	81
A.3. Código de simulación de modos TEM	84
Bibliografía	97

Índice de figuras

1.1. Figura de una cuerda con extremos fijos sujeta a tensión	4
2.1. Diagrama del modelo atómico de Bohr	18
2.2. Diagrama donde se observa la absorción, emisión espontánea y estimulada	20
2.3. Diagrama del proceso de amplificación	21
2.4. Diagrama del proceso de Inversión de población	22
2.5. Figura con los componentes del láser	23
2.6. Niveles de energía del láser He-Ne	24
2.7. Figura de una caja Rectangular	26
2.8. Figura de una onda esférica	29
2.9. Representación del perfil gaussiano	31
2.10. Simulación numérica de modos TEM	32
2.11. Figura de láser de Nd:YAG	34
2.12. Figura de láser de He-Ne	35
2.13. Figura de modo híbrido con forma de dona	36
2.14. Figura de un modo caótico	38
2.15. Figura de diagrama de estabilidad de resonador	39
3.1. Figura con las coordenadas para integral de difracción	42
3.2. Diagrama de métodos numéricos basados en transformada de Fourier para obtener los modos	46
3.3. Diagrama del modelo de cavidad de espejos inclinados.	49
3.4. Modo TEM 1 con apertura en eje y de 0.05 m	59
3.5. Modo TEM 2 con apertura en eje y de 0.05 m	60
4.1. Diagrama del arreglo de un láser de He-Ne	64
4.2. Vista de proyección ortográfica de los patrones láser	65
4.3. Fotografía experimental de la referencia	67
4.4. La suma de tres patrones TEM	68
4.5. Componentes de la matriz de correlaciones máximas	69

4.6. Componentes HG ponderados que modelan el patrón láser <i>No.1.</i>	70
4.7. Componentes HG ponderados que modelan el patrón láser <i>No.2.</i>	70
4.8. Componentes HG ponderados que modelan el patrón láser <i>No.3.</i>	71
4.9. Matriz de comparación	72
A.1. Participación en seminario: Roberto Ortega/SPIE	95

Índice de tablas

1.1. Gráfica de modos transversales de una cuerda con tensión constante	9
1.2. Gráfica de modos transversales con tensión variable	14
1.3. Gráfica de comparación entre modelos mecánicos	15
3.1. Gráfica de modos transversales por método de Morrisey	52
3.2. Gráfica de modos transversales para inclinación $\lambda/10$	52
3.3. Gráfica de combinación modos transversales para inclinación $\lambda/10$	53
3.4. Gráfica de modos transversales para inclinación $\lambda/100$	54
3.5. Gráfica de combinación de modos para inclinación $\lambda/100$	55
3.6. Gráfica de modos transversales para inclinación $\lambda/1000$	56
3.7. Gráfica de combinación de modos transversales para inclinación $\lambda/1000$	57
3.8. Gráfica de modos TEM con inclinación $\lambda/10$	58
3.9. Gráfica de modos TEM con inclinación $\lambda/10$	59

Introducción

Comercialmente, los láseres emiten una mancha redonda, luminosa y bien definida sobre una pantalla, conocida como haz gaussiano. Técnicamente, tal proyección se conoce como modo TEM_{00} . En la mayoría de las aplicaciones industriales, cotidianas y de laboratorio es deseable que el láser emita toda su energía en una pequeña región, geoméricamente simétrica y sin variaciones espaciales de polarización.

Sin embargo, la emisión TEM_{00} representa el orden mínimo de emisión de un sistema láser. En la literatura se encuentran variados ejemplos donde la emisión proyectada se describe mediante órdenes superiores de polinomios de Hermite-Gauss (HG) o bien de Laguerre-Gauss (LG), si la simetría es respectivamente rectangular o cilíndrica en el sistema óptico. Por lo general, en investigaciones de TEM de orden superior, la meta es controlar el momento angular de los fotones, lo que permitiría realizar micro manipulación de partículas, o incluso procesar información. En otros casos, en la industria de láseres de diodo, la cavidad es el material emisor, por lo que es común que los modos proyectados sean diferentes al gaussiano.

Los mecanismos de generación de órdenes superiores TEM son diversos. Puede ser externo; por ejemplo, colocando otro espejo de alta transmisión alineado a la cavidad óptica original. También puede ser de tipo interno, *e.g.* cuando uno de los espejos de la cavidad es alterado geoméricamente. Es conocido que cuando la cavidad óptica cuenta con una sección transversal grande (en comparación con la longitud de la onda) se generan diversos modos transversales. Aunque a la salida, los órdenes superiores son eliminados utilizando diferentes estrategias, como el uso de diafragmas semi-cerrados.

Para esta tesis, se contó un láser de He-Ne (para realizar trabajos didácticos) que nunca mostró una emisión TEM_{00} . En su lugar, presentaba manchones borrosos que cambiaban con el tiempo. El análisis sistemático de estos patrones se convirtió en el objeto de estudio para esta investigación.

Estructura de la tesis

Con el fin de realizar una exposición ordenada y coherente organizamos este trabajo en capítulos modulares, en cada uno de ellos se presentan resultados, discusión y conclusiones correspondientes. Primero (Cap. 1) exponemos un modelo mecánico exploratorio de la ecuación de onda. Luego (Cap. 2) presentamos los principios fundamentales del láser; y revisamos los aspectos generales de los resonadores ópticos. Posteriormente (Cap. 3), resumimos el método numérico descriptor de la solución de la ecuación de Fresnel. Más adelante (Cap.4), describimos el algoritmo de reconocimiento de imágenes utilizado para identificar los patrones como una combinación lineal de polinomios de Hermite-Gauss. Finalmente (Cap.5), presentamos las conclusiones generales y prospectiva de esta investigación.

Puntos a destacar:

- Realizamos observaciones cuidadosas de un láser de gas que presenta modos transversales electromagnéticos (TEM) atípicos y cíclicos.
- Construimos un modelo numérico mecánico que muestra que las variaciones en el medio causan efectos en la formación de los modos.
- Construimos un modelo numérico electromagnético fundamental que muestra patrones TEM variantes con la morfología de la cavidad.
- Programamos un algoritmo de procesamiento de imágenes para identificar los patrones como una combinación lineal de polinomios Hermite-Gauss.

Palabras clave:

1) Resonador óptico. 2) Modos transversales electromagnéticos (TEM). 3) Modelos numéricos. 4) Ecuación de Fresnel. 5) Procesamiento digital de imágenes.

Capítulo 1

Modelos Mecánicos Exploratorios: Ecuaciones de onda unidimensionales

En esta tesis, el objeto central de estudio es óptico-mecánico: una cavidad óptica que sufre alteraciones, en función del tiempo, que provocan cambios en su emisión TEM. Antes de proponer una solución tridimensional de salida, proyectada en una pantalla, desarrollaremos una exploración unidimensional de las ecuaciones de onda, donde el objeto a modelar es una cuerda con unidad de masa lineal. Es decir, construimos un modelo puramente mecánico para comenzar una exploración fenomenológica. Para ello, mostramos un camino para obtener la solución de los modos soportados en una cuerda de tensión constante –un problema conocido que nos sirve como punto de comparación de otros resultados. A continuación, con el mismo método mostramos la vía para obtener las soluciones modales de una cuerda de tensión directamente proporcional al tiempo. La comparación de las soluciones de estos sistemas nos brindó indicios para construir el modelo electromagnético. Así, en los siguientes párrafos mostramos la construcción de los modelos mecánicos. En resumen, exploramos cómo los cambios mecánicos en una cavidad alteran los modos observables, haciendo un primer acercamiento para un caso más complejo: el electromagnético.

Las ondas son un fenómeno físico común en la naturaleza. Son una perturbación periódica del espacio o medio donde hay transporte de energía, pero no de materia. Ejemplos de ondas son: la radiación electromagnética o un efecto sonoro (tocar un instrumento de cuerdas), o bien perturbaciones sobre un medio que permita la formación de una onda como sucede al sacudir violentamente una cuerda sujeta de sus extremos.

En general, la descripción físico-matemática de las ondas es una ecua-

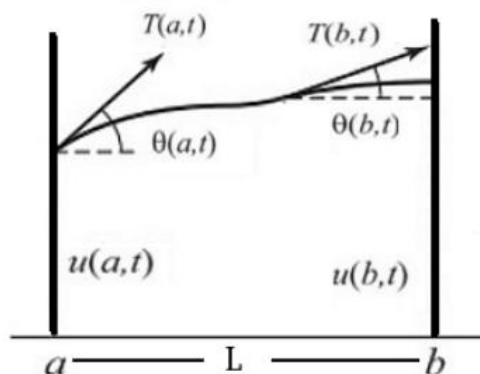


Figura 1.1: Diagrama de una cuerda con extremos fijos sometida a una tensión.

ción diferencial en derivadas parciales [1, 5, 14, 18], denominada ecuación de onda Ec. 1.1. La función $u(x, t)$, representa la magnitud física de la perturbación y satisface la Ec. 1.1 para ser una onda. Para mostrar como funciona el modelo, consideramos el caso de una cuerda susceptible de vibrar, que es exible; donde las perturbaciones estudiadas son transversales a la dirección de propagación. Para el caso puramente mecánico consideramos una cuerda inelástica de longitud L , fija en sus extremos. El perfil de movimiento generado por la cuerda es descrito por la función $u(x, t)$, que es sometida a las siguientes condiciones: **1**) la cuerda tiene una densidad lineal $\rho(x, t)$ (con unidades de masa por longitud) y **2**) esta sujeta a una tensión $T(x, t)$. Además, los desplazamientos descritos por la función $u(x, t)$ son pequeños y que cada segmento de la cuerda se puede describir como $\rho(x, t) \delta x$, con un desplazamiento vertical. cada segmento ejerce una tensión tangencial como se muestra en la Fig.1.1. El segmento ejerce la tensión a la derecha de la posición x . Es decir:

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx}, \text{ donde } u_{tt} = \partial^2 / \partial t^2, u_{xx} = \partial^2 / \partial x^2, \quad (1.1)$$

La función $u(x, t) \equiv u$, es el perfil del movimiento de la cuerda. Si el ángulo $\theta(x, t)$ es formado por la horizontal y la tensión $T(x, t)$; encontramos la relación:

$$\tan \theta(x, t) = u_x(x, t),$$

Para obtener la solución, necesitamos conocer la masa. Así, integramos el segmento de arco de la cuerda representado por $\sqrt{1 + u_x(x, t)^2}$ y multiplicamos por la densidad $\rho(x, t)$, donde el tiempo inicial es $t_0 = 0$ y la densidad

es $\rho_0(x, t)$, para la longitud L , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx &= \int_0^L \rho_0(x) dx \\ \Rightarrow \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Consideramos a $\rho_0(x) \equiv \rho$, esta definición es importante. Porque la utilizaremos para obtener nuestro primer modelo: la ecuación de onda estándar.

Omitimos la gravedad o alguna fuerza externa ejercida sobre la cuerda. La tensión considerada $T(t)$ es ejercida por el segmento de cuerda localizado a la derecha de la posición x elegida en el intervalo $[0, L]$. Si suponemos la ausencia de movimiento horizontal, las componentes horizontales de la fuerza son iguales. Por lo que podemos escribir:

$$T(0, t) \cos \theta(0, t) = T(L, t) \cos \theta(L, t),$$

Esta ecuación comprende al intervalo $[0, L]$, por lo que expresamos la tensión ejercida como:

$$T(x, t) \cos \theta(x, t) = \tau(t),$$

donde τ es una función del tiempo. Entonces, la razón de cambio del momento total es igual a la fuerza vertical neta sobre la cuerda, que se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho(x, t) u_t(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx &= \\ T(L, t) \sin \theta(L, t) - T(0, t) \sin \theta(0, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sustituimos el término encontrado en Ec. (1.2):

$$\int_0^L \rho_0(x) u(x, t)_{tt} dx = T(L, t) \sin \theta(L, t) - T(0, t) \sin \theta(0, t),$$

Se multiplica a la expresión de la derecha por $1 = \frac{\cos \theta(x, t)}{\cos \theta(x, t)}$, obteniendo:

$$T(L, t) \cos \theta(0, t) [\tan \theta(L, t) - \tan \theta(0, t)] \Rightarrow \tau(t) [u_x(L, t) - u_x(0, t)],$$

Por tanto, obtenemos la siguiente relación:

$$\int_0^L \rho_0(x) u(x, t)_{tt} dx = \tau(t) [u_x(L, t) - u_x(0, t)],$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la expresión de la derecha, podemos escribir:

$$\int_0^L \rho_0(x) u(x, t)_{tt} dx = \tau(t) \int_0^L u_{xx}(x, t) dx,$$

Para las condiciones de frontera presentes en el modelo propuesto, se cumple que:

$$\rho_0(x) u(x, t)_{tt} = \tau(t) u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

En el modelo inicial, para una cuerda de longitud L , proponemos que la tensión $\tau(t) = \tau_0$. Es decir, presenta una tensión constante. Así, trabajamos con la condición de pequeños desplazamientos verticales [14, p.51]. Además, la función de densidad de masa lineal de la cuerda $\rho_0(x)$ es constante, así la ecuación de onda que describe el movimiento es:

$$\rho_0 u_{tt} = \tau_0 u_{xx}, \tag{1.4}$$

donde la velocidad de onda, es descrita por:

$$c_0(x) = \sqrt{\tau_0 / \rho_0}.$$

Con lo cual se obtiene la forma común de la ecuación de onda, la Ec. (1.1).

1.1. Modos en una cuerda sometida a tensión constante

El objeto de estudio para la cuerda sometida a una tensión constante o variable, son los modos normales de vibración, que son ondas estacionarias generadas por una perturbación y que tienen una frecuencia característica, y que muestran un perfil u para cada modo.

En esta sección discutimos el modelo con tensión constante, con el objetivo de encontrar los modos normales. Así, consideramos las siguientes condiciones iniciales y de frontera necesarias para resolver la Ec. (1.4):

$$\rho_0 u_{tt} = \tau_0 u_{xx} \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(L, 0) = g(x) \quad \forall 0 \leq x \leq L,$$

El método matemático propuesto para encontrar la solución $u(x, t)$, se llama: separación de variables [20, p.3]. Se propone una solución de la forma: $u(x, t) = \chi(x)\Gamma(t)$, procedemos a sustituir en Ec. (1.4) y separar las variables, obteniendo:

$$\frac{\rho_0}{\tau_0} \frac{\Gamma''}{\Gamma} = \frac{\chi''}{\chi},$$

Ambos lados de la ecuación se igualan a una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ y por las condiciones iniciales, encontramos un problema de eigenvalores:

$$\chi''(x) - \lambda \chi(x) \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$\chi(0) = \chi(L) = 0. \quad (1.5)$$

Note que la solución es 0 si $\lambda \geq 0$. Sin embargo, si $\lambda < 0$ la integral adquiere la siguiente solución general:

$$\chi(x) = Q_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + Q_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}),$$

sustituyendo las condiciones iniciales de la Ec.1.5 $\implies Q_1 = 0$ y

$$Q_2 \sin(L\sqrt{-\lambda}) = 0 \implies \sin(L\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Existen soluciones si $x\sqrt{-\lambda} = n\pi$; evitando la solución trivial cuando $n = 1, 2, 3, \dots$. Así, las soluciones son:

$$\chi(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

Por otro lado, para solucionar $\Gamma(t)$ podemos escribir:

$$\Gamma_n''(t) + \frac{\tau_0}{\rho_0} \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Gamma_n(t) = 0,$$

que presenta la siguiente solución general:

$$\Gamma_n(t) = \alpha_n \cos\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right) + \beta_n \sin\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right). \quad (1.7)$$

La solución son ondas estacionarias (que corresponden a los modos normales de vibración de la cuerda) que tienen una frecuencia asociada $\omega_n = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L}$. La solución general se puede escribir como:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \chi_n(x) \Gamma_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right) + \beta_n \sin\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Completando las condiciones de frontera, derivamos respecto al parámetro de tiempo:

$$(u_n(x, t))_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} \left[\alpha_n \sin\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right) + \beta_n \cos\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Ya que desde el principio definimos la condición de frontera espacial $0 \leq x \leq L$, encontramos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = g(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} \beta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 0.$$

Observamos que el valor de los coeficientes $\beta_n = 0 \forall n$ y los coeficientes α_n se encuentran expandiendo en series de Fourier [1, 20]. Finalmente, podemos escribir:

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (1.9)$$

1.1.1. Visualización del modelo mecánico

Presentamos simulaciones numéricas del modelo ondulatorio desarrollado, donde $\tau(t) = \tau_0$. Utilizamos la última Ec. (1.9), consideramos como dominio del desplazamiento a $0 \leq x \leq 1 [m]$, en el intervalo temporal $0 \leq t \leq 2\pi [s]$. Si la cuerda muestra constantes normalizadas, *e.g.* la densidad $\rho_0 = 1$, la tensión $\tau_0 = 1 [N]$ y la longitud $L = 1 [m]$. Donde las condiciones iniciales son $u(x, t) = g(x) = \sin(m\pi x)$, $u_t(x, 0) = 0$. Sustituimos la información y

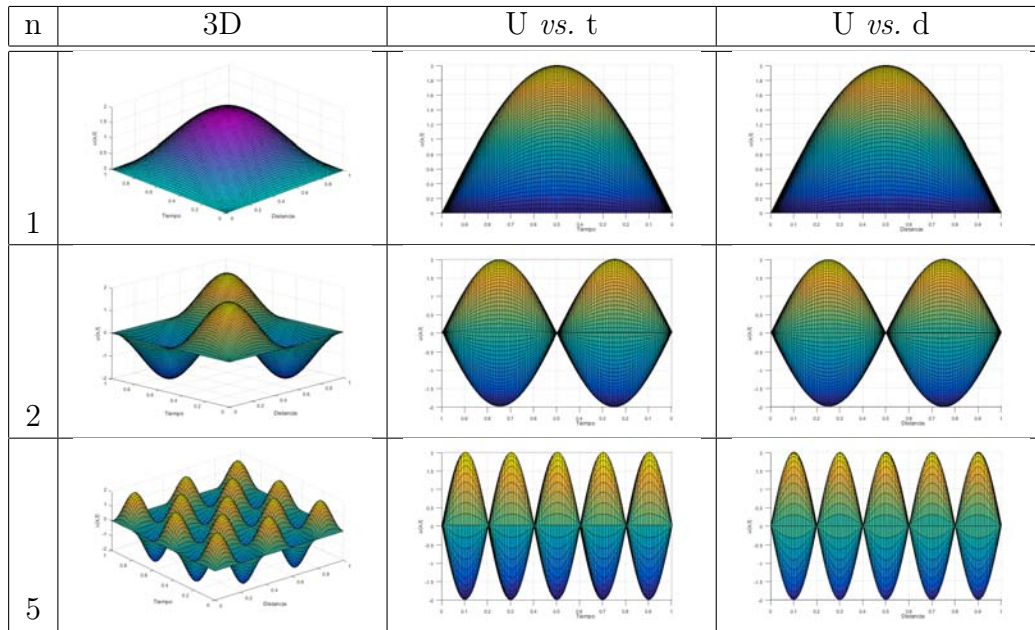


Tabla 1.1: Gráficas de modos transversales de un cuerda con tensión **constante**, en función de la distancia y del tiempo.

resolvemos para obtener las eigenfunciones, que presentan la siguiente expresión:

$$u(x, t)_n = 2 \cos(\omega_n t) \sin(k_n x), \quad (1.10)$$

donde $\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{n\pi}{L}$ [1/s] y $k_n = \frac{n\pi}{2}$ [1/m]. Aplicamos las condiciones de frontera y obtenemos

$$u(x, t)_n = 2 \cos(n\pi t) \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \quad (1.11)$$

Los cálculos numéricos se programaron en *Matlab* para visualizar la forma los modos de vibración en la cuerda para $n = 1, 2, 5$. La tabla 1.1 exhibe los resultados y el código se puede consultar en el apéndice A.1.

1.2. Modos en una cuerda sometida a tensión temporalmente variable

Nuestro objeto de estudio implica variaciones de amplitud en función del tiempo. Debido a nuestra familiaridad con los modos mecánicos, partimos de este símil clásico-mecánico. Para nosotros el desarrollo inicial representa un requisito de entendimiento físico antes de comenzar a modelar una cavidad óptica. En esta sección mostramos como cambian los modos transversales de vibración en función de la tensión variable en el tiempo.

El modelo se puede sofisticar para acercarlo a nuestro objetivo: la cavidad variable. Consideramos una cuerda con densidad constante $\rho(x) = \rho_0$ y que la tensión de la cuerda se expresa función del tiempo.

Con el objetivo de ejemplificar como son las variaciones temporales, elegimos una dependencia lineal, donde $\tau(t) = \mu t$ y μ es una constante. Esta elección permite simplificar los cálculos de las soluciones para la siguiente ecuación:

$$\rho_0 u_{tt} = \tau(t) u_{xx}, \quad (1.12)$$

Para resolver la Ec.1.12 proponemos la solución con forma $c = \chi(x) \Gamma(t)$, como se mostró en la sección anterior sustituimos para obtener la siguiente expresión:

$$\frac{\rho_0}{\tau(t)} \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} = \frac{\chi''(x)}{\chi(x)}.$$

Siguiendo el método de la sección anterior; estas expresiones son iguales a una constante: $-\lambda$,

$$\Gamma''(t) + \frac{\tau(t)}{\rho_0} \lambda \Gamma(t) = 0, \quad (1.13)$$

La Ec.1.13 forma parte de los problemas de eigenvalores de Sturm-Liouville [1, p.333], para encontrar la función $\Gamma(t)$ que satisface la ecuación y las siguientes condiciones de frontera. Se considera una cuerda (como en el caso anterior) de longitud $0 \leq x \leq L$, además que $t \in [0, T_0]$ y con las siguientes condiciones iniciales $u(0, 0) = 0$, $u(L, T_0) = 0$ y $u_t(L, T_0) = 0$. Para resolver el problema de eigenvalores se recurre a la aproximación de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) [3, Cap 10. p.484], por medio de esta herramienta se puede obtener información de las soluciones del problema.

La Ec. 1.13 sugiere que la función $\tau(t)/\rho_0$ debe ser ortogonal a las eigenfunciones denominadas $\Gamma_n(t)$, estas funciones se asocian a un eigenvalor λ_n , la condición de ortogonalidad se puede expresar como sigue:

$$\int_0^{T_0} \Gamma_m(t) \Gamma_n(t) \frac{\tau(t)}{\rho_0} dx = 0, \quad n \neq m.$$

Consideremos la condición de normalización:

$$\int_0^{T_0} [\Gamma_n(t)]^2 \frac{\tau(t)}{\rho_0} dx = 1,$$

Esto permite construir un conjunto ortonormal de eigenfunciones. Cabe aclarar, que la aproximación WKB permite encontrar soluciones cercanas a los eigenvalores λ_n , así como a las eigenfunciones $\Gamma_n(t)$ cuando n es grande; aunque en el caso del modelo propuesto sirve para observar la forma de las soluciones. La condición para asegurar la mayor precisión en la aproximación WKB de la ecuación $\varepsilon \Gamma''(t) + \frac{\tau(t)}{\rho_0} \Gamma(t) = 0$, donde $\varepsilon = 1/\lambda_n$, es que cuando $n \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$. [3, p.490].

