



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL PROCESO DE RIESGO  
MARKOV-MODULADO PERTURBADO POR DIFUSIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MATEMÁTICO

P R E S E N T A

JOSÉ RAMÓN GUARDIOLA ESPINOSA

TUTOR

DR. FERNANDO BALTAZAR LARIOS



CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado.

### 1. Datos del alumno

Guardiola

Espinosa

José Ramón

444 301 3335

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

41303295-3

### 2. Datos del tutor

Dr.

Fernando

Baltazar

Larios

### 3. Datos del sinodal 1

Dra.

Ana

Meda

Guardiola

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Mogens

Bladt

Petersen

### 5. Datos del sinodal 3

Dra.

Luz Judith

Rodríguez

Esparza

### 6. Datos del sinodal 4

Dr.

Yuri

Salazar

Flores

### 7. Datos del trabajo escrito

Análisis y simulación del proceso de riesgo

Markov-modulado perturbado por difusión

147 p

2017



# Agradecimientos

Les agradezco infinitamente a mi mamá Mary, a mi papá Ramón y a mi hermano Luismi, quienes son los pilares más importantes de mi vida y sin los cuales no podría lograr tantas cosas. Entre ellas, esto, el trabajo que concluye mi carrera universitaria. Una etapa que comenzó desde que me apoyaron en la elección de mi carrera y que duró los 4 años que me siguieron apoyando a distancia. Muchas gracias por todo, los amo.

A mis amigos del Rincón, en especial a Joel y a Yael, quienes me acompañaron durante la universidad como una familia.

A Diana Laura por todo su apoyo desde que la conozco y por todas las veces que preguntaba Cómo va la tesis.

A mis sinodales y a mis profesores de la carrera de matemáticas, representativamente a Ana Meda por todas sus enseñanzas y a Fernando Baltazar por su interés y paciencia en mi trabajo.

Finalmente, a mi casa de estudios, la UNAM, y en particular a la Facultad de Ciencias. Por mi raza hablará el espíritu.



# Resumen

En este trabajo se analiza un tipo de proceso de riesgo perturbado por difusión en el que los parámetros varían en el tiempo de acuerdo a un proceso Markoviano. Se explican los procesos estocásticos que forman parte de la definición del modelo y se plantea el problema de calcular la probabilidad de ruina dependiente del valor de capital inicial. Esta probabilidad es calculada de manera analítica para el caso particular de dos estados moduladores y de montos de reclamación con distribución exponencial. Se explica la manera de simular trayectorias del proceso de riesgo y se utilizan estas simulaciones para observar la proporción de veces que se arruina en cada estado modulador, el tiempo promedio para que eso suceda y un ejemplo con tres estados moduladores. Se finaliza dando una propuesta de método para estimar los parámetros del proceso dada la observación de los tiempos y montos de reclamación, e ilustrando los resultados del método aplicado a las observaciones de una trayectoria simulada.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Procesos estocásticos</b>	<b>5</b>
1.1. Preliminares . . . . .	5
1.1.1. Proceso de Poisson . . . . .	5
1.1.2. Cadena de Markov . . . . .	7
1.1.3. Proceso de saltos de Markov . . . . .	9
1.1.4. Movimiento Browniano . . . . .	14
1.1.5. Transformada de Laplace . . . . .	16
1.2. Proceso de riesgo modulado con difusión . . . . .	18
<b>2. Probabilidad de ruina</b>	<b>21</b>
2.1. Ecuación integro-diferencial . . . . .	22
2.1.1. Ruina instantánea con capital inicial cero y en presencia de difusión	22
2.1.2. Ruina en un lapso $[0, dt]$ . . . . .	24
2.1.3. Solución general para la transformada de Laplace . . . . .	33
2.2. Caso particular: dos estados y montos de reclamación con distribución exponencial . . . . .	37

2.2.1. Sin difusión . . . . .	38
2.2.2. Con difusión . . . . .	45
<b>3. Simulación estocástica</b>	<b>55</b>
3.1. Algoritmos de simulación del proceso de riesgo . . . . .	55
3.1.1. Proceso de saltos de Markov . . . . .	55
3.1.2. Proceso de Poisson . . . . .	57
3.1.3. Reclamaciones . . . . .	58
3.1.4. Difusión . . . . .	61
3.2. Aspectos no analíticos de la ruina . . . . .	64
3.2.1. Calibración de las simulaciones . . . . .	65
3.2.2. Probabilidad de ruina por estado y tiempo de ruina . . . . .	70
3.2.3. Caso con tres estados . . . . .	73
<b>4. Inferencia</b>	<b>77</b>
4.1. Algoritmo EM estocástico para procesos de saltos de Markov . . . . .	78
4.2. Observación discreta del proceso modulador a partir del proceso de reclamaciones . . . . .	87
4.3. Estimación de los parámetros del proceso de reclamaciones . . . . .	95
<b>Conclusión</b>	<b>107</b>
<b>A. Cálculo analítico de la ruina</b>	<b>109</b>
A.1. Cálculo de probabilidad de ruina con dos estados, reclamaciones exponenciales y sin difusión . . . . .	109
A.2. Cálculo de probabilidad de ruina con dos estados, reclamaciones exponenciales y con difusión . . . . .	110

<b>B. Simulación del proceso de reserva y estimación de ruina</b>	<b>113</b>
B.1. Cálculo de la matriz de probabilidades de transición . . . . .	113
B.2. Simulación de un proceso de saltos de Markov . . . . .	113
B.3. Simulación de un proceso de Poisson . . . . .	114
B.4. Simulación de un proceso de reclamaciones modulado . . . . .	115
B.5. Simulación de un movimiento Browniano modulado . . . . .	116
B.6. Agregación del proceso de reclamaciones y la difusión . . . . .	117
B.7. Evaluación de ruina de un proceso . . . . .	118
B.8. Estimación de la probabilidad de ruina . . . . .	118
<b>C. Estimación de los parámetros del proceso de reserva</b>	<b>121</b>
C.1. Función auxiliar del algoritmo de bisección . . . . .	121
C.2. Algoritmo de puentes de Markov por el método de bisección . . . . .	126
C.3. Eliminación de repeticiones en los estados . . . . .	127
C.4. Estimación de una primera matriz de intensidades . . . . .	127
C.5. Estimación de la matriz de intensidades por máxima verosimilitud . . . . .	128
C.6. Algoritmo EM estocástico para procesos de saltos de Markov . . . . .	129
C.7. Recuperación de los tiempos interarribos y montos de reclamación . . . . .	130
C.8. Segregación de parejas observadas . . . . .	130
C.9. Cálculo de los errores al segregar . . . . .	131
C.10. Simulación de interarribos y montos de reclamación . . . . .	132
<b>Bibliografía</b>	<b>135</b>



# Introducción

Mucho antes de tener una teoría formal de los procesos estocásticos, Filip Lundberg introdujo en 1903, dentro de su tesis doctoral, la idea de proceso de Poisson compuesto al intentar modelar la reserva de una compañía aseguradora. Más tarde, Harald Cramér formalizó este modelo al cual conocemos ahora como modelo de riesgo Cramér-Lundberg.

La idea del modelo se basa en suponer que una aseguradora que comienza con capital inicial  $u$  y recibe un ingreso por primas a tasa constante  $c$ , tiene una reserva en el tiempo  $t$  dada por

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

donde  $N(t)$  es un proceso de Poisson que cuenta el número de reclamaciones que recibe la aseguradora hasta el tiempo  $t$ , y  $X_i$  es el monto de la  $i$ -ésima reclamación.

Un modelo similar perturbado por difusión fue introducido por Hans U. Gerber [6] en 1970:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma W,$$

en el que agregamos un factor volátil  $\sigma W$ , con  $\sigma > 0$  y  $W$  un proceso de Wiener o movimiento Browniano. Esta difusión representa la incertidumbre del proceso de ingresos. Algunas características de este modelo han sido estudiadas en [5–8, 18], entre otros.

Fue hasta la siguiente década en la que Jean-Marie Reinhard [15] (en 1984) y Søren Asmussen [1] (en 1989) presentan un modelo en el que los parámetros del proceso de reserva Cramér-Lundberg están modulados en el tiempo por un proceso Markoviano. El modelo sin difusión ha sido estudiado en [10, 13, 19], mientras que la literatura más reciente sobre el modelo con difusión incluye [4, 11]. En el Capítulo 1 definimos este modelo perturbado por difusión con detalle. Esta generalización intenta modelar los cambios en el contexto

que afectan el comportamiento del proceso de reserva, como el fenómeno de El Niño o las epidemias en el sector de salud.

Antes de explicar cómo es el proceso de reserva Markov-modulado con difusión, recordaremos algunos de los conceptos alrededor de los procesos estocásticos fundamentales en su definición. Aunque presentamos todas las definiciones y resultados necesarios para resolver el trabajo, se recomienda revisar la literatura mencionada al principio del primer capítulo. También se menciona un poco de teoría de la transformada de Laplace que utilizaremos en el siguiente capítulo.

El propósito del Capítulo 2 es resolver analíticamente el problema de calcular la probabilidad de ruina con un capital inicial dado  $u \geq 0$ ,

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \inf_{t \geq 0} U(t) < 0 \mid U(0) = u \right),$$

para un caso particular en el que el proceso Markoviano que modula los parámetros tiene sólo dos estados y los montos de reclamación siguen distribuciones exponenciales. Para ello, demostraremos que las probabilidades de supervivencia (los complementos de las probabilidades de ruina), condicionadas al estado en el que inicia el proceso modulador, son las soluciones a un sistema de ecuaciones integro-diferenciales. Dicho sistema lo resolveremos en sus transformadas de Laplace y para nuestro caso particular daremos la forma cerrada de la probabilidad de ruina. Al final presentamos algunos ejemplos resueltos computacionalmente.

En el Capítulo 3 se presenta la forma de simular los procesos estocásticos que definen el modelo de riesgo Markov-modulado perturbado y se ilustran algunos resultados de su implementación en el lenguaje de programación `Julia`. El propósito de este capítulo es revelar algunos aspectos de la ruina de procesos de manera no analítica. Por ejemplo, un primer paso es comparar la probabilidad calculada analíticamente en el capítulo anterior con la probabilidad de ruina estimada que obtenemos al simular muchos procesos de reserva. Otros aspectos a observar serán la proporción de veces que hay ruina en cada estado del proceso modulador o el tiempo medio que tarda en arruinarse. Resaltamos que el fin de esta parte no es obtener resultados específicos, sino aclarar los alcances de la simulación en el problema de la ruina, como la posibilidad de analizar modelos con más de dos estados moduladores.

Finalmente, en el Capítulo 4 proponemos algunos métodos de inferencia sobre los parámetros del proceso de reclamaciones. Los márgenes de este trabajo dejan fuera el factor de difusión en esta parte, pues sólo nos interesa resolver el problema de estimar parámetros dada únicamente la observación de las reclamaciones del proceso. Suponemos montos de reclamación exponenciales; notemos que a diferencia del modelo de riesgo clásico en el que sólo debe hacerse inferencia sobre la intensidad del proceso de Poisson y sobre la media de los montos de reclamación, en el modelo modulado las reclamaciones llegan a diferentes intensidades y con diferentes medias de acuerdo al estado modulador. Por ello, haremos inferencia primero sobre los parámetros del proceso Markoviano y después encontraremos estimadores para los parámetros de las reclamaciones en cada estado.



# Capítulo 1

## Procesos estocásticos

En este primer capítulo presentamos el marco teórico indispensable para entender el desarrollo del modelo. Los resultados preliminares sólo son mencionados y se hará referencia a la literatura correspondiente cuando sea necesario.

La parte de procesos estocásticos se basa principalmente en [9, 16, 17] para definir los términos esenciales y presentar los resultados que serán útiles en los siguientes capítulos. Una pequeña parte dedicada a la transformada de Laplace se basa en [12] y presenta sólo los resultados más importantes para este trabajo.

Por último, introducimos el proceso de riesgo Markov-modulado perturbado por difusión basado en cómo se hace en [4] por su claridad.

### 1.1. Preliminares

A continuación definimos los procesos estocásticos llamados proceso de Poisson, cadena de Markov, proceso de saltos de Markov y movimiento Browniano, y con ellos damos sus propiedades más importantes para este trabajo.

#### 1.1.1. Proceso de Poisson

**Definición 1.1.** *Un proceso estocástico  $N_t$   $t \geq 0$  es un **proceso de conteo** si representa el número total de eventos ocurridos hasta un tiempo  $t$ , es decir, cumple*

1.  $N_t$  es un entero no negativo,
2.  $N_t$  es creciente, y

3.  $N_t - N_s$  es igual al número de eventos ocurridos en el intervalo  $(s, t]$ .

La última condición implica que las trayectorias del proceso son continuas por la derecha.

**Definición 1.2.** Un proceso de conteo  $N_t$   $t \geq 0$  tiene **incrementos independientes** si  $N_t$  y  $N_{t+s} - N_t$  son variables aleatorias independientes.

La definición anterior nos da la idea de que incrementos independientes implica que las cantidades de eventos ocurridos en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

**Definición 1.3.** Un proceso de conteo  $N_t$   $t \geq 0$  tiene **incrementos estacionarios** si  $N_{t_1+s} - N_{t_1}$  tiene la misma distribución que  $N_{t_2+s} - N_{t_2}$ .

Es decir, la cantidad de eventos ocurridos en un intervalo de tiempo depende solamente de la longitud del intervalo y no de dónde se encuentra el intervalo.

**Definición 1.4.** Un proceso de conteo  $N_t$   $t \geq 0$  es un **proceso de Poisson** con intensidad  $\lambda > 0$  si

1.  $N_0 = 0$ ,
2.  $N_t$   $t \geq 0$  tiene incrementos independientes, y
3.  $N_{s+t} - N_s$  se distribuye Poisson con media  $\lambda t$ .

Notemos que la última condición además implica incrementos estacionarios.

**Definición 1.5.** Diremos que una función  $f$  es  **$o(h)$**  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Con el concepto de funciones  $o(h)$  se puede caracterizar a los procesos Poisson con el siguiente resultado.

**Proposición 1.6.** Si  $N = N_t$   $t \geq 0$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ , entonces se cumplen

- $\mathbb{P}(N_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ ,
- $\mathbb{P}(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$ , y
- $\mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)$ .

Lo que nos dice la Proposición 1.6 es que tener la ocurrencia de un evento en un periodo corto de tiempo  $[0, h]$  tiene una probabilidad que se comporta casi linealmente en  $h$  y la probabilidad de tener al menos dos decrece más rápidamente que una función lineal respecto al tiempo.

**Definición 1.7.** Dado un proceso de Poisson  $N_t$   $t \geq 0$ , definimos los **tiempos de arribo**  $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$  como

$$S_i = \text{mín } t \geq 0 : N_t \geq i, \quad i \geq 0$$

y los **tiempos interarribo**  $T_1, T_2, T_3, \dots$  como

$$T_i = S_i - S_{i-1}, \quad i \geq 1.$$

La siguiente proposición es una definición alternativa al proceso de Poisson y nos será útil en su simulación.

**Proposición 1.8.** Sean  $T_1, T_2, \dots$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $\exp(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$ . Si definimos el proceso de conteo  $N = N_t$   $t \geq 0$  como

$$N_t = \text{máx } n \geq 0 : T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t,$$

entonces  $N$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ .

### 1.1.2. Cadena de Markov

**Definición 1.9.** Una **cadena de Markov** con espacio de estados  $E$  es un proceso estocástico  $X_n$   $n \in \mathbb{N}$  que toma valores en el conjunto  $E$  y tiene la siguiente propiedad: para cada número natural  $n \geq 0$  y cualesquiera  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in E$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

A esta propiedad la llamamos **propiedad de Markov**.

En este trabajo sólo nos importarán las cadenas de Markov con incrementos estacionarios, es decir, en las que la probabilidad  $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$  no depende de  $n$ .

**Definición 1.10.** Para una cadena de Markov  $X_n$   $n \in \mathbb{N}$  con espacio de estados finito  $E = \{1, 2, \dots, d\}$ , definimos la **matriz de probabilidades de transición**  $P$  como

$$P = (p_{xy})_{x,y \in E}, \quad p_{xy} = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x), \quad x, y \in E.$$

En general, la **matriz de probabilidades de transición en  $n$  pasos**  $P^{(n)}$  es

$$P^{(n)} = (p_{xy}^{(n)})_{x,y \in E}, \quad p_{xy}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x), \quad x, y \in E.$$

**Proposición 1.11.** *Dada una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición  $P$ , las matrices de  $n$  pasos cumplen*

$$P^{(n)} = P^n.$$

Los siguientes resultados son mencionados con el fin de aclarar qué es una distribución estacionaria y cómo interpretarla bajo ciertos supuestos del espacio de estados de la cadena de Markov. Para ver los detalles se recomienda leer [9], en donde se basan las definiciones y resultados.

**Definición 1.12.** *Diremos que una cadena de Markov  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es **irreducible** si todos sus estados se comunican, es decir, para cualesquiera dos estados  $x$  y  $y$  en el espacio de estados existe  $n \geq 0$  tal que  $p_{xy}^{(n)} > 0$ .*

**Definición 1.13.** *Diremos que un estado  $x \in E$  es **recurrente** si la cadena de Markov que comienza en el estado  $X_0 = x$  tiene probabilidad 1 de regresar a  $x$  en algún tiempo finito. Diremos que el estado es **transitorio** en caso contrario.*

Para un estado recurrente  $x \in E$ , llamemos  $m_x$  a la esperanza del tiempo de retorno al estado  $x$ :

$$m_x = \mathbb{E}(\text{mín } n > 0 : X_n = x \mid X_0 = x).$$

**Definición 1.14.** *Diremos que un estado recurrente  $x \in E$  es **recurrente positivo** si  $m_x < \infty$ .*

**Proposición 1.15.** *Si una cadena de Markov con espacio de estados finito es irreducible, entonces todos sus estados son recurrentes positivos.*

**Definición 1.16.** *Para la cadena de Markov con espacio de estados  $E$  llamamos **distribución estacionaria** al conjunto de valores no negativos  $(\pi_x)_{x \in E}$  si cumplen*

$$\sum_{x \in E} \pi_x = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{x \in E} \pi_x p_{xy} = \pi_y, \quad y \in E.$$

**Proposición 1.17.** *Una cadena de Markov irreducible con espacio de estados finito  $E$  tiene una única distribución estacionaria  $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$  dada por*

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}, \quad x \in E.$$

La distribución estacionaria puede ser interpretada como la probabilidad de encontrarnos en cada uno de los estados a lo largo de la cadena de Markov, es decir, la porción del tiempo que la cadena se encuentra en cada estado en el largo plazo (en el caso de estados recurrentes positivos, es el inverso de la esperanza del tiempo en el que la cadena regresa a ese estado).

### 1.1.3. Proceso de saltos de Markov

**Definición 1.18.** A un proceso estocástico en tiempo continuo  $X_t$   $t \geq 0$  lo llamamos **proceso de saltos** si existen  $0 < W_1 < W_2 < W_3 < \dots$  números reales positivos y  $x_0, x_1, x_2, \dots$  en el espacio de estados tales que

$$X_t = \begin{array}{ll} x_0 & 0 \leq t < W_1 \\ x_1 & W_1 \leq t < W_2 \\ x_2 & W_2 \leq t < W_3 \\ \vdots & \end{array}$$

con  $x_{n+1} = x_n$  para todo  $n \geq 0$ .

Llamamos tiempos de salto a los elementos de la sucesión  $W_1, W_2, \dots$ , y notemos que las trayectorias del proceso son continuas por la derecha. Pensaremos únicamente en procesos no explosivos, es decir, en los que los tiempos de salto  $W_n$  no están acotados y  $X_t$  está bien definido para todo  $t \geq 0$ .

**Definición 1.19.** Una **cadena de Markov a tiempo continuo o proceso de saltos de Markov** con espacio de estados  $E$  es un proceso de saltos  $X_t$   $t \geq 0$  que cumple la propiedad de Markov, es decir, para tiempos  $0 \leq s_1 < \dots < s_n < s < t$  y estados  $x_1, \dots, x_n, x, y \in E$  se cumple

$$\mathbb{P}(X_t = y \mid X_{s_1} = x_1, \dots, X_{s_n} = x_n, X_s = x) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_s = x).$$

**Definición 1.20.** Definimos los tiempos de salto  $W_0 = 0, W_1, W_2, \dots$  recursivamente de la siguiente manera:

$$W_{n+1} = \inf \{ t \geq W_n : X_t = X_{W_n} \},$$

y los tiempos de estancia  $T_1, T_2, \dots$  como

$$T_n = W_n - W_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

En este trabajo sólo nos importarán los procesos de saltos de Markov con incrementos estacionarios, en los que la probabilidad  $\mathbb{P}(X_t = y | X_s = x) =: P_{xy}(t - s)$  sólo depende de la distancia  $t - s$ ; y no explosivos, en los que  $\lim_n W_n = \dots$ .

**Definición 1.21.** *Un estado es **absorbente** si una vez que el proceso lo alcanza, éste permanece ahí por siempre con probabilidad 1.*

Para cada estado no absorbente  $x$ , consideraremos una función de distribución  $G_x(t)$  y probabilidades de transición  $P_{xy}, y \in E$ , que cumplen  $P_{xx} = 0$  y  $\sum_y P_{xy} = 1$ , y tales que, dado que un proceso de saltos de Markov comienza en  $X_0 = x$ , el tiempo de estancia en ese estado,  $T_1$ , es una variable aleatoria con distribución  $G_x$  y el siguiente estado en el que está es  $X_{T_1} = y$  con probabilidad  $P_{xy}$  para cada  $y \in E$ :

$$T_1 \sim G_x, \quad P_{xy} = \mathbb{P}(X_{T_1} = y | X_0 = x), \quad x, y \in E.$$

**Proposición 1.22.** *La propiedad de Markov implica que las distribuciones  $G_x$  sean exponenciales.*

A partir de aquí consideraremos sólo procesos de saltos de Markov con espacio de estados finito  $E = \{1, 2, \dots, d\}$  y ninguno de ellos absorbente.

Para cada estado  $x \in E$ , sea  $q_x = 1/\mathbb{E}(T_1 | X_0 = x)$ , de tal forma que

$$G_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-q_x t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

**Proposición 1.23.** *Dado que comenzamos en un estado  $X_0 = x$ , los tiempos de salto  $W_1$  y  $W_2$  cumplen que*

- $\mathbb{P}(h < W_1) = 1 - q_x h + o(h)$ ,
- $\mathbb{P}(W_1 \leq h < W_2) = q_x h + o(h)$ , y
- $\mathbb{P}(W_2 \leq h) = o(h)$ .

El resultado anterior tiene una interpretación similar a la de la Proposición 1.6, es decir, la probabilidad de tener un salto en un tiempo cercano a cero se comporta como una función lineal del tiempo, mientras que tener al menos dos saltos antes de un tiempo pequeño es una función chica  $o(h)$ .

A continuación definiremos para un proceso de saltos de Markov los conceptos de matriz de intensidades y cadena de Markov asociada.

**Definición 1.24.** Para un procesos de saltos de Markov con espacio de estados finito  $E = \{1, 2, \dots, d\}$ , ninguno de ellos absorbente, y  $P_{xy}$  y  $q_x$  definidos como antes para todos  $x, y \in E$ , su **matriz de intensidades**  $Q$  está dada por

$$Q = (q_{xy})_{x,y \in E}, \quad q_{xy} = \begin{cases} -q_x & y = x \\ q_x P_{xy} & y \neq x. \end{cases}$$

Notemos que todas las características probabilísticas de un proceso de saltos de Markov están determinadas por su matriz de intensidades.

**Definición 1.25.** A todo proceso de saltos de Markov  $X_t$   $t \geq 0$  le podemos asignar una **cadena de Markov asociada**  $Y_n$   $n \in \mathbb{N}$  en el mismo espacio de estados y dada por los estados que visita  $X_t$  en cada tiempo de salto  $W_1, W_2, \dots$ , de tal forma que

$$Y_n = X_{W_n}.$$

Existe una evidente relación entre la matriz de intensidades  $Q$  de un proceso de saltos de Markov  $X_t$   $t \geq 0$  y la matriz de probabilidades de transición  $P$  de su cadena de Markov asociada  $Y_n$   $n \in \mathbb{N}$ .

Al conocer las entradas  $q_{xy}$  de la matriz  $Q$ , las probabilidades de transición se calculan como

$$P_{xx} = 0, \tag{1.26}$$

pues el proceso de saltos nunca salta de un estado al mismo, y

$$P_{xy} = \frac{q_{xy}}{-q_{xx}} \tag{1.27}$$

para  $y \neq x$ , por la definición de matriz de intensidades.

Notemos que el proceso inverso no es posible, es decir, dada  $P$  no podemos conocer  $Q$ . Intuitivamente esto se debe a que no conocemos la distribución del tiempo de estancia en cada estado. Por otro lado, si conocemos probabilidades de transición y parámetros  $q_x > 0$  para cada  $x \in E$ , no sólo podemos conocer la matriz de intensidades correspondiente, además se puede generar el proceso de saltos de Markov como veremos en el Capítulo 3 de simulaciones.

**Proposición 1.28.** Sea  $Y = Y_n$   $n \in \mathbb{N}$  una cadena de Markov con espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, d\}$  y matriz de probabilidades de transición  $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ . Sea además  $q =$

$(q_i)_{i \in E}$  un vector de intensidades  $q_i > 0$ . Si definimos la sucesión de variables aleatorias independientes  $T_1, T_2, \dots$  y distribuidas

$$T_n \sim \exp(q_{Y_n}),$$

entonces el proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definido como

$$X_t = \begin{cases} Y_1 & 0 \leq t < T_1 \\ Y_2 & T_1 \leq t < T_1 + T_2 \\ \vdots & \\ Y_n & \sum_{i=1}^{n-1} T_i \leq t < \sum_{i=1}^n T_i \\ \vdots & \end{cases}$$

es un proceso de saltos de Markov con espacio de estados  $E$ , matriz de intensidades dada como en la Definición 1.24 y cadena de Markov asociada  $Y$ .

Para finalizar con los procesos de saltos de Markov, veamos cómo es la distribución estacionaria en este caso. La idea general es muy similar al caso de cadenas de Markov, por lo que nuevamente se recomienda leer [9] para ver el detalle de los siguientes conceptos.

**Definición 1.29.** Para un proceso de saltos de Markov diremos que un estado  $x \in E$  es **recurrente** o **transitorio** de acuerdo a si es recurrente o transitorio en la cadena de Markov asociada.

Para cada estado recurrente  $x \in E$ , llamemos  $m_x$  a la esperanza del tiempo que tarda el proceso de saltos de Markov que comienza en  $X_0 = x$  en regresar a ese estado:

$$m_x = \mathbb{E}(\inf \{t \geq T_1 : X_t = x \mid X_0 = x\}).$$

**Definición 1.30.** A un estado recurrente del proceso de saltos de Markov  $x \in E$  lo llamaremos **recurrente positivo** si  $m_x < \infty$ .

**Definición 1.31.** Para un proceso de saltos de Markov con espacio de estados  $E$ , llamamos **distribución estacionaria** al conjunto de valores no negativos  $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$  si cumple que

$$\sum_{x \in E} \pi_x = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{x \in E} \pi_x P_{xy}(t) = \pi_y, \quad \text{y} \quad x \in E, t \geq 0.$$

Notemos que si  $X_0$  tiene distribución  $\pi$ , entonces para todo  $y \in E$

$$\mathbb{P}(X_t = y) = \sum_{x \in E} \pi_x P_{xy}(t) = \pi_y,$$

por lo que  $X_t$  tiene distribución  $\pi$  para todo  $t \geq 0$ .

**Proposición 1.32.** Si  $X = X_t_{t \geq 0}$  es un proceso de saltos de Markov irreducible con espacio de estados finito  $E = \{1, 2, \dots, d\}$  y matriz de intensidades  $Q = (q_{xy})_{x,y \in E}$ , entonces todos los estados de  $X$  son recurrentes positivos y el proceso tiene una única distribución estacionaria  $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$  dada por

$$\pi_x = \frac{1}{q_x m_x}, \quad x \in E.$$

Independientemente de la distribución de  $X_0$ , la distribución de  $X_t$  converge a la distribución estacionaria y ésta puede interpretarse como la proporción del tiempo que el proceso pasa en cada estado. Así, si definimos la función indicadora  $1_A(a)$  como

$$1_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A, \end{cases}$$

tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.33.** Si  $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$  es la distribución estacionaria del proceso de saltos de Markov  $X$ , se tienen que

$$\lim_t \mathbb{P}(X_t = x) = \pi_x$$

y

$$\lim_T \frac{\int_0^T 1_x(X_t) dt}{T} = \pi_x, \quad \text{en probabilidad.}$$

Es fácil calcular la distribución estacionaria para un proceso de saltos de Markov con dos estados,  $E = \{1, 2\}$ . Supongamos que tenemos matriz de intensidades

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 \\ q_2 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que comienza en  $X_0 = 1$ , con seguridad vuelve a ese estado en el segundo tiempo de salto  $W_2 = T_1 + T_2$ . Recordemos que  $T_1 \sim \exp(q_1)$  y al saltar al estado 2,  $T_2 \sim \exp(q_2)$ . Por lo tanto  $m_1 = \mathbb{E}(W_2) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) = 1/q_1 + 1/q_2$ . Luego,

$$\pi_1 = \frac{1}{q_1 \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right)} = \frac{q_2}{q_1 + q_2};$$

análogamente

$$\pi_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

### 1.1.4. Movimiento Browniano

**Definición 1.34.** Un proceso estocástico  $X_t$   $t \geq 0$  con valores en los reales es llamado **movimiento Browniano** con parámetro  $\sigma^2$  si cumple

1.  $X_0 = 0$  c.s.,
2. tiene incrementos independientes y estacionarios, y
3. para cada  $t > 0$ ,  $X_t$  se distribuye normal con media 0 y varianza  $\sigma^2 t$ .

Lo llamaremos movimiento Browniano estándar si  $\sigma^2 = 1$ . Notemos que si  $B_t$  es un movimiento Browniano estándar,  $aB_t$  es uno con parámetro  $a^2$ .

**Proposición 1.35.** Incrementos estacionarios e independientes implica que para cualesquiera  $0 < s < t$ , la variable aleatoria  $X_t - X_s$  se distribuye normal con media 0 y varianza  $\sigma^2(t - s)$ .

**Proposición 1.36.** Para cualesquiera  $0 < s < t$ , la variable aleatoria  $X_t$  condicionada a  $X_s$  se distribuye normal con media  $X_s$  y varianza  $\sigma^2(t - s)$ .

Ya que la varianza del movimiento Browniano depende linealmente del tiempo, sus trayectorias son continuas con probabilidad 1.

El siguiente lema será muy útil para calcular la probabilidad de ruina del proceso de reserva debido a la difusión. Exponemos su demostración, cuya idea intuitiva es que exactamente la mitad de las trayectorias que alcanzan un valor negativo  $-B$  en el lapso  $[0, t]$  termina por arriba de  $-B$  al tiempo  $t$  y la otra mitad por abajo, por los incrementos normales del proceso a partir de que estamos en  $-B$ .

**Lema 1.37.** Sean  $X = X_t$   $t \geq 0$  un movimiento Browniano con parámetro  $\sigma^2$  y  $B > 0$ .  $X$  alcanza el valor  $-B$  dentro del lapso  $[0, t]$  con probabilidad

$$\mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B\right) = 2\mathbb{P}(X_t \leq -B) = 2 \int_{-B}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

*Demostración.* Por la normalidad de  $X_t$  se tiene la segunda igualdad. Vamos a mostrar que

$$\frac{\mathbb{P}(X_t \leq -B)}{\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B)} = \frac{1}{2}.$$

Primero notemos que

$$\mathbb{P}(X_t \leq -B) = \mathbb{P}\left(X_t \leq -B, \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X_t \leq -B)}{\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B)} &= \frac{\mathbb{P}(X_t \leq -B, \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B)}{\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B)} \\ &= \mathbb{P}\left(X_t \leq -B \mid \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B\right). \end{aligned}$$

Condicionando a que  $\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B$ , sea  $\tau = \inf_{s \in [0, t] : X_s = -B}$  y  $f_\tau(s)$  la densidad de  $\tau$  condicionada; notemos que  $\tau$  está bien definido por la continuidad de las trayectorias. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(X_t \leq -B \mid \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq -B\right) = \int_0^t \mathbb{P}(X_t \leq -B \mid X_s = -B) f_\tau(s) ds = \frac{1}{2},$$

pues  $\mathbb{P}(X_t \leq -B \mid X_s = -B) = \frac{1}{2}$  para todo  $s \in [0, t)$ .  $\square$

En este trabajo será útil la notación de la integral de Itô, al menos la de su definición más simple que podemos encontrar en [16].

**Definición 1.38.** Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  una partición finita del intervalo  $[0, T]$ . Un **proceso estocástico simple** es un proceso de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} 1_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

en donde  $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n-1)}$  es una colección de variables aleatorias.

**Definición 1.39.** La **integral de Itô** de un proceso estocástico simple  $X_t$  como en la definición anterior sobre el intervalo  $[0, T]$ , respecto a un movimiento Browniano estándar  $B_t$ , es la variable aleatoria

$$\int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Los procesos estocásticos simples son constantes por tramos y su integral de Itô respecto a un movimiento Browniano estándar es entonces un reescalamiento por tramos de ese movimiento Browniano.

Ahora definamos una variación del movimiento Browniano basado en [17] con un resultado que nos será útil para el análisis de ruina con difusión en pequeños intervalos de tiempo.

**Definición 1.40.** Decimos que el proceso  $X_t$   $t \geq 0$  en los reales es un **movimiento Browniano con deriva** de parámetro  $\sigma^2$  y coeficiente de deriva  $\mu$  si cumple

1.  $X_0 = 0$  c.s.,
2. tiene incrementos independientes y estacionarios, y
3. para cada  $t > 0$ ,  $X_t$  se distribuye normal con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ .

La definición es equivalente a la de  $X_t = \sigma B_t + \mu t$ , donde  $B_t$  es un movimiento Browniano estándar.

**Proposición 1.41.** Sean  $X_t$   $t \geq 0$  un movimiento Browniano de parámetro  $\sigma^2$  con deriva y coeficiente  $\mu$  y  $A, B > 0$ , entonces la probabilidad de que  $X_t$  tome el valor  $A$  antes de tomar el valor  $-B$  es

$$\mathbb{P}(\inf t : X_t \geq A < \inf t : X_t \leq -B) = \frac{e^{2\mu B/\sigma^2} - 1}{e^{2\mu B/\sigma^2} - e^{-2\mu A/\sigma^2}}.$$

La demostración a este resultado es igual a la que presenta [17] para el caso  $\sigma^2 = 1$ .

### 1.1.5. Transformada de Laplace

Las demostraciones a las proposiciones y teoremas de esta pequeña sección se pueden encontrar en [12].

**Definición 1.42.** Sea  $f(t)$  una función bien definida al menos en  $[0, \infty)$  con valores en los complejos. La **transformada de Laplace** de  $f$  es la función en los complejos

$$L f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

La transformada de Laplace sólo está definida en los valores de  $z \in \mathbb{C}$  para los cuales la integral converge. En este sentido, debemos pedir que la función  $f$  no crezca más rápidamente que una función exponencial. Una sencilla observación es que cualquier función acotada en los reales positivos tiene transformada de Laplace para algunos valores de  $z$ .

El siguiente teorema nos da una idea más clara de los valores en los que la transformada de Laplace está bien definida.

