UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DUALIDAD DE PONTRYAGIN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GONZALO EMILIANO RUIZ STOLOWICZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO
2017

Dualidad de Pontryagin

Gonzalo Emiliano Ruiz Stolowicz

Índice general

Introducción **1**

1. La integral de von Neumann **3**
1.1. Ejemplos 3
1.2. La integral de von Neumann 10

2. El grupo dual separa puntos. **23**
2.1. Ejemplos 23
2.2. Los caracteres separan puntos en ACH 30
2.3. Los caracteres separan puntos en ALCH 48

3. Dualidad de Pontryagin **55**
3.1. El grupo dual 55
3.2. Un morfismo entre G y G^{**} 64
3.3. Algunas propiedades en dualidad 81

4. Grupos reflexivos **85**
4.1. Grupos métricos 87
4.2. Grupos numerables 91
4.3. Subgrupos abiertos 93
4.4. Productos y sumas 96
4.5. Espacios vectoriales 106

5. Una aplicación homotópica **119**

Bibliografía **131**

Introducción

Dado un grupo topológico G, el conjunto de homomorfismos continuos al grupo multiplicativo de complejos unitarios, G^*, con la topología compacto abierta y la multiplicación puntual es un grupo topológico. Un grupo topológico G se dice reflexivo si la aplicación natural $G \xrightarrow{\omega_G} G^{**}$ es un isomorfismo topológico. En este trabajo se estudia la categoría de grupos reflexivos y las propiedades de la asignación $G \mapsto G^*$.

Se expone una demostración del Teorema de Pontryagin: todo grupo abeliano, localmente compacto y Hausdorff (ALCH) es reflexivo. También se presentan resultados que extienden la categoría de grupos reflexivos más allá de la categoría de grupos ALCH. Además se prueba que la aplicación $G \overset{G}{\mapsto}{}^{*}$ es una involución en la categoría de grupos ALCH y se muestran algunas propiedades que están en dualidad bajo esta aplicación. También a lo largo del trabajo se aborda la pregunta ¿Es la estructura algebraica de un grupo una obstrucción para que éste admita una topología no trivial con la cual sea reflexivo? La respuesta es sorprendente, la única obstrucción es la cardinalidad del grupo.

En el primer capítulo se construye la integral de von Neumann. Para un grupo compacto G, esa integral es un operador lineal, “invariante bajo traslaciones”, normalizado, monótono y definido positivo, de $Top(G, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}$.

En el segundo capítulo, utilizando la integral de von Neumann, se demuestra que para todo grupo abeliano, compacto y Hausdorff (ACH) G, el conjunto de homomorfismos continuos de G en $\mathbb{S}^1$, G^*, *separa* a los puntos de G. Es decir, para todo $g \in G \setminus \{e\}$, existe $\varphi \in G^*$ tal que $\varphi(g) \neq 1$. Posteriormente este resultado se extiende a los grupos ALCH.

En el tercer capítulo se da una demostración del Teorema de Pontryagin: la categoría de grupos ALCH está contenida en la categoría de grupos reflexivos. Para ello se muestra que todo grupo (ACH) y que todo grupo abeliano y discreto (AD) es reflexivo. A partir de este hecho, y de la .$^{\text{ex}}$actitud”de la asignación $G \mapsto G^*$, se obtiene la afirmación para todo grupo ALCH. También en éste capítulo se expone de qué maneras algunas propiedades de un grupo ALCH, tanto algebraicas como topológicas, se reflejan mediante el funtor dual. Por ejemplo, se demostrará que ser discreto y ser compacto son propiedades en dualidad.

En el capítulo cuarto se estudia la categoría de grupos reflexivos. Ésta categoría es cerrada bajo subgrupos abiertos, grupo dual, sumas directas (con una topología definida *ad hoc*) y productos topológicos. De hecho, estos dos últimos objetos están en dualidad y permitieron dar los primeros ejemplos de grupos reflexivos no localmente compactos. La categoría de grupos reflexivos también contiene a los subgrupos aditivos de los espacios de Banach. Y se demuestra que un espacio vectorial topológico es reflexivo como grupo si, y sólo si, es reflexivo como espacio vectorial. En grupos métricos se prueba que el dual de un grupo y el dual de un subgrupo denso son topológicamente isomorfos, que el dual de un grupo métrico es un espacio compactamente generado y que un grupo abeliano métrico completo y separable es reflexivo si, y sólo sí, ω_G es un isomorfismo (algebraico).

En el capítulo quinto se expone una aplicación del Teorema de Pontryagin: toda función continua y punteada entre un grupo ACH conexo y un grupo ALCH es homotópica a un único homomorfismo continuo. Con éste resultado se prueba que para todo grupo ALCH G, $\pi_1(G,e)$ es isomorfo a $Hom(\mathbb{S}^1,G)$, el conjunto de homomorfismos continuos de $\mathbb{S}^1$ en G, y que $\pi_n(G,e)=0$, para toda $n \geq 2$.

Capítulo 1

La integral de von Neumann

A lo largo de este trabajo todo grupo será considerado grupo topológico. De no haber una topología distinguida en G, éste será pensado con la topología discreta. Desde este punto de vista, dos grupos serán equivalentes si, y sólo si, existe un homeomorfismo entre ellos que es además un homomorfismo de grupos. Una función de este tipo la llamaremos isomorfismo topológico.

Dado un grupo topológico G, usaremos Σ para denotar al conjunto de vecindades de e, y llamaremos $\mathring{\Sigma}$ al conjunto de vecindades abiertas de e.

A lo largo del texto un espacio será localmente compacto si todo punto tiene una base de vecindades compactas.

En este capítulo se construirá la integral de von Neumann siguiendo el libro *Topological Groups and Related Structures* de Alexander Arhangel'skii y Mikhail Tkachenko.[1]

Aunque en el resto del trabajo los grupos considerados son abelianos, en este capítulo no lo serán necesariamente. Esto con el afán de probar un resultado más general y porque no aumenta realmente la dificultad de las demostraciones.

1.1. Ejemplos

Subgrupos cerrados y productos de grupos compactos son compactos. Todo grupo finito es compacto. Los grupos

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = Id\} \quad \text{y} \quad SU(n) = \{A \in U(n) \mid det(A) = 1\}$$

así como sus análogos reales son grupos topológicos compactos.

Los siguientes resultados, además de ser útiles en el resto del trabajo, nos darán una fuente de ejemplos de grupos compactos no necesariamente de "origen euclideano". Demostraremos que el grupo de isometrías de un espacio métrico compacto, con la topología compacto abierta, es un grupo compacto.

[1] Alexander Arhangel'skii y Mikhail Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Francia, Atlantis Press, 2008.

Dados dos espacios topológicos X y Y está la pregunta, qué topología es "adecuada", con nuestros fines, para $Top(X,Y)$, el espacio de funciones continuas de X a Y. Para X y Y espacios topológicos se tiene la función evaluación

$$\begin{array}{ccc} Top(X,Y)\times X & \xrightarrow{ev} & Y \\ (f,x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Podría esperarse de una topología para $Top(X,Y)$ que ev fuera continua, en ese sentido la topología compacto abierta aparece naturalmente, la topología compacto abierta está contenida en toda topología con la cual la evaluación es continua.

Proposición 1.1. *Si $\mathcal{A}$ es una topología de $Top(X,Y)$ con la que ev es continua, entonces para todo $K\subset X$ compacto y para todo $Q\subset Y$ abierto,*

$$Q^K := \{X \xrightarrow{f} Y \mid f \textit{es continua y } f(K)\subset Q\}$$

pertenece a $\mathcal{A}$.

Demostración. Como ev es continua, si $f\in Q^K$ y $x\in K$ existen $W(f,x)\in\mathcal{A}$ y $V(f,x)\subset X$ abierto tales que

$$(f,x)\in W(f,x)\times V(f,x) \quad \text{y} \quad ev\,(W(f,x)\times V(f,x))\subset Q$$

Entonces existen $x_1,x_2,\ldots,x_n\in K$ tales que

$$K\subset V(f,x_1)\cup\cdots\cup V(f,x_n)$$

Si

$$W = W(f,x_1)\cap\cdots\cap W(f,x_n)$$

se tiene que $ev(W\times K)\subset Q$. Por lo tanto $f\in W\subset Q^K$. Como W es una vecindad de f en $\mathcal{A}$, Q^K pertenece a $\mathcal{A}$. □

Proposición 1.2. *Si X es localmente compacto y $Top(X,Y)$ tiene la topología compacto abierta, $Top(X,Y)\times X \xrightarrow{ev} Y$ es continua.*

Demostración. Sean $(f,x)\in Top(X,Y)\times X$ y $Q\subset Y$ abierto tales que

$$ev(f,x)\in Q$$

Como f es continua, existe $K\subset X$, una vecindad compacta de x, tal que $K\subset f^{-1}Q$. Entonces $Q^K\times K$ es una vecindad de (f,x) tal que $ev(Q^K\times K)\subset Q$. □

Proposición 1.3. *Si $Top(Y,Z)$ tiene la topología compacto abierta, para toda función continua $X\times Y\xrightarrow{f} Z$, la función adjunta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Top(Y,Z) \\ x & \longmapsto & \left(y \xmapsto{\tilde{f}(x)} f(x,y)\right) \end{array}$$

es continua.

Demostración. Si $x \in X$ y U^K es una vecindad subbásica de $\tilde{f}(x)$, para toda $k \in K$, $f(x,k) \in U$. Por lo tanto existe $W_k \times V_k \subset X \times Y$, una vecindad de (x,k), tal que $f(W_k \times V_k) \subset U$. Entonces existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que $K \subset V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_n}$. Si definimos $W = W_{k_1} \cap \cdots \cap W_{k_n}$, se tiene que $\tilde{f}(W) \subset U^K$. $\square$

Proposición 1.4. *Si X y Y son localmente compactos, la función*

$$\begin{array}{rcl} Top(X \times Y, Z) & \xrightarrow{\theta} & Top(X, Top(Y,Z)) \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

(con la topología compacto abierta) es un homeomorfismo.

Demostración. Se afirma que la función

$$\begin{array}{rcl} Top(X, Top(Y,Z)) & \xrightarrow{\phi} & Top(X \times Y, Z) \\ h & \longmapsto & \Big((x,y) \xmapsto{\phi(h)} ev(h(x), y)\Big) \end{array}$$

es la inversa de θ. Nótese que $\phi(h)$ es una función continua (ver la Proposición 1.2). Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \theta\Big(\phi(h)\Big)\big(x\big)\big(y\big) & = & \widetilde{\phi(h)}\big(x\big)\big(y\big) \\ & = & \phi\big(h\big)\big(x,y\big) \\ & = & h\big(x\big)\big(y\big) \end{array}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rcl} \phi\big(\theta(f)\big)(x,y) & = & ev(\tilde{f}(x), y) \\ & = & \tilde{f}\big(x\big)\big(y\big) \\ & = & f(x,y) \end{array}$$

Ahora demostremos que θ es continua. Sea $\tilde{f} \in Top(X, Top(Y,Z))$ y sea U^K una vecindad subbásica de $\tilde{f}$. U es una unión de abiertos básicos de $Top(Y,Z)$. Como K es compacto, $\tilde{f}(K)$ está contenido en $Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$, una unión finita de esos básicos. Cada básico Q_i es de la forma

$$W_{i1}{}^{L_{i1}} \cap \cdots \cap W_{in}{}^{L_{in}}$$

Obsérvese que

$$K \subset \tilde{f}^{-1}(Q_1) \cup \cdots \cup \tilde{f}^{-1}(Q_m)$$

Cada $k \in K$ tiene una vecindad compacta V_k contenida en algún $\tilde{f}^{-1}(Q_i)$. Como K es compacto, $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_l$. Entonces para toda $j = 1, \ldots, l$, $\tilde{f} \in Q_{i(j)}{}^{V_j}$, para alguna $i = i(j)$. Por lo tanto $f \in W_{i(j)t}{}^{V_j \times L_{i(j)t}}$, para toda j y para toda t.

Sea $g \in Top(X \times Y, Z)$ tal que

$$g \in \bigcap_{j,t} W_{i(j)t}{}^{V_j \times L_{i(j)t}}$$

entonces, para toda j y para toda t, $\tilde{g}(V_j) \subset W_{i(j)t}{}^{L_{i(j)t}}$. Es decir, $\tilde{g}(V_j) \subset Q_{i(j)}$. Podemos concluir que

$$\tilde{g}(K) \subset Q_{i(1)} \cup \cdots \cup Q_{i(l)} \subset U$$

Con esto hemos demostrado que θ es continua en f.

Ahora probaremos que θ es abierta. Como θ es inyectiva, para demostrar que es abierta, es suficiente probar que la imagen de cada subbásico U^J es abierta.

Sea $f \in U^J$. Toda $p \in J$ tiene una vecindad compacta $K \times L$ tal que $f(K \times L) \subset U$. Como J es compacto,

$$J \subset K_1 \times L_1 \cup \cdots \cup K_n \times L_n$$

para alguna n. Además $f(K_1 \times L_1 \cup \cdots \cup K_n \times L_n) \subset U$, por lo tanto

$$f \in U^{K_1 \times L_1} \cap \cdots \cap U^{K_n \times L_n} \subset U^J$$

Entonces cada subbásico de $Top(X \times Y, Z)$ es unión de básicos que tienen la forma de arriba. Se tiene que

$$\theta(U^{K \times L}) = (U^L)^K$$

Entonces θ es continua, abierta y biyectiva. $\square$

Lema 1.5. *Sea X localmente compacto. Si $Y \xrightarrow{p} Z$ es una identificación,*

$$Y \times X \xrightarrow{p \times Id_X} Z \times X$$

es una identificación.

Demostración. Sea $Z \times X \xrightarrow{f} W$ una función tal que $f \circ (p \times Id_X)$ es continua. Queremos demostrar que f es continua.

La función adjunta de $f \circ (p \times Id_X)$, que pertenece a $Top(Y, Top(X, W))$ (ver la Proposición 1.3), es igual a $\tilde{f} \circ p$, donde $\tilde{f}$ es la función adjunta de f en $Top(Z, Top(X, W))$. Como p es una identificación, $\tilde{f}$ es continua. Por la Proposición 1.4, f es continua. Esto demuestra que p tiene la propiedad universal de la identificación. $\square$

Proposición 1.6. *Si X y Y son localmente compactos y $X \xrightarrow{p} W$ y $Y \xrightarrow{q} Z$ son identificaciones, $X \times Y \xrightarrow{p \times q} W \times Z$ es una identificación.*

Demostración. Basta observar que $p \times q = (p \times Id_Y) \circ (Id_X \times q)$. $\square$

Proposición 1.7. *Si G es un grupo localmente compacto, para todo H subrupo normal de G, G/H es un grupo topológico localmente compacto. Si además H es cerrado, G/H es Hausdorff.*

Demostración. Sea $G \xrightarrow{\pi} G/H$ la proyección canónica. Como la operación en G es compatible con la identificación $\pi \times \pi$, la operación de G/H es continua. Así mismo, como la función $g \xmapsto{\pi \circ \iota} g^{-1}H$ es compatible con π, la función $gH \overset{\sim}{\mapsto} g^{-1}H$ es continua.

La aplicación $G \xrightarrow{\pi} G/H$ es abierta, entonces manda vecindades compactas de e en vecindades compactas de H en G/H. Por lo tanto G/H es localmente compacto. Y como $\pi^{-1}(\{H\}) = H$, si H es cerado, G/H es Hausdorff. $\square$

Lema 1.8. *Todo grupo compacto es localmente compacto.*

Demostración. Como todo grupo es regular,[2] todo punto tiene una base de vecindades cerradas. □

Proposición 1.9. *Sean X y Y espacios topológicos localmente compactos, y Z cualquier espacio. Si $Top(X,Y)$ y $Top(Y,Z)$ tienen la topología compacto abierta,*

$$\begin{array}{ccc} Top(X,Y) \times Top(Y,Z) & \xrightarrow{\Psi} & Top(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

es continua.

Demostración. Sea $(f,g) \in Top(X,Y) \times Top(Y,Z)$ y sea U^K un subbásico de $Top(X,Z)$ alrededor de $g \circ f$. Entonces $f(K) \subset g^{-1}(U)$. Para toda $y \in f(K)$ existe una vecindad compacta V_y tal que $V_y \subset g^{-1}(U)$. Como $\{\mathring{V}_y\}_{y \in f(K)}$ es una cubierta abierta de $f(K)$, existen $y_1, \ldots y_n \in f(K)$ tales que $f(K) \subset \mathring{V}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathring{V}_{y_n}$. Entonces

$$(f,g) \in \left(\mathring{V}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathring{V}_{y_n}\right)^K \times U^{V_{y_1}} \cap \cdots \cap U^{V_{y_n}}$$

y

$$\Psi\left(\left(\mathring{V}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathring{V}_{y_n}\right)^K \times U^{V_{y_1}} \cap \cdots \cap U^{V_{y_n}}\right) \subset U^K$$

□

Proposición 1.10. *Sean X de Hausdorff, Y un espacio métrico y $f \in Top(X,Y)$. Una red $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge en $Top(X,Y)$, con la topología compacto abierta, a f si, y sólo si, para cada $K \subset X$ compacto y para cada $\epsilon > 0$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, para toda $\lambda > \lambda_0$ y para toda $k \in K$, $d(f_\lambda(k), f(k)) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en $Top(X,Y)$. Supóngase que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a f con la topología compacto abierta. Sean $K \subset X$ compacto y $\epsilon > 0$. Toda $k \in K$ tiene una vecindad abierta U_k tal que $f(U_k) \subset B_{\epsilon/3}(f(k))$. Entonces existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que

$$K \subset \overline{K \cap U_1} \cup \cdots \cup \overline{K \cap U_n}$$

Por lo tanto

$$f \in V = B_{\epsilon/2}(f(k_1))^{\overline{K \cap U_1}} \cap \cdots \cap B_{\epsilon/2}(f(k_n))^{\overline{K \cap U_n}}$$

Existe λ_0 tal que para toda $\lambda > \lambda_0$, $f_\lambda \in V$. Por lo tanto si $\lambda > \lambda_0$ y $k \in \overline{K \cap U_i}$,

$$\begin{array}{rcl} d(f_\lambda(k), f(k)) & \leq & d(f_\lambda(k), f(k_i)) + d(f(k_i), f(k)) \\ & < & \epsilon/2 + \epsilon/2 \end{array}$$

Supóngase que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red que converge uniformemete en compactos a $f \in Top(X,Y)$. Sea $f \in U^K$ y sea

$$\epsilon = \text{ínf}\{d(a,b) \mid a \in f(K) \text{ y } b \in Y \setminus U)\}$$

[2]Mikhail Tkachenko *et al.*, *op. cit.*, p. 8.

Se afirma que $\epsilon > 0$. Si $\epsilon = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n \in Y \setminus U$ y $k_n \in f(K)$ tales que $d(x_n, k_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Sin pérdida de generalidad supóngase que la sucesión $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a k_∞. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $l > m$, $d(k_n, k_\infty) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Entonces si $M = \text{máx}\{m, n\}$, para toda $l > M$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_l, k_\infty) & \leq & d(x_l, k_l) + d(k_l, k_\infty) \\ & < & \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{array}$$

Esto es una contradicción, y por lo tanto, $\epsilon > 0$. Entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para toda $\lambda > \lambda_0$ y para toda $k \in K$, $d(f_\lambda(k), f(k)) < \epsilon$. Por lo tanto $f_\lambda \in U^K$. $\square$

Proposición 1.11. *Si X es compacto y Hausdorff, $Homeo(X)$, el conjunto de homeomorfismos de X en si mismo, con la topología compacto abierta, es un grupo topológico.*

Demostración. Todo espacio compacto y Hausdorff es localmente compacto.[3] En la Proposición 1.9 se demostró que la composición es una función continua. Sólo falta probar que el mapeo

$$\begin{array}{rcl} Homeo(X) & \longrightarrow & Homeo(X) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array}$$

es continuo.

Supóngase $f^{-1} \in U^K$. Sea $g \in (X \setminus K)^{X \setminus U}$ y $k \in K$. Si $g^{-1}(k) \notin U$, entonces $g(g^{-1}(k)) \notin K$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $g^{-1} \in U^K$. $\square$

Demostraremos que el grupo de isometrías invertibles de un espacio métrico compacto X, $Iso(X)$, es un grupo compacto.

Proposición 1.12. *El grupo de homeomorfismos de un espacio métrico compacto, con la topología compacto abierta, es 2 numerable.*

Demostración. Todo espacio métrico compacto es separable y 1 numerable. Por lo tanto todo espacio métrico compacto es 2 numerable. Entonces todo espacio métrico compacto X tiene una base numerable $\mathcal{B}$ formada de abiertos con cerradura compacta. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas.[4]

Se afirma que $\{B^{\overline{A}} \mid A, B \in \mathcal{B}\}$ es una base (numerable) para la topología compacto abierta en $Homeo(X)$. Sea $f \in U^K$ con U abierto y K compacto. Para toda $k \in K$ existe $A_k \in \mathcal{B}$ tal que $f(\overline{A_k}) \subset U$. Y para cada $x \in f(\overline{A_k})$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Como $f(\overline{A_k})$ es compacto podemos asegurar que existe $B_k \in \mathcal{B}$ tal que $f(\overline{A_k}) \subset B_k \subset U$. También sabemos que existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que $K \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Por lo tanto

$$f \in (B_1 \cup \cdots \cup B_n)^{\left(\overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}\right)} = (B_1 \cup \cdots \cup B_n)^{\left(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}\right)} \subset U^K$$

$\square$

[3] Carlos Prieto, *Topología básica*, México, Fondo de Cultura Económica, 2003, p. 196.

[4] Basta tomar la familia de uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$.

Lema 1.13. *Si X es un espacio métrico compacto, toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Iso(X)$ tiene una subsucesión $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que, para toda $x \in X$, $(\varphi_{n_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración. Como X es separable, existe $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{A} = X$. Sin pérdida de generalidad supóngase que

$$(\varphi_n(a_1))_{n\in\mathbb{N}} = (\varphi_{1,n}(a_1))_{n\in\mathbb{N}}$$

es convergente. Supóngase que se han definido

$$(\varphi_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\varphi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$$

subsucesiones de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $(\varphi_{i,n}(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $(\varphi_{i+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\varphi_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Definamos $(\varphi_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ como una subsucesión de $(\varphi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{m+1,n}(a_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Así, recursivamente, para toda $i \in \mathbb{N}$ podemos definir una sucesión $(\varphi_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{i,n}(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge y tal $(\varphi_{i+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\varphi_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Para toda $a_i \in A$, la sucesión $(\varphi_{n,n}(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pues $(\varphi_{i+n,i+n}(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\varphi_{i,n}(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$, que es convergente.

Se afirma que para toda $x \in X$, $(\varphi_{n,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sea $\epsilon > 0$. Existe $a_i \in A$ tal que $d(x, a_i) < \epsilon/4$. Por otro lado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todas $n, m > N$, $d(\varphi_{n,n}(a_i), \varphi_{m,m}(a_i)) < \epsilon/2$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} d(\varphi_{n,n}(x), \varphi_{m,m}(x)) & \leq & \\ d(\varphi_{n,n}(x), \varphi_{n,n}(a_i)) + d(\varphi_{n,n}(a_i), \varphi_{m,m}(a_i)) + d(\varphi_{m,m}(a_i), \varphi_{m,m}(x)) & = & \\ 2d(a_i, x) + d(\varphi_{n,n}(a_i), \varphi_{m,m}(a_i)) & < & \epsilon \end{array}$$

Entonces, para toda $x \in X$, la sucesión $(\varphi_{n,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Lema 1.14. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $Iso(X)$ que converge puntualmente a una función φ, entonces $\varphi \in Iso(X)$.*

Demostración. Si $x, y \in X$,

$$\begin{array}{rcl} d(\varphi(x), \varphi(y)) & = & d(\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x), \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(y)) \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} d(\varphi_n(x), \varphi_n(y)) \\ & = & d(x, y) \end{array}$$

Ahora demostraremos que φ es suprayectiva. Sea $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $x = \varphi_n(x_n)$ para alguna $x_n \in X$. Existe una subsucesion $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x_∞. Sea $\epsilon > 0$. Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todas $i_r, i_l > M$, $d(x_{i_l}, x_{i_r}) < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $i_l > M$. Como $\varphi_n(x_{i_l})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi(x_{i_l})$, existe $N > i_l$ tal que para cada $i_s > N$, $d(\varphi_{i_s}(x_{i_l}), \varphi(x_{i_l})) < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces si $i_s > N$,

$$\begin{array}{rcl} d(\varphi(x_\infty), x) & \leq & d(\varphi(x_\infty), \varphi(x_{i_l})) + d(\varphi(x_{i_l}), \varphi_{i_s}(x_{i_l})) + d(\varphi_{i_s}(x_l), \varphi_{i_s}(x_{i_s})) \\ & < & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{array}$$

Por lo tanto $\varphi(x_\infty) = x$. □

Lema 1.15. *Si X es un espacio métrico compacto y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $Iso(X)$ que converge puntualmente a φ, entonces converge uniformemente a φ.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N_x$, $d(\varphi_n(x), \varphi(x)) < \epsilon/3$. Si $d(y, x) < \epsilon/3$, para toda $n > N_x$

$$\begin{aligned} d(\varphi_n(y), \varphi(y)) &\leq d(\varphi(y), \varphi(x)) + d(\varphi(x), \varphi_n(x)) + d(\varphi_n(x), \varphi_n(y)) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $X = B_{\epsilon/3}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\epsilon/3}(x_m)$. Si N es el máximo de $N_1, \ldots, N_m$, para toda $n > N$ y para toda $x \in X$, $d(\varphi_n(x), \varphi(x)) < \epsilon$. □

Teorema 1.16. *Si X es un espacio métrico compacto, el grupo $Iso(X)$ con la topología compacto abierta es compacto.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Iso(X)$. Por los lemas anteriores sabemos que tiene una subsucesión que converge uniformemente a una isometría φ. Entonces, por la Proposición 1.10, $Iso(X)$ es secuencialmente compacto y 2 numerable (ver la Proposición 1.12). Por lo tanto $Iso(X)$ es compacto.[5] □

1.2. La integral de von Neumann

Definición 1.17. *Sea G un grupo topológico. Diremos que una función $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es uniformemente continua por la izquierda (derecha), si para cada $\epsilon > 0$, existe $U \in \Sigma$ tal que si $x^{-1} \cdot y \in U$ ($x \cdot y^{-1} \in U$), entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Observación 1.18. f es uniformemente continua por la derecha si, y sólo si, es uniformemente continua por la izquierda.

Demostración. Si f es uniformemente continua por la izquierda y $\epsilon > 0$, existe V en Σ tal que, si $x^{-1} \cdot y \in V$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Sea $W \in \Sigma$ tal que $W = W^{-1}$ y $W \subset V$. Si $x \cdot y^{-1} \in W \subset V$,

$$y \cdot x^{-1} = \left(x \cdot y^{-1}\right)^{-1} \in W^{-1} \subset V$$

y por lo tanto $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Entonces f es uniformemente continua por la derecha. □

En adelante bastará decir uniformemente continua.

Proposición 1.19. *Toda función $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ uniformemente continua es continua.*

Demostración. Para cada $\epsilon > 0$ existe $V \in \Sigma$ tal que si $u \cdot w^{-1} \in V$, entonces $|f(u) - f(w)| < \epsilon$ Por lo tanto si $y \in V \cdot x$, $y \cdot x^{-1} \in V$ y $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. □

Proposición 1.20. *Si G es compacto, toda función continua $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

[5] Carlos Prieto, *op. cit.*, p. 192.

Demostración. Dado $x \in G$, definamos la función continua $y \mapsto f(x \cdot y) - f(x)$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $U_x \in \Sigma$ tal que, para toda $u \in U_x$,

$$|f(x \cdot u) - f(x)| < \epsilon/2$$

Sea $V_x \in \overset{\circ}{\Sigma}$ simétrica tal que $V_x \cdot V_x \subset U_x$. Existen $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que

$$G = x_1 \cdot V_{x_1} \cup \cdots \cup x_n \cdot V_{x_n}$$

Si $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, para toda $v \in V$ y para toda $x \in G$,

$$|f(x \cdot v) - f(x)| = |f((x_i \cdot v_i) \cdot v) - f(x_i \cdot v_i)|$$

para algún $x_i \in G$ y algún $v_i \in V_{x_i}$. Como

$$v_i \cdot v \in V_{x_i} \cdot V \subset V_{x_i} \cdot V_{x_i} \subset U_{x_i}$$

se tiene que

$$\begin{array}{rcl} |f(x \cdot v) - f(x)| & = & |f((x_i \cdot v_i) \cdot v) - f(x_i \cdot v_i)| \\ & \leq & |f(x_i \cdot (v_i \cdot v)) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_i \cdot v_i)| \\ & < & \epsilon/2 + \epsilon/2 \ = \epsilon \end{array}$$

Por lo tanto, si $x^{-1} \cdot y \in V$,

$$|f(x \cdot x^{-1} \cdot y) - f(x)| = |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

□

Definición 1.21. *Dada $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ continua, y $a \in G$, definamos la función continua*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_a} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(xa) \end{array}$$

Análogamente, ${}_af(x) = f(a \cdot x)$.

Definición 1.22. *Una familia de funciones $\{\, G \xrightarrow{f_\alpha} \mathbb{R} \,\}_{\alpha \in A}$ se llama uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $V \in \Sigma$ tal que si $x \cdot y^{-1} \in V$,*

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \epsilon$$

para toda f_α en la familia.

Proposición 1.23. *Sea $\{f_a\}_{a \in A}$ una red de funciones de G en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente a f. Si $\{f_a\}_{a \in A}$ es una familia uniformemente continua, f es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in G$. Como $\{f_a\}_{a\in A}$ es una familia uniformemente continua, existe $V \in \Sigma$ tal que, para toda f_a, si $u \cdot v^{-1} \in V$,

$$|f_a(u) - f_a(v)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Entonces si $u \cdot v^{-1} \in V$,

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &= |\lim_{a\to\infty} f_a(u) - \lim_{a\to\infty} f_a(v)| \\ &= \lim_{a\to\infty} |f_a(u) - f_a(v)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

□

Definición 1.24. *Dada $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ continua y $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset G$, definimos las funciones continuas $f_A = \frac{1}{n}(f_{a_1} + \cdots + f_{a_n})$ y ${}_Af = \frac{1}{n}({}_{a_1}f + \cdots + {}_{a_n}f)$.*

Lema 1.25. *Si G es un grupo compacto y $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es una función continua, las familias $\mathcal{I}_f = \{{}_Af \mid A \subset G \text{ finito}\}$ y $\mathcal{D}_f = \{f_A \mid A \subset G \text{ finito}\}$ son uniformemente continuas.*

Demostración. Sean $A \subset G$ finito y $\epsilon > 0$. Como toda función continua de G en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua, existe $V \in \Sigma$ tal que si $x \cdot y^{-1} \in V$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Si suponemos $x \cdot y^{-1} \in V$, para toda $a \in G$ tendríamos, $(x \cdot a) \cdot (y \cdot a)^{-1} \in V$, por lo tanto $|f(x \cdot a) - f(y \cdot a)| < \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} |f_A(x) - f_A(y)| &= \left|\tfrac{1}{n}\big(f(x\cdot a_1) + \cdots + f(x\cdot a_n)\big) - \tfrac{1}{n}\big(f(y\cdot a_1) + \cdots + f(y\cdot a_n)\big)\right| \\ &= \tfrac{1}{n}\left|\Big(\big(f(x\cdot a_1) - f(y\cdot a_1)\big) + \cdots + \big(f(x\cdot a_n) - f(y\cdot a_n)\big)\Big)\right| \\ &\leq \tfrac{1}{n}\big(|f(x\cdot a_1) - f(y\cdot a_1)| + \cdots + |f(x\cdot a_n) - f(y\cdot a_n)|\big) \\ &< \tfrac{1}{n}(\underbrace{\epsilon + \cdots + \epsilon}_{n\,veces}) \end{aligned}$$

□

Observación 1.26. Si G es compacto y $G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es continua, para todo $A \subset G$ finito,

$$\text{mín}\{f\} \leq \text{mín}\{f_A\} \leq \text{máx}\{f_A\} \leq \text{máx}\{f\}$$

y

$$\text{mín}\{f\} \leq \text{mín}\{{}_Af\} \leq \text{máx}\{{}_Af\} \leq \text{máx}\{f\}$$

Además,

$$\text{máx}\{|f_A|\} \leq \text{máx}\{|f|\} \quad \text{y} \quad \text{máx}\{|{}_Af|\} \leq \text{máx}\{|f|\}$$

Demostración. Para $a \in G$, $\text{mín}\{f\} = \text{mín}\{f_a\}$. Por lo tanto si $A = \{\, a_1, \ldots, a_n \,\}$ y $x \in G$,

$$\begin{aligned} n \cdot \text{mín}\{f\} &= \text{mín}\{f_{a_1}\} + \cdots + \text{mín}\{f_{a_n}\} \\ &\leq f_{a_1}(x) + \cdots + f_{a_n}(x) \end{aligned}$$

Entonces $\text{mín}\{f\} \leq \text{mín}\{f_A\}$, análogamente $\text{máx}\{f_A\} \leq \text{máx}\{f\}$. □

Definición 1.27. *Llamaremos* $\mathcal{C}(G)$ *al conjunto* $\{G \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f \textit{ es continua}\}$.

Observación 1.28. Dado un grupo topológico compacto G, si para $f, h \in \mathcal{C}(G)$ definimos

$$d(f,h) = \max_{x \in G} |f(x) - h(x)|$$

d es una métrica en $\mathcal{C}(G)$. A $\mathcal{C}(G)$ le daremos la topología inducida por d.

Proposición 1.29. *Si* G *es compacto y* $f \in \mathcal{C}(G)$, *la función*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{C}(G) \\ g & \longmapsto & f_g \end{array}$$

así como su versión por la izquierda, son continuas.

Demostración. Sean $x \in G$ y $\epsilon > 0$. En la Proposición 1.20 se demostró que f es uniformemente continua, entonces existe $V \in \Sigma$ tal que si $h^{-1} \cdot g \in V$,

$$|f(g) - f(h)| < \epsilon$$

Si $x^{-1} \cdot g \in V$, para toda $y \in G$, $(yx)^{-1}(yg) \in V$. Por lo tanto

$$|f(yx) - f(yg)| = |f_x(y) - f_g(y)| < \epsilon$$

Como G es compacto

$$d(f_x, f_g) = \max\{|f_x(y) - f_g(y)| \mid y \in G\} < \epsilon$$

Por lo tanto si $g \in x \cdot V$, $d(f_x, f_g) < \epsilon$. □

Proposición 1.30. *Sea* G *compacto. Dado* $A \subset G$ *finito son ciertos los siguientes resultados:*
a) La función $f \xmapsto{\psi_A} f_A$ *de* $\mathcal{C}(G)$ *en* $\mathcal{C}(G)$, *así como su análoga por la izquierda, es lineal.*
b) Para todas $f, g \in \mathcal{C}(G)$, $d(f_A, g_A) \leq d(f,g)$ *y* $d({}_Af, {}_Ag) \leq d(f,g)$.

Demostración. a) Es claro. b) Si $f, g \in \mathcal{C}(G)$, por a) y por la Observación 1.26,

$$\begin{array}{rcl} d(f_A, g_A) & = & \max_{x \in G} |f_A(x) - g_A(x)| \\ & = & \max_{x \in G} |(f-g)_A(x)| \\ & \leq & \max_{x \in G} |f(x) - g(x)| \\ & = & d(f,g) \end{array}$$

□

Lema 1.31. *Sean* G *compacto,* $A, B \subset G$ *finitos y* $f \in \mathcal{C}(G)$, *entonces se cumplen:*
a) $(f_B)_A = f_{A \cdot B}$
b) ${}_A({}_Bf) = {}_{B \cdot A}f$
c) $({}_Bf)_A = {}_B(f_A)$

Demostración. Sean $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Para demostrar a) obsérvese que para todos $a, b \in G$, $(f_a)_b = f_{b\cdot a}$. Por esto, y debido a la Proposición 1.30, se tiene que

$$\begin{aligned}
(f_B)_A &= \left(\tfrac{1}{n}(f_{b_1} + \cdots + f_{b_n})\right)_A \\
&= \tfrac{1}{n}\big((f_{b_1})_A + \cdots + (f_{b_n})_A\big) \\
&= \tfrac{1}{n}\Big(\tfrac{1}{m}\big((f_{b_1})_{a_1} + \cdots + (f_{b_1})_{a_m}\big) + \cdots + \tfrac{1}{m}\big((f_{b_n})_{a_1} + \cdots + (f_{b_n})_{a_m}\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{nm}\big((f_{a_1b_1} + \cdots + f_{a_mb_1}) + \cdots + (f_{a_1b_n} + \cdots + f_{a_mb_n})\big) \\
&= f_{A\cdot B}
\end{aligned}$$

Para b) se da una prueba análoga que para a), pero usando que para todos $a, b \in G$, ${}_a({}_bf) = {}_{ba}f$.