Para obtener las soluciones, se definen algunos parámetros básicos. Así, establecemos una perturbación a la Ec. 1.13, de la manera siguiente:

$$\varepsilon^2 \left[\Gamma''(t) + \frac{\tau(t)}{\rho_0} \lambda \Gamma(t) \right] = 0,$$

donde $\varepsilon^2 = 1/\lambda_n$. Y proponemos una solución:

$$\Gamma_n(t) = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \varepsilon^n \right].$$

Ahora, proponemos una solución hasta el factor de control, cuyo dominio corresponde al régimen de óptica física de acuerdo con [3]. Es decir, se escogen hasta los coeficientes S_0 y S_1 , cumpliendo que el factor de S_2 satisfice: $(\varepsilon S_2) \ll 1 \Rightarrow (1 + \varepsilon S_2) \rightarrow 1$. Entonces se justifica el uso de esta aproximación, con lo cual la expresión se puede escribir como:

$$\Gamma(t) = \exp \left[\pm \frac{1}{\varepsilon} S_0 + S_1 \right] \exp [\varepsilon S_2],$$

Por la condición mencionada la expresión se puede escribir como:

$$\Gamma(t) = \exp \left[\pm \frac{1}{\varepsilon} S_0 + S_1 \right]. \tag{1.14}$$

Antes de continuar con la solución, es preciso hacer algunas definiciones:

$$\lambda \gg 1 \quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Entonces, queda a resolver la siguiente expresión

$$\varepsilon^2 \Gamma''(t) + O \Gamma(t) = 0,$$

donde $O = -\frac{\tau(t)}{\rho_0}$, para que tenga una solución de la siguiente forma:

$$\Gamma(t) = \frac{\alpha_n \sin \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt \right)}{\left(\frac{\tau(t)}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\beta_n \cos \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt \right)}{\left(\frac{\tau(t)}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{4}}},$$

Esta expresión es la aproximación a la solución exacta del problema de eigenvalores, siempre que $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora, se aplican las condiciones de frontera $\Gamma(0) = 0$, implica que $B = 0$, y para $\Gamma(T_0) = 0$; de modo que se obtiene:

$$\Gamma(T_0) \sim \frac{\alpha_n}{\left(\frac{\tau(t)}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt \right) = 0. \quad (1.15)$$

Lo cual sucede si y sólo si:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt = n\pi.$$

Elevamos ambos lados de la expresión al cuadrado y obtenemos una expresión de la forma $\frac{1}{\varepsilon^2} = \lambda$, para conseguir una expresión para los eigenvalores λ_n :

$$\lambda_n \sim \left(\frac{(n\pi)^2}{\left(\int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt \right)^2} \right), \quad (1.16)$$

Resta encontrar una expresión para los valores de los coeficientes α_n . Normalizando, obtenemos:

$$1 \sim \int_0^{T_0} \frac{\tau(t)}{\rho_0} \alpha_n^2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tau(t)}{\rho_0} \right)}} \sin^2 \left[\sqrt{\lambda_n} \int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt \right], \quad n \rightarrow \infty,$$

Si se hace un cambio de variable de la forma $w = \sqrt{\lambda_n} \int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt$, aparece la siguiente integral $1 \sim (\alpha_n^2 / \sqrt{\lambda_n}) \int_0^{T_0} \sin^2 w dw$; $n \rightarrow \infty$. Por lo que podemos escribir:

$$\alpha_n^2 \sim \frac{2}{\int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Finalmente, obtenemos una expresión general para las eigenfunciones, que son las funciones constructoras del modelo mecánico propuesto:

$$\Gamma(t) = \alpha_n \left(\frac{\tau(t)}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{4}} \sin \left[n\pi \frac{\int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt}{\int_0^\pi \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt} \right], \quad (1.17)$$

Para el problema, cuando la función $\frac{\tau(t)}{\rho_0} = 1$ se puede resolver con el mismo método la ecuación $X'' + \lambda X = 0$, y en correspondencia con la condiciones iniciales propuestas para el problema se tiene la siguiente expresión para la solución general

$$u_n(x, t) = 2 \sin(\lambda x) \Gamma(t) = \alpha_n \left(\frac{\tau(t)}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{4}} \sin \left[n\pi \frac{\int_0^{T_0} \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt}{\int_0^\pi \sqrt{\frac{\tau(t)}{\rho_0}} dt} \right], \quad (1.18)$$

donde están definidos los coeficientes que acompañan a la eigenfunción, con el respectivo valor para $n = 1, 2, 3, \dots$

1.2.1. Visualización del modelo mecánico con tensión temporalmente variable

Para obtener gráficas claras y significativas consideramos varios aspectos físicos. La cuerda está sometida a una tensión variable en el tiempo $\tau(t) = \alpha t$. Tomamos $\alpha = 1$, esto con el fin de facilitar los cálculos (considerando coherencia entre las unidades involucradas). También suponemos una densidad constante $\rho_0 = 1$.

Por otro lado, las condiciones de frontera iniciales para este problema numérico son: **1)** el tiempo evaluado $0 \leq t \leq 2\pi$, **2)** la longitud de la cuerda es $L = 1$, **3)** la cuerda fija de sus extremos: $0 \leq x \leq 1$, **4)** y la condición inicial $u(x, 0) = \sin(m\pi x)$.

Con base a la Ec. 1.18, sustituimos constantes. Obteniendo una forma más sencilla en la expresión para las eigenfunciones.

$$u(x, t) \sim (1/3)^{-\frac{1}{2}} (t)^{-\frac{1}{4}} \sin \left(n\pi^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} \right) \sin(n\pi x). \quad (1.19)$$

Esta última expresión la graficamos para $n = 1, 2$, y 5 . La tabla 1.2 muestra algunos de los resultados obtenidos.

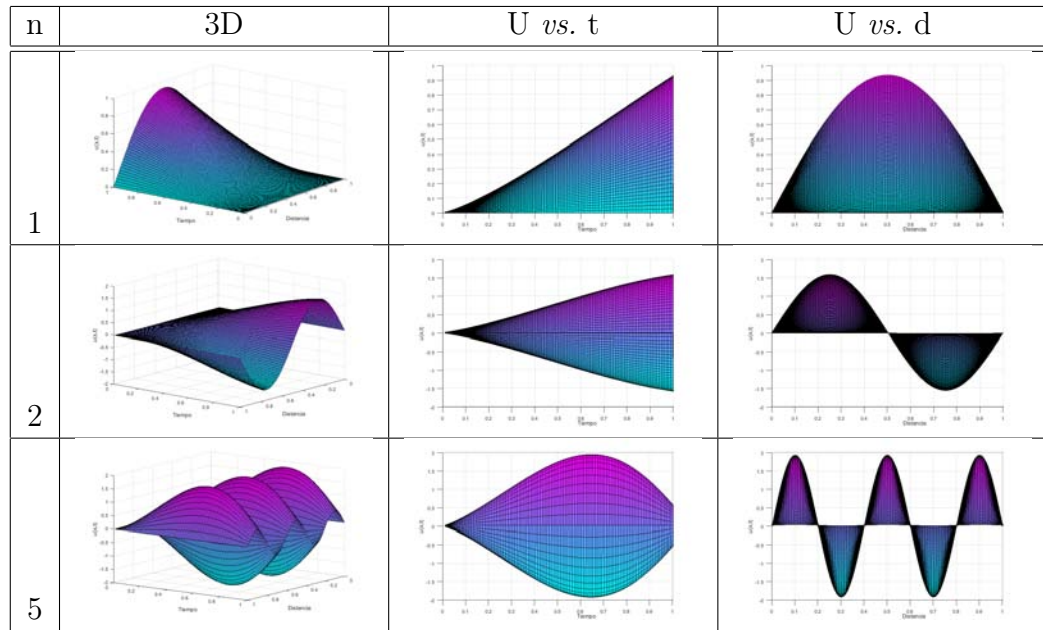


Tabla 1.2: Gráfica de modos transversales de una cuerda con tensión **variable**, en función de la distancia y del tiempo.

1.3. Comparación entre modelos mecánicos

La Tabla 1.3 confronta los perfiles modales temporales en la cuerda al someterla a una tensión constante y cuando la tensión es directamente proporcional al tiempo. La escala temporal es la misma para todos los casos: de 0 a 2π . La Tabla 1.3 evidencia que al aumentar la tensión en la cuerda, la amplitud disminuye. De modo que va produciendo una asimetría en el crecimiento de los modos. Además, el número de modos obtenidos es diferente entre los casos. En tal sentido, este resultado muestra que los modos normales cambian temporalmente, incluso para el mismo valor de modal n .

Cuando variamos la tensión en función del tiempo, buscamos simular el cambio modal observado en la cavidad láser. Efectivamente, ambos sistemas son diferentes por naturaleza. Sin embargo, aprovechando sus rasgos físicos comunes, este resultado nos brinda pistas para poder sofisticar el modelo exploratorio a uno donde se consideren las condiciones físicas de la cavidad óptica.

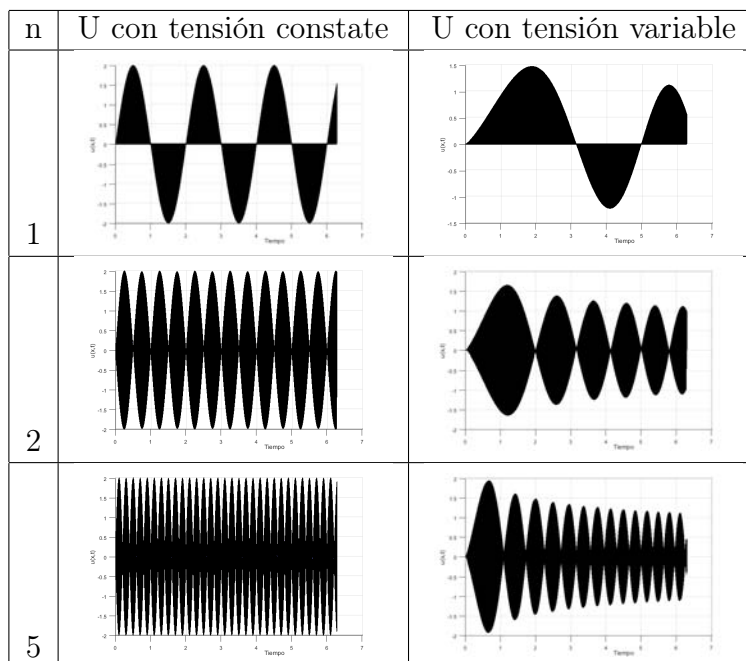


Tabla 1.3: Gráfica de comparación entre modelos mecánicos

1.4. Conclusiones del capítulo

Los modelos mecánicos desarrollados en este capítulo permiten abordar la solución del problema electromagnético planteado en la tesis. En nuestro caso, el modelo de la cuerda con tensión variable temporal muestra como cambia la amplitud de los modos al propagarse la onda, modificando el patrón en general (ver Tabla 1.2). Un cambio similar sucede en los patrones TEM del láser, aunque su naturaleza es diferente.

Matemáticamente, solucionar la ecuación de onda de la cuerda a tensión constante es más simple que el caso de la cuerda a tensión variable. El segundo caso es más general que el primero. Aquí, elegimos una variación de la tensión directamente proporcional al tiempo, en analogía donde la cuerda es el medio activo o la cavidad para el sistema electromagnético. Esto, solo sirve para introducirse en la naturaleza del problema: las transiciones modales temporales en patrones de naturaleza ondulatoria.

Cierto es que la elaboración de un modelo mecánico permitió introducirnos al entendimiento del problema electromagnético. El acercamiento nos ofreció familiarizarnos con los antecedentes matemáticos que desembocan a un modelo más cercano al fenómeno óptico. Sin embargo, la perspectiva mecánica se limita al extrapolar las variaciones temporales. Es decir, en la

ecuación de onda para una cuerda sometida a tensión directamente proporcional con el tiempo. Seguramente, en trabajos futuros el objeto de estudio será la generalización de variaciones temporales de la tensión.

Capítulo 2

Aspectos generales de resonadores ópticos

2.1. Principios fundamentales del láser

La luz posee características que la hacen fascinante. Hoy sabemos que se le puede describir físicamente como una onda o una partícula, dependiendo del experimento llevado a cabo; pues presenta efectos puramente ondulatorios: como la interferencia [9, Parte3,p.169], pero también corpusculares: como el efecto fotoeléctrico [9, p.412]. Además, se propaga sin la necesidad de un medio, a saber; es el producto del entrelazamiento de las ondulaciones transversales del campo eléctrico y magnético [9, p.375]. Con todo, la luz es un fenómeno que requiere más estudio, tanto para las diversas aplicaciones que existen, como para entender su comportamiento en situaciones singulares. La luz es producida por una gran variedad de fuentes, tales como son las fuentes térmicas (como la llama de una vela), aceleración de cargas (como la radiación de sincrotrón) o cuánticas como son los láseres. Los láseres son dispositivos que producen un haz de luz que presenta las siguientes características: 1) tiene un ancho espectral bien definido, y se diseña el resonador óptico que permita hacer las transiciones de electrónicas en los átomos para obtener una longitud de onda requerida (altamente monocromático), 2) presenta baja divergencia (alta colimación) gracias a la configuración de la cavidad óptica, y 3) comparado con otras fuentes de luz, los fotones que componen el haz de luz láser presentan la misma fase, es decir, es coherente. Estas propiedades han hecho a este dispositivo útil para diversas aplicaciones científicas y comerciales.

El desarrollo de los principios del láser fue en los Laboratorios Bell, en 1958, el proyecto estaba a cargo de Charles Townes. Sin embargo, fue hasta

1960, cuando se desarrolló el primer láser, basado en un cristal rosa de rubí. Este láser fue construido en los Laboratorios de investigación Hughes. Desde entonces se han construido diversos dispositivos con diferentes materiales, por ejemplo: el láser Helio-Neón, los láseres de diodo semiconductor y los láseres de iones por enfriamiento de aire.

El término láser es un acrónimo de las siglas en inglés *Light Amplification by Stimulated Emission Radiation*. Para entender los principios del láser es conveniente describir cada término.

EL término *Light* (luz), se entiende como la radiación electromagnética, el intervalo de longitudes de onda que componen el espectro visible cubre de 400 a 700 nm. Después de los 700 nm, se presenta el intervalo infrarrojo y por debajo de los 200 nm se denomina ultravioleta.

EL término (*Stimulated Emission*) emisión estimulada requiere mostrar ciertos principios de mecánica cuántica para su comprensión. Por esta razón, el modelo atómico de Bohr permite entender los principios del láser, ver Fig 2.1.

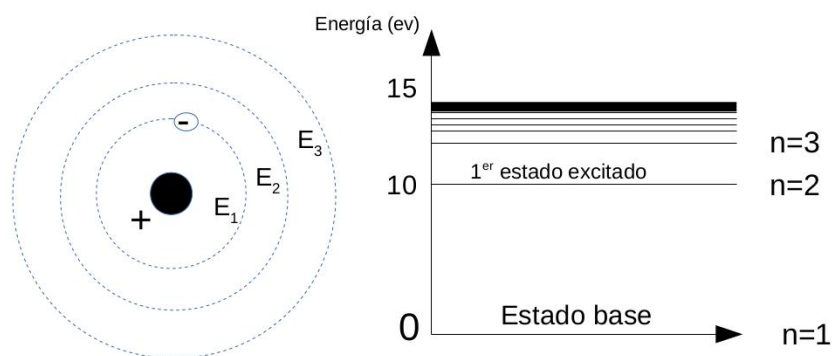


Figura 2.1: Modelo de Bohr del átomo, con un diagrama simple de niveles de energía.

En el modelo de Bohr, los electrones orbitan el núcleo de un átomo, como si fuera el sistema solar. Las órbitas que describen los electrones son específicas y corresponden a estados permitidos de energía, que se denominan "estados cuánticos" [24, p.8], a éstos se les asocia un número entero (1, 2, 3, etc.). Los estados cuánticos pueden ser representados gráficamente en un diagrama de niveles de energía.

Existen condiciones que permiten a un electrón hacer una transición, de un nivel energía (estado) a otro nivel de energía. Se presenta en ambos casos cuando hay una transición de un estado no-excitado a un estado excitado y viceversa. La condición es que el electrón no órbita en un estado intermedio de los niveles de energía, entre los cuales realiza la transición.

Para que un electrón se traslade a un estado cuántico excitado, el átomo está condicionado a recibir energía externa. Este proceso puede suceder mediante diferentes mecanismos. Por ejemplo, las colisiones elásticas o inelásticas con otros átomos o la absorción de energía en forma de ondas electromagnéticas. Si un electrón se traslada de un estado excitado a un estado de menor energía, el átomo pierde energía, que se puede presentar como una emisión de radiación electromagnética (fotones).

Características cuánticas de la luz.

La concepción de la naturaleza de la luz ha pasado por varias crisis de paradigma (Kuhn: revoluciones científicas [13]). El modelo mecanicista newtoniano facilitó entender la óptica geométrica con aceptable exactitud. El modelo ondulatorio permitió el descubrimiento y comprensión de varios fenómenos. Hoy, el modelo concibe que la energía es un discreto, formado por paquetes, que en unas circunstancias se comportara como una onda, en otras como una partícula; este modelo cuántico llama a los pedacitos de luz: fotones. La energía asociada a cada fotón depende solo de su frecuencia:

$$E = h\nu,$$

donde ν es la frecuencia y h es la constante de Planck [24, p.8]. La frecuencia y la longitud de onda λ se relacionan vía la velocidad de la luz en el vacío c :

$$c = \lambda\nu,$$

Podemos relacionar la energía con la longitud de onda como:

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2.1)$$

La Ec. 2.1 afirma que a menor longitud de onda, los fotones serán más energéticos. Ahora, para que un átomo cambie de un estado energético basal E_n a un estado excitado E_m , la energía del fotón incidente debe contar con una energía igual a la diferencia energética entre los dos niveles. Si se cumple tal condición, el átomo absorbe luz. Matemáticamente podemos escribir:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E},$$

donde $\Delta E = |E_m - E_n|$. Cuando se invierte este proceso, podemos pensar que un electrón se traslada de un estado excitado a un estado basal, con la consecuencia de la emisión de un fotón de energía, igual a la diferencia de los niveles de energía de los estados E_m y E_n . Estas ideas cuánticas fundamentales, constituyen los cimientos de la operación de todos los láseres.

Emisión espontánea y emisión estimulada.

El decaimiento energético del electrón es el generador de un fotón, en fase y dirección aleatoria. Por esa razón al proceso se le da el nombre: "emisión espontánea". El tiempo que le toma al electrón decaer es conocido como la constante de tiempo de la emisión espontánea τ .

Por otra parte, si un electrón se encuentra en un estado de energía E_2 , y realizara la transición al estado de menor energía E_1 , antes de la emisión espontánea, se requiere un fotón incidente de energía: $E_2 - E_1$. Existe la probabilidad de que el fotón incidente cause que el fotón emitido tenga las siguientes características: **1)** que sea emitido con la misma longitud de onda, **2)** que salga en la misma dirección y con la misma fase. Este proceso es conocido como emisión estimulada. La absorción, emisión espontánea y emisión estimulada son representadas en la Fig. 2.2

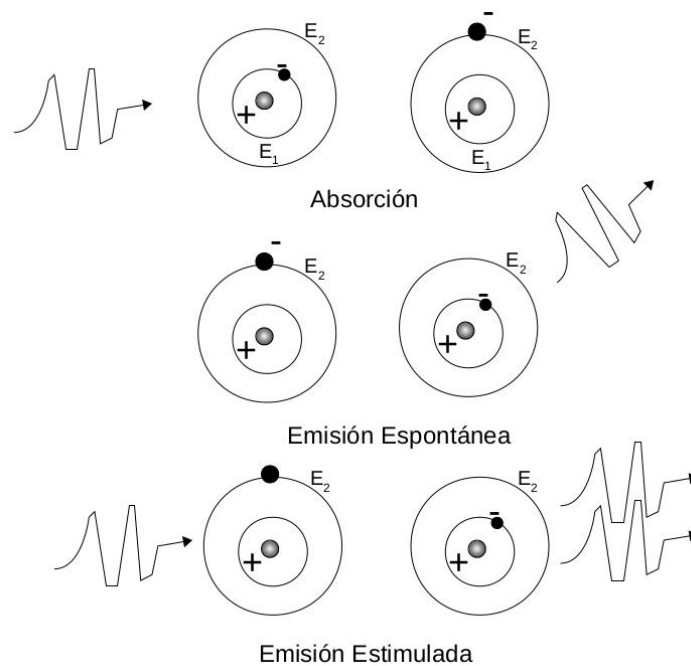


Figura 2.2: Diagrama donde se observa la absorción, emisión espontánea y estimulada

El fotón incide sobre un átomo y causa la emisión estimulada de un fotón coherente. Estos dos fotones interactúan con los siguientes dos átomos, y se tiene como resultado cuatro fotones coherentes, y si continúa el proceso se tiene un mayor número de fotones coherentes, con fases idénticas y que viajan en la misma dirección. A este proceso se le denomina amplificación,

ver Fig. 2.3). La energía proporcionada por los fotones incidentes sobre el conjunto de átomos, proviene de una fuente de energía, la cual se denomina "fuente de bombeo".

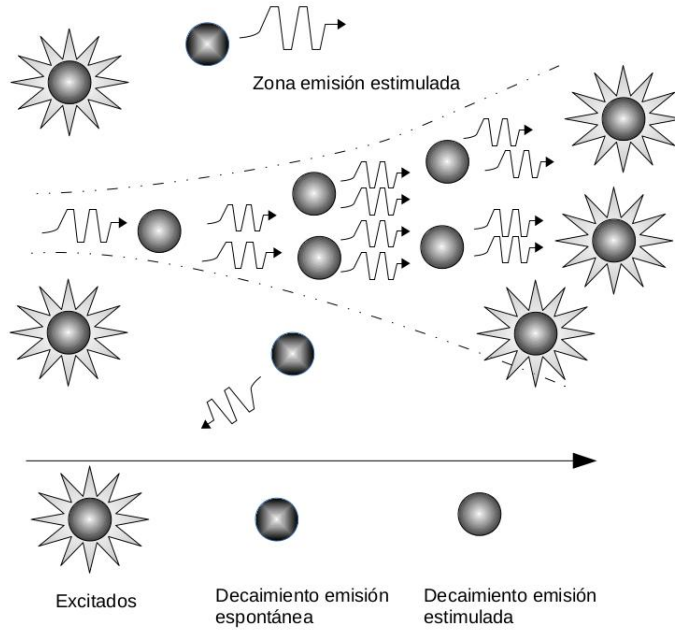


Figura 2.3: Diagrama del proceso de amplificación

Al trabajar con una población de átomos, la probabilidad de que suceda la emisión estimulada es baja, sumado a la condición de que los átomos se encuentran generalmente en un estado de baja energía. El principio de Boltzmann establece que cuando una población de átomos están en equilibrio térmico, la relación entre las poblaciones de átomos que se encuentran en dos niveles de energía es:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right),$$

donde se tiene que N_1 y N_2 son las poblaciones de los niveles de energía excitado y bajo, T es la temperatura de equilibrio y k la constante de Boltzmann. Si se sustituye la ecuación de energía $E = h\nu$ se obtiene :

$$\Delta N \equiv N_1 - N_2 = (1 - e^{-h\nu/kT}) N_1,$$

Una población normal de átomos se encuentra en el estado mínimo de energía, y dado que la probabilidad para un átomo de absorber un fotón, es la misma para que un átomo excitado emita un fotón mediante la emisión

estimulada, la población de átomos será absorbente y no emisiva, y como consecuencia no habrá amplificación, por lo que para tener un láser, se genera un fenómeno llamado "inversión de población".

La descripción de los estados de energía atómicos, es mucho más vasta y compleja, existen más niveles de energía y cada uno tiene su tiempo de vida característico τ , es el lapso que permanece en el estado excitado antes de decaer a un estado de energía menor. En la Fig. 2.4 se observa un diagrama de los niveles de energía de un láser. Este sistema muestra 4 niveles de energía, donde el electrón se traslada hasta el nivel E_4 por algún mecanismo de los ya mencionados. El electrón decae del estado E_4 al estado E_3 y así hasta el estado base E_1 . Para fines didácticos, se asume que el lapso que le toma decaer de un estado E_3 a E_2 es más grande que el tiempo que le toma decaer de E_2 a E_1 . En una población de átomos, en equilibrio y con una fuente de bombeo de energía constante, la inversión de población ocurre entre los estados de energía E_3 y E_2 , entonces se tiene la condición necesaria para que un fotón incidente sobre una población de átomos se amplifique coherentemente.

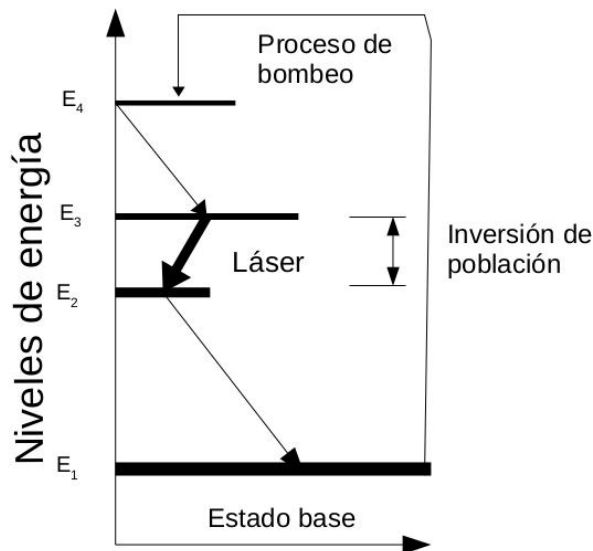


Figura 2.4: Diagrama de cuatro niveles cuánticos que ejemplifica la inversión de población

Con la inversión de la población, se amplifica una señal mediante la emisión estimulada. Sin embargo, la ganancia es pequeña y la mayoría de los átomos excitados emiten espontáneamente y no contribuyen a la señal de salida. Para convertir un sistema con estas características en un láser, se ne-

cesita un mecanismo de retroalimentación que cause que la mayor parte de la población de los átomos contribuyan a la salida de la señal coherente. Este mecanismo es conocido como resonador óptico, y consiste en un sistema de espejos que desvían los fotones que no son coherentes y que reflejan los fotones coherentes de vuelta sobre la población de átomos, donde estos pueden volver a ser amplificados.