**Teorema 1.43.** Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  de orden exponencial y sea

$$\hat{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt,$$

entonces existe un único número  $\sigma$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$ , tal que esta integral converge si  $\operatorname{Re}(z) > \sigma$  y diverge si  $\operatorname{Re}(z) < \sigma$ . Además,  $\hat{f}$  es analítica en el conjunto

$$A = \{z : \operatorname{Re}(z) > \sigma\}$$

y su derivada es

$$\hat{f}'(z) = \int_0^{\infty} -te^{-zt} f(t) dt$$

para todo  $z \in A$ . El número  $\sigma$  es llamado **abscisa de convergencia**, y cumple que si  $\rho$  es definida como

$$\rho = \inf \{B \in \mathbb{R} : f(t) \leq Ae^{Bt} \text{ p.a. } A > 0\},$$

entonces

$$\sigma \leq \rho.$$

El siguiente teorema nos permite afirmar que una transformada de Laplace dada sólo puede provenir de una única función definida en los reales positivos.

**Teorema 1.44.** *Suponga que  $f$  y  $h$  son funciones continuas tales que  $L f(z) = L h(z)$  para todo  $z$  tal que  $\operatorname{Re}(z) > \gamma_0$  para algún número real  $\gamma_0$ . Entonces  $f(t) = h(t)$  para todo  $t \in [0, \infty)$ .*

**Proposición 1.45.** *La transformada de Laplace, como un operador  $L$  sobre funciones, es lineal. Para dos funciones continuas  $f$  y  $g$  con abscisas de convergencia  $\sigma_f$  y  $\sigma_g$ , respectivamente, y  $a, b \in \mathbb{C}$ ,*

$$L(af + bg) = aL f + bL g$$

en el conjunto  $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \max(\sigma_f, \sigma_g)$ .

**Proposición 1.46.** *Sea  $f(t)$  una función continua en  $[0, \infty)$  y  $C^1$  por partes, y  $\rho$  definida como en el Teorema 1.43. Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(z) > \rho$ , se cumple que*

$$L \left\{ \frac{df}{dt} \right\} (z) = z \cdot L f(z) - f(0).$$

**Teorema 1.47** (Teorema de la convolución). *Si definimos la operación convolución  $*$  entre dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  como*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

para todo  $t \geq 0$ , y  $\rho_f$  y  $\rho_g$  como en el Teorema 1.43 para  $f$  y  $g$ , respectivamente, entonces

se cumple que  $f * g = g * f$  y

$$L f * g (z) = L f (z) \cdot L g (z)$$

para todo  $z$  tal que  $\operatorname{Re}(z) > \max(\rho_f, \rho_g)$ .

## 1.2. Proceso de riesgo modulado con difusión

Consideremos el proceso de saltos de Markov  $J = J_t \ t \geq 0$  irreducible y con espacio de estados finito  $E = \{1, 2, \dots, d\}$ , ninguno de ellos absorbente, y matriz de intensidades  $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ . Llamaremos distribución inicial  $\pi_0$  a la distribución de  $J_0$ , y a la distribución estacionaria  $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ , que existe por la Proposición 1.32. Sean, además,  $q_i = -q_{ii}$  para todo  $i \in E$ ; al ser cada uno de ellos positivo, podemos calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov adjunta  $P$  como

$$P = (p_{ij})_{i,j \in E}, \quad p_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \frac{q_{ij}}{q_i}, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in E.$$

El proceso  $J$ , al que llamaremos **proceso modulador**, representa las condiciones económicas que influirán en los parámetros del proceso de riesgo, particularmente sobre la tasa de primas, la intensidad con la que se presentan las reclamaciones, el tamaño de la reclamación y la volatilidad de la siguiente manera. Mientras el proceso  $J$  se encuentre en el estado  $i$ , al que llamaremos **estado modulador**, la tasa de primas será  $c_i$ , las reclamaciones llegarán de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda_i$  y su tamaño  $X_k$ , llamado monto de reclamación, será una variable aleatoria de distribución  $F_i$  con soporte en los reales positivos, y la volatilidad de difusión será  $\sigma_i$ .

Supondremos que las reclamaciones  $X_1, X_2, \dots$  son independientes entre ellas dado  $J$  y que  $\mu_i$  es la media de la distribución  $F_i$  para  $i \in E$ . Definamos también el proceso  $N = N_t \ t \geq 0$  de tal manera que  $N_t$  es el número de reclamaciones hasta el tiempo  $t$ , al cual llamaremos proceso de Poisson modulado.

Definimos el **proceso de riesgo Markov-modulado con difusión**  $U = U_t \ t \geq 0$  en cada tiempo  $t$  como

$$U_t = u + \int_0^t c_{J_s} ds - \sum_{k=1}^{N_t} X_k + \int_0^t \sigma_{J_s} dW_s,$$

donde el valor  $u \geq 0$  es interpretado como capital inicial y  $W = W_t \quad t \geq 0$  es un movimiento Browniano estándar que inicia en  $W_0 = 0$ . Bajo la notación de la integral de Itô, el último término sólo está agregando la difusión de un movimiento Browniano alrededor del proceso de reserva cuya volatilidad es  $\sigma_i$  mientras esté en el estado modulador  $i$ .

Para este trabajo supondremos que la tasa de primas es constante,  $c_i = 1$  para todo  $i \in E$ . En [4] se realiza la transformación en el tiempo  $\hat{U}_t = U_{T(t)}$ , con  $T(t) = \int_0^t (1/c_{J_s}) ds$ , con la que el proceso mantiene su estructura y se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $c \equiv 1$ . De cualquier forma, pensaremos que el ingreso por primas no es modulado y un reescalamiento de los parámetros del proceso nos permite suponer que

$$U_t = u + t - \sum_{k=1}^{N_t} X_k + \int_0^t \sigma_{J_s} dW_s.$$

También nos referiremos a este proceso como proceso de riesgo o proceso de reserva y al valor de  $U_t$  como reserva.

Además, supondremos que la esperanza del cambio en el proceso de reserva por unidad de tiempo es positivo, es decir,

$$1 - \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \mu_i > 0,$$

pues en caso contrario la probabilidad de ruina como la definiremos a continuación será siempre igual a 1.

Definimos la probabilidad de ruina del proceso de riesgo modulado como

$$\psi(u) = \mathbb{P} \left( \inf_{t \geq 0} U_t < 0 \mid U_0 = u \right),$$

y definamos además la probabilidad de ruina dado el estado inicial del proceso modulador como

$$\psi_i(u) = \mathbb{P} \left( \inf_{t \geq 0} U_t < 0 \mid U_0 = u, J_0 = i \right),$$

para todo  $i \in E$ .

Si la distribución inicial de  $J$  es  $\pi_0 = (\pi_{01}, \pi_{02})$ , por el teorema de probabilidad total,

$$\psi(u) = \sum_{i \in E} \pi_{0i} \psi_i(u).$$

Trabajaremos con la probabilidad de supervivencia y las probabilidades de supervivencia

dado el estado inicial que se definen como

$$\phi(u) = \mathbb{P} \left( \inf_{t \geq 0} U_t \geq 0 \mid U_0 = u \right) = 1 - \psi(u)$$

y

$$\phi_i(u) = \mathbb{P} \left( \inf_{t \geq 0} U_t \geq 0 \mid U_0 = u, J_0 = i \right) = 1 - \psi_i(u), \quad i \in E.$$

Análogamente, si la distribución inicial de  $J$  es  $\pi_0 = (\pi_{01}, \pi_{02})$ , entonces

$$\phi(u) = \sum_{i \in E} \pi_{0i} \phi_i(u).$$

## Capítulo 2

# Probabilidad de ruina

En este capítulo resolveremos de forma analítica el problema de encontrar la probabilidad de ruina para un caso muy particular: con dos estados moduladores y montos de reclamación con distribución exponencial.

Primero deduciremos una ecuación integro-diferencial de la probabilidad de supervivencia dado el estado inicial. Gerber [6] introdujo las ecuaciones de este tipo para el modelo de ruina no modulado como una aplicación de la teoría de renovación. Más tarde, Gerber y Elias [8] habrían de aplicarlo al tiempo de ruina del proceso. Hasta que Asmussen [1] propuso el modelo en un ambiente modulado sin difusión, derivó ecuaciones integro-diferenciales de la generadora de momentos, los pagos de dividendos antes de la ruina y la esperanza de la función de penalización. Reinhard [15] también estudió este modelo y derivó una ecuación como la de este trabajo: para la probabilidad de supervivencia; además expone el caso de montos de reclamación exponenciales y dos estados moduladores.

Más recientemente, Lu y Tsai [11] derivaron un sistema de ecuaciones para la esperanza de la función de penalización en este modelo: modulado y con difusión. En este trabajo presentamos un sistema de ecuaciones integro-diferenciales para las probabilidades de supervivencia basado en el trabajo que Yu y Huang [19] hicieron sin difusión para la generadora de momentos y tiempos de ruina, en el que dan un argumento heurístico que aquí presentaremos acorde a nuestro caso.

Después, utilizaremos la transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones integro-diferenciales con dos estados como lo hizo Lu [10] para el caso sin difusión y montos cuyas distribuciones tienen transformadas irracionales. En este trabajo sólo mostramos con detalle el caso de montos con distribución exponencial, separando los casos cuando hay

difusión y cuando no, pues el tratamiento de las ecuaciones resultantes requiere métodos diferentes. Al final de cada caso resolveremos un ejemplo numérico.

## 2.1. Ecuación integro-diferencial

La idea general para obtener la ecuación integro-diferencial se basa en el análisis de la probabilidad de supervivencia dentro de un pequeño intervalo de tiempo  $[0, dt]$ . Dado un momento de tiempo  $t = 0$ , estado modulador inicial  $J_0 = i$  y capital en ese momento  $U_0 = u$ , calcularemos la probabilidad de sobrevivir hasta el tiempo  $dt$ , o equivalentemente, al complemento: tener reserva negativa en algún momento entre  $t = 0$  y  $dt$ .

### 2.1.1. Ruina instantánea con capital inicial cero y en presencia de difusión

Primero veamos que al encontrarnos en presencia de difusión y con reserva cero, el proceso se vuelve negativo de manera inmediata. En términos de nuestro análisis, esto queda plasmado en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.** *Para el proceso de riesgo definido en la Sección 1.2, si  $u = 0$  y  $\sigma_i > 0$  para todo  $i \in E$ , entonces*

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \right) = 1$$

para todo  $dt > 0$ .

Para demostrar lo anterior, veamos primero el siguiente lema.

**Lema 2.2.** *Un movimiento Browniano con deriva se vuelve negativo en  $[0, dt]$  con probabilidad 1 para todo  $dt > 0$ .*

*Demostración.* Consideremos el proceso  $\sigma W_t + t$ , donde  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar y llamemos  $A$  a su valor al final del intervalo:  $A = \sigma W_{dt} + dt$ . Condicionando al valor de  $A$ : si  $A < 0$ , el proceso se habrá vuelto negativo con seguridad; el caso  $A = 0$  tiene probabilidad 0 y no lo consideramos; si  $A > 0$ , recordemos de la Proposición 1.41 que la probabilidad de que el proceso alcance el valor  $-B < 0$  antes de que alcance el valor  $A > 0$  es

$$\mathbb{P} \left( \inf_{t : \sigma W_t + t \leq -B} < \inf_{t : \sigma W_t + t \geq A} \right) = \frac{1 - e^{-2A/\sigma^2}}{e^{2B/\sigma^2} - e^{-2A/\sigma^2}}.$$

Luego, la probabilidad de que el proceso haya alcanzado el valor  $-B$  antes del valor  $A$  es menor o igual a la probabilidad de que el proceso se haya vuelto negativo en el intervalo  $[0, dt]$  pues el primer evento es un caso particular del segundo, es decir,

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} \sigma W_h + h < 0 \right) \geq \frac{1 - e^{-2A/\sigma^2}}{e^{2B/\sigma^2} - e^{-2A/\sigma^2}}$$

para todo  $B > 0$ .

Notemos que hay valores pequeños y positivos de  $B$  para los cuales el lado derecho de la desigualdad es tan cercano a 1 (por la izquierda) como se quiera, de donde

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} \sigma_i W_h + h < 0 \right) = 1.$$

Con eso hemos visto que para casi cualquier  $A$ , el movimiento Browniano se vuelve negativo en  $[0, dt]$  casi seguramente y acabamos la prueba.  $\square$

*Demostración.* (De la Proposición 2.1) Pensando en nuestro proceso de riesgo, basta condicionar a  $J_0 = i$  y a un tiempo menor al del primer cambio de estado modulador o a la primera reclamación y notar que previo a eso el proceso se comporta como un movimiento Browniano con deriva y por lo cual ya se habrá arruinado antes con probabilidad 1.

Definamos la variable aleatoria

$$\tau := \inf t > 0 : J_t = J_0, N_t \geq 1$$

y condicionando al valor de  $\tau$ , por probabilidad total tenemos

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \right) = \int_0^{\infty} \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \mid \tau = s \right) f_{\tau}(s) ds,$$

donde  $f_{\tau}(s)$  es la densidad de  $\tau$  en  $s$ . Dado que  $\tau = s$ , el proceso  $U_t$  es idénticamente  $\sigma_i W_t + t$  en todo el intervalo  $[0, s]$ . Por el lema 2.2,  $\sigma_i W_t + t$  se vuelve negativo en  $[0, \min s, dt]$  con probabilidad 1. Por lo tanto

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \mid \tau = s \right) = 1,$$

y con ello

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \right) = \int_0^{\infty} f_{\tau}(s) ds = 1.$$

Recordemos que este resultado es válido condicionado al valor  $J_0 = i$ , por probabilidad

total el resultado también es válido sin condicionar.

□

Esto nos da una idea de lo que la difusión le hace al modelo: en presencia de difusión, el proceso se puede considerar como arruinado con seguridad al encontrarnos con reserva cero.

### 2.1.2. Ruina en un lapso $[0, dt]$

Para el caso general usaremos la siguiente forma de la probabilidad de supervivencia basada en un argumento de renovación:

$$\phi_i(u) = \mathbb{E}[\phi_{J_{dt}}(U_{dt})] - \zeta(dt),$$

donde  $\zeta(dt)$  es la probabilidad de que el proceso  $U$  se haya arruinado en el intervalo  $(0, dt)$  y que  $U_{dt} \geq 0$ :

$$\zeta(dt) = \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0, U_{dt} \geq 0 \right).$$

De aquí en adelante  $\mathbb{E}$  es la esperanza dada la filtración natural al proceso modulador.

La manera de deducir la ecuación anterior es condicionando al valor  $U_{dt} = v$ . La probabilidad de supervivencia del proceso iniciado en el estado  $i$  y con reserva  $u$  es, por la pérdida de memoria de los procesos  $J$  y  $N$ , la probabilidad de supervivencia del proceso que inicia en el estado  $J_{dt}$  con reserva  $v$ ; si  $v < 0$ , la probabilidad será cero, si  $v > 0$ , a la probabilidad de supervivencia hay que restarle la probabilidad de que se haya arruinado antes:

$$\phi_i(u) = \phi_{J_{dt}}(v) - \xi(v, dt),$$

donde

$$\xi(v, dt) = \begin{cases} \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \mid U_{dt} = v \right), & v \geq 0 \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

Al integrar sobre todo  $\mathbb{R}$  respecto a la distribución de  $v$  obtenemos la ecuación deseada.

Además de tener condicionado el estado modulador inicial, condicionaremos a cuatro posibles casos para los cuales, con base en las Proposiciones 1.6 y 1.23, damos su probabilidad de ocurrencia. Este análisis es válido para todo  $u > 0$ , y lo es para  $u = 0$  siempre y cuando no haya difusión. En el pequeño intervalo  $[0, dt]$  puede pasar uno y sólo uno de

los siguientes casos:

- **Caso 1:** El proceso  $J$  no cambia de estado y el proceso  $N$  no obtiene reclamación, que ocurre con probabilidad  $(1 - q_i dt + o(dt))(1 - \lambda_i dt + o(dt)) = 1 - q_i dt - \lambda_i dt + o(dt)$ .
- **Caso 2:** El proceso  $J$  no cambia de estado y el proceso  $N$  obtiene exactamente una reclamación, que ocurre con probabilidad  $(1 - q_i dt + o(dt))(\lambda_i dt + o(dt)) = \lambda_i dt + o(dt)$ .
- **Caso 3:** El proceso  $J$  cambia de estado exactamente una vez y el proceso  $N$  no obtiene reclamación, que ocurre con probabilidad  $(q_i dt + o(dt))(1 - \lambda_i dt + o(dt)) = q_i dt + o(dt)$ .
- **Caso 4:** Tanto  $J$  cambia de estado una vez como  $N$  obtiene una reclamación, o el proceso  $J$  cambia de estado al menos dos veces, o el proceso  $N$  obtiene al menos dos reclamaciones, que ocurre con probabilidad  $(q_i dt + o(dt))(\lambda_i dt + o(dt)) + o(dt) = o(dt)$ .

En cada caso vamos a demostrar que  $\zeta(dt) = 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$ , y en el caso 1 además probaremos que  $\zeta(dt) = o(dt)$ . Luego calcularemos la probabilidad de supervivencia dado cada caso.

**Caso 1.** Como  $J$  no cambió de estado,  $\sigma_{J_s} = \sigma_i$  para todo  $s \in [0, dt]$ , y por lo tanto  $U_{dt} = u + dt + \sigma_i W_{dt}$ .

*Demostración de que  $\zeta(dt) = o(dt)$ .* Si  $\sigma_i = 0$ , sin reclamaciones el proceso no se arruina para cualquier  $u \geq 0$ , de donde  $\zeta(dt) = 0$ . Si  $\sigma_i > 0$ , consideremos solamente  $u > 0$ , pues ya sabemos que en presencia de difusión el proceso que inicia en  $u = 0$  se arruina inmediatamente.

Notemos que si el proceso iniciado en  $u$  se arruina en un intervalo  $(0, dt)$ , entonces el proceso  $\sigma_i W_t$  alcanzó el nivel  $-u$  en ese mismo intervalo de tiempo:

$$\inf_{0 \leq h \leq dt} \{u + h + \sigma_i W_h\} < 0 \quad u + \inf_{0 \leq h \leq dt} \sigma_i W_h < 0,$$

y por lo tanto

$$\zeta(dt) < \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} \sigma_i W_h < -u \right).$$

La idea que hay detrás, y que volveremos a usar en los otros casos, es que la difusión debe alcanzar cierto valor por sí sola para que el proceso se arruine. Ahora veremos que para valores chicos de  $dt$ , se vuelve menos probable que la difusión alcance esos valores pues la varianza del movimiento Browniano es muy pequeña.

Por el Lema 1.37,

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} \sigma_i W_h < -u \right) = 2\mathbb{P}(\sigma_i W_{dt} < -u) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2 dt}} \int_u^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_i^2 dt} \right\} dx.$$

Por otro lado,  $\exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_i^2 dt} \right\} < \exp \left\{ -\frac{ux}{\sigma_i^2 dt} \right\}$  para todo  $x > u$ , por lo tanto

$$\int_u^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_i^2 dt} \right\} dx < \int_u^\infty \exp \left\{ -\frac{ux}{\sigma_i^2 dt} \right\} dx = \sigma_i^2 dt \cdot \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma_i^2 dt} \right\}.$$

Luego,

$$\zeta(dt) < 2 \frac{\sigma_i^2 dt}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma_i^2 dt} \right\},$$

y

$$\frac{\zeta(dt)}{dt} < 2 \frac{\sigma_i}{2\pi dt} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma_i^2 dt} \right\} \rightarrow 0$$

cuando tendemos  $dt \rightarrow 0$  pues la función exponencial se va más rápido a cero que la fracción a infinito, lo que se puede mostrar aplicando la regla de L'Hopital.  $\square$

Para el caso 1 podemos escribir la probabilidad de ruina como

$$\phi_i(u) = \mathbb{E}[\phi_i(u + dt + \sigma_i W_{dt})] + o(dt).$$

Si expandimos la función  $\phi_i$  en un polinomio de Taylor con residuo,

$$\phi_i(u + dt + \sigma_i W_{dt}) = \phi_i(u) + \phi_i'(u)(dt + \sigma_i W_{dt}) + \phi_i''(v) \frac{(dt + \sigma_i W_{dt})^2}{2},$$

donde  $v = v(u, u + dt + \sigma_i W_{dt})$  es una variable aleatoria que converge en probabilidad a  $u$  cuando  $dt \rightarrow 0$ .

Desarrollando el binomio al cuadrado y tomando esperanzas obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi_i(u + dt + \sigma_i W_{dt})] &= \phi_i(u) + \phi_i(u)dt + \phi_i(u)\sigma_i\mathbb{E}[W_{dt}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\phi_i(v)]dt^2 + \sigma_i\mathbb{E}[\phi_i(v)W_{dt}]dt + \frac{\sigma_i^2}{2}\mathbb{E}[\phi_i(v)W_{dt}^2].\end{aligned}$$

Notemos que podemos sustituir los términos

$$\sigma_i\mathbb{E}[\phi_i(v)W_{dt}]dt = \sigma_i(\mathbb{E}[\phi_i(v)]\mathbb{E}[W_{dt}] + \text{Cov}(\phi_i(v), W_{dt}))dt$$

y

$$\frac{\sigma_i^2}{2}\mathbb{E}[\phi_i(v)W_{dt}^2] = \frac{\sigma_i^2}{2}(\mathbb{E}[\phi_i(v)]\mathbb{E}[W_{dt}^2] + \text{Cov}(\phi_i(v), W_{dt}^2)).$$

Además los términos  $\text{Cov}(\phi_i(v), W_{dt})dt$  y  $\text{Cov}(\phi_i(v), W_{dt}^2)$  son ambos  $o(dt)$  pues

$$\frac{|\text{Cov}(\phi_i(v), W_{dt})|dt}{dt} \leq \frac{\overline{\text{Var}(\phi_i(v))\text{Var}(W_{dt})}}{dt} = \overline{dt \cdot \text{Var}(\phi_i(v))}$$

y

$$\frac{|\text{Cov}(\phi_i(v), W_{dt}^2)|}{dt} \leq \frac{\overline{\text{Var}(\phi_i(v))\text{Var}(W_{dt}^2)}}{dt} = \frac{\overline{3dt^2 \cdot \text{Var}(\phi_i(v))}}{dt} = \overline{3\text{Var}(\phi_i(v))};$$

si  $v = u$  en probabilidad, también  $\phi_i(v) = \phi_i(u)$  en probabilidad cuando  $dt = 0$ , y  $\text{Var}(\phi_i(v)) = 0$  cuando  $dt = 0$ .

Finalmente usamos que  $\mathbb{E}[W_{dt}] = 0$  y  $\mathbb{E}[W_{dt}^2] = dt$  para escribir la probabilidad de supervivencia dado el caso 1:

$$\phi_i(u) = \mathbb{E}[\phi_i(u + dt + \sigma_i W_{dt})] + o(dt) = \phi_i(u) + \phi_i(u)dt + \frac{\sigma_i^2}{2}\mathbb{E}[\phi_i(v)]dt + o(dt). \quad (2.3)$$

**Caso 2.** Dado que hubo una reclamación sin cambio de estado, condicionamos al tamaño de la reclamación  $X = x$ . El proceso al tiempo  $dt$  tendrá el valor  $U_{dt} = u + dt - x + \sigma_i W_{dt}$ .

*Demostración de que  $\zeta(dt) = 0$  cuando  $dt = 0$ .* Recordemos que  $\zeta(dt)$  es la probabilidad de que el proceso  $U$  se haya arruinado en el intervalo  $(0, dt)$  y además  $U_{dt} \geq 0$ ; llamemos

$\zeta_x(dt)$  a la misma probabilidad pero condicionada a  $X = x$ :

$$\zeta_x(dt) = \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0, U_{dt} \geq 0 \mid X = x \right).$$

Si  $u - x > 0$ , como en el caso 1, la probabilidad de ruina en el intervalo  $(0, dt)$  es menor a la probabilidad de que el proceso  $\sigma_i W_h$  se desvíe  $u - x$  hacia abajo del cero:

$$\inf_{0 \leq h \leq dt} U_h < 0 \quad u - x + \inf_{0 \leq h \leq dt} \sigma_i W_h < 0,$$

y usando el Lema 1.37,

$$\zeta_x(dt) < 2\mathbb{P}(\sigma_i W_{dt} < -u + x).$$

Si  $u - x < 0$ , tomemos  $\epsilon > 0$  suficientemente chica para que  $u - x + \epsilon < 0$ . Para  $dt < \epsilon$ ,

$$U_{dt} = u - x + dt + \sigma_i W_{dt} > 0 \quad u - x + \epsilon + \sigma_i W_{dt} > 0,$$

y por lo tanto

$$\zeta_x(dt) < \mathbb{P}(\sigma_i W_{dt} > -u + x - \epsilon).$$

En ambos casos  $\zeta_x(dt) = 0$  cuando  $dt = 0$ , pues  $W_{dt} = 0$  en probabilidad. Luego,  $\zeta(dt) = \int_{\mathbb{R}} \zeta_x(dt) dF_i(x) = 0$  cuando  $dt = 0$ .  $\square$

Para calcular la probabilidad de supervivencia en el caso 2 integramos sobre  $\mathbb{R}$  respecto a la distribución de los montos de reclamación en el estado  $i$ ,

$$\phi_i(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\phi_i(u + dt - x + \sigma_i W_{dt})] dF_i(x) - \zeta(dt). \quad (2.4)$$

**Caso 3.** Dado que hubo sólo un cambio de estado del proceso modulador, sea  $H$  el tiempo en el que se dio el salto, condicionamos a que fue del estado  $i$  al estado  $j$  y en el tiempo  $H = h \in [0, dt]$ . El proceso de riesgo al tiempo  $dt$  tiene valor  $U_{dt} = u + dt + \int_0^h \sigma_i dW_s + \int_h^{dt} \sigma_j dW_s = u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j (W_{dt} - W_h)$ .

*Demostración de que  $\zeta(dt) = 0$  cuando  $dt = 0$ .* Llamemos  $\zeta_{(j,h)}(dt)$  a la misma probabilidad que calcula  $\zeta(dt)$  pero condicionada al estado  $j$  al que salta y al tiempo  $h$  de salto

del proceso  $J$ .

$$\zeta_{(j,h)}(dt) = \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, U_{dt} \geq 0 \mid J_H = j, H = h \right).$$

Además, todas las probabilidades  $\mathbb{P}$  en esta demostración serán también condicionadas a  $J_H = j$  y  $H = h$ , salvo al final que se indique lo contrario.

La probabilidad de ruina en el intervalo  $[0, dt]$  puede separarse en la probabilidad de que el proceso se arruine por primera vez en  $(0, h)$  y la probabilidad de que se arruine por primera vez en  $(h, dt)$ , por lo que

$$\zeta_{(j,h)}(dt) < \mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h' \leq h} U_{h'} < 0 \right) + \mathbb{P} \left( \inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, \inf_{0 \leq h' \leq h} U_{h'} \geq 0 \right).$$

Notemos además lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, \inf_{0 \leq h' \leq h} U_{h'} \geq 0 \right) &= \mathbb{P} \left( \inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, U_h \geq 0 \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, U_h \geq \frac{u}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left( \inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, 0 \leq U_h < \frac{u}{2} \right). \end{aligned}$$

Por un argumento análogo al caso 1 y 2:

$$\inf_{0 \leq h' \leq h} U_{h'} < 0, U_0 = u \quad \inf_{0 \leq h' \leq h} \sigma_i W_{h'} < -u,$$

y por el Lema 1.37,

$$\mathbb{P} \left( \inf_{0 \leq h' \leq h} U_{h'} < 0 \right) < 2\mathbb{P}(\sigma_i W_h < -u);$$

también tenemos

$$\inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, U_h > \frac{u}{2} \quad \inf_{h \leq h' \leq dt} \sigma_j W_{h'} < -\frac{u}{2},$$

y por el Lema 1.37,

$$\mathbb{P} \left( \inf_{h \leq h' \leq dt} U_{h'} < 0, U_h > \frac{u}{2} \right) < 2\mathbb{P} \left( \sigma_j (W_{dt} - W_h) < -\frac{u}{2} \right);$$

por último,

$$0 < U_h < \frac{u}{2}, U_0 = u \quad \sigma_i W_h < -\frac{u}{2},$$

y entonces

$$\mathbb{P}\left(0 < U_h < \frac{u}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\sigma_i W_h < -\frac{u}{2}\right).$$

Luego,

$$\zeta_{(j,h)}(dt) < 2\mathbb{P}(\sigma_i W_h < -u) + 2\mathbb{P}\left(\sigma_j(W_{dt} - W_h) < -\frac{u}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\sigma_i W_h < -\frac{u}{2}\right).$$

Cada una de estas tres probabilidades es la cola izquierda de una distribución normal con varianza menor a  $\max \sigma_i, \sigma_j W_{dt}$ , por lo tanto

$$\zeta_{(j,h)}(dt) < 5\mathbb{P}(\max \sigma_i, \sigma_j W_{dt} < -u).$$

El lado derecho de la desigualdad ya no depende de  $h$ , así que integrando sobre  $(0, dt)$  respecto a la función de distribución de  $H$ , obtenemos del lado izquierdo la probabilidad que calcula  $\zeta(dt)$  sólo condicionada al estado de salto  $j$ ,

$$\zeta_{(j)}(dt) < 5\mathbb{P}(\max \sigma_i, \sigma_j W_{dt} < -u),$$

mientras que ya sabemos que el lado derecho, también sólo condicionado a  $J_H = j$ , se va a 0 cuando  $dt \rightarrow 0$ .

Ya que cada  $\zeta_{(j)}(dt) \rightarrow 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$ , también

$$\zeta(dt) = \sum_{j \in E} p_{ij} \zeta_{(j)}(dt) \rightarrow 0.$$

□

La función de densidad de  $H$  en  $h \in [0, dt]$  es el cociente entre la densidad del tiempo de salto en  $h$  y la probabilidad de que haya un salto en  $[0, dt]$ , es decir  $\frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}}$ , pues el tiempo de salto en el proceso  $J$  dado que inicia en  $i$  se distribuye exponencial de parámetro  $q_i$ . Calculamos la probabilidad de supervivencia dado el caso 3 integrando respecto a  $h$  y con el teorema de probabilidad total para los estados  $j$  a los que pudo saltar el proceso  $J$ :

$$\phi_i(u) = \sum_{j \in E} p_{ij} \left( \int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh - \zeta_{(j)}(dt) \right)$$

$$\phi_i(u) = \sum_{j \in E} p_{ij} \int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h)) \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh - \zeta(dt)]. \quad (2.5)$$

Con el polinomio de Taylor de grado 0 con residuo de  $\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))$  reescribimos

$$\mathbb{E}[\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] = \phi_j(u) + \mathbb{E}[\phi_j(v)(dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] \quad (2.6)$$

como en el caso 1, donde  $v = (u, u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))$ .

Por un lado,

$$\int_0^{dt} \phi_j(u) \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh = \phi_j(u); \quad (2.7)$$

por otro,

$$\int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(v)(dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h)) \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh] = 0, \quad (2.8)$$

cuando  $dt \rightarrow 0$ , lo cual se puede demostrar acotando la esperanza.

Primero,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\phi_j(v)(dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h)))| &\leq \mathbb{E}\left(|\phi_j(v)| \cdot |dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h)|\right) \\ &\leq \max |\phi_j| \cdot \mathbb{E}|dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h)| \\ &\leq \max |\phi_j| \cdot \mathbb{E}|dt| + |\sigma_i W_h| + |\sigma_j(W_{dt} - W_h)| \\ &\leq \max |\phi_j| \cdot \left(|dt| + \sigma_i \mathbb{E}|W_h| + \sigma_j \mathbb{E}|W_{dt} - W_h|\right). \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Jensen:

$$\mathbb{E}|W_h| = \mathbb{E}\left[\sqrt{W_h^2}\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}[W_h^2]} = \sqrt{\bar{h}} \leq \sqrt{dt}$$

y

$$\mathbb{E}|W_{dt} - W_h| = \mathbb{E}\left[\sqrt{(W_{dt} - W_h)^2}\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(W_{dt} - W_h)^2]} = \sqrt{dt - \bar{h}} \leq \sqrt{dt}.$$

Por lo tanto

$$\left|\mathbb{E}(\phi_j(v)(dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))\right| \leq \max |\phi_j| \cdot \left(dt + \sigma_i \sqrt{dt} + \sigma_j \sqrt{dt}\right).$$

Si integramos respecto a la distribución de  $h$ , por la monotonía de la integral y la de-

sigualdad del triángulo:

$$\left| \int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(v)(dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh \right| \leq \max |\phi_j| \cdot (dt + \sigma_i \bar{dt} + \sigma_j \bar{dt}).$$

El lado derecho claramente tiende a 0 cuando  $dt \rightarrow 0$ .

Finalmente, al considerar los resultados (2.7) y (2.8) y la integral respecto a la distribución de  $H$  en la ecuación (2.6), obtenemos

$$\int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh = \phi_j(u) \quad (2.9)$$

cuando  $dt \rightarrow 0$ .

**Caso 4.** Aquí simplemente llamaremos  $r$  a la probabilidad de supervivencia.

Con lo anterior estamos listos para deducir nuestro resultado principal.

**Teorema 2.10.** *Para el proceso de riesgo definido en la Sección 1.2, la función de supervivencia dado el estado modulador inicial  $J_0 = i$ ,  $\phi_i(u)$ , cumple la siguiente ecuación:*

$$\phi_i(u) + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \phi_i''(u) = (\lambda_i + q_i) \phi_i(u) - q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \phi_j(u) - \lambda_i \int_0^u \phi_i(u-x) dF_i(x). \quad (2.11)$$

*Demostración.* Por el teorema de probabilidad total, la probabilidad de supervivencia es igual a la suma de las probabilidades condicionadas sobre los cuatro posibles casos (expresiones (2.3), (2.4) y (2.5)) por las probabilidades de ocurrencia de cada caso:

$$\begin{aligned} \phi_i(u) = & (1 - q_i dt - \lambda_i dt + o_1(dt)) \left( \phi_i(u) + \phi_i(u) dt + \frac{\sigma_i^2}{2} \mathbb{E}[\phi_i(v)] dt + o(dt) \right) \\ & + (\lambda_i dt + o_2(dt)) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\phi_i(u + dt - x + \sigma_i W_{dt})] dF_i(x) - \zeta^{(2)}(dt) \right) \\ & + (q_i dt + o_3(dt)) \sum_{j \in E} p_{ij} \int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh - \zeta^{(3)}(dt) \\ & + (q_i \lambda_i dt^2 + o_4(dt)) r, \end{aligned}$$

donde  $\zeta^{(2)}(dt)$  y  $\zeta^{(3)}(dt)$  son las probabilidades  $\zeta(dt)$  condicionadas a los casos 2 y 3,

respectivamente.

Notemos que podemos restar  $\phi_i(u)$  de ambos lados y dividir el resto por  $dt$ :

$$\begin{aligned}
0 = & \phi_i(u) + \frac{\sigma_i^2}{2} \mathbb{E}[\phi_i(v)] + \frac{o(dt)}{dt} \\
& + \left( -q_i - \lambda_i + \frac{o_1(dt)}{dt} \right) \left( \phi_i(u) + \phi_i(u)dt + \frac{\sigma_i^2}{2} \mathbb{E}[\phi_i(v)]dt + o(dt) \right) \\
& + \left( \lambda_i + \frac{o_2(dt)}{dt} \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\phi_i(u + dt - x + \sigma_i W_{dt})] dF_i(x) - \zeta^{(2)}(dt) \right) \\
& + \left( q_i + \frac{o_3(dt)}{dt} \right) \sum_{j \in E} p_{ij} \int_0^{dt} \mathbb{E}[\phi_j(u + dt + \sigma_i W_h + \sigma_j(W_{dt} - W_h))] \frac{q_i e^{-q_i h}}{1 - e^{-q_i dt}} dh - \zeta^{(3)}(dt) \\
& + \left( q_i \lambda_i dt + \frac{o_4(dt)}{dt} \right) r.
\end{aligned}$$

Al tender  $dt \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{E}[\phi_i(v)] \rightarrow \phi_i(u)$  y  $\mathbb{E}[\phi_i(u + dt - x + \sigma_i W_{dt})] \rightarrow \phi_i(u - x)$ , pues  $v \rightarrow u$  y  $W_{dt} \rightarrow 0$  en probabilidad.