En c) usaremos que, para todos $a, b \in G$, ${}_b(f_a) = ({}_bf)_a$. Por ello, y la Proposición 1.30, se tiene que

$$\begin{aligned}
({}_Bf)_A &= \left(\tfrac{1}{n}({}_{b_1}f + \cdots + {}_{b_n}f)\right)_A \\
&= \tfrac{1}{n}\big(({}_{b_1}f)_A + \cdots + ({}_{b_n}f)_A\big) \\
&= \tfrac{1}{n}\Big(\tfrac{1}{m}\big(({}_{b_1}f)_{a_1} + \cdots + ({}_{b_1}f)_{a_m}\big) + \cdots + \tfrac{1}{m}\big(({}_{b_n}f)_{a_1} + \cdots + ({}_{b_n}f)_{a_m}\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{n}\Big(\tfrac{1}{m}\big({}_{b_1}(f_{a_1}) + \cdots + {}_{b_1}(f_{a_m})\big) + \cdots + \tfrac{1}{m}\big({}_{b_n}(f_{a_1}) + \cdots + {}_{b_n}(f_{a_m})\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{n}\Big({}_{b_1}\big(\tfrac{1}{m}(f_{a_1} + \cdots + f_{a_m})\big) + \cdots + {}_{b_n}\big(\tfrac{1}{m}(f_{a_1} + \cdots + f_{a_m})\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{n}\big({}_{b_1}(f_A) + \cdots + {}_{b_n}(f_A)\big) \\
&= {}_B(f_A)
\end{aligned}$$

□

Lema 1.32. *Si G es compacto, dada $f \in \mathcal{C}(G)$, los conjuntos $\overline{\mathcal{I}_f}$ y $\overline{\mathcal{D}_f}$ (del Lema 1.25) son uniformemente continuos.*

Demostración. Se hará la prueba para $\overline{\mathcal{D}_f}$, el caso para $\overline{\mathcal{I}_f}$ es análogo. Sea $\epsilon > 0$ y $g \in \overline{\mathcal{D}_f}$. Existe $h \in \mathcal{D}_f$ tal que $d(h, g) < \epsilon/3$. Por otro lado, como $\mathcal{D}_f$ es uniformemente continua (ver el Lema 1.25), existe $V \in \Sigma$ tal que si $x \cdot y^{-1} \in V$,

$$|p(x) - p(y)| < \epsilon/3$$

para toda $p \in \mathcal{D}_f$. Entonces si $x \cdot y^{-1} \in V$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &\leq |g(x) - h(x)| + |h(x) - h(y)| + |h(y) - g(y)| \\
&\leq d(g, h) + \tfrac{\epsilon}{3} + d(g, h) \\
&< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

□

Lema 1.33. *Si G es compacto y $f \in \mathcal{C}(G)$, para toda $p \in \overline{\mathcal{D}_f} \cup \overline{\mathcal{I}_f}$,*

$$\min_{x\in G} f(x) \leq \min_{x\in G} p(x) \leq \max_{x\in G} p(x) \leq \max_{x\in G} f(x)$$

Entonces $\max_{x\in G} |p(x)| \leq \max_{x\in G} |f(x)|$.

Demostración. Sea $p \in \overline{\mathcal{D}_f}$ y supóngase $p(x) = \min_{y \in G} p(y) < \min_{y \in G} f(y)$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $p(x)+\epsilon < f(x)$. Si $h \in \mathcal{D}_f$ es tal que $d(h,p) < \epsilon$, entonces $h(x)-p(x) < \epsilon$, y por lo tanto, $h(x) < f(x)$. Esto es una contradicción a la Observación 1.26. La demostración para elementos de $\overline{\mathcal{I}_f}$ es idéntica. □

Definición 1.34. *Un espacio métrico X se dice totalmente acotado si para toda $\epsilon > 0$ existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que $X \subset B_\epsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\epsilon(x_n)$. Al conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lo llamamos una $\epsilon - red$.*

Lema 1.35. *Si G es compacto y $f \in \mathcal{C}(G)$, $\overline{\mathcal{D}_f}$ y $\overline{\mathcal{I}_f}$ son totalmente acotados.*

Demostración. Por el Lema 1.32 $\overline{\mathcal{D}_f}$ es una familia uniformemente continua, entonces para $\epsilon > 0$ existe $V \in \Sigma$ tal que si $x \cdot y^{-1} \in V$, $|g(x) - g(y)| < \epsilon/4$, para toda $g \in \overline{\mathcal{D}_f}$.

Como G es compacto existe $A \subset G$ finito tal que $V \cdot A = G$. Sea $S \subset \mathbb{R}$ una $\epsilon/4 - red$ finita del intervalo $[\min(f), \max(f)]$. Llamemos $Fun(A, S)$ al conjunto de funciones de A en S. Para cada $\varphi \in Fun(A, S)$ elijamos $g_\varphi \in \overline{\mathcal{D}_f}$ tal que para toda $a \in A$, $|g_\varphi(a) - \varphi(a)| < \epsilon/4$. Si no existe tal función elijamos $g_\varphi = cte_s$ para alguna $s \in S$.

Se afirma que $\{g_\varphi \mid \varphi \in Fun(A, S)\}$ es una $\epsilon - red$ para $\overline{\mathcal{D}_f}$. Sea $h \in \overline{\mathcal{D}_f}$. Para cada $a \in A$ existe $s_a \in S$ tal que $|h(a) - s_a| < \epsilon/4$. Sea $\psi_h \in Fun(A, S)$ tal que $\psi_h(a) = s_a$. Por construcción $g_{\psi_h} \in \overline{\mathcal{D}_f}$, entonces para toda $a \in A$,

$$\begin{aligned} |h(a) - g_{\psi_h}(a)| &\leq |h(a) - \psi_h(a)| + |\psi_h(a) - g_{\psi_h}(a)| \\ &\leq \epsilon/4 + \epsilon/4 \end{aligned}$$

Si $x \in G$ existe $a \in A$ tal que $x \in V \cdot a$, por lo tanto $x \cdot a^{-1} \in V$. Entonces $|g_{\psi_h}(x) - g_{\psi_h}(a)| < \epsilon/4$. Además $h \in \overline{\mathcal{D}_f}$, por lo tanto se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned} |h(x) - g_{\psi_h}(x)| &\leq |h(x) - h(a)| + |h(a) - g_{\psi_h}(a)| + |g_{\psi_h}(a) - g_{\psi_h}(x)| \\ &< \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 \end{aligned}$$

Por lo tanto para toda $x \in G$, $|h(x) - g_{\psi_h}(x)| < \epsilon$. Entonces

$$d(h, g_{\psi_h}) = \max\big\{|h(x) - g_{\psi_h}(x)|\big| x \in G\big\} < \epsilon$$

□

Proposición 1.36. *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo.*

Demostración. Si X es métrico y compacto es completo. Además todo compacto es totalmente acotado.

En el otro sentido hay que decir más. Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión (infinita) en X. Tomemos una cubierta finita de bolas de radio $\frac{1}{2}$. En alguna de esas bolas debe estar contenido A_1, un subconjunto infinito de la sucesión. Sea x_{i_1} algún elemento de A_1. Ahora tómese una cubierta finita de radio $\frac{1}{4}$, en alguna bola debe estar contenido un subconjunto infinito, A_2, de $A1 \setminus \{x_{i_1}\}$. Elijamos, como x_{i_2}, un elemento de A_2

tal que $i_2 > i_1$. Supóngamos que ya hemos elegido de esta manera a $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$. Considérese una cubierta finita de radio $\frac{1}{2(n+1)}$, en alguna de las bolas debe haber una infinidad de elementos de $A_n \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$. En esa bola escojamos a $x_{i_{n+1}}$ tal que $i_{n+1} > i_n$. Hemos construido $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, una subsucesión de Cauchy de la sucesión dada. Como el espacio es completo la subsucesión converge. Entonces X es secuencialmente compacto.

Como X es 1 numerable y totalmente acotado, es separable. Por lo tanto X es 2 numerable (Lindelöf). Para demostrar que es compacto basta verificar que toda cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita. Se procederá por contradicción. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cubierta abierta de X tal que para toda n,

$$X \neq U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

Sea a_n un elemento de

$$X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$$

La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión, $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, que converge a algún punto x en U_i, para alguna $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j > k$, $a_{n_j} \in U_i$. Entonces para alguna $n_j > i$, $a_{n_j} \in U_i$. Esto es una contradicción, ya que

$$a_{n_j} \in X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{n_j})$$

$\square$

Teorema 1.37. *Si G es compacto, para toda $f \in \mathcal{C}(G)$, $\overline{\mathcal{I}_f}$ y $\overline{\mathcal{D}_f}$ son compactos.*

Demostración. Si G es compacto, el espacio métrico $\mathcal{C}(G)$ es completo.[6] Entonces $\overline{\mathcal{I}_f}$ y $\overline{\mathcal{D}_f}$ son completos y totalmente acotados (ver Lema 1.35). Por la Proposición 1.36, $\overline{\mathcal{I}_f}$ y $\overline{\mathcal{D}_f}$ son compactos. $\square$

Proposición 1.38. *Si G es compacto y $f \in \mathcal{C}(G)$ no es constante, existen $A, B \subset G$ finitos tales que* $\max f_B < \max f$ *y* $\max_A f < \max f$.

Demostración. Sea $x \in G$ tal que $f(x) < \max f$. Entonces existen $r \in \mathbb{R}$ y U, una vecindad abierta de x, tales que $f(u) < r < \max f$, para toda $u \in U$. Como G es compacto, existe $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset G$ tal que $G = U \cdot A$. Por lo tanto todo $y \in G$ es de la forma $u \cdot a_i$ con u en U y a_i en A. Así para cada $y \in G$ existe a_i en A tal que

$$f(y \cdot {a_i}^{-1}) = f(u) < r$$

Entonces, para toda $y \in G$,

$$\begin{array}{rcl} f_{A^{-1}}(y) & = & \frac{1}{k}\big(f_{a_1^{-1}}(y) + \cdots + f_{a_k^{-1}}(y)\big) \\ & = & \frac{1}{k}\big(f(y \cdot {a_1}^{-1}) + \cdots + f(y \cdot {a_k}^{-1})\big) \\ & < & \frac{1}{k}(k \cdot \max f) \end{array}$$

Como G es compacto, $\max f_{A^{-1}} < \max f$. La demostración para la versión izquierda de la proposición es idéntica. $\square$

[6]James Dugundji, *Topology*, Boston, Allyn and Bacon, 1966, p. 296.

Proposición 1.39. *Si G es compacto,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \xrightarrow{M} & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \max f \end{array}$$

es continua.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $f \in \mathcal{C}(G)$. Se afirma que si $h \in \mathcal{C}(G)$ es tal que $d(f,h) < \epsilon$, entonces $|\max f - \max h| < \epsilon$. Supóngase lo contrario, y sin pérdida de generalidad, supóngase $\max f > \max h$. Como G es compacto $\max f = f(a)$ y $\max h = h(b)$, para algunos $a, b \in G$. Entonces

$$f(a) > g(b) + \epsilon \geq g(a) + \epsilon$$

Por lo tanto $|f(a) - g(a)| > \epsilon$. Lo cual es una contradicción. □

En el Teorema 1.37 se demostró que $\overline{\mathcal{D}_f}$ y $\overline{\mathcal{I}_f}$ son compactos. Como $\mathcal{C}(G) \xrightarrow{M} \mathbb{R}$ es continua, existen $p_f \in \overline{\mathcal{D}_f}$ y $q_f \in \overline{\mathcal{I}_f}$ tales que

$$\min_{h \in \overline{\mathcal{D}_f}} M(h) = M(p_f)$$

y

$$\min_{k \in \overline{\mathcal{I}_f}} M(k) = M(q_f)$$

Proposición 1.40. *Si G es compacto y $f \in \mathcal{C}(G)$,*
a) p_f y q_f son constantes.
b) $p_f = q_f$.
c) $\overline{\mathcal{I}_f}$ y $\overline{\mathcal{D}_f}$ sólo contienen una función constante.

Demostración. a) Para todo $A \subset G$ finito, si $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en $\mathcal{D}_f$ que converge a p_f, $\{g_{\lambda A}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red que converge a $(p_f)_A$ (ver la Proposición 1.30). Por lo tanto $(p_f)_A \in \overline{\mathcal{D}_f}$. Si p_f no fuera constante, por la Proposición 1.38, existiría $g \in \overline{\mathcal{D}_f}$ tal que $M(g) < M(p_f)$. Análogamente se demuestra que q_f es constante.
b) Sea $\epsilon > 0$, como $p_f \in \overline{\mathcal{D}_f}$ y $q_f \in \overline{\mathcal{I}_f}$, existen $A, B \subset G$ finitos tales que

$$d(p_f, f_A) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } d(q_f, {}_Bf) < \frac{\epsilon}{2}$$

Por a) p_f y q_f son constantes, entonces para todo $C \subset G$ finito,

$$(p_f)_C = p_f \text{ y } {}_C(q_f) = q_f$$

Por la Proposición 1.30 y el Lema 1.31,

$$d\left(({}_Bf)_A, p_f\right) = d\left({}_B(f_A), p_f\right) = d\left({}_B(f_A), {}_B(p_f)\right) \leq d\left(f_A, p_f\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$d\left(({}_Bf)_A, q_f\right) = d\left(({}_Bf)_A, (q_f)_A\right) \leq d\left({}_Bf, q_f\right)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto para toda $\epsilon > 0$,

$$\begin{array}{rcl} d(p_f, q_f) & \leq & d\left(({}_B f)_A, q_f\right) + d\left(({}_B f)_A, p_f\right) \\ & < & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{array}$$

c) Sea $g \in \overline{\mathcal{D}_f}$ constante. Existen $A, B \subset G$ finitos tales que

$$d(f_A, g) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } d({}_B f, q_f) < \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} d(q_f, g) & \leq & d(q_f, {}_B(f_A)) + d(g, {}_B(f_A)) \\ & \leq & d(q_f, {}_B f) + d(g, f_A) \\ & < & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{array}$$

Entonces $q_f = p_f = g$. Análogamente se demuestra que la única función constante que contiene $\overline{\mathcal{I}_f}$ es q_f. □

Lema 1.41. *Si G es compacto, $f, g \in \mathcal{C}(G)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen:*
a) $p_{\alpha\cdot f} = \alpha \cdot p_f$.
b) Para todo $h \in \overline{\mathcal{D}_f}, p_h = p_f$.
c) $p_{f+g} = p_f + p_g$.
d) $\text{mín}\{f\} \leq p_f \leq \text{máx}\{f\}$.

Demostración. a) Si $\alpha = 0$, $\alpha \cdot f$ es constante. Como $\mathcal{C}(G)$ es Hausdorff,

$$\overline{\mathcal{D}_{\alpha\cdot f}} = \overline{\{\alpha \cdot f\}} = \{\alpha \cdot f\}$$

Entonces

$$p_{\alpha\cdot f} = \alpha \cdot f = 0 = \alpha \cdot p_f$$

Si $\alpha \neq 0$, la función

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \longrightarrow & \mathcal{C}(G) \\ g & \longmapsto & \alpha \cdot g \end{array}$$

es un homeomorfismo. Para todo $A \subset G$ finito, $\alpha \cdot f_A = (\alpha \cdot f)_A$. Por ello

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{\alpha\cdot f} & = & \{(\alpha \cdot f)_A \mid A \subset G \text{ finito}\} \\ & = & \{\alpha \cdot f_A \mid A \subset G \text{ finito}\} \\ & = & \alpha \cdot \mathcal{D}_f \end{array}$$

Por lo tanto

$$\overline{\mathcal{D}_{\alpha\cdot f}} = \overline{\alpha \cdot \mathcal{D}_f} = \alpha \cdot \overline{\mathcal{D}_f}$$

Como $\alpha \neq 0$ y $\overline{\mathcal{D}_f}$ contiene una única función constante p_f, la única función constante contenida en $\alpha \cdot \overline{\mathcal{D}_f}$ es $\alpha \cdot p_f$. Por lo tanto $p_{\alpha\cdot f} = \alpha \cdot p_f$.

b) Sea $h \in \overline{\mathcal{D}_f}$. En la prueba del inciso a) de la Proposición 1.40 se mostró que, para todo $A \subset G$ finito, $h_A \in \overline{\mathcal{D}_f}$. Entonces $\overline{\mathcal{D}_h} \subset \overline{\mathcal{D}_f}$. La función p_h es constante y pertenece a $\overline{\mathcal{D}_f}$, por lo tanto es igual a p_f (ver la Proposición 1.40).

c) Sean $f, g \in \mathcal{C}(G)$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $A \subset G$ finito tal que $d(p_g, g_A) < \frac{\epsilon}{2}$. Por b), $p_{f_A} = p_f$. Entonces existe $B \subset G$ finito tal que $d((f_A)_B, p_f) < \frac{\epsilon}{2}$. Se tiene que

$$d((g_A)_B, p_g) \leq d(g_A, p_g) < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $C = B \cdot A$,

$$d(f_C, p_f) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(g_C, p_g) < \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d((f+g)_C, p_f + p_g) &= d(f_C + g_C, p_f + p_g) \\ &\leq d(f_C, p_f) + d(g_C, p_g) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Entonces $p_f + p_g \in \overline{\mathcal{D}_{f+g}}$. Como $p_f + p_g$ es constante, $p_f + p_g = p_{f+g}$.

d) Es una consecuencia directa del Lema 1.33. □

Lema 1.42. *Sea G compacto y $f \in \mathcal{C}(G)$. Sea $\mathcal{O}$ la función constante 0. Si $f \geq \mathcal{O}$ y $f \neq \mathcal{O}$, existe $h \in \overline{\mathcal{D}_f}$ tal que $h > \mathcal{O}$.*

Demostración. Si $f(g) > 0$ existe U, vecindad de g, tal que $f(U) > 0$. Como G es compacto existe $A \subset G$ finito tal que $U \cdot A = G$. Entonces para todo $x \in G$, $x = u \cdot a$, para algún $a \in A$ y algún $u \in U$. Entonces $f(x \cdot a^{-1}) = f(u) > 0$, y por lo tanto, $f_{A^{-1}}(x) > 0$. □

Definición 1.43. *Si G es compacto y $f \in \mathcal{C}(G)$, llamamos a $p_f(g) = p_f$ la integral (de von Neumann) de f y la denotamos $\int_G f$ ó $\int f(g)dg$.*

Teorema 1.44. *Sea G compacto, $f, h \in \mathcal{C}(G)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si llamamos ι a la aplicación $g \overset{\iota}{\longmapsto} g^{-1}$, se cumplen:*
1) $\int_G \alpha \cdot f = \alpha \int_G f$.
2) $\int_G f + h = \int_G f + \int_G h$.
3) Si $f(g) \geq 0$ para toda $g \in G$, entonces $\int_G f \geq 0$.
4) Si $f(g) \geq 0$ para toda $g \in G$, y existe $x \in G$ tal que $f(x) > 0$, entonces $\int_G f > 0$.
5) $\int_G \mathbb{1} = 1$.
6) Para toda $a \in G$, $\int_G f = \int_G f_a$.
7) Para toda $a \in G$, $\int_G f = \int_G {}_a f$.
8) $\int_G f = \int_G f \circ \iota$.
9) $|\int_G f| \leq \int_G |f|$.

Demostración. 1) y 2) son consecuencia del Lema 1.41.
3) Si $f \geq \mathcal{O}$, para todo $A \subset G$ finito, $f_A \geq \mathcal{O}$. Por lo tanto $h \geq \mathcal{O}$ para toda $h \in \overline{\mathcal{D}_f}$. Entonces $p_f = \int_G f \geq 0$.
4) Si $f(g) \geq 0$ para toda $g \in G$ y $f(x) > 0$ para alguna $x \in G$, por el Lema 1.42, existe $h \in \overline{\mathcal{D}_f}$ tal que $h > \mathcal{O}$. Por el Lema 1.41,

$$0 < \text{mín}\{h\} \leq p_h = p_f = \int_G f$$

5) Si f es constante, $\overline{\mathcal{D}_f} = \overline{\{f\}} = \{f\}$. Por lo tanto $p_f = \int_G f = f(a)$.
6) y 7) se obtienen de la identidad $q_{_af} = q_f = p_f = p_{f_a}$.
8) Si $a, x \in G$,

$$(f \circ \iota)_a(x) = f(a^{-1} \cdot x^{-1}) = {}_{a^{-1}}f(x^{-1})$$

Por lo tanto, para todo $A \subset G$ finito, $(f \circ \iota)_A(x) = {}_{A^{-1}}f(x^{-1})$. Entonces

$$M\big((f \circ \iota)_A\big) = M({}_{A^{-1}}f)$$

$p_{f\circ\iota}$ es el mínimo del conjunto

$$\{M\big((f \circ \iota)_A\big) \mid A \subset G \text{ finito}\} = \{M({}_{A^{-1}}f) \mid A \subset G \text{ finito}\}$$

Es decir, $p_f = q_f = p_{f\circ\iota}$.
9) De 2) y 3) se deduce que si $f(x) \leq h(x)$ para toda $x \in G$, $\int_G f \leq \int_G h$. $\square$

Teorema 1.45. *Si $\mathcal{C}(G) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ es un operador que cumple 1), 2), 3), 5) y 6) del teorema anterior, entonces $\phi = \int_G$.*

Demostración. Por 2) y 3), si $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in G$, $\phi(f) \geq \phi(g)$. Por esto y por 1) se deduce que $\phi(|f|) \geq |\phi(f)|$. Por 1) y 5), $\phi(cte_r) = r$. Es fácil notar, por 1), 2) y 6), que $\phi(f_A) = \phi(f)$, para todo $A \subset G$ finito. Para cada $\epsilon > 0$ existe $A \subset G$ tal que $d(f_A, p_f) < \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} |\phi(f) - p_f| &= |\phi(f_A) - \phi(p_f)| \\ &= |\phi(f_A - p_f)| \\ &\leq \phi(|f_A - p_f|) \\ &\leq \phi(cte_\epsilon) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.46. *Si G es compacto, la función*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_G f \end{array}$$

es continua.

Demostración. Si $d(f, h) < \epsilon$, por el Teorema 1.44,

$$\left| \int_G f - \int_G h \right| = \left| \int_G f - h \right| \leq \int_G |f - h| < \epsilon$$

$\square$

Definición 1.47. *Llamaremos $\mathcal{C}^*(G)$ al conjunto de funciones continuas de G en $\mathbb{C}$.*

Si G es compacto se puede construir una integral compleja a partir de la integral de von Neumann real del siguiente modo. Si $f \in \mathcal{C}^*(G)$, $f = Re(f) + i \cdot Im(f)$. Definamos $\int f = \int_G Re(f) + i \int_G Im(f)$.

Teorema 1.48. *Si G es un grupo compacto, para todas $f, g \in \mathcal{C}^*(G)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumplen:*
1) $\int \alpha \cdot f = \alpha \int f$.
2) $\int f + h = \int f + \int h$.
3) Si $f \in \mathcal{C}(G)$ y $f(g) \geq 0$ para toda $g \in G$, $\int f \in \mathbb{R}$ y $\int f \geq 0$.
4) $\int \mathbb{1} = 1$.
5) Para toda $a \in G$, $\int f = \int f_a$.
6) Para toda $a \in G$, $\int f = \int {}_a f$.
7) $\int f = \int f \circ \iota$.
8) $\overline{\int f} = \int \overline{f}$.
9) $Re\left(\int f\right) = \int Re(f)$.
10) $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

Demostración. 1)

$$\begin{aligned}
\int (a+ib)f &= \int (a+ib)(Re(f) + iIm(f)) \\
&= \int aRe(f) - bIm(f) + i(bRe(f) + aIm(f)) \\
&= \int_G aRe(f) - \int_G bIm(f) + i(\int_G bRe(f) + \int_G aIm(f)) \\
&= a\int_G Re(f) - b\int_G Im(f) + i(b\int_G Re(f) + a\int_G Im(f)) \\
&= (a+ib)(\int_G Re(f) + i\int_G Im(f)
\end{aligned}$$

2), 3) y 4) son inmediatos.
5) Por el Teorema 1.44, para toda $a \in G$,

$$\begin{aligned}
\int f_a &= \int_G Re(f_a) + i\int_G Im(f_a) \\
&= \int_G Re(f)_a + i\int_G Im(f)_a \\
&= \int_G Re(f) + i\int_G Im(f) \\
&= \int f
\end{aligned}$$

6) Es análogo a 5).
7)

$$\begin{aligned}
\int f \circ \iota &= \int_G Re(f \circ \iota) + i\int_G Im(f \circ \iota) \\
&= \int_G Re(f) \circ \iota + i\int_G Im(f) \circ \iota \\
&= \int_G Re(f) + i\int_G Im(f) \\
&= \int f
\end{aligned}$$

8) y 9) son inmediatos.
10) Si $\int f = 0$, por 3), se tendría la afirmación. Si $\int f \neq 0$, entonces $\int f = re^{i\theta}$. Por

el Teorema 1.44,

$$\begin{array}{rcl} |\int f| & = & r \\ & = & \int e^{-i\theta} f \\ & = & Re(\int e^{-i\theta} f) \\ & = & |Re(\int e^{-i\theta} f)| \\ & = & |\int Re(e^{-i\theta} f)| \\ & = & |\int_G Re(e^{-i\theta} f)| \\ & \leq & \int_G |Re(e^{-i\theta} f)| \\ & \leq & \int_G |e^{-i\theta} f| \\ & = & \int_G |f| \\ & = & \int |f| \end{array}$$

□

Teorema 1.49. *Si $\mathcal{C}^*(G) \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$ cumple las condiciones 1) a 5) del teorema anterior, $\int = \phi$.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{C}(G)$,

$$f = \max\{f, cte_0\} - |\min\{f, cte_0\}|$$

Por lo tanto f se puede expresar como la diferencia de dos funciones reales, continuas y no negativas. Entonces $\phi(f)$ es la diferencia de dos números reales no negativos. Por tanto ϕ asigna valores reales a las funciones de $\mathcal{C}(G)$. Entonces la restricción de ϕ a $\mathcal{C}(G)$ es un operador que cumple las hipótesis del Teorema 1.45, es decir, es la integral de von Neumann. Por lo tanto, para toda $f \in \mathcal{C}^*(G)$,

$$\begin{array}{rcl} \phi(f) & = & \phi(Re(f) + iIm(f)) \\ & = & \phi(Re(f)) + i\phi(Im(f)) \\ & = & \int_G Re(f) + i\int_G Im(f) \\ & = & \int f \end{array}$$

□

Una integral invariante nos permite introducir un producto escalar invariante en $\mathcal{C}^*(G)$.

Definición 1.50. *Si G es compacto y $f, h \in \mathcal{C}^*(G)$, definimos*

$$< f, h > := \int f\overline{h}$$

Proposición 1.51. *El producto establecido arriba es un producto hermitiano y, para toda $g \in G$ y $f, h \in \mathcal{C}^*(G)$,*

$$< f_g, h_g > = < f, h > = < {}_g f, {}_g h >$$

Demostración. Se sigue de las propiedades de la integral compleja. □

Capítulo 2

El grupo dual separa puntos.

En el tercer capítulo se demostrará que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\omega_G} & Hom\big(Hom(G,\mathbb{S}^1),\mathbb{S}^1\big) \\ g & \longmapsto & \Big(\varphi \xmapsto{\omega_G(g)} \varphi(g)\Big) \end{array}$$

es un isomorfismo topológico, para todo grupo G abeliano, localmente compacto y Hausdorff (ALCH). Para probar que ω_G es inyectiva hay que mostrar que para todo $g \neq e$ existe $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1$, un homomorfismo continuo, tal que $\varphi(g) \neq 1$.

Siguiendo el libro *Topological Groups and Related Structures* de Alexander Arhagel'skii y Mikhail Tkachenko,[1] en la primera sección se dará una prueba para grupos abelainos compactos y Hausdorff (ACH) de esta afirmación. En la segunda sección se extenderá el resultado a grupos ALCH.

Para demostrar que el grupo dual G^*, de un grupo ACH G, separa los puntos de éste, se probará, usando la integral de von Neumann, que para toda $g \neq e$ existe una función continua no constante f tal que $f(g) \neq 0$ y tal que tiene arbitrariamente cerca a una combinación convexa de homomorfismos continuos a $\mathbb{S}^1$ multiplicados por una constante. De este hecho se desprende que debe existir algún homomorfismo continuo a $\mathbb{S}^1$ que no se anule en g.

Para demostrar que el grupo dual de un grupo ALCH separa sus puntos, se probará que este hecho es cierto para grupos abelianos discretos (AD) y para grupos ALCH que son generados por un subconjunto compacto. Luego se mostrará que todo grupo ALCH tiene un subgrupo abierto y generado por un compacto.

2.1. Ejemplos

El producto finito de grupos ALCH es ALCH. Los subgrupos cerrados y los subgrupos abiertos de un grupo ALCH son ALCH. Todo grupo ACH, todo grupo AD, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son ejemplos de grupos ALCH.

A continuación se construirá una familia de grupos ALCH, los números p-ádicos. Sea un número primo p fijo.

[1] Alexander Arhangel'skii y Mikhail Tkachenko, *op. cit.*

Definición 2.1. *Dado x in $\mathbb{Q}$, definimos $o(x) = \alpha$, donde $x = p^\alpha \frac{a}{b}$ y $p \not| ab$.*

Definición 2.2. *Si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, definimos $|x|_p = \frac{1}{p^{o(x)}}$. Si $x = 0$, definimos $|x|_p = 0$. La función $|\cdot|_p$ será llamada la norma p.*

Proposición 2.3. *Si $x, y \in \mathbb{Q}$, $|x \pm y|_p \leq$ máx$\{|x|_p, |y|_p\}$ y $|xy|_p = |x|_p |y|_p$.*

Demostración. La primera desigualdad es clara si alguno de los dos racionales es 0 o si $x \pm y = 0$. Supóngase que no es el caso y que $0 < |y|_p \leq |x|_p$. Sean $x = p^\alpha \frac{a}{b}$ y $y = p^\beta \frac{c}{d}$, donde p no divide a ninguno de los enteros a, b, c, d. Obsérvese que $\alpha \leq \beta$. Entonces como $p \not| bd$,

$$
\begin{aligned}
o(x \pm y) &= o\big(p^\alpha (\tfrac{a}{b} \pm p^{\beta-\alpha} \tfrac{c}{d})\big) \\
&= o\left(p^\alpha \left(\tfrac{ad \pm p^{\beta-\alpha} cb}{bd}\right)\right) \\
&\geq \alpha
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $|x \pm y|_p \leq |x|_p$. Como p no divide a ab ni a cd,

$$
|xy|_p = \left| p^{\alpha+\beta} \left(\frac{ab}{cd}\right) \right|_p = \frac{1}{p^{\alpha+\beta}} = |x|_p \cdot |y|_p
$$

□

Definición 2.4. *Definamos $\mathbb{Q}_p$, el conjunto de números p-ádicos, como la completación de $\mathbb{Q}$ con la métrica inducida por la norma p.*[2] *Llamemos también $|\cdot|_p$ a la norma definida en $\mathbb{Q}_p$.*

Proposición 2.5. *Si $x, y \in \mathbb{Q}_p$, $|x \pm y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ y $|xy|_= |x|_p |y|_p$.*

Demostración. Existen sucesiones de racionales, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, que convergen, con la norma p, a x y y respectivamente. Supóngase $|x|_p > |y|_p$. Por la Proposición 2.3,

$$
\begin{aligned}
|x \pm y|_p &= \lim_{i \to \infty} |a_i \pm b_i|_p \\
&\leq \lim_{i \to \infty} \max\{|a_i|_p, |b_i|_p\} \\
&= \lim_{i \to \infty} |a_i|_p \\
&= \max\{|x|_p, |y|_p\}
\end{aligned}
$$

Si $|x|_p = |y|_p$, como $\big(\max\{|a_i|_p, |b_i|_p\}\big)_{i \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(|a_i|_p)_{i \in \mathbb{N}}$ o de $(|b_i|_p)_{i \in \mathbb{N}}$,

$$
|x \pm y|_p \leq \lim_{i \to \infty} \max\{|a_i|_p, |b_i|_p\} = |x|_p = |y|_p
$$

Y se tiene que

$$
|xy|_p = \lim_{i \to \infty} |a_i b_i|_p = \lim_{i \to \infty} |a_i|_p |b_i|_p = |x|_p |y|_p
$$

□

[2] James Dugundji, *op. cit.*, p. 304.

Proposición 2.6. *Las operaciones de* $\mathbb{Q}_p$ *son continuas.*

Demostración. De la Proposición 2.5 es inmediato concluir que la suma y la multiplicación son continuas. Como $|1|_p = 1$, para toda $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$,

$$\left|x^{-1}\right|_p = \frac{1}{|x|_p}$$

Utilizando este hecho, es sencillo demostrar que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua. $\square$

Definición 2.7. *Al conjunto* $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$ *lo denotaremos* $\mathbb{Z}_p$ *y a sus elementos los llamaremos enteros p-ádicos.*

Proposición 2.8. *Para toda* $x \in \mathbb{Z}_p$ *y para toda* $i \in \mathbb{N}$ *existe* $z \in \{0, 1, \ldots, p^i - 1\}$ *tal que* $|x - z|_p \leq \frac{1}{p^i}$.

Demostración. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $x = \frac{a}{b}$. Como x tiene norma menor o igual a 1, p no divide a b. Por lo tanto existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales $mb + np^i = 1$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} |am - \frac{a}{b}|_p & = & |\frac{a}{b}|_p |bm - 1|_p \\ & \leq & |bm - 1|_p \\ & = & |np^i|_p \\ & \leq & \frac{1}{p^i} \end{array}$$

A am le podemos sumar y, un múltiplo de p^i, para obtener un entero entre 0 y $p^i - 1$. Obsérvese que

$$\left|am + y - \frac{a}{b}\right|_p \leq \text{máx}\left\{|y|_p, \left|am - \frac{a}{b}\right|_p\right\} \leq \frac{1}{p^i}$$

$\square$

Lema 2.9. *Para todo* $x \in \mathbb{Z}_p$ *existe una sucesión de enteros* $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ *que converge (con la norma p) a x y tal que, para toda* $i \in \mathbb{N}^+$,
a) $0 \leq a_i < p^i$
b) $a_i \cong a_{i+1} \mod p^i$

Demostración. Demostraremos que para cada sucesión de Cauchy de enteros, $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim_{i \to \infty} |b_i|_p \leq 1$ existe una sucesión de enteros equivalente que cumple a) y b). Como 1 es un punto aislado en el conjunto $\{|x|_p \mid x \in \mathbb{Q}_p\}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|b_i|_p \leq 1$, para toda i.

Sea $N_j \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n \geq N_j$, $|b_n - b_m|_p \leq \frac{1}{p^j}$. Si $j > i$ podemos elegir $N_j > N_i$. Obsérvese que para todas $n, m \geq N_1$,

$$\begin{array}{rcl} |b_n|_p & \leq & \text{máx}\{|b_n - b_m|_p, |b_m|\} \\ & \leq & 1 \end{array}$$

Para cada j existe $a_j \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq a_j < p^j$ y $|b_{N_j} - a_j|_p \leq \frac{1}{p^j}$ (ver la Proposición 2.8). Sea afirma que la sucesión buscada es $(a_j)_{j \in \mathbb{N}^+}$. Para toda $i \in \mathbb{N}^+$,

$$\begin{array}{rcl} |a_{i+1} - a_i|_p & \leq & \text{máx}\{|a_{i+1} - b_{N_{i+1}}|_p, |b_{N_{i+1}} - b_{N_i}|_p, |b_{N_i} - a_i|_p\} \\ & \leq & \frac{1}{p^i} \end{array}$$

Por lo tanto $a_{i+1} - a_i = p^n l$, con $n \in \mathbb{N}^+$ y $l \in \mathbb{Z}$. Es claro que $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$ es equivalente a $(b_{N_j})_{j\in\mathbb{N}^+}$. Por ser una subsucesión de $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(b_{N_j})_{j\in\mathbb{N}^+}$ y $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son equivalentes. Por lo tanto $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$ y $(b_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$ convergen al mismo punto. $\square$

Proposición 2.10. *Para cada $x \in \mathbb{Z}_p$ existe $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, una sucesión de enteros, con $0 \leq b_i \leq p-1$, tal que*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i p^i = x$$

Demostración. Sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión, como en el Lema 2.9, que converge a x. Definamos $b_0 = a_1$. Como $a_n < p^n$ y $a_n \cong a_{n+1} \,m\acute{o}d(p^n)$, $a_{n+1} \geq p^n > a_n$. Entonces existe $b_n \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1} = a_n + b_n p^n$. Como a_{n+1} es menor que p^{n+1}, $b_n \leq p-1$. Obsérvese que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_i p^i = x$, pues $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i$. $\square$

Teorema 2.11. *La función*

$$\begin{array}{rcl} \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\ldots,p-1\}_n & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{Z}_p \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n p^n \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Se afirma que para cada

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\ldots,p-1\}_n$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n p^n$ es igual a algún $x \in \mathbb{Z}_p$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \left|\sum_{i=0}^{n} a_i p^i - \sum_{j=0}^{n+m} a_j p^j\right|_p & = & |a_{n+1}p^{n+1} + \cdots + a_{n+m}p^{n+m}|_p \\ & \leq & \text{máx}\{|a_{n+1}p^{n+1}|_p, \ldots, |a_{n+m}p^{n+m}|_p\} \\ & \leq & \frac{1}{p^{n+1}} \end{array}$$

Por lo tanto la serie converge a algún $x \in \mathbb{Q}_p$. Como cada suma parcial $\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$ tiene norma menor a 1, $|x|_p \leq 1$. Demostramos que la función Γ está bien definida.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\ldots,p-1\}_n$ y m es el primer natural tal que $a_m \neq b_m$, para toda $n > m$,

$$\begin{array}{rcl} \left|\sum_{i=0}^{n} a_i p^i - \sum_{j=0}^{n} b_j p^j\right|_p & \leq & \text{máx}\{|(a_m - b_m)p^m|_p, \ldots, |(a_n - b_n)p^n|_p\} \\ & \leq & \frac{1}{p^m} \end{array}$$

Por lo tanto, si $\frac{1}{p^n} < \epsilon$, para toda

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{a_0\} \times \cdots \{a_{n-1}\} \times \prod_{k\geq n}\{0,\ldots,p-1\}_k$$

$|\Gamma((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) - \Gamma((a_n)_{n\in\mathbb{N}})|_p \leq \frac{1}{p^m}$. Entonces Γ es continua.