Todo láser cuenta con tres elementos básicos, ver Fig.2.5, el medio activo para el láser, pasa por un proceso de bombeo de energía continuo, para crear la inversión de población. Como se ha mencionado los átomos excitados decaen y emiten fotones en todas las direcciones, algunos de los fotones son emitidos en dirección del eje del medio emisor, estos fotones estimulan a la población de átomos para emitir más fotones, pero no estimulan a los átomos que ya han radiado hacia otras direcciones. Los fotones que viajan paralelos al eje, serán reflejados y podrán estimular a otros átomos excitados. Cuando se repite este proceso, los fotones interactúan con más átomos, con lo cual la emisión espontánea decrece y la emisión estimulada alrededor del eje del medio emisor predomina y en consecuencia se tiene un dispositivo láser.

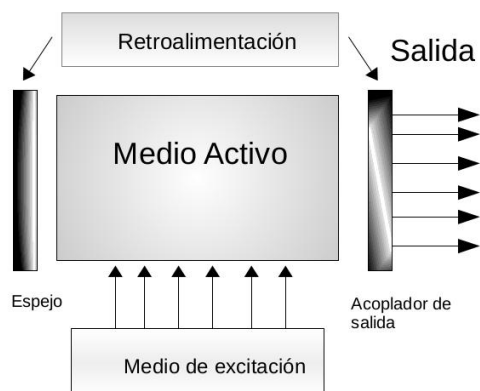


Figura 2.5: Esquema de los componentes básicos de un sistema láser

El láser de He-Ne es obtenido de las transiciones energéticas del átomo de Neón. El Helio sirve para facilitar el proceso de bombeo sobre el Ne y generar la inversión de población. En la Fig. 2.6, se observan dos transiciones láser posibles con longitudes de onda: $\lambda = 632.8$ nm (rojo) y $\lambda = 543$ nm (verde). En el diagrama se observan, los estados excitados que puede ocupar un electrón del átomo de He. Estos corresponden: al singlete, con espín antiparalelo al electrón en el estado base y al triplete, que tiene un espín paralelo al electrón en el mismo estado base. Una vez que se hace pasar una descarga eléctrica por el medio los átomos de He son excitados y dado que el

tiempo de decaimiento de los electrones excitados es suficientemente largo, estos interactúan con los átomos de Neón transfiriéndoles energía. [4].

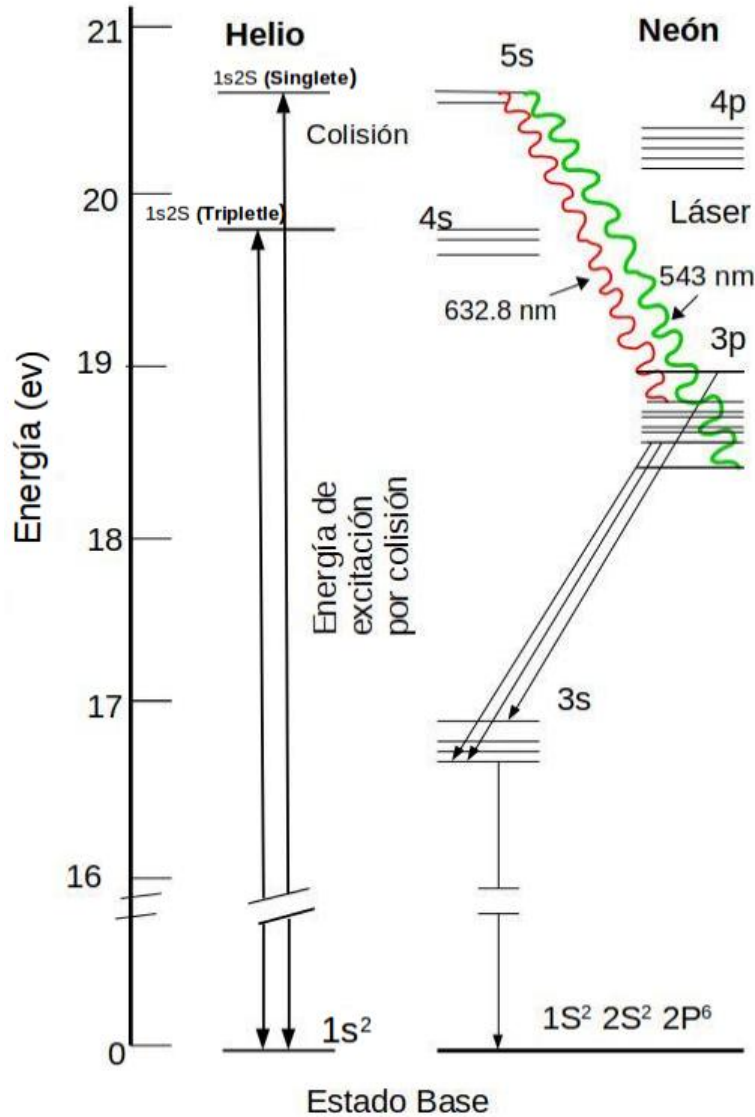


Figura 2.6: Diagrama de los niveles de energía y transiciones láser de una mezcla de He-Ne.

Los electrones del átomo de Neón al ser excitados pueden ocupar los orbitales $5s$ y $4s$, como se observa en el diagrama. Estos a su vez decaen en los orbitales $3p$ y emiten fotones de diferentes longitudes de onda conforme al orbital que decaigan. Los fotones obtenidos de este proceso permiten la

emisión estimulada al interactuar con los átomos excitados de Ne, así se obtiene la amplificación.

Lo que resta es construir un sistema de retroalimentación que mantenga el proceso de amplificación y que permita transmitir al menos el 1% de la intensidad de la luz coherente. Por ejemplo, dos espejos que hagan viajar de ida y vuelta el haz dentro de la cavidad óptica.

2.2. Resonadores ópticos

En este capítulo se examinan los fundamentos de los resonadores ópticos, que permiten la formación de un haz láser y definen las características de los patrones TEM emitidos. En general, un resonador óptico es un sistema compuesto generalmente de un par de espejos, dispuestos de forma que un haz luminoso incida en la superficie de uno de ellos y después del re-echo incida en la cara del otro. Entre los espejos se encuentra el medio activo del láser, el cual permite que se lleve a cabo la amplificación óptica. El medio activo es el responsable cuántico de definir las longitudes de emisión láser, pero la cavidad puede promover que se amplifique cierta longitud de onda sobre otra [29, Cap. 4 p.63]. Es decir, los espejos fomentan la retroalimentación del sistema cerrado. Un símil fenomenológico es el sistema bocina-micrófono; donde el sonido se amplifica en una reverberación de una frecuencia específica; algo similar sucede en la emisión láser producto de la disposición geométrica de la cavidad óptica.

Sin pérdida de generalidad, un par de espejos funcionan como las condiciones de frontera geométrica para la cavidad óptica. Cuando se propaga una onda en este sistema, se generan dos tipos de modos superpuestos: los longitudinales y los transversales. Los modos se diferencian por las variables involucradas: en el caso de los longitudinales dependen de la frecuencia ν y longitud de la cavidad; en contraste, los modos transversales dependen de las coordenadas espaciales y de la geometría: rectangular o cilíndrica, entre otros parámetros.

Los modos longitudinales se obtienen bajo la condición de la propagación de una onda plana dentro de la cavidad. En este trabajo, no se abunda en el estudio de los modos longitudinales electromagnéticos. El tema está fuera de nuestros objetivos de esta tesis. Sin embargo, en la literatura se pueden encontrar desarrollos exhaustivos y didácticos [26, p.382].

Por otra parte, los efectos de la difracción de la onda, en la cavidad, conducen al análisis de la distribución espacial de la intensidad de energía. Este análisis muestra la aparición de los modos transversales, que constituyen el objeto de estudio del presente trabajo.

2.3. Modos transversales en una cavidad rectangular

Nuestro modelo considera un sistema de espejos planos, por esta razón el estudio de cavidad rectangular resulta útil; permite entender como es la propagación dentro y como se generan los modos transversales de orden mayor. La cavidad estudiada es un ejemplo didáctico que provee las herramientas necesarias, para entender los parámetros físicos involucrados en la generación de los modos y sus patrones de intensidad.

Se considera una caja rectangular, donde sus dimensiones son las siguientes $2a \times 2b \times d$ como lo indica la Fig. 2.7

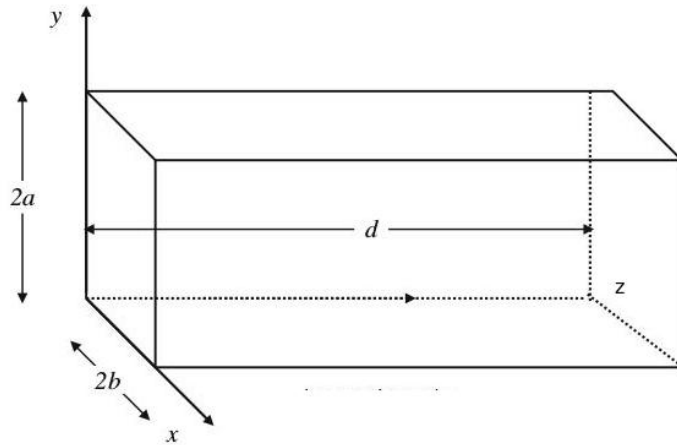


Figura 2.7: Figura de una caja Rectangular

Dentro de esta cavidad simulamos la propagación de un onda electromagnética, donde los campos magnético y eléctrico se rigen por las ecuaciones de Maxwell [29, p.144], y la onda que se propaga es solución de la ecuación:

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2)$$

La Ec. 2.2 es conocida como ecuación de onda. Los parámetros escalares son: c que es la velocidad de la luz en el vacío y n_0 el índice de refracción en el medio que llena la cavidad rectangular que se ha elegido. Para este modelo se considera que las paredes están formadas por un material conductor, así las componentes tangenciales del campo eléctrico se desvanecen en las paredes.

Esta condición es expresada formalmente, si se define un vector unitario \hat{n} que es perpendicular a las paredes, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\hat{E} \times \hat{n} = 0. \quad (2.3)$$

Dadas estas condiciones, se analiza qué pasa con las componentes del campo eléctrico, basta considerar la componente E_x y si se sustituye en la ecuación de onda, para las demás componentes se hace el mismo proceso.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

La Ec. 2.4 al igual que la ecuación de onda que se resolvió en el ejemplo de la cuerda, se soluciona por el método de separación de variables desarrollado en el análisis de el modelo de la cuerda. Las ecuaciones en general a resolver son

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial a^2} = -k_a^2 \quad a = \{x, y, z\} \quad \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = -k_t^2, \quad (2.5)$$

En general, se tiene además que $k^2 = \sum k_a^2$, para resolver este caso se propone una solución de la forma $T(t) = \alpha e^{-i\omega t}$, donde $\omega = ck/n_0$, esta expresión representa la frecuencia angular de la onda, mientras que el coeficiente α , representa la amplitud de la onda y depende de las condiciones iniciales del modelo a resolver.

Las componentes tangenciales del campo E se desvanecen en los siguientes planos: $y = 0$, $y = 2b$, $z = 0$ y $z = d$, entonces se obtienen soluciones de la forma $\sin(k_y y)$ y $\sin(k_z z)$, donde $k_y = \frac{n\pi}{2b}$ y $k_z = \frac{q\pi}{d}$.

De igual forma las dependencias de E_y son $\sin(k_x x)$ y $\sin(k_z z)$, a su vez las de E_z son $\sin(k_y y)$ y $\sin(k_x x)$. En este caso $k_x = \frac{m\pi}{2a}$, para las respectivas variables se tiene $m, n, q = 1, 2, 3, \dots$

Como se muestra la dependencia en x es con respecto a E_y y E_z , si desaparece en la superficie, significa formalmente que $\partial E_y / \partial y$ y $\partial E_z / \partial z$ se desvanecen en las condiciones de frontera siguientes: $x = 0$, $x = 2a$. Se infiere entonces que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y por lo tanto que $\partial E_x / \partial x = 0$, por lo que se obtiene la dependencia de x de E_x , que es de la forma $\cos(k_x x)$. Además si el valor de $m = 0$, la solución no es trivial. Entonces dado el método de separación de variables se tiene cómo son las soluciones espaciales

$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z),$$

$$E_y = E_{y0} \cos(k_z z) \sin(k_x x) \sin(k_y y),$$

$$E_z = E_{z0} \cos(k_z z) \sin(k_y y) \sin(k_x z).$$

Donde E_{x0} , E_{y0} , E_{z0} , son constantes que representan la amplitud. Cuando se aplica $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ se tiene que $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$, donde $\vec{k} = \hat{x} k_x + \hat{y} k_y + \hat{z} k_z$, que es llamado el vector de onda e indica la dirección de propagación de la onda. Las soluciones espaciales presentadas son patrones de ondas estacionarias que se generan en la cavidad, de acuerdo con las condiciones de frontera dadas, estos patrones son llamados modos de oscilación en la cavidad, los cuales son la analogía de los modos encontrados en el modelo de la cuerda y corresponden a los modos normales de vibración [29, p.147]. Se entiende entonces que los modos en cavidades cerradas son superposiciones de ondas planas propagándose, cabe mencionar que en cavidades abiertas la aparición de los modos transversales está en función de las pérdidas por difracción [29, p.150].

Para comenzar el estudio de los modos TEM, se considera un láser pasivo; es decir, que los modos electromagnéticos del resonador láser los asumimos como los que aparecen en un resonador que no tiene un medio de ganancia. Esta es una buena aproximación si consideramos que el índice de refracción del medio y el coeficiente de ganancia son uniformes.

Una consideración física fundamental para la construcción del modelo, es la aproximación de la propagación del haz al considerarse como un rayo. Tal es el caso si las ondas electromagnéticas viajan en una sola dirección, z , y el ángulo formado por el haz con el eje de propagación es pequeño.

2.4. Ecuación de onda paraxial.

Se propone una solución para la Ec. 2.2 que considere los efectos debidos a la difracción y polarización, que tiene la forma

$$E(\vec{r}, t) = \mathcal{E}(r) e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

Esta solución representa un campo monocromático, al sustituir esta expresión en la Ec. 2.2 tenemos la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0 \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (2.7)$$

Una solución para esta ecuación es de la forma $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot r}$, donde \mathcal{E}_0 es la amplitud, \vec{k} es el vector de onda, cuya magnitud esta dada por k^2 . Esta solución representa una onda plana, la cual tiene el mismo valor para todos los puntos en cualquier plano normal a \vec{k} .

Otra solución es una onda esférica de la forma

$$\mathcal{E}(r) = \frac{A}{r} e^{-ik \cdot r}, \quad (2.8)$$

Esta solución tiene un valor constante en cualquier esfera centrada en el origen del cual proviene el rayo, en este caso la intensidad decrece respecto a r .

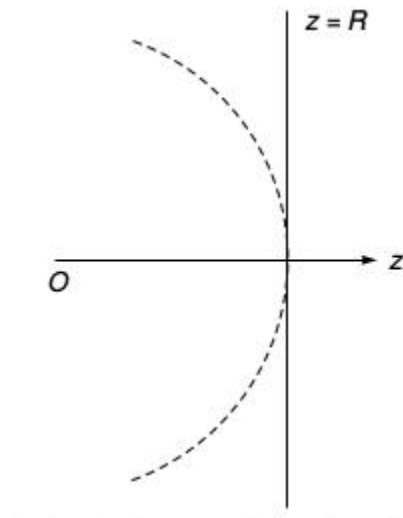


Figura 2.8: Una onda esférica divergiendo desde el punto O . La línea punteada representa una sección del frente de onda a una distancia R de la fuente.

Se considera la Fig. 2.8 que representa una onda esférica cuyo centro se encuentra en el radio de curvatura R , y se piensa en un plano que corte el eje de propagación z , tal que el plano sea $z = R$. De modo que:

$$r = (x^2 + y^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} = R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Para puntos cercanos a $x = 0$, $y = 0$, $z = R$, se cumple que $x^2 + y^2 \ll R^2$, resultando en:

$$\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x^2 + y^2}{2R^2},$$

por la expansión binomial para la expresión kr , donde

$$kr \approx kR + k \frac{x^2 + y^2}{2R},$$

Para la vecindad sugerida se tiene entonces la solución de la forma

$$\mathcal{E}(r) = \frac{A}{R} e^{ikR} e^{ik(x^2+y^2)/2R}. \quad (2.9)$$

Otro ejemplo de solución, es la que muestra unidireccionalidad de una onda plana, sin la necesidad de contar con una sección transversal infinita, se asume además que las variaciones de $\mathcal{E}_0(r)$ y $\partial\mathcal{E}_0/\partial z$, dentro de una distancia del orden de la longitud de onda en la dirección z , sean insignificantes.

$$E(r) = \mathcal{E}_0(r) e^{ikz}, \quad (2.10)$$

Las condiciones expuestas en función de la longitud de onda λ son:

$$\lambda \left| \frac{\partial\mathcal{E}_0}{\partial z} \right| \ll |\mathcal{E}_0| \quad \lambda \left| \frac{\partial^2\mathcal{E}_0}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial\mathcal{E}_0}{\partial z} \right|,$$

Por lo anterior, $E(r)$ varía como e^{ikz} más allá de las distancias z , en el orden de algunas longitudes de onda, este campo entonces satisface la ecuación de Helmholtz como sigue:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathcal{E}_0(r) e^{ikz} + k^2 \mathcal{E}_0(r) e^{ikz} = 0,$$

De aquí se tiene para la componente z

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{E}_0(r) e^{ikz} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{E}_0 + 2ik \frac{\partial\mathcal{E}_0}{\partial z} - k^2 \mathcal{E}_0 \right) e^{ikz} \approx \left(2ik \frac{\partial\mathcal{E}_0}{\partial z} - k^2 \mathcal{E}_0 \right) e^{ikz},$$

Por esta aproximación la ecuación de Helmholtz adquiere la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_0(r) = 0,$$

$$\nabla_{\text{T}}^2 \mathcal{E}_0 + 2ik \frac{\partial\mathcal{E}_0}{\partial z} = 0 \quad \nabla_{\text{T}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

El ejemplo más simple que se presenta como solución de la ecuación paraxial es el perfil del haz gaussiano cuya intensidad se puede escribir como:

$$I(x, y, z) \sim |\mathcal{E}_0|^2 e^{-2(x^2+y^2)/w^2}. \quad (2.11)$$

Este perfil se muestra en la Fig. 2.9, considerando un plano normal a la dirección de propagación z y con un ancho que es medido del eje de propagación z al extremo del perfil, este es denominado w .

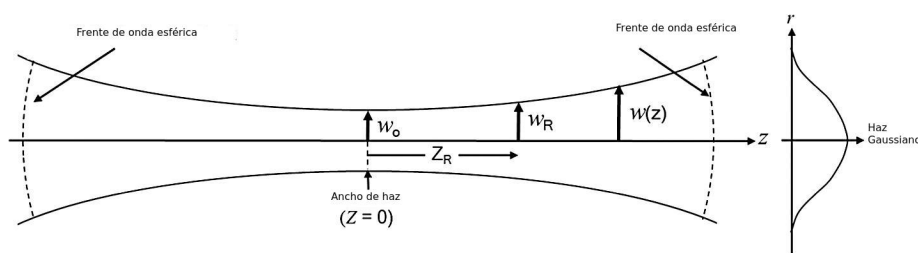


Figura 2.9: Diagrama de un perfil gaussiano, la imagen muestra los parámetros más importantes que caracterizan el haz.

Eigsoluciones de la ecuación paraxial: polinomios de Hermite.

Los modos de un resonador plano estable tienen como modelo físico a las funciones de Hermite-Gauss que son de la forma

$$E_{mn}(x, y) = E_0 H_m \left(\frac{\sqrt{2} x}{w_0} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2} y}{w_0} \right) e^{-[x^2+y^2]/w_0}, \quad (2.12)$$

donde m y n representan los números asociados a los modos transversales $H_m \left(\frac{\sqrt{2} x}{w_0} \right)$ y $H_n \left(\frac{\sqrt{2} y}{w_0} \right)$, en esta expresión w_0 es el ancho característico del modo, que depende de la longitud de onda bajo la que está operando el láser, las características del resonador, el radio de los espejos y la distancia que hay entre ellos. En la Fig. 2.10 (vía [15, p.21]), se observan los modos de orden mayor y el de menor orden que corresponde al haz gaussiano.

Hasta este momento el estudio de las ondas nos remite a su modelo fundamental que es la ecuación de Helmholtz [23, 59], con el propósito de que el desarrollo del trabajo sea claro, se presenta la solución de la ecuación de la que se obtienen los polinomios de Hermite, para las coordenadas rectangulares.

Para precisar, cuando el medio sobre el que se propaga la onda es más grande en comparación a la longitud de onda, se puede decir que la onda es transversal a lo largo de su recorrido, y se justifica el uso del escalar. Para mostrar el ejemplo según los modelos realizados se toma la convención de que el haz se propaga a lo largo del eje z y el número de onda k , y se propone entonces la solución de la forma

$$u = f(x, y, z) e^{-ikz}. \quad (2.13)$$

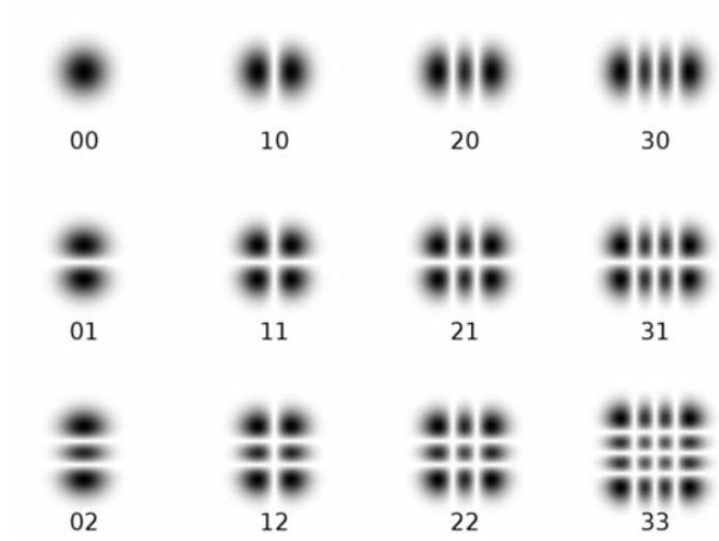


Figura 2.10: Ejemplos de simulación numérica de modos TEM de orden mayor, basado en polinomios de Hermite-Gauss.

El haz de luz modelado por la función u requiere que para valores grandes de los parámetros x y y tienda a 0, y que cambie respecto a la función propuesta, que varía en función del parámetro z de forma gradual, por lo que la ecuación de Helmholtz queda como sigue:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

Para encontrar las soluciones de esta ecuación se propone el método ya expuesto de separación de variables en el cual la función f es como sigue

$$f(x, y, z) = X(x) Y(y) G(z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{F(z)}\right). \quad (2.15)$$

Cabe aclarar que las funciones $F(z)$ y $G(z)$ son funciones que varían gradualmente y que sus términos van tendiendo a 0 conforme se construye una circunferencia con las coordenadas transversales, de tal forma que $x^2 + y^2 = r^2$, la condición mencionada se cumple cuando r es grande.

Si se sustituye la propuesta de la solución en la ecuación a resolver se obtiene

$$\frac{X}{X} - \frac{4x}{F} \frac{X'}{X} + \frac{Y''}{Y} - \frac{4Y}{F} \frac{Y'}{Y} - \frac{4}{F} - 2ik \frac{G'}{G} + 2 \frac{x^2 + y^2}{F^2} (2 - ikF') = 0,$$

De acuerdo al método de separación de variables de la ecuación anterior se puede obtener F y tiene la siguiente forma

$$F(z) = \frac{2}{ik} (z + C),$$

Para obtener la constante de integración, se asume que el frente de onda es plano en $z = z_0$ y que la fase w es independiente de los parámetros x e y

$$\frac{2}{ik} C = w_0^2 - \frac{2}{ik} z_0, \quad F(z) = w_0^2 + \frac{2}{ik} (z - z_0),$$

De aquí, se puede definir que el radio donde el término exponencial de la solución propuesta es igual a $1/e$, esto hace que w_0 sea un mínimo en $z = z_0$, se dice entonces que w_0 es el ancho del haz y en este caso es el radio mínimo. De aquí la ecuación se resuelve para cada una de las variables, lo que resulta en las ecuaciones diferenciales de Hermite, en el caso de X se tiene

$$\frac{X}{X} - \frac{4x}{F} \frac{X'}{X} + \frac{4n}{F} = 0,$$

Esta ecuación tiene como solución los polinomios de Hermite [23, p.61] que en la variable X e Y son de la siguiente forma

$$X(x) = H_n \left(\sqrt{\frac{2}{F}} x \right), \quad Y(y) = H_m \left(\sqrt{\frac{2}{F}} y \right), \quad (2.16)$$

Falta por escribir la función $G(z)$ que tiene la siguiente forma

$$G(z) = \frac{A}{(z + C)^{n+m+1}},$$

La solución a la ecuación de Helmholtz queda como sigue

$$u_{nm}(x, y, z) = H_n \left(\sqrt{\frac{2}{F}} x \right) H_m \left(\sqrt{\frac{2}{F}} y \right) \cdot \frac{A}{(z + C)^{n+m+1}} \exp \left(- \frac{x^2 + y^2}{F(z)} - ikz \right), \quad (2.17)$$

donde A es una constante a determinar, y además C y F están bien definidas. Cabe mencionar que si se utilizan coordenadas cilíndricas, los modos son representados por polinomios de Laguerre, aunque el modo de orden más bajo en ambos casos es un haz gaussiano.