Así,

$$\begin{aligned}
0 = & \phi_i(u) + \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_i(u) \\
& + (-q_i - \lambda_i) \phi_i(u) \\
& + \lambda_i \int_{\mathbb{R}} \phi_i(u - x) dF_i(x) \\
& + q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \phi_j(u).
\end{aligned}$$

Recordemos que  $\phi_i(u - x)$  sólo es positiva para valores  $x < u$  y  $F_i$  tiene soporte en los positivos, por lo que podemos limitar la integral al intervalo  $[0, u]$ . Con ello llegamos a la expresión que buscábamos.  $\square$

A la ecuación (2.11) la llamamos **ecuación integro-diferencial del modelo de riesgo Markov-modulado con difusión**.

### 2.1.3. Solución general para la transformada de Laplace

Encontraremos la solución general para  $\hat{\phi}_i(s)$ , la transformada de Laplace de  $\phi_i(u)$ . Para ello, primero deduciremos las expresiones de  $\phi_i(0)$  en el caso  $\sigma_i = 0$  y  $\phi_i(0)$  en el caso  $\sigma_i > 0$ , y luego tomaremos la transformada de Laplace de la ecuación integro-diferencial.

Podemos integrar la expresión (2.11) respecto a  $u$  desde 0 hasta  $t$  y obtener

$$\begin{aligned} \phi_i(t) - \phi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2[\phi_i(t) - \phi_i(0)] = & (\lambda_i + q_i) \int_0^t \phi_i(u) du \\ & - q_i \int_0^t \sum_{j \in E} p_{ij} \phi_j(u) du - \lambda_i \int_0^t \int_0^u \phi_i(u-x) dF_i(x) du. \end{aligned}$$

Calculemos la doble integral haciendo un cambio de variable  $x = u - x$  y un cambio en el orden de integración:

$$\int_0^t \int_0^u \phi_i(u-x) f_i(x) dx du = \int_0^t \int_0^u \phi_i(x) f_i(u-x) dx du = \int_0^t \int_{x'}^t \phi_i(x) f_i(u-x) du dx .$$

El término  $\phi_i(x)$  puede salir de la integral respecto a  $u$  y ésta se calcula como

$$\int_{x'}^t f_i(u-x) du = \int_0^{t-x'} f_i(u) du = F_i(t-x).$$

Luego,

$$\int_0^t \int_0^u \phi_i(u-x) f_i(x) dx du = \int_0^t \phi_i(x) F(t-x) dx ,$$

que con un cambio de variable escribimos como

$$\int_0^t \phi_i(t-x) F(x) dx.$$

Si hacemos un cambio de variable en la integral  $\int_0^t \phi_i(u) du$  para sustituirla por  $\int_0^t \phi_i(t-x) dx$  en la ecuación (2.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi_i(t) - \phi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2[\phi_i(t) - \phi_i(0)] = & -\lambda_i \int_0^t \phi_i(t-x)[1-F_i(x)] dx + q_i \int_0^t \phi_i(u) - \sum_{j \in E} p_{ij} \phi_j(u) du. \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Proposición 2.13.**

$$\int_0^t \phi_i(t-x)[1-F_i(x)] dx \rightarrow \mu_i$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Dada  $\epsilon > 0$ , tomemos  $t_1 > 0$  tal que

$$\int_0^{t_1} [1-F_i(x)] dx > \mu_i - \epsilon,$$

la cual sabemos que existe pues  $\int_0^t [1 - F_i(x)]dx = \mu_i$ .

Sea

$$\delta = \frac{\int_0^{t_1} [1 - F_i(x)]dx - (\mu_i - \epsilon)}{\int_0^{t_1} [1 - F_i(x)]dx} > 0.$$

Tomamos  $t > t_1$  tal que  $\phi_i(t - t_1) > 1 - \delta$ , el cual sabemos que existe pues  $\phi_i(u) \leq 1$  cuando  $u \geq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx &= \int_{t_1}^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx + \int_0^{t_1} \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx \\ &> \int_{t_1}^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx + \int_0^{t_1} (1 - \delta)[1 - F_i(x)]dx \\ &> \int_{t_1}^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx + \int_0^{t_1} [1 - F_i(x)]dx \\ &\quad - \int_0^{t_1} \delta[1 - F_i(x)]dx \\ &> \int_{t_1}^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx + \int_0^{t_1} [1 - F_i(x)]dx \\ &\quad - \int_0^{t_1} [1 - F_i(x)]dx + (\mu_i - \epsilon) \\ &> \int_{t_1}^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx + (\mu_i - \epsilon) \\ &> \mu_i - \epsilon. \end{aligned}$$

Con lo que hemos mostrado que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $t > 0$  tal que a partir de este valor, la integral  $\int_0^t \phi_i(t-x)[1 - F_i(x)]dx$  dista a lo más  $\epsilon$  de  $\mu_i$  y acabamos la prueba.

□

Al tender  $t \rightarrow \infty$  la función de supervivencia cumple que  $\phi_i(t) \rightarrow 1$  y  $\phi_i(t) \rightarrow 0$ , y con la proposición anterior, la ecuación (2.12) se reescribe como

$$\phi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2\phi_i(0) = 1 - \lambda_i\mu_i - q_i - \int_0^{\infty} \phi_i(u) - \sum_{j \in E} p_{ij}\phi_j(u) du. \quad (2.14)$$

Notemos que la ecuación anterior nos da una expresión para  $\phi_i(0)$  sin  $\phi_i'(0)$  cuando  $\sigma_i = 0$  mientras que nos da una para  $\phi_i(0)$  sin  $\phi_i'(0)$  cuando  $\sigma_i > 0$  pues en ese caso  $\phi_i'(0) = 0$  por la Proposición 2.1.

A continuación tomaremos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (2.11), para ello recordemos la forma de la transformada de derivadas:

$$L \phi_i(u) (s) = sL \phi_i(u) (s) - \phi_i(0),$$

$$\begin{aligned} L \phi_i(u) (s) &= sL \phi_i(u) (s) - \phi_i(0) = s(sL \phi_i(u) (s) - \phi_i(0)) - \phi_i(0) \\ &= s^2L \phi_i(u) (s) - s\phi_i(0) - \phi_i(0). \end{aligned}$$

También notemos que por el teorema de la convolución

$$L \left\{ \int_0^u \phi_i(u-x)f_i(x)d(x) \right\} (s) = L f_i(u) (s)L \phi_i(u) (s).$$

Por lo tanto, si llamamos  $\hat{\phi}_i = L \phi_i$  y  $\hat{f}_i = L f_i$ ,

$$\begin{aligned} s\hat{\phi}_i(s) - \phi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2[s^2\hat{\phi}_i(s) - s\phi_i(0) - \phi_i(0)] &= (\lambda_i + q_i)\hat{\phi}_i(s) \\ &\quad - q_i \sum_{j \in E} p_{ij}\hat{\phi}_j(s) - \lambda_i\hat{f}_i(s)\hat{\phi}_i(s). \end{aligned}$$

Si la reescribimos de la siguiente manera

$$\left[ s + \frac{\sigma_i^2}{2}s^2 - (\lambda_i + q_i) + \lambda_i\hat{f}_i(s) \right] \hat{\phi}_i(s) + q_i \sum_{j \in E} p_{ij}\hat{\phi}_j(s) = \left[ 1 + \frac{\sigma_i^2}{2}s \right] \phi_i(0) + \frac{\sigma_i^2}{2}\phi_i(0),$$

para todos los estados  $i = 1, 2, \dots, d$ , el sistema de ecuaciones a resolver es

$$A(s)\hat{\Phi}(s) = \left( I_d + \frac{1}{2}s\Sigma \right) \Phi(0) + \frac{1}{2}\Sigma\Phi(0), \quad (2.15)$$

donde  $I_d$  es la matriz identidad de dimensión  $d$ ,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2)$ ,

$$\begin{aligned} A(s) &= \begin{pmatrix} s + \frac{1}{2}\sigma_1^2s^2 - \lambda_1 - q_1 + \lambda_1\hat{f}_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s + \frac{1}{2}\sigma_d^2s^2 - \lambda_d - q_d + \lambda_d\hat{f}_d(s) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_d \end{pmatrix} P, \end{aligned}$$

y  $P$  es la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov asociada al

proceso modulador.

Si  $A(s)$  tiene inversa,

$$\hat{\Phi}(s) = A(s)^{-1} \left( I_d + s \frac{1}{2} \Sigma \right) \Phi(0) + \frac{1}{2} \Sigma \Phi(0)$$

es la solución al sistema de ecuaciones (2.15) suponiendo conocidos los valores de  $\phi_i(0)$  y  $\phi_i(0)$ . En general no sabemos si este problema tiene solución cerrada o si una aproximación sea económica computacionalmente.

## 2.2. Caso particular: dos estados y montos de reclamación con distribución exponencial

En esta sección resolveremos el problema de la probabilidad de ruina (supervivencia) para el caso en el que tenemos dos estados moduladores, que más adelante interpretaremos como escenario adverso y escenario favorable, y donde los montos de reclamación siguen una distribución exponencial. El modo de tratar de llegar a la fórmula cerrada para  $\phi_i(u)$  nos obliga a separar el problema en dos casos: sin difusión y con difusión. En ambos casos necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 2.16.** *Sea  $f(x)$  la función de densidad de una variable aleatoria exponencial con media  $\mu$ . Entonces la transformada de Laplace de  $f$  es*

$$L f (s) = \frac{1}{\mu s + 1}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} L f (s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \left( \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}x} \right) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-(s+\frac{1}{\mu})x} dx \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{s + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\mu}{\mu s + 1} \right) = \frac{1}{\mu s + 1}. \end{aligned}$$

□

### 2.2.1. Sin difusión

Para el caso donde  $d = 2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  y montos de reclamación con distribución exponencial con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , el sistema es

$$\begin{array}{ccc} s - \lambda_1 - q_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 s + 1} & q_1 & \hat{\phi}_1(s) \\ q_2 & s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1} & \hat{\phi}_2(s) \end{array} = \begin{array}{c} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{array}. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.14) se reduce a

$$\phi_1(0) = 1 - \lambda_1 \mu_1 - q_1 \int_0^{\infty} [\phi_1(u) - \phi_2(u)] du$$

y

$$\phi_2(0) = 1 - \lambda_2 \mu_2 - q_2 \int_0^{\infty} [\phi_2(u) - \phi_1(u)] du.$$

De las anteriores expresiones para  $\phi_1(0)$  y  $\phi_2(0)$ , multiplicando por  $q_2$  y  $q_1$ , respectivamente, y sumando obtenemos

$$q_2 \phi_1(0) + q_1 \phi_2(0) = q_2(1 - \lambda_1 \mu_1) + q_1(1 - \lambda_2 \mu_2) > 0, \quad (2.18)$$

pues las integrales se cancelan. La desigualdad se cumple porque  $q_2(1 - \lambda_1 \mu_1) + q_1(1 - \lambda_2 \mu_2) = (q_1 + q_2)(1 - \pi_1 \lambda_1 \mu_1 - \pi_2 \lambda_2 \mu_2)$  y hemos supuesto que este valor es positivo.

Si resolvemos el sistema (2.17) para  $\hat{\phi}_1(s)$ , obtenemos

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\phi_1(0) \left( s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1} \right) - \phi_2(0) q_1}{Q(s) - q_1 q_2},$$

donde  $Q(s) = \left( s - \lambda_1 - q_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 s + 1} \right) \left( s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1} \right)$ .

La transformada  $\hat{\phi}_1(s)$  sólo tiene sentido en  $s > 0$ , así que podemos multiplicar el numerador y el denominador por  $(\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)$  que es estrictamente positivo para  $s > 0$ ,

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{(\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1) \phi_1(0) \left( s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1} \right) - \phi_2(0) q_1}{(\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1) Q(s) - q_1 q_2 (\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)}. \quad (2.19)$$

**Lema 2.20.** *El polinomio  $R(s) = (\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)Q(s) - q_1 q_2 (\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)$  es*

de cuarto grado, tiene coeficiente principal  $\mu_1\mu_2$ , una raíz en 0 de multiplicidad 1 y otra positiva.

*Demostración.* Claramente

$$\begin{aligned}
R(s) &= (\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)Q(s) - q_1q_2(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) \\
&= [(\mu_1s + 1)(s - \lambda_1 - q_1) + \lambda_1] [(\mu_2s + 1)(s - \lambda_2 - q_2) + \lambda_2] \\
&\quad - q_1q_2(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) \\
&= [\mu_1s^2 + (1 - \mu_1\lambda_1 - \mu_1q_1)s - q_1] [\mu_2s^2 + (1 - \mu_2\lambda_2 - \mu_2q_2)s - q_2] \\
&\quad - q_1q_2(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)
\end{aligned}$$

es de cuarto grado, y el coeficiente de  $s^4$  resulta sólo de multiplicar los términos cuadráticos  $\mu_1s^2$  y  $\mu_2s^2$ , por lo que es  $\mu_1\mu_2$ . Por otro lado,

$$R(0) = [-q_1][-q_2] - q_1q_2(1)(1) = 0,$$

de donde 0 es raíz del polinomio.

Finalmente, sabemos que su derivada en 0 es el coeficiente del término lineal  $s$ :

$$\begin{aligned}
R'(0) &= (1 - \mu_1\lambda_1 - \mu_1q_1)(-q_2) + (1 - \mu_2\lambda_2 - \mu_2q_2)(-q_1) - q_1q_2(\mu_1 + \mu_2) \\
&= -q_2(1 - \mu_1\lambda_1) - q_1(1 - \mu_2\lambda_2) + q_2\mu_1q_1 + q_1\mu_2q_2 - q_1q_2(\mu_1 + \mu_2) \\
&= -q_2(1 - \mu_1\lambda_1) - q_1(1 - \mu_2\lambda_2) < 0.
\end{aligned}$$

De  $R'(0) < 0$  se sigue que la multiplicidad de la raíz 0 es 1. Luego, existen valores de  $s$  a la derecha de 0 para los que el polinomio  $R$  es negativo; al tener coeficiente principal positivo, el polinomio se vuelve positivo para valores grandes de  $s$ , de donde tiene al menos una raíz positiva por el teorema del valor intermedio para funciones continuas.  $\square$

Definamos  $R(s)$  como en el Lema 2.20 y sea  $\rho > 0$  tal que  $R(\rho) = 0$ .

Sabemos que  $\hat{\phi}_1(s)$  está bien definida para todo  $s > 0$ , en particular, si el denominador de la expresión (2.19) se vuelve 0 para  $s = \rho$ , también lo hace el numerador; por lo tanto

$$\phi_1(0) \left( \rho - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right) = \phi_2(0)q_1. \quad (2.21)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.18),

$$q_2\phi_1(0) + \phi_1(0) \left( \rho - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right) = q_2(1 - \lambda_1\mu_1) + q_1(1 - \lambda_2\mu_2)$$

y por tanto

$$\phi_1(0) = \frac{q_2(1 - \lambda_1\mu_1) + q_1(1 - \lambda_2\mu_2)}{\rho - \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1}}. \quad (2.22)$$

Notemos que la expresión (2.22) nos dice cuánto vale  $\phi_1(0)$  sólo en términos de los parámetros del modelo y a reserva de conocer la raíz positiva  $\rho$  del polinomio  $R(s)$ . Una expresión similar puede deducirse de manera análoga para  $\phi_2(0)$ :

$$\phi_2(0) = \frac{q_2(1 - \lambda_1\mu_1) + q_1(1 - \lambda_2\mu_2)}{\rho - \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1\rho + 1}}. \quad (2.23)$$

Por otro lado, podemos también sustituir (2.21) en la expresión (2.19) para  $\hat{\phi}_1(s)$ :

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) \phi_1(0) \left( s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2s + 1} \right) - \phi_1(0) \left( \rho - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right)}{R(s)}.$$

De donde

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)\phi_1(0) \left( s - \rho + \frac{\lambda_2}{\mu_2s + 1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right)}{R(s)}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (\mu_2s + 1) \left( s - \rho + \frac{\lambda_2}{\mu_2s + 1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right) &= (s - \rho)(\mu_2s + 1) + \lambda_2 - \frac{\lambda_2(\mu_2s + 1)}{\mu_2\rho + 1} \\ &= (s - \rho)(\mu_2s + 1) + \frac{\lambda_2(\mu_2\rho + 1) - \lambda_2(\mu_2s + 1)}{\mu_2\rho + 1} \\ &= (s - \rho)(\mu_2s + 1) - (s - \rho) \frac{\lambda_2\mu_2}{\mu_2\rho + 1} \\ &= (s - \rho) \left( \mu_2s + 1 - \frac{\lambda_2\mu_2}{\mu_2\rho + 1} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\hat{\phi}_1(s) = \phi_1(0) \frac{(\mu_1s + 1)(s - \rho) \left( \mu_2s + 1 - \frac{\lambda_2\mu_2}{\mu_2\rho + 1} \right)}{R(s)}. \quad (2.24)$$

La anterior es también una forma cerrada para la transformada de la probabilidad de

supervivencia,  $\hat{\phi}_1(s)$ , sólo en términos de los parámetros del modelo y del valor de  $\rho$ . La expresión análoga para  $\hat{\phi}_2(s)$  es

$$\hat{\phi}_2(s) = \phi_2(0) \frac{(\mu_2 s + 1)(s - \rho) \left( \mu_1 s + 1 - \frac{\lambda_1 \mu_1}{\mu_1 \rho + 1} \right)}{R(s)}. \quad (2.25)$$

Al conocer el coeficiente principal de  $R(s)$  y que tiene raíces en 0 y en  $\rho$ , por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribirlo de la siguiente forma

$$R(s) = \mu_1 \mu_2 s (s - \rho) (s - s_1) (s - s_2),$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son el resto de sus raíces.

Si definimos el polinomio cuadrático

$$g(s) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} (\mu_1 s + 1) \left( \mu_2 s + 1 - \frac{\lambda_2 \mu_2}{\mu_2 \rho + 1} \right)$$

y cancelamos el factor  $(s - \rho)$  del numerador y denominador en la expresión (2.24), obtenemos la expresión

$$\hat{\phi}_1(s) = \phi_1(0) \frac{g(s)}{s(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Análogamente definamos

$$h(s) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} (\mu_2 s + 1) \left( \mu_1 s + 1 - \frac{\lambda_1 \mu_1}{\mu_1 \rho + 1} \right)$$

y la expresión (2.25) se reduce a

$$\hat{\phi}_2(s) = \phi_2(0) \frac{h(s)}{s(s - s_1)(s - s_2)}.$$

**Lema 2.26.** *La raíces de  $R(s)$  distintas a 0 y  $\rho$ , es decir,  $s_1$  y  $s_2$ , no tienen parte real positiva.*

*Demostración.* En el Lema 2.20 llegamos a que el término lineal en el polinomio  $R(s)$  es un real negativo. Por relaciones de Vieta, ese mismo coeficiente es  $-\mu_1 \mu_2 \rho s_1 s_2$ .

Si alguno de  $s_1$  o  $s_2$  fuera un real positivo, el otro también tendría que serlo para que el producto  $s_1 s_2$  fuera positivo y  $-\mu_1 \mu_2 \rho s_1 s_2$  negativo. Si alguno fuera un complejo con parte real positiva, ya que las raíces complejas vienen por parejas, el otro tendría que ser su conjugado cuya parte real también sería positiva.

En caso de que uno tenga parte real positiva, el otro también, y ambos tendrían que ser también raíces de  $g(s)$  para que  $\hat{\phi}_1(s)$  esté bien definida en todo el semiplano complejo derecho. Incluso si  $s_1$  es raíz de  $R(s)$  con multiplicidad 2, también debe ser raíz con doble multiplicidad de  $g(s)$ .

Pero  $g(s)$  sólo tiene dos raíces y una es el real negativo  $-\mu_1^{-1}$ , así que llegaríamos a una contradicción de suponer  $s_1$  o  $s_2$  con parte real positiva.  $\square$

**Lema 2.27.** *Si  $s_1 = s_2$  y definimos*

$$g_0 = \frac{g(0)}{s_1 s_2}, \quad g_1 = \frac{g(s_1)}{s_1(s_1 - s_2)}, \quad y \quad g_2 = \frac{g(s_2)}{s_2(s_2 - s_1)},$$

*entonces se cumple que*

$$g_0(s - s_1)(s - s_2) + g_1 s(s - s_2) + g_2 s(s - s_1) = g(s).$$

*Demostración.* Basta con que coincidan en tres puntos para que dos polinomios de grado 2 sean el mismo. Si evaluamos el polinomio del lado izquierdo en  $s = 0, s_1, s_2$ , obtenemos

$$g_0(0 - s_1)(0 - s_2) + g_1(0)(0 - s_2) + g_2(0)(0 - s_1) = g_0 s_1 s_2 = g(0),$$

$$g_0(s_1 - s_1)(s_1 - s_2) + g_1 s_1(s_1 - s_2) + g_2 s_1(s_1 - s_1) = g_1 s_1(s_1 - s_2) = g(s_1), \text{ y}$$

$$g_0(s_2 - s_1)(s_2 - s_2) + g_1 s_2(s_2 - s_2) + g_2 s_2(s_2 - s_1) = g_2 s_2(s_2 - s_1) = g(s_2).$$

$\square$

Del lema anterior obtenemos la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s - s_1} + \frac{g_2}{s - s_2} = \frac{g(s)}{s(s - s_1)(s - s_2)},$$

para todo  $s > 0$ .

Por lo tanto, para  $g_0, g_1, g_2$  definidas como en el Lema 2.27 y bajo el supuesto  $s_1 = s_2$ , para todo  $s$  en el semiplano complejo derecho se cumple

$$\hat{\phi}_1(s) = \phi_1(0) \left( \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s - s_1} + \frac{g_2}{s - s_2} \right).$$

Es fácil ver que la transformada de una función exponencial  $e^{bt}$  es  $L e^{bt}(s) = \frac{1}{s-b}$ , definida para todo  $s$  tal que  $Re(s) > b$ . Por el Teorema 1.44 y la linealidad de la transformada, tenemos que

$$\phi_1(u) = \phi_1(0)(g_0 + g_1e^{s_1u} + g_2e^{s_2u}). \quad (2.28)$$

Definiendo análogamente

$$h_0 = \frac{h(0)}{s_1s_2}, \quad h_1 = \frac{h(s_1)}{s_1(s_1 - s_2)}, \quad y \quad h_2 = \frac{h(s_2)}{s_2(s_2 - s_1)},$$

bajo el supuesto de que  $s_1 \neq s_2$ ,

$$\phi_2(u) = \phi_2(0)(h_0 + h_1e^{s_1u} + h_2e^{s_2u}). \quad (2.29)$$

Las expresiones (2.28) y (2.29) son las formas cerradas de las probabilidades de supervivencia condicionada al estado inicial, nuevamente en términos de los parámetros del modelo y las raíces del polinomio  $R(s)$ . Conociendo cada uno de esos elementos, si la distribución inicial es  $\pi_0 = (\pi_{01}, \pi_{02})$ , también podemos calcular la probabilidad de supervivencia sin condicionar al estado modulador inicial como

$$\phi(u) = \pi_{01}\phi_1(u) + \pi_{02}\phi_2(u). \quad (2.30)$$

### Ejemplo 1

Notemos que el problema de calcular una probabilidad de ruina en este caso se reduce a encontrar las raíces del polinomio  $R(s)$  y calcular algunos valores. Implementamos computacionalmente la solución a estos cálculos en el lenguaje `Julia` usando la paquetería `Roots` que nos permite calcular las raíces de un polinomio. El código que realiza estos cálculos está en la Sección A.1 de los Códigos anexos.

Presentamos los resultados para los siguientes parámetros.

$$Q = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.0 \\ 1.5 & -1.5 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \left( \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right),$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1,$$

$$\mu_1 = 0.4, \quad \mu_2 = 0.5.$$

Primero encontramos las raíces no nulas del polinomio  $R(s)$ :

$$\rho \approx 3.36179, \quad s_1 \approx -1.6333, \quad s_2 \approx -0.728489.$$

Luego, los valores de las constantes que aparecen en la función de supervivencia:

$$g_0 \approx 3.41850, \quad g_1 \approx -0.00370, \quad g_2 \approx -2.41480,$$

$$h_0 \approx 2.76846, \quad h_1 \approx 0.00340, \quad h_2 \approx -1.77187,$$

$$\phi_1(0) \approx 0.29253, \quad \phi_2(0) \approx 0.36121.$$

Finalmente, las funciones de supervivencia quedan de la siguiente forma:

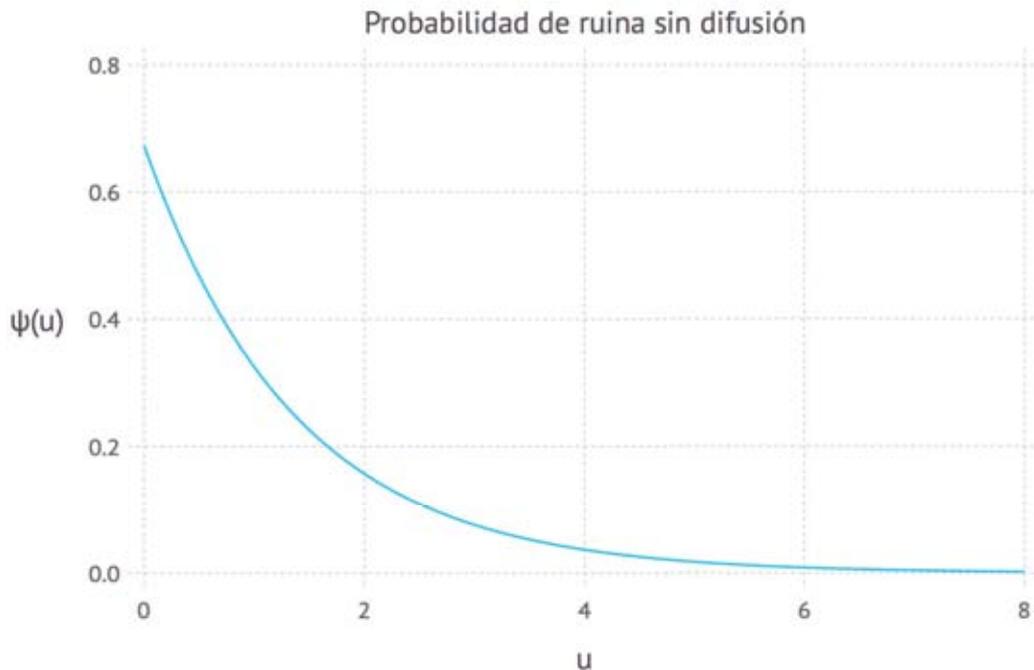
$$\phi_1(u) = 0.29253(3.41850 - 0.00370e^{-1.6333u} - 2.41480e^{-0.728489u}),$$

$$\phi_2(u) = 0.36121(2.76846 + 0.00340e^{-1.6333u} - 1.77187e^{-0.728489u}),$$

$$\phi(u) = 1.00000 - 0.000157748e^{-1.6333u} - 0.679842e^{-0.728489u}.$$

Recordemos que la función de probabilidad de ruina es  $\psi(u) = 1 - \phi(u)$ , por lo que:

$$\psi(u) = 0.000157748e^{-1.6333u} + 0.679842e^{-0.728489u}. \quad (2.31)$$



**Figura 2.1:** Gráfica de la función de ruina (2.31)

En la Figura 2.1 mostramos la gráfica de la probabilidad de ruina para los parámetros de nuestro ejemplo. Notemos que comienza en un valor entre  $1 - \phi_1(0) = \psi_1(0)$  y  $1 - \phi_2(0) = \psi_2(0)$ , justamente la combinación lineal dada por  $\pi$ ; y que decrece rápidamente por su forma exponencial.

### 2.2.2. Con difusión

Para el caso donde  $d = 2$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  y montos de reclamación con distribución exponencial con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , el sistema es

$$\frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2 s^2 + s - \lambda_1 - q_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 s + 1}}{q_2} \quad q_1 \quad \hat{\phi}_1(s) = \frac{\frac{\sigma_1^2}{2}\phi_1(0)}{\frac{\frac{1}{2}\sigma_2^2 s^2 + s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1}}{\hat{\phi}_2(s)}}, \quad (2.32)$$

pues recordemos que con difusión,  $\phi_i(0) = 0$ .

La ecuación (2.14) se reduce a

$$\frac{\sigma_1^2}{2}\phi_1(0) = 1 - \lambda_1\mu_1 - q_1 \int_0^\infty [\phi_1(u) - \phi_2(u)]du$$

y

$$\frac{\sigma_2^2}{2}\phi_2(0) = 1 - \lambda_2\mu_2 - q_2 \int_0^\infty [\phi_2(u) - \phi_1(u)]du.$$

Multiplicando la primera por  $q_2$  y la segunda por  $q_1$  y sumando,

$$q_2 \frac{\sigma_1^2}{2}\phi_1(0) + q_1 \frac{\sigma_2^2}{2}\phi_2(0) = q_2(1 - \lambda_1\mu_1) + q_1(1 - \lambda_2\mu_2) > 0, \quad (2.33)$$

pues las integrales se cancelan. Aquí también rescatamos la desigualdad como lo hicimos en el caso sin difusión.

Sean

$$Q_1(s) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 s^2 + s - \lambda_1 - q_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 s + 1}$$

y

$$Q_2(s) = \frac{1}{2}\sigma_2^2 s^2 + s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1}.$$

Si resolvemos el sistema (2.32) para  $\hat{\phi}_1(s)$ , obtenemos

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\frac{\sigma_1^2}{2}\phi_1(0)Q_2(s) - \frac{\sigma_2^2}{2}\phi_2(0)q_1}{Q_1(s)Q_2(s) - q_1q_2}. \quad (2.34)$$

**Lema 2.35.** La función  $T(s) = Q_1(s)Q_2(s) - q_1q_2$  cumple

1.  $T(0) = 0$ ,
2.  $T(s) < 0$ , y
3.  $T(\rho) = 0$  para algún  $\rho > 0$ .

*Demostración.*

$$T(0) = Q_1(0)Q_2(0) - q_1q_2 = (-q_1)(-q_2) - q_1q_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} T(s) = Q_1(s)Q_2(s) - q_1q_2 &= \left( \sigma_1^2 s + 1 - \frac{\mu_1 \lambda_1}{(\mu_1 s + 1)^2} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{1}{2} \sigma_2^2 s^2 + s - \lambda_2 - q_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 s + 1} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 s^2 + s - \lambda_1 - q_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 s + 1} \right) \\ &\quad \times \left( \sigma_2^2 s + 1 - \frac{\mu_2 \lambda_2}{(\mu_2 s + 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T(0) = (1 - \mu_1 \lambda_1)(-q_2) + (-q_1)(1 - \mu_2 \lambda_2) < 0.$$

Notemos que  $Q_i(s) = \frac{1}{2} \sigma_i^2 s^2 + s - \lambda_i - q_i + \frac{\lambda_i}{\mu_i s + 1}$  es continua para todo  $s \geq 0$  y que tiende a  $-\infty$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , por lo que  $T(s)$  también tiene esas propiedades.

Por otro lado  $T(0) < 0$ , así que existen valores de  $s$  a la derecha de 0 para los que la función  $T$  es negativa. Por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe un valor positivo  $\rho$  en el que  $T(\rho) = 0$ .  $\square$

Definamos  $T(s)$  como en el Lema 2.35 y sea  $\rho > 0$  tal que  $T(\rho) = 0$ .

Sabemos que  $\hat{\phi}_1(s)$  está bien definida para todo  $s > 0$ , en particular, si el denominador de la expresión (2.34) se vuelve 0 para  $s = \rho$ , también lo hace el numerador; por lo tanto

$$\frac{\sigma_1^2}{2} \phi_1(0) Q_2(\rho) = \frac{\sigma_2^2}{2} \phi_2(0) q_1. \quad (2.36)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.33), podemos despejar el valor de  $\phi_1(0)$ :

$$\phi_1(0) = \frac{q_2(1 - \lambda_1\mu_1) + q_1(1 - \lambda_2\mu_2)}{\frac{\sigma_1^2}{2}(q_2 + Q_2(\rho))}. \quad (2.37)$$

Notemos que la expresión (2.37) nos dice cuánto vale  $\phi_1(0)$  sólo en términos de los parámetros del modelo y  $\rho$ . La expresión análoga para  $\phi_2(0)$  es

$$\phi_2(0) = \frac{q_2(1 - \lambda_1\mu_1) + q_1(1 - \lambda_2\mu_2)}{\frac{\sigma_2^2}{2}(q_1 + Q_1(\rho))}. \quad (2.38)$$

Por otro lado, podemos sustituir (2.36) en la expresión (2.34) para  $\hat{\phi}_1(s)$ , y multiplicar por  $\frac{(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)}{(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)}$ ,

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\sigma_1^2}{2} \phi_1(0) \frac{(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)[Q_2(s) - Q_2(\rho)]}{(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)T(s)}. \quad (2.39)$$

La anterior es una forma cerrada para la transformada de la probabilidad de supervivencia,  $\hat{\phi}_1(s)$ , sólo en términos de los parámetros del modelo y del valor de  $\rho$ . La expresión análoga para  $\hat{\phi}_2(s)$  es

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{\sigma_2^2}{2} \phi_2(0) \frac{(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)[Q_1(s) - Q_1(\rho)]}{(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)T(s)}. \quad (2.40)$$

**Lema 2.41.**  $(\mu_1s+1)(\mu_2s+1)T(s)$  es un polinomio de grado 6 con coeficiente principal  $\frac{1}{4}\sigma_1^2\sigma_2^2\mu_1\mu_2$  con raíces 0,  $\rho$  y ninguna otra raíz  $s$  igual a cero o con  $Re(s) > 0$ .

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned} (\mu_1s+1)(\mu_2s+1)T(s) &= \left[ \left( \frac{1}{2}\sigma_1^2s^2 + s - \lambda_1 - q_1 \right) (\mu_1s+1) + \lambda_1 \right] \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{1}{2}\sigma_2^2s^2 + s - \lambda_2 - q_2 \right) (\mu_2s+1) + \lambda_1 \right] \\ &\quad - (\mu_1s+1)(\mu_2s+1)q_1q_2, \end{aligned}$$

por lo que claramente es un polinomio de grado 6 con coeficiente principal  $c_6 = \frac{1}{4}\sigma_1^2\sigma_2^2\mu_1\mu_2$ ,

$$(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)T(s) = c_6s^6 + c_5s^5 + c_4s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0.$$

Las raíces 0 y  $\rho$  las hereda de la función  $T$  y no se pierden al multiplicar por  $(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)$ . Sean  $s_1, s_2, s_3, s_4$  las otras 4 raíces del polinomio que sabemos que tiene por el teorema fundamental del álgebra. Por relaciones de Vieta,

$$c_6(-\rho s_1 s_2 s_3 s_4) = c_1.$$

Sabemos que el coeficiente del término lineal es la derivada del polinomio evaluada en cero:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{d}{ds}(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)T(s)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)\Big|_{s=0}T(0) + (\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)T'(0) \\ &= T'(0) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $s_1s_2s_3s_4 > 0$ , de donde ninguna raíz es igual a cero. Sin considerar raíces complejas que vienen por parejas y multiplican un real positivo, no es posible que haya una cantidad impar de raíces negativas y una cantidad impar de raíces positivas. Si hay una raíz positiva, debe haber al menos otra; en general, si hay una raíz con parte real positiva, también estará su conjugada.