Debido a la Proposición 2.10 Γ es suprayectiva. Supóngase que

$$\Gamma((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Gamma((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea m el primer natural tal que $a_m \neq b_m$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $N > m$ tal que para toda $s > N$,

$$\left|\sum_{i=0}^{s} a_i - b_i\right| = \left|\sum_{i=m}^{s}(a_i - b_i)p^i\right|_p < \epsilon$$

Como $p \not| (a_i - b_i)$, para toda i,

$$\left|\sum_{i=m}^{s}(a_i - b_i)p^i\right|_p = \frac{1}{p^m}$$

Esto es una contradicción. Demostramos que Γ es una biyección continua. Es fácil demostrar que Γ^{-1} es continua. $\square$

Proposición 2.12. *$\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto.*

Demostración. El conjunto $\mathbb{Z}_p$ es un subgrupo con interior no vacío de $\mathbb{Q}_p$. Como un subgrupo con interior no vacío es abierto, $e \in \mathbb{Q}_p$ tiene una vecindad compacta. $\square$

Corolario 2.13. *$\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$, $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p < 1\}$, $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p = 1\}$, $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ y $Z_p \setminus \{0\}$ son grupos ALCH.*

Proposición 2.14. *$\mathbb{Z}_p$ es topológicamente isomorfo a*

$$E = \left\{(x_i)_{i\geq 1} \in \prod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \mid \tau_{i+1}(x_{i+1}) = x_i\right\}$$

donde $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\tau_{n+1}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es la función inducida por la función identidad de $\mathbb{Z}$.

Demostración. Por el Lema 2.9, para cada $x \in \mathbb{Z}_p$ existe una sucesión de enteros $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ que converge (con la norma p) a x y tal que, para toda $i \in \mathbb{N}^+$, $0 \leq a_i < p^i$ y $a_i \cong a_{i+1} mod(p^i)$. Se afirma que esta sucesión es única. Supóngase $(a'_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ con las mismas propiedades. En la Proposición 2.10 se demostró que si definimos $b_0 = a_1$ y b_n como aquel natural tal que $a_{n+1} = a_n + b_n p^n$, entonces $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n p^n$. En el Teorema 2.11 se probó que existe una única sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $0 \leq b_n < p$, tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n p^n = x$. Entonces si llamamos $b'_0 = a'_1$ y b'_n como aquel tal que $a'_{n+1} = a'_n + b'_n p^n$, se tiene que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+} = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$. Definamos la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\Psi} & E \\ x & \mapsto & (a_i + p^i\mathbb{Z})_{i\in\mathbb{N}^+} \end{array}$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ es como arriba. Sean y y x dos enteros p-ádicos. Sean $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, sucesiones como arriba que convergen a y y a x respectivamente. Definamos

$c_n = a_n + b_n - \Delta_n p^n$, donde $\Delta_n = 0$ si $a_n + b_n < p^n$ y $\Delta_n = 1$ si no. Es claro que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesion como arriba. Como la sucesión $(\Delta_n p^n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge a 0, se tiene que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge a $x+y$. Entonces

$$\begin{aligned}\Psi(x+y) &= (c_n + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}^+}\\ &= (a_n + b_n + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}^+}\end{aligned}$$

Por lo tanto Ψ es un homomorfismo.

Sea $(a_n + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}^+} \in E$ y supóngase, sin pérdida de generalidad, que $0 \leq a_n < p^n$ para toda n. Es claro que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión como las de arriba. Si definimos $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a partir de la sucesión anterior como hemos hecho, se tiene que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge a $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n p^n$. Entonces $\Psi(x) = (a_n + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}^+}$.

Si $\Psi(x) = 0$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión como las anteriores que converge a x y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión construida a partir de ella, sabemos que para toda n, $b_n = 0$, y por lo tanto, $a_n = 0$. Hemos demostrado que Ψ es un isomorfismo.

Sean π_n las proyecciones canónicas del producto $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Demostraremos para toda $n \geq 1$ que $\pi_n \circ \Psi$ es continua alrededor de 0. Sea $y \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ tal que $|y| \leq p^{-m}$, para alguna $m > n$. Sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión como arriba que converge a y. Si definimos $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a partir de $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ como se hizo antes, $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n p^n$. Entonces

$$\begin{aligned}p^{-n} &= |y|\\ &= lím_{n\to\infty}\left|\sum_{i=0}^{i=n} b_i p^i\right|\end{aligned}$$

Como p^{-m} es un punto aislado en $\{|x| \mid x \in \mathbb{Q}_p\}$, existe $N > m$ tal que para toda $s > N$, $\left|\sum_{i=0}^{i=s} b_i p^i\right| = p^{-m}$. Entonces $b_l = 0$ para toda $l < m$ y por lo tanto $a_n = 0$. Hemos demostrado que $\pi_n \circ \Psi$ es continua para toda $n \geq 1$. Por lo tanto Ψ es un isomorfismo topológico. $\square$

Corolario 2.15. *$\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$ son topológicamente isomorfos si, y sólo si, p=q.*

Demostración. Identifiquemos $\mathbb{Z}_p$ con E_p, de la proposición anterior. Se afirma que si $E_p \xrightarrow{\varphi} G$ es un homomorfismo continuo y suprayectivo, con G un grupo finito y discreto, entonces p divide al orden de G. Como $ker(\varphi)$ es un subgrupo abierto de $\mathbb{Z}_p$, existe una vecindad de 0

$$H = E_p \cap \big(\{e_{i_1}\} \times \cdots \times \{e_{i_m}\} \times \prod_{i\neq i_1,\ldots,i_m} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\big) \subset ker(\varphi)$$

Entonces para toda $h \in H$ y para toda $j \leq i_m$, $\pi_j(h) = 0 + p^j\mathbb{Z}$. Por lo tanto, si

$$K = \{e_1\} \times \cdots \times \{e_{i_m}\} \times \prod_{i>i_m} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

se tiene que $H = E_p \cap K$. Sea $T = \prod_{i\in\mathbb{N}^+}\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Como

$$E_p\Big/E_p \cap K \cong E_p + K\Big/K \leqslant T/K \cong \mathbb{Z}/p^1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{i_m}\mathbb{Z}$$

p divide al orden de E_p/H. Además existe un homomorfismo $E_p/H \xrightarrow{\tilde{\varphi}} G$ tal que si $E_p \xrightarrow{\pi} E_p/H$ es la proyección canónica, $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Como $\tilde{\varphi}$ es suprayectiva, p divide al orden de G.

Si E_q y E_p fueran topológicamente isomorfos, q tendría que dividir a p^n para alguna $n \geq 1$, pues para alguna proyección de E_p, como subgrupo de T, en alguno de sus factores es distinta de cero. Entonces $p = q$. $\square$

Corolario 2.16. *$\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{Q}_q$ son topológicamente isomorfos si, y sólo si, p=q.*

Demostración. Supóngase que $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}_q$ es un isomorfismo topológico. Se tiene que $\varphi(\mathbb{Z}_p)$ es un subgrupo compacto de $\mathbb{Q}_q$. Como es acotado, $\varphi(\mathbb{Z}_p) \subset q^n \cdot \mathbb{Z}_q$, para alguna $n \in \mathbb{Z}$. Y como $q^n \cdot \mathbb{Z}_q$ es topológicamente isomorfo a E_q, existe un homomorfismo continuo y suprayectivo de $\mathbb{Z}_p$ a un grupo de orden q^m alguna $m \geq 1$, por lo tanto p=q. $\square$

Definición 2.17. *Un grupo G se dice de exponente finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $g \in G$, $g^n = e$.*

En el artículo "On reflexive group topologies on abelian groups of finite exponent",[3] Lydia Aussenhofer y Saak Gabriyelyan demostraron que si un grupo abeliano tiene exponente finito y es no numerable existe una manera de dotarlo con una topología de grupo ALCH no trivial. A continuación exponemos su resultado.

Lema 2.18. *Si G es un p-grupo no numerable, $|\{g \in G \mid g^p = e\}| = |G|$.*

Demostración. Sea $H_1 = \{g \in G \mid g^p = e\}$ y sea $\kappa = |H_1|$. Llamemos φ al homomorfismo $g \mapsto g^p$. Si $\varphi(h) = g$, $\varphi^{-1}(g) = h + H_1$. Por lo tanto para toda $g \in G$, $|\varphi^{-1}(g)| \leq \kappa$. Definamos recursivamente, $H_{n+1} = \varphi^{-1}(H_n)$. Entonces

$$|H_{n+1}| = \left| \bigsqcup_{g \in H_n} \varphi^{-1}(g) \right| \leq |H_n| \cdot \kappa$$

Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, $|H_n| \leq \underbrace{\kappa \cdot \cdots \cdot \kappa}_{n \text{ veces}} \leq \aleph_0 \cdot \kappa$. Si $\varphi(g) \in H_n$,

$$\underbrace{(\varphi \circ \cdots \circ \varphi)}_{n-1 \text{ veces}}(g) = g^{p^{n-1}} \in H_1$$

Entonces $H_n = \{g \in G \mid g^{p^n} = e\}$. Como G es un p-grupo, $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Podemos concluir que κ no es finito, y por ello, $|G| = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$. $\square$

Teorema 2.19. *Si G es un grupo abeliano de exponente finito y $\mathfrak{c} \leq |G|$, G admite una topología de grupo con la cual es ALCH y no discreto.*

---

[3] Lydia Aussenhofer y Saak Gabriyelyan, "On reflexive group topologies on abelian groups of finite exponent", *Archiv der Mathematik* vol. 99, Basilea, 2012, p. 583-588.

Demostración. Como es de torsión, G es la suma directa de sus componentes p primarias.[4] G tiene cardinalidad mayor o igual a $\mathfrak{c}$, entonces alguna de sus componentes p primarias G_p debe tener cardinalidad mayor o igual a $\mathfrak{c}$. Si $H = \{g \in G \mid g^p = e\}$, por el Lema 2.18, $|G_p| = |H|$. Entonces H contiene un subgrupo H_p isomorfo a $\bigoplus_\Gamma \mathbb{Z}_p$, donde Γ es un conjunto de índices de cardinalidad $\mathfrak{c}$.[5]

Todo grupo de exponente finito es isomorfo a una suma directa de cíclicos,[6] entonces $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$ es isomorfo a $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}_{n_\lambda}$, para algún conjunto de índices Λ. Todo elemento de $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$ es de orden p, por lo tanto $\mathbb{Z}_{n_\lambda} = \mathbb{Z}_p$, para toda $\lambda \in \Lambda$. Como $|\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p| = \mathfrak{c}$,

$$|\Lambda| = \left|\bigoplus_{\Lambda} \mathbb{Z}_p\right| = \mathfrak{c}$$

Entonces existe un isomorfismo entre H_p y $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$. Si a H_p le inducimos la topología mediante ese isomorfismo, H_p se vuelve un grupo topológico compacto y Hausdorff.

Demos a G la topología cuya subbase se obtiene de trasladar los abiertos de H_p. Con esa topología H_p es abierto en G y como la topología de subespacio y la original en H_p coinciden, H_p es compacto.

Para demostrar que las operaciones de G son continuas basta demostrar que la multiplicación por un elemento fijo de G es continua, que la operación es continua en (e, e) y que mandar al inverso es una función continua. Como H_p es un grupo topológico y un abierto de G, la operacion de G es continua en (e, e). Es inmediato demostrar que mandar al inverso y multiplicar por un elemento fijo son funciones continuas.

Ya que H_p es Hausdorff y un abierto de G, G es T_1. Como H_p tiene la topología de un producto infinito no puede ser discreto. Por lo tanto G con esta topología es un grupo ALCH no discreto. □

2.2. Los caracteres separan puntos en ACH

Definición 2.20. *Una función $\phi \in \mathcal{C}^*(G)$ se dice definida positiva si para todo $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ y para todo $\{g_1 \ldots, g_n\} \subset G$,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z_j} \phi(g_i \cdot {g_j}^{-1}) \geq 0$$

Proposición 2.21. *Si $f, h \in \mathcal{C}^*(G)$ son definidas positivas y $\lambda \in \mathbb{R}$ no es negativo, $f + h$ y $\lambda \cdot f$ son definidas positivas.*

Demostración. La demostración es inmediata. □

[4] Joseph Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, cuarta edición, Nueva York, Springer-Verlag, 1995, p. 311.

[5] Friederich Kasch, *Modules and Rings*, Londres, Academic Press, 1982, p. 189.

[6] Joseph Rotman, *op. cit.*, p. 327.

Proposición 2.22. *Si ϕ es definida positiva,*
a) $\phi(e) \geq 0$.
b) Para toda $g \in G$, $\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$.
c) Para toda $g \in G$, $|\phi(g)| \leq \phi(e)$.

Demostración. a) Basta elegir $n = 1, g_1 = e$ y $z_1 = 1$.

b) Sea $n = 2, g_1 = g, g_2 = e, z_1 = 1, z_2 = z$, entonces

$$\phi(e) + \phi(g)\overline{z} + \phi(g^{-1})z + \phi(e)|z|^2 \geq 0$$

Tomando primero $z = i$ y luego $z = 1$ concluimos que $i(\phi(g^{-1}) - \phi(g))$ y $\phi(g^{-1}) + \phi(g)$ pertenecen a $\mathbb{R}$. Sea $\phi(g^{-1}) = a + ib$ y $\phi(g) = c + id$. Entonces $b = -d$ y $a = c$, por lo tanto $\overline{\phi(g)} = \phi(g^{-1})$.

c) Supóngase $\phi(e) = 0$. Sea $z = -\phi(g)$. Se tiene, por la demostración de b), que $-2(|\phi(g)|^2) \geq 0$, entonces $\phi(g) = 0$ para toda $g \in G$. Ahora supóngase $\phi(e) > 0$. Sea $z = -\phi(g)\phi(e)^{-1}$, entonces, por la demostración de b),

$$\begin{array}{rcl}
\phi(e) - \phi(g)\overline{\phi(g)\phi(e)^{-1}} - \phi(g^{-1})\phi(g)\phi(e)^{-1} + \phi(e)\left|\phi(g)\phi(e)^{-1}\right|^2 & = & \\
\phi(e) - \phi(g)\overline{\phi(g)}\phi(e)^{-1} - \overline{\phi(g)}\phi(g)\phi(e)^{-1} + \left|\phi(g)\right|^2\left|\phi(e)^{-1}\right| & = & \\
\phi(e) - \left|\phi(g)\right|^2\phi(e)^{-1} - \left|\phi(g)\right|^2\phi(e)^{-1} + \left|\phi(g)\right|^2\left|\phi(e)^{-1}\right| & = & \\
\phi(e) - \left|\phi(g)\right|^2\phi(e)^{-1} & \geq & 0
\end{array}$$

Por lo tanto $\phi(e) \geq |\phi(g)|$, para toda $g \in G$. □

Definición 2.23. *Si* $f \in \mathcal{C}^*(G)$ *y* A *es un subconjunto finito de* G, *se definen* f_A *y* ${}_Af$ *en* $\mathcal{C}^*(G)$ *de manera análoga a como se hizo en el caso real (ver la Definición 1.24).*

Proposición 2.24. *Si* G *es compacto, para toda* $f \in \mathcal{C}(G)$, *la función*

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\phi_f} & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & \int({}_xf \cdot f)
\end{array}$$

es continua y definida positiva.

Demostración. Primero demostraremos que ϕ es continua. Por la Proposición 1.29, la aplicación $x \overset{\psi}{\mapsto} {}_xf$ es continua. Se afirma que la función

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(G) & \xrightarrow{-\cdot f} & \mathcal{C}(G) \\
h & \longmapsto & h \cdot f
\end{array}$$

también es continua. Si $M = \max(f)$ y $d(h,k) < \frac{\epsilon}{M}$,

$$\begin{array}{rcl}
\max\{|h(x)f(x) - k(x)f(x)| \mid x \in G\} & = & \max\{|h(x) - k(x)| \cdot |f(x)| \mid x \in G\} \\
& \leq & \max\{|h(x) - k(x)| \mid x \in G\} \cdot M \\
& < & \epsilon
\end{array}$$

La Proposición 1.46 afirma que integrar es una aplicación continua. Entonces

$$\phi_f = (\int_G) \circ (\_ \cdot f) \circ \psi$$

es continua.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ y $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$. Como la integral es invariante bajo traslaciones (ver la Proposición 1.44), para cada par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{array}{rcl} \phi_f(g_i \cdot {g_j}^{-1}) & = & \int {}_{g_i \cdot {g_j}^{-1}} f \cdot f \\ & = & \int {}_{g_i} f \cdot \underline{{}_{g_j} f} \\ & = & \int {}_{g_i} f \cdot \overline{{}_{g_j} f} \\ & = & < {}_{g_i} f,\ {}_{g_j} f > \end{array}$$

Si $h = \sum_{i=1}^n z_i \cdot f_{g_i} \in \mathcal{C}^*(G)$, por la Proposición 1.51,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i,j=1}^n z_i \overline{z_j} \phi_f(g_i \cdot {g_j}^{-1}) & = & \sum_{i,j=1}^n z_i \overline{z_j} < f_{g_i}, f_{g_j} > \\ & = & < h, h > \\ & \geq & 0 \end{array}$$

□

Existe una biyección natural

$$\begin{array}{ccc} Fun(G, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^G \\ f & \longmapsto & (f(g))_{g \in G} \end{array}$$

Por lo tanto se puede identificar $\mathcal{C}^*(G)$ con un subconjunto de $\mathbb{C}^G$. A la topología de subespacio inducida en $\mathcal{C}^*(G)$ mediante esta aplicación se le llama topología de la convergencia puntual.

Proposición 2.25. *Sea $f \in \mathcal{C}^*(G)$. Si a $\mathcal{C}^*(G)$ se le da la topología de la convergencia puntual, una red $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ converge a f, si y sólo si, $\{f_\beta(x)\}_{\beta \in B}$ converge a $f(x)$, para cada $x \in G$.*

Demostración. Sean $x \in G$ y $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ que converge a f con la topología de la convergencia puntual. Queremos demostrar que $\{f_\beta(x)\}_{\beta \in B}$ converge a $f(x)$, para toda $x \in G$. Existe $\beta \in B$ tal que para toda $\gamma > \beta$,

$$(f_\gamma(g))_{g \in G} \in B_{\frac{1}{n}}(f(x)) \times \prod_{g \neq x} \mathbb{C}_g$$

Por lo tanto para toda $\gamma > \beta$, $f_\gamma(x) \in B_{\frac{1}{n}}(f(x))$.

Supóngase que, para toda $x \in G$, $\{f_\beta(x)\}_{\beta \in B}$ converge a $f(x)$. Sea V una vecindad abierta de f. Existen $g_1, \ldots, g_k$ en G, y $m_1, \ldots, m_k$ naturales tales que

$$f \in B_{\frac{1}{m_1}}(f(g_1)) \times \cdots \times B_{\frac{1}{m_k}}(f(g_k)) \times \prod_{g \neq g_1, \ldots, g_k} \mathbb{C}_g \subset V$$

Para cada g_i existe $\beta_i \in B$ tal que para toda $\gamma > \beta_i$,

$$f_\gamma(g_i) \in B_{\frac{1}{m_i}}(f(g_i))$$

Por lo tanto para toda $\gamma > \max\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, $f_\gamma \in V$. □

Proposición 2.26. *Con la topología de la convergencia puntual, $\mathcal{C}^*(G)$ es un espacio vectorial topológico complejo.*

Demostración. Sea $\{(z_\beta, f_\beta)\}_{\beta\in B}$ una red que converge a $(z, f) \in \mathbb{C} \times \mathcal{C}^*(G)$. Entonces $\{z_\beta\}_{\beta\in B}$ converge a z y, para todo $x \in G$, $\{f_\beta(x)\}_{\beta\in B}$ converge a $f(x)$. Por lo tanto $\{z_\beta \cdot f_\beta(x)\}_{\beta\in B}$ converge a $z \cdot f(x)$. Por la Proposición 2.25, $\{z_\beta \cdot f_\beta\}_{\beta\in B}$ converge a $z \cdot f$.

Sea $\{(f_\beta, h_\beta)\}_{\beta\in B}$ una red en $\mathcal{C}^*(G) \times \mathcal{C}^*(G)$ que converge a (f, h). Para toda $x \in G$, la red $\{(f_\beta + h_\beta)(x)\}_{\beta\in B}$ converge a $(f + h)(x)$, es decir, $\{(f_\beta + h_\beta)\}_{\beta\in B}$ converge a $f + h$. □

Definición 2.27. *Para todo $g \in G$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $a \geq 0$ y $f \in \mathcal{C}^*(G)$, se define la función*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^*(G) & \xrightarrow{T(a,g,\theta)} & \mathcal{C}^*(G) \\ f & \longmapsto & T(a, g, \theta)(f) \end{array}$$

donde

$$T(a, g, \theta)(f) = a^2\bigl(2f + e^{i2\theta}{}_g f + e^{-i2\theta}{}_{g^{-1}} f\bigr)$$

Lema 2.28. *Si a $\mathcal{C}^*(G)$ le damos la topología de la convergencia puntual, para todo $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $s \in G$, el operador $T(a, s, \theta)$ es continuo.*

Demostración. Si $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ es una red que converge a f, para toda $x \in G$, $\{f_\beta(x)\}_{\beta\in B}$ converge a $f(x)$. Por lo tanto, para toda $x \in G$, la red

$$\{T(a, s, \theta)(f_\beta)(x)\}_{\beta\in B} = \{a^2\bigl(2f_\beta(x) + e^{i2\theta}{}_s(f_\beta)(x) + e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}}(f_\beta)(x)\bigr)\}_{\beta\in B}$$

converge a

$$T(a, s, \theta)(f)(x) = a^2\bigl(2f(x) + e^{i2\theta}{}_s f(x) + e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}} f(x)\bigr)$$

Entonces, por la Proposición 2.25, $\{T(a, s, \theta)(f_\beta)\}_{\beta\in B}$ converge a $T(a, s, \theta)(f)$. Por lo tanto $T(a, s, \theta)$ es continuo. □

Definición 2.29. *Diremos que $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ son estrictamente distintos si para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\theta_2 - \theta_1 \neq k\pi/2$.*

Lema 2.30. *Sean $g \in G$ y $f \in \mathcal{C}^*(G)$ tal que $f(e) = 1$. Si existen $a_1, a_2 \geq 0$ y θ_1 y θ_2 estrictamente distintos tales que*

$$f = T(a_1, g, \theta_1)(f) = T(a_2, g, \theta_2)(f)$$

entonces, para toda $x \in G$,

$$f(x \cdot g) = f(x)f(g) \quad y \quad f(x \cdot g^{-1}) = f(x)f(g^{-1})$$

Demostración. Supóngase que $f = T(a, g, \theta)(f)$. Entonces $a \neq 0$ y

$$2f + e^{i2\theta}{}_g f + e^{-i2\theta}{}_{g^{-1}} f = a^{-2} f$$

Evaluando en $x = e$ se obtiene

$$2 + e^{i2\theta} f(g) + e^{-i2\theta} f(g^{-1}) = a^{-2}$$

De las dos igualdades de arriba sabemos que para toda $x \in G$,

$$2f(x) + e^{i2\theta} f(gx) + e^{-i2\theta} f(g^{-1}x) = \big(2 + e^{i2\theta} f(g) + e^{-i2\theta} f(g^{-1})\big) f(x)$$

Por lo tanto

$$\big(f(gx) - f(g)f(x)\big)e^{i2\theta} + \big(f(g^{-1}x) - f(g^{-1})f(x)\big)e^{-i2\theta} = 0$$

para $\theta = \theta_i$, con $i = 1, 2$. Sea

$$c_{ij} = e^{(-1)^{(1-j)} i2\theta_i}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$. Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{c} c_{11}\big(f(gx) - f(g)f(x)\big) + c_{12}\big(f(g^{-1}x) - f(g^{-1})f(x)\big) = 0 \\ c_{21}\big(f(gx) - f(g)f(x)\big) + c_{22}\big(f(g^{-1}x) - f(g^{-1})f(x)\big) = 0 \end{array}$$

Como θ_1 y θ_2 son estrictamente distintos,

$$\begin{array}{rcl} c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} & = & e^{i2\theta_1} e^{-i2\theta_2} - e^{-i2\theta_1} e^{i2\theta_2} \\ & = & \big(cos(2\theta_1) + sen(2\theta_1)\big)\big(cos(-2\theta_2) + sen(-2\theta_2)\big) - \\ & & \big(cos(-2\theta_1) + sen(-2\theta_1)\big)\big(cos(2\theta_2) + sen(2\theta_2)\big) \\ & = & \big(cos(2\theta_1) + sen(2\theta_1)\big)\big(cos(2\theta_2) - sen(2\theta_2)\big) - \\ & & \big(cos(2\theta_1) - sen(2\theta_1)\big)\big(cos(2\theta_2) + sen(2\theta_2)\big) \\ & = & 2\big(sen(2\theta_1)cos(2\theta_2) - sen(2\theta_2)cos(2\theta_1)\big) \\ & = & 2sen\big(2(\theta_1 - \theta_2)\big) \\ & \neq & 0 \end{array}$$

Por lo tanto el sistema sólo tiene solución trivial. Entonces, para toda $x \in G$,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & f(gx) - f(g)f(x) \\ & = & f(g^{-1}x) - f(g^{-1})f(x) \end{array}$$

$\square$

Lema 2.31. *Para cada $a > 0$ existen números reales positivos b, c, λ, μ, tales que*
1) $\lambda + \mu = 1$
2) $b^2 + c^2 = \mu^{-1}(1 - 2\lambda a^2)$
3) $bc = \mu^{-1}\lambda a^2$

Demostración. Para cada número real λ tal que $\lambda \leq a^{-2}/4$ y $0 < \lambda < 1$, definimos $\mu = 1 - \lambda$. Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= \mu^{-\frac{1}{2}} \\ x - y &= \mu^{-\frac{1}{2}}(1 - 4\lambda a^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

El sistema tiene solución, es decir, existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$b + c = \mu^{-\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad b - c = \mu^{-\frac{1}{2}}(1 - 4\lambda a^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hace falta verificar que b y c son positivos. Como $b + c > 0$ y $b - c > 0$, $b > |c| \geq 0$. Por otro lado se tiene que $1 - 4\lambda a^2 < 1$. Por lo tanto $(1 - 4\lambda a^2)^{\frac{1}{2}} < 1$. Entonces $b + c > b - c$ y concluimos que $c > -c$. Se demostró que b y c son positivos.

Se tiene que

$$\mu(b^2 + 2bc + c^2) = 1 \quad \text{y} \quad \mu(b^2 - 2bc + c^2) = 1 - 4\lambda a^2$$

Restando estas identidades obtenemos $bc = \mu^{-1}\lambda a^2$. Y sumándolas,

$$b^2 + c^2 = \mu^{-1}(1 - 2\lambda a^2)$$

Hemos probado que b y c cumplen las ecuaciones 1), 2) y 3). $\square$

Lema 2.32. *Dados $g \in G$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$ existen números reales positivos b y c tales que para el operador*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^*(G) & \xrightarrow{T^*(a,g,\theta)} & \mathcal{C}^*(G) \\ f & \longmapsto & (b^2 + c^2)f + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_g f + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{g^{-1}} f\big) \end{array}$$

existen números reales positivos μ y λ tales que

$$Id_{\mathcal{C}^*(G)} = \lambda T(a, g, \theta) + \mu T^*(a, g, \theta)$$

Demostración. Tomemos b, c y μ como en el Lema 2.31. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda a^2\big(2f + e^{i2\theta}{}_g f + e^{-i2\theta}{}_{g^{-1}} f\big) + \mu\Big((b^2 + c^2)f + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_g f + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{g^{-1}} f\big)\Big) &= \\ \big(2\lambda a^2 + \mu(b^2 + c^2)\big)f &= f \end{aligned}$$

$\square$

Definición 2.33. *Dado el operador $T(a, g, \theta)$, diremos que $T^* = T^*(a, g, \theta)$ es adjunto de $T(a, g, \theta)$ si existen b y c, reales positivos, tales que*

$$T^*(f) = (b^2 + c^2)f + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_g f + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{g^{-1}} f\big)$$

y además existen λ y μ, reales positivos, tales que

$$\lambda T(a, g, \theta) + \mu T^* = Id_{\mathcal{C}^*(G)}$$

Lema 2.34. *Sean G abeliano y $f \in \mathcal{C}^*(G)$ definida positiva. Entonces para toda transformación $T(a,s,\theta)$, la función $T(a,s,\theta)(f)$ es defiinida positiva. Además, para toda adjunta T^* de $T(a,s,\theta)$, la función $T^*(f)$ es definida positiva.*

Demostración. Sean $g_1,\dots,g_n \in G$ y $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$. Recordemos que

$$T(a,s,\theta)(f) = a^2\big(2f + e^{i2\theta}{}_s f + e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}}f\big)$$

Por lo tanto

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\overline{\lambda_j}a^{-2}T(a,s,\theta)(f)(g_i{g_j}^{-1}) \quad = \\ \textstyle\sum_{i,j=1}^n\{\lambda_i\overline{\lambda_j}\big(2f(g_i{g_j}^{-1}) + e^{i2\theta}f(sg_i{g_j}^{-1}) + e^{-i2\theta}f(s^{-1}g_i{g_j}^{-1})\big)\}$$

Como f es definida positiva, para los conjuntos

$$\{g_1,\dots,g_n, s\cdot g_1,\dots,s\cdot g_n\} \subset G \;\; \text{y} \;\; \{\lambda_1,\dots,\lambda_n, e^{i2\theta}\lambda_1,\dots,e^{i2\theta}\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$$

se tiene, por definición, que

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\overline{\lambda_j}a^{-2}T(a,s,\theta)(f)(g_i{g_j}^{-1}) \geq 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\overline{\lambda_j}T(a,s,\theta)(f)(g_i{g_j}^{-1}) \geq 0$$

Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ de norma 1, la función

$$2f + z\cdot{}_s f + \overline{z}\cdot{}_{s^{-1}}f$$

es definida positiva. Además, por la Proposición 2.21, para todo $0 \leq \gamma \leq 1$,

$$\gamma\cdot[2f + z\cdot{}_s f + \overline{z}\cdot{}_{s^{-1}}f] \qquad \text{y} \qquad (2-2\gamma)\cdot f$$

son definidas positivas. Entonces

$$\gamma\cdot[2f + z\cdot{}_s f + \overline{z}\cdot{}_{s^{-1}}f] + (2-2\gamma)\cdot f = 2f + \gamma(z\cdot{}_s f + \overline{z}\cdot{}_{s^{-1}}f)$$

es definida positiva. Existen b y c números positivos tales que

$$\begin{aligned} T^*(f) &= (b^2+c^2)f + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_s f + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{s^{-1}}f\big) \\ &= d[2f + \gamma\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_s f + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{s^{-1}}f\big)] \end{aligned}$$

Con $\gamma = \frac{2bc}{b^2+c^2}$ y $d = \frac{b^2+c^2}{2}$. Como $\gamma \in [0,1]$ y d es positiva, $T^*(f)$ es definida positiva. □

Definición 2.35. *Diremos que $A \subset \mathcal{C}^*(G)$ es T-invariante si para cada $f \in A$ se tiene lo siguiente. Si $T(1,s,\theta)(f)(e) \neq 0$, para algunos $s \in G$ y $\theta \in [0,2\pi]$, entonces existe un número real $a \neq 0$ tal que $T(a,s,\theta)(f) \in A$ y tal que para al menos un adjunto T^* de $T(a,s,\theta)$, $T^*(f) \in A$.*

Definición 2.36. *$A \subset \mathcal{C}^*(G)$ será fuertemente T-invariante si existen m y M, reales positivos, tales que para cada $f \in A$ tal que $T(1,s,\theta)(f)(e) \neq 0$, con s en G y θ en $[0,2\pi]$, se puede encontrar un número positivo a que satisface:*
1) $0 < m \leq a^2 \leq M \cdot |T(1,s,\theta)(f)(e)|^{-1}$
2) $T(a,s,\theta)(f) \in A$
3) $T^*(f) \in A$, para cada adjunto T^* de $T(a,s,\theta)(f)$

Observación 2.37. Todo conjunto fuertemente T-invariante es T-invariante.

Proposición 2.38. *Si $A \subset \mathcal{C}^*(G)$ es fuertemente T-invariante, entonces $\overline{A}$, con la topología de la convergencia puntual, es T-invariante.*

Demostración. Sea $f \in \overline{A}$ y supóngase $T(1,s,\theta)(f)(e) \neq 0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < \epsilon < |T(1,s,\theta)(f)(e)|$$

Sea $\{f_\beta\}_{\beta \in B'}$ una red en A que converge a f. Por el Lema 2.28, la red $\{T(1,s,\theta)(f_\beta)\}_{\beta \in B'}$ converge a $T(1,s,\theta)(f)$. Entonces $\{T(1,s,\theta)(f_\beta)(e)\}_{\beta \in B'}$ converge a $T(a,s,\theta)(f)(e)$. Por lo tanto existe $\beta_0 \in B'$ tal que para todo $\gamma > \beta_0$, $|T(1,s,\theta)(f_\gamma)(e)| > \epsilon$. Sea

$$B = \{\beta \in B \mid \beta > \beta_0\}$$

El conjunto $\{f_\beta \mid \beta \in B\}$ es una red que converge a f. Y para todo elemento f_β de esta red, $|T(1,s,\theta)(f_\beta)(e)| > \epsilon$. Como A es fuertemente T-invariante, existen m y M numeros positivos tales que para cada $\beta \in B$ existe un real $a_\beta > 0$ tal que

$$0 < m \leq {a_\beta}^2 \leq M \cdot |T(1,s,\theta)(f_\beta)(e)|^{-1}$$

Además $T(a_\beta,s,\theta)(f_\beta) \in A$ y para todo T^*, adjunto de $T(a_\beta,s,\theta)$, $T^*(f_\beta) \in A$. Sean λ_β, μ_β y $T^*(a_\beta,s,\theta)$ como en el Lema 2.32. Para toda $h \in \mathcal{C}^*(G)$,

$$h = \lambda_\beta \cdot T(a_\beta,s,\theta)(h) + \mu_\beta \cdot T^*(a_\beta,s,\theta)(h)$$

Como para toda $\beta \in B$,

$${a_\beta}^2 < M \cdot |T(1,s,\theta)|^{-1} < M\epsilon^{-1}$$

se tiene que

$$\text{ínf}\{\frac{{a_\beta}^{-2}}{4} \mid \beta \in B\} > 0$$

En las demostraciones del Lema 2.31 y del Lema 2.32 se mostró que es suficiente tener λ tal que

$$0 < \lambda < 1 \quad \text{y} \quad \lambda < \frac{a^{-2}}{4}$$

para construir $T^*(a,s,\theta)$ tal que

$$\lambda T(a,s,\theta) + (1-\lambda)T^* = Id_{\mathcal{C}^*(G)}$$

Por lo tanto para toda $\beta \in B$ es posible escoger la misma λ. Es decir, existen λ, μ, b y c, reales positivos, tales que para toda $\beta \in B$ y para toda $h \in \mathcal{C}^*(G)$,

$$h = \lambda \cdot T(a_\beta, s, \theta)(h) + \mu \cdot T^*(a_\beta, s, \theta)(h)$$

con $T^*(a_\beta, s, \theta)$ un adjunto de $T(a_\beta, s, \theta)$, definido de la siguiente manera.

$$T^*(a_\beta, s, \theta)(h) = (b^2 + c^2)h + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_g h + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{g^{-1}} h\big)$$

La red $\{a_\beta\}_\beta$ está acotada, entonces tiene algún punto límite a. Se tiene para toda $h \in \mathcal{C}^*(G)$ que

$$h = \lambda \cdot T(a_\beta, s, \theta)(h) + \mu \cdot T^*(a_\beta, s, \theta)(h)$$

Por lo tanto para toda $h \in \mathcal{C}^*(G)$,

$$h = \lambda \cdot T(a, s, \theta)(h) + \mu \cdot T^*(a, s, \theta)(h)$$

Hemos demostrado que el operador

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^*(G) & \xrightarrow{T^*(a,s,\theta)} & \mathcal{C}^*(G) \\ h & \longmapsto & (b^2 + c^2)h + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_s h + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{s^{-1}} h\big) \end{array}$$

es adjunto de $T(a, s, \theta)$.