Consideraciones acerca de los TEM

En esta sección se da cuenta de ciertos hechos que suceden con los modos transversales en los resonadores ópticos, observar ciertos modos transversales tiene una correspondencia con las condiciones geométricas de los espejos elegidos, en particular su tamaño. Además, tienen limitaciones físicas como la forma de las aperturas o el medio activo del láser. De esta manera, los modos observables son aquellos cuyo radio de haz w_0 sea menor que el radio de la apertura por la que sale el haz. En general, para uso comercial se utiliza el modo de orden más bajo el TEM_{00} , el haz gaussiano. El diseño de un láser en general, no contempla obtener los modos transversales de orden mayor, por esto se diseñan aperturas cuyos radios son aproximados a los del haz gaussiano. En el caso de este proyecto es importante considerar los órdenes grandes, en otras palabras, modelar un dispositivo que permita la inclusión de la oscilación de los otros modos. El fenómeno de los multimodos sugiere que estos se generan para diferentes secciones en el medio activo del láser, esto da como resultado que aunque la ganancia en los modos de la distribución se da para ciertas áreas, las áreas vacías a su vez pueden ser utilizadas por otros modos que tengan picos de intensidad en éstas. Cuando el número de modos es alto, se traduce en un haz más homogéneo. Un ejemplo del modo multi-operación es el siguiente en la Fig. 2.11 [10, p.229].

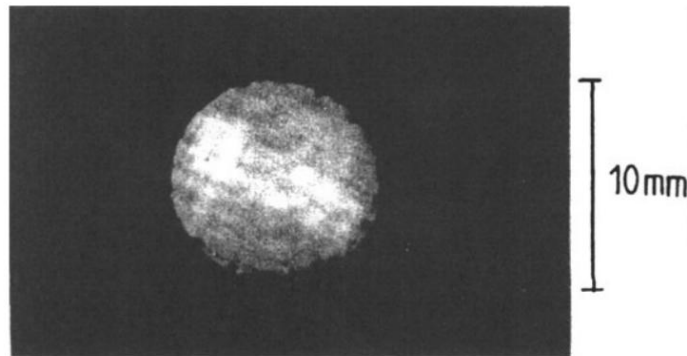


Figura 2.11: Láser de Nd:YAG en multimodo de Nd:YAG, foto tomada de [10, p.229]

Este fenómeno puede aparecer en el láser que estudiamos, como se observa en la Fig. 2.12, que es una fotografía del perfil de la salida.

En particular, es posible observar los modos en su estructura individual si se presenta la condición física de perder los otros modos. Un ejemplo de esta condición técnica es colocar una reja rectangular, así los que tienen

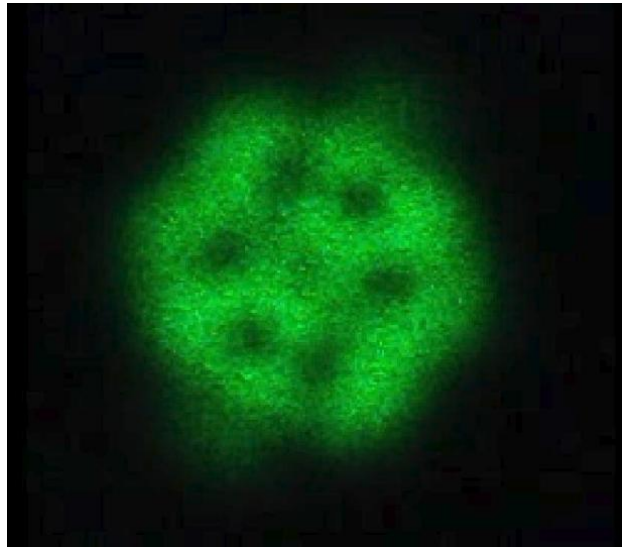


Figura 2.12: Láser de He-Ne: fotografía de la emisión láser de la fuente estudiada.

líneas nodales dentro de los límites de la rejilla, muestra un factor de pérdida menor que los otros modos, así se pueden seleccionar los diferentes modos, en este experimento la importancia de la geometría usada en la rejilla juega un papel importante, ya que determina la geometría, y en este caso la simetría rectangular induce encontrar modos de Hermite-Gauss.

Para nuestro modelo se considera un sistema de espejos planos rectangulares donde se cumpla la condición señalada en el párrafo anterior.

Modos híbridos

Algunas veces, se observan modos con perfiles de intensidad que son interesantes. Por ejemplo en la Fig. 2.13 se puede observar una morfología de una dona: con fronteras claramente delimitadas y un centro que tiende a cero. Este tipo de perfiles son generados por la superposición de dos modos circulares (Laguerre-Gauss) que están linealmente polarizados, pero que están desfasados en la oscilación por un ángulo de $\pi/2$. Para este caso existen cuatro maneras de combinar dos modos linealmente polarizados, los cuales resultan en diferentes estados de polarización, esto representa la suma de los modos. Es de interés notar que la suma de estos modos siempre deja perfiles de intensidad con la forma de anillo, estos modos son conocidos como modos híbridos. Cabe señalar que en este caso los modos no interfieren debido a sus diferentes estados de polarización y entonces la intensidad de la distribución

de la suma está dada por la suma de los perfiles de intensidad individuales. Los modos híbridos aparecen si la apertura por donde pasa el perfil de intensidad varía.

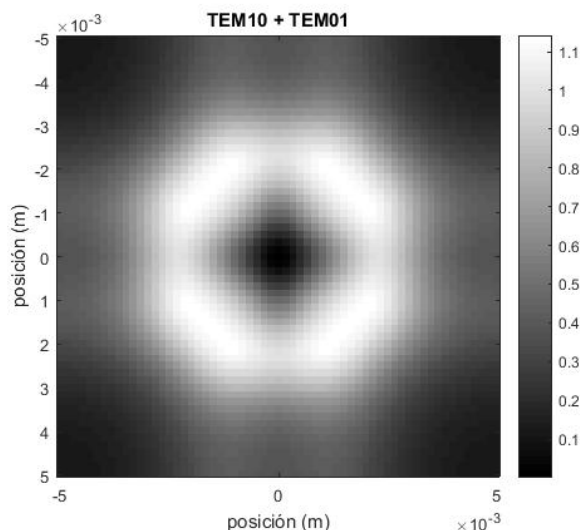


Figura 2.13: Modo híbrido de dona, $TEM_{01} + TEM_{10}$, modelado numéricamente

Operación multimodo del láser

Sin pérdida de generalidad, todos los modos cuyo radio sea menor que el radio de apertura, en el resonador, van a oscilar al mismo tiempo [10, p.246]. Entonces el perfil de salida sería una superposición de estos modos. Como se ha visto, todos los modos son solución a la ecuación de Helmholtz, pero la suma no será solución debido a que los modos tienen diferentes frecuencias de resonancia ν_{pmn} . Esta diferencia en las frecuencias conlleva a oscilaciones temporales en el perfil de intensidad. Por ejemplo si se considera la superposición del TEM_{00} y el TEM_{01} . Obteniendo:

$$E(x, y, z) = E_0 \exp \left[\frac{-x^2}{w^2} \right] \exp \left[i(2\pi\nu_{p00}t - \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right)) \right] + E_1 \left[\frac{2\sqrt{2}x}{w} \right] \exp \left[\frac{-x^2}{w^2} \right] \cdot \exp \left[i \left(2\pi\nu_{p10}t - 2 \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \right) \right],$$

Si se calcula la intensidad queda como:

$$\begin{aligned}
I(x, y, z) &= K \exp \left[\frac{-2x^2}{w^2} \right] \cdot \\
&= (E_0^2 + E_1^2 \frac{8x^2}{w^2} + E_0 E_1 \frac{4\sqrt{2}x}{w} \cos(\omega)),
\end{aligned}$$

donde ω :

$$\omega = ([2\pi(\nu_{p10} - \nu_{p00})] t - \arctan(\frac{z}{z_0})).$$

La frecuencia de oscilación que es representada en los términos de la intensidad, por la diferencia entre las frecuencias ν_{pmn} , es del orden de 100 MHz [10, p.247], si se registra la intensidad del patrón, lo que se graba en una imagen, que es el promedio de los modos de oscilación y la suma de los perfiles individuales de la distribución de la intensidad.

Para calcular la intensidad en una simetría rectangular se alcanza la siguiente expresión:

$$E(x, y, z) = \exp \left[\frac{x^2}{w^2} \right] \sum_{m=0}^{\infty} E_m H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{w} \right] \exp [i(m+1) \cdot \omega].$$

y el perfil de intensidades es de la forma

$$I(x, y, z) = K E_0^2 \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} - 2\cos(\omega) \right)^2 \right]. \quad (2.18)$$

En la Fig. 2.14 se observa la superposición de un gran número de modos. Las magnitudes de los campos E_m de los modos transversales muestran variaciones temporales causadas por su interacción con el medio activo del láser. Dado que los modos usan diferentes áreas de ganancia en el medio activo, los modos que ocupen las áreas dejadas por otros, oscilan e incrementan su amplitud. Esta competencia de modos puede ser una que no presente estados estacionarios, esto puede dar como resultado que la emisión láser sea periódica o caótica. Como se observa en la Fig. 2.14 (imagen vía [12, p.1]).

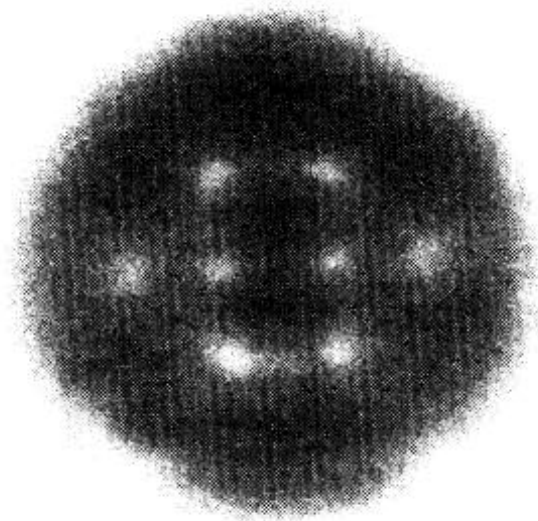


Figura 2.14: Imagen de modo que presenta caos tomada de [12, p.1].

Estabilidad en un resonador

Los parámetros a utilizar en el modelo requieren definir el tipo de resonador a analizar, el criterio más importante para describir al kernel de propagación es la estabilidad. Es decir, se debe establecer si el perfil de la onda permanece dentro de la cavidad después de muchos viajes, o si pierde energía al salir de la cavidad. Para el resonador consideramos que la onda realiza viajes de ida y vuelta dentro de la cavidad; de acuerdo con las condiciones geométricas de frontera, se hallan criterios para determinar la cantidad de energía pérdida por difracción. Luego, se busca una condición de estabilidad.

Consideramos un rayo que rebota dentro de un resonador y permanece dentro: condición de estabilidad. Si el rayo escapa, el resonador es inestable. El criterio de estabilidad puede ser descrito en términos del radio de curvatura R de los espejos y la distancia L que los separa. Estos parámetros son fundamentales en el modelo desarrollado en esta investigación, ya que son variables de entrada en la simulación.

En la Figura 3.1 se aprecia una cavidad con fronteras rectas, como espejos, con radios de curvatura R_1 y R_2 , y además la distancia que los separa es L .

La representación matricial de un rayo saliente del lado izquierdo y que rebota N veces es:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} - \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{bmatrix}$$

Para N se tiene la siguiente relación

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}.$$

donde se tiene el determinante $AD - BC = 1$, además se exige que se cumpla la relación $\cos \theta = \frac{1}{2}(A + D)$ [16, p.276]. Entonces, podemos escribir

$$\cos \theta = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2},$$

De esta relación se obtiene que si θ es real el rayo permanece dentro del resonador, y si es imaginario escapa de los confines del mismo. La condición para que un resonador sea estable se puede resumir entonces como $|\cos \theta| \leq 1$

Con lo que si se definen

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}. \quad (2.19)$$

El siguiente criterio afirma que un resonador es estable, si

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1, \quad (2.20)$$

En la Fig.2.15 se muestran ejemplos (con su relación geométrica) de resonadores estables e inestables [9, p.439].

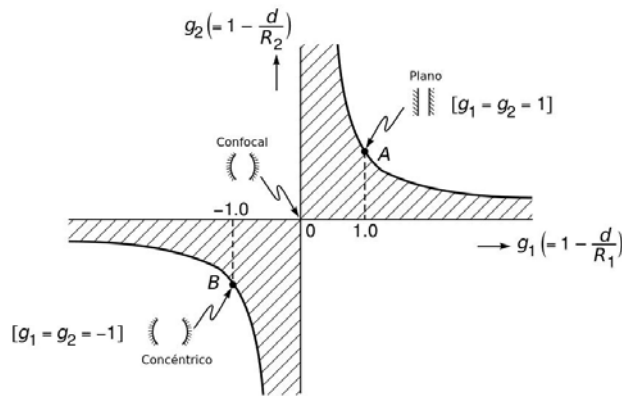


Figura 2.15: Diagrama de estabilidad de resonadores, la zona rayada muestra la zona de estabilidad [9, p.439].

En dispositivos comerciales se utilizan generalmente resonadores estables o en la condición de frontera de estabilidad, donde los parámetros son $g_i = 1$, $i = 1, 2$, como el analizado en este proyecto. Los parámetros mencionados cobran importancia, al ser parte fundamental de la matriz de propagación, como lo son el radio de curvatura, el tamaño del resonador y de la cavidad óptica.

Capítulo 3

Métodos numéricos para la Ecuación de Fresnel

Modelar el fenómeno de difracción nos remite a una cronología de su estudio. Huygens sentó las bases al sugerir que cada punto en el perfil de un frente de onda funciona como la fuente de una onda esférica, y que la propagación de la onda se puede conocer de la superposición de todas las ondas esféricas. Esta idea es importante porque considera que el frente de onda inicial puede interactuar con el medio. Sin embargo, el formalismo llega con Fresnel y Kirchhoff, quienes desarrollan las matemáticas necesarias para modelar la difracción [27, p.120]. En este capítulo se presenta un modelo numérico que resuelve la ecuación integral de difracción de Fresnel, en el caso de un resonador de espejos planos e inclinados.

La modelación numérica de todo patrón de luz observado requiere prestar atención a las condiciones físicas bajo las que es examinado el fenómeno ondulatorio. En otros términos, lo que sucede con la luz al interactuar con fronteras que impiden su paso. En nuestro caso estas fronteras son los acopladores de la salida del láser y la apertura por donde sale el haz.

En este capítulo procedemos a resolver la integral de Fresnel, para esto tomamos dos sistemas de referencia, que sirven para interpretar las transformaciones que sufre la onda propagándose, como se observa en la Fig. 3.1.

A manera de ejemplo, una onda plana se propaga una distancia ζ , a partir del origen: la apertura α_1 ; hasta la pantalla α_2 que es donde observaremos el patrón de salida, después de interactuar con α_1 . En la Fig. 3.1 se muestra que en la región T_0 la transmitancia es 0, y en la apertura α_1 es 1. Esta definición es muy importante porque la transmitancia es una función esencial en la conformación del kernel de propagación, como veremos más adelante. El problema a resolver, es calcular la distribución de intensidad del campo en un punto cualquiera P , sobre la apertura α_2 , como se muestra en la Fig. 3.1. Para

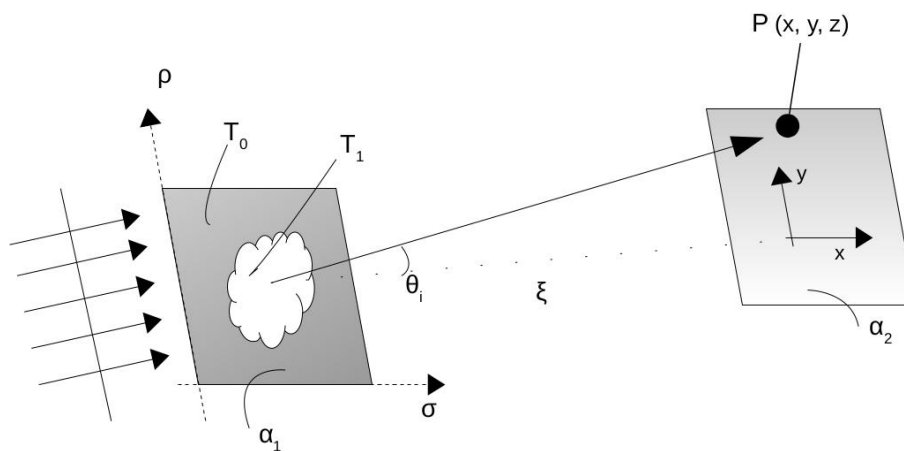


Figura 3.1: Plano con las coordenadas de la integral de difracción.

calcular los cambios en la onda causados por la apertura α_1 , consideramos el principio de Huygens [27, p.120]. Definiendo muchos puntos sobre α_1 , una vez que la onda arribe a α_1 , estos serán la fuente de ondas esféricas, de tal forma que el campo total en P , sea la superposición de todas ellas. Cabe aclarar que todas estas ondas esféricas poseen diferente fase, al depender este cambio de la forma de la apertura α_1 .

El siguiente paso es proponer una función que modele la transmitancia, la llamaremos $u(\sigma, \rho)$. Esta función debe estar acompañada de la onda esférica correspondiente a cada punto que permite transmitir, esto es, la región T_1 , como habíamos dicho

$$u(\sigma, \rho) \cdot \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right), \quad (3.1)$$

En la Fig. 3.1, la distancia entre la fuente y el plano o pantalla donde observamos es R . Para considerar todos los puntos en α_1 , integramos sobre las coordenadas σ y ρ , y encontramos en primera instancia, una proporcionalidad entre el campo emitido en α_1 y el campo observado en α_2 , cuya función de transmitancia es $u(x, y)$, como se muestra

$$u(x, y) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma, \rho) \cdot \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d\sigma d\rho, \quad (3.2)$$

Para obtener la integral de difracción basta hallar la constante que trans-

forma la proporcionalidad en igualdad de la Ec.3.3.

$$u(x, y) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma, \rho) \cdot \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) d\sigma d\rho, \quad (3.3)$$

La constante C se obtiene, si consideramos la condición de frontera $u(\sigma, \rho) = 1$, y se transmite un frente de onda plano e^{-ikz} , lo que transforma la integral de la Ec.3.3 en

$$C \iint \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d\sigma d\rho = e^{-ikz}. \quad (3.4)$$

La distancia $R = \sqrt{(x - \sigma)^2 + (y - \rho)^2 + \zeta^2}$, se factoriza para realizar una aproximación adecuada a las condiciones físicas observadas, como sigue

$$R = \zeta \left[1 + \left(\frac{x - \sigma}{\zeta} \right)^2 + \left(\frac{(y - \rho)}{\zeta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

donde el significado físico es: las diferencias $|x - \sigma|$ y $|y - \rho|$ son más pequeñas que la distancia ζ , que separa α_1 de α_2 .

Cuando sucede esto, podemos utilizar la aproximación binomial, que utilizamos para la solución analítica en la sección 2.4, donde si $x \ll 1$,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n(n + 1) \frac{x^2}{2!}, \quad (3.6)$$

Ahora aplicamos la Ec. 3.5 en Ec. 3.4, obteniendo

$$R = \zeta + \frac{1(x - \sigma)^2}{2\zeta} + \frac{1(y - \rho)^2}{2\zeta}, \quad (3.7)$$

Con lo que el factor e^{ikR} se aproxima a

$$e^{-ikR} \simeq e^{-ik\zeta} \exp \left[\frac{-ik}{2\zeta} [(x - \sigma)^2 + (y - \rho)^2] \right], \quad (3.8)$$

En la Fig. 2.11 observamos que si ζ es muy grande, los ángulos que se formen θ_i son pequeños y se consigue la aproximación $R \simeq \zeta$, con lo que nuestra onda esférica se transforma en

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \simeq \frac{e^{-ik\zeta}}{\zeta} \exp \left[\frac{-ik}{2\zeta} [(x - \sigma)^2 + (y - \rho)^2] \right], \quad (3.9)$$

con lo que la Ec. 3.3 se escribe como

$$C \frac{e^{-ik\zeta}}{\zeta} \iint \exp \left[\frac{-ik}{2\zeta} [(x - \sigma)^2 + (y - \rho)^2] \right] d\sigma d\rho = e^{-ikz}. \quad (3.10)$$

Falta por obtener las integrales respecto a σ y ρ y multiplicarlas,

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-ik}{2\zeta} \right) (x - \sigma)^2 d\sigma \\ I_\rho &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-ik}{2\zeta} \right) (y - \rho)^2 d\rho. \end{aligned}$$

Las integrales anteriores se obtienen mediante la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp [-\alpha x^2 + \beta x] dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} \right),$$

Entonces, realizamos un cambio de variable para resolver la integral, $x - \sigma = \varepsilon \rightarrow d\varepsilon = -d\sigma$, y sustituimos en I_σ , obteniendo

$$I_\sigma = - \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \left(\frac{ik}{2\zeta} \right) (\varepsilon)^2 d\varepsilon = -\sqrt{\frac{2\pi\zeta}{ik}},$$

El resultado para I_ρ es el mismo, por la constante de integración es

$$C = \frac{-i}{\lambda}, \quad (3.11)$$

Entonces, la integral de Fresnel es

$$u(x, y) = \frac{-i}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} u(\sigma, \rho) \cdot \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d\sigma d\rho, \quad (3.12)$$

La Ec. 3.12 representa la integral de Fresnel general para una onda esférica. En nuestro modelo de resonador se representa para una onda plana.

Para esto, es necesario recurrir a la Ec. 3.5 que muestra la aproximación binomial o parabólica, y sustituimos en la Ec. 3.12 para escribir:

$$u(x, y) = \frac{-i}{\lambda} \frac{e^{-ik\zeta}}{\zeta} \iint_{-\infty}^{\infty} u(\sigma, \rho) \cdot \exp \left[\frac{-ik}{2\zeta} [(x - \sigma)^2 + (y - \rho)^2] \right] d\sigma d\rho, \quad (3.13)$$

Existen diversos algoritmos [25] que permiten resolver numéricamente la Ec. 3.13, en esta tesis utilizamos el modelo desarrollado por F. Morrissey [17].

Sin embargo, a manera de introducción se presentan ligeramente los modelos que existen para cavidades ópticas y sus patrones.

La Ec. 3.13, en coordenadas rectangulares, suele discutirse en la literatura, y se resuelve en este capítulo. Los primeros modelos numéricos corresponden con los intentos de describir un interferómetro de Fabry-Perot [6]. Durante los viajes intracavidad de la onda, ésta alcanza un estado estacionario (correspondiente al modo normal), donde es menor la pérdida de energía. Es decir, el estado mínimo de pérdidas por difracción corresponden al estado estacionario de orden más bajo, conocido como TEM_{00} . Para cada geometría involucrada en el diseño del resonador corresponde la capacidad de observar diferentes modos.

Se debe a G. Fox y T. Li un método para resolver la ecuación de Huygens-Fresnel en su artículo de 1961 acerca de los modos de resonancia en un máser [7]. Cabe aclarar que este método en un principio permite modelar sólo los modos de orden más bajo.

En nuestro caso, utilizamos la aproximación de Fresnel, que permite encontrar los patrones de una cavidad a través de la transformada de Fourier [28]. Como muestra la Fig. 3.2, existiendo una correspondencia entre el espacio de la frecuencia ν y el espacio geométrico. Para encontrar el patrón TEM (que alcanza una distancia d dentro de una cavidad) se somete el perfil inicial U_0 a una transformada de Fourier, resultando en un cambio de variables: del dominio geométrico al de frecuencia. Después, una función de transferencia H , nos permite obtener un patrón $U'(\nu)$. Por lo que resta realizar la transformada de Fourier inversa, así reconstruimos la geometría en coordenadas espaciales $U'(r)$. Ante un perfil U_0 , se puede aplicar una convolución h , para conocer $U'(r)$, como se observa en la Fig. 3.2 [25].