Para mostrar que ya no tenemos otra raíz con parte real positiva procedamos por contradicción. Supongamos que el polinomio  $(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)T(s)$  tiene una raíz con parte real positiva. Sin pérdida de generalidad sean  $s_1$  y  $s_2$  dos de sus raíces con parte real positiva. Como  $\hat{\phi}_1(s)$  está bien definido en todo el semiplano complejo derecho, de la expresión (2.39) sabemos que  $s_1$  y  $s_2$  deben ser raíces de  $(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)[Q_2(s) - Q_2(\rho)]$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} &(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)[Q_2(s) - Q_2(\rho)] \\ &= (\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) \left[ \frac{\sigma_2^2}{2}s^2 + s + \frac{\lambda_2}{\mu_2s + 1} - \frac{\sigma_2^2}{2}\rho^2 - \rho - \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$= (\mu_1s + 1) \left[ (\mu_2s + 1) \left( \frac{\sigma_2^2}{2}s^2 + s \right) + \lambda_2 - (\mu_2s + 1) \left( \frac{\sigma_2^2}{2}\rho^2 - \rho - \frac{\lambda_2}{\mu_2\rho + 1} \right) \right] \quad (2.43)$$

es un polinomio de grado 4 con coeficiente principal  $d_4 = \frac{\sigma_2^2}{2}\mu_1\mu_2$  y con raíces  $-\frac{1}{\mu_1}, \rho, s_1, s_2$ . Por relaciones de Vieta, el coeficiente del término cúbico está dado por

$$d_3 = -d_4 \left( -\frac{1}{\mu_1} + \rho + s_1 + s_2 \right).$$

Por otro lado, podemos calcularlo directamente de la expresión (2.43) como

$$d_3 = \mu_1 \left( \mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) + \mu_2 \frac{\sigma_2^2}{2}.$$

Igualando ambas expresiones de  $d_3$  y dividiendo por  $d_4 = \frac{\sigma_2^2}{2}\mu_1\mu_2$  obtenemos

$$\rho + s_1 + s_2 = -\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} < 0,$$

lo que es una contradicción pues  $s_1$  y  $s_2$  son ambos positivos o son conjugados con parte real positiva.

Concluimos que el polinomio  $(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)T(s)$  no tiene más raíces en el semiplano complejo derecho además de  $\rho$ .  $\square$

Si definimos  $c_6 = \frac{1}{4}\sigma_1^2\sigma_2^2\mu_1\mu_2$ , podemos reescribir la expresión (2.39) para  $\hat{\phi}_1(s)$  como

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\sigma_1^2}{2}\phi_1(0) \frac{(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) [Q_2(s) - Q_2(\rho)]}{c_6s(s - \rho)(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)},$$

donde  $s_1, s_2, s_3, s_4$  son el resto de raíces de  $(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1)T(s)$  distintas de 0 y  $\rho$ .

Como  $\rho$  es raíz del polinomio  $(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) [Q_2(s) - Q_2(\rho)]$ ,  $g(s)$  definido como

$$g(s) = \frac{(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) [Q_2(s) - Q_2(\rho)]}{c_6(s - \rho)}$$

es un polinomio de grado 3. Y finalmente reducimos la forma de  $\hat{\phi}_1(s)$  a la siguiente expresión

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\sigma_1^2}{2}\phi_1(0) \frac{g(s)}{s(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}. \quad (2.44)$$

Análogamente podemos definir

$$h(s) = \frac{(\mu_1s + 1)(\mu_2s + 1) [Q_1(s) - Q_1(\rho)]}{c_6(s - \rho)}$$

y de la expresión (2.40) obtener

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{\sigma_2^2}{2} \phi_2(0) \frac{h(s)}{s(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}. \quad (2.45)$$

**Lema 2.46.** Si  $s_0 = 0, s_1, s_2, s_3, s_4$  son distintos por parejas y definimos

$$g_i = \frac{g(s_i)}{\prod_{j=i}^4 (s_i - s_j)}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

entonces se cumple que

$$\sum_{i=0}^4 g_i \prod_{j=i}^4 (s - s_j) = g(s).$$

*Demostración.* Notemos que cada término de la suma de la izquierda  $g_i \prod_{j=i}^4 (s - s_j)$  es un polinomio de cuarto grado, mientras que el lado derecho es un polinomio de tercer grado (puede considerarse de cuarto grado con coeficiente principal cero). Entonces, basta que coincidan en 5 puntos para que sean el mismo polinomio.

Evaluando el lado izquierdo en  $s = s_1$ , cada sumando tendrá el factor  $(s_1 - s_1) = 0$  salvo uno de ellos:

$$g_1 \prod_{j=1}^4 (s_1 - s_j) = g(s_1).$$

De aquí que el polinomio de la izquierda vale  $g(s_1)$  en  $s_1$  y de la misma manera se prueba que vale  $g(s_i)$  en  $s_i$  para  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Luego, ambos polinomios son iguales.  $\square$

Como resultado inmediato

$$\sum_{i=0}^4 g_i = 0,$$

pues es el coeficiente principal del polinomio de cuarto grado  $\sum_{i=0}^4 g_i \prod_{j=i}^4 (s - s_j)$  que resultó ser el polinomio de tercer grado  $g(s)$ .

El lema anterior es equivalente a la igualdad entre fracciones

$$\frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s-s_1} + \frac{g_2}{s-s_2} + \frac{g_3}{s-s_3} + \frac{g_4}{s-s_4} = \frac{g(s)}{s(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)},$$

para todo  $s > 0$ , resultado de hacer la suma con común denominador.

Por lo anterior, si  $s_0 = 0, s_1, s_2, s_3, s_4$  son distintos por parejas, y definimos  $g_i$  para  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  como en el Lema 2.46, para todo  $s$  en el semiplano complejo derecho se

cumple

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\sigma_1^2}{2} \phi_1(0) \prod_{i=0}^4 \frac{g_i}{s - s_i}.$$

Análogamente, al definir

$$h_i = \frac{h(s_i)}{\prod_{j=i}^4 (s_i - s_j)}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

bajo el supuesto de que  $s_0 = 0, s_1, s_2, s_3, s_4$  son distintos por parejas, tenemos que

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{\sigma_2^2}{2} \phi_2(0) \prod_{i=0}^4 \frac{h_i}{s - s_i}$$

para todo  $s > 0$ .

Finalmente podemos concluir encontrando las formas cerradas para las probabilidades de supervivencia

$$\phi_1(u) = \frac{\sigma_1^2}{2} \phi_1(0) \prod_{i=0}^4 g_i e^{s_i u} \quad (2.47)$$

y

$$\phi_2(u) = \frac{\sigma_2^2}{2} \phi_2(0) \prod_{i=0}^4 h_i e^{s_i u}. \quad (2.48)$$

Notemos que esta expresión también es válida para  $u = 0$  pues  $\prod_{i=0}^4 g_i = \prod_{i=0}^4 h_i = 0$ . Y la probabilidad no condicionada para una distribución inicial  $\pi_0 = (\pi_{01}, \pi_{02})$  es

$$\phi(u) = \pi_{01} \phi_1(u) + \pi_{02} \phi_2(u) = \pi_{01} \frac{\sigma_1^2}{2} \phi_1(0) \prod_{i=0}^4 g_i e^{s_i u} + \pi_{02} \frac{\sigma_2^2}{2} \phi_2(0) \prod_{i=0}^4 h_i e^{s_i u}. \quad (2.49)$$

## Ejemplo 2

La solución al caso con difusión también ha sido implementada para resolverse computacionalmente y el código puede encontrarse en la Sección A.2 de los Códigos anexos.

Presentamos los resultados para los mismos parámetros,

$$Q = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.0 \\ 1.5 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad \pi_0 = \left( \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right), \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \mu_1 = 0.4, \quad \mu_2 = 0.5,$$

agregando los factores de difusión

$$\sigma_1 = 0.9, \quad \sigma_2 = 0.3.$$

Las raíces no nulas del polinomio  $(\mu_1 s + 1)(\mu_2 s + 1)T(s)$  son:

$$(\rho, s_1, s_2, s_3, s_4) \approx (2.35874, -24.56977, -4.91183, -1.58074, -0.48777).$$

Y las constantes que necesitaremos resultaron:

$$(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4) \approx (2.58494, 0.00213, -0.28237, -0.00950, -2.29520),$$

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4) \approx (4.55135, -0.81247, -0.10634, 0.03127, -3.66381),$$

$$(\phi_1(0), \phi_2(0)) \approx (0.95520, 4.88255).$$

La forma que toman las funciones de supervivencias son las siguientes:

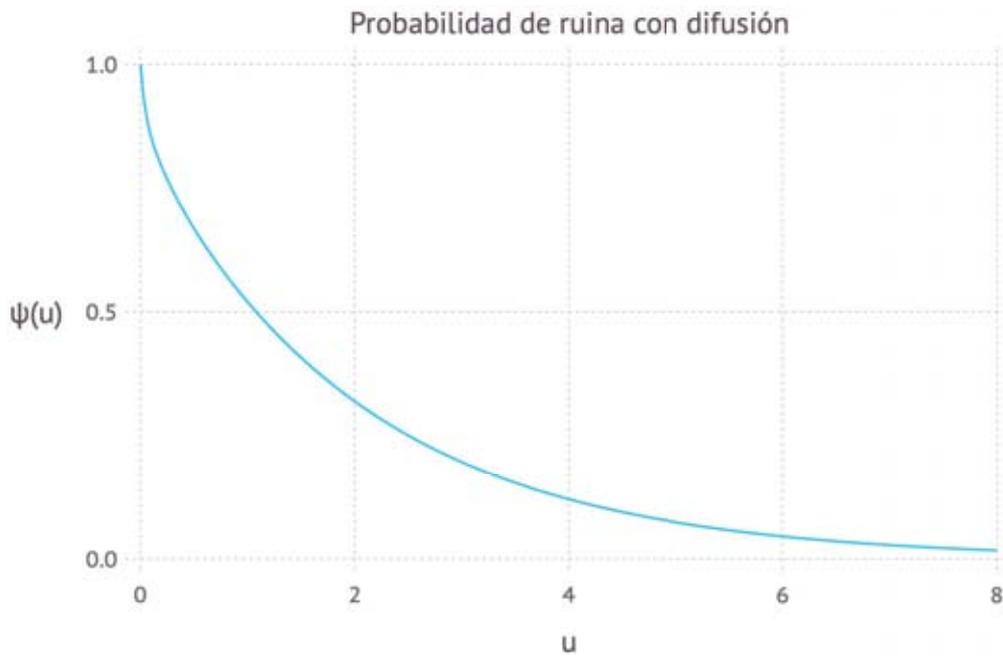
$$\phi_1(u) = 1.00000 + 0.00082e^{-24.56977u} - 0.10923e^{-4.91183u} - 0.00367e^{-1.58074u} - 0.88792e^{-0.48777u},$$

$$\phi_2(u) = 1.00000 - 0.17851e^{-24.56977u} - 0.02336e^{-4.91183u} + 0.00687e^{-1.58074u} - 0.80499e^{-0.48777u},$$

$$\phi(u) = 1.00000 - 0.07091e^{-24.56977u} - 0.07489e^{-4.91183u} + 0.00054e^{-1.58074u} - 0.85475e^{-0.48777u}.$$

Por lo que la probabilidad de ruina está dada por:

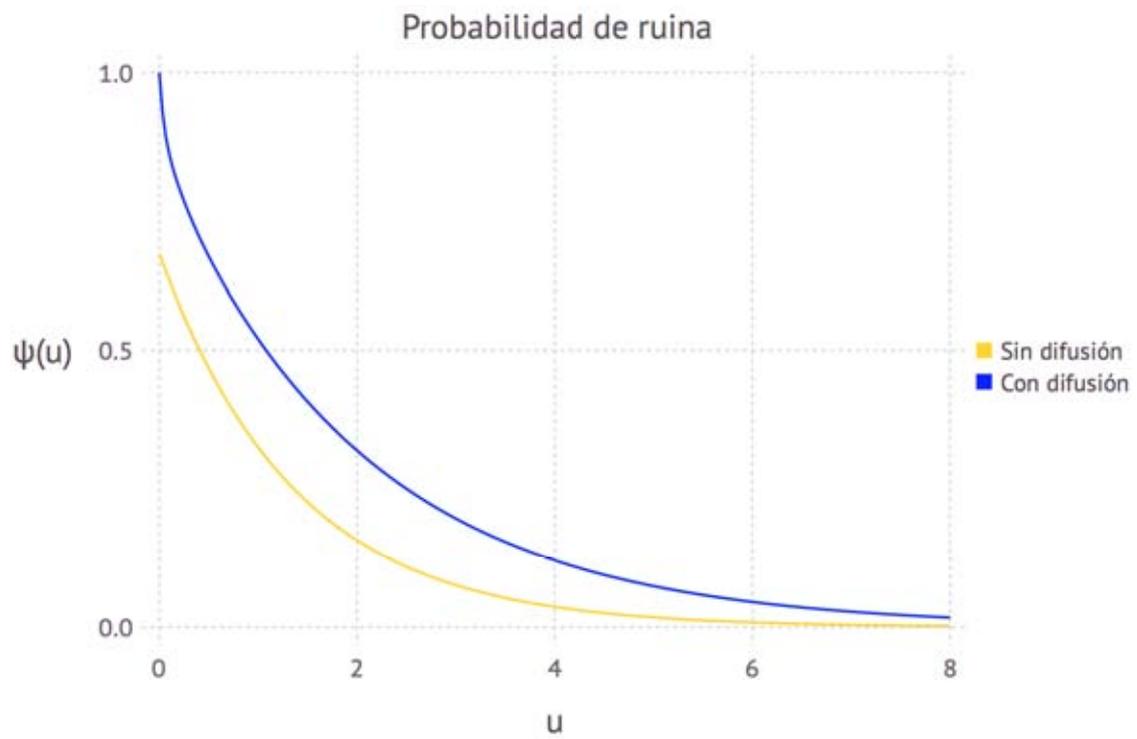
$$\psi(u) = 0.07091e^{-24.56977u} + 0.07489e^{-4.91183u} - 0.00054e^{-1.58074u} + 0.85475e^{-0.48777u}. \quad (2.50)$$



**Figura 2.2:** Gráfica de la función de ruina (2.50)

En la Figura 2.2 mostramos la gráfica de la probabilidad de ruina para los parámetros de este ejemplo con difusión. Notemos que es consistente con la Proposición (2.1) y vale 1 cuando el capital inicial es cero. En general, la forma es similar a la función del Ejemplo 1, en gran medida por su forma exponencial.

Sin embargo, podemos comparar las gráficas de ambas funciones de ruina con más detalle en la Figura 2.3. Recordemos que la única diferencia en los parámetros ha sido la difusión, la cual ha sido factor para aumentar la probabilidad de ruina con cada capital unicial  $u$ .



**Figura 2.3:** Gráficas de las funciones de ruina (2.31) y (2.50)

## Capítulo 3

# Simulación estocástica

En esta parte presentamos una parte del trabajo realizado en el curso de *Simulación estocástica* impartido por el Dr. Fernando Baltazar Larios en el semestre 2016-1 en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en donde simulamos los procesos estocásticos necesarios para generar la trayectoria de un proceso de riesgo modulado. Con referencia en [2] y basados en los conocimientos preliminares del Capítulo 1, explicamos la derivación de cada algoritmo y mencionamos los resultados que aseguran la efectividad de la simulación. Los algoritmos fueron implementados en el lenguaje de programación `Julia` y se pueden encontrar en la segunda parte de los Códigos anexos.

En una segunda parte del capítulo mayormente descriptiva, mostraremos cuáles son las consideraciones más importantes en la práctica de simulaciones. Compararemos la probabilidad de ruina estimada por Monte Carlo con la calculada analíticamente en el capítulo anterior para valorar positivamente la simulación. Así mismo, podremos observar aspectos de la ruina del proceso que no conocemos analíticamente, como la proporción de trayectorias arruinadas por estado modulador o el tiempo esperado de ruina.

Finalmente, todos los algoritmos están contruidos para trabajar con cualquier cantidad de estados moduladores, así que daremos un ejemplo de proceso de riesgo con tres estados en el que observaremos aspectos no analíticos como en el caso anterior.

### 3.1. Algoritmos de simulación del proceso de riesgo

#### 3.1.1. Proceso de saltos de Markov

Queremos generar la trayectoria de un proceso de saltos de Markov a partir de la cantidad de estados, la matriz de intensidades y el vector de probabilidades de la distribución

inicial. Con base en la Proposición 1.28, primero necesitaremos generar los estados en los que se encontrará el proceso, es decir la cadena de Markov asociada.

Construimos la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov asociada con un algoritmo basado en las relaciones (1.26) y (1.27) que hace lo siguiente:

1. Cada entrada de la  $i$ -ésima fila de la matriz de intensidades es dividida entre el valor absoluto de la  $i$ -ésima entrada de la diagonal.
2. Los nuevos valores de la diagonal, todos  $-1$ , son sustituidos por un  $0$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 -3 & 2 & 1 & \div 3 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
 0 & -1 & 1 & \div 1 & 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 1 & . \\
 1 & 1 & -2 & \div 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & (-1 \rightarrow 0) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
 \end{array}$$

Esto es trivial en el caso que más trabajaremos: con dos estados moduladores. En tal caso, la matriz de probabilidades de transición simplemente es

$$\begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 1 & 0
 \end{array}
 ,$$

por lo que es posible ahorrarnos el calculo en este caso. De cualquier forma, en la Sección B.1 se encuentra el algoritmo para el caso general.

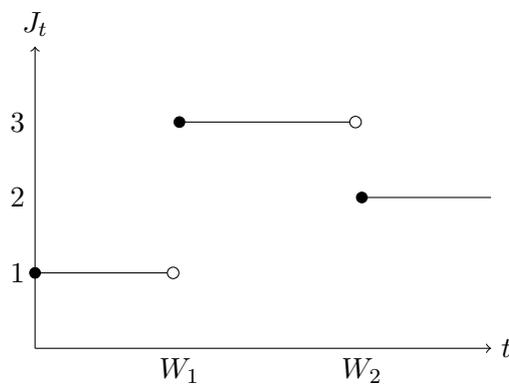
Para simular el proceso de saltos recordemos que el tiempo de estancia en cada estado es una variable aleatoria que se distribuye exponencialmente con parámetro dependiente del estado en el que se encuentra. Este parámetro es el valor absoluto de la  $i$ -ésima entrada de la diagonal de la matriz de intensidades para la estancia en el estado  $i$ . Los estados de la cadena asociada se irán generando en tanto se vayan necesitando a través del tiempo.

Por la Proposición 1.28, podemos asegurar que el siguiente algoritmo simula una trayectoria de proceso de saltos de Markov hasta un tiempo  $T$ .

1. Inicializamos un tiempo  $S = 0$  y un contador  $n = 1$ .
2. Muestreamos el estado inicial de acuerdo a las probabilidades del vector de distribución inicial  $\pi_0$  para obtener  $i$ .
3. Generamos un variable aleatoria exponencial con el parámetro respectivo al estado de estancia actual:  $s \sim \exp(q_i)$ .

4. Si  $S + s \leq T$ , guardamos el tiempo  $W_n = S + s$ , lo asignamos como el nuevo  $S$ , aumentamos en 1 a  $n$ , muestreamos el nuevo estado de estancia  $i$  usando las probabilidades de transición de la cadena asociada y regresamos al paso 3.
5. Si  $S + s > T$ , nos detenemos.

El proceso de saltos lo guardamos como una lista de tiempos, comenzando en 0, en los que hay un salto de estado y el estado en el que se encuentra la trayectoria a partir de ese momento.



**Figura 3.1:** Proceso de saltos de Markov simulado.

Tiempo	Estado
0	1
$W_1$	3
$W_2$	2

**Cuadro 3.1:** Lista con tiempos y estados de salto.

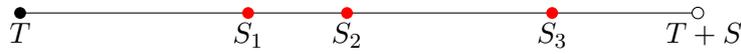
El Cuadro 3.1 muestra un ejemplo de cómo es la lista que se guarda correspondiente al proceso simulado de la Figura 3.1. El algoritmo para la simulación de un proceso de salto de Markov se encuentra en la Sección B.2.

### 3.1.2. Proceso de Poisson

A continuación, necesitamos generar un proceso de Poisson para cada estancia en un estado del proceso modulador. Dicho proceso de Poisson tendrá intensidad dependiente del estado en el que nos encontremos.

Con base en la Proposición 1.8, para cada intervalo  $[T, T + S)$  de estancia en el estado  $i$  haremos lo siguiente:

1. Inicializamos un tiempo  $t = T$  y contador  $n = 1$ .
2. Generamos una variable  $s \sim \text{exp}(\lambda_i)$ .
3. Si  $t + s \leq T + S$ , guardamos el tiempo  $S_n = t + s$ , lo asignamos como el nuevo  $t$ , aumentamos en 1 a  $n$  y regresamos al paso 2.
4. Si  $t + s > T + S$ , nos detenemos.



**Figura 3.2:** Proceso de Poisson simulado en el estado  $I$ .

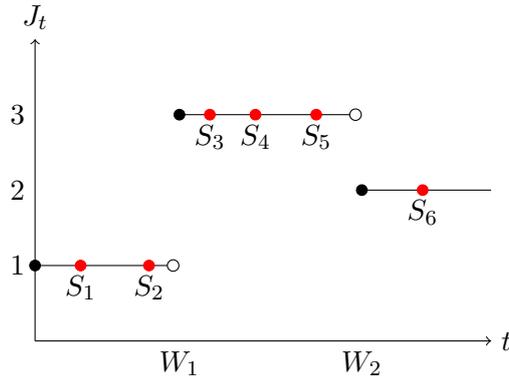
Tiempo	Estado
$S_1$	$I$
$S_2$	$I$
$S_3$	$I$

**Cuadro 3.2:** Lista con tiempos y estado de arribo de reclamación.

El proceso de arribos de reclamaciones lo guardamos como una lista de tiempos en los que hay una reclamación y el estado modulador en el que se produjo ese arribo. El Cuadro 3.2 muestra la lista como se guardaría del proceso de Poisson de la Figura 3.2. El algoritmo para la simulación de un proceso de Poisson para cada estancia en un estado se encuentra en la Sección B.3.

### 3.1.3. Reclamaciones

Finalmente generamos el proceso de reserva de la siguiente manera. Para cada estancia en un estado modulador generamos un proceso de Poisson y concatenamos la lista de tiempos de reclamaciones con sus respectivos estados. El Cuadro 3.3 es la lista correspondiente a las reclamaciones que muestra la Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Proceso completo de reclamaciones moduladas simulado.

Tiempo	Estado
$S_1$	1
$S_2$	1
$S_3$	3
$S_4$	3
$S_5$	3
$S_6$	2

**Cuadro 3.3:** Lista con tiempos y estados de arribo de reclamación.

Para cada tiempo de arribo generamos un monto de reclamación, que en nuestro caso es una variable aleatoria exponencial con media dependiente del estado modulador en el que apareció. El Cuadro 3.4 muestra la lista con los montos agregados a cada reclamación de la Figura 3.3.

Tiempo	Estado	Reclamación
$S_1$	1	$X_1 \sim \exp(\mu_1^{-1})$
$S_2$	1	$X_2 \sim \exp(\mu_1^{-1})$
$S_3$	3	$X_3 \sim \exp(\mu_3^{-1})$
$S_4$	3	$X_4 \sim \exp(\mu_3^{-1})$
$S_5$	3	$X_5 \sim \exp(\mu_3^{-1})$
$S_6$	2	$X_6 \sim \exp(\mu_2^{-1})$

**Cuadro 3.4:** Lista con tiempos, estados y montos de reclamación.

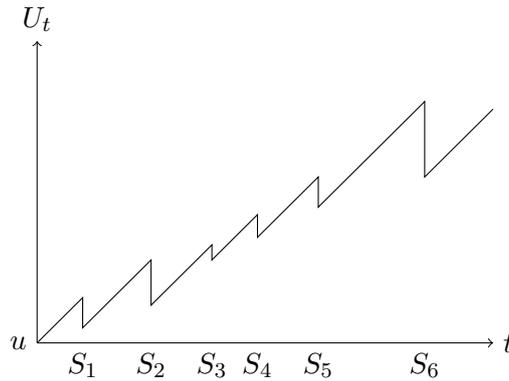
La cantidad de reserva acumulada en cada tiempo se obtiene de sumar el capital inicial  $u$  y el tiempo transcurrido hasta ese momento y restar la suma de montos reclamados hasta el momento. El Cuadro 3.5 es un ejemplo de la forma en que guardamos la lista de reclamaciones con el valor de la reserva en cada tiempo de arribo. El algoritmo para la

simulación de un proceso de reserva se encuentra en la Sección B.4.

Tiempo	Estado	Reclamación	Reserva
$S_1$	1	$X_1$	$u + S_1 - X_1$
$S_2$	1	$X_2$	$u + S_2 - X_1 + X_2$
$S_3$	3	$X_3$	$u + S_3 - X_1 + X_2 + X_3$
$S_4$	3	$X_4$	$u + S_4 - X_1 + \dots + X_4$
$S_5$	3	$X_5$	$u + S_5 - X_1 + \dots + X_5$
$S_6$	2	$X_6$	$u + S_6 - \sum_{i=1}^6 X_i$

**Cuadro 3.5:** Lista con tiempos, estados, montos y reserva en cada momento de reclamación.

Podemos interpolar linealmente en los momentos que no hay reclamaciones para tener una gráfica el proceso en todo tiempo. La Figura 3.4 se muestra un ejemplo de gráfica del proceso de riesgo correspondiente al Cuadro 3.5.



**Figura 3.4:** proceso de riesgo simulado.

Notemos que hay tiempos entre arribos que abarcan más de un estado del ambiente modulador, en nuestro ejemplo el tiempo entre  $S_5$  y  $S_6$  es uno de esos casos. Cabe señalar que el tamaño de esos intervalos se distribuye también exponencialmente condicionado a un tamaño mínimo. Por ejemplo, si el tiempo de cambio de estado entre  $S_5$  y  $S_6$  es  $W_2$ , el tiempo  $S_6 - S_5$  se distribuye exponencial de parámetro  $\lambda_2$  condicionado a que es mayor a  $W_2 - S_5$ . Por otro lado, ese tamaño mínimo  $W_2 - S_5$  se debe también a una variable aleatoria exponencial de parámetro  $\lambda_3$  que fue mayor a ese tamaño: la última reclamación que llegó en un tiempo mayor y no fue agregada.

3.1.4. Difusión

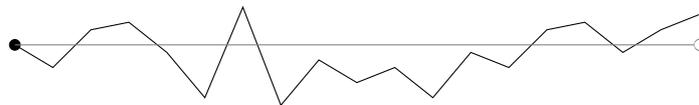
No podemos simular trayectorias continuas de un movimiento Browniano, nos limitaremos a simular observaciones en cada intervalo de tiempo de tamaño  $\Delta > 0$  pequeño. La manera en que simulamos la difusión del proceso de riesgo es la siguiente.

Para cada estancia en el estado  $i$  del proceso modulador, sea  $T$  el tiempo que dura la estancia. Para cada intervalo de tamaño  $\Delta$  simulamos una variable aleatoria normal con media 0 y varianza  $\sigma_i^2 \Delta$ , es decir, tantas como  $T/\Delta$ . A cada tiempo  $t = n\Delta$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor$ , sumamos todas las variables normales correspondientes a los tiempos menores o iguales a  $t$  y tendremos nuestro movimiento Browniano.

El Cuadro 3.6 muestra una lista de ejemplo de la forma en que simulamos el proceso como lo hemos descrito, guardamos los tiempos y el valor del movimiento Browniano y la Figura 3.5 es un ejemplo gráfico del resultado de la simulación.

Tiempo	V.A. Normal	mov. Browniano
0	0	0
$\Delta$	$N_1 \sim N(0, \sigma_i^2 \Delta)$	$N_1$
$2\Delta$	$N_2 \sim N(0, \sigma_i^2 \Delta)$	$N_1 + N_2$
$3\Delta$	$N_3 \sim N(0, \sigma_i^2 \Delta)$	$N_1 + N_2 + N_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T$	$N_{T/\Delta} \sim N(0, \sigma_i^2 \Delta)$	$\sum_{i=1}^{T/\Delta} N_i$

**Cuadro 3.6:** Lista con tiempos, v. a. normal simulada y valor del mov. Browniano simulado.



**Figura 3.5:** Movimiento Browniano simulado.

Al final tomamos  $M = T/\Delta$ . El lapso faltante  $T - M\Delta$  tendrá su propia simulación de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza  $\sigma_i^2(T - M\Delta)$  y es sumada con las demás para tener la observación del tiempo  $T$ .

Notemos que al tiempo  $t = n\Delta$ , la observación de nuestro movimiento Browniano es la variable  $\sum_{i=1}^n N_i$ , que al ser suma de normales independientes, se distribuye  $N(0, \sigma_i^2 t)$ . Además, la simulación cuenta con incrementos estacionarios e independientes por construcción. Por lo tanto, nuestro proceso efectivamente simula un movimiento Browniano con parámetro  $\sigma_i^2$  según la Definición 1.34.

Los movimientos Brownianos obtenidos de cada estado del proceso modulador son concatenados de tal forma que en los tiempos de salto el siguiente movimiento Browniano comience donde terminó el anterior. El algoritmo para la simulación de un movimiento Browniano modulado se encuentra en la Sección B.5.

Finalmente sumamos ambos procesos, el de reserva y el movimiento Browniano concatenado, para tener el proceso final con difusión. Lo que hacemos simplemente es: a la trayectoria de un movimiento Browniano modulado le agregamos el tiempo que ha transcurrido hasta su observación para simular el ingreso por primas y le restamos la suma de reclamaciones hasta el momento. El algoritmo que hace esto se encuentra en la Sección B.6.

### Ejemplo 3

Tomemos los siguientes parámetros para observar cómo se ve una simulación del proceso:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix},$$

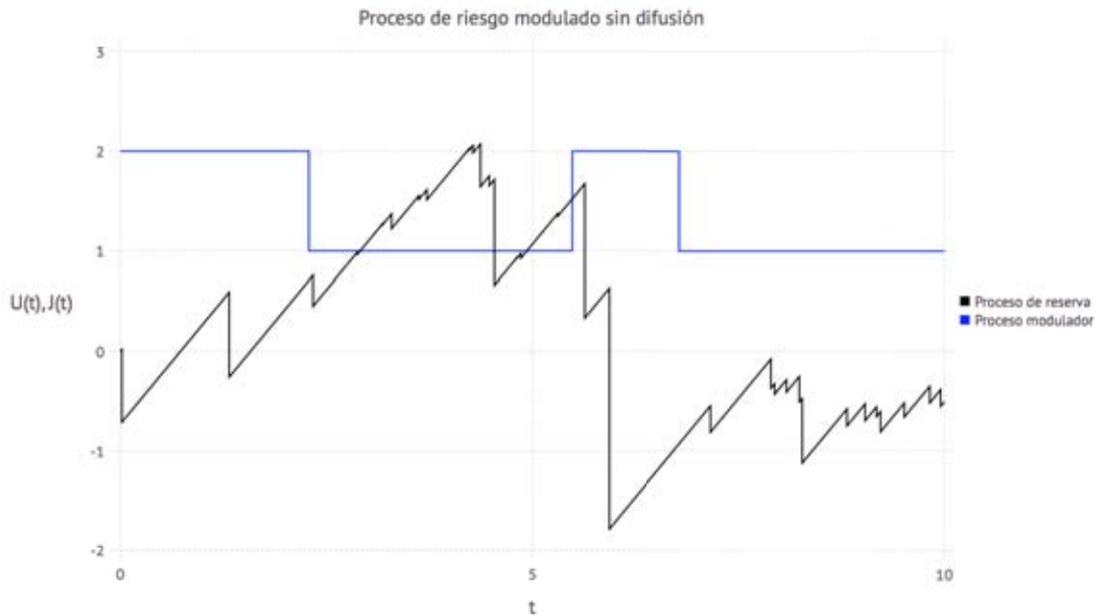
$$\pi = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1,$$

$$\mu_1 = 0.2, \quad \mu_2 = 1.2,$$

$$T = 10.$$

Graficamos la simulación obtenida de forma que sea claro el valor de la reserva en cada tiempo  $t \in [0, 10]$ . Además agregamos el proceso modulador en la misma gráfica para observar la influencia del ambiente en el tamaño de los tiempos entre reclamaciones y el de los montos reclamados. Notemos que por los parámetros elegidos esperamos ver reclamaciones más frecuentes ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) y con menor tamaño ( $\mu_1 < \mu_2$ ) en el estado 1 que en el estado 2. La Figura 3.6 muestra dicha gráfica, la cual efectivamente ilustra el comportamiento por modulación.



**Figura 3.6:** Simulación de una trayectoria del proceso de reserva y proceso modulator en el caso sin difusión.

Para el mismo proceso de riesgo y ambiente modulator, agregamos la difusión que es también influenciada por el estado en el que nos encontramos. Los parámetros usados son los siguientes:

$$\sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.1,$$

$$\Delta = 0.005.$$

La Figura 3.7 muestra la gráfica del proceso de riesgo que teníamos, el movimiento Browniano modulado y el proceso final con la difusión agregada.



**Figura 3.7:** Simulación de una trayectoria del proceso de reserva y proceso modulador en el caso con difusión.

Notemos de la Figura 3.7 que el movimiento Browniano que representa la difusión oscila alrededor del cero, mientras que el proceso final de reserva oscila alrededor del proceso que sólo incluía las reclamaciones. El estado modulador en este caso también afecta a la volatilidad del proceso, la cual es más alta en el estado 1 ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ).

### 3.2. Aspectos no analíticos de la ruina

Con la implementación de los algoritmos para simular procesos de riesgo estimaremos la probabilidad de ruina y obtendremos datos como la cantidad de veces que se arruina en cada estado o el tiempo promedio en que se arruina. Para ello, generaremos varias trayectorias ( $n$ ) de cierta longitud de tiempo ( $T$ ) y calcularemos la proporción que hay entre la cantidad de trayectorias que se vuelven negativas y la cantidad total:

$$\mathbb{P}(\text{Ruina}) \approx \frac{\text{No. simulaciones que se arruinan}}{\text{No. simulaciones totales}}.$$

Para cada trayectoria simulada, observamos si se arruina. Si lo hace, podemos monitorear el estado y el tiempo en que se arruinó. Para hacer esto, utilizamos el algoritmo encontrado en la Sección B.7. El algoritmo para realizar  $n$  simulaciones de tamaño  $T$  y estimar la

probabilidad de ruina del proceso de riesgo dados sus parámetros, así como la probabilidad de ruina por estado y la esperanza de tiempo de ruina, se encuentra en la Sección B.8.

### 3.2.1. Calibración de las simulaciones

En principio, la estimación que realizamos es sólo de la probabilidad de ruina antes de un tiempo  $T$ . Así que el primer paso es encontrar tiempos de simulación  $T$  y cantidades  $n$  de repeticiones adecuados para obtener información completa de cómo es la ruina. La forma cerrada para la calcular la probabilidad de ruina encontrada en el Capítulo 2 nos permitirá comparar los resultados de la aproximación con el valor real.