Se afirma que la red

$$\{T(a_\beta, s, \theta)(f_\beta)\}_{\beta \in B} = \{{a_\beta}^2\big(2f_\beta + e^{i2\theta}{}_s(f_\beta) + e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}}(f_\beta)\big)\}_{\beta \in B}$$

tiene como punto límite a

$$T(a, s, \theta)(f) = a^2\big(2f + e^{i2\theta}{}_s f + e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}} f\big)$$

Obsérvese que $\{_s(f_\beta)\}_{\beta \in B}$ converge a ${}_s f$, y que $\{_{s^{-1}}(f_\beta)\}_{\beta \in B}$ converge a ${}_{s^{-1}} f$. Por la Proposición 2.26 se tiene la afirmación. Por las mismas razones

$$\{(b^2 + c^2)f_\beta + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_s(f_\beta) + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{s^{-1}}(f_\beta)\big)\}_{\beta \in B}$$

tiene como punto límite a

$$T^*(a, s, \theta)(f) = (b^2 + c^2)f + bc\big(e^{i(2\theta+\pi)}{}_s f + e^{-i(2\theta+\pi)}{}_{s^{-1}} f\big)$$

Como para toda $\beta \in B$, $T(a_\beta, s, \theta)(f_\beta) \in A$, se tiene que $T(a, s, \theta)(f) \in \overline{A}$. Además como A es fuertemente T-invariante, para toda β, $T^*(a_\beta, s, \theta)(f_\beta) \in A$, Por lo tanto

$$T^*(a, s, \theta)(f) \in \overline{A}$$

Hemos demostrado que $\overline{A}$ es T-invariante. □

Definición 2.39. *Llamaremos $\mathcal{C}_1^*(G)$ al conjunto de funciones continuas de G en $\mathbb{C}$ que mandan al neutro de G en 1.*

Definición 2.40. *Sea $f \in \mathcal{C}_1^*(G)$. Se define $\mathcal{T}_f$ como el menor subconjunto de $\mathcal{C}^*(G)$ que contiene a f, invariante para todo operador $T(a, s, \theta)$ y para todo adjunto T^* de $T(a, s, \theta)$.*

Definición 2.41. *Llamaremos $\mathcal{C}_f$ a la cerradura convexa de $\mathcal{T}_f \cap \mathcal{C}_1^*(G) \subset \mathcal{C}^*(G)$.*

Proposición 2.42. *Sean G abeliano y $\phi \in \mathcal{C}_1^*(G)$ definida positiva. Entonces $\mathcal{C}_\phi$ cumple lo siguiente:*
1) $\mathcal{C}_\phi \subset \mathcal{C}_1^*(G)$.
2) Cada funcion $f \in \mathcal{C}_\phi$ es definida positiva.
3) $|f(x)| \leq 1$, para cada $f \in \mathcal{C}_\phi$ y para cada $x \in G$.
4) $T(1, s, \theta)(f)(e) \geq 0$, para toda $s \in G$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $f \in \mathcal{C}_\phi$.
5) $\mathcal{C}_\phi$ es fuertemente T-invariante.
6) Si a $\mathcal{C}^*(G)$ se le da la topología de la convergencia puntual, $\overline{\mathcal{C}_\phi}$ es T-invariante.

Demostración. 1) $\mathcal{C}_1^*(G)$ es convexo.
2) El conjunto $\mathcal{T}_\phi$ se obtiene de aplicar a ϕ, repetidamente, operadores $T(a, s, \theta)$ y sus adjuntos T^*. Por lo tanto, por el Lema 2.34, toda $h \in \mathcal{T}_\phi$ es definida positiva. Por la Proposicion 2.21, una combinación lineal finita, con escalares no negativos, de elementos de $\mathcal{T}_\phi$ es definida positiva.
3) Sea $f \in \mathcal{C}_\phi$, por 2) sabemos que f es definida positiva y por 1) se tiene que $f(e) = 1$. Por lo tanto, por la Proposición 2.22, se tiene que para toda $x \in G$, $|f(x)| \leq f(e) = 1$.
4) Véase la Proposición 2.22.
5) Sea $f \in \mathcal{C}_\phi$. Si $T(1, s, \theta)(f)(e) \neq 0$, por 2) y 4), $T(1, s, \theta)(f)(e) > 0$. Por lo tanto, si definimos $a^2 = T(1, s, \theta)(e)^{-1}$, $T(a, s, \theta)(f)(e) = 1$. Como $f \in \mathcal{C}_\phi$,

$$f = \gamma_1 \cdot h_1 + \cdots + \gamma_n \cdot h_n$$

con

$$h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{T}_\phi \cap \mathcal{C}_1^*(G)$$

y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, reales positivos, tales que $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = 1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} 1 = T(a, s, \theta)(f)(e) &= T(a, s, \theta)\big(\gamma_1 \cdot h_1 + \cdots + \gamma_n \cdot h_n\big)(e) \\ &= \gamma_1 \cdot T(a, s, \theta)(h_1)(e) + \cdots + \gamma_n \cdot T(a, s, \theta)(h_n)(e) \end{aligned}$$

Por el Lema 2.34, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $T(a, s, \theta)(h_i)$ es definida positiva. Por lo tanto, por la Proposición 2.22, $T(a, s, \theta)(h_i)(e) \geq 0$, para toda i. Cada γ_i es positiva, entonces para toda i, $\gamma_i \cdot T(a, s, \theta)(h_i)(e) \leq 1$. Llamemos $i_1, \ldots, i_m$ a los elementos de $\{1, \ldots, n\}$ tales que $T(a, s, \theta)(h_{i_j})(e) > 0$. Definamos, para toda i_j,

$$l_{i_j} = T(a, s, \theta)(h_{i_j})(e)^{-1} \cdot T(a, s, \theta)(h_{i_j})$$

Para toda h, $T(\frac{\sqrt{c}}{2}, e, 0)(h) = c \cdot h$. Es fácil notar que

$$l_{i_j} \in \mathcal{T}_f \cap \mathcal{C}_1^*(G)$$

Por la Proposición 2.22, si $T(a,s,\theta)(h_i)(e)=0$, entonces $T(a,s,\theta)(h_i)=\mathcal{O}$. Es claro que

$$\begin{aligned} T(a,s,\theta)(f) &= \gamma_1\cdot T(a,s,\theta)(h_1)+\cdots+\gamma_n\cdot T(a,s,\theta)(h_n)\\ &= \gamma_{i_1}\cdot T(a,s,\theta)(h_{i_1})+\cdots+\gamma_{i_m}\cdot T(a,s,\theta)(h_{i_m})\\ &= \gamma_{i_1}\cdot T(a,s,\theta)(h_{i_1})(e)\cdot l_{i_1}+\cdots+\gamma_{i_m}\cdot T(a,s,\theta)(h_{i_m})(e)\cdot l_{i_m} \end{aligned}$$

Entonces para toda i_j,

$$0<\gamma_{i_1}T(a,s,\theta)(h_{i_1})(e)<1$$

y

$$\gamma_{i_1}T(a,s,\theta)(h_{i_1})(e)+\cdots+\gamma_{i_m}\cdot T(a,s,\theta)(h_{i_m})(e)=1$$

Por lo tanto $T(a,s,\theta)(f)$ es una combinación convexa de elementos de $\mathcal{T}_\phi\cap\mathcal{C}_1^*(G)$, entonces $T(a,s,\theta)(f)\in\mathcal{C}_\phi$.

Si T^* es adjunto de $T(a,s,\theta)$, existen λ y μ, reales positivos, tales que

$$1=f(e)=\lambda\cdot T(a,s,\theta)(f)(e)+\mu\cdot T^*(f)(e)$$

Como $T(a,s,\theta)(f)(e)=1$ y $\lambda+\mu=1$, se conlcuye que $T^*(f)(e)=1$. Por lo tanto,

$$1=T^*(f)(e)=\gamma_1\cdot T^*(h_1)(e)+\cdots+\gamma_n\cdot T^*(h_n)(e)$$

De aquí en adelante, la prueba de que $T^*(f)\in\mathcal{C}_\phi$ es análoga a como se hizo para $T(a,s,\theta)(f)$.

Por 3), para toda $x\in G$, $|f(x)|\leq 1$. Por lo tanto

$$a^{-2}=T(1,s,\theta)(f)(e)=|2f(e)+e^{i2\theta}{}_sf(e)+e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}}f(e)|\leq 4$$

Tomemos $m=\frac{1}{4}$ y $M=1$. Entonces $\mathcal{C}_\phi$ es fuertemete T-invariante.
6) Véase la Proposición 2.38. □

Definición 2.43. *Diremos que $f\in\mathcal{C}^*(G)$ es simétrica si para toda $x\in G$,*

$$f(x)=f(x^{-1})$$

Lema 2.44. *Si G es Hausdorff, para toda $s\neq e$ existe $V\in\overset{\circ}{\Sigma}$ simétrica tal que $s\notin V^3$.*

Demostración. Sea $W\in\overset{\circ}{\Sigma}$ tal que $s\notin W$. Como la función $(g,h,k)\mapsto g\cdot h\cdot k$ es continua, existe $U\in\overset{\circ}{\Sigma}$, tal que $U^3\subset W$. Por otro lado, existe $V\subset U$ en $\overset{\circ}{\Sigma}$ y simétrica. Por lo tanto $s\notin V^3$. □

Proposición 2.45. *Si G es ACH, para todo $s\in G\setminus\{e\}$ existen $\phi\in\mathcal{C}(G)$, definida positiva tal que $\phi(e)=1$, y $k\in\mathcal{C}(G)$, simétrica y no negativa, tales que la función continua*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \int {}_xk(y)\phi(y^{-1})dy \end{array}$$

satisface $f(e)\neq f(s)$.

Demostración. Sea $s \neq e$ y $V \in \overset{\circ}{\Sigma}$ simétrica tal que $e \notin V^3$ (ver el Lema 2.44). G es compacto y Hausdorff, por lo tanto es normal. Por el Lema de Urysohn,[7] existe $G \xrightarrow{h'} [0,1]$ continua tal que $h'|_{G \setminus V} \equiv 0$ y $h'(e) = 1$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{h} & [0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{h'(x)+h'(x^{-1})}{2} \end{array}$$

Claramente h es simétrica, $h(e) = 1$ y $h|_{G-V} = 0$. Por la Proposición 2.24, la función

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_x h \cdot h \end{array}$$

es continua y definida positiva. Si $x \in G$, para toda $y \in G$, $h(xy) \cdot h(y) \geq 0$. Por lo tanto para toda $x \in G$, $\phi_1(x) \geq 0$. Como $h(e)h(e) = 1$ y $h^2 \geq 0$,

$$\phi_1(e) = \int h \cdot h > 0$$

Afirmamos que para toda $x \in G \setminus V^2$, $\phi_1(x) = 0$. Sea $x \notin V^2$. Si $y \notin V$, entonces $h(xy)h(y) = 0$. Si $y \in V$, como $x \notin V^2$, $xy \notin V$. Por lo tanto para toda $x \notin V^2$ y para toda $y \in G$, $h(xy)h(y) = 0$. Entonces $\phi_1(x) = 0$, para toda $x \notin V^2$.

Definamos

$$f_1(x) = \int_x h(y)\phi_1(y^{-1})dy$$

Con los argumentos de la demostración de la Proposición 2.24 se demuestra que f_1 es continua. Se afirma que $f_1(s) \neq f_1(e)$. Supóngase $x \in G \setminus V^3$ y $y \in G$. Si $y \notin V^2$, $y^{-1} \notin V^2$, pues V^2 es simétrica. Por lo tanto si $y \notin V^2$, $\phi_1(y^{-1}) = 0$ y $h(xy)\phi_1(y^{-1}) = 0$. Si $y \in V^2$, $xy \notin V$, pues de lo contario x pertenecería a V^3. Entonces $h(xy) = 0$ y $h(xy)\phi_1(y^{-1}) = 0$. Por lo tanto para toda $x \in G \setminus V^3$, $f_1(x) = 0$. Por otro lado, $h(y)\phi_1(y) \geq 0$ y $h(e)\phi_1(e) = \phi_1(e) > 0$. Entonces, por el Teorema 1.44,

$$f_1(e) = \int h(y)\phi_1(y^{-1})dy > 0$$

Como $s \notin V^3$, $f_1(s) = 0 \neq f_1(e)$.

Para terminar definamos $\phi = \frac{1}{\phi_1(e)} \cdot \phi_1$. Como $\phi_1(e) \geq 0$, por la Proposición 2.21, ϕ es definida positiva. También $\phi(e) = 1$, y como h es real, simétrica y no negativa, podemos definir f de la siguiente manera

$$f(x) = \int_x h(y)\phi(y^{-1})dy$$

Se tiene que

$$f(s) = \phi_1(e)^{-1} f_1(s) \neq \phi_1(e)^{-1} f_1(e) = f(e)$$

□

[7] James Dugundji, *op. cit.*, p.146.

Lema 2.46. *Sea G abeliano y compacto. Si $\phi \in \mathcal{C}(G)$ es definida positiva, $\phi(e) = 1$ y $k \in \mathcal{C}(G)$ es distinta de $\mathcal{O}$, no negativa y simétrica, el conjunto*

$$K = \{k * h \mid h \in \mathcal{C}_\phi\}$$

donde

$$(k * h)(x) = \int {}_x k(y)h(y^{-1})dy$$

es fuertemente T-invariante con constantes $m = 1/4$ y $M = \int k$.

Demostración. Por el Lema 2.34 y por la Proposición 2.42, para toda $h \in \mathcal{C}_\phi$ y para todo operador $T(a,s,\theta)$, h y $T(a,s,\theta)(h)$ son definidas positivas. Por lo tanto, debido a la Proposición 2.22, para toda $x \in G$,

$$|T(a,s,\theta)(h)(x)| \leq T(a,s,\theta)(h)(e) \quad \text{y} \quad |h(x)| \leq h(e) = 1$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^*(G)$, para toda $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\big(k * (\lambda_1 \cdot h_1 + h_2)\big)(x) &= \int \big({}_x k(y)(\lambda_1 \cdot h_1 \cdot h_2)(y^{-1})\big)dy \\
&= \lambda_1 \cdot \int {}_x k(y)h_1(y^{-1})dy + \int {}_x k(y)h_2(y^{-1})dy \\
&= \lambda_1 \cdot (k * h_1)(x) + (k * h_2)(x)
\end{aligned}$$

Como la integral de von Neumann es invariante bajo traslaciones,

$$\begin{aligned}
{}_s(k * h)(x) &= \int k(sxy)h(y^{-1})dy \\
&= \int k(sxy) \cdot (h \circ \iota)(y)dy \\
&= \int k(xy) \cdot {}_{s^{-1}}(h \circ \iota)(y)dy \\
&= \int k(xy)h(sy^{-1})dy \\
&= \int {}_x k(y) {}_s h(y^{-1})dy \\
&= k * {}_s h(x)
\end{aligned}$$

Entonces

$$T(a,s,\theta)\big(k * h\big)(x) = k * \big(T(a,s,\theta)(h)\big)(x)$$

y, para todo adjunto T^* de $T(a,s,\theta)$,

$$T^*(k * h)(x) = k * (T^*(h))(x)$$

Por las propiedades de la integral de von Neumann, la Proposición 2.22, el Lema 2.34 y la Proposición 2.42,

$$\begin{aligned}
|T(a,s,\theta)(k * h)(e)| &= |k * \big(T(a,s,\theta)(h)\big)(e)| \\
&= \left|\int k(y) \cdot T(a,s,\theta)(h)(y^{-1})dy\right| \\
&\leq \int |k(y) \cdot T(a,s,\theta)(h)(y^{-1})|dy \\
&= \int |k(y)| \cdot |T(a,s,\theta)(h)(y^{-1})|dy \\
&\leq \int |T(a,s,\theta)(h)(e)| \cdot k(y)dy \\
&= T(a,s,\theta)(h)(e) \cdot \int k(y)dy
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $C = \int k$, para toda $h \in \mathcal{C}_\phi$,

$$T(1,s,\theta)(h)(e)^{-1} \leq C \cdot |T(1,s,\theta)(k*h)(e)|^{-1}$$

Se tiene que $T(1,s,\theta)(k*h)(e) \neq 0$ implica $T(1,s,\theta)(h)(e) \neq 0$. Como $\mathcal{C}_\phi$ es fuertemente T-invariante, con $m = 1/4$ y $M = 1$ (ver la Proposición 2.42), si h pertenece a $\mathcal{C}_\phi$ y es tal que $T(1,s,\theta)(k*h)(e) \neq 0$, existe $b > 0$ tal que

$$1/4 \leq b^2 \leq |T(1,s,\theta)(h)(e)|^{-1}$$

y tal que

$$T(b,s,\theta)(h) \in \mathcal{C}_\phi \quad \text{y} \quad T^*(b,s,\theta)(h) \in \mathcal{C}_\phi$$

para todo adjunto $T^*(b,s,\theta)$ de $T(b,s,\theta)$.

Es decir, para cada $k*h \in K$ tal que $T(1,s,\theta)(h*k)(e) \neq 0$ existe $b > 0$ tal que

$$1/4 \leq b^2 \leq |T(1,s,\theta)(h)(e)|^{-1} \leq C \cdot |T(1,s,\theta)(k*h)(e)|^{-1}$$

Además, como para todo $T^*(b,s,\theta)$ adjunto de $T(b,s,\theta)$,

$$T(b,s,\theta)(h) \in \mathcal{C}_\phi \quad \text{y} \quad T^*(b,s,\theta)(h) \in \mathcal{C}_\phi$$

se tiene que

$$T(b,s,\theta)(k*h) \in K \quad \text{y} \quad T^*(b,s,\theta)(k*h) \in K$$

Hemos demostrado que K es fuertemente T-invariante con $m = 1/4$ y $M = \int k$. $\square$

Definición 2.47. *Dado un grupo topológico G, un caracter de G es un homomorfismo continuo de G a $\mathbb{S}^1$. El conjunto de caracteres de G lo llamaremos el grupo dual de G y lo denotaremos G^*.*

Definición 2.48. *Dado $A \subset \mathcal{C}^*(G)$, llamamos $< A >$ al menor subespacio vectorial complejo de $\mathcal{C}^*(G)$ que contiene a A.*

Teorema 2.49. *Sean G abeliano y compacto, $\phi \in \mathcal{C}_1^*(G)$ definida positiva y $k \in \mathcal{C}(G)$ simétrica y no negativa. Si se da la topología de la convergencia puntual a $\mathcal{C}^*(G)$, la función*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{k*\phi} & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int {}_x k(y)\phi(y^{-1})dy \end{array}$$

pertenece a $\overline{< G^* >} \subset \mathcal{C}^*(G)$.

Demostración. Demostraremos que $K \subset \overline{< G^* >}$ (ver el Lema 2.46). Como ϕ es definida positiva, $|\phi(x)| \leq \phi(e) = 1$. La función k es no negativa, entonces por el Teorema 1.48,

$$\begin{array}{rcl} |(k*\phi)(x)| & = & \left|\int {}_x k(y)\phi(y^{-1})dy\right| \\ & \leq & \int |{}_x k(y)\phi(y^{-1})|dy \\ & \leq & \int {}_x k(y)dy \\ & = & \int k(y)dy \end{array}$$

Se demostró que para toda $f \in K$ (ver el Lema 2.46) y para toda $x \in G$,

$$|f(x)| \leq \int k = C$$

Es inmediato que esta propiedad se hereda a $\overline{K} \subset \mathbb{C}^G$. Por lo tanto, haciendo un abuso de notación,

$$\overline{K} \subset \prod_{g \in G} \overline{B_C(0)_g} \subset \mathbb{C}^G$$

De ahí se concluye que $\overline{K}$ es compacto. Aquí hay que tener cuidado, pues hace falta demostrar que $\overline{K} \subset \mathcal{C}^*(G)$, ya que estamos tomando la cerradura de K en $\mathbb{C}^G$ y no en $\mathcal{C}^*(G)$. Probaremos que toda $f \in \overline{K}$ es continua. Para ello mostraremos que K es una familia uniformemente continua de funciones.

Sea $h \in \mathcal{C}_\phi$. Por la Proposición 2.42, $|h(x)| \leq 1$, para toda $x \in G$. Por lo tanto para todas $g, x \in G$,

$$\begin{array}{rcl} |(k * h)(gx) - (k * h)(x)| & = & \left|\int (k(gxy) - k(xy))h(y^{-1})dy\right| \\ & \leq & \int |(k(gxy) - k(xy))| \cdot |h(y^{-1})|dy \\ & \leq & \int |k(gxy) - k(xy)|dy \end{array}$$

Como k es continua y G es compacto, k es uniformemente continua (ver la Proposición 1.20). Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $V \in \Sigma$ tal que si $g \in V$, $|k(gxy) - k(xy)| < \epsilon$. Por lo tanto si $g \in V$,

$$\int |k(gxy) - k(xy)|dy < \epsilon$$

Es decir, para toda $g \in V$,

$$|(k * h)(gx) - (k * h)(x)| < \epsilon$$

Hemos demostrado que K es una familia uniformemente continua de funciones. Podemos concluir, por la Proposición 1.23, que cualquier límite puntual de una red en K es una función continua. Entonces $\overline{K} \subset \mathcal{C}^*(G)$ es compacto.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ y sean $k * h_1, \ldots, k * h_n \in K$. Como la operación $*$ es lineal en la segunda entrada,

$$\lambda_1 \cdot (k * h_1) + \cdots + \lambda_n \cdot (k * h_n) \quad = \quad k * (\lambda_1 \cdot h_1 + \cdots + \lambda_n \cdot h_n)$$

Por construcción $\mathcal{C}_\phi$ es convexo, entonces K es convexo, y por ello $\overline{K}$ también lo es. Mostramos que $\overline{K}$ es un subconjunto compacto y convexo de $\mathcal{C}^*(G)$.

En la Proposición 2.26 se demostró que $\mathcal{C}^*(G)$, con la topología de la convergencia puntual, es un espacio vectorial topológico complejo (real).

Sea $f \in \mathcal{C}^*(G)$ y, abusando de la notación, sea

$$\mathcal{C}^*(G) \cap \left(A_{g_1} \times \cdots \times A_{g_n} \times \prod_{g \neq g_1, \ldots, g_n} \mathbb{C}_g \right)$$

una vecindad básica de f en $\mathcal{C}^*(G)$. Como $\mathbb{C}$ es localmente convexo, para cada i existe una vecindad convexa B_{g_i} de $f(g_i)$ contenida en A_{g_i}. Entonces

$$\mathcal{C}^*(G) \cap \left(B_{g_1} \times \cdots \times B_{g_n} \times \prod_{g \neq g_1, \ldots, g_n} \mathbb{C}_g \right)$$

es una vecindad convexa de f contenida en la vecindad básica dada. Por lo tanto $\mathcal{C}^*(G)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Por el Teorema de Krein-Milman,[8] $\overline{K}$ tiene como subconjunto denso a la envolvente convexa de E, donde E es el conjunto de puntos extremos[9] de $\overline{K}$.

Para terminar demostraremos que E está compuesto por caracteres multiplicados por alguna constante. Supóngase que $f \in \overline{K}$ es un punto extremo y distinto de $\mathcal{O}$. Se afirma que si para alguna transformación $T(1, s, \theta)$, $T(1, s, \theta)(f)(e) \neq 0$, entonces existe $a > 0$ tal que $T(a, s, \theta)(f) = f$. El conjunto $\overline{K}$ es T-invariante (ver el Lema 2.46 y la Proposición 2.38), por lo tanto existe $a > 0$ tal que

$$T(a, s, \theta)(f) \in \overline{K}$$

y tal que para algún $T^*(a, s, \theta)$ adjunto de $T(a, s, \theta)$,

$$T^*(a, s, \theta)(f) \in \overline{K}$$

Se tiene que

$$f = \lambda \cdot T(a, s, \theta)(f) + \mu \cdot T^*(a, s, \theta)(f)$$

para algunos λ y μ positivos tales que $\lambda + \mu = 1$. Debido a que f es un punto extremo,

$$f = T(a, s, \theta)(f) = T^*(a, s, \theta)(f)$$

Se afirma que si $s \in G$ es tal que al menos uno de los números $f(e), f(s), f(s^{-1})$ es distinto de cero, existe θ tal que $T(1, s, \theta)(f)(e) \neq 0$. Para todo $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} T(1, s, \theta)(f)(e) &= 2f(e) + e^{i2\theta}{}_s f(e) + e^{-i2\theta}{}_{s^{-1}} f(e) \\ &= 2f(e) + e^{i2\theta} f(s) + e^{-i2\theta} f(s^{-1}) \end{aligned}$$

Definamos $a = 2f(e)$, $b = f(s)$, $c = f(s^{-1})$ y $z = e^{i2\theta}$ y consideremos la ecuación

$$a + bz + c\overline{z} = 0$$

Multiplicando ambos lados por z se obtiene

$$az + bz^2 + c = 0$$

[8] Helmut Schaefer y Manfred Wolff, *Topological Vector Spaces*, segunda edición, Nueva York, Springer-Verlag, 1999, p. 67.

[9] Si V es un espacio vectorial topológico y $A \subset V$, un punto extremo de A es aquel que no puede escribirse como una combinación convexa no trivial de cualesquiera dos elementos de A.

De suponer que a, b ó c son distintos de cero, se tiene que la ecuación a lo más tiene dos soluciones. Es decir, para algún $z_0 = e^{i2\theta_0} \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$az_0 + b{z_0}^2 + c \neq 0$$

Multiplicando ambos lados por $\overline{z_0}$ se obtiene

$$a + bz_0 + c\overline{z_0} \neq 0$$

Así se tendría que $T(1, s, \theta_0) \neq 0$.

Si $f \neq \mathcal{O}$ y $s \in G$ es tal que $f(s)$, $f(s^{-1})$ ó $f(e)$ es distinto de cero, por lo afirmado arriba, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $T(1, s, \theta)(f)(e) \neq 0$. Por las afirmaciones previas, existe $a > 0$ tal que

$$f(e) = T(a, s, \theta)(f)(e) = a^2 T(1, s, \theta)(f)(e) \neq 0$$

Obsérvese que la aplicación

$$\theta \mapsto T(1, s, \theta)(f)(e)$$

es continua y que existe θ tal que $T(1, s, \theta)(f)(e) \neq 0$. Por eso podemos concluir que existen θ_1 y θ_2 estrictamente distintos tales que,

$$T(1, s, \theta_1)(f)(e) \neq 0 \neq T(1, s, \theta_2)(f)(e)$$

Sabemos que existen a_1 y a_2, reales positivos, tales que

$$T(a_1, s, \theta_1)(f) = f = T(a_2, s, \theta_2)(f)$$

Como $f(e) \neq 0$, podemos definir $f_0 = f(e)^{-1} \cdot f$. Claramente f_0 es continua, $f_0(e) = 1$ y

$$T(a_1, s, \theta_1)(f_0) = f_0 = T(a_2, s, \theta_2)(f_0)$$

Por el Lema 2.30, para toda $x \in G$,

$$f_0(x \cdot s) = f_0(x) f_0(s) \quad \text{y} \quad f(x_0 \cdot s^{-1}) = f_0(x) f_0(s^{-1})$$

Si s es tal que $f(e)$, $f(s)$ ó $f(s^{-1})$ es distinto de 0, ya observamos que $f(e) \neq 0$, y como una s así siempre existe (f no es igual a $\mathcal{O}$), para toda $y \in G$, $f(e)$, $f(y)$ ó $f(y^{-1})$ es distinto de cero. Como f_0 es un homomorfismo, $im(f_0)$ es un subgrupo multiplicativo compacto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $im(f_0) \not\subset \mathbb{S}^1$, $im(f_0)$ no sería acotado. Así concluimos que todo punto extremo de $\overline{K}$ es un caracter multiplicado por una constante. Por lo tanto

$$\overline{K} = \overline{< E >} \subset \overline{< G^* >}$$

$\square$

Teorema 2.50. *Si G es ACH, para cada $s \neq e$ en G, existe un caracter φ tal que $\varphi(s) \neq 1$.*

Demostración. Por la Proposición 2.45, para $s \neq 0$ existen $\phi \in \mathcal{C}(G)$, definida positiva tal que $\phi(e) = 1$, y $k \in \mathcal{C}(G)$, simétrica y no negativa, tales que

$$(k * \phi)(s) \neq 0$$

Por el Teorema 2.49, si a $\mathcal{C}^*(G)$ le damos la topología de la convergencia puntual, $k * \phi$ pertenece a $\overline{< G^* >} \subset \mathcal{C}^*(G)$. Sea $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una red en $< G^* >$ que converge a $k * \phi$. Para alguna $\alpha \in A$ se tiene que

$$\psi_\alpha(s) \neq \psi_\alpha(e)$$

con

$$\psi_\alpha = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \varphi_n$$

para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in G^*$. Por lo tanto, para alguna i,

$$\varphi_i(e) \neq \varphi_i(s)$$

$\square$

Corolario 2.51. *Si G es ACH, existe*

$$G \overset{\iota}{\hookrightarrow} \prod_{\varphi \in G^*} \mathbb{S}^1_\varphi$$

monomorfismo y encaje cerrado.

Demostración. Como consecuencia del Teorema 2.50, el morfismo cerrado

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & \prod_{\varphi \in G^*} \mathbb{S}^1_\varphi \\ g & \longmapsto & (\varphi(g))_{\varphi \in G^*} \end{array}$$

es inyectivo. $\square$

Observación 2.52. Las hipótesis de abeliano y Hausdorff no son restrictivas en el Teorema 2.50, debido a que si G^* separa los puntos de G, G tiene que ser abeliano y Hausdorff. El Teorema de Peter-Weyl es una generalización del Teorema 2.50. Este dice que si G es un grupo compacto y Hausdorff, para cada $g \neq e$ existe, para alguna n, una representación irreducible $G \overset{\rho}{\to} U(n)$ tal que $\rho(g) \neq Id$. Una demostración se puede encontrar en el libro *Grupos Continuos* de Lev Pontryagin.[10] El Teorema 2.50 es un corolario del Teorema de Peter-Weyl pues toda representación irreducible de un grupo ACH tiene dimensión 1.[11]

[10] Lev Pontryagin, *Grupos Continuos*, tercera edición, Moscú, Mir, 1978, p. 232, 241.

[11] *Ídem*, p. 230.

2.3. Los caracteres separan puntos en ALCH

Empecemos por los grupos ALCH con topología más sencilla. Si G es abeliano y discreto, el dual de G separa sus puntos. En términos de la teoría de módulos, $\mathbb{S}^1$ es un cogenerador inyectivo de la categoría de grupos abelianos.

Proposición 2.53. *Para todo G grupo abeliano (discreto) y para toda $x \in G$, existe un homomorfismo $G \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) \neq 1$.*

Demostración. Se tiene que $x\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ o $x\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. En $\mathbb{S}^1$, el grupo generado por un elemento de argumento irracional es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n$ es isomorfo al grupo de raíces n-ésimas de la unidad. Entonces para toda $x \in G \setminus \{e\}$ existe un monomorfismo $x\mathbb{Z} \xrightarrow{f'} \mathbb{S}^1$. Como $\mathbb{S}^1$ es un grupo abeliano divisible,[12] f' se puede extender a un homomorfismo $G \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) \neq 1$.[13] □

En general una aplicación suprayectiva entre grupos topológicos no tiene que ser un cociente topológico, por ejemplo, si G es discreto y H no lo es, ningún homomorfismo suprayectivo entre ellos es un cociente topológico, pues H no es discreto. Demostraremos que entre grupos localmente compactos y Hausdorff todo homomorfismo continuo, suprayectivo y con dominio Lindelöf es un cociente topológico.

Proposición 2.54. *En un espacio localmente compacto y de Hausdorff, la intersección de una cantidad numerable de abiertos densos es densa.*

Demostración. Sea $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de abiertos densos. Si U es un abierto arbitrario, $D_1 \cap U \neq \emptyset$ y existe $C_1 \subset D_1 \cap U$, con C_1 compacto y con interior no vacío. Entonces, $\overset{\circ}{C_1} \cap D_2 \neq \emptyset$ y por lo tanto existe $C_2 \subset C_1 \cap D_2$, con C_2 compacto y con interior no vacío. Es decir, recursivamete, se puede construir una familia $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de compactos con interior no vacío, tal que $C_{i+1} \subset C_i \cap D_{i+1}$, para toda i. Como $C_i \subset C_1$ para toda i, la familia $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia anidada de cerrados en un compacto. Por lo tanto la intersección de la familia $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no es vacía. Entonces,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \subset \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} D_{i+1}\right) \cap U$$

□

Corolario 2.55. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Si*

$$X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$$

con C_i cerrado para toda i, algún C_i debe tener interior no vacío.

[12] G es divisible si, y sólo si, para toda $g \in G \setminus \{e\}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $b \in G$, tal que $nb = a$.

[13] Friedrich Kasch, *Modules and Rings*, Londres, Academic Press, 1982, p. 121.

Demostración. Supóngase $\overset{\circ}{C_i} = \emptyset$ para toda i. Entonces, para toda i, $X \setminus C_i$ es un abierto denso. Por la Proposición 2.54, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X \setminus C_i \neq \emptyset$, es decir, $X \neq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, lo cual es una contradicción. □

Corolario 2.56. *Todo espacio localmente compacto, Hausdorff y numerable es discreto.*

Proposición 2.57. *Si G y H son grupos localmente compactos y Hausdorff y además G es Lindelöf, todo homomorfismo continuo y suprayectivo, $G \xrightarrow{f} H$, es abierto.*

Demostración. Basta probar que f manda vecindades abiertas de e en G, en vecindades de e en H. Sea U vecindad abierta de e en G y sea V vecindad simétrica y compacta de e tal $V \cdot V \subset U$. Como G es Lindelöf, $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V \cdot g_i$, para algun conjunto $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto

$$H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(V) \cdot f(g_i)$$

Por el Corolario 2.55, para alguna i el interior de $f(V) \cdot f(g_i)$ es no vacío. Entonces el interior de $f(V)$ es no vacío. Sea $W \subset f(V)$ abierto no vacío. Si $w = f(v) \in W$,

$$e \in W \cdot w^{-1} \subset f(V) \cdot f(v^{-1}) \subset f(V \cdot V) \subset f(U)$$

Se demostró que $f(U)$ es vecindad de e. □

Lema 2.58. *Todo subgrupo discreto H de un grupo G de Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Como H es discreto, existe $W \in \overset{\circ}{\Sigma}$ simétrica tal que $W \cap H = \{e\}$. Si $h', h \in H$ y $h' \in h \cdot W$, entonces $h^{-1} \cdot h' \in W$. Por lo tanto $h' = h$.

Demostraremos que $\{\{h\} | h \in H\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de G. Si $g \in h \cdot W$, para alguna $h \in H$, la vecindad buscada para g es $h \cdot W$. Pues $h \cdot W \cap H = \{h\}$. Sea $g \notin h \cdot W$, para toda $h \in H$. Si para alguna $h \in H$, $h \in g \cdot W$, $g \in h \cdot W^{-1} = h \cdot W$. Esto último es una contradicción. Por lo tanto $g \cdot W$ es la vecindad buscada para g.

$\{\{h\} | h \in H\}$ es localmente finita, por ello

$$H = \bigcup \{\{h\} | h \in H\}$$

es cerrado.[14] □

Lema 2.59. *Si $A \subset G$ es denso, para toda $U \in \overset{\circ}{\Sigma}$,*

$$\{a \cdot U \mid a \in A\}$$

es una cubierta abierta de G.

[14] Carlos Prieto, *op. cit.*, p. 259.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase U simétrica. Como $x \cdot U$ es una vecindad abierta de x, existe $a \in A \cap x \cdot U$. Por lo tanto

$$x \in a \cdot U^{-1} = a \cdot U$$

□

Definición 2.60. *Un grupo topológico G se dice monotético si contiene un subgrupo cíclico denso.*

Observación 2.61. Todo grupo monotético y Hausdorff es abeliano.