Una generalización importante del método de Fox-Li es la realizada por Wyrowski [2], quien utilizó una técnica llamada *Field tracing* para encontrar los eigenvectores. Este método es la base del software llamado: *Trans – Lab*. Tratamos de observar los beneficios de este software; sin embargo, la versión de estudiante es insuficiente para resolver el modelo de espejos inclinados propuesto. Aún así, consideramos que un proyecto futuro podría ser explorar las matemáticas de este método y programar un código didáctico.

A través de la aproximación paraxial y la solución de la ecuación de Helmholtz (estudiada en el capítulo 2) se obtienen los modos normales dentro de una caja, de paredes reflectantes; este sistema describe un resonador óptico simple. No obstante, se requiere un modelo numérico que permita resolver la ecuación de Huygens-Fresnel. La solución describe una onda electromagnética viajando, difractándose y contenida en una cavidad óptica. A través de los perfiles de intensidad se observan los modos transversales tal como en la solución analítica.

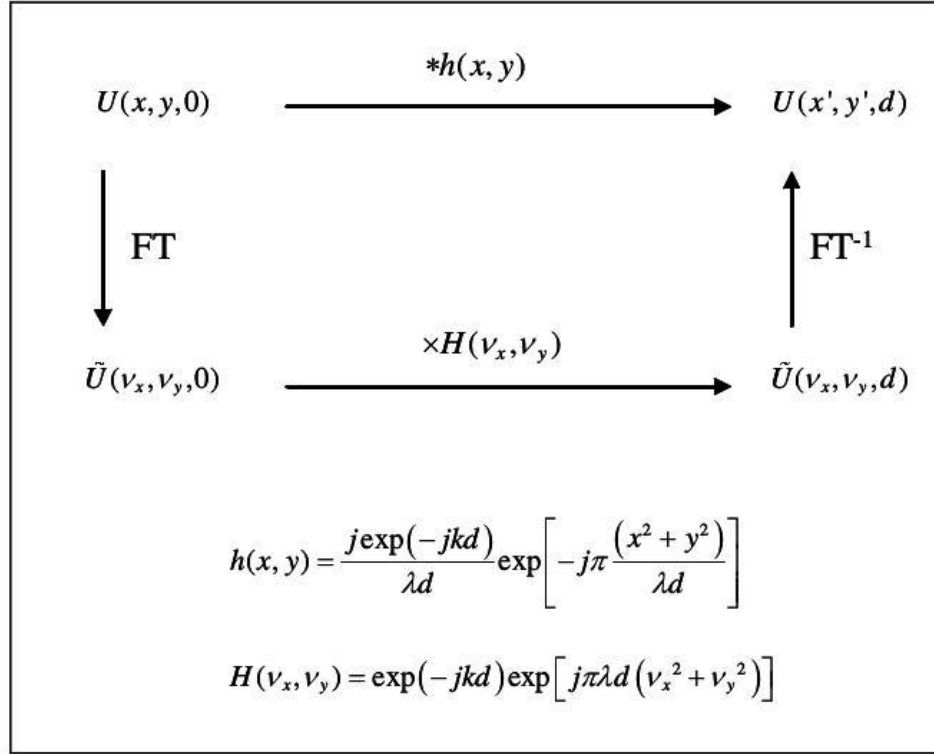


Figura 3.2: Diagrama de métodos numéricos basados en transformada de Fourier para obtener los modos

Reafirmando, la integral de Fresnel puede ser discretizada [21]. Estos métodos matriciales ofrecen la posibilidad de diagonalizar la matriz y encontrar los patrones de intensidad en la cavidad. El método seguido, en esta tesis, es cercano a esta aproximación pues utilizamos la cuadratura gaussiana para resolver la integral de Fresnel. Así, construimos el kernel de propagación, que es parte de los métodos de discretización de la integral y convertirla en una matriz como se desarrolla párrafos más adelante.

El viaje de una onda con perfil $u(x_0, y_0)$, en una cavidad cuya frontera son los espejos M_1 y M_2 , se describe como:

$$u''(x, y) = \int \int K(x, y : x_0, y_0) u'(x, y) dx_0 dy_0, \quad (3.14)$$

La Ec. 3.14 afirma que el perfil $u'(x, y)$ corresponde a la mitad del viaje. Así, se propaga hasta alcanzar el espejo M_2 . El perfil completo $u''(x, y)$ se conoce a la vuelta, en el espejo M_1 . La solución de la Ec. 3.14 suele ser ana-

lítica, en algunas circunstancias. Con el fin de abarcar más casos, el método propuesto por G. Fox y T. Li [6] propone un método numérico iterativo, este proceso requiere de un perfil de onda inicial. Por ejemplo: una onda plana. El perfil $u_0(x, y)$ viaja de ida y vuelta dentro del resonador, hasta que se cumple la condición: $u^{(n+1)}(x, y) = \gamma u^n(x, y)$. Proponiendo un problema de eigenvalores (cuya magnitud se relacionan con la pérdida de energía por difracción) y de eigenvectores que representan el campo escalar y los modos TEM buscados.

F. X. Morrissey y H.P. Chou (en un artículo de 2011) [17], proponen un marco teórico que construye el kernel de propagación en el interior de la ecuación de Huygens-Fresnel. Dicho de otra manera, transforma la integral en un problema de eigenvalores, mediante la discretización del kernel con el método de la cuadratura gaussiana. Para nuestro modelo seguimos el camino planteado por Morrissey en su artículo, porque permite obtener tantos modos como los N puntos de la malla escogida, ver Apéndice A.3.

La aberración que estudiamos, en la literatura se conoce como el cálculo de modos para resonadores ópticos con espejos inclinados. Se escogió esta aberración para representar un modelo del fenómeno que sucede en el láser, que presenta la competencia temporal de modos. En la práctica, obtenemos una base numérica (no-polinómica, no-analítica) para construir una combinación lineal. Aunque, el modelo propuesto desprecia la variable temporal, éste permite entender cómo se suman los perfiles de intensidad. Esto se relaciona, con la propuesta de obtener los modos por medio de la correlación entre imágenes teóricas y fotogramas del láser, ver capítulo 4.

Lo que no se puede controlar con la propuesta de modelo, es el número y el orden secuencial de los modos que aparecen. En los capítulos anteriores 1 y 3 se mostraron las condiciones básicas para que aparezcan modos. Sin embargo, el fenómeno estudiado se modela con la aberración de los espejos inclinados, y se piensa que puede ser una causa fundamental de la superposición de modos.

A continuación, se muestra cómo se construye el kernel de propagación, que contiene la información necesaria para simular el viaje de ida y vuelta de la onda electromagnética dentro del resonador. Debido a que no se cuenta con un software que permita la selección de los modos, que se ajuste al modelo de correlación de imágenes, se desarrolló un código en *Matlab* (ver Anexo A.3), el cual utiliza el kernel diseñado por Morrissey [17] y el componente del kernel que muestra la inclinación de los espejos.

La aberración de los espejos es función de parámetros físicos que son controlados en la simulación numérica; tales como: la longitud de onda, el tamaño de los espejos y las dimensiones de la cavidad óptica.

3.1. Kernel de propagación y aberración de inclinación en espejos.

De acuerdo con Morrisey [17], la forma normalizada de la ecuación de Huygens-Fresnel es

$$\begin{aligned} \gamma u\left(\frac{x_2}{r_1}, \frac{y_2}{r_2}\right) &= -i\sqrt{N_x N_y} \exp\left[i\pi A \left(N_x \left(\frac{x_2}{r_1}\right)^2 + N_y \left(\frac{y_2}{r_2}\right)^2\right)\right] \cdot \\ &\iint u\left(\frac{x_1}{r_1}, \frac{y_1}{r_2}\right) \exp\left[i\pi A \left(N_x \left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2 + N_y \left(\frac{y_1}{r_2}\right)^2\right)\right] \cdot \\ &\exp\left[-2i\pi \left(N_x \left(\frac{x_1}{r_1}\right) \left(\frac{x_2}{r_1}\right) + N_y \left(\frac{y_1}{r_2}\right) \left(\frac{y_2}{r_2}\right)\right)\right] d\left(\frac{x_1}{r_1}\right) d\left(\frac{y_1}{r_2}\right), \end{aligned}$$

Se normaliza la ecuación integral para discretizar el kernel, y utilizamos la cuadratura gaussiana, con dominio de -1 a 1 . Los parámetros físicos están incluidos en la matriz de propagación M_{ABCD} (Ver sección 2.4), donde $A = 2 \cdot g_1 g_2 - 1$ y $B = 2 \cdot g_2 L$.

Los números de Fresnel corresponden al espejo de salida. Para nuestro caso, se usa la longitud L , así $N_x = r_1^2 / (B \lambda)$ y $N_y = r_2^2 / (B \lambda)$. Una vez, que la integral se convierte en una suma, se tiene una expresión particular para el kernel de propagación, que contiene la información necesaria para elegir la geometría a estudiar. Aquí, consideramos que la cavidad óptica es conformada por espejos planos.

En correspondencia con el artículo de Morrisey [17], el kernel a utilizar en nuestro código es:

$$H_{ijuv}(a, b) = H \cdot W_{ij} \cdot F_{ij} \cdot F_{uv} \cdot E_{ijuv}, \quad (3.15)$$

donde $H = -i\sqrt{N_x N_y}$, W_{ij} que representa los pesos que discretizan del kernel, con los polinomios de Legendre y con abscisas en cero.

$$F_{ij} = \exp\left[i\pi A \left(N_x \left(\frac{x_i}{r_1}\right)^2 + N_y \left(\frac{y_j}{r_2}\right)^2\right)\right] \quad (3.16)$$

$$F_{uv} = \exp\left[i\pi A \left(N_x \left(\frac{x_u}{r_1}\right)^2 + N_y \left(\frac{y_v}{r_2}\right)^2\right)\right] \quad (3.17)$$

$$E_{ijuv} = \exp\left[-2i\pi \left(N_x \left(\frac{x_i}{r_1}\right) \left(\frac{x_u}{r_1}\right) + N_y \left(\frac{y_j}{r_2}\right) \left(\frac{y_v}{r_2}\right)\right)\right], \quad (3.18)$$

Modelo de espejos inclinados.

Completamos el kernel de propagación con el término que describe la desviación de los espejos. Como se muestra en la Fig. 3.3, ambos espejos están rotados el mismo ángulo δ/r_1 , este hecho causa que el complemento del kernel resulte en:

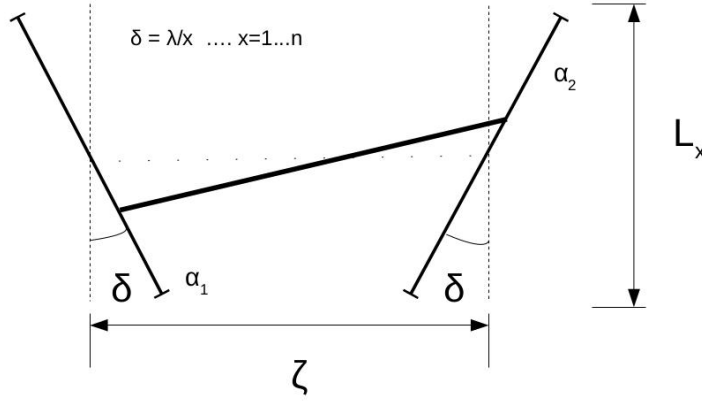


Figura 3.3: Diagrama del modelo de cavidad de espejos inclinados.

$$T_{ij} = \exp(i) \left(\frac{\delta}{r_1} \right) (x_i + x_j), \quad (3.19)$$

Esta matriz se multiplica al kernel H_{ijuv} , y con esto la ecuación de eigenvalores a resolver es:

$$\gamma_{u,v} u_{u,v} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M H_{i,u} H_{j,v} u_{i,j}. \quad (3.20)$$

Con el código desarrollado (mostrado en el apéndice A.3,) se obtienen los eigenvectores que representan el campo escalar, y corresponde con los modos transversales. A su vez, el perfil de intensidad es el valor absoluto del campo elevado al cuadrado.

3.2. Resultados

Para obtener una visualización es necesario que en el modelo numérico se especifiquen los parámetros físicos de un resonador óptico: tamaño de los espejos, de la apertura, distancia entre los espejos, entre otros. En la

Fig. 3.1 se observa un esquema, con los parámetros físicos que utilizamos y describimos a continuación.

El cálculo numérico de la integral de Fresnel requiere los radios de curvatura R_1 y R_2 , estas magnitudes corresponden a los espejos del resonador: plano, cóncavo (positivo) ó convexo (negativo). Estos cuentan con radios r_1 y r_2 . A su vez, están separados una distancia L , con una longitud de onda λ , correspondiente a la perturbación propagada dentro de la cavidad.

En un resonador estable el haz viajero presenta una dispersión radial menor que en un resonador inestable, para cada viaje, esto se refleja en la magnitud de los parámetros g y se observa que la relación de estabilidad de un resonador es $0 < g_1 g_2 < 1$, donde $g_i = 1 - L/R_i$, $i = 1, 2$.

En nuestro modelo consideramos una cavidad con espejos planos; por tanto, los radios de curvatura son de magnitud $R_{1,2} = \infty$, por lo cual $g_1 = g_2 = 1$. Lamentablemente, con estos valores el resonador resulta inestable, como se mencionó en la sección 2.4.

Completamos el modelo con el parámetro de aumento dado por $m = |g_2/g_1|$ [19]; para este modelo $m = 1$. Así consideramos que $L \gg \lambda$, por lo que la difracción en el resonador dependerá del aumento m y del número de Fresnel $N_i = (mr_i)^2/L\lambda$, $i = 1, 2$.

3.2.1. Resultados del modelo plano con inclinación

En la ejecución del programa consideramos una malla, que representa a los espejos dividida en 61 puntos ($N = 61$), para cada eje en nuestro sistema de coordenadas rectangulares; ver el programa anexo en el apéndice A.3. Aunque el número puede variar de acuerdo con las necesidades para cada visualización. Sin embargo, creemos que estos puntos son suficientes para mostrar claramente la posible salida de emisión láser, sin consumir demasiado tiempo de máquina: aprox. 8 min de ejecución.

El programa desarrollado para esta tesis, cuenta con la característica de modificar los parámetros geométricos de la cavidad, ligados al número de Fresnel, como se puede observar en la sección teórica de este capítulo 3.

Para tener coherencia con la literatura [11, 22], decidimos utilizar ángulos con la forma (λ/x) , donde x puede adquirir valores de cualquier número natural, esto con un objetivo específico: que nuestro modelo se ajustara a los modelos previos para contar con un punto de comparación. De esta manera, observaremos un cambio en la distribución espacial de los patrones observados congruente con reportes previos.

Para los diferentes ángulos propuestos como lo son: $(\lambda/10)$ ver Tabla 3.2, $(\lambda/100)$ ver Tabla 3.4 y $(\lambda/1000)$ ver Tabla 3.6, observamos que efectivamente el cambio que supone la orientación del espejo, provoca una variación en

el eje óptico. En nuestro caso, propusimos una variación sólo sobre un eje transversal de coordenadas (y); así, el patrón se desplaza espacialmente, como se observa en las Tablas 3.3, 3.5 y 3.7.

Cabe decir que la diferenciación de los modos (para espejos inclinados) es complicada, ya que el programa desarrollado ordena los patrones en función de la pérdida de energía por difracción. En otras palabras, es simple identificar a qué orden corresponden los patrones cuando carecen de inclinación, pues se pueden contrastar con la teoría. En el caso con espejos inclinados la identificación es difícil, porque la salida del programa prioriza a un patrón con poca pérdida energética sobre otro, sin referirse a una teoría analítica. En consecuencia, la salida es un patrón, con poca información sobre el orden modal en referencia a un conjunto de polinomios (Hermite, Laguerre, u otros). Por esta razón, creamos una tabla de combinaciones lineales de los primeros cuatro patrones observados, ver Tabla 3.3, para los ángulos mencionados. La salida de las combinaciones son una propuesta de cuáles son los posible patrones que pueden ser emitidos, bajo esta aberración.

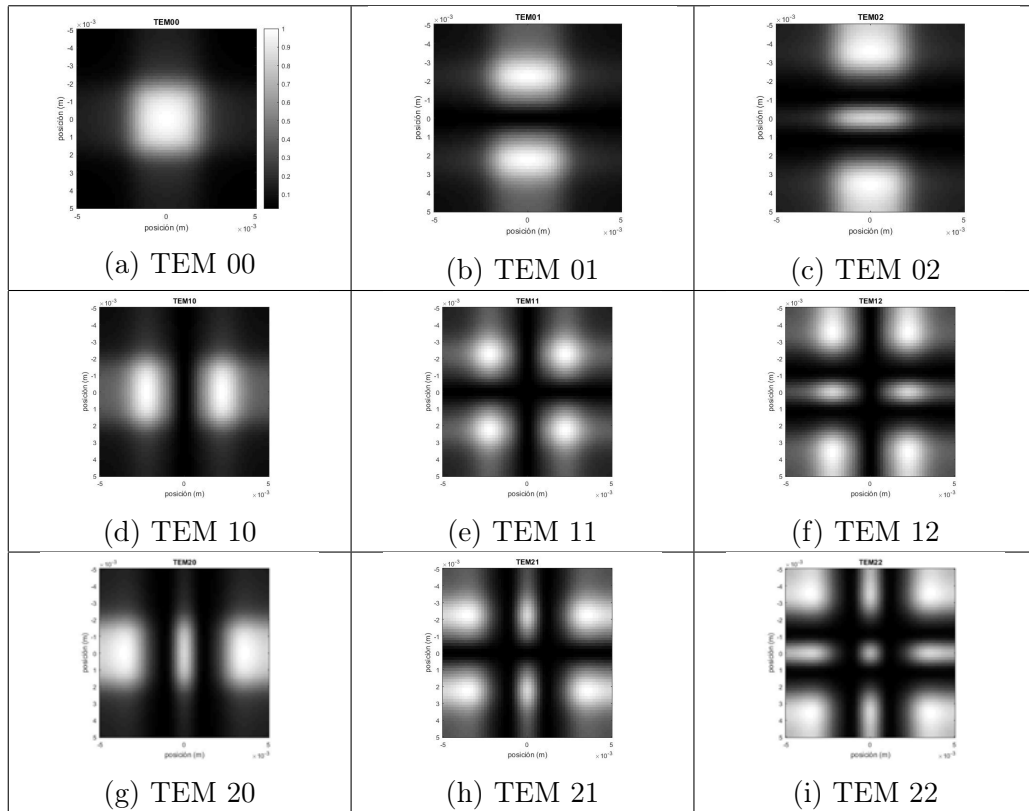


Tabla 3.1: Gráfica de modos transversales con método de Morrisey [17]

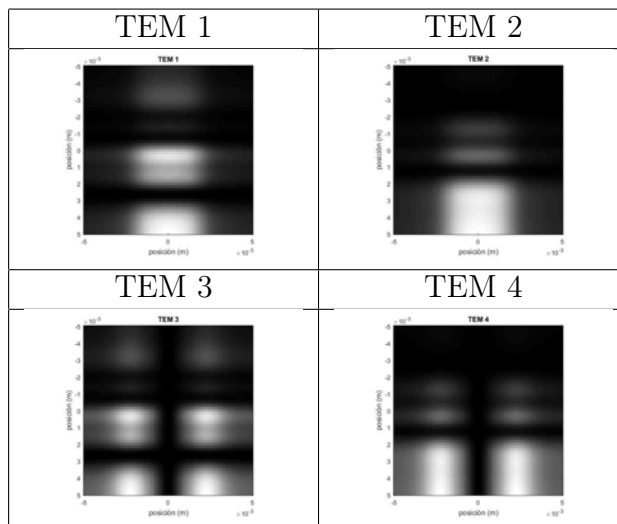


Tabla 3.2: Gráfica de modos transversales para inclinación $\lambda/10$

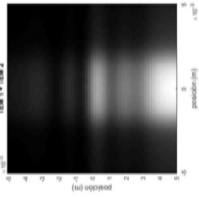
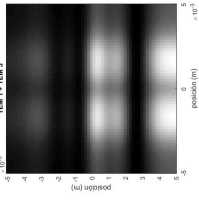
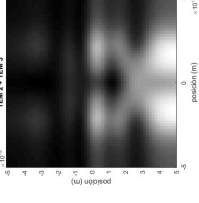
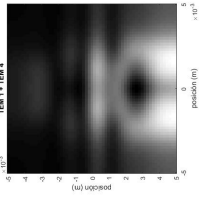
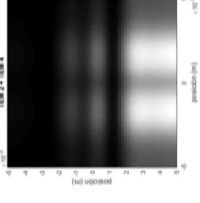
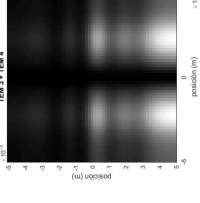
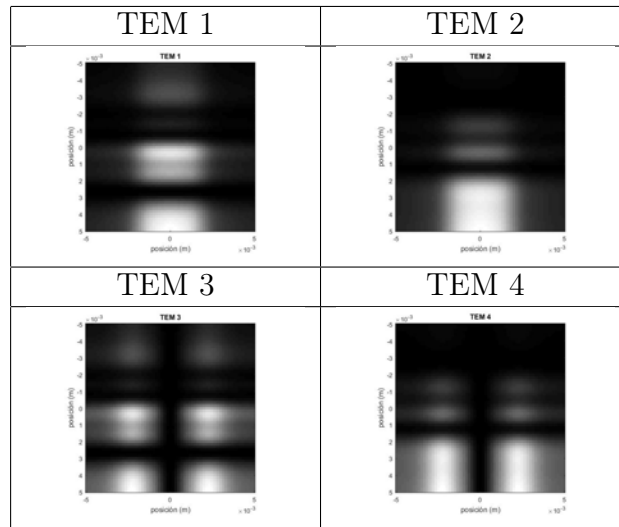
	1	2	3
2	 <p>(a) TEM 1 + TEM 2</p>		
3	 <p>(b) TEM 1 + TEM 3</p>	 <p>(c) TEM 2 + TEM 3</p>	
4	 <p>(d) TEM 1 + TEM 4</p>	 <p>(e) TEM 2 + TEM 4</p>	 <p>(f) TEM 3 + TEM 4</p>

Tabla 3.3: Gráfica de combinación de modos transversales para $\lambda/10$

Tabla 3.4: Gráfica de modos transversales $\lambda/100$

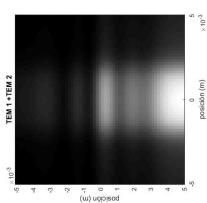
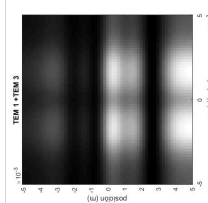
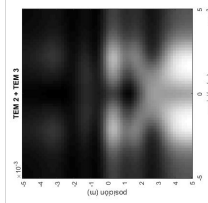
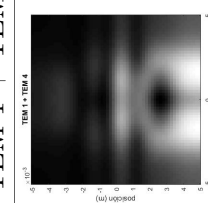
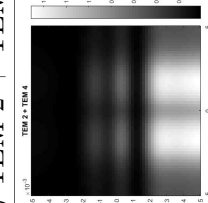
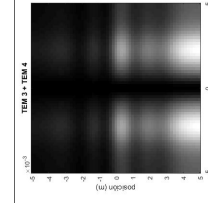
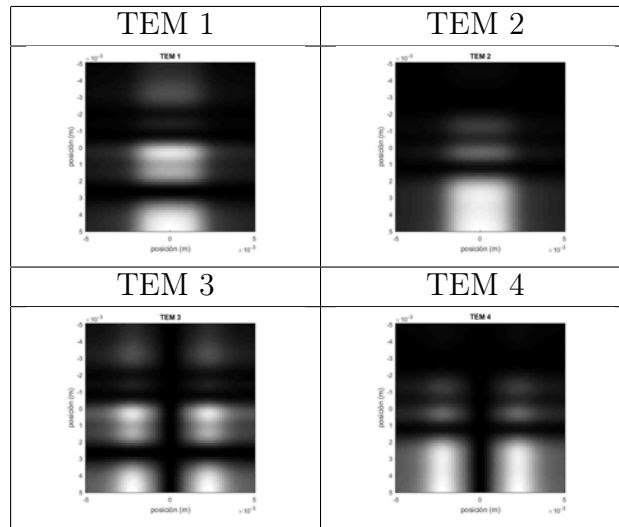
	1	2	3
2	 <p>(a) TEM 1 + TEM 2</p>		
3	 <p>(b) TEM 1 + TEM 3</p>	 <p>(c) TEM 2 + TEM 3</p>	
4	 <p>(d) TEM 1 + TEM 4</p>	 <p>(e) TEM 2 + TEM 4</p>	 <p>(f) TEM 3 + TEM 4</p>

Tabla 3.5: Gráfica de combinación de modos transversales para $\lambda/100$

Tabla 3.6: Gráfica de modos transversales $\lambda/1000$

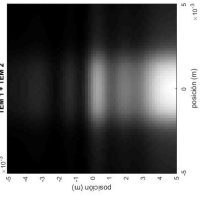
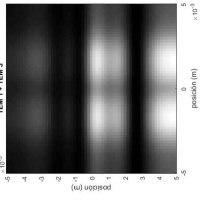
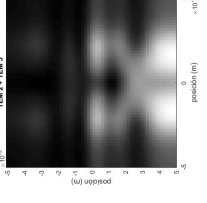
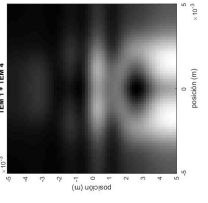
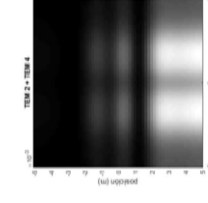
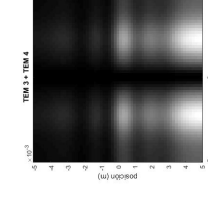
	1	2	3
2	 <p>(a) TEM 1 + TEM 2</p>		
3	 <p>(b) TEM 1 + TEM 3</p>	 <p>(c) TEM 2 + TEM 3</p>	
4	 <p>(d) TEM 1 + TEM 4</p>		

Tabla 3.7: Gráfica de combinación de modos transversales para $\lambda/1000$

3.3. Modos TEM con inclinación: patrón completo

Con el fin de mostrar el patrón de intensidad completo una vez incluida la aberración de los espejos inclinados, procedimos a cambiar el tamaño de la apertura para ver el patrón completo. Se observa que los patrones son cada vez menos definidos y resulta complicada una diferenciación, esto puede ser una consecuencia de los puntos N, en los que está dividida la malla, ya que al correr el programa estos definen la nitidez del patrón observado. En un trabajo futuro se puede refinar la forma de seleccionar los puntos a dividir la malla para tener una representación nítida si se varían las dimensiones de la cavidad.