El fin de esta sección no es comparar probabilidades de ruina para diferentes parámetros del modelo, sino explicar las ventajas que tiene trabajar con simulaciones para contestar preguntas acerca de la ruina, así como nombrar algunas consideraciones a tomar cuando lo hagamos. Por lo tanto, describiremos los resultados sólo con los siguientes parámetros:

$$Q = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.0 \\ 1.5 & -1.5 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1,$$

$$\mu_1 = 0.4, \quad \mu_2 = 0.5,$$

$$\sigma_1 = 0.9, \quad \sigma_2 = 0.3.$$

Comencemos calculando probabilidades de ruina para el caso sin difusión con diferentes cantidades de simulaciones  $n$  y tiempos de simulación  $T$ . Además, en cada caso mostramos la probabilidad real calculada como lo hicimos en el Capítulo 2. En los Cuadros 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 mostramos las estimaciones de la probabilidad de ruina para capitales iniciales  $u = 0, 0.2, 0.8, 1.5$ , respectivamente.

**Cuadro 3.7:** Estimación de la probabilidad de ruina para  $u = 0$ .

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 30$	$T = 40$	$T = 50$
$n = 10$	0.4	0.5	0.9	0.5	0.9	0.9	0.6
$n = 10^2$	0.44	0.56	0.67	0.65	0.68	0.72	0.68
$n = 10^3$	0.456	0.558	0.636	0.66	0.685	0.649	0.703
$n = 10^4$	0.4803	0.559	0.6325	0.6618	0.6628	0.6759	0.6811
$n = 10^5$	0.47553	0.56174	0.63185	0.65973	0.67331	0.66978	0.67367

Valor real:  $\psi(0) \approx 0.673131$ .

**Cuadro 3.8:** Estimación de la probabilidad de ruina para  $u = 0.2$ .

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 30$	$T = 40$	$T = 50$
$n = 10$	0.3	0.4	0.6	0.6	0.7	0.5	0.4
$n = 10^2$	0.4	0.46	0.48	0.55	0.55	0.54	0.58
$n = 10^3$	0.373	0.432	0.5	0.561	0.558	0.598	0.554
$n = 10^4$	0.3645	0.4437	0.5345	0.566	0.5767	0.586	0.5871
$n = 10^5$	0.36392	0.44751	0.52872	0.56289	0.58232	0.57948	0.58195

Valor real:  $\psi(0.2) \approx 0.581878$ .

**Cuadro 3.9:** Estimación de la probabilidad de ruina para  $u = 0.8$ .

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 30$	$T = 40$	$T = 50$
$n = 10$	0.0	0.3	0.1	0.5	0.2	0.5	0.5
$n = 10^2$	0.14	0.19	0.21	0.31	0.41	0.27	0.42
$n = 10^3$	0.166	0.227	0.308	0.354	0.366	0.351	0.368
$n = 10^4$	0.1533	0.2295	0.304	0.3475	0.3719	0.3794	0.3727
$n = 10^5$	0.1563	0.22713	0.30832	0.35108	0.37142	0.37505	0.37707

Valor real:  $\psi(0.8) \approx 0.375856$ .

**Cuadro 3.10:** Estimación de la probabilidad de ruina para  $u = 1.5$ .

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 30$	$T = 40$	$T = 50$
$n = 10$	0.0	0.2	0.0	0.1	0.3	0.2	0.0
$n = 10^2$	0.04	0.04	0.23	0.2	0.25	0.22	0.18
$n = 10^3$	0.045	0.097	0.184	0.193	0.211	0.235	0.211
$n = 10^4$	0.0572	0.093	0.1637	0.1999	0.2261	0.2216	0.2287
$n = 10^5$	0.0554	0.09612	0.16097	0.19663	0.22122	0.22537	0.22486

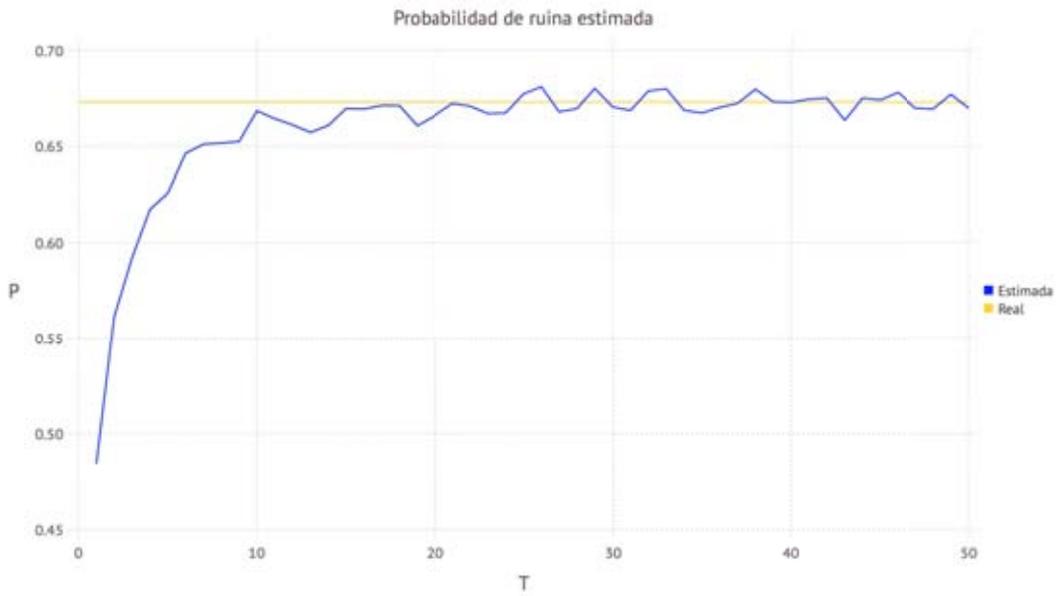
Valor real:  $\psi(1.5) \approx 0.225718$ .

Siempre es mejor trabajar con mayor número de repeticiones, pues la estimación se acerca más a la probabilidad real con valores grandes de  $n$  por la ley de los grandes números. De ahora en adelante trabajaremos con  $n = 10^4$ .

El parámetro  $T$  de las simulaciones nos indica por cuánto tiempo dejamos correr cada trayectoria. Notemos que en cada caso es mejor tener  $T$  grandes pues son las que estiman la probabilidad de ruina con mayor precisión. Esto se debe a que valores de  $T$  pequeños no permiten que trayectorias que “estaban destinadas a arruinarse” en un plazo mayor lo hayan hecho. Es decir, hay una probabilidad positiva de ruina con tiempo mayor a  $T$  y no estamos considerando esa probabilidad.

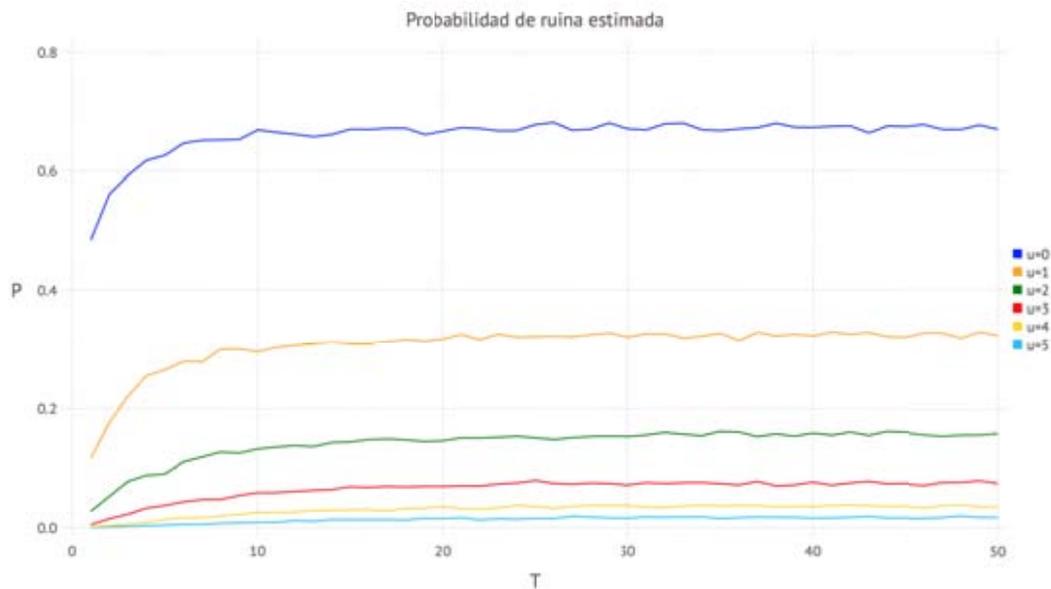
Notemos también que aunque siempre habrá probabilidad positiva de arruinarse después de un tiempo  $T$  para cualquiera que fuera éste, deja de ser significativa a partir de un valor mínimo. El supuesto de deriva positiva del proceso nos asegura que la ruina en tiempos muy grandes tiene probabilidad muy chica. Este valor mínimo de  $T$  es apto para realizar simulaciones y aproximar bien la probabilidad de ruina como se ve en los cuatro ejemplos anteriores. A menos de que busquemos estimar la probabilidad de ruina dentro de cierto periodo acotado, como no es el caso de este trabajo, buscaremos tal valor mínimo de  $T$ .

La Figura 3.8 muestra una gráfica en la que observamos cómo se estabiliza la probabilidad de ruina estimada para  $u = 0$  alrededor de su valor real a medida que  $T$  crece.



**Figura 3.8:** Estimación de la probabilidad de ruina sin difusión para  $u = 0$  con diferentes valores de  $T$ .

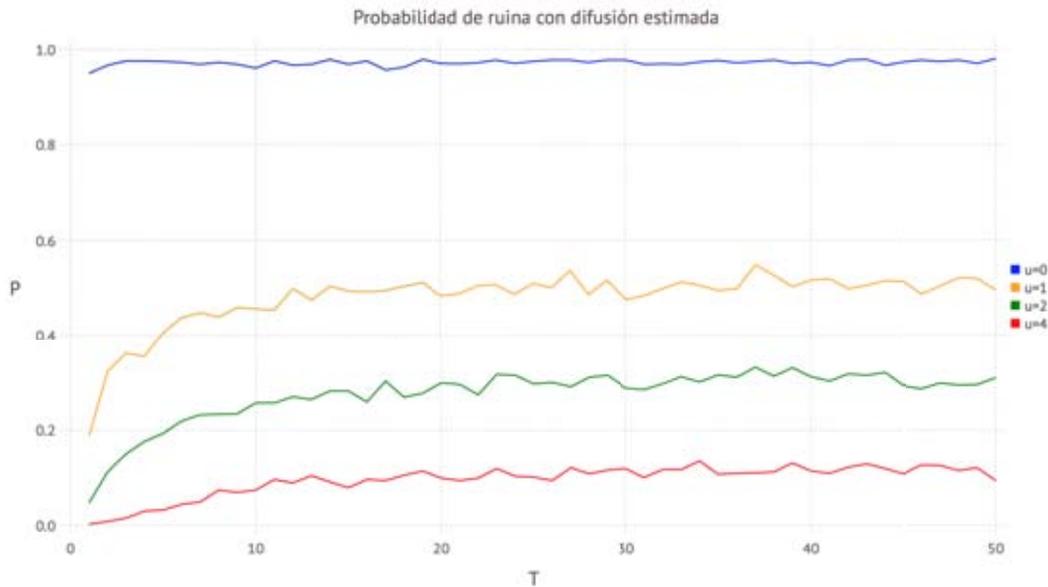
A partir de valores de  $T$  alrededor de 20, la probabilidad estimada alcanza una banda de estabilidad. Este comportamiento es similar para diferentes valores de  $u$  como lo vemos en la gráfica de la Figura 3.9.



**Figura 3.9:** Estimación de la probabilidad de ruina sin difusión para diferentes valores de  $u$  con diferentes valores de  $T$ .

Realizamos simulaciones de trayectorias con difusión usando longitud de observaciones

$\Delta = 0.001$  del movimiento Browniano y volvimos a estimar la probabilidad de ruina para diferentes valores de  $u$ ,  $T$ , y con  $n = 10^4$  repeticiones. Los resultados correspondientes son similares al caso sin difusión como lo vemos en la gráfica de la Figura 3.10.



**Figura 3.10:** Estimación de la probabilidad de ruina con difusión para diferentes valores de  $u$  con diferentes valores de  $T$ .

A partir de ahora trabajaremos con simulaciones de tamaño  $T = 30$ .

Un parámetro extra a considerar para una buena simulación de la ruina es la longitud entre las observaciones del proceso de difusión,  $\Delta$ . La mejor manera de ejemplificar esto es en el caso de  $u = 0$ , en donde la ruina instantánea se debe a que el movimiento Browniano se vuelve negativo dentro de un intervalo de tiempo muy pequeño. Observemos en el Cuadro 3.11 la probabilidad de ruina estimada para diferentes repeticiones y valores de  $\Delta$ .

**Cuadro 3.11:** Estimación de la probabilidad de ruina para  $u = 0$  con difusión.

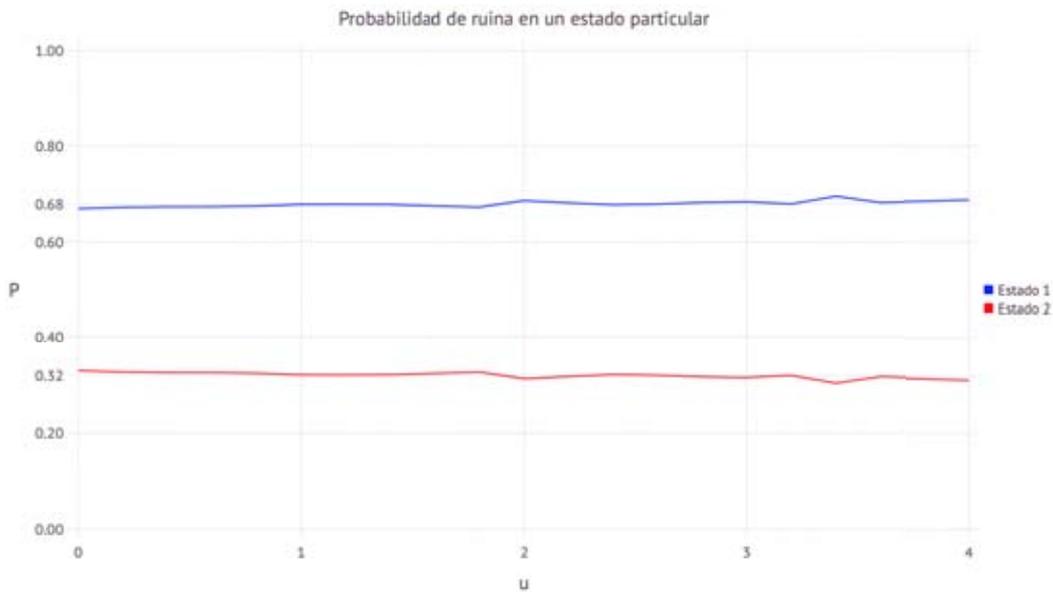
	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.01$	$\Delta = 0.001$	$\Delta = 0.0001$
$n = 10^3$	0.825	0.92	0.969	0.99
$n = 10^4$	0.8137	0.9179	0.9769	0.9921

Valor real:  $\psi(0) = 1$ .

Valores pequeños de  $\Delta$  permiten observar mejor el comportamiento del proceso con difusión, y en este caso en particular, la ruina instantánea al tener capital inicial cero.

### 3.2.2. Probabilidad de ruina por estado y tiempo de ruina

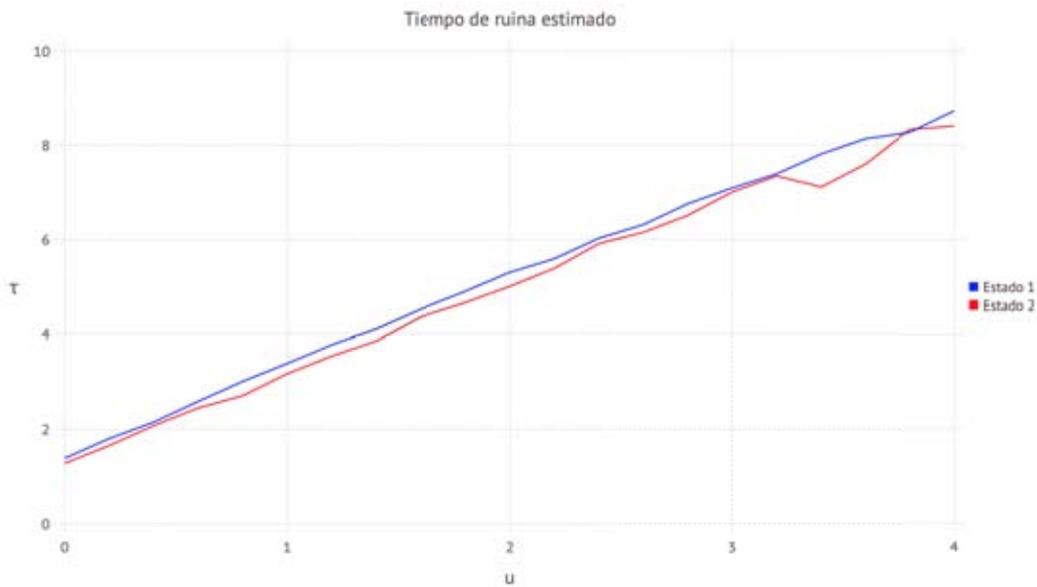
Utilizando los mismos parámetros del procesos de reserva sin difusión, con simulaciones de tamaño  $T = 30$  y  $n = 10^4$  repeticiones, monitoreamos cuál es el estado en que se arruina el proceso en las ocasiones que lo hace. Graficamos la proporción de trayectorias arruinadas en cada estado para diferentes valores de  $u$  con separación de 0.2 entre ellos; encontramos en la Figura 3.11 lo que obtuvimos.



**Figura 3.11:** Estimación de la probabilidad de ruina sin difusión en cada estado dado que el proceso se arruina para diferentes valores de  $u$ .

La mayoría de las estimaciones reportan un comportamiento similar a este, una proporción constante entre las veces que se arruina en cada estado para diferentes valores de  $u$ . En algunos otros casos, con diferentes parámetros del proceso de riesgo, las probabilidades de ruina por estado en valores de  $u$  cercanos a cero comienzan en otro punto, pero a medida que  $u$  crece éstas se estabilizan a un valor constante.

También se monitoreó el tiempo en el que se arruinaba cada trayectoria y realizamos un promedio de los tiempos de ruina por estado modulador. Graficamos para diferentes valores de  $u$  con separación de 0.2 entre ellos; encontramos en la Figura 3.12 lo que obtuvimos.



**Figura 3.12:** Estimación de la esperanza del tiempo de ruina sin difusión en cada estado para diferentes valores de  $u$ .

No es difícil imaginar que entre mayor sea el capital inicial  $u$ , el tiempo para que el proceso de riesgo se arruine tenga que ser cada vez mayor. Lo interesante a rescatar del comportamiento del tiempo de ruina estimado en este ejemplo es que, por un lado es prácticamente indiferente al estado en que se arruina, pero por otro parece mantener una dominancia mínima el de un estado sobre el otro. Este tipo de características se deben a la elección de los parámetros del proceso y como mencionamos, no serán explicadas.

Podemos realizar el mismo ejercicio para simulaciones con difusión. Con  $\Delta = 0.0001$  y separación de 0.1 entre los distintos valores de  $u$ , la Figura 3.13 muestra la proporción de ruina por estado.



**Figura 3.13:** Estimación de la probabilidad de ruina con difusión en cada estado dado que el proceso se arruina para diferentes valores de  $u$ .

Aunque el comportamiento para  $u > 0$  reporte también en este caso la estabilización a proporciones constantes entre las ruinas por estado, cabe resaltar el comportamiento en  $u = 0$ . Recordemos que la ruina con capital inicial cero tiene que ser instantánea debido a la difusión sin importar el parámetro que ésta tenga, así que las veces que se arruina en cada estado dependerá únicamente de la distribución inicial  $\pi_0$ .

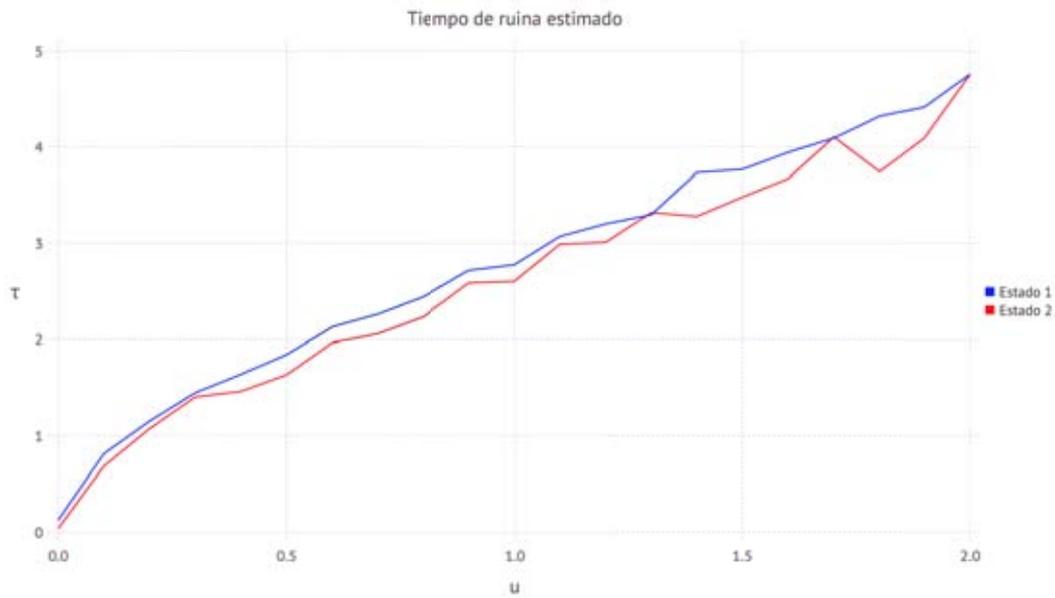
Si calculamos con mayor precisión ( $\Delta = 10^{-5}$ ) la ruina por estado en el caso  $u = 0$  obtenemos los resultados mostrados en el Cuadro 3.12.

**Cuadro 3.12:** Estimación de la probabilidad de ruina por estado con difusión.

	$\mathbb{P}(\text{Ruina})$	Estado 1	Estado 2
$u = 0$	0.997	0.505517	0.494483

La probabilidad de ruina estimada en cada estado es consistente con la distribución inicial  $\pi_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Obtuvimos para varios valores de  $u$  el tiempo promedio de ruina por estado. La Figura 3.14 muestra la gráfica de los resultados.



**Figura 3.14:** Estimación de la esperanza del tiempo de ruina sin difusión en cada estado para diferentes valores de  $u$ .

Observamos que el tiempo de ruina estimado es cercano a 0 para valores chicos de  $u$ , lo que es consistente con la propiedad de ruina instantánea.

### 3.2.3. Caso con tres estados

Para ilustrar las posibilidades que obtenemos al hacer simulaciones con el fin de aproximarnos al problema de la ruina, usemos los siguientes parámetros en el caso de tres estados.

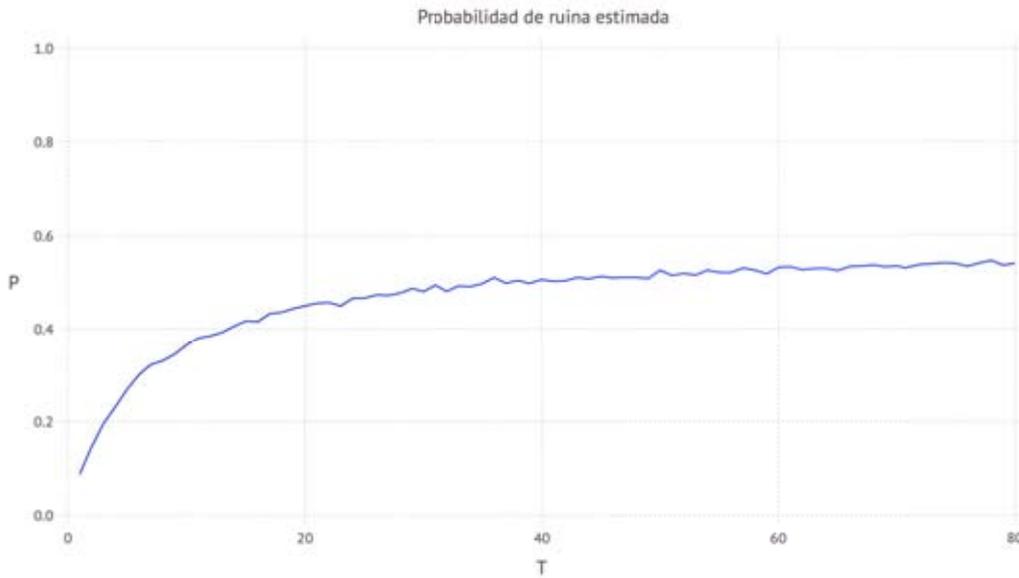
$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

$$\lambda_1 = 2.5, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1.3,$$

$$\mu_1 = 0.5, \quad \mu_2 = 0.2, \quad \mu_3 = 1.$$

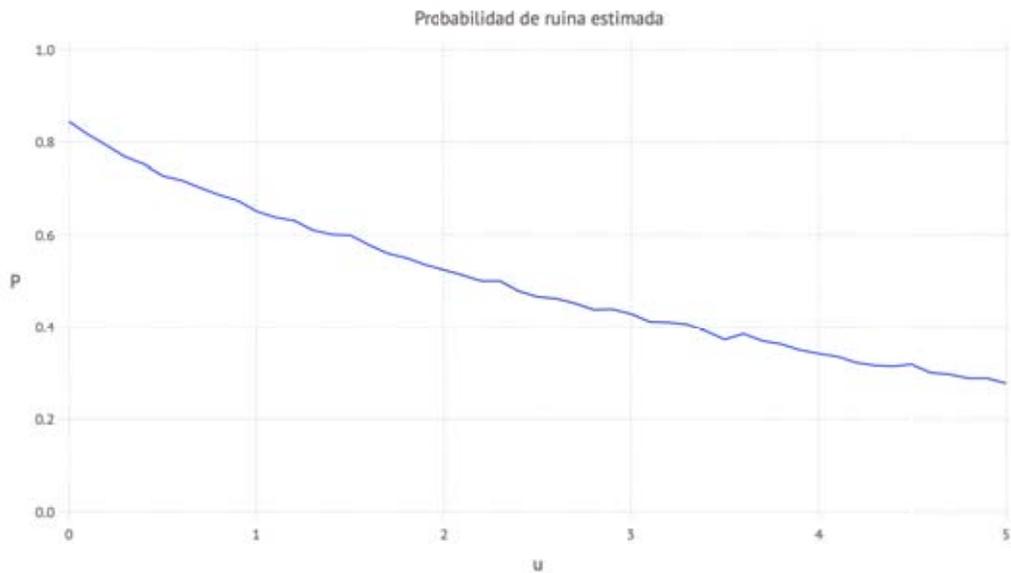
Primero demos un vistazo en la Figura 3.15 a la estabilización de la probabilidad de ruina estimada para un valor en particular de  $u = 2$  y usando  $n = 10^4$  repeticiones.



**Figura 3.15:** Estimación de la probabilidad de ruina para  $u = 2$  con diferentes valores de  $T$ .

En ausencia del valor de la probabilidad real en este caso, se debe recurrir a un criterio sobre la estabilidad de los valores estimados con el que podamos elegir la  $T$  mínima que usaremos. El comportamiento de estabilización se observará siempre que se cumpla la propiedad de deriva positiva del proceso,  $1 - \sum_{i=1}^3 \pi_i \lambda_i \mu_i > 0$ , y el proceso no requiera tiempos muy grandes para arruinarse.

De aquí en adelante usamos un tiempo de simulación  $T = 60$  y  $n = 10^4$  repeticiones. Ahora veamos que podemos calcular la probabilidad de ruina para varios valores de  $u$  (de 0 a 5 en intervalos de 0.1) y obtener una aproximación a la función  $\psi(u)$ , lo cual no hemos hecho de manera analítica en este caso. La Figura 3.16 muestra un ejemplo con la gráfica de esta probabilidad estimada.



**Figura 3.16:** Estimación de la función de ruina.

Por último, revisemos cómo se comporta la ruina en cada estado. En el caso de tres estados también se observó un comportamiento de estabilización de las proporciones de trayectorias arruinadas por estado; así mismo, para valores pequeños de  $u$  estas proporciones son más cercanas a la distribución del estado inicial. Graficamos estas proporciones para distintos valores de  $u$  con separación de 0.1 entre ellos y mostramos los resultados en la Figura 3.17.



**Figura 3.17:** Estimación de la probabilidad de ruina en cada estado dado que el proceso se arruina para diferentes valores de  $u$ .

El tiempo de ruina esperado por estado en el que se arruina se comporta de manera similar al caso de dos estados: creciente con respecto a  $u$  e indiferente al estado de ruina con valores de  $u$  grandes. La Figura 3.18 muestra la gráfica de este comportamiento.



**Figura 3.18:** Estimación de la esperanza del tiempo de ruina en cada estado para diferentes valores de  $u$ .

La dominancia que observamos en los tiempos de ruina de un estado contra otro en el caso de dos estados parece permanecer en casos de tres estados. En nuestro ejemplo, los tiempos de ruina cuando se arruina en el estado 3 son mayores a los tiempos en el estado 1, y a su vez mayor a los tiempos de ruina en el estado 2 para los primeros valores de  $u$ . Esto puede explicarse, según las observaciones con otros parámetros, por el producto de parámetros  $\lambda\mu$  para cada estado: mientras mayor sea la esperanza de caída por reclamaciones por unidad de tiempo ( $\lambda\mu$ ), al menos para valores pequeños de  $u$ , implica menor tiempo necesario para arruinarse. Esto es consistente con el ejemplo de dos estados antes visto.

Sin embargo el análisis completo debe incluir las diferencias en los parámetros del proceso modulador y la distribución estacionaria, por ello queda fuera de los márgenes de este trabajo. Sin embargo, hemos mostrado los alcances de las simulaciones para resolver algunos problemas referentes a la ruina del proceso. Es muy fácil a partir de aquí dar resultados no analíticos de cómo afecta cada parámetro a la probabilidad de ruina, la probabilidad de ruina por estado y al tiempo de ruina, manteniendo el resto constantes.

## Capítulo 4

# Inferencia

El propósito del último capítulo de este trabajo es proponer un método de inferencia para el proceso de reserva modulado en el caso de dos estados y montos de reclamación exponenciales. Primero expondremos el uso del algoritmo EM estocástico propuesto por Nielsen [14] para estimar la matriz de intensidades de un proceso de saltos de Markov dadas observaciones discretas de una trayectoria. Aunque también implementaremos el algoritmo para inferencia dada una observación continua, nos interesa el caso en el que no conocemos totalmente el proceso modulador. Éste puede ser el caso en el que no contamos con información de diferente volatilidad del proceso de difusión en cada estado o en el que la tasa de primas es siempre la misma.

Después, bajo el supuesto de no tener información de la difusión o de cambios en el ingreso por primas, intentaremos inferir los parámetros del proceso modulador ( $q_1$  y  $q_2$ ) sólo con la observación de las reclamaciones. Explicaremos los alcances y las limitaciones de una regla para clasificar las reclamaciones en dos conjuntos: los que asignaremos como provenientes del estado 1 y los provenientes del estado 2.

Finalmente, construiremos estadísticos que convergen a funciones de los parámetros del proceso y, suponiendo conocidas las intensidades de los estados moduladores, explicaremos cómo seleccionar los mejores estimadores para las intensidades del proceso de reclamaciones ( $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ) y las medias de los montos de reclamación ( $\mu_1$  y  $\mu_2$ ). Nuevamente trabajamos con el lenguaje de programación `Julia` para implementar todos los algoritmos y realizar las pruebas en algunos ejemplos.

## 4.1. Algoritmo EM estocástico para procesos de saltos de Markov

Basado en el algoritmo EM usual, en [14] encontramos los resultados asintóticos para el algoritmo EM estocástico que nos servirá para encontrar los estimadores máximo verosímiles de un proceso de saltos de Markov observado de manera discreta. A continuación explicamos cómo aplicamos dicho algoritmo.

Sea  $J = J_t$   $t \geq 0$  el proceso del que se obtuvieron las observaciones  $J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_N}$  con los tiempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  conocidos. Supongamos además que el espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, d\}$  se conforma exactamente de todos los estados observados. Y sea  $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$  la matriz de intensidades del proceso  $J$  sobre la cual queremos hacer inferencia.

A partir de una matriz de intensidades  $\hat{Q}_0$  de dimensiones  $d \times d$  generamos una sucesión  $(\hat{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la siguiente manera:

**Paso E (Estocástico)** Dada la matriz de intensidades  $\hat{Q}_n$ , simulamos una trayectoria del proceso de saltos que complete las observaciones  $J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_N}$  a través de puentes de Markov entre cada par de observaciones contiguas.

**Paso M** Dada la simulación del proceso continuo, calculamos la matriz de los estimadores máximo verosímiles para las intensidades  $q_{ij}$ . Esta matriz será  $\hat{Q}_{n+1}$ .

Nielsen [14] demuestra que usando este algoritmo, los valores en  $(\hat{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergen en distribución a variables aleatorias que asintóticamente se comportan como normales con media en los parámetros reales. Por lo tanto, podremos encontrar estimadores para la matriz desconocida  $Q$  tomando la media de las matrices  $(\hat{Q}_n)_{n=M}^K$  con  $0 < M < K$  suficientemente grandes.

Antes de poder aplicar el algoritmo EM a las observaciones discretas de una trayectoria, necesitamos saber tres cosas: cómo dar una primera estimación de la matriz de intensidades,  $\hat{Q}_0$ , de una observación discreta; cómo completar la trayectoria continua desde una observación discreta y una matriz  $\hat{Q}_n$  dada; y cómo estimar la matriz máximo verosímil,  $\hat{Q}_{n+1}$ , desde una observación continua.

### PASO 0. Primera estimación de la matriz

Daremos una idea intuitiva de cómo obtener una estimación de la matriz de intensidades a partir de una observación discreta.

Primero supondremos que al observar el proceso en un estado  $i$ , permanece ahí hasta la siguiente observación que puede ser en el mismo estado o en otro. Así podemos medir el tiempo  $T[i]$  que está en cada estado. También podemos contar las veces que estuvo en cada estado  $V[i]$ , contando como una sola siempre que veamos el mismo estado en observaciones contiguas.

Recordemos que dentro de las matrices de intensidades, los elementos de la diagonal  $q_{ii} = -q_i$  están dados por los parámetros de la distribución exponencial que siguen los tiempos de estancia en cada estado. Es decir, los tiempos de estancia siguen una distribución  $\exp(q_i)$ , por lo que dicho parámetro puede ser estimado como el inverso del tiempo medio permanecido en cada estado:  $V[i]/T[i]$ .

Luego, si además contamos las veces que hubo saltos de un estado  $i$  a un estado  $j = i$ ,  $P[i, j]$ , y dividimos por el número de veces que estuvimos en  $i$ , tendremos una estimación de la probabilidad de salto al estado  $j$  dado que estábamos en el estado  $i$ :  $P[i, j]/V[i]$ . Por último, recordemos de la Definición 1.24 de matriz de intensidades que el resto de los parámetros  $q_{ij}$  son el producto de  $q_i$  por la probabilidad de salto del estado  $i$  al  $j$ . Con ello tendremos la totalidad de la matriz estimada.

La idea anterior está plasmada en el algoritmo de la Sección C.4, el cual veremos que es similar al algoritmo para estimar dada una observación continua por máxima verosimilitud presentada más adelante.