Demostración. Supóngase que $G = \overline{H}$ con H un subgrupo abeliano. Por lo tanto

$$G \times G = \overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H}$$

La aplicación $(g, h) \overset{\gamma}{\mapsto} g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$ es continua y, para todo $(h, k) \in H \times H$, $\gamma(h, k) = e$. Por lo tanto,

$$\gamma(G \times G) = \gamma(\overline{H \times H}) \subset \overline{\gamma(H \times H)} = \overline{\{e\}} = \{e\}$$

□

Teorema 2.62. *Todo grupo ALCH, monotético y no compacto es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Supóngase que G no es discreto. Entonces un subgrupo cíclico denso no puede ser finito. Por lo tanto el subgrupo cíclico y denso es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Obsérvese que no se está diciendo que son topológicamente isomorfos. Pero haciendo un abuso de notación, podemos suponer que $\overline{\mathbb{Z}} = G$.

Denotemos $e = 0$ y usemos por esta vez la notación aditiva para la operación de G. Definamos $\mathbb{Z}_-$ y $\mathbb{Z}_+$ como los enteros negativos y los enteros positivos (sin el 0) respectivamente.

Se afirma que cada uno de estos conjuntos es denso en G. Demostremos que $\mathbb{Z}_+$ es denso. Primero probaremos que $\mathbb{Z}_-$ y $\mathbb{Z}_+$ intersectan a todas las vecindades de 0. Sea $A \in \overset{\circ}{\Sigma}$ y, sin pérdida de generalidad, supóngase A simétrica. Si $A \cap \mathbb{Z}$ es finito, $\mathbb{Z}$ sería un subgrupo discreto de un grupo de Hausdorff, y por el Lema 2.58, $\mathbb{Z}$ sería cerrado y denso. Entonces $G = \mathbb{Z}$, y por el Corolario 2.56, G sería discreto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \cap \mathbb{Z}$ es infinito. Como $A \cap \mathbb{Z}$ es simétrico, contiene una infinidad de enteros positivos y una infinidad de enteros negativos.

Sea $V \subset G$ abierto, como $\mathbb{Z}$ es denso, $V \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. Si $V \cap \mathbb{Z}$ es finito, por los mismos argumentos de arriba, $\mathbb{Z}$ sería discreto y llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto existe $x \neq 0$ que pertenece a $V \cap \mathbb{Z}$. Si $x \in \mathbb{Z}_+$ se terminaría, entonces supóngase $x \in \mathbb{Z}_-$. Se tiene que $-x + V \in \overset{\circ}{\Sigma}$, por ello existe $W \in \overset{\circ}{\Sigma}$ simétrica tal que $W \subset -x + V$. Por lo que observamos antes, $W \cap \mathbb{Z}_+$ es infinito. Por lo tanto existe $z \in W \cap \mathbb{Z}_+$ tal que $z + x \in \mathbb{Z}_+ \cap V$. Lo cual implica que $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Z}_-$ son densos.

Sea $U \in \mathring{\Sigma}$ tal que $\overline{U}$ es compacta. Por el Lema 2.59 $\{n + U \mid n \in \mathbb{Z}_-\}$ y $\{n+U \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ son cubiertas abiertas de G. Como $\overline{U}$ es compacta, existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\overline{U} \subset -1 + U \,\cup\, -2 + U \,\cup \cdots \cup\, -m + U$$

Se afirma que

$$G = 1 + \overline{U} \,\cup \cdots \cup\, m + \overline{U}$$

Sea $g \in G$ y sea n_g el primer elemento de $\mathbb{Z}_+$ tal que $g = n_g + u$ para algún $u \in U$. Como $u \in \overline{U}$, existe $0 > j \geq -m$, tal que $u \in j + U$. Por lo tanto $g \in n_g + j + U$. Por la definición de n_g y por ser $j < 0$, $n_g + j \notin \mathbb{Z}_+$. Entonces

$$n_g \leq |j| \leq m$$

es decir

$$G = 1 + U \cup \cdots \cup |m| + U$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} G &= \overline{1 + U \cup \cdots \cup |m| + U} \\ &= \overline{1 + U} \cup \cdots \cup \overline{|m| + U} \\ &= 1 + \overline{U} \cup \cdots \cup |m| + \overline{U} \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, pues G no es compacto. Por lo tanto G es discreto. Entonces G es igual a su subgrupo cíclico denso y como G no es compacto, G es infinito. Por lo tanto G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$. □

Corolario 2.63. *Si G es localmente compacto y Hausdorff, para toda $x \in G$, $\overline{< x >}$ es compacto o topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Bajo estas hipótesis, para toda $x \in G$, $\overline{< x >}$ es un grupo ALCH monotético. Por la Proposición 2.62, $\overline{< x >}$ es compacto o discreto. □

Definición 2.64. *Un grupo G se dice compactamente generado si existe $K \subset G$ compacto tal que $< K >= G$.*

Observación 2.65. Todo grupo Hausdorff, conexo y localmente compacto es compactamente generado.

Demostración. Si $V \in \Sigma$ es simétrica y compacta, $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n$. □

Definición 2.66. *El grado de no compacidad de un grupo G es el ínfimo (cardinal) de los cardinales κ tales que existe $L \subset G$ compacto tal que $G = L \cdot H$, para algún H, subgrupo de G, generado por un conjunto de cardinalidad κ. El grado de no compacidad de G se denotará $nc(G)$.*

Observación 2.67. G es compacto si, y sólo si, $nc(G) = 0$.

Proposición 2.68. *Para todo grupo G localmente compacto y compactamente generado, $nc(G) < \infty$.*

Demostración. Supóngase $< K >= G$, para algún $K \subset G$ compacto. Se puede suponer que K contiene a e. Si $V \in \Sigma$ es compacta, $K \cdot V$ genera a G. Entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G está generado por un subconjunto $\overline{U}$ compacto, simétrico y tal que U es una vecindad abierta de e.

Sea $V \in \Sigma$ abierta tal que $V \cdot V \subset U$. Como K es compacto, existe $F \subset K$ finito tal que $K \subset F \cdot V$. Entonces

$$K \cdot K \subset F \cdot F \cdot V \cdot V \subset < F > \cdot K$$

Si $K^n \subset < F > \cdot K$,

$$\begin{aligned} K^n \cdot K &\subset < F > \cdot K \cdot K \\ &\subset < F > \cdot K \end{aligned}$$

Entonces $nc(G) < \infty$. □

Observación 2.69. En la demostración de la Proposición 2.68 se demostró que en un grupo G localmente compacto y compactamente generado, para toda $K \in \Sigma$ compacta que genere a G, existe un subconjunto finito F tal que, $K \cdot < F > = G$.

Proposición 2.70. *Si G es ALCH y $nc(G) < \infty$, para cada $b \in G \setminus \{e\}$, existe un morfismo continuo y abierto $G \xrightarrow{p} G_b$, tal que $p(b) \neq e$, con G_b un grupo ALCH tal que $nc(G_b) = 0$ o $nc(G_b) < nc(G)$.*

Demostración. Si G es compacto, para toda $b \in G \setminus \{e\}$ existe $\varphi \in G^*$ tal que $\varphi(b) \neq 1$ (ver el Teorema 2.50). Sea $G_b = G/ker(\varphi)$ y sea p la proyección canónica. Como $G/ker(\varphi)$ es un grupo compacto (ver la Proposición 1.7), $nc(G/ker(\varphi)) = 0$.

Supóngase $nc(G) > 0$. Entonces existen $K \subset G$ compacto y $F \subset G$ no vacío y finito, tales que

$$G = K \cdot < F >$$

Si $a \in F$, $\overline{< a >}$ no es compacto. Ya que de lo contrario, $K \cup \overline{< a >}$ sería compacto y se tendría

$$G = \left(K \cup \overline{< a >}\right) \cdot < F \setminus \{a\} >$$

Lo cual es una contradicción pues F es de tamaño mínimo con esa propiedad. Como $< a >$ es denso en $\overline{< a >}$, por el Teorema 2.62, $\overline{< a >} = < a >$ es discreto e isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Para cada $b \neq e$ existe H, un subgrupo (discreto) no trivial de $< a >$ que no contiene a b. Afirmamos que la aplicación canónica $G \xrightarrow{\pi} G/H$ es el morfismo buscado. Por el Lema 2.58 y la Proposición 1.7, G/H es un grupo ALCH. El morfismo π es continuo, abierto y $\pi(b) \neq e$. Sólo falta demostrar que $nc(G/H) < nc(G)$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} G/H &= \pi(K \cdot < F >) \\ &= \pi\left(K \cdot < a > \cdot < F \setminus \{a\} > \right) \\ &= \pi(K) \cdot \pi(< a >) \cdot \pi(< F \setminus \{a\} >) \\ &= \pi(K) \cdot \pi(< a >) \cdot < \pi(F \setminus \{a\}) > \end{aligned}$$

Como

$$\pi(< a >) \cong < a > /H \cong \mathbb{Z}_l$$

para alguna $l \in \mathbb{N}$, $\pi(K) \cdot \pi(< a >)$ es compacto. Entonces $nc(G/H) \leq nc(G) - 1$. $\square$

Teorema 2.71. *Si G es un grupo ALCH, para toda $x \neq e$ en G, existe $\varphi \in G^*$, tal que $\varphi(x) \neq 1$.*

Demostración. Sea V en Σ compacta y simétrica. El grupo compactamente generado $H =< V >$ es abierto.

Sea $x \neq e$, y supongamos $x \notin H$. Sea $G \xrightarrow{\pi} G/H$ la proyección canónica. Como H es abierto, G/H es discreto y por la Proposición 2.53, existe morfismo (continuo) $G/H \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1$ tal que $\varphi(x \cdot H) \neq 1$. Por lo tanto $\varphi \circ \pi(x) \neq 1$.

Ahora supóngamos $x \in H$. Obsérvese que H es ALCH y compactamete generado. Por la Proposición 2.68, H tiene grado de no compacidad finito. Aplicando sucesivamente la Proposición 2.70 podemos conlcuir que existe un homomorismo continuo $H \xrightarrow{p} G'$, con G' un grupo ACH, tal que $p(x) \neq e$. Por el Teorema 2.50 existe un homomorfismo continuo $G' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1$ tal que $\varphi(p(x)) \neq 1$. Por lo tanto $\varphi \circ p(x) \neq 1$. Como $\mathbb{S}^1$ es divisible, $\varphi \circ p$ se puede extender a un homomorfismo con dominio G y que no se anula en x. Este homomorfismo es continuo, pues su restricción a una vecindad de e es continua. $\square$

Observación 2.72. Obsérvese que las hipótesis para G de ser Hausdorff y abeliano no son restrictivas. Supóngase que para cada $g \neq e$ existe $\varphi \in G^*$ tal que $\varphi(g) \neq 1$. Claramente G tiene que ser Hausdorff. G es abeliano pues existe un homomorfismo inyectivo

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & \prod_{\varphi \in G^*} \mathbb{S}^1{}_\varphi \\ g & \mapsto & (\varphi(g))_{\varphi \in G^*} \end{array}$$

El Teorema de Gel'fand-Raikov dice que si G es un grupo localmente compacto y Hausdorff, para todo $e \neq g \in G$ existe una representación de G, ρ, en los operadores unitarios de un espacio de Hilbert, tal que $\rho(g) \neq Id$. Una demostración se puede encontrar en el libro de Edwin Hewitt y Kenneth Ross, *Abstract Harmonic Analysis*.[15] El Teorema 2.71 es un corolario del Teorema de Gel'fand-Raikov.[16]

[15] Edwin Hewitt y Kenneth Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Berlín, Springer-Verlag, 1963, p. 343.

[16] *Ídem*, p. 345.

Capítulo 3

Dualidad de Pontryagin

Este capítulo fue tomado casi en su totalidad del libro *Grupos Continuos*[1] de Lev Pontryagin y del libro *Topological Groups and Related Structures*[2] de Alexander Arhangel'skii y Mikhail Tkachenko.

Para todo grupo G de Hausdorff se dará una topología de grupo a G^* de modo que sea ALCH. Después se mostrará que algunas propiedades, tanto algebraicas como topológicas, que se encuentran en "dualidad" bajo el funtor $G \mapsto G^*$. Por ejemplo, los grupos AD y los grupos ACH están en dualidad. Este hecho será base para la demostración del resultado principal de este capítulo: para todo grupo ALCH, G, existe un isomorfismo topológico natural entre G y G^{**}.

3.1. El grupo dual

Si X es localmente compacto, la topología compacto abierta está contenida en todas aquellas topologías con las cuales la evaluación es continua. Además, la topología compacto abierta tiene buenas propiedades con respecto a las operaciones con funciones. Parece natural darle esa topología a los espacios de funciones. Observado esto y debido a que se trabajará mayormente con grupos abelianos localmente compactos, la topología que se le da a $Top(G, \mathbb{S}^1)$ es la compacto abierta.

Si $\alpha, \beta \in G^*$, se pueden definir el caracter inverso de α, $g \xmapsto{\alpha^{-1}} \alpha(g)^{-1}$, el caracter producto de α y β, $g \xmapsto{\alpha\cdot\beta} \alpha(g)\cdot\beta(g)$, y el caracter neutro $g \xmapsto{\mathbb{1}} 1_{\mathbb{S}^1}$. Con esta operación G^* es un grupo abeliano. Se demostrará que G^*, con la topología de subespacio de $Top(G, \mathbb{S}^1)$, es un grupo topológico.

Proposición 3.1. *En un grupo topológico G se cumple:*

a) Para cualesquiera U y V en Σ existe $W \in \Sigma$ tal que $W \subset U \cap V$.

b) Para todo $U \in \Sigma$ existe $V \in \Sigma$ tal que $VV^{-1} \subset U$.

c) Para cada $U \in \Sigma$ y $a \in G$ existe $V \in \Sigma$ tal que $a^{-1}Va \subset U$.

[1] Lev Pontryagin, *op. cit.*, capítulo 6.

[2] Alexander Arhangel'skii y Mikhail Tkachenko, *op. cit.*

d) Para toda $U \in \Sigma$ existe $V \subset U$ en Σ tal que, para cada $v \in V$, existe $W \in \Sigma$ tal que $Wv \subset V$.

Demostración. a) Es trivial. Para b) consideremos la función $(g, h) \mapsto gh^{-1}$. Si $U \in \Sigma$, por continuidad, existe una vecindad abierta de (e, e), $V \times W$, tal que

$$VW^{-1} \subset U$$

La vecindad buscada es $V \cap W$. c) Sean $U \in \Sigma$ y $a \in G$. Como la función $(g, h, k) \mapsto g^{-1}hk$ es continua, por lo tanto, existe una vecindad abierta $A \times B \times A$ de (a, e, a) tal que $A^{-1}BA \subset U$. El conjunto buscado es B. Para d) obsérvese que, para cada $U \in \Sigma$ y para cada $u \in U$, $U \cdot u^{-1} \in \Sigma$. $U \cdot u^{-1}$ es el elemento de Σ buscado. $\square$

Proposición 3.2. *Sea G un grupo y Σ una familia de subconjuntos de G que contienen a e. Si Σ cumple los cuatro incisos de la proposición anterior, G puede ser dotado de una (única) topología con la cual es grupo topológico y de la cual Σ es una base de vecindades de e.*

Demostración. Se declara que $A \subset G$ es abierto si, y sólo si, para cada $a \in A$, existe $U \in \Sigma$, tal que $Ua \subset A$. Con esta definición los elementos de Σ, $\emptyset$ y G son abiertos. Si $g \in A \cap B$, con A y B abiertos, existen U y V en Σ, tales que $Ug \subset A$ y $Vg \subset B$. Por a) existe $W \in \Sigma$ tal que $W \subset U \cap V$. Entonces

$$g \in Wg \subset (U \cap V)g = Ug \cap Vg \subset A \cap B$$

Por lo tanto la intersección de dos abiertos es abierta. Inductivamente se verifica que la intersección de cualquier familia finita de abiertos es abierta. Es inmediato que la unión de abiertos es abierta y que Σ es una base de vecindades de e para la topología recién construida.

Para demostrar que $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$ es continua considérese una vecindad abierta de $a \cdot b^{-1}$, sin pérdida de generalidad, de la forma $Ua \cdot b^{-1}$ donde $U \in \Sigma$. Por b) existe $V \in \Sigma$ tal que $VV^{-1} \subset U$, y por c) existe $W \in \Sigma$ tal que

$$a \cdot b^{-1}Wb \cdot a^{-1} \subset V$$

Entonces

$$a \cdot b^{-1}W^{-1}b \cdot a^{-1} = \left(a \cdot b^{-1}Wb \cdot a^{-1}\right)^{-1} \subset V^{-1}$$

y por lo tanto

$$a \cdot b^{-1}W^{-1} \subset V^{-1}a \cdot b^{-1}$$

Dado lo anterior se tiene

$$Va(Wb)^{-1} = Va \cdot b^{-1}W^{-1} \subset VV^{-1}a \cdot b^{-1} \subset Ua \cdot b^{-1}$$

Por lo tanto la vecindad $Va \times Wb$ de (a, b) es mandada a $Ua \cdot b^{-1}$. Esto demuestra que $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$ es continua en (a, b).

Toda topología que hace a G grupo topológico queda determinada por el conjunto de vecindades de e. Es decir, si dos topologías comparten una base de vecindades de e, entonces e tiene las mismas vecindades en ambas topologías. Por lo tanto dos topologías que hacen a G grupo topológico y que tienen a Σ como base de vecindades de e son iguales. $\square$

Proposición 3.3. *Si G es un grupo topológico de Hausdorff, G^* con la topología compacto abierta es un grupo topológico abeliano y Hausdorff.*

Demostración. Cualquier espacio de funciones continuas con codominio Hausdorff y con la topología compacto abierta es Hausdorff.

Si $(g_\lambda, h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en $G^* \times G^*$ que converge a (g,h), para K compacto y para todo $k \in K$,

$$\begin{aligned} d\Big(g(k)h(k), g_\lambda(k)h_\lambda(k)\Big) &\leq d\Big(g(k)h(k), g(k)h_\lambda(k)\Big) + d\Big(g(k)h_\lambda(k), g_\lambda(k)h_\lambda(k)\Big) \\ &= d(h(k), h_\lambda(k)) + d(g(k), g_\lambda(k)) \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.10, la operación de G^* es continua.

Sea ι la función que manda a cada elemento de G^* a su inverso. Demostraremos que es continua alrededor de $\mathbb{1}$. Se tiene que toda vecindad básica alrededor de $\mathbb{1}$ contiene una de a forma U^K donde K es un compacto y U es simétrico. Es claro que $\iota^{-1}(U^K) = U^K$. □

Observación 3.4. Se puede demostrar, utilizando los mismos argumentos de la demostración de la proposición anterior, que

$$Top\big((G,e),(\mathbb{S}^1,1)\big)$$

con la multiplicación puntual, y que

$$Top\big((G,e),(\mathbb{R}^n,0)\big)$$

con la suma puntual, son grupos topológicos.

Definición 3.5. *a) Sea* **Gr** *la categoría donde los objetos son los grupos topológicos de Hausdorff y donde los morfismos son los homomorfismos continuos.*

b) Sea **Ab** *la categoría donde los objetos son los grupos topológicos abelianos de Hausdorff y donde los morfismos son los homomorfismos de grupos.*

Proposición 3.6. *La asignación*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Gr} & \xrightarrow{(\,)^*} & \mathbf{Ab} \\ G & \longmapsto & G^* \end{array}$$

es un funtor contravariante.

Demostración. Dados G y H grupos topológicos de Hausdorff y $G \xrightarrow{f} H$ un homomorfismo continuo, el morfismo dual de f, f^*, es la función

$$\begin{array}{ccc} H^* & \xrightarrow{f^*} & G^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Demostraremos que f^* es continua en $\mathbb{1}$. Si $\mathbb{1} = \mathbb{1} \circ f \in U^K$, la vecindad buscada de $\mathbb{1} \in H^*$ es $U^{f(K)}$. .

Si $\varphi, \psi \in G^*$,

$$\begin{aligned} f^*(\varphi \cdot \psi)(g) &:= (\varphi \cdot \psi) \circ f(g) \\ &= \varphi(f(g)) \cdot \psi(f(g)) \\ &= \big(f^*(\varphi) \cdot f^*(\psi)\big)(g) \end{aligned}$$

Por lo tanto f^* es un morfismo de grupos. Si se tienen $G \xrightarrow{\gamma} H \xrightarrow{\lambda} K$ morfismos , para toda $\varphi \in K^*$,

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \lambda)^*(\varphi) &= \varphi \circ \gamma \circ \lambda \\ &= \gamma^*(\varphi) \circ \lambda \\ &= \lambda^*(\gamma^*(\varphi)) \end{aligned}$$

Por último obsérvese que $1_G{}^*(\varphi) = \varphi \circ 1_G = \varphi$. Por lo tanto $(1_G)^* = 1_{G^*}$. $\square$

En adelante la topología que se la dará a G^* es la topología compacto abierta. A G^* le llamaremos el grupo dual de G.

Definición 3.7. *Llamemos Λ_n al conjunto*

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in (-1/3n, 1/3n)\}$$

Lema 3.8. *Λ_1 no contiene subgrupos no triviales de $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Sea $z \in \Lambda_1 \setminus \{1\}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase z en el semiplano superior. El argumento de z^n, para alguna n tiene que ser mayor a 1 y menor a π. Por lo tanto $z^n \notin \Lambda_1$. $\square$

Lema 3.9. *Si X es discreto, para todo espacio Y,*

$$\prod_{x \in X} Y_x \approx Top(X, Y)$$

con la topología compacto abierta. Es decir, si X es discreto, para todo Y, las topologías de la convergencia puntual y compacto abierta son iguales.

Demostración. Se tiene la biyección

$$\begin{array}{ccc} Top(X,Y) & \xrightarrow{\varphi} & \prod_{x \in X} Y_x \\ f & \longmapsto & (f(x))_{x \in X} \end{array}$$

Si $A_{x_1} \times \cdots \times A_{x_n} \times \prod_{x \neq x_i} Y_x$ es un abierto básico de $\prod_{x \in X} Y_x$,

$$\varphi^{-1}\left(A_{x_1} \times \cdots \times A_{x_n} \times \prod_{x \neq x_i} Y_x\right) = A_{x_1}{}^{\{x_1\}} \cap \cdots \cap A_{x_n}{}^{\{x_n\}}$$

Por lo tanto φ es continua. Si $K \subset X$ es compacto, $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Por lo tanto, para todo $A \subset Y$ abierto,

$$A^K = A^{\{x_1, \ldots, x_n\}} = A^{\{x_1\}} \cap \cdots \cap A^{\{x_n\}}$$

Por lo tanto φ manda subbásicos en abiertos. Entonces φ es continua, abierta y biyectiva. $\square$

Proposición 3.10. *Si G es un grupo topológico, G^* es cerrado en $Top(G, \mathbb{S}^1)$.*

Demostración. Si $f \notin G^*$, existen $g, h \in G$ tales que $f(g \cdot h) \neq f(g) \cdot f(h)$. Como la aplicación $\lambda \mapsto \lambda(g)$ es continua y $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico, la función

$$\begin{array}{ccl} Top(G, \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{F} & \mathbb{S}^1 \\ \lambda & \longmapsto & \lambda(g \cdot h) \cdot \lambda(h)^{-1} \cdot \lambda(g)^{-1} \end{array}$$

es continua. El conjunto $F^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})$ es abierto, entonces f tiene una vecindad contenida en $F^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})$. Ninguna función en esa vecindad puede ser un caracter. □

Teorema 3.11. *Si G es compacto, G^* es discreto.*

Demostración. Se tiene que $\{\mathbb{1}\} = {\Lambda_1}^G$, ya que por el Lema 3.8 no hay subrupo no trivial de $\mathbb{S}^1$ contenido en Λ_1. □

Teorema 3.12. *Si G es discreto, G^* es compacto.*

Demostración. Si G es discreto, por el Lema 3.9,

$$Top(G, \mathbb{S}^1) \approx \prod_{g \in G} {\mathbb{S}^1}_g$$

Por lo tanto $Top(G, \mathbb{S}^1)$ es compacto. Como G^* es cerrado en $Top(G, \mathbb{S}^1)$, G^* es compacto. □

Lema 3.13. *Si $\{z, z^2, \dots, z^n\} \subset \Lambda_1$, $z \in \Lambda_n$.*

Demostración. Supóngase que $z, z^2, \dots, z^n \in \Lambda_1$. Sin pérdida de generalidad, sea z en el semiplano superior. Si $arg(z)$ no pertenece a $(0, 1/3n)$, existe $m \leq n$ tal que $arg(z^m)$ pertenece a $(1/3, \pi)$. Por lo tanto $z^m \notin \Lambda_1$. Lo cual es una contradicción. □

Lema 3.14. *Si $G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{S}^1$ es un morfismo de grupos tal que $\alpha(U) \subset \Lambda_1$ para alguna $U \in \Sigma$, α es continuo.*

Demostración. Supóngase $U \in \Sigma$ tal que $\alpha(U) \subset \Lambda_1$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $V \in \Sigma$ tales que

$$\underbrace{V \cdot V \cdot \dots \cdot V}_{k\,veces} \subset U$$

Para toda $v \in V$,

$$\alpha(v), \alpha(v)^2, \dots, \alpha(v)^k \in \alpha(U) \subset \Lambda_1$$

Por el Lema 3.13, $\alpha(v) \in \Lambda_k$. Como $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de vecindades de 1, α es continua en e. □

Lema 3.15. *Sea G un grupo de Hausdorff. Si $K \in \Sigma$, ${\Lambda_4}^K \subset G^*$ tiene cerradura compacta.*

Demostración. Sólo para esta demostración introduciremos notación. Denotemos $\tilde{G}$, a G con la topología discreta. Dados conjuntos $B \subset G$ y $A \subset \mathbb{S}^1$, denotaremos A^B al conjunto de morfismos continuos de G en $\mathbb{S}^1$ que mandan B en A y $\tilde{A}^B$ al conjunto de morfismos de G en $\mathbb{S}^1$ que mandan B en A.

Sea $\varphi \in \overline{{\Lambda_4}^K}$ y $x \in K$. Si $\varphi(x) \notin \overline{\Lambda_4}$, $\varphi(x)$ tendría una vecindad V, tal que $V \cap \Lambda_4 = \emptyset$. Pero $V^{\{x\}} \cap {\Lambda_4}^K \neq \emptyset$. Esto último es una contradicción. Por lo tanto $\overline{{\Lambda_4}^K} \subset \overline{\Lambda_4}^K$. Entonces basta probar que $\overline{\Lambda_4}^K$ es compacto.

Primero demostraremos que $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$ es cerrado (compacto) en $(\tilde{G})^*$. Después mostraremos que $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K \subset (\tilde{G})^*$ y $\overline{\Lambda_4}^K \subset G^*$ son iguales como conjuntos y que la topología de subespacio de $(\tilde{G})^*$ en $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$, y la topología de subespacio de G^* en $\overline{\Lambda_4}^K$, son la misma.

Si $f \notin \tilde{\overline{\Lambda_4}}^K \subset (\tilde{G})^*$, existe $x \in K$ tal que $f(x) \notin \overline{\Lambda_4}$. Por lo tanto existe $A \subset \mathbb{S}^1$ abierto, alrededor de $f(x)$, tal que $A \cap \overline{\Lambda_4} = \emptyset$. Entonces $\tilde{A}^{\{x\}} \cap \tilde{\overline{\Lambda_4}}^K = \emptyset$. Como $f \in \tilde{A}^{\{x\}}$ y $\tilde{A}^{\{x\}} \subset (\tilde{G})^*$ es abierto, $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K \subset (\tilde{G})^*$ es cerrado. Por el Teorema 3.12, $(\tilde{G})^*$ es compacto. Por lo tanto $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$ es compacto.

Por el Lema 3.14, todo $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1$ morfismo de grupos tal que $\varphi(K) \subset \overline{\Lambda_4} \subset \Lambda_1$ es continuo, por lo tanto $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K \subset \overline{\Lambda_4}^K$. La otra contención es trivial.

Un subbásico de $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$ tiene la forma $\tilde{V}^{\{x_1,\dots,x_n\}} \cap \tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$, con $\tilde{V}^{\{x_1,\dots,x_n\}}$ subbásico de $(\tilde{G})^*$. Por el Lema 3.14,

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{\{x_1,\dots,x_n\}} \cap \tilde{\overline{\Lambda_4}}^K &= \tilde{V}^{\{x_1,\dots,x_n\}} \cap \overline{\Lambda_4}^K \\ &= V^{\{x_1,\dots,x_n\}} \cap \overline{\Lambda_4}^K \end{aligned}$$

Como $V^{\{x_1,\dots,x_n\}}$ es abierto en G^*, $\tilde{V}^{\{x_1,\dots,x_n\}} \cap \tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$ es abierto en $\overline{\Lambda_4}^K \subset G^*$. Entonces todo subbásico de $\tilde{\overline{\Lambda_4}}^K$ es abierto en $\overline{\Lambda_4}^K$.

Como G^* es un grupo topológico (ver la Proposición 3.3), cualquier vecindad subbásica de φ en $\overline{\Lambda_4}^K$ contiene una de la forma $\left({\Lambda_m}^L \cdot \varphi\right) \cap \overline{\Lambda_4}^K$, para algun $m \in \mathbb{N}$ y para algún $L \subset G$ compacto. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $m > 2$.

Sea $V \in \Sigma$ tal que

$$\underbrace{V \cdot V \cdot \cdots \cdot V}_{2m\, veces} \subset K$$

Como $\{V \cdot l\}_{l \in L}$ es una cubierta abierta de L, existen $l_1, \dots, l_r \in L$ tales que

$$L \subset V \cdot l_1 \cup \cdots \cup V \cdot l_r = V \cdot \{l_1, \dots, l_r\}$$

Por el Lema 3.14,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{2m}^{\{l_1,\cdots,l_r\}} \cdot \varphi \cap \tilde{\overline{\Lambda_4}}^K &= \tilde{\Lambda}_{2m}^{\{l_1,\cdots,l_r\}} \cdot \varphi \cap \overline{\Lambda_4}^K \\ &= {\Lambda_{2m}}^{\{l_1,\cdots,l_r\}} \cdot \varphi \cap \overline{\Lambda_4}^K \end{aligned}$$

Si $\gamma \cdot \varphi \in {\Lambda_{2m}}^{\{l_1,\cdots,l_r\}} \cdot \varphi \cap \overline{\Lambda_4}^K$, para toda $k \in K$,

$$\gamma(k) = \gamma(k) \cdot \varphi(k) \cdot \varphi(k)^{-1} \in \overline{\Lambda_4} \cdot \overline{\Lambda_4} \subset \Lambda_1$$

Por lo tanto, para toda $v \in V$,

$$\{\gamma(v), \gamma(v)^2, \ldots, \gamma(v)^{2m}\} \subset \gamma(K) \subset \Lambda_1$$

Entonces, por el Lema 3.13, $\gamma(V) \subset \Lambda_{2m}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma(L) &\subset \gamma(V \cdot \{l_1, \cdots, l_r\}) \\ &\subset \gamma(V) \cdot \gamma(\{l_1, \cdots, l_r\}) \\ &\subset \Lambda_{2m} \cdot \Lambda_{2m} \\ &\subset \Lambda_m \end{aligned}$$

Como $(\tilde{G})^*$ es grupo topológico (con la topología compacto abierta), $\tilde{\Lambda}_{2m}^{\{l_1,\cdots,l_r\}} \cdot \varphi$ es vecindad de φ en $(\tilde{G})^*$. Se demostró que

$$\tilde{\Lambda}_{2m}^{\{l_1,\cdots,l_r\}} \cdot \varphi \cap \overline{\tilde{\Lambda}_4}^K \subset \left(\Lambda_m{}^L \cdot \varphi\right) \cap \overline{\Lambda_4}^K$$

Por lo tanto $\overline{\Lambda_4}^K$ y $\overline{\tilde{\Lambda}_4}^K$ tienen las mismas topologías y $\overline{\Lambda_4}^K$ es compacto. □

Proposición 3.16. *Si G es Hausdorff y localmente compacto, G^* es un grupo ALCH.*

Demostración. Claramente G^* es abeliano y Hausdorff. Como G^* es un grupo topológico, para demostrar que es localmente compacto basta verificar que $\mathbb{1}$ tiene una vecindad compacta. Por el Lema 3.15, $\overline{\Lambda_4}^K$ es compacta. □

Los primeros grupos duales que calcularemos son $\mathbb{S}^{1*}$ y $\mathbb{Z}^*$. Los siguientes resultados van encaminados a ello.

Proposición 3.17. *Un subgrupo de $\mathbb{S}^1$ es infinito si, y sólo si, es denso.*

Demostración. Todo subconjunto infinito de $\mathbb{S}^1$ se acumula en algún punto. Entonces, en un subgrupo infinito H de $\mathbb{S}^1$ podemos encontrar pares de puntos tan cerca entre ellos como se quiera. Por lo tanto, mediante traslaciones, podemos encontrar puntos en H tan cerca de 1 como se quiera. Por lo tanto, si tomamos un elemento de H que se encuentre a una distancia menor a $\epsilon > 0$ de 1, todo punto en $\mathbb{S}^1$ se encontrará a una distancia menor a ϵ del grupo generado por ese elemento. □

Corolario 3.18. *Todo subgrupo infinito y cerrado de $\mathbb{S}^1$ coincide con $\mathbb{S}^1$.*

Proposición 3.19. *Todo subgrupo finito de $\mathbb{S}^1$ es cíclico.*

Demostración. Sea H un subgrupo finito de $\mathbb{S}^1$. Existe $h \in H \setminus \{1\}$ tal que el argumento de h es menor entre los argumentos de elementos de H. Se afirma que $< h >= H$. Para cada $k \in H$, existe n tal que k está en el arco que va de h^n a h^{n+1}. Si k no fuera igual a h^n ni a h^{n+1}, el argumento de $h^{n+1} \cdot k^{-1}$ sería menor al argumento de h. Por lo tanto k debe pertenecer al grupo generado por h. □

Corolario 3.20. *Todo subgrupo propio y cerrado de $\mathbb{S}^1$ es cíclico y finito.*

Demostración. Por la Proposición 3.17, todo subgrupo propio y cerrado de $\mathbb{S}^1$ es finito y por la Proposición 3.19, todo subgrupo finito de $\mathbb{S}^1$ es cíclico. $\square$

Proposición 3.21. *Si H es un subgrupo de $\mathbb{S}^1$ de orden n, entonces H es el conjunto de raíces enésimas de la unidad.*

Demostración. Si $|H| = n$, para toda $h \in H$, $h^n = 1$. $\square$

Proposición 3.22. *$\mathbb{Z}^*$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ es discreto, cualquier homomorfismo de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{S}^1$ es un caracter. Un homorfismo que tiene como dominio a $\mathbb{Z}$ queda determinado por la imagen del 1. Definamos el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^* & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{S}^1 \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

Si dos caracteres de $\mathbb{Z}$ coinciden en $1 \in \mathbb{Z}$, son iguales. Por ello, Ψ es inyectiva. La suprayectividad de Ψ es evidente.

Por la Proposición 1.2, Ψ es continua. En el Teorema 3.12 se probó que $\mathbb{Z}^*$ es compacto. Entonces Ψ es continua, biyectiva y cerrada. Es decir, Ψ es un isomorfismo topológico. $\square$

Dualmente.

Proposición 3.23. *Todo caracter de $\mathbb{S}^1$, distinto de $\mathbb{1}$ es de la forma $z \mapsto z^n$, para alguna n. Esto define $\mathbb{S}^{1^*} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{Z}$, un isomorfismo topológico.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{S}^{1^*} \setminus \{\mathbb{1}\}$. Entonces $ker(\lambda)$ es finito (ver la Proposición 3.17). Se afirma que $\lambda = z^n$, con $n = \pm|ker(\lambda)|$.

Si λ es inyectiva, $\lambda(\mathbb{S}^1)$ es un subgrupo compacto e infinito de $\mathbb{S}^1$. Por la Proposición 3.17, $\lambda(\mathbb{S}^1)$ es denso. Por lo tanto λ es suprayectiva.

Como λ es un isomorfismo, manda raíces primitivas de la unidad en raíces primitivas de la unidad. Por lo tanto $\lambda(-1) = -1$. Por ser continua, λ mapea el arco superior entre 1 y -1 en alguno de los dos arcos que unen a 1 y -1. Supóngamos que λ mapea el arco superior en si mismo.

Para toda n, el arco entre 1 y $e^{2\pi i/n}$, debe mapearse al arco entre 1 y alguna raíz enésima primitiva de la unidad. Esta raíz debe ser $e^{2\pi i/n}$. Ya que, de no ser así, algún elemento del arco abierto entre 1 y $e^{2\pi i/n}$ debería ser mapeado a $e^{2\pi i/n}$. Pero este elemento sería una raíz enésima de la unidad, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, si el semicírculo superior es mapeado en si mismo,

$$\lambda(e^{2\pi i/n}) = e^{2\pi i/n}$$

Por lo tanto λ no mueve a ninguna raíz de la unidad. Como el conjunto de raíces de la unidad es denso, λ es la identidad. Análogamente, si el semicírculo superior es mapeado al semícirculo inferior, $\lambda = z^{-1}$.

Ahora sea λ un caracter con núcleo no trivial. Si λ no es constante, su núcleo es el conjuto de raíces enésimas de la unidad, para alguna n (ver la Proposición 3.21). Por lo tanto $ker(z^n) = ker(\lambda)$.