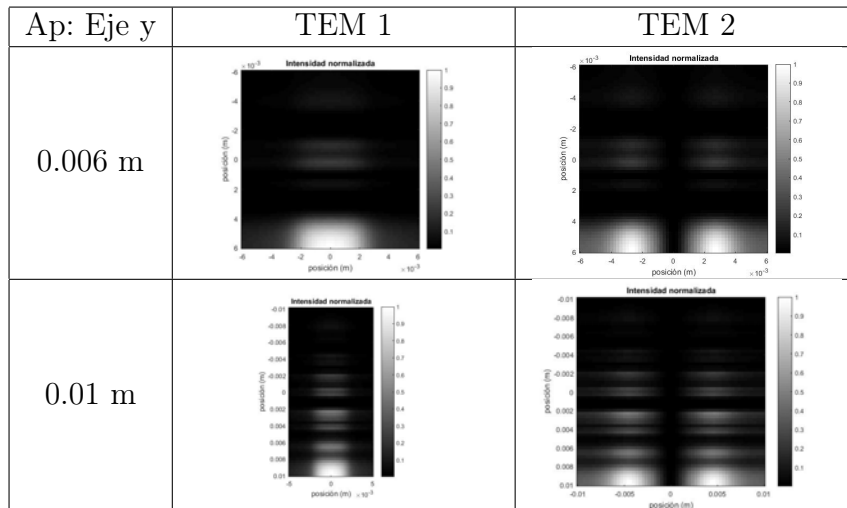


Tabla 3.8: Gráfica de modos TEM con inclinación de un ángulo de $\lambda/10$, se muestra la salida del patrón con dimensiones de apertura diferentes para mostrar el patrón completo.

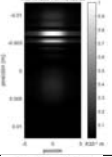
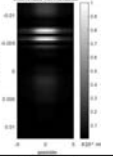
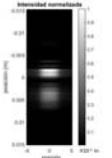
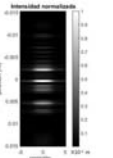
Ap: Eje y	TEM 1	TEM 2
0.006 m		
0.01 m		

Tabla 3.9: Gráfica de modos TEM con inclinación de un ángulo de $\lambda/10$, se muestra la salida del patrón con dimensiones de apertura diferentes para mostrar el patrón completo.

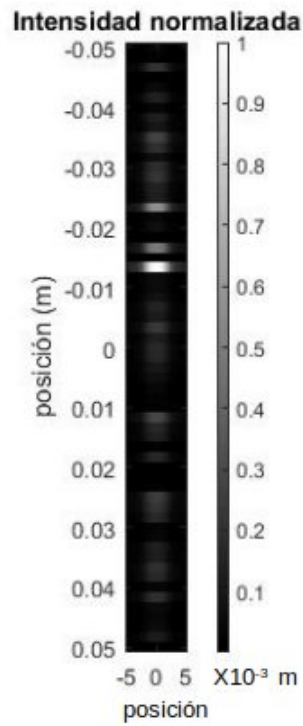


Figura 3.4: Modo TEM 1 con apertura en eje y de 0.05 m

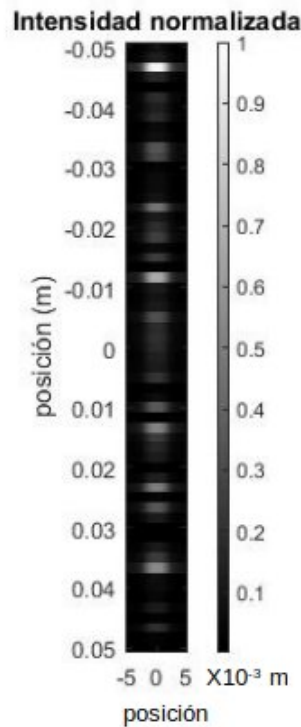


Figura 3.5: Modo TEM 2 con apertura en eje y de 0.05 m

3.4. Conclusiones del capítulo

La solución de la ecuación de Fresnel, requirió de la construcción de un algoritmo que permitiera hacer las iteraciones que dan lugar a los eigenvalores y en consecuencia los eigenvectores que representan el campo escalar. El artículo de Morrisey [17] presenta el método a seguir matemáticamente. Sin embargo, acceder a algún código mencionado en la literatura resultó infructuoso. Por ello, programamos nuestra propia versión de código para encontrar los modos relacionados.

Las ventajas de nuestro programa estriban en una construcción simple, que permite insertar parámetros geométricos necesarios para observar los patrones. No obstante, cuando se utilizó el kernel para modelar los espejos inclinados, hallamos que no permitía identificar a primera vista el orden del modo, correspondiente al patrón obtenido. En consecuencia, procedimos a construir un conjunto de combinaciones con los patrones obtenidos. Así, observamos que los patrones no correlacionan con el patrón observado en el láser.

Por este motivo, concluimos que las transiciones vistas en el láser, no son

de naturaleza tal que solo impliquen la inclinación de los espejos. Los patrones obtenidos (para diferentes ángulos) permiten observar que una alteración severa en intensidad; a consecuencia de la desviación del eje óptico principal. Aún así, las combinaciones de los diferentes patrones de intensidad (sin ponderar su amplitud) no mostraron correlación con los patrones observados en láser de prueba.

En futuros trabajos se puede refinar la forma de los elementos del kernel de propagación. A saber; modelar otro tipo de aberraciones o modificando el medio de la cavidad. En tanto se proporciona un código que puede ser libre de modificarse, útil didácticamente, que permita avanzar en la comprensión de la transición temporal de modos láser.

Capítulo 4

Modos híbridos y el algoritmo de correlación de imágenes

Detallamos en este capítulo sobre la observación sistemática de la emisión láser del He-Ne y sobre el procesamiento de imágenes utilizado para identificar algunas componentes modales. Presentamos cómo se registró la emisión singular del láser He-Ne a la temperatura del laboratorio (aprox. 20°C). De esta documentación se obtuvieron tres patrones representativos. Tales patrones se identificaron como una superposición con base de polinomios de Hermite-Gauss. Estos resultados fueron ilustrativos en el uso de una teoría preestablecida, y fue la motivadora en la búsqueda de una teoría que tratara de explicar la producción de tales patrones TEM atípicos.

4.1. Condiciones de observación

La Fig.4.1 muestra un esquema simplificado del arreglo utilizados para observar los patrones emitidos por el láser. El láser de He-Ne se montó sobre una plataforma horizontal y amortiguadora de vibraciones mecánicas. El haz láser viajaba, aprox. 3 m, hasta una pantalla translúcida de papel de estructura uniforme, libre de asperezas y rugosidades ("papel cebolla"). Atrás de la pantalla se colocó una cámara videograbadora (Canon: Rebel-Ti). El arreglo permitió obtener imágenes libres de efectos de perspectiva, distorsiones u otros artefactos identificados como fuentes de error. Observamos que los patrones TEM mutaban de un estado a otro de forma continua, suave y periódica. Al encender el láser, entre patrones la periodicidad promedio¹ fue de 0.67 ± 0.049 s (con un muestreo de $n = 15$); es decir, presentó un error de 7.3%. Con el fin de identificar la dirección del eje óptico del láser, se

¹Esta medición se realizó utilizando el programa de vídeo-análisis *Tracker-physics*.

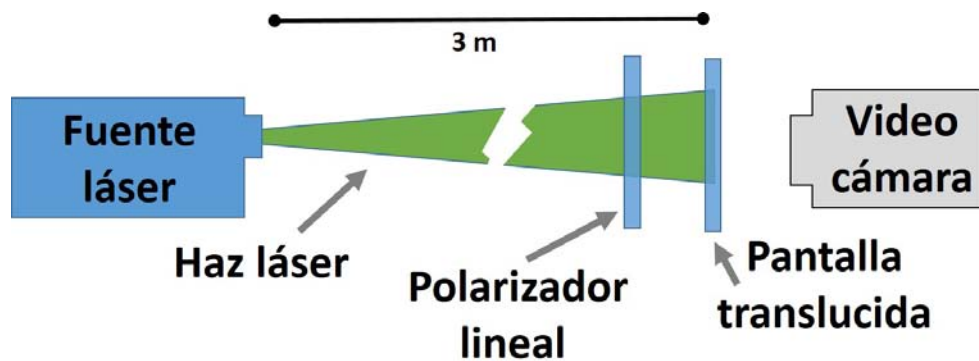


Figura 4.1: Diagrama del arreglo para observar la variación temporal y distributiva de la intensidad en los patrones TEM de un láser de He-Ne.

colocó un polarizador lineal (con su eje óptico vertical) antes de una pantalla translúcida. Observamos que la mutación de los patrones de emisión láser presentaba discontinuidades temporales. En la Fig. 4.2 se muestran algunos fotogramas representativos de la emisión láser.

Por otro lado, en un intento de manipular la salida del láser, utilizamos dióxido de carbono en estado sólido para disminuir la temperatura del láser hasta -78°C (termómetro piezoeléctrico, Trupper). Sin embargo, el único resultado observable fue la interrupción de la emisión láser. Es oportuno mencionar también que del análisis de la alimentación eléctrica del instrumento no se encontraron anomalías en la fuente de energía. De tal modo, se dedujo que los singulares patrones TEM son producto de un proceso dentro del medio y la cavidad óptica.

4.2. Algoritmo de reconocimiento de imágenes

De la videograbación de la evolución del patrón láser, se seleccionaron tres fotogramas representativos. Los patrones muestran claras diferencias morfológicas para identificarlos entre unos y otros. Además que resultan interesantes por presentar estructuras de "dona", típicas en patrones tipo $(0,1)^*$. Por lo que tales estructuras pueden presentar efectos asociados a modos híbridos de fase compleja: variaciones azimutales en el gradiente de intensidad, por ejemplo. En cualquier caso, comenzamos nuestro análisis en este punto.

A continuación explicaremos las etapas que conforman el algoritmo que designa a un fotograma como la suma ponderada de modos tipo Hermite-Gauss.

Etapa de captura de imágenes

Después de videgrabar la intensidad emitida del sistema láser; por inspección, se identificaron tres patrones. Entre ellos es clara la diferencia morfológica. Matemáticamente, se identificó el centro geométrico de la mancha dejada por la emisión y a su alrededor se definió un cuadrado. Estas imágenes se almacenaron y formaron la base de los datos iniciales. Con el fin de obtener una identificación clara y contar con toda la información de la distribución de intensidad en la imagen, los canales RGB (acrónimo del inglés de: rojo, verde y azul) se colapsaron en un solo canal. A esta imagen en escala de grises se le redujo el ruido aleatorio mediante un filtro de 10 píxeles de radio. Utilizar un filtro más amplio causa una pérdida significativa de la información, mientras que un filtro más reducido conserva ruido aleatorio. En la Fig. 4.2 se puede observar la mejoría en la distribución de la intensidad al filtrar los patrones seleccionados.

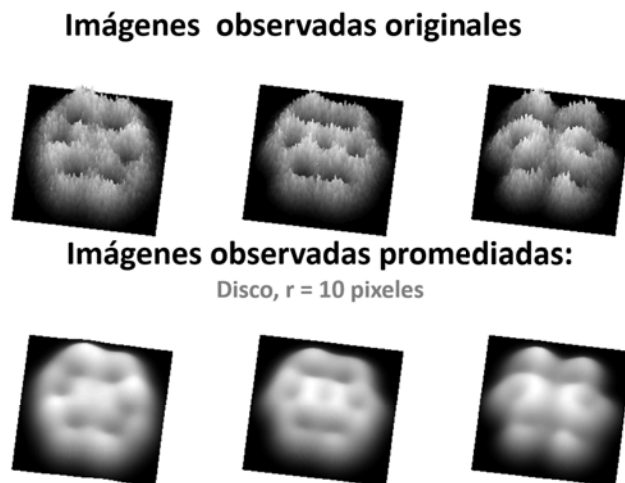


Figura 4.2: Vista de proyección ortográfica de los patrones láser seleccionados antes y después de aplicar un filtro elimina ruido aleatorio (en un radio de 10 píxeles).

Etapa de generación de base de datos teórica

Por otro lado, en *Matlab* se programó una base de datos teórica, a partir de los polinomios de Hermite-Gauss. Escribimos una función generadora de modos teóricos Hermite-Gauss; de tal forma que se acoplara a una función de dos variables espaciales/pixelares. Así, se pueden graficar en 3D los polinomios HG. Sin embargo, definimos que todas las visualizaciones se realizarían desde la posición cenital del observador; escalamos y definimos el número de

pixeles; de modo que imagen simulada y el fotograma del láser son de las mismas dimensiones matriciales. Se definió un gradiente de intensidad lineal y en grises. Finalmente, la imagen se almacena en memoria para su uso con el formato jpg. Este proceso primario permite obtener imágenes comparables a las proyectadas por el láser. Estos archivos temporales conformarán nuestra base de datos teórica.

Etapas de comparación entre imágenes teóricas TEM

Entonces, en nuestro programa cargamos la imagen a identificar. Luego, generamos la imagen simulada del orden $(0,0)$; las dos imágenes son comparadas por medio de la correlación; su valor máximo es almacenado en una nueva matriz; aquí llamada: matriz de comparación. Repetimos el proceso, pero variando el orden de la imagen simulada; en la secuencia $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, . . . , $(9,0)$; después se realiza el mismo proceso en la siguiente fila: $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, . . . , $(9,1)$. Se continúa con el proceso hasta alcanzar el valor $(9,9)$. Finalmente, se llenan todos los espacios de la matriz de comparación.

Etapas de comparación entre imágenes teóricas ponderadas

Ahora, buscamos el valor máximo dentro de la matriz de comparación. Tal celda corresponde al modo simulado que presenta mayor correlación entre la imagen observada y la colección teórica. Al identificar tal modo, se realiza nuevamente un proceso de correlación entre el fotograma del láser y la imagen simulada. Pero ahora, solo se realiza sobre un modo multiplicado por un número escalar; que representa la ponderación y físicamente se relaciona con la intensidad lumínica. En otros términos, se compara el fotograma contra una imagen simulada con diferente intensidad en sus elementos. Obteniendo un vector de comparación, donde su máximo representa el valor que debe multiplicarse al modo (previamente obtenido) para tener una imagen parecida al fotograma.

Etapas subsecuentes

En estas etapas se repite el proceso de comparación de imágenes teóricas TEM; pero tomando en cuenta la información previamente obtenida. Es decir, el fotograma es comparado con la base de datos, pero en toda la comparación se considera la presencia del modo previamente identificado y su valor de ponderación. Se obtiene una nueva matriz de comparación; lo que significa que su máximo identifica al siguiente modo. Con los dos modos y un

valor de ponderación, se construye el vector de comparación, del que extrae el segundo valor de ponderación, que corresponde al siguiente modo encontrado. Finalmente, repetimos este proceso; hasta encontrar el quinto modo y su valor de ponderación.

Mediante este proceso identificamos a los tres fotogramas como la suma de cinco modos HG ponderados, correspondientes.

4.2.1. Evaluación de los patrones obtenidos

Utilizamos una imagen de la literatura con el fin de evaluar la efectividad del algoritmo propuesto para la identificación de componentes de patrones TEM. Encontramos varios artículos que relatan sobre la reproducción de modos TEM de orden superior y combinados. De entre ellos, seleccionamos una fotografía nítida y carente de sobre-exposición; además donde el autor presentó su versión de componentes y una imagen modelada [8]. G. Machavariani y coautores muestran como obtuvieron en el laboratorio una distribución en campo lejano del modo $(0,1)^*$, mediante haces de Laguerre-Gauss, además utilizaron matrices de Jones (aunque no explican cómo) para mostrar un modelo teórico. Tanto la imagen experimental como la imagen teórica las utilizamos para comparar nuestro modelo. La Fig. 4.3 exhibe la fotografía obtenida en el laboratorio, el modelo propuesto por los autores de la referencia y el modelo propuesto por nosotros. Al analizar la imagen del laboratorio, en nuestro algoritmo obtuvimos un resultado satisfactorio.

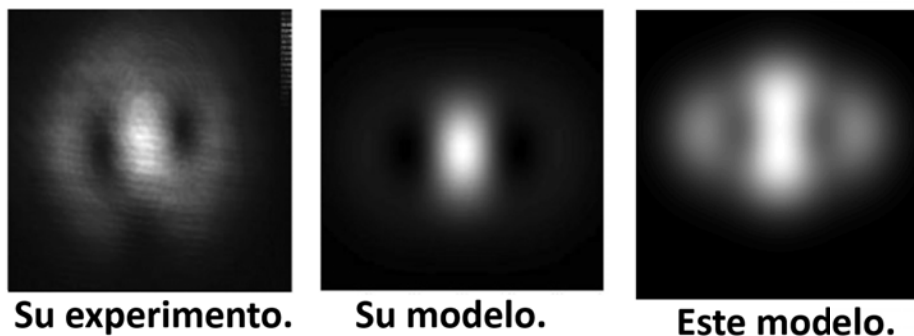


Figura 4.3: Fotografía experimental de la referencia [8], el modelo teórico propuesto por la referencia, y el modelo que proponemos.

La Fig.4.4 ilustra la suma ponderada de los modos componentes que resultan en nuestro modelo teórico propuesto. Aunque morfológicamente es cercana la semejanza entre la imagen experimental y de nuestro modelo, tam-

bién requiere una evaluación cuantitativa. Por lo que retomamos los valores máximos de correlación.

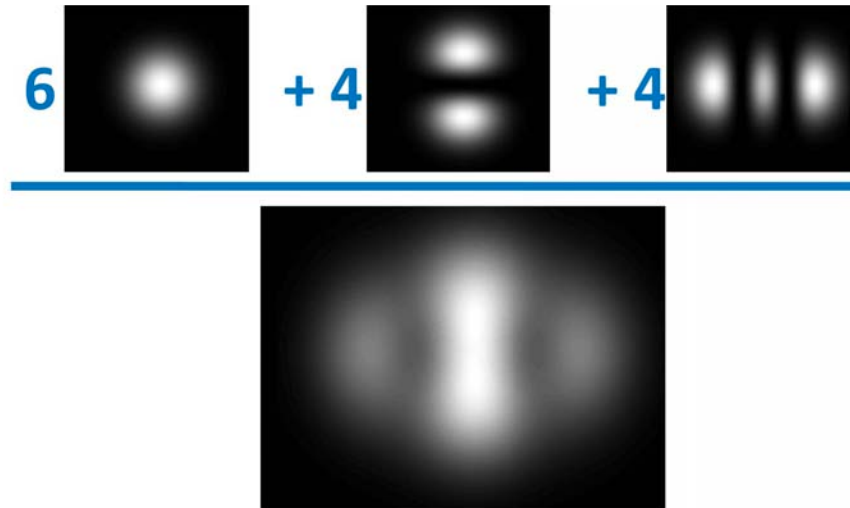


Figura 4.4: La suma de tres patrones TEM ponderados resultan en un modo híbrido morfológicamente similar al encontrado en la literatura.

Construimos una matriz de correlación-máxima donde se comparan tres imágenes: el fotograma experimental de la referencia, el modelo teórico de la referencia y nuestra propuesta. Obteniendo una matriz de 3×3 , donde la diagonal es la identidad, pues es la comparación de la imagen consigo misma. El resto de entradas matriciales indican –bajo un criterio matemático– la semejanza entre la imagen experimental contra las propuestas teóricas. Este tipo de matrices son popularmente utilizadas para evaluar el desempeño de programas de reconocimiento de patrones y aprendizaje automático. En nuestro caso, comprobamos que la correlación es conmutativa, lo cual es deseable en la comparación de patrones en imagen. Más aún, que el factor de correlación de nuestro modelo ($C = 0.87$) es ligeramente mayor que el del modelo teórico de la referencia ($C = 0.83$). Este resultado solo implica que el algoritmo propuesto es suficientemente adecuado para obtener las componentes TEM de las imágenes del láser de He-Ne, ver Fig. 4.5.

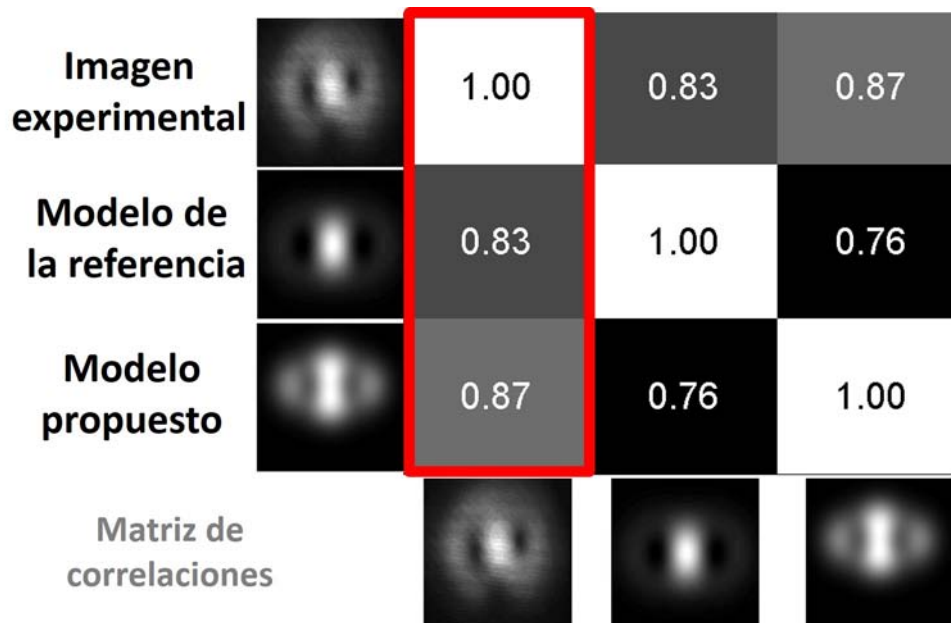


Figura 4.5: Componentes de la matriz de correlaciones máximas, donde se compara el grado de semejanza entre las imágenes. El modelo que proponemos cuenta con una correlación ligeramente superior al modelo de la literatura.

4.3. Escalares y componentes TEM de los patrones láser

Después de construir un algoritmo identificador de componentes HG y de su ponderación, y hacer una validación a través de una fuente externa. Utilizamos el algoritmo propuesto con los tres patrones separados del vídeo de emisión láser. Las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 presentan los resultados obtenidos; gráficamente se exhiben las cinco componentes TEM y los valores ponderados correspondientes.