### PASO E. Completar la trayectoria continua con puentes de Markov

Supongamos que tenemos una matriz de intensidades  $\tilde{Q}$  de la que presumimos viene la distribución de  $J$  y queremos completar una trayectoria del proceso que pasa por las observaciones  $J_{t_1}, J_{t_2}, \dots, J_{t_N}$ . Lo que haremos es tomar los parámetros dados por  $\tilde{Q}$  y crear una pequeña trayectoria que comience en una de las observaciones y termine en la siguiente. La concatenación de estas pequeñas trayectorias dará como resultado una trayectoria continua con la distribución dada por  $\tilde{Q}$  y condicionada a las observaciones discretas dadas.

**Definición 4.1.** Para un proceso de saltos de Markov  $J_t$   $t \geq 0$ , se define como **puente de Markov** con parámetros  $(a, b, T)$  a un proceso estocástico definido para  $t \in [0, T]$  determinado por la distribución de  $J_t : 0 \leq t \leq T$  y condicionado a  $J_0 = a$  y  $J_T = b$ .

A continuación, basado en [3], se explica el **algoritmo de la bisección** para simular puentes de Markov dados sus parámetros  $(a, b, T)$  y la matriz de intensidades  $\tilde{Q} = (q_{ab})_{a, b \in E}$  que suponemos define al proceso  $J_t$   $t \geq 0$ .

Primero se bisecciona el intervalo  $[0, T]$  y se decide el estado en el que está  $J_{T/2}$  y cuántos saltos hay en cada intervalo  $[0, T/2]$  y  $[T/2, T]$ . Esto se realiza iterativamente hasta tener intervalos en alguno de los siguientes dos casos:

1. Si  $J_0 = J_T = a$  y no hay saltos. En cuyo caso  $J_t = a$ , para  $0 \leq t \leq T$ .
2. Si  $J_0 = a$  y  $J_T = b = a$  y hay un único salto. En cuyo caso sólo faltaría conocer a  $\tau \in (0, T]$  tal que  $J_t = a$ , para  $0 \leq t < \tau$  y  $J_t = b$ , para  $\tau \leq t \leq T$ .

Sea  $P_{ab}(T) = \mathbb{P}(J_T = b | J_0 = a)$ . Calculemos la probabilidad de cambiar a otro estado con exactamente un salto.

**Lema 4.2.** Sean  $a$  y  $b$  estados distintos del proceso de saltos de Markov, y un intervalo de longitud  $T$  con  $J_0 = a$ . La probabilidad de que  $J_T = b$  y que haya ocurrido un único salto en el intervalo es

$$R_{ab}(T) = q_{ab} \begin{cases} \frac{e^{-q_a T} - e^{-q_b T}}{q_b - q_a} & q_a \neq q_b \\ T e^{-q_a T} & q_a = q_b. \end{cases}$$

La densidad del tiempo de estadía es

$$f_{ab}(t; T) = \frac{q_{ab} e^{-q_b T}}{R_{ab}(T)} e^{-(q_a - q_b)t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Y además la probabilidad de que  $J_T = b$  con al menos dos saltos en el intervalo es  $P_{ab}(T) - R_{ab}(T)$ .

La demostración puede encontrarse también en [3], la misma referencia en la que nos basamos.

Notemos que la distribución del tiempo de salto está dada según uno de los siguientes casos:

- Si  $q_a = q_b$ , el cambio de estado se distribuye uniforme en  $[0, T]$ .
- Si  $q_a < q_b$ , el cambio de estado  $\tau$  se distribuye de forma exponencial truncada a  $[0, T]$ .
- Si  $q_a > q_b$ , por simetría  $f_{ab}(t)$  es la densidad de la variable  $T - \tau$  con  $\tau$  distribuida de manera exponencial de parámetro  $q_b - q_a$  truncada a  $[0, T]$ .

### Caso de estados extremos iguales

Llamemos  $N(T)$  al número de saltos en el intervalo  $[0, T]$ . Supongamos que  $J_0 = J_T = a$ , podemos escribir

$$P_{aa}(T) = P_{aa}(T/2)P_{aa}(T/2) + \sum_{c=a} P_{ac}(T/2)P_{ca}(T/2),$$

donde

$$\begin{aligned} P_{aa}(T/2) &= \mathbb{P}(J_{T/2} = a \mid J_0 = a) \\ &= \mathbb{P}(J_{T/2} = a, N(T/2) = 0 \mid J_0 = a) + \mathbb{P}(J_{T/2} = a, N(T/2) \geq 2 \mid J_0 = a) \\ &= e^{-q_a T/2} + [P_{aa}(T/2) - e^{-q_a T/2}], \end{aligned}$$

y también que

$$P_{ac}(T/2) = R_{ac}(T/2) + [P_{ac}(T/2) - R_{ac}(T/2)].$$

Si definimos  $e_a = e^{-q_a T/2}$ ,  $r_{ab} = R_{ab}(T/2)$  y  $p_{ab} = P_{ab}(T/2)$ , tenemos los casos con sus respectivas probabilidades de ocurrencia en el Cuadro 4.1.

**Cuadro 4.1:** Probabilidades de cada escenario posible en el caso de estados extremos iguales.

Caso	Salto en $(0, T/2)$	Salto en $(T/2, T)$	Probabilidad	Notación
1	0	0	$e_a e_a$	$\alpha_1$
2	0	$\geq 2$	$e_a (p_{aa} - e_a)$	$\alpha_2$
3	$\geq 2$	0	$(p_{aa} - e_a) e_a$	$\alpha_3$
4	$\geq 2$	$\geq 2$	$(p_{aa} - e_a)(p_{aa} - e_a)$	$\alpha_4$
5	1	1	$r_{ac} r_{ca}$	$\alpha_{5,c}$
6	1	$\geq 2$	$r_{ac} (p_{ca} - r_{ca})$	$\alpha_{6,c}$
7	$\geq 2$	1	$(p_{ac} - r_{ac}) r_{ca}$	$\alpha_{7,c}$
8	$\geq 2$	$\geq 2$	$(p_{ac} - r_{ac})(p_{ca} - r_{ca})$	$\alpha_{8,c}$

Así, para cada pareja de observaciones contiguas, si  $J_{t_i} = J_{t_{i+1}}$ , elegiremos uno de estos casos proporcionalmente a los  $\alpha$ -valores del Cuadro 4.1 con  $a = J_{t_i}$  y  $T = t_{i+1} - t_i$ . Después, en cada intervalo se generará el tiempo de salto y el estado al que se salta o se volverá a bisectar de acuerdo al caso elegido.

#### Caso de estados extremos distintos

Ahora supongamos que  $J_0 = a$  y que  $J_T = b = a$ , entonces tenemos la probabilidad de

transición

$$P_{ab}(T) = P_{aa}(T/2)P_{ab}(T/2) + P_{ab}(T/2)P_{bb}(T/2) + \sum_{c=a,b} P_{ac}(T/2)P_{cb}(T/2).$$

Con lo que también podemos construir los casos posibles y sus probabilidades de ocurrencia, las cuales se muestran en el Cuadro 4.2.

**Cuadro 4.2:** Probabilidades de cada escenario posible en el caso de estados extremos iguales.

Caso	Salto en $(0, T/2)$	Salto en $(T/2, T)$	Probabilidad	Notación
1	0	1	$e_a r_{ab}$	$\beta_1$
2	0	$\geq 2$	$e_a(p_{ab} - e_{ab})$	$\beta_2$
3	$\geq 2$	1	$(p_{aa} - e_a)r_a$	$\beta_3$
4	$\geq 2$	$\geq 2$	$(p_{aa} - e_a)(p_{ab} - r_{ab})$	$\beta_4$
5	1	0	$r_{ab}e_b$	$\beta_5$
6	1	$\geq 2$	$r_{ab}(p_{bb} - e_b)$	$\beta_6$
7	$\geq 2$	0	$(p_{ab} - r_{ab})e_b$	$\beta_7$
8	$\geq 2$	$\geq 2$	$(p_{ab} - r_{ab})(p_{bb} - e_b)$	$\beta_8$
9	1	1	$r_{ac}r_{cb}$	$\beta_{9,c}$
10	1	$\geq 2$	$r_{ac}(p_{cb} - r_{cb})$	$\beta_{10,c}$
11	$\geq 2$	1	$(p_{ac} - r_{ac})r_{cb}$	$\beta_{11,c}$
12	$\geq 2$	$\geq 2$	$(p_{ac} - r_{ac})(p_{cb} - r_{cb})$	$\beta_{12,c}$

Así, para cada pareja de observaciones contiguas, si  $J_{t_i} = J_{t_{i+1}}$ , elegiremos uno de estos casos proporcionalmente a los  $\beta$ -valores del Cuadro 4.2 con  $a = J_{t_i}$ ,  $b = J_{t_{i+1}}$  y  $T = t_{i+1} - t_i$ . Después, en cada intervalo se generará el tiempo de salto y el estado al que se salta o se volverá a bisectar de acuerdo al caso elegido.

Sabemos que la probabilidad de que haya más de un salto en un pequeño intervalo decrece exponencialmente a medida de que el intervalo decrece. Por lo tanto, aplicando este algoritmo a cada pareja de observaciones contiguas siempre llegaremos a uno de los dos casos finales, y con ello a una observación continua en todo el periodo  $[t_1, t_N]$ .

El algoritmo para simular puentes de Markov por el método de bisección y completar trayectorias observadas discretamente se encuentra en dos partes, en las Secciones C.1 y C.2. Además, vamos a necesitar eliminar algunos puntos de la trayectoria final obtenida pues pueden repetir el estado de la observación anterior, esto lo hacemos con el algoritmo en la Sección C.3.

### PASO M. Estimadores por máxima verosimilitud de un proceso de saltos de Markov

La segunda parte del algoritmo se trata de calcular los estimadores máximo verosímiles de los parámetros de un proceso de saltos de Markov a partir de la observación continua de una trayectoria.

Consideremos el proceso de saltos de Markov finito e irreducible  $J = J_t \ t \geq 0$  con espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, d\}$  y matriz de intensidades  $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ .

**Proposición 4.3.** *Supongamos que  $J$  ha sido observado de manera continua en  $[0, \tau]$  y conocemos  $N_{ij}(\tau)$ , el número de veces que el proceso salta del estado  $i$  al estado  $j$  en el intervalo de tiempo  $[0, \tau]$ , y  $R_i(\tau)$ , el tiempo de permanencia del proceso en el estado  $i$  en el intervalo de tiempo  $[0, \tau]$ , es decir,*

$$R_i(\tau) = \int_0^\tau 1_{\{i\}}(J_s) ds.$$

Si  $R_i(\tau) > 0$  para todo  $i \in E$ , entonces el estimador máximo verosímil del generador infinitesimal está dado por:

$$\hat{q}_{ij}(\tau) = \frac{N_{ij}(\tau)}{R_i(\tau)}, \quad j = i.$$

*Demostración.* Supongamos que el proceso saltó un total de  $n \in \mathbb{N}$  veces, y sean  $s_1, s_2, \dots, s_n$  los tiempos de salto y  $j_0, j_1, j_2, \dots, j_n$  los estados en los que estuvo. El Cuadro 4.3 muestra la lista de tiempo y estados como la observamos.

**Cuadro 4.3:** Lista con los tiempos y estados de salto observados.

Tiempo	Estado
0	$j_0$
$s_1$	$j_1$
$s_2$	$j_2$
$\vdots$	$\vdots$
$s_n$	$j_n$

Recordemos que los tiempos entre saltos son variables aleatorias exponenciales y la densidad de que haya un salto después de estar un tiempo  $s_m - s_{m-1}$  en el estado  $j_{m-1}$  es  $q_{j_{m-1}} e^{-q_{j_{m-1}}(s_m - s_{m-1})}$ , mientras que la probabilidad de que este salto haya sido al estado

$j_m$  es  $q_{j_{m-1}j_m}/q_{j_{m-1}}$ ; la probabilidad de que el proceso se haya quedado en el último estado  $j_n$  hasta un tiempo más allá de  $\tau$  es  $e^{-q_{j_n}(\tau-s_n)}$ . Entonces la función de verosimilitud es

$$L_\tau(Q) = q_{j_0} e^{-q_{j_0}s_1} \frac{q_{j_0j_1}}{q_{j_0}} \times \dots \times q_{j_{n-1}} e^{-q_{j_{n-1}}(s_n-s_{n-1})} \frac{q_{j_{n-1}j_n}}{q_{j_{n-1}}} \times e^{-q_{j_n}(\tau-s_n)}.$$

Los factores  $q_{j_m}$  se cancelan y notemos que habrá tantos factores  $q_{ij}$  como saltos del estado  $i$  al estado  $j$ , es decir,  $N_{ij}(\tau)$ . Además, las exponenciales con  $q_i$  multiplicadas resultan  $e^{-q_i R_i(\tau)}$  pues los exponentes suman el tiempo total de estancia en el estado  $i$ ; recordemos que  $q_i = \sum_{j=i} q_{ij}$ , por lo tanto  $e^{-q_i R_i(\tau)} = \prod_{j=i} e^{-q_{ij} R_i(\tau)}$ .

Entonces

$$L_\tau(Q) = \prod_{i \in E} \prod_{j=i} q_{ij}^{N_{ij}(\tau)} e^{-q_{ij} R_i(\tau)}$$

y

$$\ln L_\tau(Q) = \sum_{i \in E} \sum_{j=i} N_{ij}(\tau) \ln q_{ij} - q_{ij} R_i(\tau).$$

Derivando e igualando a 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_\tau(Q)}{\partial q_{ij}} &= N_{ij}(\tau) \frac{1}{q_{ij}} - R_i(\tau) = 0 \\ &= q_{ij} = \frac{N_{ij}(\tau)}{R_i(\tau)}. \end{aligned}$$

De notar que la segunda derivada es  $\frac{\partial^2 \ln L_\tau(Q)}{\partial q_{ij}^2} = -N_{ij}(\tau) \frac{1}{q_{ij}^2} < 0$ , se concluye que ese valor de  $q_{ij}$  es el que maximiza la verosimilitud y por tanto es el estimador máximo verosímil.  $\square$

Dada la trayectoria continua de  $J$  en un intervalo de tiempo, es fácil calcular las veces que saltó de un estado a otro y el tiempo de permanencia en cada uno. La manera de hacer lo anterior, junto con los cálculos necesarios para estimar por máxima verosimilitud, se encuentran en la Sección C.5.

Finalmente, el algoritmo EM estocástico para estimar los parámetros de un proceso de saltos de Markov observado discretamente se encuentra en la Sección C.6.

**Ejemplo 4**

Daremos un ejemplo para resaltar las consideraciones que debemos hacer a la hora de estimar. En este caso usaremos tres estados: simularemos trayectorias de  $J$  de la misma forma en que lo hicimos en el capítulo anterior con matriz de intensidad dada y un tiempo de simulación también dado, rescataremos observaciones discretas de la trayectoria (en este caso con intervalos de tiempo constantes entra cada observación), y con ellas aplicaremos el algoritmo descrito.

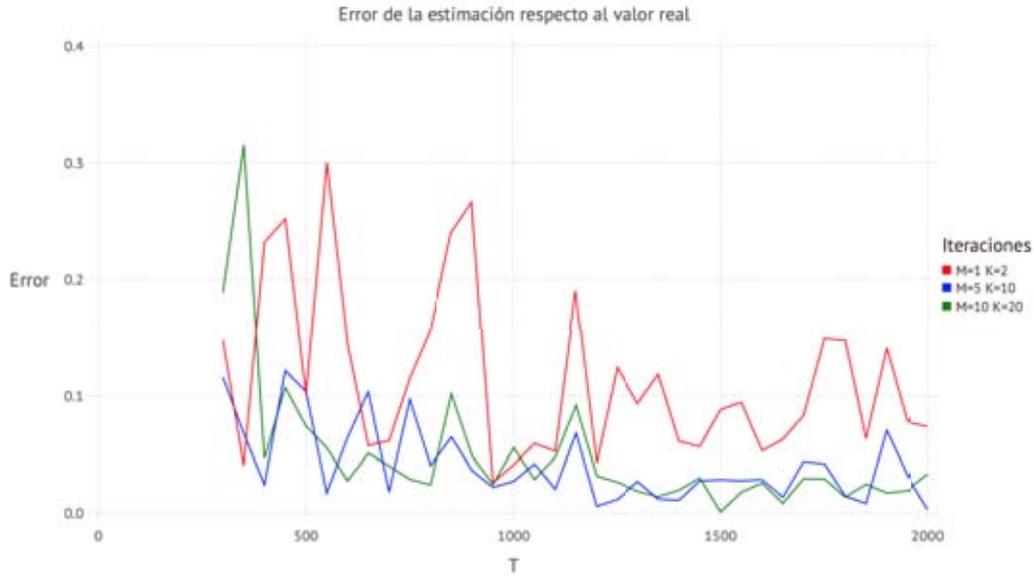
Los parámetros que usamos son los siguientes

$$Q = \begin{pmatrix} -1.4 & 0.7 & 0.7 \\ 0.6 & -0.8 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Comparamos los resultados obtenidos para diferentes tiempos de simulación  $T$ , es decir, el tamaño de información que tenemos acerca de cómo es el proceso de saltos. Para cada trayectoria aplicamos la estimación a observaciones con distancia 0.5 entre ellas. Además aplicamos el algoritmo de tres maneras distintas: con diferente cantidad de iteraciones y promediando las matrices entre las iteraciones  $M = 1$  y  $K = 2$ ,  $M = 5$  y  $K = 10$ , y  $M = 10$  y  $K = 20$ .

Para cada matriz obtenida como resultado del promedio, comparamos sus entradas con las de la matriz original y calculamos un error sumando los cuadrados de sus diferencias. La gráfica de la Figura 4.1 muestra los errores para cada estimación con tiempos  $T = 250, 300, 350, \dots, 2000$ .



**Figura 4.1:** Error de la estimación para diferentes valores de  $T$  y cantidades de iteraciones.

No sólo encontramos mejores aproximaciones a medida que aumentamos la cantidad de información del proceso, notemos que los algoritmos que realizaban más iteraciones llegan a mejores resultados. Mientras que la primera y la segunda iteración tienen errores de más del 0.1, las iteraciones a partir de la quinta muestran errores más chicos y similares, aun siendo de la quinta a la décima o de la décima a la vigésima. Esto se observó en otros casos y sugiere que para un número de iteraciones mayores o iguales al orden de 10, ya no mejora significativamente la aproximación y en tal caso ya es buena para esta combinación de parámetros.

Realizando el algoritmo a las observaciones de una trayectoria de tamaño  $T = 5000$  con  $K = 30$  iteraciones, en donde promediamos desde  $M = 10$ , obtenemos la siguiente matriz estimada:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -1.37143 & 0.694002 & 0.677429 \\ 0.573151 & -0.780438 & 0.207287 \\ 0.0291249 & 0.490181 & -0.519306 \end{pmatrix} .$$

## 4.2. Observación discreta del proceso modulador a partir del proceso de reclamaciones

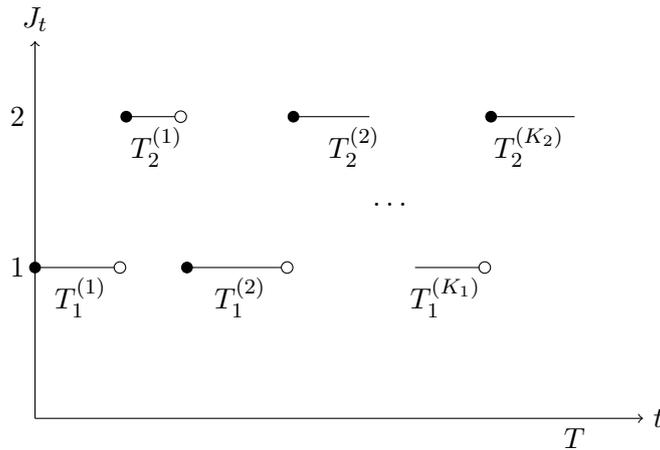
Supongamos que nuestro proceso de saltos de Markov  $J_t$  es de dos estados, un estado 1 económicamente adverso y un estado 2 económicamente favorable. Recibimos reclamaciones por las cuales se debe pagar un monto con distribución exponencial con media  $\mu_1$  si estamos en el estado 1 y con distribución exponencial con media  $\mu_2$  si estamos en el estado 2, con  $\mu_1 > \mu_2$ . Las reclamaciones llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda_1$  si estamos en el estado 1 y  $\lambda_2$  si estamos en el estado 2, con  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Recordemos que la intención de hacer la estimación dada una observación discreta se debe a que no contamos con información continua del estado de la economía en el que nos encontramos. Esto puede deberse a que no observamos diferencias en el proceso de difusión ni en el ingreso de primas entre estados.

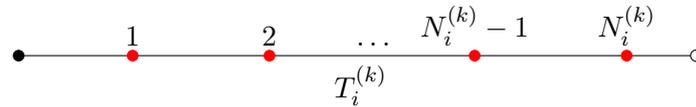
Lo que siempre deberíamos ser capaces de observar son los tiempos de reclamaciones y los montos por éstas. Segregaremos algunos de ellos de la siguiente manera: los que hayan sido en un tiempo chico ( $< a_1$ ) después de la última reclamación y con un monto grande ( $> b_1$ ), los consideraremos pertenecientes al estado 1 de la economía; los que hayan sido en un tiempo grande ( $> a_2$ ) después de la última reclamación y con un monto chico ( $< b_2$ ), los consideraremos pertenecientes al estado 2. La idea detrás es que bajo el escenario adverso, las reclamaciones llegan con menos tiempo entre cada una de ellas y con montos más grandes, y viceversa.

En esta parte expondremos bajo qué condiciones respecto a  $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$  existe una elección de  $a_1, b_1, a_2, b_2$  para tener un buen método de clasificación de arribos, y así decir que tenemos una buena observación discreta del proceso modulador.

Supongamos que durante el lapso  $[0, T]$  el proceso  $J_t$   $t \geq 0$  estuvo  $K_i$  veces en el estado  $i = 1, 2$ . Sea  $T_i^{(k)}$  el tiempo que el proceso  $J$  estuvo por  $k$ -ésima vez en el estado  $i$  y sea  $T_i = \sum_{k=1}^{K_i} T_i^{(k)}$ .



**Figura 4.2:** Tiempos de estancia en cada estado de un proceso de saltos de Markov.

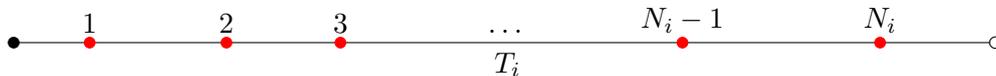


**Figura 4.3:** Reclamaciones en la  $k$ -ésima estancia en el estado  $i$ .

Sea  $N_i^{(k)}$  el número de reclamaciones en la  $k$ -ésima estancia en el estado  $i$ . Sabemos que  $N_i^{(k)} \sim \text{Poisson}(\lambda_i T_i^{(k)})$ , por lo tanto, si definimos  $N_i = \sum_{k=1}^{K_i} N_i^{(k)}$  como el número de reclamaciones en toda la estancia en el estado  $i$ , entonces  $N_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i T_i^{(k)}\right)$ , es decir

$$N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i T_i).$$

Si generamos un proceso de Poisson  $P_i(t)$  de intensidad  $\lambda_i$  para tiempo  $t \in [0, T_i]$ , entonces  $N_i = P_i(T_i)$  modela el número de reclamaciones en el estado  $i$ .



**Figura 4.4:** Reclamaciones en toda la estancia en el estado  $i$ .

Luego, definamos los tiempos de arribo  ${}_i S_n = \inf t \geq 0 : P_i(t) \geq n$  para todo  $n = 0, \dots, N_i$ , y los tiempos interarribos como  ${}_i Y_n = {}_i S_n - {}_i S_{n-1}$  para  $n = 1, \dots, N_i$ . Por último, sean  ${}_i X_n \sim \exp(\mu_i^{-1})$  para  $n = 1, \dots, N_i$ ,  $i = 1, 2$  y  $N = N_1 + N_2$ .

El conjunto

$$\{(Y_n, X_n)\}_{n=1}^N = \{({}_1 Y_n, {}_1 X_n)\}_{n=1}^{N_1} \quad \{(2 Y_n, 2 X_n)\}_{n=1}^{N_2}$$

es un modelo de parejas de *tiempo interarribo - monto de reclamación* observados. Diremos que una pareja

$$(Y_n, X_n) \sim G_i \quad \text{si} \quad (Y_n, X_n) \in \{(iY_n, iX_n)\}_{n=1}^{N_i},$$

es decir, si fue generado en el estado  $i$  y por tanto

$$Y_n \sim \exp(\lambda_i) \quad \text{y} \quad X_n \sim \exp(\mu_i^{-1}).$$

Las desventajas de este modelo radican en dos aspectos:

- Dados  $T_1$  y  $T_2$ , los tiempos  $Y_n$  no son del todo independientes pues su suma siempre es menor o igual a  $T_1 + T_2$ . Con parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  constantes, al tender  $T$  este problema debería volverse despreciable.
- Los tiempos interarribos que abarcan más de un solo estado no son considerados. Apelando a que el número de reclamaciones dentro de una sola estancia en un estado modulador es suficientemente grande, la proporción de estos interarribos híbridos es pequeña.

Los montos de reclamación  $X_n$  son un buen modelo pues son independientes entre ellos y de las variables  $Y_n$  y  $N_i$ .

El mecanismo de segregación que proponemos toma esta forma en los términos definidos:

$$\text{si } Y_n < a_1 \quad \& \quad X_n > b_1 \quad (Y_n, X_n) \in A,$$

$$\text{si } Y_n > a_2 \quad \& \quad X_n < b_2 \quad (Y_n, X_n) \in B,$$

donde  $A$  y  $B$  serán los conjuntos de vectores que consideramos que vienen de la distribución  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente.

Nuestro primer objetivo es calcular la probabilidad de equivocarnos, es decir, la probabilidad de que un vector se distribuya de manera distinta a la que fue clasificado. Esta será una medida de qué tan mala es nuestra segregación, qué parte de los tomados como provenientes del estado 1 son realmente del 2:

$$\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2 \mid (Y_n, X_n) \in A).$$

Definamos

$$p_{A1} = \mathbb{P}((Y_n, X_n) \in A \mid (Y_n, X_n) \sim G_1) = (1 - e^{-\lambda_1 a_1})(e^{-\mu_1^{-1} b_1})$$

y

$$p_{A2} = \mathbb{P}((Y_n, X_n) \in A \mid (Y_n, X_n) \sim G_2) = (1 - e^{-\lambda_2 a_1})(e^{-\mu_2^{-1} b_1}).$$

**Lema 4.4.** *Dados los tiempos totales de estancia en cada estado,  $T_1$  y  $T_2$ , la probabilidad de tomar al azar una reclamación perteneciente al estado 2 dado que el tiempo interarribo es menor a  $a_1$  y el monto de la reclamación es mayor a  $b_1$  es*

$$\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2 \mid (Y_n, X_n) \in A) = \frac{p_{A2} \lambda_2 T_2}{p_{A1} \lambda_1 T_1 + p_{A2} \lambda_2 T_2}. \quad (4.5)$$

*Demostración.* Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2 \mid (Y_n, X_n) \in A) &= \frac{\mathbb{P}((Y_n, X_n) \in A \mid (Y_n, X_n) \sim G_2) \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)}{\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)} \\ &= \frac{p_{A2} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)}{p_{A1} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_1) + p_{A2} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos calcular  $\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)$  como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2) &= \mathbb{E} \left[ \frac{N_1}{N} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{N_1}{N} \mid N \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{\mathbb{E} [N_1 \mid N]}{N} \right]. \end{aligned}$$

Recordemos que  $\mathbb{E} [N_1 \mid N]$  es una variable aleatoria en función de  $N$  y podemos calcularla en términos del valor que toma  $N$  como

$$\mathbb{E} [N_1 \mid N = m] = \sum_{n=0}^m n \mathbb{P}(N_2 = n \mid N = m) = \sum_{n=0}^m n \frac{\mathbb{P}(N_2 = n, N = m)}{\mathbb{P}(N = m)}.$$

Notemos que  $\mathbb{P}(N_2 = n, N = m) = 0$  cuando  $n > m$ , y  $\mathbb{P}(N_2 = n, N = m) = \mathbb{P}(N_2 = n, N_1 = m - n)$  cuando  $0 < n \leq m$ . Usando que  $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 T_1)$ ,  $N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2 T_2)$

y  $N \sim \text{Poisson}(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_1 | N = m] &= \frac{1}{\mathbb{P}(N = m)} \sum_{n=0}^m n \mathbb{P}(N_2 = n, N_1 = m - n) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(N = m)} \sum_{n=0}^m n \mathbb{P}(N_2 = n) \mathbb{P}(N_1 = m - n) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(N = m)} \sum_{n=0}^m n \frac{e^{-\lambda_2 T_2} (\lambda_2 T_2)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\lambda_1 T_1} (\lambda_1 T_1)^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \frac{m!}{e^{-\lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2} (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^m} \sum_{n=0}^m n \frac{e^{-\lambda_2 T_2} (\lambda_2 T_2)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\lambda_1 T_1} (\lambda_1 T_1)^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \frac{m \lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} \sum_{n=0}^m \frac{(m-1)!}{n!(m-n)!} \cdot \frac{(\lambda_2 T_2)^{n-1}}{(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^{n-1}} \cdot \frac{(\lambda_1 T_1)^{m-n}}{(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^{m-n}} \\
&= \frac{m \lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} \sum_{n=0}^m \binom{m-1}{n-1} \left( \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} \right)^{n-1} \left( \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} \right)^{m-n} \\
&= m \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbb{E}[N_1 | N] = N \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}$ , de donde

$$\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2) = \mathbb{E} \frac{N \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}}{N} = \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}.$$

Análogamente,

$$\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_1) = \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2 | A) &= \frac{p_{A2} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)}{p_{A1} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_1) + p_{A2} \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2)} \\
&= \frac{p_{A2} \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}}{p_{A1} \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} + p_{A2} \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}} \\
&= \frac{p_{A2} \lambda_2 T_2}{p_{A1} \lambda_1 T_1 + p_{A2} \lambda_2 T_2}.
\end{aligned}$$

□

Podemos obtener un resultado más fuerte recordando de la Proposición 1.33 que la proporción de tiempo en cada estado en el largo plazo está dado por la distribución estacionaria y depende de las intensidades  $q_1$  y  $q_2$ . Más precisamente, si  $T$  es el tiempo total en el que

consideramos nuestro proceso, entonces

$$\frac{T_1}{T} \stackrel{p}{\rightarrow} \pi_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2} \quad \text{y} \quad \frac{T_2}{T} \stackrel{p}{\rightarrow} \pi_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}$$

cuando  $T \rightarrow \infty$ .

**Lema 4.6.** Para el modelo de parejas de tiempo interarribo - monto de reclamación observados  $\{(Y_n, X_n)\}_{n=1}^N$ ,

$$\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2(Y_n, X_n) \mid A) \stackrel{p}{\rightarrow} \frac{p_{A2}\lambda_2q_1}{p_{A1}\lambda_1q_2 + p_{A2}\lambda_2q_1} \quad (4.7)$$

cuando  $T \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Basta dividir el numerador y el denominador en la ecuación (4.5) por  $T$  para obtener los términos  $\frac{T_1}{T}$  y  $\frac{T_2}{T}$ , tender  $T \rightarrow \infty$  y multiplicar numerador y denominador por  $q_1 + q_2$ .  $\square$

Para explicar cómo se comporta este término de error notemos que

$$\frac{p_{A2}\lambda_2q_1}{p_{A1}\lambda_1q_2 + p_{A2}\lambda_2q_1} < \frac{p_{A2}\lambda_2q_1}{p_{A1}\lambda_1q_2},$$

y separemos el lado derecho en dos factores:

$$\frac{p_{A2}}{p_{A1}} \cdot \frac{\lambda_2q_1}{\lambda_1q_2}.$$

Una parte del tamaño de este cociente se debe a la relación  $\frac{\lambda_2q_1}{\lambda_1q_2}$ , y en tanto tengamos valores de  $\lambda_2$  suficientemente más chicos a  $\lambda_1$  el error será pequeño.

La otra parte del error se debe a la fracción

$$\frac{p_{A2}}{p_{A1}} = \frac{(1 - e^{-\lambda_2 a_1})(e^{-\mu_2^{-1} b_1})}{(1 - e^{-\lambda_1 a_1})(e^{-\mu_1^{-1} b_1})},$$

que si bien también depende de que  $\lambda_1$  y  $\mu_1$  sean más grandes que  $\lambda_2$  y  $\mu_2$ , respectivamente, también la elección de  $a_1$  y  $b_1$  juega un papel muy importante.

Nos interesa una  $a_1$  y un  $b_1$  tales que la probabilidad de que una pareja generada en el estado 2 tenga muy poca probabilidad de entrar en el conjunto A comparada con la probabilidad que tiene una pareja generada en el estado 1. Es decir, un  $a_1$  “chico” con el que los tiempos entre reclamaciones del estado 2 no entren pero los del estado 1 sí; y

un  $b_1$  “grande” con el que los montos de reclamación del estado 2 no entren pero los del estado 1 sí.

Recordemos la idea intuitiva de que en el estado 2, el favorable económicamente, las reclamaciones tardan más en llegar y tienen montos más pequeños. Por un lado, la elección de  $a_1$  y  $b_1$  debe dejar fuera del conjunto  $A$  a las parejas generadas en el estado 2. Por otro lado, esta elección no puede ser tan restrictiva que no nos permita clasificar suficientes parejas del estado 1 en  $A$ .

Recomendamos una elección basada en los cuantiles de la distribución de interarribos y montos observada. Elegir un  $a_1$  como un cuantil chico de la distribución de tiempos entre arribos y  $b_1$  como un cuantil grande de la distribución de montos de reclamación.

El mismo análisis se puede realizar para obtener el error de tener parejas que hayan sido generadas en el estado 1 cuando fueron clasificadas en  $B$ . Definiendo

$$p_{B1} = \mathbb{P}((Y_n, X_n) \in B \mid (Y_n, X_n) \sim G_1) = (e^{-\lambda_1 a_2})(1 - e^{-\mu_1^{-1} b_2})$$

y

$$p_{B2} = \mathbb{P}((Y_n, X_n) \in B \mid (Y_n, X_n) \sim G_2) = (e^{-\lambda_2 a_2})(1 - e^{-\mu_2^{-1} b_2}),$$

tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.8.** *Para el modelo de parejas de tiempo interarribo - monto de reclamación observados  $\{(Y_n, X_n)\}_{n=1}^N$ ,*

$$\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_1 \mid (Y_n, X_n) \in B) \stackrel{p}{\sim} \frac{p_{B1} \lambda_1 q_2}{p_{B2} \lambda_2 q_1 + p_{B1} \lambda_1 q_2} \quad (4.9)$$

cuando  $T \rightarrow \infty$ .

Así que la elección de  $a_2$  y  $b_2$  tiene una interpretación similar: debe dejar fuera del conjunto  $B$  a las parejas generadas en el estado 1 y no puede ser tan restrictiva que no nos permita clasificar suficientes parejas del estado 2 en  $B$ .

Bajo estas consideraciones y el supuesto de que  $\lambda_1$  y  $\mu_1$  son suficientemente más grandes que  $\lambda_2$  y  $\mu_2$ , podemos asignar el estado al que pertenece cada pareja segregada según nuestro criterio y tendremos una observación discreta del proceso de saltos de Markov con la que podemos hacer estimación de sus parámetros.