La imagen de λ es un subgrupo cerrado infinito de $\mathbb{S}^1$, por lo tanto, λ es suprayectiva.

Por lo anterior, la asignación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{S}^1 \\ a^n & \longmapsto & \lambda(a) \end{array}$$

es un isomorfismo.

Para demostrar que δ es continua, obsérvese que todo caracter no trivial de $\mathbb{S}^1$ es suprayectivo (ver Proposición 3.17). Como $\mathbb{S}^1$ es compacto y Hausdorff, todo caracter no trivial de $\mathbb{S}^1$ es una identificación. Como z^n es una identificación y $\delta(z^n) = \lambda(a)$, δ es continua.

Como δ es continua y un isomorfismo, ya demostramos que $\delta = z$ o $\delta = z^{-1}$, es decir, $\lambda = z^n$ o $\lambda = z^{-n}$.

Entonces existe un isomorfismo entre $\mathbb{S}^{1*}$ y $\mathbb{Z}$, Como ambos son discretos, dicho isomorfismo es un homeomorfismo. $\square$

Lema 3.24. *Si γ y λ son dos caracteres abiertos y suprayectivos de un grupo G tales que* $\ker(\gamma) = ker(\lambda)$, *entonces* $\gamma = \lambda^{\pm 1}$.

Demostración. Definamos el isomorfismo continuo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \gamma(x) & \longmapsto & \lambda(x) \end{array}$$

En la Proposición 3.23 se demostró que los únicos dos isomorfismos continuos de $\mathbb{S}^1$ en si mismo son la identidad y la conjugación. $\square$

Lema 3.25. *Un subgrupo propio de $\mathbb{R}$ es cerrado si, y sólo si, es cíclico.*

Demostración. Sea H un subgrupo propio y cerrado de $\mathbb{R}$. Si en H existen elementos distintos de 0 con valor absoluto tan pequeño como se quiera, H sería denso, y no podría ser propio. Por lo tanto $r = \inf\{|h| \mid h \in H\} > 0$. Como H es cerrado, $r \in H$. Se afirma que $H =< r >$. Sea $k \in H$ positiva. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nr \leq k \leq (n+1)r$. Si ambas desigualdades fueran propias,

$$0 < |nr - k| < |(n+1)r - nr| = r$$

Y se llegaría a una contradicción. Por lo tanto $k \in< r >$. $\square$

Proposición 3.26. $\mathbb{R}^*$ *es topológicamete isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demostración. Obsérvese que los únicos subgrupos conexos de $\mathbb{S}^1$ son triviales. Por lo tanto todo caracter de $\mathbb{R}$ es suprayectivo. Entonces, por la Proposición 2.57, todo caracter no trivial de $\mathbb{R}$ es abierto.

Considérese la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & (y \mapsto e^{ixy}) \end{array}$$

Es inmediato que Γ es un homomorfismo de grupos inyectivo. Si $\varphi \in \mathbb{R}^*$, $ker(\varphi)$ es cerrado y, por el Lema 3.25, debe ser cíclico (generado por algún $a \in \mathbb{R}$). Obsérvese que $ker(\varphi) = ker\left(\Gamma(\frac{2\pi}{a})\right)$, entonces, por el Lema 3.24, $\varphi = \Gamma(\pm\frac{2\pi}{a})$. Por lo tanto Γ es un isomorfismo.

Demostraremos que Γ es continua en 0. Sea U^K una vecindad de $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^*$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $K = [-p, p]$ es un intervalo cerrado centrado en 0 y que $U = \Lambda_n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon = \frac{1}{3np}$ y sea $x \in (-\epsilon, \epsilon)$. Para toda $t \in [-p, p]$,

$$|tx| < |t\epsilon| \leq p\epsilon = \frac{1}{3n}$$

Por lo tanto, para toda $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ y para toda $t \in [-p, p]$,

$$\Gamma(x)(t) = e^{ixt} \in \Lambda_n$$

Es decir, para toda $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\Gamma(x) \in U^K$. Por lo tanto Γ es continua. En la Proposición 2.57 demostramos que, como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$ son localmente compactos de Hausdorff (ver la Proposición 3.16), $\mathbb{R}$ es Lindelöf y Γ es un homomorfismo suprayectivo, Γ es abierta. Por lo tanto Γ es un isomorfismo topológico. □

Proposición 3.27. *Si K es un grupo cíclico finito y discreto, K^* es topológicamente isomorfo a K.*

Demostración. Podemos identificar a K con el único subgrupo de $\mathbb{S}^1$ de tamaño $|K|$ (ver la Proposición 3.21). Para cada $\varphi \in K^*$, φ queda definida por su valor en 1. Además, $\varphi(1) \in K$, ya que $| < \varphi(1) > |$ divide al orden de K, y para cada divisor de su orden, K contiene al único subgrupo de $\mathbb{S}^1$ con ese tamaño. Entonces definamos

$$\begin{array}{ccc} K^* & \xrightarrow{\Psi} & K \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(1) \end{array}$$

Claramente Ψ es un homomorfismo inyectivo y suprayectivo. Además como K^* es finito y Hausdorff, es discreto. Entonces Ψ es un isomorfismo topológico. □

3.2. Un morfismo entre G y G^{**}

Teorema 3.28. *Para todo grupo G localmente compacto y Hausdorff existe un homomorfismo continuo y natural $G \xrightarrow{\omega} G^{**}$.*

Demostración. Como G es localmente compacto, G^* es un grupo topológico localmente compacto y por lo tanto G^{**} es un grupo ALCH (ver la Proposición 3.16).

Definamos

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\omega} & G^{**} \\ g & \longmapsto & \left(\varphi \xmapsto{\omega(g)} \varphi(g)\right) \end{array}$$

Por la Proposición 1.2, $G^* \times G \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ es continua. Entonces como es una restricción de ev, $\omega(g)$ es continua. Si $\varphi, \psi \in G$,

$$\omega(g)(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot \psi(g) = \varphi(g) \cdot \psi(g) = \omega(g)(\varphi) \cdot \omega(g)(\psi)$$

Por lo tanto ω está bien definida. Si $g, h \in G$ y $\varphi \in G^*$

$$\omega(g \cdot h)(\varphi) = \varphi(g \cdot h) = \varphi(g) \cdot \varphi(h) = \omega(g)(\varphi) \cdot \omega(h)(\varphi)$$

Por lo tanto ω es un morfismo de grupos.

Por la Proposición 1.3, si $G \times G^* \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ es continua, $G \xrightarrow{\tilde{ev}} Top(G^*, \mathbb{S}^1)$ también es continua. Además, para todas $g \in G$ y $\varphi, \psi \in G^*$,

$$\tilde{ev}(g)(\varphi \cdot \psi) = ev(g, \varphi \cdot \psi) = \varphi(g) \cdot \psi(g) = \tilde{ev}(g)(\varphi) \cdot \tilde{ev}(g)(\psi)$$

Entonces $im(\tilde{ev}) \subset G^{**}$. Por lo tanto la función $G \xrightarrow{\tilde{ev}} G^{**}$ es un homomorfismo continuo. Obsérvese que, para toda $g \in G$, $\omega(g) = \tilde{ev}(g)$.

La naturalidad de ω es en el siguiente sentido. Para cualquier $G \xrightarrow{f} H$ homomorfismo continuo, entre grupos localmente compactos, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\omega_G"] \arrow[d, "f"] & G^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ H \arrow[r, "\omega_H"] & H^{**} \end{tikzcd}$$

Sean $\varphi \in H^*$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \left(f^{**} \circ \omega_G\right)(g)(\varphi) & = & f^{**}\left(\omega_G(g)\right)(\varphi) \\ & = & (\omega_G(g) \circ f^*)(\varphi) \\ & = & \omega_G(g)(f^*(\varphi)) \\ & = & f^*(\varphi)(g) \\ & = & \varphi(f(g)) \\ & = & (\omega_H \circ f)(g)(\varphi) \end{array}$$

□

Definición 3.29. *Un grupo G es reflexivo si, y sólo si,*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\omega_G} & G^{**} \\ g & \longmapsto & \left(\Psi \xmapsto{\omega_G(g)} \Psi(g)\right) \end{array}$$

es un isomorfismo topológico

Observación 3.30. Todo grupo reflexivo es abeliano y Hausdorff.

Proposición 3.31. *Para todo grupo G ALCH, ω_G es inyectiva.*

Demostración. Por el Teorema 2.71, el grupo dual de un grupo G ALCH separa sus puntos. Es decir, si $x \neq y$, existe $\varphi \in G^*$ tal que $\varphi(x \cdot y^{-1}) \neq 1$. Entonces

$$\omega_G(x)(\varphi) = \varphi(x) \neq \varphi(y) = \omega_G(y)(\varphi)$$

□

Proposición 3.32. $\mathbb{S}^1$ *es reflexivo.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 3.22 y por la Proposición 3.23 que $\mathbb{S}^{1^{**}}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{S}^1$. Por la Proposición 3.31, $im(\omega_{\mathbb{S}^1})$ es un subgrupo cerrado e infinito de $\mathbb{S}^1$. Por lo tanto $\omega_{\mathbb{S}^1}$ es un isomorfismo continuo y cerrado. □

Proposición 3.33. $\mathbb{Z}$ *es reflexivo.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Z}^{**}$ es discreto, y que $\omega_{\mathbb{Z}}$ es inyectiva, por lo tanto basta probar que $\omega_{\mathbb{Z}}$ es suprayectiva.

Sea $\lambda \in \mathbb{Z}^{**}$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^* & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{S}^1 \\ h & \longmapsto & h(1) \end{array}$$

es un isomorfismo continuo (ver la Proposición 3.22), por lo tanto existe $\tilde{\lambda} \in \mathbb{S}^{1^*}$ tal que $\lambda = \tilde{\lambda} \circ \Psi$. Por la Proposición 3.23, $\tilde{\lambda} = z^n$, para alguna $n \in \mathbb{Z}$, entonces, para toda $f \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda(f) & = & \tilde{\lambda}(\Psi(f)) \\ & = & \tilde{\lambda}(f(1)) \\ & = & f(1)^n \\ & = & f(n) \end{array}$$

Es decir, $\omega_{\mathbb{Z}}(n) = \lambda$. □

Lema 3.34. $\mathbb{R}$ *no tiene subgrupos propios abiertos.*

Demostración. Si H es un subgrupo propio y abierto de $\mathbb{R}$, este tiene que ser cíclico (ver el Lema 3.25). Pero en H podemos encontrar elementos de valor absoluto tan pequeño como se quiera, que es una contradicción. □

Proposición 3.35. $\mathbb{R}$ *es reflexivo.*

Demostración. Debido a la Proposición 2.57, todo homomorfismo suprayectivo, de $\mathbb{R}$ en si mismo, es abierto. Por ello sólo hay que mostrar que $\omega_{\mathbb{R}}$ es suprayectiva.

Obérvese que todo subconjunto conexo C de $\mathbb{R}$ con más de un punto tiene interior no vacío. Ya que, si $c, d \in C$, para todo $c < x < d$, x pertenece a C, de lo contrario podríamos desconectar C. Por lo tanto la imagen de $\omega_{\mathbb{R}}$ es topológicamente isomorfa a un subgrupo con interior no vacío de $\mathbb{R}$. Si un subgrupo tiene interior no vacío es abierto. Y todo subgrupo abierto de $\mathbb{R}$ es el total (ver el Lema 3.34). □

Proposición 3.36. *Si K es un grupo cíclico finito discreto, K es reflexivo.*

Demostración. En la Proposición 3.27 se demostró que K^* es isomorfo a K, por lo tanto K^{**} y K son isomorfos. Como ω_K inyectiva, es una biyección. $\square$

Definición 3.37. *Denótese $\mathbb{T}$ a $\mathbb{S}^1$. Un grupo se dice localmente compacto elemental si es topológicamente isomorfo a un producto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}^s \times \mathbb{T}^q \times F$, con F un grupo discreto finito. Se dirá que G es compacto elemental si es localmente compacto elemental y compacto, es decir, topológicamente isomorfo a un producto $\mathbb{T}^q \times F$, con algún F finito.*

La técnica empleada para demostrar que todo grupo ALCH es reflexivo consiste en ver a cada uno de estos grupos como una extensión (adecuada) de dos grupos que son reflexivos. Por ello estudiaremos la exactitud del funtor dual así como su relación con el producto topológico.

Proposición 3.38. *Sean G y H de Hausdorff y sean $G \times H \xrightarrow{\pi_G} G$ y $G \times H \xrightarrow{\pi_H} H$ las proyecciones. Entonces*

$$\begin{array}{ccc} G^* \times H^* & \xrightarrow{\pi_G{}^* \oplus \pi_H{}^*} & (G \times H)^* \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & (\pi_G)^*(\varphi) \cdot (\pi_H)^*(\psi) \end{array}$$

es un isomorfismo topológico natural.

Demostración. Si G y H son Hausdorff, $G \times H$ también lo es. Por lo tanto $(G \times H)^*$ es un grupo topológico.

Empecemos por la inyectividad. Si $\pi_G{}^*(\varphi) \cdot \pi_H{}^*(\psi) = \mathbb{1}$, para toda $g \in G$ y para toda $h \in H$, se tiene que $\varphi(g) \cdot \psi(h) = 1$. Por lo tanto

$$\varphi(g) = 1 = \psi(h)$$

Definamos para cada $\lambda \in (G \times H)^*$, $g \xmapsto{\lambda_G} \lambda(g, e)$ y $h \xmapsto{\lambda_H} \lambda(e, h)$. Entonces para todo $(g, h) \in G \times H$,

$$\begin{aligned} \lambda(g,h) &= \lambda(g,e) \cdot \lambda(e,h) \\ &= \lambda_G(g) \cdot \lambda_H(h) \\ &= \pi_G{}^*(\lambda_G)(g,h) \cdot \pi_H{}^*(\lambda_H)(g,h) \\ &= \big(\pi_G{}^*(\lambda_G) \cdot \pi_H{}^*(\lambda_H)\big)(g,h) \\ &= \pi_G{}^* \oplus \pi_H{}^*(\lambda_G, \lambda_H)(g,h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi_G{}^* \oplus \pi_H{}^*$ es un isomorfismo.

Como $(G \times H)^*$ es grupo topológico, el isomorfismo

$$(\varphi, \psi) \xmapsto{\pi_G{}^* \oplus \pi_H{}^*} \pi_G{}^*(\varphi) \cdot \pi_H{}^*(\psi)$$

es continuo.

Para demostrar que es un homeomorfismo, demostremos que Γ, su función inversa, es continua. Para ello basta probar que $\pi_{G^*} \circ \Gamma$ y $\pi_{H^*} \circ \Gamma$ son continuas, donde π_{G^*}

y π_{H^*} son las proyecciones del producto $G^* \times H^*$. Si U^K es un subbásico de G^*, se afirma que

$$\pi_{G^*} \circ \Gamma\,(U^{K\times\{e\}}) \subset U^K$$

Sea $\varphi \in U^{K\times\{e\}}$. Como $\pi_{G^*} \circ \Gamma\,(\varphi) = \varphi_G$, para toda $k \in K$, $\varphi_G(k) = \varphi(k,e) \in U$. Por lo tanto $\pi_{G^*} \circ \Gamma$ y $\pi_{H^*} \circ \Gamma$ son continuas.

Si $G' \xrightarrow{\gamma} G$ y $H' \xrightarrow{\eta} H$ son dos homomorfismos topológicos entre grupos de Hausdorff, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G^* \times H^* & \xrightarrow{{\pi_G}^* \oplus {\pi_H}^*} & (G\times H)^* \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma^*\times\eta^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\gamma\times\eta)^*} \\ G'^* \times H'^* & \xrightarrow{{\pi_{G'}}^* \oplus {\pi_{H'}}^*} & (G'\times H')^* \end{array}$$

es conmutativo. Si $\varphi \in G^*$ y $\psi \in H^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} {\pi_{G'}}^* \oplus {\pi_{H'}}^*\big(\gamma^* \times \eta^*(\varphi,\psi)\big)(g',h') &= {\pi_{G'}}^* \oplus {\pi_{H'}}^*\big(\varphi\circ\gamma, \psi\circ\eta\big)(g',h') \\ &= \Big({\pi_{G'}}^*(\varphi\circ\gamma)\cdot {\pi_{H'}}^*(\psi\circ\eta)\Big)(g',h') \\ &= \varphi\circ\gamma(g')\cdot\psi\circ\eta(h') \\ &= \big({\pi_G}^* \oplus {\pi_H}^*(\varphi,\psi)\big)(\gamma(g'),\eta(h')) \\ &= \Big(\big({\pi_G}^* \oplus {\pi_H}^*(\varphi,\psi)\big)\circ(\gamma\times\eta)\Big)(g',h') \\ &= (\gamma\times\eta)^*\big({\pi_G}^* \oplus {\pi_H}^*(\varphi,\psi)\big)(g',h') \end{aligned}$$

□

Proposición 3.39. *Si G y H son Hausdorff el siguiente diagrama de funciones*[3] *es conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} G\times H & \xrightarrow{\omega_{G\times H}} & (G\times H)^{**} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \omega_G\times\omega_H} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\pi_G^*\oplus\pi_H^*)^*} \\ G^{**}\times H^{**} & \xrightarrow[{\pi_G}^{**}\oplus{\pi_H}^{**}]{} & (G^*\times H^*)^* \end{array}$$

Demostración. Si $\varphi \in G^*$, $\psi \in H^*$ y $(g,h) \in G\times H$, por un lado,

$$\begin{aligned} (\pi_G^* \oplus \pi_H^*)^*\big(\omega_{G\times H}(g,h)\big)(\varphi,\psi) &= \omega_{G\times H}(g,h)\big(\pi_G^*\oplus\pi_H^*(\varphi,\psi)\big) \\ &= \omega_{G\times H}(g,h)\big(\pi_G^*(\varphi)\cdot\pi_H^*(\psi)\big) \\ &= \pi_G^*(\varphi)(g,h)\cdot\pi_H^*(\psi)(g,h) \\ &= \varphi(g)\cdot\psi(h) \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} ({\pi_G}^*)^* \oplus ({\pi_H}^*)^*\big(\omega_G\times\omega_H(g,h)\big)(\varphi,\psi) &= (({\pi_G}^*)^*(\omega_G(g))\cdot({\pi_H}^*)^*(\omega_H(h))(\varphi,\psi) \\ &= \omega_G(g)(\varphi)\cdot\omega_H(h)(\psi) \\ &= \varphi(g)\cdot\psi(h) \end{aligned}$$

□

[3]Los homomorfismos ω_G y ω_H no necesariamente son continuos.

Corolario 3.40. *Si para toda $i = 1, \dots, n$, G_i es Hausdorff, entonces $\Big(G_1 \times \cdots \times G_n\Big)^*$ es topológicamente isomorfo a $G_1^* \times \cdots \times G_n^*$.*

Corolario 3.41. *Si G es un grupo localmente compacto elemental, G^* también es un grupo localmente compacto elemental.*

Demostración. En las Proposiciones 3.22, 3.23, 3.26 y 3.27 calculamos los grupos duales de los "bloques" de los que están formados los grupos localmente compactos elementales. □

Corolario 3.42. *Un producto finito de grupos es reflexivo si, y sólo si, cada uno de los factores es reflexivo.*

Demostración. Si $A \xrightarrow{\varphi} A'$ y $B \xrightarrow{\psi} B'$ son dos funciones entre espacios topológicos tales que $A \times B \xrightarrow{\varphi\times\psi} A' \times B'$ es un homeomorfismo, entonces φ y ψ también lo son. Por lo tanto la afirmación se sigue de la Proposición 3.39. □

Corolario 3.43. *Todo grupo localmente compacto elemental es reflexivo.*

Teorema 3.44. *Si H es un grupo topológico abeliano, D es un subgrupo discreto de H y $H \xrightarrow{\pi} H/D$ es la proyección canónica, para todo homomorfismo continuo $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} H/D$ existe un único homomorfismo continuo $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{f}} H$, tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$. Además, si f es abierta, $\tilde{f}$ es abierta.*

Demostración. Como D es discreto, existe $V \in \overset{\circ}{\Sigma}$ simétrica tal que

$$D \cap (V \cdot V) = \{e\}$$

Por lo tanto, para toda $x \in H$ y $d \in D$,

$$d \cdot x \cdot V \cap x \cdot V \neq \emptyset$$

si, y sólo si, $d = e$. Entonces la acción de D en H, bajo traslaciones, es una acción propia y discontinua. Es decir $H \xrightarrow{\pi} H/D$ es una aplicación cubriente.[4] Como $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo, por el Teorema del levantamiento,[5] existe un único levantamiento $\tilde{f}$ de f, tal que $\tilde{f}(0) = e$. Demostremos que $\tilde{f}$ es un homomorfismo.

La función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}+\tilde{f}} & H/D \\ (v.w) & \mapsto & \tilde{f}(v) + \tilde{f}(w) \end{array}$$

es el único levantamiento de la función $f + f$ que manda $(0,0)$ a 0. Por otro lado la función que manda $(v + w)$ a $\tilde{f}(v + w)$ también es un levantamiento de $f + f$. Por lo tanto $\tilde{f}$ es un homomorfismo. □

[4] Carlos Prieto, *op. cit.*, p. 426.
[5] *Ídem*, p. 435.

Lema 3.45. *Sea H un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea L un subespacio vectorial unidimensional de $\mathbb{R}^n$. Si $H \cap L \neq \{0\}$, y p es el mapeo canónico $\mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n/L$, $p(H)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n/L$.*

Demostración. Si $n = 1$, la afirmación es trivial. Sea $n > 1$. Como L es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n$, $H \cap L$ es un subgrupo cerrado de $L \cong \mathbb{R}$. Si $H \cap L = L$, entonces $L \subset H$, por lo tanto

$$p^{-1}\big(p(H)\big) = H + L = H$$

Es decir, $p(H)$ es cerrado en el cociente. Si $L \cap H \neq L$, por el Lema 3.25, $L \cap H$ es cíclico. Haciendo un cambio de base podemos suponer, sin pérdida de generalidad,

$$L = \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1} \quad \text{y} \quad L \cap H = \mathbb{Z} \times \{0\}^{n-1}$$

Es claro que existe un isomorfismo topológico entre $\mathbb{R}^n/H \cap L$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Considérense los mapeos canónicos

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}^n/H \cap L \quad \text{y} \quad \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n-1}$$

Haciendo un abuso de notación, $p(H) = \pi(\tau(H))$. Como $ker(\pi)$ es compacto, para todo $C \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$ cerrado, $C + ker(\pi)$ es cerrado.[6] Por lo tanto π es cerrada. Y como $ker(\tau) \subset H$, $\tau(H)$ es cerrado en $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Hemos demostrado, que $p(H)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n/L$. □

Teorema 3.46. *Para todo subgrupo propio y cerrado H de $\mathbb{R}^n$ existen*

$$v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+m}$$

vectores linealmente independientes tales que $H = V \oplus L$, donde V es el subespacio vectorial generado por $v_1, \dots, v_s$, y L es el subgrupo generado por $v_{s+1}, \dots, v_{s+m}$. Además $V \times L$ es canónicamente homeomorfo a H.

Demostración. Se procederá por inducción. Si $n = 1$, por el Lema 3.25, H es cíclico. Ahora supóngase cierto el resultado para todo natural menor a n. Si H es un subespacio vectorial no hay nada que demostrar, entonces supóngase que existe $h \in H$ tal que $\mathbb{R}h \not\subset H$. Sea $\mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n/\mathbb{R}h$ el mapeo canónico. Debido al Lema 3.45, $p(H)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}h \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Por la hipótesis de inducción existen

$$v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+s}$$

vectores linealmente independientes, tales que si V es el subespacio vectorial generado por $v_1, \dots, v_m$ y si L es el grupo generado por $v_{m+1}, \dots, v_{m+s}$, $p(H) = V \oplus L$. Sea $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n/\mathbb{R}h \cap H$ la proyección canónica. Tanto H como $p(H)$ son localmente compactos, y como H es Lindelöf,[7] por la Proposición 2.57, $H \xrightarrow{p} p(H)$ es abierta. Por lo tanto $H/\mathbb{R}h \cap H \cong p(H)$, mediante un isomorfismo topológico ψ, tal que $\psi \circ \pi|_H = p|_H$.

[6] Mickhail Tkachenko *et al.*, *Grupos Topológicos*, México, UAM, 1997, p.8.

[7] Todo subespacio cerrado de un espacio Lindelöf es Lindelöf.

Como $\mathbb{R}h \cap H$ es cíclico (ver el Lema 3.25), es discreto. Por lo tanto $H \xrightarrow{p} p(H)$ es una aplicación cubriente. Sea ι la inclusión de V en $p(H)$. Aplicando el Teorema 3.44 a $p|_H$ y a ι, sabemos que existe $V \xrightarrow{\gamma} H$ morfismo abierto tal que $p \circ \gamma = \iota$.

Se afirma que $\gamma(V)$ es un subespacio vectorial y que γ es lineal. Sea $v \in V$. Si $n \in \mathbb{N}$ es claro que $1/n \cdot \gamma(v) = \gamma(1/n \cdot v) \in \gamma(V)$. Por lo tanto para toda $q \in \mathbb{Q}$, $q \cdot \gamma(v) \in \gamma(V)$. Como por hipótesis de inducción $\gamma(V)$ es un subgrupo abierto de H, $\gamma(V) \subset H$ es cerrado. Entonces para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \gamma(v) \in \gamma(V)$. Además como para cada $q \in \mathbb{Q}$, $\gamma(q \cdot v) = q \cdot \gamma(v)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \gamma(v)$.

Los vectores $\gamma(v_1), \ldots, \gamma(v_m)$ son base de $\gamma(V)$. Elíjanse $v'_{m+i} \in H$ tales que $p(v'_{m+i}) = v_{m+i}$. Sabemos que $ker(p|_H) \cong \mathbb{R}h \cap H$ es cíclico generado por algún $a \in ker(p|_H)$. Dado que p es lineal, preserva la dependencia lineal, por lo tanto

$$v_1, \ldots, v_m, v'_{m+1}, \ldots, v'_{m+s}, a$$

es un conjunto linealmente independiente de vectores. Además

$$H = \gamma(V) + < v_{m+1}, \ldots, v_{m+s} > + ker(p|_H)$$

En conlcusión, $H = \gamma(V) \oplus L'$, donde L' es el grupo abeliano (libre) generado por $v'_{m+1}, \ldots, v'_{m+s}, a$.

Se afirma que la función continua

$$\begin{array}{rcl} \gamma(V) \times L' & \xrightarrow{\Psi} & \gamma(V) + L' \\ (\gamma(v), l) & \mapsto & \gamma(v) + l \end{array}$$

es abierta. Sean $U \subset \gamma(V)$ abierto y $l \in L'$. Como $\gamma(V) \subset H$ es abierto, $U + l \subset H$ es abierto. Por lo tanto Ψ es abierta. $\square$

Corolario 3.47. *Todo subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ es libre.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 3.46 ya que por el Lema 2.58 todo subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado. $\square$

El Teorema 3.46 no sólo caracteriza los subgrupos cerrados de $\mathbb{R}^n$, sino que permite conocer la forma de los grupos cocientes (Hausdorff) de $\mathbb{R}^n$ y la forma de los subgrupos cerrados de ${\mathbb{S}^1}^n$.

Corolario 3.48. *Todo grupo cociente de Hausdorff de $\mathbb{R}^n$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^s \times \mathbb{T}^m$, con $s + m < n$.*

Demostración. Sea H un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n$. En el Teorema 3.46 se demostró que existe conjunto linealmente independiente de vectores

$$v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots v_{l+m}$$

tales que $H = V \oplus L$, con V el subespacio vectorial generado por $v_1, \ldots, v_l$, y L el subgrupo (libre) generado por $v_{l+1}, \ldots, v_{l+m}$. Sea $\tilde{L}$ el menor subespacio vectorial que contiene a los generadores de L. Se tiene que $V \cap \tilde{L} = \{0\}$.

Sea W un subespacio vectorial complementario a $V \oplus \tilde{L}$ en $\mathbb{R}^n$. La función

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}/L \times W & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{R}^n \Big/ V \oplus L \\ (l+L, w) & \longmapsto & l + w + V \oplus L \end{array}$$

es un isomorfismo continuo (ver la Proposición 1.6). Como es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{L}$ es localmente compacto. La proyección $\tilde{L} \to \tilde{L}/L$ es abierta. Por lo tanto $\tilde{L}/L$ es segundo numerable y localmente compacto. Entonces $\tilde{L}/L \times W$ es segundo numerable y localmente compacto. Por la Proposición 2.57, Γ es abierta, y por lo tanto, un homeomorfismo.

Existe un isomorfismo topológico lineal $\tilde{L} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}^m$ tal que $\Psi(L) = \mathbb{Z}^m$. Por lo tanto $\tilde{L}/L$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{T}^m$.

Entonces se tienen los isomorfismos topológicos

$$\mathbb{R}^n/H \cong \tilde{L}/L \times W \cong \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^s$$

□

Corolario 3.49. *Todo subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^m$ es topológicamente isomorfo a*

$$\mathbb{T}^n \times F$$

con $n \leq m$ y F un grupo abeliano finito.

Demostración. Como existe un isomorfismo topológico canónico entre $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ y $\mathbb{T}^m$, el corolario es equivalente a la afirmación para subgrupos cerrados de $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$.

Sea C un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. Si π es la proyección canónica, $\pi^{-1}(C)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^m$, y por el Teorema 3.46, $\pi^{-1}(C) = V \oplus L$, con V un subespacio vectorial y L un subgrupo libre.

Tanto $\pi^{-1}(C)$ como C son localmente compactos. Como $\pi^{-1}(C)$ es Lindelöf, por la Proposición 2.57, $\pi^{-1}(C) \xrightarrow{\pi} C$ es abierta.

Ahora demostraremos que V es un subgrupo abierto de $\pi^{-1}(C)$. Existe un cambio de base que manda $V \oplus L$ en $\mathbb{R}^s \times \mathbb{Z}^l \times \{0\}^{m-s-l}$. Es claro que $\mathbb{R}^s \times \{0\}^{m-s}$ es un abierto de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{Z}^l \times \{0\}^{m-s-l}$. Mediante el cambio de base, obtenemos que V es un subconjunto abierto de $\pi^{-1}(C)$.

Como V es divisible y es un abierto de $\pi^{-1}(C)$, $\pi(V)$ es un subgrupo abierto y divisible de C. Existe W, un subgrupo de C, tal que $C = \pi(V) \oplus W$.[8] Como C es compacto y $\pi(V)$ es abierto en C, W tiene que ser finito. Como V es abierto en $\pi^{-1}(C)$, el homomorfismo $V \xrightarrow{\pi} \pi(V)$ es suprayectivo y abierto, por lo tanto $\pi(V)$ es topológicamente isomorfo a un cociente Hausdorff de $\mathbb{R}^s$. Por el Corolario 3.48, $\pi(V)$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^q$, con $k + q \leq s$. El argumento de por qué $\pi(V) + W$ tiene la topología de $\pi(V) \times W$ se dio en la demostración del Teorema 3.46. □

Observación 3.50. Hemos demostrado que todo subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n$, todo cociente Hausdorff de $\mathbb{R}^n$ y todo subrupo cerrado de $\mathbb{T}^n$ es un grupo ALCH elemental, y por tanto, un grupo reflexivo.

[8] Friedrich Kasch, *op. cit.*, p.115.

Lema 3.51. *Si* $G \xrightarrow{f} H$ *es un homomorfismo abierto tal que* $ker(f)$ *y* H *son compactos,* G *es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de G y, sin pérdida de generalidad, supóngase cerrada bajo uniones finitas. Para cada $h \in H$, existe U_h tal que $f^{-1}(h) \subset U_h$. Como $f^{-1}(h)$ es compacto existe $V_h \in \Sigma$ abierta tal que $f^{-1}(h) \cdot V_h \subset U_h$. Entonces $\{f(h \cdot V_h)\}_{h \in H}$ es una cubierta abierta de H y por lo tanto existe n tal que

$$H = f(h_1 \cdot V_1) \cup \cdots \cup f(h_n \cdot V_n)$$

Se afirma que $G = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Si $g \in G$, $f(g) = f(h_i \cdot v_i)$, para alguna i, entonces $g \cdot v_i^{-1} \in f^{-1}(h_i)$. Por lo tanto $g \in f^{-1}(h_i) \cdot V_i \subset U_i$. □

Proposición 3.52. *Todo grupo G ALCH y compactamente generado tiene un subgrupo H discreto y libre de rango finito tal que G/H es compacto.*

Demostración. $G = \overline{< K >}$ para algun K compacto. Primero hagamos el caso en el cual K es finito. Procederemos por inducción sobre el orden de K. Si G es monotético, por el Teorema 2.62, G es compacto o G es discreto e isomorfo a $\mathbb{Z}$. En ambos casos la afirmación se cumple.

Supóngamos cierta la afirmación para n. Sea $G = \overline{< x_1, \ldots, x_{n+1} >}$. Si para toda x_i, $\overline{< x_i >}$ es compacto, $\overline{< x_1 >} \cdot \cdots \cdot \overline{< x_{n+1} >}$ es compacto y

$$\overline{< x_1 >} \cdot \cdots \cdot \overline{< x_{n+1} >} = \overline{< x_1, \ldots, x_{n+1} >} = G$$

Por lo tanto G sería compacto y se tendría la afirmación. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $\overline{< x_{n+1} >}$ es discreto, y por lo tanto, $\overline{< x_{n+1} >} = < x_{n+1} >$. Si $G \xrightarrow{\pi} G/< x_{n+1} >$ es la proyección canónica, se afirma que

$$G/< x_{n+1} > = \overline{< \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)\} >}$$

Si $x \in \overline{< \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} >}$, existe $\{x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\}_{\alpha \in A}$, donde cada $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, una red que converge a x. Por lo tanto

$$\{\pi\left(x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\right)\}_{\alpha \in A} = \{\pi(x_1)^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot \pi(x_n)^{\alpha_n}\}_{\alpha \in A}$$

es una red en $\overline{< \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)\} >}$ que converge a $\pi(x)$.

Por la hipótesis de inducción existe $U/ < x_{n+1} >$ subgrupo de $G/ < x_{n+1} >$, discreto y libre de rango finito tal que

$$G/ < x_{n+1} > \Big/ U/ < x_{n+1} > \cong G/U$$

es compacto y Hausdorff.

Como U es un subgrupo cerrado de G, U es localmente compacto. Debido a que $U/ < x_{n+1} >$ es finitamente generado, U es finitamente generado, y por lo tanto, numerable. Por el Corolario 2.56, U es discreto. Entonces, por el Teorema Fundamental de los Grupos Abelianos Finitamente Generados,[9] U es topológicamente

[9] Joseph Rotman, *op. cit.*, p. 319.

isomorfo a $L \times F$, con L algún grupo libre de rango finito (discreto) y con F algún grupo finito.

Se tiene la sucesión exacta de homomorfismos continuos

$$0 \to U/L \to G/L \to G/U \to 0$$

donde el epimorfismo es abierto. Como U/L es finito y G/U es compacto, G/L es compacto (ver el Lema 3.51). Entonces la afirmación es válida para grupos que tienen como subgrupo denso a un grupo finitamente generado.

Ahora hagamos el caso general. Supóngamos que $G = \overline{< K >}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $K \in \Sigma$ y simétrico. En ese caso $< K >$ es un subgrupo cerrado, y por lo tanto $G =< K >$. Por la Observación 2.69, existe un conjunto finito F tal que $G = K \cdot < F >$. Claramente $G/\overline{< F >}$ es compacto. Por la primera parte de la demostración sabemos que existe H, un subgrupo de $\overline{< F >}$ tal que H es libre de rango finito, discreto y $\overline{< F >}/H$ es compacto. Se tiene la sucesión exacta de homomorfismos continuos

$$0 \to \overline{< F >}/H \to G/H \to G/\overline{< F >} \to 0$$

donde el epimorfismo es abierto. Como los extremos de la sucesión son compactos, por el Lema 3.51, G/H es compacto. □

Lema 3.53. *Sea G un grupo ACH. Si $U \in \overset{\circ}{\Sigma}$, existe $H \subset U$, un subgrupo cerrado de G tal que G/H es un grupo compacto elemental.*

Demostración. Como G^* separa los puntos de G (ver el Teorema 2.50), la familia $\{G \setminus ker(\varphi)\}_{\varphi \in G^*}$ es una cubierta abierta de G. Como $G \setminus U$ es compacto existen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tales que

$$G \setminus U \subset G \setminus ker(\varphi_1) \cup \dots \cup G \setminus ker(\varphi_n)$$

Entonces $H = ker(\varphi_1) \cap \dots \cap ker(\varphi_n) \subset U$. Se puede definir el morfismo cerrado

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{T}^n \\ g & \mapsto & \big(\varphi_1(g), \dots, \varphi_n(g)\big) \end{array}$$

Por lo tanto la función inducida en el cociente $G/H \xrightarrow{\tilde{\eta}} \mathbb{T}^n$ es un morfismo inyectivo y cerrado. Entonces G/H es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^n$, por lo tanto G/H es un grupo compacto elemental (ver el Corolario 3.49). □

Proposición 3.54. *Todo grupo ALCH y compactamente generado G tiene un subgrupo compacto K tal que G/K es un grupo localmente compacto elemental.*

Demostración. En la Proposición 3.52 se demostró que existe H un subgrupo de G discreto y libre de rango finito tal que G/H es compacto. Como H es discreto es posible encontrar $V \subset G$ en Σ, compacta y simétrica, tal que $V \cdot V \cdot V \cap H = \{e\}$. Si π es la proyección canónica de G en G/H, $\pi(V)$ es una vecindad de H en G/H.