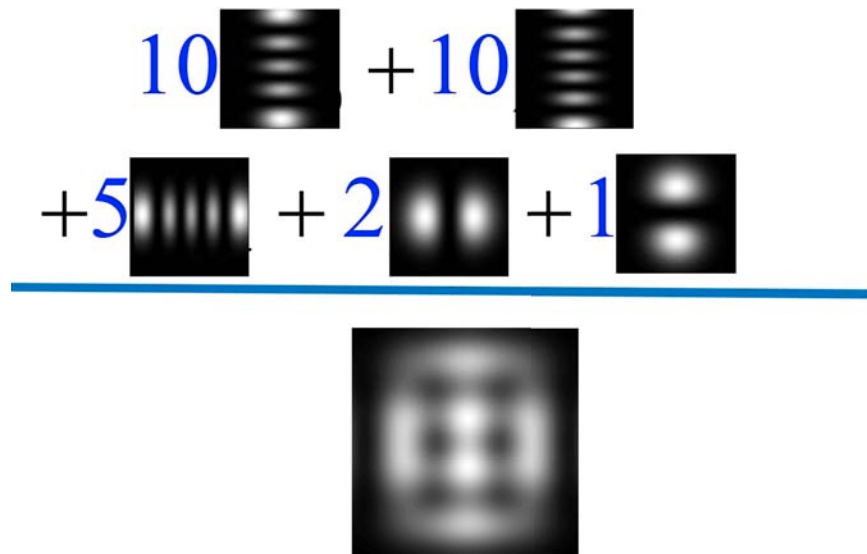


Figura 4.6: Componentes HG ponderados que modelan el patrón láser *No.1*.

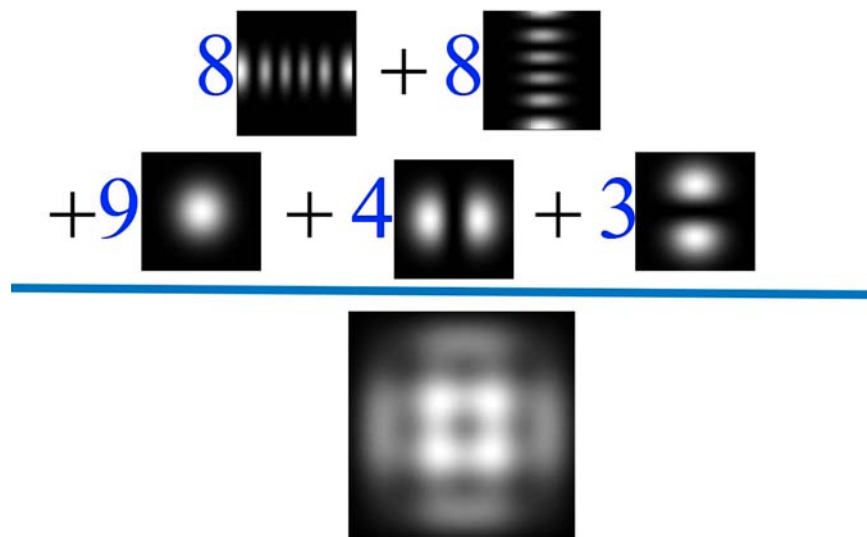


Figura 4.7: Componentes HG ponderados que modelan el patrón láser *No.2*.

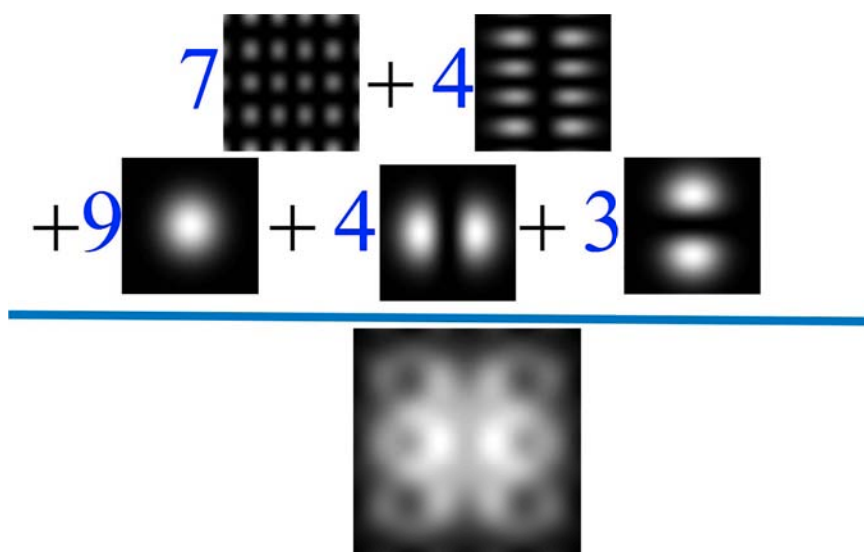


Figura 4.8: Componentes HG ponderados que modelan el patrón láser *No.3*.

4.4. Matriz de comparación

Con el propósito de comparar si efectivamente los modelos teóricos obtenidos son similares a la correspondiente fotografía del patrón láser y que se pueden discriminar del resto de modos fotografiados, se construyó otra matriz de correlación (de modo similar a como se describo en la sección 4.2.1).

En la matriz de correlación (de 3×3) se confrontaron tres fotografías del patrón láser contra tres modelos teóricos. Para obtener un mayor contraste y significación entre celdas, normalizamos a 100 % las entradas de la matriz, esto se muestra en la Fig. 4.9. Afortunadamente, encontramos que la mayor correlación se presentó en la fotografía del tercer patrón y su modelo asociado. Mejor aún, los mayores valores de correlación correspondieron a la comparación de fotografías y sus patrones asociados. Vale decir que es posible discriminar y descartar la correlación entre fotografías y patrones no-correspondientes. Sin embargo, idealmente se esperaba que la diagonal adquiriera valores muy cercanos a 100, mientras que el resto de entradas se aproximaran a cero. Tal condición ideal, mostraría la robustez del algoritmo. Reiteramos, aunque los valores de las celdas cruzadas son altos, se pueden discriminar de los valores de la diagonal. Con esto se muestra congruencia en el proceso de selección de patrones y su asociación al modelo teórico.

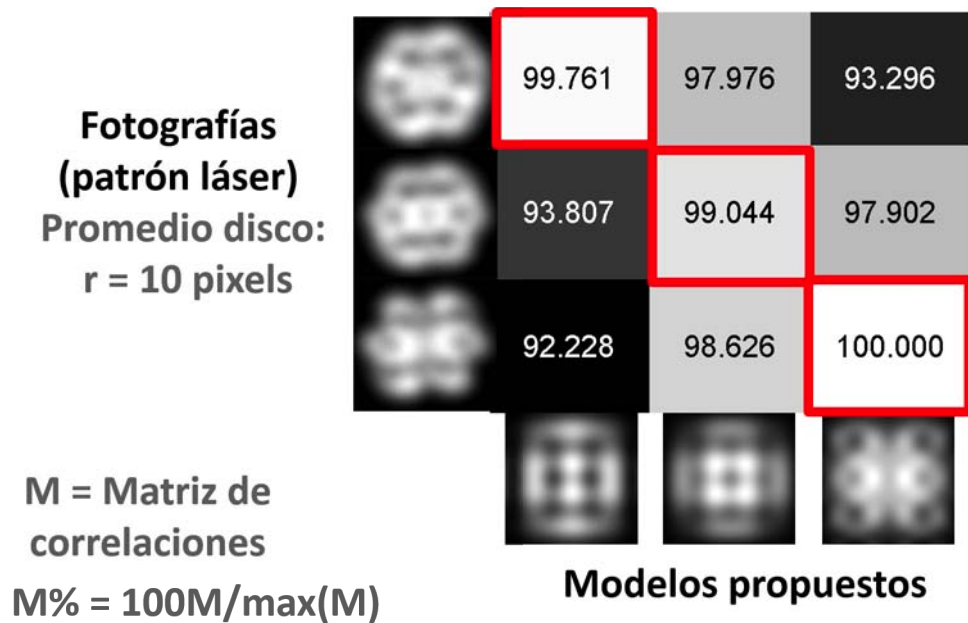


Figura 4.9: Matriz de comparación entre las fotografías de los patrones láser y los modelos teóricos asociados.

4.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo detallamos la observación y documentación las variaciones del patrón TEM-láser del He-Ne en cuestión. A partir de lo cual se separaron tres fotogramas. También comentamos sobre la construcción de un algoritmo para identificar estas imágenes como componentes lineales con base de polinomios HG. La validación de tal algoritmo se realizó mediante una imagen singular encontrada en la literatura. Finalmente, una cuantificación del reconocimiento cruzado entre los patrones TEM observados y los calculados. Si bien los resultados de correlación son los óptimos alcanzados, el ruido base (las correlaciones cruzadas) es alto. Futuros trabajos deberán considerar la utilización de cribas más sofisticadas. Por ejemplo, uso de redes neuronales, puntos morfológicamente estratégicos, coordenadas principales, entre otras perspectivas de análisis. Por otro lado, analizamos exhaustivamente el láser como instrumento, sin dañar su integridad. Pero se debe evaluar (a futuro) si se deben realizar estudios no-destructivos más profundos en el aparato.

Capítulo 5

Conclusiones generales y prospectiva del trabajo

Sobre el registro de los modos láser He-Ne

La técnica de registro de los patrones consistió en una videograbación de 30 min, de los cambios periódicos de los patrón TEM del láser, este tiempo es suficiente para el registro de los fotogramas mostrados en este trabajo. Estos fotogramas son analizados morfológicamente a través de del método de correlación de imágenes y son comparados con los patrones obtenidos de la simulación numérica. Se disminuyó la temperatura de la cavidad óptica con el fin de ver un cambio en la información del patrón observado, este proceso no brindó información significativa. Los fotogramas son adecuados para realizar nuestros estudios posteriores aunque, una tarea pendiente es la determinación del eje óptico.

Sobre la propuesta de procesamiento digital de imágenes

Expresar a las imágenes del láser como una suma ponderada de patrones Hermite-Gauss fue ilustrativa, y un buen inicio para analizar la teoría fundamental de la cavidad. Cada patrón láser separado del video se reescribió como una superposición de modos Hermite-Gauss, logrando una correlación superior al 93 % cuando se compara cada fotograma con el modelo respectivo. Si bien los efectos de ruido aleatorio evitaron obtener mayor contraste entre la identificación entre modos teóricos y los observados, alcanzamos indicios de la naturaleza del patrón. Por lo cual, en futuros trabajos se deberá realizar el análisis correspondiente a cada fotograma del vídeo mediante un sistema automático y en tiempo real. Además explorar el uso de otros algoritmos de identificación de patrones (valores propios, redes neuronales, entre otros) en procesamiento digital de imágenes. Su resultado principal – comprobar la superposición de modos sin un orden en los índices y sus ponderaciones – conllevó a buscar la naturaleza de los modos TEM, derivando en

indagar teóricamente en los parámetros de la cavidad que producen tales patrones. De hecho, el procesamiento realizado poco dice sobre los mecanismos que provocan la formación de los modos de orden superior y su superposición. La teorización de variables no-observables se requirió para conocer más a fondo sobre el fenómeno.

Sobre la propuesta de modelo mecánico

Antes de realizar una propuesta de la naturaleza de la cavidad óptica del láser en cuestión, desarrollamos un modelo mecánico preliminar. Tal modelo nos permitió entender las variaciones temporales de los modos normales en función de un parámetro físico; en este caso: la tensión directamente proporcional al tiempo. Los resultados del modelo permiten identificar que las variaciones internas de una cavidad o su medio de propagación alteran significativamente el patrón de los modos. Esta primera aproximación nos permitió avanzar en la propuesta de un modelo electromagnético; tanto en el desarrollo de herramientas matemáticas, como en la comprensión conceptual. En futuros trabajos, se deberá conjuntar los diferentes casos donde se presenten los cambios en dependencia a otras variables físicas (e.g. densidad) y en otras expresiones funcionales del tiempo.

Sobre la propuesta de modelo electromagnético-numérico

A partir de la ecuación de Fresnel se desarrolló un modelo paramétrico de donde se obtuvieron los patrones TEM en una cavidad. El modelo es flexible y permite introducir cambios en los parámetros geométricos de la cavidad; en nuestro caso, propusimos la variación en la inclinación relativa de los espejos. Obtuvimos imágenes que muestran algunas características de los patrones observados. Sin embargo, la superposición de los modos teóricos no muestra claramente la correlación entre los modos observados. Esta propuesta, como la del procesamiento de imágenes, es estática. Futuros trabajos deben tratar de alcanzar una representación temporal y continua, como la lograda en el modelo mecánico. Más aún, explorar otros parámetros físicos además de la inclinación de los espejos, como pueden ser variaciones en el medio óptico.

En general. Este trabajo muestra una exploración intensa sobre un objeto de estudio particular: los modos anómalos TEM en una cavidad. Resuelve preguntas específicas sobre el fenómeno observado. Pero está limitado, por lo que abre la oportunidad a una investigación complementaria. Es decir, sigue el proceso normal de investigación científica.

Anexos

Apéndice A

Códigos

A continuación, a modo de ser transparentes con los métodos utilizados en este trabajo, presentamos los códigos esenciales de los programas realizados. Debemos mencionar, que si bien realizamos una amplia documentación en los *scripts*, se omitieron los acentos en las palabras.

A.1. Código de soluciones de la cuerda a tensión constante y proporcional al tiempo

```
1 script
2
3 cuerda no variable
4
5 n=1
6 clear , clc ;
7 [x,y] = meshgrid (0:.01:1,0:.01:2*pi);
8 z= 2.*sin(x.*pi).*sin(y.*pi);
9 surf(x,y,z);
10
11 n=2
12 clear , clc ;
13 [x,y] = meshgrid (0:.01:1,0:.01:2*pi);
14 z= 2.*sin(2.*x.*pi).*sin(2.*y.*pi);
15 surf(x,y,z);
16
17 n=5
18 clear , clc ;
19 [x,y] = meshgrid (0:.01:1,0:.01:2*pi);
20 z= 2.*sin(5.*x.*pi).*sin(5.*y.*pi);
21 surf(x,y,z);
22
```

```

23 cuerda variable
24
25 n=1
26 clear , clc ;
27 [x,y] = meshgrid (0:.01:1,0:.01:2.*pi);
28 z= sin(1.*x.*pi).*(1.74).*(y.^(-0.25)).*sin(1.*(y.^(1.5)).*((pi)
    .^(-0.5)));
29 surf(x,y,z);
30
31 n=2
32 clear , clc ;
33 [x,y] = meshgrid (0:.01:1,0:.01:2.*pi);
34 z= sin(2.*x.*pi).*(1.74).*(y.^(-0.25)).*sin(2.*(y.^(1.5)).*((pi)
    .^(-0.5)));
35 surf(x,y,z);
36
37
38 n=5
39 clear , clc ;
40 [x,y] = meshgrid (0:.01:1,0:.01:2.*pi);
41 z= sin(5.*x.*pi).*(1.74).*(y.^(-0.25)).*sin(5.*(y.^(1.5)).*((pi)
    .^(-0.5)));
42 surf(x,y,z);

```

A.2. Código para identificación de modos por procesamiento de imagen

A.2.1. Función generadora de polinomios de Hermite

```

1 function y = poly_hermite(x,a)
2 %%
3 %funcion y = poly_hermite(a, x)
4 %sirve para evaluar el vector x con un polinomio de Hermite de
    grado a.
5 %en caso que el usuario no declare a, se tomara el grado 0 del
    polinomio
6 %de Hermite
7
8 %% la secuencia de los polinomios de Hermite fue verificada de la
    sig. ref.:
9 %"Mathematics – Schaums Mathematical Handbook of Formulas..."
    pag. 151.
10
11 switch nargin
12     case 0
13         error('Falta declarar el vector')
14     case 1

```

```

15     a = 0;
16 end
17
18 switch a
19     case 0
20         y = ones(size(x));
21     case 1
22         y = 2*x;
23     case 2
24         y = 4*(x.^2) - 2;
25     case 3
26         y = 8*x.^3 - 12*x;
27     case 4
28         y = 16*x.^4 - 48*x.^2 + 12;
29
30     case 5
31         y = 32*x.^5 - 160*x.^3 + 120*x;
32     case 6
33         y = 64*x.^6 - 480*x.^4 + 720*x.^2 - 120;
34     case 7
35         y = 128*x.^7 - 1344*x.^5 + 3360*x.^3 - 1680*x;
36
37     case 8 % desde este punto uso la funcion generadora
38             recurrente:
39         %  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ 
40         %  $H_8(x) = 2*x*H_7(x) - 2*8*H_6(x)$ 
41         y = 128*x.^7 - 14*(64*x.^6 - 480*x.^4 + 720*x.^2 - 120) - 1344*x
42         .^5 + 3360*x.^3 - 1680*x;
43
44     case 9 %  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ 
45         %  $H_9(x) = 2*x*H_8(x) - 2*9*H_7(x)$ 
46         y = 2*x.*(128*x.^7 - 14*(64*x.^6 - 480*x.^4 + 720*x.^2 - 120)
47         - 1344*x.^5 + 3360*x.^3 - 1680*x) - 2*9*(128*x.^7 - 1344*x.^5 + 3360*
48         x.^3 - 1680*x);
49
50     otherwise
51         error('grado del polinomio demasiado grande para esta
52             funcion')
53 end
54 % fin de la funcion

```

A.2.2. Función generadora de modos TEM-HG

```

1 function z_out = modos_tem_hermite(xn, yn)
2 %% modos_tem_hermite(xn, yn, N) es el modo TEM basado en
3 polinomios de
4 % Gauss-Hermite con el grado xn y yn; si N = 1, se normalizan
5 todos los

```

```

4 % polinomios , en caso de omision o N = 0 los polinomios no se
   normalizan;
5 % y para otros casos se muestra mensaje de error
6 %
7 %HG_{nm}(x,y,z) \propto E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{
   \{(x^2+y^2)\{\omega(z)^2\}H_n\left(\frac{\sqrt{2}x\{\omega(z)\}
   \right)H_m\left(\frac{\sqrt{2}y\{\omega(z)\}\right)}{ik\frac{\{(x^2+y^2)\{2R(z)\}+i\psi(z)\}}
8 %
9 % x, y son las dimensiones espaciales , \omega es el radio para el
   cual el termino gaussiano cae hasta 1/e en un
10 % eje , R es radio de curvatura del frente de onda, psi es la fase
   de Gouy
11 %
12 % Esta funcion permite calcular el modo TEM de un laser
13 % basado en el modelo Gauss-Hermite
14 % Esta funcion es directamente dependiente de la funcion:
   poly_hermite
15 % en esa funcion estan los polinomios de Hermite hasta grado 9
16 % Por lo cual, se pueden obtener diferentes combinaciones x, y de
   modos
17 % del 0,0 al 9,9
18
19 switch nargin
20     case 0 %% el modo TEM_{00} (modo gaussiano) esta
   predeterminado
21         xn= 0;
22         yn = 0;
23
24     case 1
25         yn = 0;
26 end
27
28 %omega = .9; %insertando el valor 2 se ve mal la imagen, con
   sqrt(2) medio
29 % aceptable , con 1 se ve bien la imagen.
30 %k = 1;
31 %z = 1;
32 %zR = 1;
33 %R = 1;
34
35 cuadro = 3; %tamano de cuadro donde se grafica , valores mas
   grandes no
36 % aportan mas informacion pues las polinomios son cero por
37 % arriba de 3 unidades.
38 paso =0.01;
39 [x, y] = meshgrid(-cuadro:paso:cuadro , -cuadro:paso:cuadro);
40
41 % esto calcula el campo, para calcular la intensidad se requiere

```

```

    elevar al
42 % cuadrado
43
44 z_x = poly_hermite(sqrt(2)*x, xn).*exp(-x.^2);
45 z_y = poly_hermite(sqrt(2)*y, yn).*exp(-y.^2);
46
47 %HAY UN FACTOR DE ESCALA ( sqrt(2)/omega) QUE DEBO CUIDAR, PUES
    LE DA AL
48 %TRASTE A LAS SIMULACIONES
49
50 % z_x = poly_hermite((sqrt(2)*x/omega), xn).*exp(-(x/omega).^2);
51 % z_y = poly_hermite((sqrt(2)*y/omega), yn).*exp(-(y/omega).^2);
52
53 z = z_x.*z_y;
54
55 %* exp(-1i*(k*z - (1+xn+yn)*atan(z/zR) + k*(x.^2 + y.^2)/(2*R))
    );
56 z_out = z;
57
58 %% Referencias
59 %% http://www.rp-photonics.com/hermite\_gaussian\_modes.html

```

A.2.3. Función de comparación por correlación de imágenes

```

1 %% Guion para obtener una matriz con resultados de correlacion
2 % formada con una base de modos-base Hermite-Gauss y comparado
    con una imagen de referencia
3
4 % Vicente Torres Zuniga, fecha: 30 de mayo 2013
5
6 close all; clear; clc; %Cierra todas las ventanas emergentes,
    limpia la memoria y la pantalla
7 tic
8 % definicion de parametros
9 paso = 1; limite = 1; %parametros de la matriz de salida
10 set(0, 'DefaultFigureVisible', 'off'); %dejan de aparecer las
    ventanas de las figuras, con lo que se gana velocidad en el
    programa
11
12 Matriz_sal(limite) = 0;
13
14 referencia = imread('referencia.jpg'); %Lectura de archivos de
    imagen
15 hh = fspecial('disk', 10);
16 ref_fft = imfilter(referencia, hh); %filtro promedio
17 % ref_fft=(255/max(max(ref_fft2)))*ref_fft2;
18
19 [x, y] = meshgrid(-3:0.01:3, -3:0.01:3);

```



```

20
21 for a = 1:paso:limite
22     for b = 1:paso:limite
23
24         %cargar polinomio de hermite
25         z1 = (modos_tem_hermite(4,0)).^2; % un modo de
intensidad TEM
26         % 4,0
27         z2 = (modos_tem_hermite(0,5)).^2; % un modo de intensidad
TEM
28         % 0,5
29         z3 = (modos_tem_hermite(0,4)).^2; % un modo de intensidad
TEM
30         % 0,4
31         z4 = (modos_tem_hermite(1,0)).^2; % un modo de intensidad
TEM
32         % 1,0
33         z5 = (modos_tem_hermite(0,1)).^2; % un modo de intensidad
TEM
34         % 0,1
35
36         z1 = z1/max(max(z1)); % normalizamos los modos para poder
trabajar comodamente
37         z2 = z2/max(max(z2));
38         z3 = z3/max(max(z3));
39         z4 = z4/max(max(z4));
40         z5 = z5/max(max(z5));
41
42         Z = 10*z1 + 10*z2 + 5*z3 + 2*z4 + 1*z5; % correlacion =
0.89614;
43
44         %           Z = 4*z1 + 4*z2 + 6*z3 + 4*z4 + 2*z5; %
correlacion = 0.89614;
45         %           Z = 4*z1 + 4*z2 + 6*z3 + 4*z4 + 2*z5; % correlacion
= 0.89614;
46         % 7,9 correlacion de 0.74117
47         %
48
49         Z = Z/max(max(Z)); % normalizamos, para que la imagen
tenga el intervalo de tonos correcto
50
51         %% Creando la imagen
52         h = figure('Name','Modos laser TEM solitario');
53         %h = figure('Name','Modos laser TEM solitario','Color',
[0 0 0]);
54
55         surf(x, y, Z);
56         eje = 2;
57         axis([-eje eje -eje eje 0 1.1]) % veo la imagen desde

```

```

58     arriba
        axis square % evito que se vea asimetrica la imagen
debido a escalas diferentes
59     axis off
60
61     AZ = 0; EL = 90; % comandos para ver el equivalente de la
seccion
62     % transversal del haz laser
63     view(AZ,EL);
64
65     % load('verdoso','mycmap') % utilizo una paleta de
colores
66     % % personalizada: va del
negro hasta el
67     % % verde claro
68     % set(gcf,'Colormap','mycmap') % colormap gray
69
70     colormap(gray)
71
72     shading interp % suavizo la presentacion la transicion
entre regiones
73     set(gcf,'InvertHardcopy','off')
74
75     archivo = 'patron1';
76     print(h,'-djpeg','-r300', archivo) % se crea una imagen
jpg de 300 dpi de
77     % resolucion, con el nombre de la
78     % cadena archivo
79     close all
80     % reabrimos la imagen y usamos lo que necesitamos
81
82     temporal1 = imread('patron1.jpg'); % cargo la imagen de
trabajo
83     temporal2 = temporal1(:,:,1); % aseguro con quedarme con
un solo canal de la imagen
84     % LOS VALORES DE MATRIZ QUE DEFINEN EL CUADRO HAY QUE
AJUSTARLOS,
85     % NO SE SI DEPENDEN DE LAS CARACTERISTICAS DE LA PANTALLA
DONDE
86     % ESTOY TRABAJANDOS
87
88     temporal3 = imcrop(temporal2,[(718) (368) (1013) (1000)])
;
89
90     patron1 = temporal3;
91
92     Z_img = imresize(temporal3, [300, 300]); % ajusto el
tamano de la matriz para poder hacer la comparacion
93     Z_fft = (Z_img);