**Ejemplo 5**

Realizaremos un ejemplo en el que simularemos un proceso de reserva como lo hicimos en el Capítulo 3, con parámetros que cumplan  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  y  $\mu_1 \gg \mu_2$ .

$$Q = \begin{pmatrix} -1.4 & 1.4 \\ 0.8 & -0.8 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$\lambda_1 = 120, \quad \lambda_2 = 10,$$

$$\mu_1 = 0.02, \quad \mu_2 = 0.001,$$

$$T = 2000.$$

Simulado el proceso de reserva, recuperamos los tiempos interarribo entre reclamaciones y los montos de reclamación con el algoritmo en la Sección C.7.

Utilizaremos  $a_1$  y  $a_2$  como los cuantiles al 0.2 y 0.8, respectivamente, de los tiempos entre arribos de reclamación; y  $b_1$  y  $b_2$  como los cuantiles al 0.7 y 0.2, respectivamente, de los valores de los montos de reclamación. La segregación la hacemos con el algoritmo en la Sección C.8.

Notemos que en este trabajo no damos una manera óptima de elegir estos valores; para el ejemplo calculamos los errores (4.7) y (4.9) con las funciones implementadas computacionalmente en la Sección C.9; tomamos los que nos daban errores suficientemente pequeños sin perder muchas observaciones.

Asignados los estados a los que presumimos que pertenece cada tiempo de arribo de reclamación, estimamos los parámetros del proceso modulador con el algoritmo EM estocástico y obtuvimos el siguiente resultado:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -1.53005 & 1.53005 \\ 0.953729 & -0.953729 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si usamos el algoritmo EM estocástico con las todas observaciones de reclamación asignándoles su estado original, es decir, una observación real del proceso modulador (con distancias aleatorias entre los puntos observados), obtenemos la siguiente estimación:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -1.4104 & 1.4104 \\ 0.780673 & -0.780673 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior nos dice que el algoritmo EM estocástico continúa dando buenas aproximaciones sin importar la posición de los puntos observados, sin embargo ya no es tan buena cuando tenemos un mínimo de observaciones “falsas” que no corresponden con el estado modulador real en ese momento.

### 4.3. Estimación de los parámetros del proceso de reclamaciones

Invoquemos el modelo de parejas *tiempos interarribo - montos de reclamación* usado en la parte anterior. Notemos que aun cuando las parejas  $(Y_n, X_n)_{n=1}^N$  son de variables aleatorias exponenciales, no podemos hacer inferencia usual sobre los parámetros de su distribución. Por ejemplo, aunque todas las observaciones  $X_n$  sean de una distribución con media  $\mu_1$  o de una con media  $\mu_2$ , el promedio de ellas no será ninguno de esos dos parámetros ni un promedio de ellos, pues no hay la misma proporción de cada distribución. Esa proporción depende también de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , las intensidades de los procesos Poisson que tampoco conocemos.

Para estimar el resto de los parámetros:  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , comencemos por reconocer a qué convergen el promedio de los interarribos y el promedio de los montos de reclamación observados. Sean

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \quad \text{y} \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n.$$

**Lema 4.10.** *Los estadísticos  $\bar{Y}$  y  $\bar{X}$  tienden a ser estimadores insesgados de funciones de los parámetros  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Más precisamente:*

$$\mathbb{E} [\bar{Y}] \stackrel{p}{\rightarrow} \frac{q_1 + q_2}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1} \quad \text{y} \quad \mathbb{E} [\bar{X}] \stackrel{p}{\rightarrow} \frac{\mu_1 \lambda_1 q_2 + \mu_2 \lambda_2 q_1}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1}$$

cuando  $T \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Calculemos primero

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\bar{Y}] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \middle| N_1, N_2 \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} [Y_n | N_1, N_2] \right]. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n|N_1, N_2] &= \mathbb{E}[Y_n|N_1, N_2, (Y_n, X_n) \sim G_1] \cdot \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_1|N_1, N_2) \\ &\quad + \mathbb{E}[Y_n|N_1, N_2, (Y_n, X_n) \sim G_2] \cdot \mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_2|N_1, N_2).\end{aligned}$$

Por un lado,  $\mathbb{P}((Y_n, X_n) \sim G_i|N_1, N_2) = \frac{N_i}{N_1+N_2}$ , y por otro, si  $(Y_n, X_n) \sim G_i$ , entonces  $Y_n \sim \exp(\lambda_i)$  y por tanto  $\mathbb{E}[Y_n|N_1, N_2, (Y_n, X_n) \sim G_i] = \frac{1}{\lambda_i}$ .

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[Y_n|N_1, N_2] = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{N_1}{N_1 + N_2} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{N_2}{N_1 + N_2},$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{Y}] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{N_1}{N_1 + N_2} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{N_2}{N_1 + N_2} \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{N_1}{N_1 + N_2} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{N_2}{N_1 + N_2} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \mathbb{E} \left[ \frac{N_1}{N_1 + N_2} \right] + \frac{1}{\lambda_2} \mathbb{E} \left[ \frac{N_2}{N_1 + N_2} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2} \\ &= \frac{T_1 + T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}.\end{aligned}$$

Luego, dividiendo arriba y abajo por  $T$  y tendiendo  $T \rightarrow \infty$  :

$$\mathbb{E}[\bar{Y}] \xrightarrow{p} \frac{q_1 + q_2}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1}.$$

Realizando los cálculos análogos para  $\bar{X}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[X_n|N_1, N_2] \right], \\ \mathbb{E}[X_n|N_1, N_2] &= \mu_1 \cdot \frac{N_1}{N_1 + N_2} + \mu_2 \cdot \frac{N_2}{N_1 + N_2}, \\ \mathbb{E}[\bar{X}] &= \frac{\mu_1 \lambda_1 T_1 + \mu_2 \lambda_2 T_2}{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}, \quad \text{y} \\ \mathbb{E}[\bar{X}] &\xrightarrow{p} \frac{\mu_1 \lambda_1 q_2 + \mu_2 \lambda_2 q_1}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1} \quad \text{cuando } T \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

□

Si suponemos  $q_1$  y  $q_2$  conocidos y un buen estimador  $\bar{Y}$ , notemos que la pareja de parámetros  $(\lambda_1, \lambda_2)$  debe cumplir la siguiente relación lineal

$$q_2\lambda_1 + q_1\lambda_2 = \frac{q_1 + q_2}{\bar{Y}}. \quad (4.11)$$

Suponiendo conocidos  $\lambda_1, \lambda_2, q_1$  y  $q_2$  y un buen estimador  $\bar{X}$ , los parámetros  $(\mu_1, \mu_2)$  deben cumplir la relación lineal

$$q_2\lambda_1\mu_1 + q_1\lambda_2\mu_2 = (\lambda_1q_2 + \lambda_2q_1)\bar{X}. \quad (4.12)$$

Al conocer o haber estimado  $q_1$  y  $q_2$ , se propone tomar del conjunto

$$\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : (\lambda_1, \lambda_2) \text{ satisface (4.11)}\}$$

la pareja  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  tal que al simular  $P_1(t)$  y  $P_2(t)$  procesos de Poisson de intensidades  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , la mezcla de sus interarribos tenga la distribución más parecida a la de los reales interarribos observados. La simulación de  $P_i(t)$  y  $P_2(t)$  se realiza por un tiempo  $T_1 = \frac{q_2}{q_1+q_2}T$  y  $T_2 = \frac{q_1}{q_1+q_2}T$ , respectivamente, con  $T$  dada.

Dados  $\hat{\lambda}_1$  y  $\hat{\lambda}_2$ , elegimos del conjunto

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : (\mu_1, \mu_2) \text{ satisface (4.12)}\}$$

la pareja  $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$  tal que al simular  ${}_iX_n \sim \exp(\hat{\mu}_i^{-1})$  para  $n = 1, \dots, N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i T_i)$ ,  $i = 1, 2$  y mezclarlos, su distribución se parezca más a la de los reales montos de reclamación observados.

### Ejemplo 6

Supongamos tener la observación de un proceso de reserva sin difusión con parámetros

$$Q = \begin{pmatrix} -1.4 & 1.4 \\ 0.8 & -0.8 \end{pmatrix}, \pi_0 = \left( \frac{8}{22}, \frac{14}{22} \right), \lambda_1 = 120, \lambda_2 = 10, \mu_1 = 0.02, \mu_2 = 0.001,$$

durante un tiempo  $T = 500$  y que conocemos los valores de  $q_1 = 1.4$  y  $q_2 = 0.8$ .

Simulamos el proceso como en el Capítulo 3 y calculamos la media  $\bar{Y}$  de los interarribos y la media  $\bar{X}$  de los montos de reclamación:

$$\bar{Y} \approx 0.0206709, \quad \bar{X} \approx 0.017531.$$

Notemos que estos estadísticos deben estimar los valores de

$$\frac{q_1 + q_2}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1} = 0.02 \quad \text{y} \quad \frac{\mu_1 \lambda_1 q_2 + \mu_2 \lambda_2 q_1}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1} = 0.0175818181 \dots$$

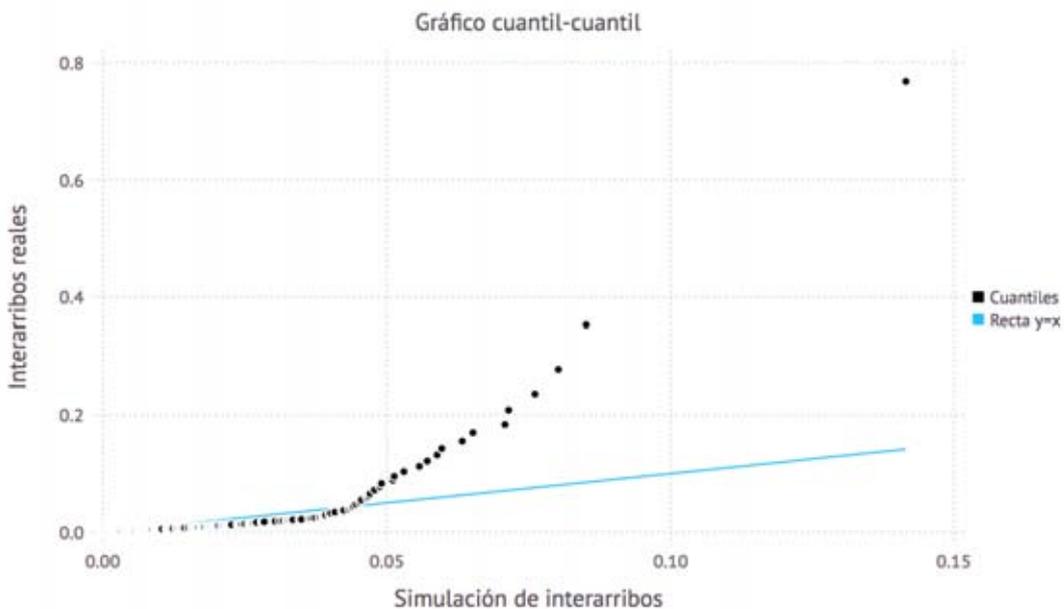
Calculados los estadísticos y conociendo  $q_1$  y  $q_2$ , los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  deben satisfacer la ecuación (4.11):

$$0.8\lambda_1 + 1.4\lambda_2 \approx 106.42974.$$

Así que tomamos algunas parejas  $(\lambda_1, \lambda_2)$  que cumplan con la ecuación:

$$(50.0, 47.4498), \quad (100.0, 18.8784), \quad (120.0, 7.44981), \quad \text{y} \quad (130.0, 1.73553),$$

y simulamos interarribos con el algoritmo en la Sección C.10 con un tiempo  $T = 5$  para comparar sus distribuciones con la distribución de los interarribos reales del proceso de reserva. Observemos los gráficos Q-Q o de cuantil-cuantil para cada pareja en las Figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.



**Figura 4.5:** Comparación de distribuciones simulando con  $(\lambda_1, \lambda_2) = (50.0, 47.4498)$ .

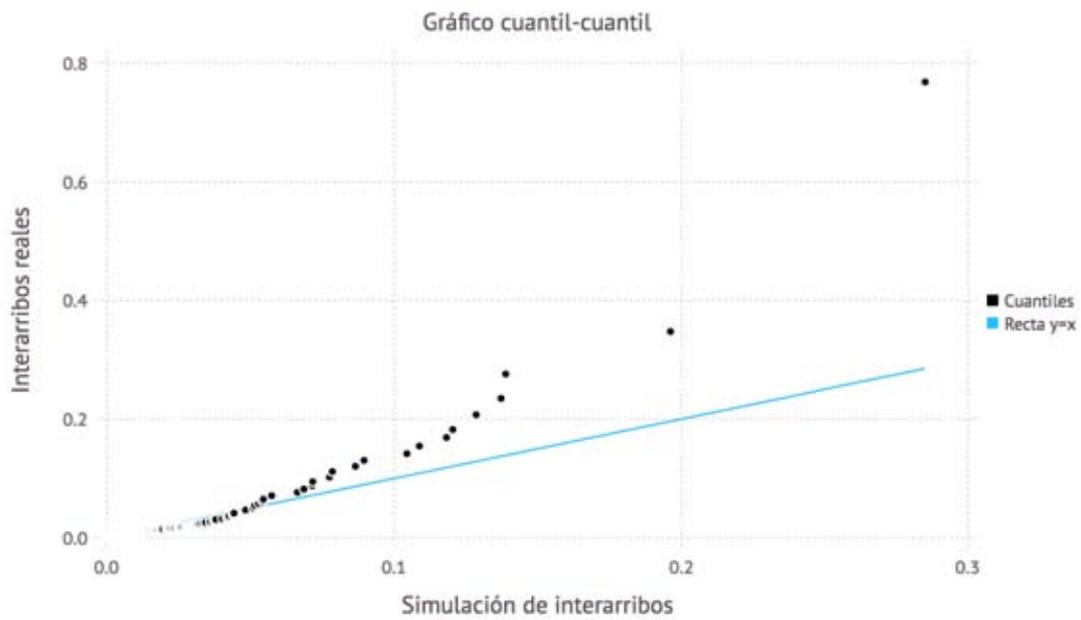


Figura 4.6: Comparación de distribuciones simulando con  $(\lambda_1, \lambda_2) = (100.0, 18.8784)$ .

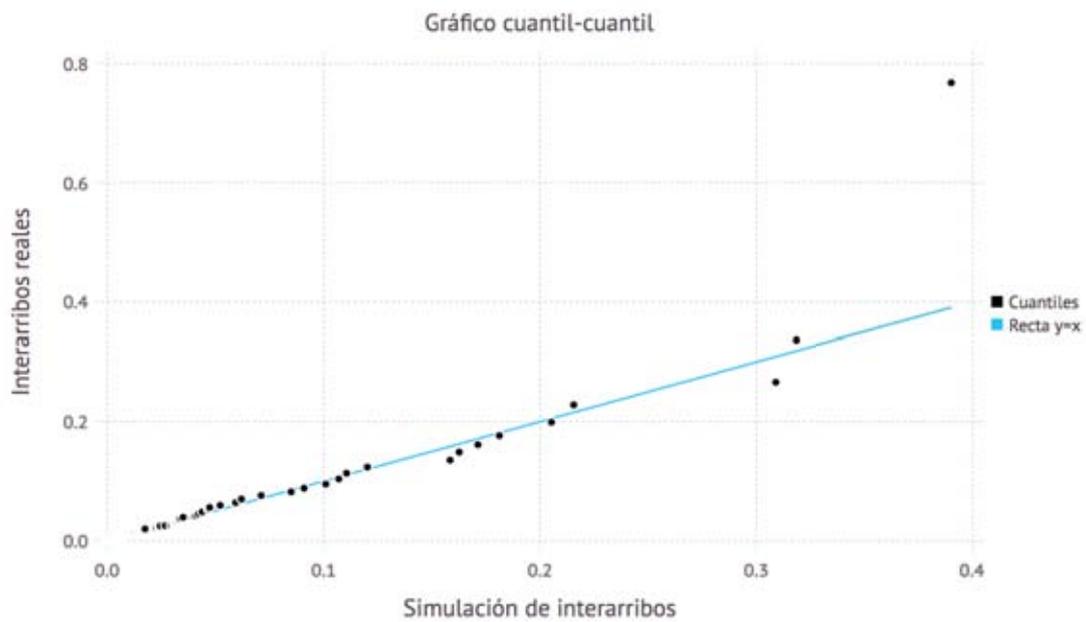
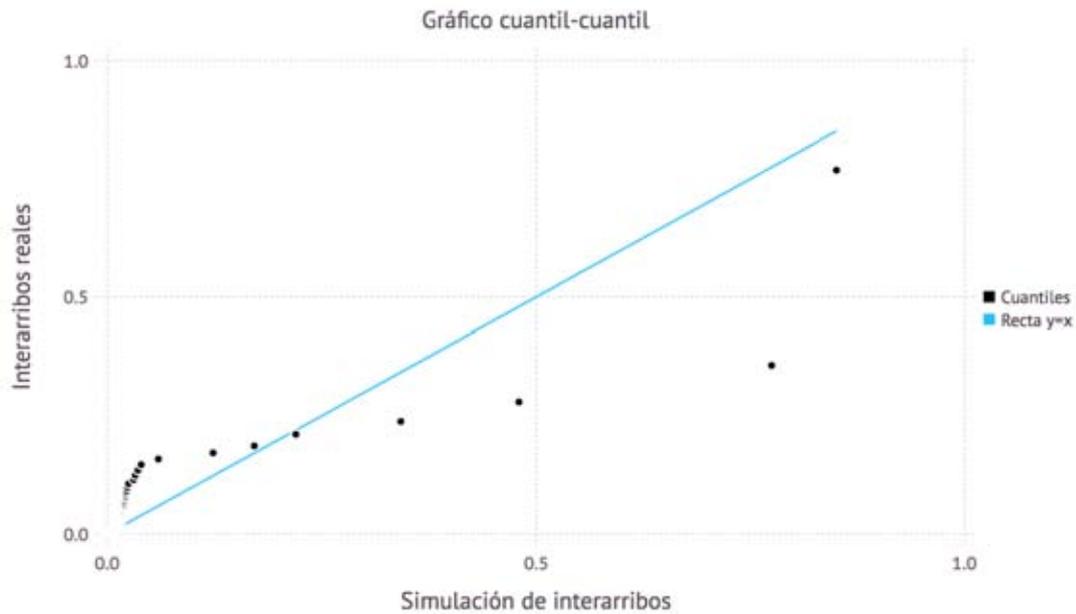


Figura 4.7: Comparación de distribuciones simulando con  $(\lambda_1, \lambda_2) = (120.0, 7.44981)$ .



**Figura 4.8:** Comparación de distribuciones simulando con  $(\lambda_1, \lambda_2) = (130.0, 1.73553)$ .

Notamos que no cualquier pareja que cumpla con la ecuación (4.11) es candidata a ser la estimación de los parámetros reales, pues la simulación bajo éstas no se distribuye igual que los interarribos reales. En el caso de estas cuatro parejas, parece ser la tercera,  $(120.0, 7.44981)$ , la que mejor se aproxima.

Podemos ser más precisos y hacer una prueba de Kolmogórov-Smirnov para probar la hipótesis nula de que las distribuciones, la de interarribos simulados y los reales, son la misma. Realizamos la prueba con la función `ApproximateTwoSampleKSTest` del paquete `HypothesisTests`. Probamos con simulaciones de interarribos con  $T = 500$  usando valores cercanos a  $(120.0, 7.44981)$  que cumplan con la ecuación (4.11). Los resultados son presentados en el Cuadro 4.4.

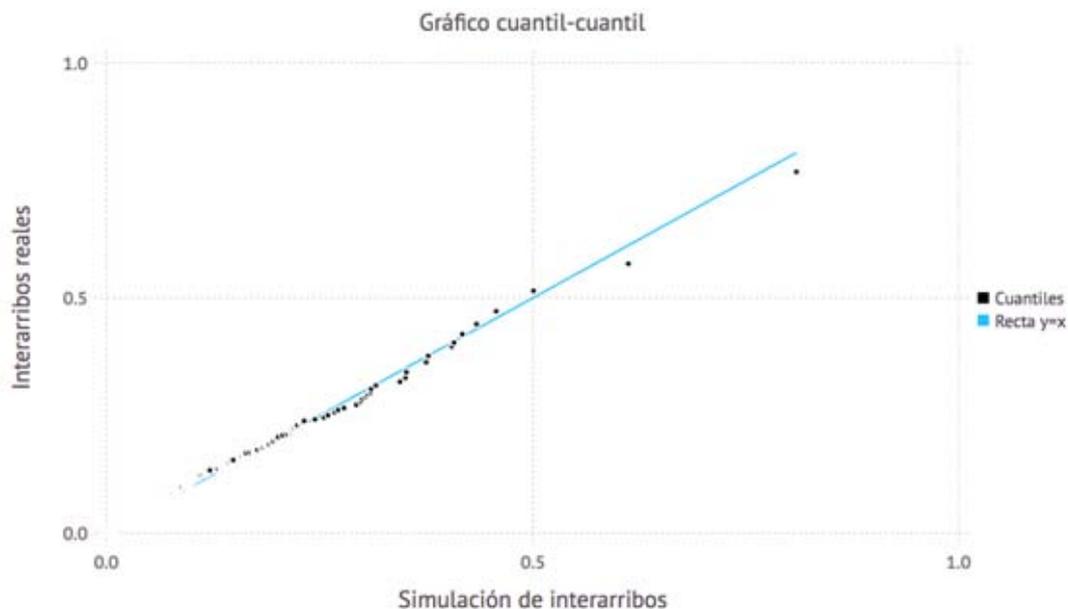
**Cuadro 4.4:** Resultados de la prueba Kolmogórov-Smirnov para simulaciones con diferentes valores de  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

$(\lambda_1, \lambda_2)$	Supremo de las diferencias de las funciones de distribución empíricas	p-valor
(113.0, 11.450)	0.02700	$4.3 \times 10^{-8}$
(114.0, 10.878)	0.02075	$5.9 \times 10^{-5}$
(115.0, 10.307)	0.01569	0.00524
(116.0, 9.736)*	0.01143	0.08497**
(117.0, 9.164)*	0.00968	0.20515**
(118.0, 8.593)	0.01913	0.00028
(119.0, 8.021)	0.02214	$1.5 \times 10^{-5}$
(120.0, 7.450)	0.03221	$2.2 \times 10^{-11}$
(121.0, 6.87838)	0.03452	$5.9 \times 10^{-13}$

\*\* p-valores que no rechazan la hipótesis nula al 95 %.

\* Parejas con las que no se rechaza la hipótesis nula al 95 %.

Tomemos como estimadores la pareja (117.0, 9.164), pues es la que arroja una menor distancia entre las distribuciones empíricas y no se rechaza la hipótesis nula con un p-valor mayor (0.20525). Podemos ver una gráfica cuantil-cuantil para comparar la distribución de una simulación de interarribos con estos parámetros ( $T = 50$ ) y la distribución de los interarribos reales. La Figura 4.9 muestra dicha gráfica.



**Figura 4.9:** Comparación de distribuciones simulando con  $(\lambda_1, \lambda_2) = (117.0, 9.164)$ .

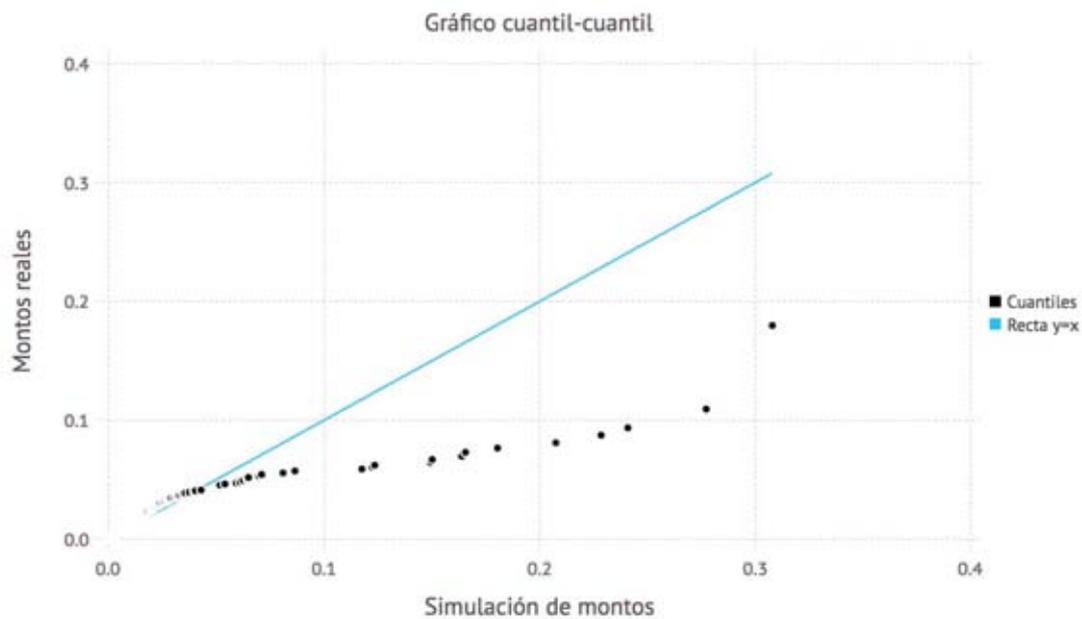
Ahora, con los estadísticos  $\bar{Y}$  y  $\bar{X}$ , los valores  $q_1 = 1.4$  y  $q_2 = 0.8$  y las estimaciones  $\bar{\lambda}_1 = 117.0$  y  $\bar{\lambda}_2 = 9.164$ , los parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$  deben satisfacer la ecuación (4.12):

$$93.6\mu_1 + 12.8296\mu_2 \approx 1.86585.$$

Así que tomamos algunas parejas  $(\mu_1, \mu_2)$  que cumplan con la ecuación:

$$(0.01, 0.0724764), \quad (0.016, 0.028703), \quad (0.019, 0.006816), \quad \text{y} \quad (0.0199, 0.000250),$$

y simulamos montos de reclamación con el algoritmo en la Sección C.10 en un tiempo  $T = 5$  para comparar sus distribuciones con la distribución de los montos reales del proceso de reserva. Observemos los gráficos Q-Q o de cuantil-cuantil para cada pareja en las Figuras 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13.



**Figura 4.10:** Comparación de distribuciones simulando con  $(\mu_1, \mu_2) = (0.01, 0.0724764)$ .

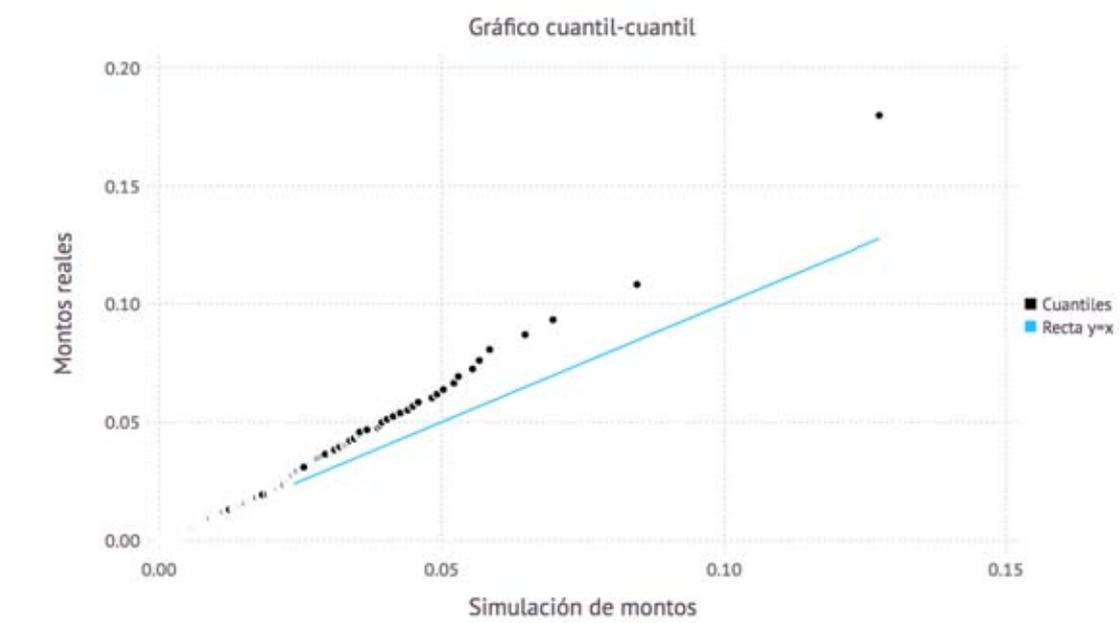


Figura 4.11: Comparación de distribuciones simulando con  $(\mu_1, \mu_2) = (0.016, 0.028703)$ .

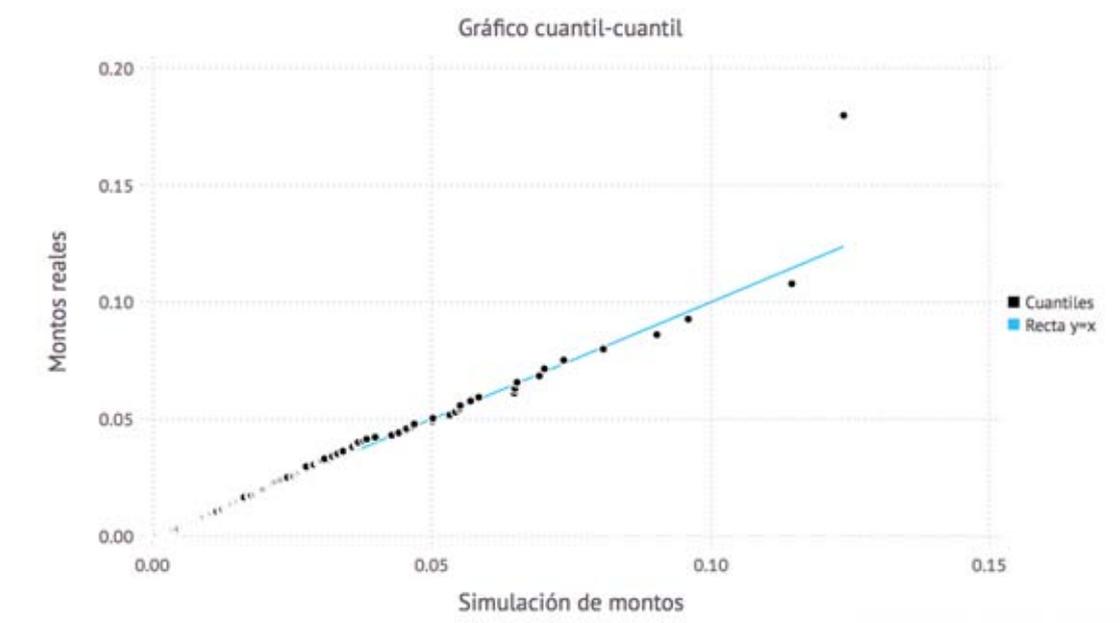
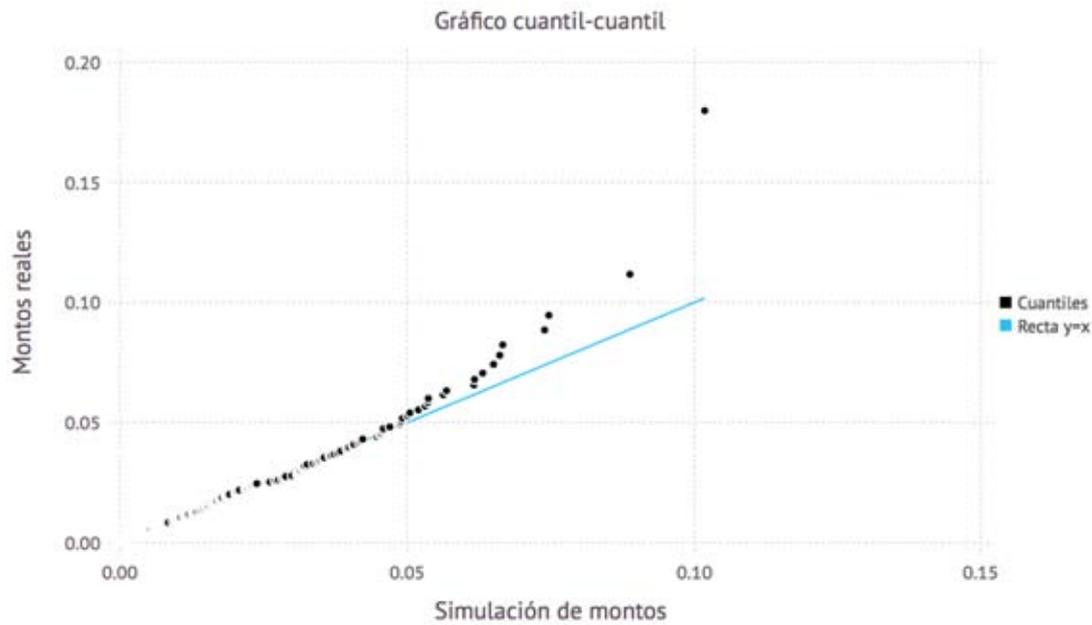


Figura 4.12: Comparación de distribuciones simulando con  $(\mu_1, \mu_2) = (0.019, 0.006816)$ .



**Figura 4.13:** Comparación de distribuciones simulando con  $(\mu_1, \mu_2) = (0.0199, 0.000250)$ .

En este caso observamos que son las últimas dos parejas las que mejor simulan montos de reclamación parecidos a los reales. Aplicando la prueba Kolmogórov-Smirnov a algunos valores en ese rango y que cumplan con la ecuación (4.12) obtenemos los resultados presentados en el Cuadro 4.5.

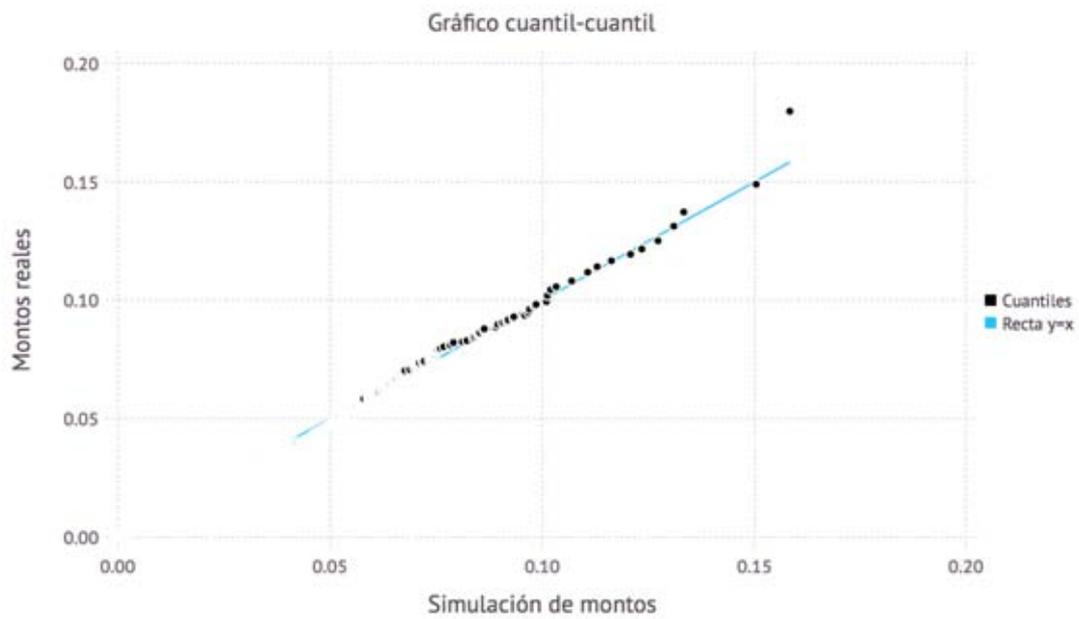
**Cuadro 4.5:** Resultados de la prueba Kolmogórov-Smirnov para simulaciones con diferentes valores de  $(\mu_1, \mu_2)$ .