Como H es un subgrupo cerrado de G (ver el Lema 2.58), G/H es ACH. Por el Lema 3.53, existe J un subgrupo cerrado de G tal que $J/H \subset \pi(V)$ y tal que

$$G/H\Big/J/H \cong G/J$$

es un grupo compacto elemental.

Demostremos que el compacto $K = J \cap V$ es un subgrupo de G. Si $x, y \in K$ se tiene que $\pi(x \cdot y^{-1}) \in \pi(J) \subset \pi(V)$, por lo tanto para alguna $v \in V$,

$$x \cdot y^{-1} \cdot v^{-1} \in V \cdot V \cdot V \cap H = \{e\}$$

Entonces $x \cdot y^{-1} = v$ y $x \cdot y^{-1} \in J \cap V = K$.

Si $x \in J$, como $J/H \subset \pi(V)$, $\pi(x) = \pi(v)$, para alguna $v \in V$. Entonces $x \cdot h = v$, para alguna $h \in H \subset J$. Por lo tanto $v \in K$ y $J = K + H$. Como

$$K \cap H \subset V \cap H = \{e\}$$

$J = K \oplus H$.

Sea p la proyección canónica de G en G/K. Como K es compacto, p es cerrada (ver la demostración del Lema 3.45) y la restricción $p|_H$ es un homomorfismo inyectivo y continuo de H en $p(H)$. Como H es cerrado, $p|_H$ es cerrada, y por lo tanto $p|_H$ es un isomorfismo topológico entre H y $p(H)$. Ya que $p(J) = p(H)$, J/K es un subgrupo discreto de G/K.

Se tienen los isomorfismos topológicos

$$G/K\Big/J/K \overset{\Gamma}{\cong} G/J \overset{\Psi}{\cong} \mathbb{T}^t \times F$$

para alguna t y algún grupo finito F.

Sea $\mathbb{R}^t \xrightarrow{q} G/J$ la composición de la proyección canónica de $\mathbb{R}^t$ a $\mathbb{T}^t \times \{e\}$ con $\Psi^{-1}|_{\mathbb{T}^t \times \{e\}}$. Como F es discreto, $\Psi^{-1}|_{\mathbb{T}^t \times \{e\}}$ es la restricción de Ψ^{-1} a un abierto. Entonces q es una composición de funciones abiertas, y por ello es abierta.

Sea $G/K \xrightarrow{\tau} G/K\Big/J/K$ la proyección canónica. Llamemos ρ a la función $\Gamma \circ \tau$. Por ser una composición de homomorfismos abiertos y suprayectivos, ρ es un cociente. El núcleo de ρ es discreto, entonces, por el Teorema 3.44, existe un homomorfismo abierto $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{q}} G/K$ tal que $\rho \circ \tilde{q} = q$.

La imagen de $\tilde{q}$ es un subgrupo abierto y divisible de G/K. Entonces existe un subgrupo N de G/K tal que $\tilde{q}(\mathbb{R}^t) \oplus N = G/K$. Como $\tilde{q}(\mathbb{R}^t)$ es abierto, G/K es topológicamente isomorfo a $\tilde{q}(\mathbb{R}^t) \times N$.

N es topológicamente isomorfo a $G/K\Big/\tilde{q}(\mathbb{R}^t)$, por lo tanto es compactamente generado y discreto. Entonces N es finitamente generado y discreto, es decir, N es un producto finito de copias de $\mathbb{Z}$ y grupos finitos. Como $\tilde{q}(\mathbb{R}^t)$ es un grupo localmente compacto elemental (ver el Corolario 3.48), G/K es un grupo localmente compacto elemental. □

Lema 3.55. *Si G es un grupo ACH, $\Psi \in G^{**}$ y $h_1, \ldots, h_n \in G^*$, existe $a \in G$, tal que $\Psi(h_i) = h_i(a)$, para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Sea $K = \bigcap_{i=1}^{n} ker(h_i)$. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} G/K & \longrightarrow & \mathbb{T}^n \\ gK & \longmapsto & \big(h_1(g), \ldots, h_n(g)\big) \end{array}$$

es un homomorfismo inyectivo, continuo y cerrado. Por el Corolario 3.43 y por el Lema 3.49, G/K es reflexivo. Considérese el mapeo canónico $G \xrightarrow{p} G/K$. Es inmediato que $(G/K)^* \xrightarrow{p^*} G^*$ es inyectiva. Un caracter λ de G está en la imagen de p^* si, y sólo si, $K \subset ker(\lambda)$. Por lo tanto, para toda $i = 1, \ldots, n$, $h_i \in im(p^*)$. Sea $\tilde{h}_i \in (G/K)^*$ tal que $p^*(\tilde{h}_i) = h_i$. Como $\Psi \circ p^* \in (G/K)^{**}$ y G/K es reflexivo, existe $cK \in G/K$ tal que para toda i,

$$\begin{array}{rcl} \Psi(h_i) & = & \Psi \circ p^*(\tilde{h}_i) \\ & = & \tilde{h}_i(cK) \\ & = & h_i(c) \end{array}$$

□

Teorema 3.56. *Todo grupo ACH es reflexivo.*

Demostración. Sea G un grupo ACH. La imagen de ω_G es un subgrupo cerrado de G^{**}. Supóngase que ω_G no es suprayectiva. Como $G^{**}/im(\omega_G)$ es un grupo ACH, existe un caracter no trivial de $G^{**}/im(\omega_G)$ (ver el Teorema 2.50), es decir, existe χ, un caracter no trivial de G^{**} que se anula en la imagen de ω_G.

Como G^* es discreto (ver el Teorema 3.11) y χ es continua, existe $U^{\{h_1,\ldots,h_n\}}$, una vecindad abierta de $\mathbb{1} \in G^{**}$, tal que $\chi\big(U^{\{h_1,\ldots,h_n\}}\big) \subset \Lambda_1$. Obsérvese que el grupo $L = \{1\}^{\{h_1,\ldots,h_n\}}$ está contenido en $ker(\chi)$ (ver el Lema 3.8).

Si $\Psi \in G^{**}$, por el Lema 3.55, para toda i existe $a \in G$ tal que

$$\Psi(h_i) = h_i(a) = \omega_G(a)(h_i)$$

Por lo tanto

$$\omega_G(a) \cdot \Psi^{-1} \in L \subset ker(\chi)$$

Entonces $\chi(\Psi) = \chi(\omega_G(a)) = 1$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto ω_G es suprayectiva. Como ω_G es inyectiva y cerrada, es un isomorfismo topológico. □

Teorema 3.57. *Todo grupo abeliano discreto es reflexivo.*

Demostración. Como ω_G es inyectiva, basta probar que es suprayectiva, pues tanto G como G^{**} son discretos (ver el Teorema 3.11 y el Teorema 3.12).

Si ω_G no es suprayectiva, $G^{**}/im(\omega_G)$ es un grupo abeliano discreto no trivial. Entonces existe Ψ, un caracter no trivial de G^{**} que se anula en la imagen de ω_G (ver el Teorema 2.71). Como G^* es compacto, ω_{G^*} es suprayectiva (ver el Teorema 3.56). Por lo tanto existe $f \in G^*$ tal que para toda $\varphi \in G^{**}$, $\Psi(\varphi) = \varphi(f)$. Como Ψ no es trivial, f tampoco lo es, por lo tanto existe $a \in G$ tal que $f(a) \neq 1$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \omega_G(a)(f) \\ & = & \Psi(\omega_G(a)) \\ & = & 1 \end{array}$$

Lo cual es una contradicción. □

En un grupo ACH no sólo hay suficientes caracteres, sino que hay "exactamente" los caracteres necesarios. Como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.58. *Si G es ACH y H es un subgrupo de G^* que separa los puntos de G, entonces $H = G^*$.*

Demostración. Supóngase que G^*/H es un grupo discreto no trivial. Entonces existe Ψ, un caracter no trivial de G^* que se anula en H. Como G es reflexivo existe $a \in G$ tal que $\Psi(\varphi) = \varphi(a)$, para toda $\varphi \in G^*$. Como Ψ no es trivial, $a \neq e$. Pero $1 = \Psi(h) = h(a)$, para toda $h \in H$. Pero esto es una contradicción. □

Lema 3.59. *Sea $G \xrightarrow{f} H$ un homomorfismo continuo, abierto, suprayectivo y con núcleo compacto. Si G es localmente compacto y H es Hausdorff, f es una aplicación propia.*

Demostración. Si $K \subset H$ es compacto, $f^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado de G. Cubriremos a $f^{-1}(K)$ con un compacto. Sea V una vecindad abierta de $e \in G$ con cerradura compacta. La colección

$$\{f(V \cdot g) \mid g \in f^{-1}(K)\}$$

es una cubierta abierta de K. Por lo tanto existen $g_1, \ldots, g_n \in f^{-1}(K)$ tales que

$$K \subset f(V \cdot g_1) \cup \cdots \cup f(V \cdot g_n)$$

Por lo tanto

$$f^{-1}(K) \subset \left(\overline{V} \cdot g_1 \cup \cdots \cup \overline{V} \cdot g_n\right) \cdot ker(f)$$

□

Proposición 3.60. *Sea G un grupo ALCH y sea H un subgrupo de G. Llamemos ι a la inclusión de H en G y π a la proyección de G en G/H. Entonces:*
a) ι^* es suprayectiva, si H es abierto o compacto.
b) ι^* es inyectiva si, y sólo si, H es denso.
c) Si H es cerrado, la sucesión

$$0 \to (G/H)^* \xrightarrow{\pi^*} G^* \xrightarrow{\iota^*} H^*$$

es exacta.

Demostración. a) Supóngase H abierto. Sea τ un caracter de H y sea $\tilde{\tau}$ una extensión de τ. El homomorfismo $\tilde{\tau}$ es continuo en e ya que $\tilde{\tau}|_H = \tau$ es continuo y H es una vecindad abierta de e.

Si H es compacto, $im(\iota^*) \leqslant H^*$ separa los puntos de H, entonces, por la Proposición 3.58, ι es suprayectiva.

b) Si H es denso e $\iota^*(\lambda) = \iota^*(\gamma)$, entonces $\lambda \cdot \gamma^{-1}(H) = \{1\}$. Por lo tanto $\lambda \cdot \gamma^{-1}(G) = \{1\}$.

Ahora supóngase que H no es denso. Entonces $G/\overline{H} \neq \{e\}$, y por lo tanto, existe φ, un caracter no trivial de $G/\overline{H}$. Si π es la proyección canónica, $\varphi \circ \pi$ es un caracter de G distinto de $\mathbb{1}$ tal que su resctricción a H es la función constante 1. Por ello $\iota^*(\varphi \circ \pi) = \mathbb{1}$.

c) Es inmediato que π^* es inyectiva. Se tiene que $\varphi \in \ker(\iota^*)$ si, y sólo si, $\varphi|_H = \mathbb{1}$, si, y sólo si, φ está en la imagen de π^*. $\square$

Proposición 3.61. *Si la sucesión de grupos ALCH,*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

es exacta, con g abierta, f un encaje, y A compacto o C discreto, la sucesión de grupos ALCH

$$0 \to C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^* \to 0$$

es exacta, con C^* compacto o A^* discreto, g^* un encaje y f^* abierta.

Demostración. Bajo las hipótesis que se tienen para f y g, la sucesión exacta dada es equivalente a una sucesión de la forma

$$0 \to H \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G/H \to 0$$

que tiene las mismas propiedades. Asignarle a un grupo su grupo dual es funtorial, entonces será suficiente demostrar la afirmación para esta última.

La sucesión

$$0 \to (G/H)^* \xrightarrow{\pi^*} G^* \xrightarrow{\iota^*} H^*$$

es exacta (ver la Proposición 3.60).

Si H es compacto, ι^* es suprayectiva (ver la Proposición 3.60). Además H^* es discreto, por lo tanto ι^* es abierta.

Si G/H es discreto, H es abierto y ι^* es suprayectiva. En la demostración del Lema 3.15 se observó que en un grupo G, para toda $K \in \Sigma$ compacta, $\overline{\Lambda_4}^K$ es una vecindad compacta de $\mathbb{1}$. Como H es abierto, existe $K \subset H$, vecindad compacta de e. Como ι^* es suprayectiva, $\iota^*(\overline{\Lambda_{4}}^K_G) = \overline{\Lambda_{4}}^K_H$, y por lo tanto $\iota^*(<\overline{\Lambda_{4}}^K_G>) = <\overline{\Lambda_{4}}^K_H>$. Tanto $<\overline{\Lambda_{4}}^K_G>$ como $<\overline{\Lambda_{4}}^K_H>$ son abiertos en sus respectivos grupos, entonces son localmente compactos. Como $<\overline{\Lambda_{4}}^K_G>$ es Lindelöf, ya que es una unión numerable de compactos,

$$<\overline{\Lambda_{4}}^K_G> \xrightarrow{\iota^*|} <\overline{\Lambda_{4}}^K_H>$$

es un homomorfismo abierto (ver la Proposición 2.57). Por lo tanto ι^* es abierta. Es decir, en ambos casos ι^* es suprayectiva y abierta.

Ahora demostremos que π^* es un encaje. Si G/H es discreto, $(G/H)^*$ es compacto. Por lo tanto π^* es cerrada e inyectiva.

Por otro lado, si H es compacto, para todo $K \subset G/H$ compacto, $\pi^{-1}(K)$ es compacto. Sea afirma que para todo $\Lambda_n \subset \mathbb{S}^1$, y para todo $K \subset (G/H)^*$ compacto, $\pi^*({\Lambda_n}^K) = \Lambda_n^{\pi^{-1}(K)}$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\overline{e} \in K$. Si $\varphi \in {\Lambda_n}^K$, es claro que $\pi^*(\varphi) \in \Lambda_n^{\pi^{-1}(K)}$. Si $\psi \in \Lambda_n^{\pi^{-1}(K)}$, $\psi(H) \subset \Lambda_n$, y por lo tanto, $H \subset ker(\psi)$. Entonces $\psi = \pi^*(\tilde{\psi})$ para alguna $\tilde{\psi} \in (G/H)^*$. Es fácil ver que $\tilde{\psi} \in \Lambda_n^K$. Hemos demostrado que π^* es abierta alrededor de $\mathbb{1} \in (G/H)^*$. Entonces π^* es abierta e inyectiva. $\square$

Observación 3.62. En la demostración de la proposición anterior, se mostró que en el caso que H sea compacto, π^* es abierta.

Corolario 3.63. *Si H es un subgrupo compacto o abierto de un grupo G ALCH, la sucesión*

$$0 \to H^{**} \xrightarrow{\iota^{**}} G^{**} \xrightarrow{\pi^{**}} (G/H)^{**} \to 0$$

es exacta, con i^{**} un encaje y π^{**} abierta.

Demostración. Por la Proposición 3.61, bajo estas hipótesis, la sucesión

$$0 \to (G/H)^* \xrightarrow{\pi^*} G^* \xrightarrow{\iota^*} H^* \to 0$$

es exacta, con $(G/H)^*$ compacto o H^* discreto, ι^* es abierta π^* un encaje. Entonces, por la misma razón, la sucesión

$$0 \to H^{**} \xrightarrow{\iota^{**}} G^{**} \xrightarrow{\pi^{**}} (G/H)^{**} \to 0$$

es exacta, ι^{**} es un encaje y π^{**} es abierta. □

Teorema 3.64. *(Pontryagin-Van Kampen) Todo grupo ALCH es reflexivo.*

Demostración. Primero demostraremos que todo grupo ALCH y compactamente generado es reflexivo. Después usaremos que el funtor dual es exacto (bajo ciertas hipótesis) y que todo grupo ALCH tiene un subgrupo abierto y compactamente generado.

Por la Proposición 3.54, para cada grupo G ALCH y compactamente generado, existe H, un subgrupo compacto tal que G/H es un grupo localmente compacto elemental.

Entonces en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\omega_H"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\omega_G"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "\omega_{G/H}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{**} \arrow[r, "\iota^{**}"] & G^{**} \arrow[r, "\pi^{**}"] & (G/H)^{**} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ω_H y $\omega_{G/H}$ son isomorfismos topológicos, ι^{**} es un encaje y π^{**} es abierta. Por lo tanto ω_G es un isomorfismo continuo. Como G es Lindelöf, ω_G es abierta (ver la Proposición 2.57).

Sea G un grupo ALCH y sea $H \leqslant G$ abierto y compactamente generado.[10] Por la misma razón que arriba, ω_G es un isomorfismo continuo.

Por la Observación 3.62, si H es abierto, ι^{**} es un encaje abierto. Como H es compactamente generado, $\omega_G|_H = \iota^{**} \circ \omega_H$ es un isomorfismo topológico entre H e $im(\iota^{**})$. Por lo tanto $H \xrightarrow{\omega_G|_H} im(\iota^{**})$ es abierta, y como H y la imagen de ι^{**} son abiertos, ω_G es abierta. □

[10] En un grupo G, para toda V, vecindad compacta de e, el grupo generado por V es abierto y compactamente generado.

Corolario 3.65. *Si G es un grupo ALCH y H es un subgrupo de G^* que separa los puntos de G, entonces $\overline{H} = G^*$.*

Demostración. Si $G^*/\overline{H} \neq \{e\}$, existe Ψ un caracter no trivial de G^* que se anula en $\overline{H}$. Para toda $h \in H$, $\Psi(h) = h(a) = 1$, para alguna $a \in G \setminus \{e\}$. Esto es una contradicción, pues H separa los puntos de G. □

Definición 3.66. *Dado G un grupo de Hausdorff, sea*

$$Z = \{x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x \cdot y \mid x, y \in G\}$$

Llamemos a $ab(G) = G/\overline{Z}$, la abelianización de G.

Observación 3.67. Si G no es abeliano y es localmente compacto y de Hausdorff, ω_G es un homomorfismo continuo suprayectivo.

Demostración. El homomorfismo ω_G es continuo. Como el grupo $ab(G)$ es ALCH, $\omega_{ab(G)}$ es un isomorfismo topológico. Llamemos $G \xrightarrow{p} ab(G)$ a la proyección canónica. Sea $\Psi \in G^{**}$ y sea $\varphi \in G^*$. Como $\mathbb{S}^1$ es abeliano, existe $\tilde{\varphi} \in ab(G)^*$ tal que $\tilde{\varphi} \circ p = \varphi$. Entonces, para algún $g \in G$,

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &= p^{**}(\Psi)(\tilde{\varphi}) \\ &= \tilde{\varphi}(p(g)) \\ &= \varphi(g) \end{aligned}$$

Entonces ω_G es suprayectiva. □

Observación 3.68. Si G es localmente compacto, Hausdorff y es tal que $ker(\omega_G)$ es compacto, G^{**} y $ab(G)$ son topológicamente isomorfos.

Demostración. Sea $G \xrightarrow{p} ab(G)$ la proyección canónica. La función ω_G pasa al cociente. Es decir, existe $ab(G) \xrightarrow{\tilde{\omega}_G} G^{**}$, un homomorfismo continuo tal que $\tilde{\omega}_G \circ p = \omega_G$. Es inmediato que $\tilde{\omega}_G$ es suprayectiva. Si $\tilde{\omega}_G(p(g)) = \mathbb{1} = \omega_G(g)$, entonces $g \in \overline{Z}$, ya que $ab(G)$ es reflexivo. Por lo tanto $\tilde{\omega}_G$ es un isomorfismo.

En la demostración del Corolario 3.63 no se utilizó que los grupos fueran abelianos. Por lo tanto p^{**} es una identificación. Como $p^{**} \circ \tilde{\omega}_G = \omega_{ab(G)}$, p^{**} es una identificación biyectiva. Por lo tanto $\tilde{\omega}_G$ es un isomorfismo topológico. □

3.3. Algunas propiedades en dualidad

Ya demostramos que la propiedad de ser discreto es dual a la de ser compacto.

Proposición 3.69. *Si G es un grupo Hausdorff y divisible, G^* es libre de torsión.*

Demostración. Sea $\varphi \in G^*$, tal que $\varphi^n = \mathbb{1}$, para toda $g \in G$, $\varphi(g^n) = 1$. Como para toda $g \in G$, existe $h \in G$, tal que $g = h^n$, $\varphi = \mathbb{1}$. □

Proposición 3.70. *Si G es un grupo ACH y G^* es libre de torsión, G es divisible.*

Demostración. Para toda $n \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G \times \cdots \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ (g_1, \ldots, g_n) & \longmapsto & g_1 \cdot \cdots \cdot g_n \end{array}$$

es continua y cerrada. La diagonal, Δ, de $G_1 \times \cdots \times G_n$ es cerrada, por lo tanto su imagen bajo μ es un subgrupo cerrado de G. Si $G/\mu(\Delta)$ es un grupo ACH no trivial, existe $\varphi \in G^*$ no trivial tal que $\mu(\Delta) \subset ker(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi^n = \mathbb{1}$. Como G^* es libre de torsión, $\varphi = \mathbb{1}$. Esto es una contradicción, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $G = \{g^n \mid g \in G\}$. □

Proposición 3.71. *Si G es un grupo abeliano discreto y G^* es libre de torsión, G es divisible.*

Demostración. Sean μ y Δ como en la demostración de la proposición anterior. Como G es discreto, $\mu(\Delta)$ es un subgrupo abierto de G. Si éste es propio, existe $\varphi \in G^*$ no trivial tal que $\mu(\Delta) \subset ker(\varphi)$. Se tiene que $\varphi^n = \mathbb{1}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto G es divisible. □

Corolario 3.72. *Sea G un grupo abeliano y Hausdorff. Entonces G es compacto y divisible si, y sólo si, G^* es discreto y libre de torsión.*

Proposición 3.73. *Si G es conexo, G^* es libre de torsión.*

Demostración. Si existe $\varphi \in G^*$ tal que $\varphi^n = \mathbb{1}$, para alguna n, cada elemento de la imagen de φ es una raíz enésima de la unidad. Como G es conexo, $\varphi = \mathbb{1}$ y G^* es libre de torsión. □

Lema 3.74. *Sea G compacto. Si $U \in \overset{\circ}{\Sigma}$ es compacta, existe H, un subgrupo abierto y compacto de G tal que $H \subset U$.*

Demostración. Como U es compacta, existe $V \in \Sigma$ tal que $U \cdot V \subset U$. Se afirma que, para toda n, $V^n \subset U$. Para $n = 1$ se tiene. Si suponemos que $V^n \subset U$, es claro que $V^n \cdot V \subset U$. El grupo $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n \subset U$ es abierto (cerrado). □

Proposición 3.75. *Si G es abeliano, discreto y libre de torsión, G^* es conexo.*

Demostración. Si G^* no es conexo, existe U una vecindad abierta y cerrada de $\mathbb{1}$ distinta de G^*. Como G^* es compacto, U es compacta, y por el Lema 3.74, existe $H \subset U$, un subgrupo abierto y cerrado distinto de G^*. Como G^* es compacto y H es abierto, H tiene una cantidad finita de clases laterales. Por lo tanto G^*/H es un grupo abeliano discreto finito no trivial. Existe un caracter no trivial φ de G^* que se anula en H y cuya imagen es un subgrupo finito no trivial de $\mathbb{S}^1$. Por lo tanto $\varphi^n = \mathbb{1}$, para alguna n. Esto es una contradicción pues G^{**} es libre de torsión, ya que G y G^{**} son isomorfos. □

Corolario 3.76. *Si G es un grupo abeliano y Hausdorff, G es discreto y libre de torsión si, y sólo si, G^* es compacto y conexo.*

Teorema 3.77. *Un grupo ACH es conexo si, y sólo si, es divisible.*

Proposición 3.78. *Si G es localmente compacto y 1 numerable, G^* es σ-compacto.*

Demostración. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades compactas de e. Se afirma que

$$\{\Lambda_4{}^{K_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$$

es una cubierta de G^*. Si $\varphi \in G^*$, existe $V \in \Sigma$ tal que $\varphi(V) \subset \Lambda_4$. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \subset V$, y por lo tanto, $\varphi \in \Lambda_4{}^{K_i}$.

En el Lema 3.15 se demostró que, para toda vecindad compacta K de e, $\Lambda_4{}^K$ tiene cerradura compacta. Por lo tanto

$$G^* = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\Lambda_4{}^{K_i}}$$

□

Proposición 3.79. *Si G es localmente compacto y σ-compacto, G^* es 1 numerable.*

Demostración. Es claro que G se puede cubrir con una cantidad numerable de abiertos con cerradura compacta. Sea $\{V_i\}$ una cubierta de esa forma y, sin pérdida de generalidad, supóngase cerrada bajo uniones finitas. Si $K \subset G$ es compacto, $K \subset V_n$, para alguna n. Para toda vecindad subbásica de $\mathbb{1}$, U^K, existe m tal que $\Lambda_m{}^K \subset U^K$. Además, existe n tal que $\Lambda_m{}^{\overline{V_n}} \subset \Lambda_m{}^K$. Por lo tanto $\{\Lambda_i{}^{\overline{V_j}}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de $\mathbb{1} \in G^*$. □

Teorema 3.80. *Si G es ALCH, G es metrizable si, y sólo si, G^* es σ-compacto.*

Demostración. Sólo falta decir que para un grupo de Hausdorff es equivalente ser 1 numerable a ser metrizable.[11] □

Corolario 3.81. *Si G es ALCH, G es metrizable y compacto si, y sólo si, G^* es numerable.*

Demostración. Si G es compacto y metrizable, G^* es discreto y σ-compacto. En un discreto los compactos son finitos. Por lo tanto G^* es numerable.

Por el Corolario 2.56, si G^* es numerable, es discreto, y por lo tanto, G es compacto. Todo espacio numerable es σ-compacto, entonces G es metrizable. □

Definición 3.82. *Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos subconjuntos conexos que posee son unitarios.*

Lema 3.83. *Sea G compacto y totalmente disconexo y sea*

$$C = \bigcap \{A \in \Sigma \mid A \text{ es abierto y cerrado}\}$$

Entonces $C = \{e\}$ y si $L \subset G$ es cerrado y $e \notin L$, para algún $A \in \Sigma$ abierto y cerrado, $A \cap L = \emptyset$.

[11] Mickail Tkachenko *et al.*, *op. cit.*, p. 99.

Demostración. Si un conjunto cerrado L es ajeno a C, existe un conjunto abierto y cerrado D tal que $e \in D$ y $D \cap L = \emptyset$. Ya que, de no ser así, para todo A abierto y cerrado que contiene a e, $A \cap L \neq \emptyset$. Por lo tanto el conjunto

$$\{A \cap L \,|\, A \in \Sigma \text{ y } A \, \text{es abierto y cerrado}\}$$

tiene la propiedad de intersecciones finitas no vacías. Como G es compacto,

$$\emptyset \neq \bigcap \{A \cap L \mid e \in A \text{ y } A \text{ es abierto y cerrado}\} = L \cap C$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto existe $A \in \overset{\circ}{\Sigma}$ cerrada tal que $A \cap L = \emptyset$.

Si $C \neq \{e\}$, C es disconexo. Es decir, existen A y B cerrados ajenos tales que $C = A \cup B$. Supóngase que $e \in A$. G es regular y compacto, entonces es normal. Por lo tanto existen U y V abiertos de G ajenos que separan a A y B. El conjunto $F = G \setminus (U \cup V)$ es cerrado y ajeno a C. Por lo observado anteriormente, existe W, vecindad abierta y cerrada de e, ajena a F.

El conjunto $W \cap U$ es cerrado, pues

$$\overline{W \cap U} \subset W \cap \overline{U} \subset G \setminus (F \cup V) \subset U$$

Es decir, $\overline{W \cap U} \subset W \cap U$. Por lo tanto $W \cap U$ contiene a e y es abierto y cerrado. Como $B \cap (W \cap U) = \emptyset$, $C \not\subset W \cap U$. Esto es una contradicción, por lo tanto $C = \{e\}$. $\square$

Proposición 3.84. *Si G es compacto y Hausdorff, G es totalmente disconexo si, y sólo si, e tiene una base de vecindades abiertas y cerradas.*

Demostración. Sea $U \in \overset{\circ}{\Sigma}$ con cerradura compacta. Supongamos que $U \neq \{e\}$. Como U es disconexo, existen A y B abiertos ajenos tales que $A \cup B = U$. Si $e \in A$, por el Lema 3.83, existe algún abierto y cerrado V, que contiene a e, tal que $V \cap (U \setminus A) = \emptyset$. Por lo tanto $V \subset B \subset U$.

Por otro lado, si e tiene una base de vecindades abiertas y cerradas para cada $x \in G$, existe A vecindad abierta y cerrada de e, tal que $x \notin A$. Si $U \subset G$ es distinto de $\{e\}$, existe $x \in U \setminus \{e\}$. Entonces existe A abierto y cerrado tal que $e \in A$ y $x \notin A$. Por lo tanto U no es conexo. $\square$

Proposición 3.85. *Si G es un grupo ACH y totalmente disconexo, para todo H subgrupo cerrado, G/H es totalmente disconexo.*

Demostración. Por la Proposición 3.84, basta demostrar que $H \in G/H$ tiene una base de vecindades abiertas y cerradas. Sea $U \subset G/H$ una vecindad abierta de H. Como G es totalmete disconexo existe A, una vecindad de e abierta y cerrada tal que $A \cdot H\big/H \subset U$. La imagen de A en G/H es abierta y cerrada. $\square$

Proposición 3.86. *Sea G un grupo ACH. Entonces G es totalmente disconexo si, y sólo si, G^* es de torsión.*

Demostración. Sea G totalmente disconexo. Por la Proposición 2.57 sabemos que la imagen de todo caracter φ de G es topológicamente isomorfa a $G/ker(\varphi)$. Por lo tanto, por la Proposición 3.85, la imagen de φ es un subgrupo cerrado y totalmente disconexo de $\mathbb{S}^1$. Entonces el grupo $im(\varphi)$ es finito (ver el Corolario 3.18) y el orden de φ también lo es.

Sea G^* de torsión. Entonces todo caracter de G tiene imagen finita. Si $C \subset G$ es un conexo no trivial alrededor de e, existe $\varphi \in G^*$ tal que $C \not\subset ker(\varphi)$ (ver el Teorema 2.71). Por lo tanto $\varphi(C)$ es un conexo no trivial contenido en la imagen de φ. Esto es una contradicción, por lo tanto C tiene que ser trivial. $\square$

Capítulo 4

Grupos reflexivos

Si G es un grupo abeliano de Hausdorff, es fácil demostrar que $\omega_G(g) \in G^{**}$. Entonces dado un grupo abeliano y Hausdorff, no necesariamente localmente compacto, tiene sentido preguntarse si ω_G es inyectiva, suprayectva, continua, si es un isomorfismo topológico, etcétera.

En el artículo "A reflexive admissible topological group must be locally compact",[1] Elena Martín demostró que para un grupo reflexivo G es equivalente que sea ALCH a que la evaluación $G^* \times G \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ sea continua. Esto muestra que el estudio de los grupos reflexivos necesita técnicas distintas a las usadas en la dualidad de Pontryagin.

Presentaremos una pequeña extensión de la dualidad de Pontryagin fuera de la categoría ALCH. En este capítulo demostraremos que la categoría de grupos reflexivos es cerrada bajo grupo dual, productos, coproductos y subgrupos abiertos. Mostraremos que esta categoría contiene a los espacios de Banach y a los espacios vectoriales reflexivos (como espacios vectoriales). También daremos condiciones suficientes para que un grupo métrico separable sea reflexivo y probaremos que todo grupo métrico reflexivo es completamente metrizable.

En este capítulo no se pretende abarcar a todos los grupos reflexivos, se busca mostrar algunas técnicas, de naturalezas distintas, empleadas para extender la dualidad de Pontryagin a otras categorías relevantes.

Se abordará también si la estructura algebraica, o aún más, si el tamaño de un grupo es una obstrucción o no para que éste sea reflexivo de manera no trivial (todo grupo discreto es reflexivo). En el Teorema 2.19 se demostró que todo grupo abeliano G de exponente finito tal que $\mathfrak{c} \leq |G|$ admite una topología de grupo ALCH (reflexivo) no discreta. Saak Gabriyelyan demostró, en el artículo "Reflexive group topologies on abelian groups",[2] que todo grupo abeliano con exponente infinito admite una topología no discreta que lo vuelve un grupo reflexivo. Más adelante demostraremos que todo grupo reflexivo, numerable y con exponente finito es discreto. Así sólo quedará abierta la pregunta para grupos G de exponente finito tales que $\aleph_1 \leq |G| < \mathfrak{c}$. Entonces, en la mayoría de los casos, se podría decir que la reflexividad de un grupo

[1]Elena Martín, "A reflexive admissible topological group must be locally compact", *Proceedings of the American Mathematical Society* vol. 123 núm 11, Providence, 1995, p. 3563-3566.

[2]Saak Gabriyelyan, "Reflexive group topologies on abelian groups", *Journal of Group Theory* vol. 13, Berlín, 2010, p. 891-901.

es un problema topológico.

Proposición 4.1. *Si G es reflexivo, G^* es reflexivo.*

Demostración. Se afirma que las funciones, entre G^* y G^{***}, ω_{G^*} y $({\omega_G}^{-1})^*$ son iguales. En efecto, si $\varphi \in G^*$ y $\Psi \in G^{**}$,

$$\begin{aligned} ({\omega_G}^{-1})^* \big(\varphi\big)(\Psi) &= \varphi\big({\omega_G}^{-1}(\Psi)\big) \\ &= \Psi(\varphi) \\ &= \omega_{G^*}\big(\varphi\big)(\Psi) \end{aligned}$$

□

Proposición 4.2. *Si G es compactamente generado, como espacio topológico,[3], para todo $K \subset G^*$ compacto, la aplicación*

$$\begin{aligned} K \times G &\to \mathbb{S}^1 \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Si Y es un subconjunto de un espacio topológico X y Z es cualquier espacio, la aplicación

$$\begin{aligned} Top(X, Z) &\xrightarrow{\iota_Y} Top(Y, Z) \\ f &\mapsto f|_Y \end{aligned}$$

es continua.

Un espacio Hausdorff es compactamente generado si, y sólo si, es un cociente de un espacio localmente compacto,[4] entonces existe una identificación $L \xrightarrow{p} G$ con L localmente compacto. Por el Lema 1.5, $K \times L \xrightarrow{id \times p} K \times G$ es una identificación. Como $K \times L$ es localmente compacto, $K \times G$ es compactamente generado.

Entonces para demostrar que $K \times G \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ es continus, basta probar que su restricción a los compactos de $K \times G$ es continua. Sin pérdida de generalidad, sea $K \times C \subset K \times G$ compacto. Se tiene que $G^* \xrightarrow{\iota_C} Top(C, \mathbb{S}^1)$ es continua. Sea $(f, x) \in K \times C$ y sea U una vecindad abierta de $f(x) \in \mathbb{S}^1$. La aplicación $Top(C, \mathbb{S}^1) \times C \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ es continua (ver la Proposición 1.2), entonces existe $V \subset C$, vecindad de x, y $W' \subset Top(C, \mathbb{S}^1)$, vecindad de $\iota_C(f)$, tales que $ev(W' \times V) \subset U$. Como ι_C es continua existe W, una vecindad de $f \in G^*$, tal que $\iota_C(W) \subset W'$. Entonces para toda $h \in W \cap K$ y para toda $v \in V \subset C$, $h(v) = \iota_C(h)(v) \in U$. Por lo tanto $K \times C \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ es continua.

□

Corolario 4.3. *Si G es compactamente generado como espacio topológico y $K \subset G^*$ es compacto, K es una familia uniformemente continua de funciones.*

[3] Un espacio topológico es compactamente generado si es Hausdorff y todo subconjunto cuya intersección con cada compacto sea cerrada, es cerrado.

[4] Carlos Prieto, *op. cit.*, p. 224.