```

```

94
95     Matriz_sal(a, b) = corr2(Z_fft, ref_fft);
96     % Error = std2(Z_fft, ref_fft);
97
98     end
99 end
100
101 % visualizar la matriz dicha
102 % Creando la matriz para visualizar
103 vizual = abs(Matriz_sal); % modulo de los numeros complejos
104 imagesc(vizual); % crea una matriz de colores de los valores
105 colormap(gray); % escala de grises para los valores
106 %% poner los valores en la imagen de la matriz
107 textStrings = num2str(vizual(:), '%0.5f'); % crea cadenas de la
    matriz de valores
108 textStrings = strtrim(cellstr(textStrings)); % Retira espacios
    basura
109 [x, y] = meshgrid(1:limite); % crea cordenadas x-y
110 hStrings = text(x(:), y(:), textStrings(:), 'HorizontalAlignment',
    'center');
111 midValue = mean(get(gca, 'CLim'));
112 textColors = repmat(vizual(:) < midValue, 1, 3); % Define el
    umbral del color de la letra
113 set(hStrings, {'Color'}, num2cell(textColors, 2)); % Cambia el color
    del texto
114 set(hStrings, 'FontSize', 10)
115 set(gca, 'FontSize', 10)
116 set(gcf, 'InvertHardcopy', 'on')
117 %
118 archivo = 'respuesta_patronkk';
119 print(h, '-djpeg', '-r300', archivo) % se crea una imagen jpg de
    300 dpi de la matriz formada
120 set(0, 'DefaultFigureVisible', 'on'); % dejan de aparecer las
    ventanas de las figuras, con lo que se gana velocidad en el
    programa
121 toc
122 % fin del guion

```

A.3. Código de simulación de modos TEM

```

1 % Programa para encontrar eigenvalores y eigenvectores, resonador
    inclinado, con la cuadratura gaussiana.
2 clc; clearvars; close all
3
4 % Medidas del resonador (m)
5 LxDesign = 20;
6 LyDesign = 20;
7

```

```

8 %R1 = Radio resonador de salida
9 %R2 = Radio reflector primario
10 % Valores de entrada radio de curvatura (m)
11 R1x = -47.619;
12 R1y = -47.619;
13 R2x = 67.6192;
14 R2y = 67.6192;
15
16 % Radio o longitud de apertura (m)
17 ax = 0.00498;
18 ay = 0.00498; %*0.999999;
19
20 % Aumento
21 Mx = 1.; %42;
22 My = 1.; %42;
23
24 % Longitud de Onda (m)
25 lambda = 5.2e-7;
26
27 %Delta, Elemento del kernel, resonador inclinado
28 %deltax = lambda/12;
29 deltax = lambda/200;
30 N=61; % puntos en eje de la malla
31
32 [xi, wi]=qrule(N); %Abcisas de la malla en eje x
33 [yi, wyi]=qrule(N); %Y
34
35 % Calcular valores g del resonador
36 g1x = 1; %- LxDesign/R1x;
37 g2x = 1; % LxDesign/R2x;
38 g1y = 1; % LyDesign/R1y;
39 g2y = 1; % LyDesign/R2y;
40
41 % Elementos de la matriz de transferencia ABCD para un resonador
    confocal.
42 Ax = 2 * g1x * g2x - 1;
43 Ay = 2 * g1y * g2y - 1;
44
45 % Si K=H*Fa*Fb*Eab*T (Kernel espejos inclinados) entonces:
46
47 % Fa=zeros(1,N*N); %Pre-allocar la memoria en una matriz llena de
    0 de dim NxN
48 %
49 %
50 % Fb=zeros(1,N*N);
51
52 % Variables iniciales
53 u(N*N) = 0;
54 v(N*N) = 0;

```

```

55 i(N*N) = 0;
56 j(N*N) = 0;
57 Hijuv = zeros(N*N);
58 ll = 0;
59
60 % Valores Bx
61 BxDesign = 2 * g2x * LxDesign;
62 %N. de Fresnel para cavidad
63 Nx = ax^2 / (lambda * BxDesign);
64
65 %By
66 ByDesign = 2 * g2y * LyDesign;
67 %N. de Fresnel
68 Ny = ay^2 / (lambda * ByDesign);
69
70 % Mapear 2d a una columna par resolver eigenvalores en Matlab.
71 seqU = 1; seqV = 1;
72 for a = 1 : N*N
73     u(a) = seqU;
74     v(a) = seqV;
75     seqV = seqV + 1;
76     if mod(a,N) == 0
77         seqU = seqU + 1;
78         seqV = 1;
79     end
80 end
81 seqI = 1; seqJ = 1;
82 for b = 1 : N*N
83     i(b) = seqI;
84     j(b) = seqJ;
85     seqJ = seqJ + 1;
86     if mod(b,N) == 0
87         seqI = seqI + 1;
88         seqJ = 1;
89     end
90 end
91
92 %H del kernel
93 H = -1i .* sqrt(Nx .* Ny);
94
95 for a = 1 : N*N
96     for b = 1 : N*N
97         % Parte del kernel que modela el resonador inclinado
98         con
99         % delta definido en los valores iniciales , sin esta
100         parte se
101         % tiene el resonador plano
102
103     Txij = exp(1i.*pi.*Ax.*Nx.*(xi(i(a))+xi(u(b))));

```

```

102     Tyij = exp(1i.*pi.*Ax.*Nx.*(deltay./LyDesign).*(yi(j(a
103     ))+yi(v(b)))));
104     % Fij = exp(i*pi*Ax*Nx*xi^2 + i*pi*Ay*Ny*yj^2)
105     Fij = exp(1i .* pi .* Ax .* Nx .* xi(i(b)).^2 +...
106     1i .* pi .* Ay .* Ny .* yi(j(b)).^2);
107
108     % Fuv = exp(i*pi*Ax*Nx*xu^2 + i*pi*Ay*Ny*yv^2)
109     Fuv = exp(1i .* pi .* Ax .* Nx .* xi(u(a)).^2 +...
110     1i .* pi .* Ay .* Ny .* yi(v(a)).^2);
111
112     % Eijuv = exp(-2i*pi*[Nx*xi*xu + Ny*yj*jv])
113     Eijuv = exp(-1i .* 2 .* pi .* ...
114     (Nx .* xi(i(b)) .* xi(u(a)) + ...
115     Ny .* yi(j(b)) .* yi(v(a))));
116
117     % Wij = wi * wyi
118     Wij = wi(i(b)) .* wyi(j(b));
119
120 % u(xi)*V = sum(i = 1, j = 1 to #N; i = 2, j = 1 to #N;...) Hij *
121     u(xi)
122     Hijuv(a,b) = H .* Wij .* Fij .* Fuv .* Eijuv .* Txij
123     .* Tyij;
124
125     end
126
127 % Determinar eigenvalores o eigenvectores
128 [eigMode2d , eigValue2d] = eig(Hijuv(:, :));
129 eigValue2d = diag(eigValue2d);
130
131 % Magnitud de eigenvalor
132 eigValueMag2d = (abs(eigValue2d)) .^2;
133
134 % Ordenar eigenvalores por magnitud
135 [eigV2d , ind2d]=sort(eigValueMag2d , 'descend');
136
137 % Ordenar eigenvalores complejos
138 eigValue2dSort=eigValue2d(ind2d);
139
140
141 % valor absoluto del eigenvalor = magnitud;
142
143 eigValueMag2dSort = (abs(eigValue2dSort)) .^2;
144
145
146
147 %N

```

```

148 nmodes = N^2;
149 meshNo = N;
150
151 fieldAll = zeros(meshNo, meshNo, nmodes);
152 Iall = zeros(meshNo, meshNo, nmodes);
153 phaseAll = zeros(meshNo, meshNo, nmodes);
154 eigenAll = zeros(meshNo, nmodes);
155
156 for ort = 1 : nmodes
157     k = 1;
158     for nn = 1 : meshNo;
159         for mm = 1 : meshNo
160             k = k + 1;
161             fieldAll(nn, mm, ort) = eigMode2d(mm+((nn-1)*meshNo),
162             ort);
163         end
164     end
165     % Intensidad
166     Iall(:, :, ort) = (sqrt(real(fieldAll(:, :, ort)).^2 + ...
167     imag(fieldAll(:, :, ort)).^2)).^2 ...
168     ./ max(max((sqrt(real(fieldAll(:, :, ort)).^2 + ...
169     imag(fieldAll(:, :, ort)).^2)).^2));
170     % Fase
171     phaseAll(:, :, ort) = angle(fieldAll(:, :, ort));
172 end
173 % disp('order resonator N...')
174 modeOrder = (ind2d(1:nmodes))';
175 % fprintf(' %a %a %a %a %a | %a %a %a %a %a \n', modeOrder);
176 % disp(' ')
177 % disp('ordered axial (maximum) eigenvalue')
178 % fprintf(' %0.6f %0.6f %0.6f %0.6f %0.6f \n', abs(eigValue2dSort
179     (1:N)));
180 % disp(' ')
181 Iorder = zeros(N, N, nmodes);
182 fieldOrder = zeros(N, N, nmodes);
183 phaseOrder = zeros(N, N, nmodes);
184
185 % Ordenar modos de acuerdo con menor energia
186 for ll = 1 : nmodes
187     Iorder(:, :, ll) = Iall(:, :, modeOrder(ll));
188     fieldOrder(:, :, ll) = fieldAll(:, :, modeOrder(ll));
189     phaseOrder(:, :, ll) = phaseAll(:, :, modeOrder(ll));
190 end
191
192 % Modo orden menor, Tem00
193 figure(1); plot(xi.*ax, Iorder(round(N/2), :, 1) ./ max(Iorder(round(N
194     /2), :, 1)));

```

```

194 title('Intensidad Normalizada'); xlabel('posicion (m)');
195 grid; axis tight; shg
196
197 figure(2); imagesc(xi.*ax,yi.*ax,Iorder(:,:,1)); title('
    Intensidad normalizada')
198 xlabel('posicion (m)'); ylabel('posicion (m)'); colorbar; axis
    image; shg
199
200 % Modo 2
201 figure(4); imagesc(xi.*ax,yi.*ax,Iorder(:,:,2)); title('
    Intensidad normalizada')
202 xlabel('posicion (m)'); ylabel('posicion (m)'); colorbar; axis
    image; shg
203 % Modo 3
204 figure(6); imagesc(xi.*ax,yi.*ax,Iorder(:,:,3)); title('
    Intensidad normalizada')
205 xlabel('posicion (m)'); ylabel('posicion (m)'); colorbar; axis
    image; shg
206
207 %..De esta manera se calculan todos los modos.

```

Es necesario correr el programa **qrule** de Matlab, a la par de nuestro programa, esto con el fin de obtener las abscisas asociadas a la cuadratura gaussiana.

```

1 function [bp,wf]=qrule(n,wfun,alpha,beta)
2 %QRULE compute abscissas and weight factors for Gaussian
    quadratures
3 %
4 %CALL: [bp,wf]=qrule(n,wfun,alpha,beta)
5 %
6 % bp = base points (abscissas)
7 % wf = weight factors
8 % n = number of base points (abscissas) (integrates a (2n-1)th
    order
9 %     polynomial exactly)
10 %wfun = weight function%
11 % 1 p(x)=1 a=-1, b=1 Legendre (
    default)
12 % 2 p(x)=1/sqrt((x-a)*(b-x)), a=-1, b=1 Chebyshev of
    the
13 %
    first kind
14 % 3 p(x)=sqrt((x-a)*(b-x)), a=-1, b=1 Chebyshev of
    the
15 %
    second kind
16 % 4 p(x)=sqrt((x-a)/(b-x)), a=0, b=1
17 % 5 p(x)=1/sqrt(b-x), a=0, b=1
18 % 6 p(x)=sqrt(b-x), a=0, b=1

```



```

19 %      7  p(x)=(x-a)^alpha*(b-x)^beta  a =-1,  b = 1 Jacobi
20 %                                     alpha, beta >-1 (default
    alpha=beta=0)
21 %      8  p(x)=x^alpha*exp(-x)        a = 0,  b = inf
    generalized Laguerre
22 %      9  p(x)=exp(-x^2)             a =-inf, b = inf Hermite
23 %     10  p(x)=1                     a =-1,  b = 1 Legendre (
    slower than 1)
24 %
25 % The Gaussian Quadrature integrates a (2n-1)th order
26 % polynomial exactly and the integral is of the form
27 %          b          n
28 %      Int ( p(x)* F(x) ) dx = Sum ( wf_j* F( bp_j ) )
29 %          a          j=1
30 % See also  gaussq
31
32 % Reference
33 % wfun 1: copied from grule.m in NIT toolbox, see ref [2]
34 % wfun 2-6: see ref [4]
35 % wfun 7-10: Adapted from Netlib routine gaussq.f see ref
    [1,3]
36 %
37 % [1] Golub, G. H. and Welsch, J. H. (1969)
38 % 'Calculation of Gaussian Quadrature Rules'
39 % Mathematics of Computation, vol 23,page 221-230,
40 %
41 % [2] Davis and Rabinowitz (1975) 'Methods of Numerical
    Integration', page 365,
42 % Academic Press.
43 %
44 % [3]. Stroud and Secrest (1966), 'gaussian quadrature formulas',
45 % prentice-hall, Englewood cliffs, n.j.
46 %
47 % [4] Abramowitz and Stegun (1954) ''
48
49 % By Bryce Gardner, Purdue University, Spring 1993.
50 % Modified by Per A. Brodtkorb 19.02.99 pab@marin.ntnu.no
51 % to compute other quadratures than the default
52 if nargin < 4 | isempty(beta),
53     beta=0;
54 end
55
56 if nargin < 3 | isempty(alpha),
57     alpha=0;
58 end
59 if alpha <=-1 | beta <=-1,
60     error('alpha and beta must be greater than -1')
61 end
62

```

```

63 if nargin < 2 | isempty(wfun),
64     wfun=1;
65 end
66
67
68 switch wfun, %
69     case 1,
70         % This routine computes Gauss base points and weight factors
71         % using the algorithm given by Davis and Rabinowitz in '
72         % Methods
73         % of Numerical Integration', page 365, Academic Press, 1975.
74         bp=zeros(n,1); wf=bp; iter=2; m=fix((n+1)/2); e1=n*(n+1);
75         mm=4*m-1; t=(pi/(4*n+2))*(3:4:mm); nm=(1-(1-1/n)/(8*n*n));
76         xo=nm*cos(t);
77         for j=1:iter
78             pkm1=1; pk=xo;
79             for k=2:n
80                 t1=xo.*pk; pkp1=t1-pkm1-(t1-pkm1)/k+t1;
81                 pkm1=pk; pk=pkp1;
82                 den=1-xo.*xo; d1=n*(pkm1-xo.*pk); dpn=d1./den;
83                 d2pn=(2.*xo.*dpn-e1.*pk)./den;
84                 d3pn=(4*xo.*d2pn+(2-e1).*dpn)./den;
85                 d4pn=(6*xo.*d3pn+(6-e1).*d2pn)./den;
86                 u=pk./dpn; v=d2pn./dpn;
87                 h=-u.*(1+(.5*u).*(v+u.*(v.*v-u.*d3pn./(3*dpn))));
88                 p=pk+h.*(dpn+(.5*h).*(d2pn+(h/3).*(d3pn+.25*h.*d4pn)));
89                 dp=dpn+h.*(d2pn+(.5*h).*(d3pn+h.*d4pn/3));
90                 h=h-p./dp; xo=xo+h;
91             end
92             bp=-xo-h;
93             fx=d1-h.*e1.*(pk+(h/2).*(dpn+(h/3).*(...
94             d2pn+(h/4).*(d3pn+(.2*h).*d4pn)));
95             wf=2*(1-bp.^2)./(fx.*fx);
96             if (m+m) > n, bp(m)=0; end
97             if ~(m+m) == n, m=m-1; end
98             jj=1:m; n1j=(n+1-jj); bp(n1j)=-bp(jj); wf(n1j)=wf(jj);
99             % end
100
101     case 2, % p(x)=1/sqrt((x-a)*(b-x)), a=-1 and b=1 (default)
102         j=[1:n];
103         wf = ones(1,n) * pi / n;
104         bp=cos((2*j-1)*pi/(2*n));
105
106     case 3, % p(x)=sqrt((x-a)*(b-x)), a=-1 and b=1
107         j=[1:n];
108         wf = pi/(n+1) * sin(j*pi/(n+1)).^2;
109         bp=cos(j*pi/(n+1));
110

```

```

111 case 4, %p(x)=sqrt((x-a)/(b-x)), a=0 and b=1
112     j=[1:n];
113     bp=cos( (2*j-1)*pi /2/ (2*n+1) ).^2;
114     wf=2*pi.*bp/(2*n+1) ;
115
116 case 5, %p(x)=1/sqrt(b-x), a=0 and b=1
117     [bp wf]=grule(2*n);
118     wf(bp<0)=[];
119     wf=wf*2;
120     bp(bp<0)=[];
121     bp=1-bp.^2;
122
123 case 6, %p(x)=sqrt(b-x), a=0 and b=1
124     [bp wf]=grule(2*n+1);
125     wf(bp<=0)=[];
126     bp(bp<=0)=[];
127     wf=2*bp.^2.*wf;
128     bp=1-bp.^2;
129
130 case {7,8,9,10} ,%
131     %7 p(x)=(x-a)^alpha*(b-x)^beta a=-1 b=1 Jacobi
132     %8 p(x)=x^alpha*exp(-x) a=0, b=inf generalized Laguerre
133     %9 p(x)=exp(-x^2) a=-inf, b=inf Hermite
134     %10 p(x)=1 a=-1 b=1 Legendre slower than 1
135     % this procedure uses the coefficients a(j), b(j) of the
136     % recurrence relation
137     %
138     % 
$$b_j p_j(x) = (x-a_j) p_{j-1}(x) - b_{j-1} p_{j-2}(x)$$

139     %
140     %
141     % for the various classical (normalized) orthogonal
142     % polynomials,
143     % and the zero-th moment
144     % 
$$\text{muzero} = \int w(x) dx$$

145     %
146     % of the given polynomial's weight function w(x). since
147     % the polynomials are orthonormalized, the tridiagonal matrix
148     % is guaranteed to be symmetric.
149     %
150     %
151     % the input parameter alpha is used only for laguerre
152     % and jacobi polynomials, and the parameter beta is used only
153     % for jacobi polynomials. the laguerre and jacobi polynomials
154     % require the gamma function.

```

```

155
156 a=zeros(n,1);
157 b=zeros(n-1,1);
158 switch wfun
159     case 7, %Jacobi
160         ab = alpha + beta;
161         abi = 2 + ab;
162         muzero = 2^(ab + 1) * gamma(alpha + 1) * gamma(beta + 1) /
gamma(abi);
163         a(1) = (beta - alpha)/abi;
164         b(1) = sqrt(4*(1 + alpha)*(1 + beta)/((abi + 1)*abi^2));
165         a2b2 = beta^2 - alpha^2;
166
167         i = (2:n-1)';
168         abi = 2*i + ab;
169         a(i) = a2b2./((abi - 2).*abi);
170         a(n) = a2b2./((2*n - 2+ab).*(2*n+ab));
171         b(i) = sqrt(4*i.*(i + alpha).*(i + beta).*(i + ab)./((abi
.^2 - 1).*abi.^2));
172
173     case 8, %Laguerre
174         muzero=gamma(alpha+1);
175         i = (1:n-1)';
176         a(i) = 2 .* i - 1 + alpha;
177         a(n)=2*n-1+alpha;
178         b = sqrt( i .* (i + alpha) );
179     case 9, %Hermite
180         i = (1:(n-1))';
181         muzero = sqrt(pi);
182         %a=zeros(m,1);
183         b=sqrt(i/2);
184     case 10, %legendre NB! much slower than wfun=1
185         muzero = 2;
186         i = (1:n-1)';
187         abi = i;
188         b(i) = abi./sqrt(4*abi.^2 - 1);
189
190 end
191
192 % [v d] = eig( full(spdiags([b a b],-1:1,n,n)));
193 [v d ] = eig( diag(a) + diag(b,1) + diag(b,-1) );
194 wf = v(1,:);
195 if 1,
196     [bp i] = sort( diag(d) );
197     wf = wf(i);
198 else %save some valuable time by not sorting
199     bp = diag(d) ;
200 end
201 bp=bp';

```

```
202
203     wf = muzero.* wf.^2;
204
205 otherwise, error('unknown weight function')
206 end
207
208 % end
```

Seminario: Roberto Ortega/SPIE



Figura A.1: Participación en seminario: Roberto Ortega/SPIE

Bibliografía

- [1] ASMAR, N. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2004. 4, 8, 10
- [2] ASOUBAR, D., ZHANG, S., KUHN, M., AND WYROWSKI, F. Laser resonator modeling by field tracing: a flexible approach for fully vectorial transversal eigenmode calculation. *JOSA B* 31, 11 (2014), 2565–2573. 45
- [3] BENDER, CARL M. ORSZAG, S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, 1 ed. Springer-Verlag New York, 1999. 10, 11
- [4] DE LA PEÑA, L. *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Ediciones Científicas Universitarias / Scientific Publishing University. Fondo De Cultura Economica USA, 2010. 24
- [5] FARLOW, S. J. *Partial differential equations for scientists and engineers*. Dover Publications, New York, 1993. 4
- [6] FOX, A., AND LI, T. Computation of optical resonator modes by the method of resonance excitation. *IEEE Journal of Quantum Electronics* 4, 7 (1968), 460–465. 45, 47
- [7] FOX, A. G., AND LI, T. Resonant modes in a maser interferometer. *Bell System Technical Journal* 40, 2 (1961), 453–488. 45
- [8] G. MACHAVARIANI, E. A. Effect of the spiral phase element on the radial-polarization $(0, 1)^* \text{lg}$ beam. *Opt. Comm.* 271 (2007), 190–196. 67
- [9] GHATAK, A. *Optics*, 1 ed. McGraw-Hill, 2009. 17, 39

-
- [10] HODGSON, N., AND WEBER, H. *Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts, Applications*, vol. 108. Springer, 2005. 34, 36, 37
- [11] HORWITZ, P. Modes in misaligned unstable resonators. *Appl. Opt.* 15, 1 (Jan 1976), 167–178. 50
- [12] KLISCHE, W., WEISS, C., AND WELLEGEHAUSEN, B. Spatiotemporal chaos from a continuous na 2 laser. *Physical Review A* 39, 2 (1989), 919. 37, 38
- [13] KUHN, T. S. *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura económica, 2011. 19
- [14] LOGAN, J. D. *Applied partial differential equations*. Springer, 2014. 4, 6
- [15] MAINI, A. K. *Lasers and optoelectronics: fundamentals, devices and applications*. John Wiley & Sons, 2013. 31
- [16] MILONNI, P., AND EBERLY, J. *Lasers*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 1988. 39
- [17] MORRISSEY, F., AND CHOU, H. Mode calculations in asymmetrically aberrated laser resonators using the huygens–fresnel kernel formulation. *Optics express* 19, 20 (2011), 19702–19707. 44, 47, 48, 52, 60
- [18] RAWITSCHER, G., AND LISS, J. The vibrating inhomogeneous string: a topic for a course in computational physics. *arXiv preprint arXiv:1006.1913* (2010). 4
- [19] RENSCH, D. B., AND CHESTER, A. N. Iterative diffraction calculations of transverse mode distributions in confocal unstable laser resonators. *Applied optics* 12, 5 (1973), 997–1010. 50
- [20] SALSA, S., AND VERZINI, G. *Partial Differential Equations in Action: Complements and Exercises*, vol. 87. Springer, 2015. 7, 8
- [21] SANDERSON, R. L., AND STREIFER, W. Comparison of laser mode calculations. *Applied optics* 8, 1 (1969), 131–136. 46
- [22] SANDERSON, R. L., AND STREIFER, W. Laser resonators with tilted reflectors. *Appl. Opt.* 8, 11 (Nov 1969), 2241–2248. 50

-
- [23] SHIMODA, K. A. *Introduction to Laser Physics*, 2 ed. Springer Series in Optical Sciences 44. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986. 31, 33
- [24] SIEGMAN, A. E. *Lasers*. University Science Books, 1986. 18, 19
- [25] SIEGMAN, A. E. New developments in laser resonators. In *OE/LASE 90, 14-19 Jan., Los Angeles, CA* (1990), International Society for Optics and Photonics, pp. 2–14. 44, 45
- [26] SILFVAST, W. T. *Laser fundamentals*. Cambridge University Press, 2004. 25
- [27] SILVER, S. *Microwave antenna theory and design*, vol. 19. Iet, 1949. 41, 42
- [28] SZIKLAS, E. A., AND SIEGMAN, A. E. Mode calculations in unstable resonators with owing saturable gain. 2: Fast fourier transform method. *Appl. Opt.* 14, 8 (Aug 1975), 1874–1889. 45
- [29] THYAGARAJAN, K., AND GHATAK, A. *Lasers: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2010. 25, 26, 28