$(\mu_1, \mu_2)$	Supremo de las diferencias de las funciones de distribución empíricas	p-valor
(0.0195, 0.003169)	0.06034	$1.0 \times 10^{-38}$
(0.0196, 0.002440)	0.05039	$5.0 \times 10^{-27}$
(0.0197, 0.001710)	0.03386	$1.8 \times 10^{-8}$
(0.0198, 0.000980)*	0.0109	0.11237**
(0.0199, 0.000250)	0.04960	$3.2 \times 10^{-26}$

\*\* p-valores que no rechazan la hipótesis nula al 95 %.

\* Parejas con las que no se rechaza la hipótesis nula al 95 %.

Elegimos la pareja (0.0198, 0.000980) como los mejores estimadores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y observemos un gráfico cuantil-cuantil de la distribución de montos reales contra una simulación con estos parámetros ( $T = 50$ ). La Figura 4.14 muestra dicha gráfica.



**Figura 4.14:** Comparación de distribuciones simulando con  $(\mu_1, \mu_2) = (0.0198, 0.000980)$ .

Finalmente, concluimos que los estimadores bajo el método propuesto son  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = (117.0, 9.164)$  y  $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = (0.0198, 0.000980)$ , que ciertamente se acercan bastante a los parámetros reales.



# Conclusión

Es importante resaltar que el análisis realizado en este trabajo para encontrar una forma cerrada de la probabilidad de ruina puede ser generalizado en el sentido de la distribución de los montos de reclamación. Recordemos que en [10], Lu resuelve el sistema de ecuaciones integro-diferenciales para el caso sin difusión y para reclamaciones con distribuciones cuyas transformadas de Laplace son racionales. Ng y Yang [13], al exponer un sistema de ecuaciones para la distribución conjunta del superávit y el déficit antes y después de la ruina para reclamaciones con distribución tipo fase en el caso sin difusión, hablan de la importancia de estas distribuciones pues son densas en el conjunto de distribuciones.

Hemos visto aquí la idea general de cómo llegar a la solución con el método de la transformada de Laplace, en donde las formas polinomiales juegan un papel muy importante para realizar las manipulaciones algebraicas. Redujimos el problema a encontrar las raíces de polinomios y encontrar una forma en fracciones simples de las funciones  $\hat{\phi}_i(s)$ . Un siguiente paso puede ser agregar difusión a la solución general de Lu para distribuciones con transformadas irracionales, entre las que se encuentran las tipo fase, lo que permitiría aproximar la solución al problema de la ruina para cualquier distribución de montos de reclamación en este modelo.

Por otro lado, la simulación de procesos de reserva tiene aún mucho potencial. Hicimos sólo una pequeña revisión de algunos alcances, pero con base en este trabajo se puede hacer una mayor exploración, por ejemplo, en cuanto a la influencia de los parámetros del modelo sobre algunos aspectos de la ruina. Más aún, no es difícil cambiar las distribuciones de las variables del proceso, en particular de los montos de reclamación, y obtener resultados en otros casos y con un mayor número de estados moduladores.

La estimación de los parámetros del proceso todavía puede mejorar mucho. Recordemos que lo que hicimos aquí fue una propuesta considerando información observada de manera discreta. Cabe preguntarse cómo hacer inferencia al observar el comportamiento de los ingresos por prima o de la volatilidad del proceso de difusión, las cuales se hacen de manera casi continua. Tuvimos buenas estimaciones sobre los parámetros  $\lambda_i$  y  $\mu_i$ ,

sin embargo, éstas pueden depender de una buena estimación de los parámetros  $\{q_i\}$  del proceso modulador, la cual hemos visto que es más compleja y requiere que se cumplan ciertos supuestos para asignar observaciones discretas a cada estado.

## Códigos anexos A

# Cálculo analítico de la ruina

Los siguientes códigos fueron implementados en `Julia` y requieren de la paquetería `Roots`.

### A.1. Cálculo de probabilidad de ruina con dos estados, reclamaciones exponenciales y sin difusión

```
# Q: matriz de intensidades (2x2)
# pi : vector de distribución inicial (1x2)
# lambda : vector de intensidades del proceso de Poisson (1x2)
# mu : vector de medias de reclamaciones (1x2)

R(s) = ((s - lambda[1] - Q[1, 2]) * (mu[1] * s + 1) + lambda[1]) * ((s - lambda[2] -
    Q[2, 1]) * (mu[2] * s + 1) + lambda[2]) - Q[1, 2] * Q[2, 1] * (mu[1] * s + 1) * (mu
    [2] * s + 1)

rho = fzeros(R)[4]

g(s) = (mu[1] * s + 1) * (mu[2] * s + 1 - lambda[2] * mu[2] / (mu[2] * rho + 1)) / (mu
    [1] * mu[2])
h(s) = (mu[2] * s + 1) * (mu[1] * s + 1 - lambda[1] * mu[1] / (mu[1] * rho + 1)) / (mu
    [1] * mu[2])

phi10 = (Q[1, 2] * (1 - lambda[2] * mu[2]) + Q[2, 1] * (1 - lambda[1] * mu[1])) / (
    rho - lambda[2] * (1 - 1 / (mu[2] * rho + 1)))
```

```

phi20=(Q[1,2]*(1-lambda[2]*mu[2])+Q[2,1]*(1-lambda[1]*mu[1]))/(
    rho-lambda[1]*(1-1/(mu[1]*rho+1)))

R1=fzeros(R)[1]
R2=fzeros(R)[2]

g0=g(0)/(R1*R2)
h0=h(0)/(R1*R2)
g1=g(R1)/(R1*(R1-R2))
g2=g(R2)/(R2*(R2-R1))
h1=h(R1)/(R1*(R1-R2))
h2=h(R2)/(R2*(R2-R1))

phi1(u)=phi10*(g0+g1*e^(R1*u)+g2*e^(R2*u))
phi2(u)=phi20*(h0+h1*e^(R1*u)+h2*e^(R2*u))

phi(u)=phi1(u)*pi[1]+phi2(u)*pi[2]
psi(u)=1-phi(u)

```

## A.2. Cálculo de probabilidad de ruina con dos estados, reclamaciones exponenciales y con difusión

```

# Q: matriz de intensidades (2x2)
# pi : vector de distribución inicial (1x2)
# lambda : vector de intensidades del proceso de Poisson (1x2)
# mu : vector de medias de reclamaciones (1x2)
# sigma : vector de parámetros de difusión (1x2)

T(s)=(((sigma[1]^2/2)*s^2+s-lambda[1]-Q[1,2])*(mu[1]*s+1)+lambda
    [1]) * (((sigma[2]^2/2)*s^2+s-lambda[2]-Q[2,1])*(mu[2]*s+1)+
    lambda[2]) - Q[1,2]*Q[2,1]*(mu[1]*s+1)*(mu[2]*s+1)

rho=fzeros(T)[6]

p(s)=s^2*sigma[1]^2/2+s-lambda[1]-Q[1,2]+lambda[1]/(mu[1]*s+1)
q(s)=s^2*sigma[2]^2/2+s-lambda[2]-Q[2,1]+lambda[2]/(mu[2]*s+1)

```

$$dphi1=(Q[1,2]*(1-lambda[2]*mu[2])+Q[2,1]*(1-lambda[1]*mu[1]))/((Q[2,1]+q(rho))*(sigma[1]^2/2))$$

$$dphi2=(Q[1,2]*(1-lambda[2]*mu[2])+Q[2,1]*(1-lambda[1]*mu[1]))/((Q[1,2]+p(rho))*(sigma[2]^2/2))$$

$$R1=fzeros(T)[1]$$

$$R2=fzeros(T)[2]$$

$$R3=fzeros(T)[3]$$

$$R4=fzeros(T)[4]$$

$$g(s)=(q(s)-q(rho))*(mu[1]*s+1)*(mu[2]*s+1)/(sigma[1]^2*sigma[2]^2*mu[1]*mu[2]*(s-rho)/4)$$

$$h(s)=(p(s)-p(rho))*(mu[1]*s+1)*(mu[2]*s+1)/(sigma[1]^2*sigma[2]^2*mu[1]*mu[2]*(s-rho)/4)$$

$$g0=g(0)/(R1*R2*R3*R4)$$

$$g1=g(R1)/(R1*(R1-R2)*(R1-R3)*(R1-R4))$$

$$g2=g(R2)/(R2*(R2-R1)*(R2-R3)*(R2-R4))$$

$$g3=g(R3)/(R3*(R3-R1)*(R3-R2)*(R3-R4))$$

$$g4=g(R4)/(R4*(R4-R1)*(R4-R2)*(R4-R3))$$

$$h0=h(0)/(R1*R2*R3*R4)$$

$$h1=h(R1)/(R1*(R1-R2)*(R1-R3)*(R1-R4))$$

$$h2=h(R2)/(R2*(R2-R1)*(R2-R3)*(R2-R4))$$

$$h3=h(R3)/(R3*(R3-R1)*(R3-R2)*(R3-R4))$$

$$h4=h(R4)/(R4*(R4-R1)*(R4-R2)*(R4-R3))$$

$$phi1(u)=(sigma[1]^2/2)*dphi1*(g0+g1*e^(R1*u)+g2*e^(R2*u)+g3*e^(R3*u)+g4*e^(R4*u))$$

$$phi2(u)=(sigma[2]^2/2)*dphi2*(h0+h1*e^(R1*u)+h2*e^(R2*u)+h3*e^(R3*u)+h4*e^(R4*u))$$

$$phi(u)=phi1(u)*pi[1]+phi2(u)*pi[2]$$

$$psi(u)=1-phi(u)$$



## Códigos anexos B

# Simulación del proceso de reserva y estimación de ruina

Los siguientes códigos fueron implementados en Julia y algunas funciones requieren de las paqueterías `Distributions` y `StatsBase`.

### B.1. Cálculo de la matriz de probabilidades de transición

```
# Q: matriz de intensidades (2x2)

# P: matriz de probabilidades de transición (2x2)

function mat(Q)
    n=length(Q[1,:])
    P=zeros(n,n)
    for i=1:n
        P[i,:]=-Q[i,:]/Q[i,i]
        P[i,i]=0
    end
    return P
end
```

### B.2. Simulación de un proceso de saltos de Markov

```

# E: vector de estados 1:d
# pi : vector de distribución inicial (1xd)
# Q: matriz de intensidades (dxd)
# T: longitud de la trayectoria a simular

# psm: lista con tiempos de salto y estados a los que se salta

function PSM(E,pi,Q,T)
    P=mat(Q)
    t=0
    psm=[0 sample(E, pi)]
    while t<T
        s=Int(psm[end,2])
        lambda=Q[s,s]
        U=rand()
        t=t-log(U)/lambda
        if t<T
            psm=vcat(psm,[t sample(E,WeightVec(vec(P[s,:])))])
        end
    end
    return psm
end

```

### B.3. Simulación de un proceso de Poisson

```

# T1: tiempo inicial
# T2: tiempo final
# estado: estado modulador
# lambda: intensidad del proceso de Poisson

# s: lista con tiempos de arribo de reclamación y estados

function PP(T1,estado,T2,lambda)
    t=0
    T=T2-T1
    s=[T1 estado]

```

```

while t<T
    U=rand()
    t=t-log(U)/lambda
    if t<T
        s=vcat(s,[t+T1 estado])
    end
end
return s[2:end,:]
end

```

#### B.4. Simulación de un proceso de reclamaciones modulado

```

# path: proceso modulador, lista con tiempos de salto y estados
# Lambda : vector de intensidades del proceso de Poisson (1x2)
# Mu : vector de medias de reclamaciones (1x2)
# tiempo: longitud de la trayectoria a simular

# s3: lista de tiempos de arribo, estados, montos de reclamación
# y reserva acumulada

function reclamaciones(path,Lambda,tiempo,Mu)
    s1=transpose(path[1,:])
    n=length(path[:,1])
    for i=1:n-1
        # para cada estado en el que estemos, generamos un PP
        # dentro de ese tiempo de estancia
        s1=vcat(s1,PP(path[i,1],path[i,2],path[i+1,1],Lambda[Int
            (path[i,2])]))
    end
    s1=vcat(s1,PP(path[n,1],path[n,2],tiempo,Lambda[Int(path[n
        ],2)]))
    s2=s1[2:end,:] #tiempos de arribos y estados

    n=length(s2[:,1])
    r=zeros(n)
    for i=1:n
        # para cada arribo, generamos un monto de reclamación

```



```

    mb=rand(Normal(0,Sigma[Int(p[i-1,2])]*sqrt(Delta)),m)
    for j=2:m
        mb[j]=mb[j-1]+mb[j]
    end
    mb=hcat(mbm[end,1]+Delta:Delta:p[i,1], p[i-1,2]*ones(m),
        mbm[end,3]+mb)
    mbm=vcat(mbm,mb,[p[i,1] p[i-1,2] mb[end,3]+
        rand(Normal(0,Sigma[Int(p[i-1,2])]*sqrt(p[i,1]-
            mb[end,1])))]))
    end
end
return mbm
end

```

## B.6. Agregación del proceso de reclamaciones y la difusión

```

# proceso_reserva: proceso de reserva, lista generada con la
  función reclamaciones()
# movimiento_browniano: movimiento Browniano modulado, lista
  generada con la función MB_modulado()

# d: proceso de reserva con difusión agregada

function difusion(proceso_reserva ,movimiento_browniano)
    i=1
    m=length(movimiento_browniano[:,1])
    d=zeros(Float64 ,m)
    reclamaciones=0
    for j=1:length(proceso_reserva[:,1])
        while movimiento_browniano[i,1]<proceso_reserva[j,1]
            d[i]=movimiento_browniano[i,end]+
                movimiento_browniano[i,1]
                -reclamaciones
            i=i+1
            if i==m+1 break end
        end
        reclamaciones=reclamaciones+proceso_reserva[j,3]
    end

```

```

end
for j=i:m
    d[j]=movimiento_browniano[j,end]+movimiento_browniano[j
        ,1]-reclamaciones
end
return hcat(movimiento_browniano[:,1:2],d)
end

```

## B.7. Evaluación de ruina de un proceso

```

# u: valor del capital inicial
# proceso: proceso de reserva, generado con reclamaciones() o
    difusion()

# R: booleano que evalua si el proceso se arruinó
# estado_ruina: estado modulador en el que se arruinó
# tiempo_ruina: valor del tiempo en el que se arruinó

function ruina(u,proceso)
    tiempo_ruina=0
    estado_ruina=0
    R=false
    n=length(proceso[:,1])
    for i=1:n
        if proceso[i,end]+u<0
            R=true
            estado_ruina=proceso[i,2]
            tiempo_ruina=proceso[i,1]
            break
        end
    end
    end
    return R, estado_ruina, tiempo_ruina
end

```

## B.8. Estimación de la probabilidad de ruina

```
# u: valor del capital inicial
# tiempo: longitud de la trayectoria a simular
# n: número de procesos simulados
# estados: vector de estados 1:d
# pi : vector de distribución inicial (1xd)
# mat: matriz de intensidades (dxd)
# lambda : vector de intensidades del proceso de Poisson (1xd)
# mu : vector de medias de reclamaciones (1xd)
# sigma: vector de parámetros de difusión (1xd), 0 si no hay
        difusión
# delta: distancia entre las observaciones de la difusión

# c: cantidad de veces que obtenemos ruina
# a: vector con cantidades de veces que obtenemos ruina en cada
        estado
# b: vector con la suma de los tiempos de ruina en cada estado

function proba_ruina(u, tiempo, n, estados, pi, mat, lambda, mu, sigma,
        delta)
    c=0
    a=zeros(estados)
    b=zeros(Float64, estados)
    for i=1:n
        psm=PSM(estados, pi, mat, tiempo)
        proceso=reclamaciones(psm, lambda, tiempo, mu)
        if sigma != 0
            mb=MB_modulado(sigma, delta, psm, tiempo)
            proceso=difusion(proceso, mb)
        end
        r=ruina(u, proceso)
        if r[1]==true
            c=c+1
            a[Int(r[2])]=a[Int(r[2])]+1
            b[Int(r[2])]=b[Int(r[2])]+r[3]
        end
    end
end
```

```
return c/n, a/sum(a), b./a #regresamos probabilidad de
    ruina , vector de probabilidades de ruina por estado ,
    vector de tiempos medios de ruina
end
```

## Códigos anexos C

# Estimación de los parámetros del proceso de reserva

Los siguientes códigos fueron implementados en Julia y algunas funciones requieren de las paqueterías `Distributions`, `StatsBase` y `HypothesisTests`.

### C.1. Función auxiliar del algoritmo de bisección

```
# ini: estado inicial
# fin: estado final
# m: número de posibles estados
# E: espacio de estados
# Q: matriz de intensidades
# Qii: diagonal de Q
# T1: tiempo inicial
# T2: tiempo final
# cond: nos dice si estamos restringidos al caso con al menos
      dos saltos

# tray: trayectoria parcial de lo que ha sido simulado

function MJPBisect( ini , fin ,m,E,Q, Qii ,T1,T2, cond)
    ini=Int( ini )
    fin=Int( fin )
    tray=[T1 ini;T2 fin]
```

```

t0=T2-T1
t=t0/2
t1=-t
# Matriz de probabilidades de transición en tiempo t
P=expm(t*Q)
# Asignamos probabilidades de transición a cada estado
prob=zeros(m)
for i=E
    prob[i]=P[Int(ini),i]*P[i,Int(fin)]
end

# Modificamos las probabilidades si tenemos al menos dos
saltos
if cond
    if ini==fin
        prob[ini]-=exp(-t0*Qii[ini])
    elseif Qii[ini]==Qii[fin]
        r=exp(t1*Qii[ini])*t*exp(t1*Qii[ini])*Q[ini,fin]
        prob[ini]-=r
        prob[fin]-=r
    else
        r=exp(t1*Qii[ini])
        r=r*(r-exp(t1*Qii[fin]))*Q[ini,fin]/(Qii[fin]-Qii[ini])
        prob[ini]-=r
        prob[fin]-=r
    end
# Muestreamos para saber a qué estado saltamos
mid=sample(E,weights(prob))

# Ya con el estado, checamos en qué manera pudimos saltar (
número de saltos)
if ini==mid
    if mid==fin
        r=exp(t1*Qii[ini])
        rc=P[ini,mid]-r
        (bef,aft)=sample([(0,2),(2,0),(2,2)],weights([r*rc,rc*r,
rc*rc]))
    else

```

```

r=exp(-t*Qii [ ini ])
if Qii [ mid]==Qii [ fin ]
    r1=t*exp(t1*Qii [ mid ]) *Q[ mid , fin ]
else
    r1=(exp(t1*Qii [ mid ])-exp(t1*Qii [ fin ])) *Q[ mid , fin ] / ( Qii
        [ fin ]-Qii [ mid ])
end
(bef , aft)=sample ( [(0 , 2) , (2 , 1) , (2 , 2) ] , weights ( [ r *(P[ mid ,
    fin ]-r1) , (P[ ini , mid ]-r) *r1 , (P[ ini , mid ]-r) *(P[ mid , fin
    ]-r1) ]))
end
else
if mid==fin
    if Qii [ ini ]==Qii [ mid ]
        r=t*exp(t1*Qii [ ini ]) *Q[ ini , mid ]
    else
        r=(exp(t1*Qii [ ini ])-exp(t1*Qii [ mid ])) *Q[ ini , mid ] / ( Qii [
            mid ]-Qii [ ini ])
    end
r1=exp(t1*Qii [ mid ])
(bef , aft)=sample ( [(1 , 2) , (2 , 0) , (2 , 2) ] , weights ( [ r *(P[ mid ,
    fin ]-r1) , (P[ ini , mid ]-r) *r1 , (P[ ini , mid ]-r) *(P[ mid , fin
    ]-r1) ]))
else
if Qii [ ini ]==Qii [ mid ]
    r=t*exp(t1*Qii [ ini ]) *Q[ ini , mid ]
else
    r=(exp(t1*Qii [ ini ])-exp(t1*Qii [ mid ])) *Q[ ini , mid ] / ( Qii [
        mid ]-Qii [ ini ])
    end
if Qii [ mid ]==Qii [ fin ]
    r1=t*exp(t1*Qii [ mid ]) *Q[ mid , fin ]
else
    r1=(exp(t1*Qii [ mid ])-exp(t1*Qii [ fin ])) *Q[ mid , fin ] / ( Qii
        [ fin ]-Qii [ mid ])
    end
(bef , aft)=sample ( [(1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1) , (2 , 2) ] , weights ( [ r *r1
    , r *(P[ mid , fin ]-r1) , (P[ ini , mid ]-r) *r1 , (P[ ini , mid ]-r

```

```

        )*(P[mid, fin]-r1)))
    end
end
else
# Muestreamos para saber a qué estado saltamos
mid=sample(E, weights(prob))

# Ya con el estado, checamos en qué manera pudimos saltar (
  número de saltos)
if ini==mid
  if mid==fin
    r=exp(t1*Qii[ini])
    rc=P[ini, mid]-r
    (bef, aft)=sample([(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)], weights([r*r,
      r*rc, rc*r, rc*rc]))
  else
    r=exp(t1*Qii[ini])
    if Qii[mid]==Qii[fin]
      r1=t*exp(t1*Qii[mid])*Q[mid, fin]
    else
      r1=(exp(t1*Qii[mid])-exp(t1*Qii[fin]))*Q[mid, fin]/(Qii
        [fin]-Qii[mid])
    end
    (bef, aft)=sample([(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)], weights([r*r1
      , r*(P[mid, fin]-r1), (P[ini, mid]-r)*r1, (P[ini, mid]-r)
      *(P[mid, fin]-r1)]))
  end
end
else
  if mid==fin
    if Qii[ini]==Qii[mid]
      r=t*exp(t1*Qii[ini])*Q[ini, mid]
    else
      r=(exp(t1*Qii[ini])-exp(t1*Qii[mid]))*Q[ini, mid]/(Qii[
        mid]-Qii[ini])
    end
    r1=exp(t1*Qii[mid])
    (bef, aft)=sample([(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)], weights([r*r1
      , r*(P[mid, fin]-r1), (P[ini, mid]-r)*r1, (P[ini, mid]-r)

```

```

        *(P[mid, fin]-r1)))
    else
        if Qii[ini]==Qii[mid]
            r=t*exp(t1*Qii[ini])*Q[ini, mid]
        else
            r=(exp(t1*Qii[ini])-exp(t1*Qii[mid]))*Q[ini, mid]/(Qii[
                mid]-Qii[ini])
        end
        if Qii[mid]==Qii[fin]
            r1=t*exp(t1*Qii[mid])*Q[mid, fin]
        else
            r1=(exp(t1*Qii[mid])-exp(t1*Qii[fin]))*Q[mid, fin]/(Qii[
                fin]-Qii[mid])
        end
        (bef, aft)=sample([(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)], weights([r*r1
            , r*(P[mid, fin]-r1), (P[ini, mid]-r)*r1, (P[ini, mid]-r)
            *(P[mid, fin]-r1)]))
    end
end
end

if bef==1
    if Qii[fin]>Qii[ini]
        tray=vcat(tray, [T1+rand(Truncated(Exponential(1/(Qii[fin
            ]-Qii[ini])),0,t)) mid])
    elseif Qii[fin]<Qii[ini]
        tray=vcat(tray, [T1+t-rand(Truncated(Exponential(1/(Qii[
            ini]-Qii[fin])),0,t)) mid])
    else
        tray=vcat(tray, [T1+rand(1)*t mid])
    end
elseif bef==2
    tray=vcat(MJPBisect(ini, mid, m, E, Q, Qii, T1, T1+t, true), tray)
end
if aft==1
    if Qii[fin]>Qii[ini]
        tray=vcat(tray, [T1+t+rand(Truncated(Exponential(1/(Qii[
            fin]-Qii[ini])),0,t)) fin])
    end
end

```

```

elseif Qii[fin]<Qii[ini]
    tray=vcat(tray, [T2-rand(Truncated(Exponential(1/(Qii[ini]-Qii[fin])),0,t)) fin])
else
    tray=vcat(tray, [T1+t+rands(1)*t fin])
end
elseif aft==2
    tray=vcat(tray, MJPBisect(mid, fin, m, E, Q, Qii, T1+t, T2, true))
end
return(tray)
end

```

## C.2. Algoritmo de puentes de Markov por el método de bisección

```

# tray: observación discreta
# Q: matriz de intensidades

# tray0: simulación de trayectoria continua

function MJPBridgeBisection(tray, Q)
    m=length(Q[1, 1:end])
    n=length(tray[1:end, 1])-1
    E=1:m
    Qii=-diag(Q)
    tray0=heat([], [])
    for i = 1:n
        mat=MJPBisect(tray[i, 2], tray[i+1, 2], m, E, Q, Qii, tray[i, 1], tray[i+1, 1], false)
        mat=sortrows(mat)
        rng=heat(mat[1, 1], mat[1, 2])
        for k = 2:length(mat[1:end, 1])
            if mat[k, 2]!=mat[k-1, 2]
                rng=vcat(rng, transpose(mat[k, 1:2]))
            end
        end
    end
end

```

```

    tray0=vcat(tray0, rng)
end
tray0=vcat(tray0, transpose(tray[end, 1:2]))
return(tray0)
end

```

### C.3. Eliminación de repeticiones en los estados

```

# data: trayectoria obtenida de MJPBridgeBisection()
# nueva: misma trayectoria que data sin estados repetidos

function quitar_repeticiones(data)
    nueva=transpose(data[1, :])
    for i=2:length(data[:, 1])
        if data[i, 2]!=nueva[end, 2]
            nueva=vcat(nueva, transpose(data[i, :]))
        end
    end
    return nueva
end

```

### C.4. Estimación de una primera matriz de intensidades

```

# data: observación discreta de una trayectoria
# estados: vector de estados 1:d

# P: matriz estimada (dxd)

function estimar_matriz_inicial(data, estados)
    n=length(data[:, 1])
    P=zeros(Float64, length(estados), length(estados))
    T=zeros(Float64, estados)
    V=zeros(Float64, estados)
    for i=1:n-1

```

```

    P[Int(data[i,2]),Int(data[i+1,2])]=P[Int(data[i,2]),Int(
        data[i+1,2])]+1
    T[Int(data[i,2])]=T[Int(data[i,2])+(data[i+1,1]-data[i
        ,1])
    V[Int(data[i,2])]=V[Int(data[i,2])]+1
end
diag=zeros(Float64, estados)
for i=estados
    V[i]=V[i]-P[i, i]
    diag[i]=V[i]/T[i]
    P[i,:]=P[i,:]/T[i]
    P[i,i]=-diag[i]
end
return P
end

```

### C.5. Estimación de la matriz de intensidades por máxima verosimilitud

```

# data: observación continua de una trayectoria
# estados: vector de estados 1:d

# P: matriz estimada (dxd)

function estimar_matriz(data, estados)
    n=length(data[:,1])
    P=zeros(Float64, length(estados), length(estados))
    T=zeros(Float64, estados)
    V=zeros(Float64, estados)
    for i=1:n-1
        P[Int(data[i,2]),Int(data[i+1,2])]=P[Int(data[i,2]),Int(
            data[i+1,2])]+1
        T[Int(data[i,2])]=T[Int(data[i,2])+(data[i+1,1]-data[i
            ,1])
        V[Int(data[i,2])]=V[Int(data[i,2])]+1
    end

```

```

    diag=V./T
    for i=estados
        P[i,:]=P[i,:]/T[i]
        P[i,i]=-diag[i]
    end
    return P
end

```

### C.6. Algoritmo EM estocástico para procesos de saltos de Markov

```

# data: observación discreta de una trayectoria
# estados: vector de estados 1:d
# M: cantidad de iteraciones a realizar
# N: iteración a partir de la cual promediamos

# Q_estimada: matriz estimada (dxd)

function EM_markov(data, estados, N, M)
    Q0=estimar_matriz_inicial(data, estados)
    Q_sum=zeros(Float64, length(estados), length(estados))
    Qn=Q0
    for n=1:M
        trayectoria=MJPBridgeBisection(data, Qn)
        trayectoria=quitar_repeticiones(trayectoria)
        Qn=estimar_matriz(trayectoria, estados)
        if n>=N
            Q_sum=Q_sum+Qn
        end
    end
    Q_estimada=Q_sum./(M-N+1)
    return Q_estimada
end

```

### C.7. Recuperación de los tiempos interarribos y montos de reclamación

```

# proceso: proceso de reserva obtenido de reclamaciones()
#interarribos: lista de interarribos recuperados de proceso
function inter_montos(proceso)
    n=length(proceso[:,1])
    interarribos=zeros(Float64,n)
    interarribos[1]=proceso[1,1]
    for i=2:n
        interarribos[i]=proceso[i,1]-proceso[i-1,1]
    end
    return hcat(proceso[:,1],interarribos,proceso[:,3],proceso
       [:,2]) #regresamos lista de tiempos, interarribos, montos
        y estado
end

```

### C.8. Segregación de parejas observadas

```

# int_mont: lista de interarribos y montos obtenidos de
    inter_montos()
# a1, a2, b1, b2: parámetros de la regla de segregación

# seg: lista de interarribos y montos como int_mont que fueron
    segregados con el estado asignado

function segregacion(int_mont,a1,a2,b1,b2)
    seg=hcat([],[],[],[],[])

    n=length(int_mont[:,1])
    for i=1:n
        if (int_mont[i,2]<a1) & (int_mont[i,3]>b1)
            seg=vcat(seg,hcat(transpose(int_mont[i,:]), [1]))
        end
        if (int_mont[i,2]>a2) & (int_mont[i,3]<b2)
            seg=vcat(seg,hcat(transpose(int_mont[i,:]), [2]))
        end
    end

```

```

    end

    return seg
end

```

### C.9. Cálculo de los errores al segregar

```

# a,b: valores de a1 y b1 de la regla de segregación
# lambda: vector de intensidades de los procesos de Poisson (1x2
)
# mu: vector de medias de los montos de reclamación (1x2)
# q: vector de intensidades del proceso modulador (1x2)

function error1(a,b,lambda,mu,q)
    p1=(1-e^(-lambda[1]*a))*(e^(-b/mu[1]))
    p2=(1-e^(-lambda[2]*a))*(e^(-b/mu[2]))

    return p2*lambda[2]*q[1]/(p1*lambda[1]*q[2]+p2*lambda[2]*q
    [1])
end

# a,b: valores de a2 y b2 de la regla de segregación
# lambda: vector de intensidades de los procesos de Poisson (1x2
)
# mu: vector de medias de los montos de reclamación (1x2)
# q: vector de intensidades del proceso modulador (1x2)

function error2(a,b,lambda,mu,q)
    p1=(e^(-lambda[1]*a))*(1-e^(-b/mu[1]))
    p2=(e^(-lambda[2]*a))*(1-e^(-b/mu[2]))

    return p1*lambda[1]*q[2]/(p1*lambda[1]*q[2]+p2*lambda[2]*q
    [1])
end

```

## C.10. Simulación de interarribos y montos de reclamación

```

# tiempo: longitud de la trayectoria de la simulación
# q: vector de intensidades del proceso modulador (1x2)
# lambda: vector de intensidades de los procesos de Poisson (1x2
)

# sim1: simulación de interarribos en el estado 1
# sim2: simulación de interarribos en el estado 2

function simulacion_interarribos(tiempo,q,lambda)
    sim1=[0]
    sim2=[0]
    T1=tiempo*q[2]/(q[1]+q[2])
    T2=tiempo*q[1]/(q[1]+q[2])
    t=0
    while sum(sim1)<T1
        t=-log(rand())/lambda[1]
        if sum(sim1)+t<T1
            sim1=vcat(sim1,[t])
        else
            break
        end
    end
    t=0
    while sum(sim2)<T2
        t=-log(rand())/lambda[2]
        if sum(sim2)+t<T2
            sim2=vcat(sim2,[t])
        else
            break
        end
    end
    return vcat(sim1[2:end],sim2[2:end])
end

# tiempo: longitud de la trayectoria de la simulación

```

```
# q: vector de intensidades del proceso modulador (1x2)
# lambda: vector de intensidades de los procesos de Poisson (1x2
)
# mu: vector de medias de los montos de reclamación (1x2)

# sim1: simulación de montos en el estado 1
# sim2: simulación de montos en el estado 2

function simulacion_montos(tiempo,q,lambda,mu)
    T1=tiempo*q[2]/(q[1]+q[2])
    T2=tiempo*q[1]/(q[1]+q[2])
    N1=rand(Poisson(lambda[1]*T1))
    N2=rand(Poisson(lambda[2]*T2))
    sim1=rand(Exponential(mu[1]),N1)
    sim2=rand(Exponential(mu[2]),N2)
    return vcat(sim1,sim2)
end
```



# Bibliografía

- [1] ASMUSSEN, S. Risk theory in a Markovian environment. *Scandinavian Actuarial Journal* 1989, 2 (1989), 69–100.
- [2] ASMUSSEN, S., AND GLYNN, P. W. *Stochastic simulation: algorithms and analysis*. Springer, 2007.
- [3] ASMUSSEN, S., AND HOBOLTH, A. Markov bridges, bisection and variance reduction. In *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2010* (2012), L. Plaskota and H. Woźniakowski, Eds., vol. 23 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, Springer, pp. 3–22.
- [4] BÄUERLE, N., AND KÖTTER, M. Markov-modulated diffusion risk models. *Scandinavian Actuarial Journal* 2007, 1 (2007), 34–52.
- [5] DUFRESNE, F., AND GERBER, H. U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 10, 1 (1991), 51–59.
- [6] GERBER, H. U. An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal* 1970, 3-4 (1970), 205–210.
- [7] GERBER, H. U. Games of economic survival with discrete- and continuous-income processes. *Operations Research* 20, 1 (1972), 37–45.
- [8] GERBER, H. U., AND SHIU, E. S. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal* 2, 1 (1998), 48–72.
- [9] HOEL, P., PORT, S., AND STONE, C. *Introduction to stochastic processes*. Houghton Mifflin, 1972.
- [10] LU, Y., AND LI, S. On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* 37, 3 (2005), 522–532.

- [11] LU, Y., AND TSAI, C. C.-L. The expected discounted penalty at ruin for a Markov-modulated risk process perturbed by diffusion. *North American Actuarial Journal* 11, 2 (2007), 136–149.
- [12] MARSDEN, J. E., AND HOFFMAN, M. J. *Basic complex analysis*, third ed. W. H. Freeman and Company, 1999.
- [13] NG, A. C. Y., AND YANG, H. On the joint distribution of surplus before and after ruin under a Markovian regime switching model. *Stochastic Processes and their Applications* 116, 2 (2006), 244–266.
- [14] NIELSEN, S. F. The stochastic EM algorithm: estimation and asymptotic results. *Bernoulli* 6, 3 (2000), 457–489.
- [15] REINHARD, J.-M. On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment. *ASTIN Bulletin* 14, 1 (1984), 23–43.
- [16] RINCÓN, L. *Introducción a los procesos estocásticos*. Las prensas de Ciencias, 2012.
- [17] ROSS, S. M. *Stochastic processes*, second ed. Wiley, 1996.
- [18] TSAI, C. C.-L., AND WILLMOT, G. E. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 30, 1 (2002), 51–66.
- [19] YU, W., AND YUJUAN, H. The Markovian regime-switching risk model with constant dividend barrier under absolute ruin. *Journal of Mathematical Finance* 1, 3 (2011), 83–89.