Demostración. Sea U una vecindad de 1 en $\mathbb{S}^1$. Como $K \times G \xrightarrow{ev} \mathbb{S}^1$ es continua (ver la Proposición 4.2), para todo $(f, e) \in K \times G$, existe $V_f \times W_f$ vecindad abierta tal que $ev(V_f \times W_f) \subset U$. Existen $f_1, \dots, f_n$ tales que $K = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Sea $W = W_1 \cap \cdots \cap W_n$. Es claro que $ev(K \times W) \subset U$. $\square$

Corolario 4.4. *Para todo grupo G compactamente generado, ω_G es continua.*

Demostración. Sea U^K una vecindad de $\mathbb{1} \in G^{**}$. Como K es compacto, K es una familia uniformemente continua de funciones (ver el Corolario 4.3). Entonces existe $V \subset G$ vecindad de e tal que para toda $v \in V$ y para toda $f \in K$, $\omega_G(v)(f) = f(v) \in U$. $\square$

4.1. Grupos métricos

Los siguientes resultados, debidos a María Jesús Chasco, aparecen en el artículo "Pontryagin duality for metrizable groups".[5]

Proposición 4.5. *Todo espacio topológico 1 numerable y Hausdorff es un espacio compactamente generado.*

Demostración. Sea X 1 numerable y sea $A \subset X$ tal que para todo $K \subset X$ compacto, $A \cap K$ es cerrado en K. Si $x \in \overline{A}$ existe una sucesión en A, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge a x. Como el conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ es compacto, $A \cap \big(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}\big)$ es cerado en $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$. Por lo tanto $x \in A$. $\square$

Teorema 4.6. *Si G es un grupo abeliano métrico, G^* es un espacio compactamente generado.*

Demostración. Sea $C \subset G^*$ tal que $C \cap K$ es cerrado en G^*, para todo $K \subset G^*$ compacto. Sea $\varphi \notin C$, demostraremos que existe una vecindad de φ ajena a C. Sin pérdida de generalidad, supóngase $\varphi = \mathbb{1}$.

Como G es metrizable, $e \in G$ tiene una base de vecindades anidadas $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $U_0 = G$. Será suficiente definir una familia de subconjuntos finitos de G, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset U_n$ y

$$\overline{\Lambda_4}^{\left(\bigcup_{j\leq n} X_j\right)} \cap \overline{\Lambda_4}^{U_{n+1}} \cap C = \emptyset$$

Supóngase que existe una familia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple lo anterior. Llamemos S a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Como $X_n \subset U_n$ y cada X_n es finito, S es el conjunto de puntos de una sucesión que converge a e, por lo tanto, $S \cup \{e\}$ es compacto. Sin pérdida de generalidad, supóngase que S contiene a e. Sea $V_n = \overline{\Lambda_4}^{U_n}$.

Se tiene, para toda $n \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda_4}^{S} \cap V_{n+1} \cap C &= \left(\overline{\Lambda_4}^{\left(\bigcup_{j\leq n} X_j\right)}\right) \cap \left(\overline{\Lambda_4}^{\left(\bigcup_{j>n} X_j\right)}\right) \cap V_{n+1} \cap C \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

[5] María Jesús Chasco, "Pontryagin duality for metrizable groups", *Archiv der Mathematik* vol. 70, Basilea, 1998, p. 22-28.

Como $\{U_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de $e \in G$, para cada $\varphi \in G^*$, existe U_{m+1} tal que $\varphi(U_{m+1}) \subset \Lambda_4$. Por lo tanto $G^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{n+1}$ y $K \cap \overline{\Lambda_4}^S = \emptyset$. Como $\overline{\Lambda_4}^S$ es una vecindad de $\mathbb{1}$ ajena a K, K es cerrado.

Ahora se probará que existe dicha familia. En la demostración del Lema 3.15 para mostar que ${\Lambda_4}^K$ tiene cerradura compacta en G^* no se utilizó que que G fuera ALCH o que K fuera compacto, sólo se necesitó que K fuera una vecindad de $e \in G$. Por lo tanto, para toda n, $V_n = \overline{\Lambda_4}^{U_n} \subset G^*$ es compacto. En la demostración de ese lema también se probó que $\overline{\Lambda_4}^{U_n}$ tiene la topología inducida por la topología de la convergencia puntual en G^*.[6] Como $C \cap V_1$ es cerrado en V_1, existe una vecindad de $\mathbb{1}$ en V_1 de la forma ${\Lambda_t}^{\{k_1,\ldots,k_r\}} \cap V_1$ tal que $C \cap V_1 \cap {\Lambda_t}^{\{k_1,\ldots,k_r\}} = \emptyset$. Defínase $X_0 = \bigcup_{i=1}^{t} \{{k_1}^i, \ldots, {k_r}^i\}$. Por el Lema 3.13,

$$\begin{aligned} C \cap V_1 \cap \left({\Lambda_4}^{X_0}\right) &\subset C \cap V_1 \cap \left({\Lambda_1}^{X_0}\right) \\ &\subset C \cap V_1 \cap \left({\Lambda_t}^{\{k_1,\ldots,k_r\}}\right) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Supóngase que se han definido los conjuntos $X_0, \ldots, X_{n-1}$. El conjunto $\overline{\Lambda_4}^{\{x\}}$ es cerrado en G^*. Pues si $\varphi(x) \notin \overline{\Lambda_4}$, existe B vecindad abierta de $\varphi(x)$ tal que $B \cap \overline{\Lambda_4} = \emptyset$. Por lo tanto $B^{\{x\}} \cap \overline{\Lambda_4}^{\{x\}} = \emptyset$. Por la misma razón $\overline{\Lambda_4}^{\bigcup_{j<n} X_j}$ es cerrado en G^*. Para $x \in U_n$, definamos el cerrado de V_{n+1},

$$F_x = \overline{\Lambda_4}^{\bigcup_{j<n} X_j} \cap \overline{\Lambda_4}^{\{x\}} \cap V_{n+1} \cap C$$

Por hipótesis,

$$\bigcap_{x\in U_n} F_x \subset \overline{\Lambda_4}^{\bigcup_{j<n} X_j} \cap \overline{\Lambda_4}^{U_n} \cap C = \emptyset$$

Como para toda $x \in U_n$, $F_x \subset V_{n+1}$ es cerrado, existen $x_1, \ldots, x_t \in U_n$ tales que

$$\bigcap_{1\le i\le t} F_{x_i} = \emptyset$$

Definamos $X_n = \{x_1, \ldots, x_t\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda_4}^{\left(\bigcup_{j\le n} X_j\right)} \cap V_{n+1} \cap C &= \overline{\Lambda_4}^{\left((\bigcup_{j<n} X_j)\cup X_n\right)} \cap V_{n+1} \cap C \\ &= \overline{\Lambda_4}^{\left(\bigcup_{j<n} X_j\right)} \cap \overline{\Lambda_4}^{X_n} \cap V_{n+1} \cap C \\ &\subset \bigcap_{1\le i\le t} F_{x_i} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Por lo tanto la familia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple lo que se quería. □

Teorema 4.7. *Si G es un grupo abeliano métrico y H es un subgrupo denso de G, $G^* \xrightarrow{i^*} H^*$ es un isomorfismo topológico.*

[6] Esta topología tiene como subbase a los conjuntos de la forma U^F, donde U es un abierto de $\mathbb{S}^1$ y F es un subconjunto finito de G.

Demostración. La métrica de G se puede suponer invariante bajo traslaciones.[7] Si $i^*(\varphi) = \varphi \circ i = \mathbb{1}$,

$$\varphi(G) = \varphi(\overline{H}) \subset \overline{\varphi(H)} = \{1\}$$

Entonces i^* es inyectiva.

Sean $\varphi \in H^*$ y $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $d(e, x) < \delta$, $d(1, \varphi(x)) < \epsilon$. Si

$$d(x, y) = d(x \cdot y^{-1}, e) < \delta$$

entonces

$$d(\varphi(x \cdot y^{-1}), 1) = d(\varphi(x), \varphi(y)) < \epsilon$$

Se demostró que todo $\varphi \in H^*$ es uniformemente continuo en el sentido métrico. Por lo tanto todo $\varphi \in H^*$ tiene una extensión continua $G \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{S}^1$.[8] Es fácil demostrar que $\tilde{\varphi}$ tiene que ser un homomorfismo. Entonces $i^*(\tilde{\varphi}) = \varphi$ e i^* es un isomorfismo continuo.

Sea $L \subset H^*$ compacto. Por el Corolario 4.3, L es una familia uniformemente continua de funciones. Por lo tanto existe $U \subset G$ abierto tal que

$$L \subset {\Lambda_4}^{U \cap H} \subset H^*$$

Sea $W \subset U$ una vecindad abierta de $e \in G$ tal que $W \cdot W \subset U$. Como H es denso en G, para toda $x \in W$ existe una sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en H que converge a x. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en $x \cdot W \subset U$. Entonces $W \subset \overline{U \cap H} \subset G$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}(i^*)^{-1}(L) &\subset (i^*)^{-1}\big({\Lambda_4}^{U \cap H}\big) \\ &\subset \overline{\Lambda_4}^{U \cap H} \\ &\subset \overline{\Lambda_4}^{W} \\ &\subset G^*\end{aligned}$$

En la demostración del teorema anterior observamos que $\overline{\Lambda_4}^{W}$ es compacto en G^*. Como $(i^*)^{-1}(L)$ es cerrado, es compacto. Entonces, para todo $C \subset H^*$ cerrado y para todo $K \subset G^*$ compacto,

$$(i^*)^{-1}(C) \cap K = (i^*)^{-1}\big(C \cap i^*(K)\big)$$

es compacto (cerrado). Por lo tanto $(i^*)^{-1}(C)$ es cerrado.

Si $C \subset G^*$ es cerrado, para todo $L \subset H^*$ compacto,

$$i^*(C) \cap L = i^*\big(C \cap (i^*)^{-1}(L)\big)$$

es compacto (cerrado). Por lo tanto $i^*(C)$ es cerrado. Entonces i^* es un isomorfismo topológico. □

Corolario 4.8. $\mathbb{Q}$ *no es reflexivo.*

[7] Mikhail Tkacheko, *et. al.*, *op. cit.*, p. 100.
[8] James Dugundji, *op. cit.*, p. 302.

Demostración. Por el Teorema 4.7, $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{Q}^*$ son topológicamente isomorfos, y por lo tanto $\mathbb{R}^{**}$ y $\mathbb{Q}^{**}$ también lo son. Como $\mathbb{R}$ es reflexivo $\mathbb{Q}$ no puede serlo. □

No todo subrupo de un grupo reflexivo es reflexivo. De hecho no todo subgrupo cerrado de un grupo reflexivo es reflexivo. Horst Leptin demostró que no todo subgrupo cerrado de un producto no numerable de grupos ALCH[9] es reflexivo.[10]

Definición 4.9. *Una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un grupo H es de $\mathcal{G}$-Cauchy si para cada $U \in \Sigma$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todas $r, s > n$, $h_r \cdot {h_s}^{-1} \in U$. Un grupo es $\mathcal{G}$-completo si toda sucesión de $\mathcal{G}$-Cauchy es convergente.*

Proposición 4.10. *Si G es un espacio compactamente generado, G^* es $\mathcal{G}$-completo.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathcal{G}$-Cauchy en G^*. Para cada $K \subset G$ compacto y para cada U abierto de $\mathbb{S}^1$ alrededor de 1 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todos $r, s > n$, $\varphi_r \cdot {\varphi_s}^{-1} \in U^K$. Por lo tanto, para toda $k \in K$, $\varphi_r(k) \cdot \varphi_s(k)^{-1} \in U$. Entonces $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos. Llamemos φ a la función a la que converge (puntualmente) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos, por lo tanto $\varphi|_K$ es continua, para todo $K \subset G$ compacto. Como G es un espacio compactamente generado, φ es continua. Es inmediato que $\varphi \in G^*$. Por la Proposición 1.10, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ en G^*. □

Teorema 4.11. *Si G es un grupo métrico reflexivo, G es completamente metrizable.*

Demostración. Por el Teorema 4.6 y la Proposición 4.10, si G es métrico, entonces G^{**} es $\mathcal{G}$-completo. Como la propiedad de ser $\mathcal{G}$-completo es invariante bajo isomorfismos topológicos, si G es reflexivo, G es $\mathcal{G}$-completo. Toda sucesión de Cauchy en un grupo con una métrica invariante es de $\mathcal{G}$-Cauchy, por lo tanto G es completamente metrizable. □

Proposición 4.12. *Si X es un espacio métrico completo, la intersección de una familia numerable de abiertos densos es densa.*

Demostración. Sea $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una familia de subconjuntos abiertos y densos de X y sea $A \subset X$ un abierto. Definamos $B_0 = G$. Sea $x_1 \in D_1 \cap A$. Existe una bola de radio menor a 1 con centro en x_1, B_1, tal que $\overline{B_1} \subset D_1 \cap A$. Supóngase se tienen definidos $x_1, \ldots, x_n$, con $x_i \in D_i \cap A$ y tales que existe, para cada i, una bola de radio menor a $1/i$ con centro en x_i, B_i, tal que $\overline{B_i} \subset B_{i-1} \cap D_{i+1}$ Tomemos x_{n+1} un punto en $B_n \cap D_{n+1}$. Existe B_{n+1} una bola de radio menor a $\frac{1}{n+1}$ y con centro en x_{n+1} tal que $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap D_{n+1}$.

Por construcción, la sucesión $\{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto converge a algún $x \in X$. Obsérvese que $x \in \overline{B_{n+1}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{B_{n+1}} \subset D_{n+1}$ y $\overline{B_{n+1}} \subset B_1 \cap A$,

$$x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{n+1} \right) \cap A$$

□

[9] En el Teorema 4.42 se demostrará que el producto de grupos reflexivos es reflexivo.

[10] Horst Leptin, "Zur Dualitätstheorie projektiver Limites abelscher Gruppen", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg* vol. 19, Hamburgo, 1955, p. 264-268.

Corolario 4.13. *Si X es un espacio métrico completo y $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, con cada C_n un subconjunto cerrado, entonces algún C_i tiene interior no vacío.*

Demostración. La demostración es idéntica a la del Corolario 2.55. $\square$

Teorema 4.14. *Sea G es un grupo abeliano métrico completo y separable. Si ω_G es una biyección, G es reflexivo.*

Demostración. Para todo grupo métrico G, ω_G es continua (ver la Proposición 4.2). Mostraremos que ω_G es abierta. Del Teorema 4.6 y del Teorema 4.10 obtenemos que G^{**} es un espacio métrico completo. Todo homomorfismo continuo y suprayectivo entre dos grupos métricos completos, con dominio separable, es abierto.[11] $\square$

4.2. Grupos numerables

En el artículo "On reflexive group topologies on abelian groups of finite exponent",[12] Lydia Aussenhofer y Saak Gabriyelyan probaron que todo grupo reflexivo numerable con exponente finito es discreto. En esta sección expondremos su demostración.

Observación 4.15. Dado G un grupo con suficientes caracteres[13] se puede definir el monomorfismo continuo,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Gamma} & \prod_{\varphi\in G^*} \mathbb{S}^1 \\ g & \longmapsto & (\varphi(g))_{\varphi\in G^*} \end{array}$$

Sea G^B, G con la topología que induce Γ. Entonces G^B es topológicamente isomorfo a $\Gamma(G)$. Por lo tanto B es una topología de grupo y de Hausdorff. La topología B está contenida en todas lastopologías que hacen continuos a los caracteres de G.

Proposición 4.16. *La asignación $G \mapsto G^B$ es un funtor contravariante de la categoría de grupos con suficientes caracteres a la categoría de grupos abelianos de Hausdorff.*

Demostración. Sea $G \xrightarrow{f} H$ un homomorfismo continuo. Se afirma que $G^B \xrightarrow{f} H^B$ es continua. Sea $\psi \in H^*$ y sea $H^B \xrightarrow{\pi_\psi^H} \mathbb{S}^1$ la restricción de la proyección

$$\prod_{\varphi\in H^*} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\pi_\psi^H} \mathbb{S}^1$$

Entonces

$$\begin{array}{ccc} G^B & \xrightarrow{\pi_\psi^H\circ f} & \mathbb{S}^1 \\ g & \mapsto & \psi(f(g)) \end{array}$$

[11]Taqdir Husain, *Introduction to topological groups*, Filadelfia, W. B. Saunders Company, 1966, p. 99.

[12]Lydia Aussenhofer y Saak Gabriyelyan, *op. cit.*

[13]Para cada $g \in G \setminus \{e\}$ existe un caracter φ tal que $\varphi(g) \neq 1$.

Como $\psi \circ f \in G^*$, si $G^B \xrightarrow{\pi^G_{\psi\circ f}} \mathbb{S}^1$ es la proyección correspondiente a $\psi \circ f$, se tiene que $\pi^G_{\psi\circ f}(g) = \psi \circ f(g)$. Por lo tanto $G^B \xrightarrow{\pi^H_\psi \circ f} \mathbb{S}^1$ es continua, para toda $\psi \in H^*$. Entonces $G^B \xrightarrow{f} H^B$ es continua. Es claro que $Id^B_G = Id_{G^B}$ y que $f^B \circ h^B = (f \circ h)^B$. □

Definición 4.17. *Diremos que G respeta la compacidad si tiene suficientes caracteres y los compactos de G son los mismos que los compactos de G^B.*

Proposición 4.18. *Si G tiene suficientes caracteres, $G \xrightarrow{Id} G^B$ es un homomorfismo continuo y su homomorfismo dual $G^{B*} \xrightarrow{Id^*} G^*$ es un isomorfismo. Si además G respeta la compacidad, Id^* es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Es claro que todo abierto de G^B es abierto de G, por lo tanto Id^* es continua. Es claro que Id^* es inyectiva. Si $\varphi \in G^*$, $\pi_\varphi(g) = \varphi(g)$. Como $G^B \xrightarrow{\pi_\varphi} \mathbb{S}^1$ es continua, $\varphi \in G^{B*}$, y por lo tanto, $Id^*(\varphi) = \varphi$. Entonces Id^* es un isomorfismo.

Supóngase ahora que G respeta la compacidad, demostraremos que Id^* es abierta. Si U^K es una vecindad de $\mathbb{1} \in G^{B*}$, K es compacto en G. Por lo tanto $Id^*(U^K) = U^K$ es una vecindad abierta de $\mathbb{1} \in G^{**}$. □

El siguiente resultado aparece en el artículo "Abelian groups wich satisfy Pontryagin duality need not respect compactness"de Dieter Remus y Javier Trigos.[14]

Proposición 4.19. *Si $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de grupos que respetan la compacidad, $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ respeta la compacidad.*

Demostración. Llamemos G al producto $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$. Todo compacto en G es compacto en G^B. Supóngase que K es un compacto en G^B. Para toda $\alpha \in A$,

$$\pi_\alpha(K) = (\pi_\alpha)^B(K) \subset (G_\alpha)^B$$

es compacto. Como cada G_α respeta la compacidad, $\pi_\alpha(K)$ es compacto en G_α. Como todo cerrado de G^B es cerrado en G, K es un cerrado de G contenido en $\prod_{\alpha\in A} \pi_\alpha(K)$. Por lo tanto K es compacto en G. □

Proposición 4.20. *Si G respeta la compacidad, todo subgrupo H respeta la compacidad.*

Demostración. Sea K un compacto en H^B. Si i es la inclusión $K \hookrightarrow H$, $i^B(K) = K$ es compacto en G^B. Como G respeta la compacidad K es compacto en G. Por lo tanto K es compacto en H. □

Observación 4.21. Irving Glicksberg demostró, en el artículo "Uniform boundedness for groups",[15] que todo grupo ALCH respeta la compacidad.

[14]Dieter Remus y Javier Trigos, "Abelian groups wich satisfy Pontryagin duality need not respect compactness", *Proceedings of the American Mathematical Society* vol. 117 núm. 4, Providence, 1993, p. 1195-1200.

[15]Irving Glicksberg, "Uniform boundedness for groups", *Canadian Journal of Mathematics* vol. 14, Ottawa, 1962, p. 269-276.

Proposición 4.22. *Si G es reflexivo y de exponente finito, $e \in G$ tiene una base de vecindades formada por subgrupos abiertos.*

Demostración. Si m es el exponente de G, haciendo un abuso de notacion, se afirma que toda vecindad de la forma ${\Lambda_n}^K$, con $n > m$, es un subgrupo de G. Si $\varphi \in {\Lambda_n}^K$, para toda $k \in K$ y para toda $s = 1, \ldots, n$, $\varphi(k^s) = \varphi^s(k) \in \Lambda_1$. Entonces para toda $k \in K$, φ manda el generado de k en Λ_1. Por lo tanto ${\Lambda_n}^K = \{\varphi \mid \varphi(K) = 1\}$ es un subgrupo de G. □

Proposición 4.23. *Si G es Hausdorff y tiene una base de vecindades formada por subgrupos, G se puede encajar en un producto de grupos discretos.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la base de vecindades formada por subgrupos abiertos. Definamos el homomorfismo continuo

$$\begin{array}{ccc} G & \xmapsto{\Gamma} & \prod_{\lambda\in\Lambda} G/B_\lambda \\ g & \longmapsto & (g \cdot B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

Como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \{e\}$, Γ es inyectiva. Demostraremos que es abierta restringida a su imagen. Para cada λ,

$$\Gamma(B_\lambda) = \Gamma(G) \cap \left(\{B_\lambda\} \times \prod_{\gamma\neq\lambda} G/B_\gamma \right)$$

Como G/B_λ es discreto, $\Gamma(B_\lambda)$ es abierto en $\Gamma(G)$. □

Corolario 4.24. *Todo grupo reflexivo con exponente finito respeta la compacidad.*

Corolario 4.25. *Si G es reflexivo y tiene exponente finito, G^* respeta la compacidad.*

Demostración. Si G es reflexivo y tiene exponente finito, G^* también lo es. □

Teorema 4.26. *Si G es reflexivo, numerable y tiene exponente finito, G es discreto.*

Demostración. G^{*B} es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $\prod_{\Psi\in G^{**}} {\mathbb{S}^1}_\Psi$. Si G es numerable, $\prod_{\Psi\in G^{**}} {\mathbb{S}^1}_\Psi$ es 1 numerable. Por lo tanto $\overline{G^{*B}}$ es metrizable y se tiene que G^{*B*} y $\left(\overline{G^{*B}}\right)^*$ son isomorfos topológicamente (ver el Teorema 4.7). Como $\overline{G^{*B}}$ es ACH, G^{*B*} es discreto. Por el Corolario 4.25 G^* respeta la compacidad, por lo tanto G^{**} es isomorfo topológicamente a G^{*B*} (ver la Proposición 4.18). □

4.3. Subgrupos abiertos

En esta sección demostraremos que un subgrupo abierto A de G es reflexivo si, y sólo si, G es reflexivo. Seguiremos la demostración que dan Wojciech Banaszczyk *et. al.*, en el artículo “Open subgroups and Pontryagin duality”.[16]

[16]Wojciech Banaszczyk, *et. al.*, “Open subgroups and Pontryagin duality”, *Mathematische Zeitschrift* vol. 215, Berlín, 1994, p. 195-204.

Proposición 4.27. *Si G y H son grupos de Hausdorff y $G \xrightarrow{\varphi} H$ es un homomorfismo continuo y abierto con núcleo compacto, entonces para todo $K \subset H$ compacto, $\varphi^{-1}(K)$ es compacto.*

Demostración. Primero demostraremos que si una red en H, de la forma $\{\varphi(g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, tiene un punto de acumulación en H, entonces $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene un punto de acumulación en G. Como $\varphi(G)$ es un subgrupo abierto de H, es cerrado. Entonces todo punto de acumulación de la red $\{\varphi(g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ está en la imágen de φ. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, supóngase que $e \in H$ es un punto de acumulación de la red $\{\varphi(g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Buscamos un punto de acumulación de la sucesión $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en el núcleo de φ.

Supóngase que dicho punto no existe. Por lo tanto para cada $k \in ker(\varphi)$ existen $\lambda_k \in \Lambda$ y una vecindad abierta U_k de k tales que $g_\lambda \notin U_k$, para toda $\lambda > \lambda_k$. Como $ker(\varphi)$ es compacto, existen $k_1, \ldots, k_n \in ker(\varphi)$ tales que

$$ker(\varphi) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n = U$$

Entonces, para toda $\lambda > \text{máx}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $g_\lambda \notin U$. Sea V una vecindad abierta de $e \in G$ tal que

$$ker(\varphi) \cdot V = \varphi^{-1}(\varphi(V)) \subset U$$

Como $\varphi(V)$ es una vecindad de $e \in H$, y como para toda $\lambda > \text{máx}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\varphi(g_\lambda) \notin \varphi(V)$, $e \in H$ no puede ser punto de acumulación de $\{\varphi(g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la red $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene un punto de acumulación.

Si $L \subset H$ es compacto, para toda red $\{g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\varphi^{-1}(L)$, la red $\{\varphi(g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene un punto de acumulación en L. Por lo dicho anteriormente, la red $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene un punto de acumulación x en G. Como $\varphi^{-1}(L)$ es cerrado, $x \in \varphi^{-1}(L)$. Demostramos que $\varphi^{-1}(L)$ es compacto. □

Proposición 4.28. *Si G es un grupo de Hausdorff y A es un subgrupo abierto, la función inducida por i, la inclusión de A en G, $G^* \xrightarrow{i^*} A^*$, es suprayectiva y abierta.*

Demostración. Como $\mathbb{S}^1$ es divisible, todo caracter de A se puede extender a un homomorfismo de G en $\mathbb{S}^1$. Dicha extensión restringida a A es continua, y por lo tanto es continua en todo G. Así, i^* es suprayectiva.

Llamemos π al morfismo $G \xrightarrow{\pi} G/A$. Sea ${\Lambda_m}^K$ una vecindad de $\mathbb{1} \in G^*$. Como G/A es discreto y $\pi(K)$ es compacto, $\pi(K)$ es finito. El grupo generado por $\pi(K)$, debido al Teorema Fundamental de los Grupos Abelianos Finitamente Generados, es un producto de grupos cíclicos C_i, con $i = 1, \ldots, n$. Sea $g_i \in G$ tal que $\pi(g_i)$ genera a C_i. Llamemos I al subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $i \in I$ si, y sólo si, C_i es finito.

Definamos

$$Q = \{{g_1}^{z_1} \cdot \cdots \cdot {g_n}^{z_n} \mid z_j \in \mathbb{Z}, \text{ y para toda } i \in I, 0 \leq z_i < |C_i|\}$$

Para todo $k \in K$, $\pi(k) = \pi(q)$, para algún $q \in Q$. Como K es compacto, existen $q_1, \ldots, q_l \in Q$ tales que

$$K \subset q_1 \cdot A \cup \cdots \cup q_l \cdot A$$

Si $k = q_i \cdot a$, $a \in (q_i^{-1} \cdot K) \cap A$. Entonces

$$L = \left(q_1^{-1} \cdot K \cup \cdots \cup q_l^{-1} \cdot K\right) \cap A$$

es compacto y $K \subset Q \cdot L$. Sea $s_i = |C_i|$. Demostraremos que

$$\Lambda_{m \cdot 2^{n+1}}{}^{(L \cup \{g_i{}^{s_i} | i \in I\})} \subset i^* \left({\Lambda_m}^K\right) \subset A^*$$

Sea $\varphi \in \Lambda_{m \cdot 2^{n+1}}{}^{(L \cup \{g_i{}^{s_i} | i \in I\})}$. Se afirma que la asignación

$$\begin{array}{rcl} A \cdot < Q > & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{S}^1 \\ a \cdot \prod_{j=1}^n g_j^{z_j} & \longmapsto & \varphi(a) \cdot \prod_{i \in I} \varphi(g_i^{s_i})^{\frac{z_i}{s_i}} \end{array}$$

es un homomorfismo. Para demostrar que está bien definido es suficiente mostrar que si $a = \prod_{j=1}^n g_j^{z_j}$, entonces $\varphi(a) = \prod_{i \in I} \varphi(g_i^{s_i})^{\frac{z_i}{s_i}}$. Si $a = \prod_{j=1}^n g_j^{z_j}$,

$$\pi\left(\prod_{j=1}^n g_j^{z_j}\right) = \prod_{j=1}^n \pi(g_j)^{z_j} = e$$

Entonces, para toda $j \notin I$, $z_j = 0$, y para toda $i \in I$, $s_i \cdot r_i = z_i$, para alguna $r_i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a) & = & \varphi\left(\prod_{i \in I} (g_i^{s_i})^{r_i}\right) \\ & = & \prod_{i \in I} \varphi((g_i^{s_i}))^{r_i} \\ & = & \prod_{i \in I} \varphi((g_i^{s_i}))^{\frac{z_i}{s_i}} \end{array}$$

Hemos demostrado que $\tilde{\varphi}$ está bien definido. Claramente $\tilde{\varphi}$ es un homomorfismo. Como $\tilde{\varphi}$ es continuo en A, es continuo en $A \cdot < Q >$. El homomorfismo $\tilde{\varphi}$ se puede extender a un caracter de G, $\overline{\varphi}$, pues $A \cdot < Q >$ es un subgrupo abierto de G. Entonces $i^*(\overline{\varphi}) = \varphi$. Por último obsérvese que $\overline{\varphi}(K) = \tilde{\varphi}(K) \subset \Lambda_m$, pues $K \subset Q \cdot L$. □

Corolario 4.29. *Si G es Hausdorff y A es un subgrupo abierto de G, para todo $K \subset A^*$ compacto, $(i^*)^{-1}(K) \subset G^*$ es compacto.*

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 4.27 y de la Proposición 4.28. □

Teorema 4.30. *Si A es un subgrupo abierto de G, A es reflexivo si, y sólo si, G es reflexivo.*

Demostración. En cualquier caso, G se está suponiendo Hausdorff. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\omega_A"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\omega_G"] & G/A \arrow[d, "\omega_{G/A}"] \\ A^{**} \arrow[r, "i^{**}"] & G^{**} \arrow[r, "\pi^{**}"] & (G/A)^{**} \end{tikzcd}$$

Los renglones del diagrama están formados por homomorfismos continuos. Como todo grupo abeliano discreto es reflexivo, la columna de la derecha es un isomorfismo topológico.

Como $\pi^{**} \circ i^{**} = (\pi \circ i)^{**} = \mathbb{1}$, la imagen de i^{**} está contenida en el núcleo de π^{**}. Si $\Psi \in ker(\pi^{**})$, $\Psi \circ \pi^* = \mathbb{1}$, entonces $ker(i^*) = im(\pi^*) \subset ker(\Psi)$. Por la Proposición 4.28, $G^* \xrightarrow{i^*} A^*$ es un cociente, entonces existe $\tilde{\Psi} \in A^{**}$ tal que $i^{**}(\tilde{\Psi}) = \tilde{\Psi} \circ i^* = \Psi$. Demostramos que el renglón de abajo es exacto.

Como i^* es suprayectiva, i^{**} es inyectiva. Sea ${\Lambda_n}^K$ un abierto alrededor de $\mathbb{1} \in A^{**}$. Se tiene que

$${\Lambda_n}^{(i^*)^{-1}(K)} \cap im(i^{**}) \subset i^{**}\left({\Lambda_n}^K\right)$$

Pues si $\Psi = \Gamma \circ i^* \in {\Lambda_n}^{(i^*)^{-1}(K)} \cap im(i^{**})$, como i^* es suprayectiva,

$$\begin{aligned} \Gamma(K) &= \Gamma\Big(i^*\big((i^*)^{-1}(K)\big)\Big) \\ &= \Gamma \circ i^*\big((i^*)^{-1}(K)\big) \\ &\subset \Lambda_n \end{aligned}$$

Demostramos que i^{**} es un homeomorfismo en su imagen. Como $(G/A)^{**}$ es discreto, $im(i^{**}) = ker(\pi^{**})$ es un abierto de G^{**}. Por lo tanto i^{**} es una función abierta.

Si A es reflexivo, ω_G tiene que ser un isomorfismo. Si $\omega_G(g) = \mathbb{1}$, $\pi(g) = e$, pues $\omega_{G/A}$ es inyectiva. Entonces $g \in A$ y $\omega_G(g) = i^{**}(\omega_A(g)) = \mathbb{1}$. Por lo tanto $g = e$. Y si tomamos $\Psi \in G^{**}$, existe $g \in G$ tal que $\Psi^{-1} \cdot \omega_G(g) \in im(i^{**})$. Por lo tanto existe $a \in A$ tal que $\omega_G(a) = \Psi^{-1} \cdot \omega_G(g)$. Demostramos que ω_G es suprayectiva.

Si A es reflexivo, ω_G es continuo, pues es un homomorfismo que restringido a A es continuo. Si restrigimos a i y a i^{**} a sus imágenes estos son homeomorfismos. Entonces, haciendo un abuso de notación, la función

$$i^{-1} \circ {\omega_G}^{-1} \circ (i^{**})^{-1} = {\omega_A}^{-1}$$

es continua. Entonces ${\omega_G}^{-1}$ es un homomorfismo que restringido a una vecindad abierta de $\mathbb{1}$ es continuo. Se mostró que G es reflexivo.

Si G es reflexivo, haciendo un abuso de notación,

$$\omega_A = i \circ \omega_G \circ (i^{**})^{-1}$$

Entonces ω_A es una composición de isomorfismos topológicos. Por lo tanto A es reflexivo. □

4.4. Productos y sumas

Los siguientes resultados, debidos a Samuel Kaplan y que aparecen en el artículo "Extensions of the Pontrjagin duality I: infinite products",[17] permitirán demostrar que un producto de grupos reflexivos es reflexivo. Históricamente así se obtuvo la primer

[17] Samuel Kaplan, "Extensions of the Pontrjagin duality I: infinite products", *Duke Mathematical Journal* vol 15, Durham, 1948, p. 649-658.

familia de grupos reflexivos que no son localmente compactos: productos infinitos de grupos ALCH no compactos. Demostraremos que en la suma directa de grupos se puede definir una topología de grupo, que además pone en dualidad a los productos y las sumas directas de grupos reflexivos. Utilizaremos la notación aditiva.

Proposición 4.31. *Si $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de grupos topológicos, existe un isomorfismo de grupos entre $\left(\prod_\alpha G_\alpha\right)^*$ y $\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*$.*

Demostración. Dada $\varphi \in \left(\prod_{\alpha\in A} G_\alpha\right)^*$, existe una vecindad de $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$,

$$W = B_1 \times \cdots B_n \times \prod_{\alpha\neq 1,\ldots,n} G_\alpha$$

tal que $\varphi(W) \subset \Lambda_1$. Si i_α es la inclusión de G_α en el producto, para toda $\alpha \neq 1,\ldots,n$, $\varphi \circ i_\alpha = \mathbb{1}$ (ver el Lema 3.8). Es fácil demostrar que la asignación $\varphi \mapsto (\varphi \circ i_\alpha)_{\alpha\in A}$ es el isomorfismo buscado. □

Samuel Kaplan definió una topología de grupo en la suma directa de manera que productos y sumas directas son objetos en dualidad.

Definición 4.32. *Dada $U \subset G$ en Σ, sea*

$$1/2U = \{g \in U \mid 2g \in U\}$$

y sea

$$1/2^{n+1}U = 1/2\,(1/2^n U)$$

Para $g \in U$, definamos

$$g/U = \acute{\imath}nf\{1/2^n \mid g \in 1/2^n U\}$$

Si $U \in \Sigma$ es claro que $1/2^n U \in \Sigma$.

Definición 4.33. *Diremos que U, un subconjunto de $\bigoplus_\alpha G_\alpha$, es una vecindad abierta de $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ en la topología $*$ si, y sólo sí,*

$$U = U(U_\alpha) = \left\{(g_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigoplus_\alpha U_\alpha \mid \sum_\alpha g_\alpha/U_\alpha < 1\right\}$$

con cada U_α una vecindad abierta y simétrica de e en G_α. La topología $*$ será el conjunto de trasladados de estos conjuntos.

Teorema 4.34. *La topología * en $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ es de grupo. Si además cada G_α es Hausdorff, la toplogía * es de Hausdorff.*

Demostración. Claramente $(e_\alpha)_{\alpha\in A} \in U$, para toda $U \in \Sigma$. Probaremos que Σ cumple los incisos de la Proposición 3.2.
a) Si $U, V \in \Sigma$,

$$U(U_\alpha \cap V_\alpha) \subset U \cap V$$

pues si $(g_\alpha)_{\alpha\in A} \in U(U_\alpha \cap V_\alpha)$,

$$\sum_\alpha g_\alpha/U_\alpha \leq \sum_\alpha g_\alpha/(U_\alpha \cap V_\alpha) < 1$$

ya que, para toda α, $g_\alpha/U_\alpha \leq g_\alpha/(U_\alpha \cap V_\alpha)$. De igual manera, $\sum_\alpha g_\alpha/V_\alpha < 1$.
b) Sea $U = U(U_\alpha) \in \Sigma$. Para toda α existe V_α, vecindad abierta y simétrica de e_α, tal que $V_\alpha + V_\alpha \subset 1/2U_\alpha$. Se afirma que $V = V(V_\alpha)$ es la vecindad buscada. Para toda α y para todas $g_\alpha, h_\alpha \in V_\alpha$, como $V_\alpha + V_\alpha \subset 1/2U_\alpha$,

$$(g_\alpha - h_\alpha)/(1/2U_\alpha) \leq \text{máx}\{g_\alpha/V_\alpha, h_\alpha/V_\alpha\}$$

Separemos el conjunto A en los conjuntos Γ y Λ, de manera que, para toda $\gamma \in \Gamma$, $g_\gamma/V_\gamma \geq h_\gamma/V_\gamma$, y para toda $\lambda \in \Lambda$, $h_\lambda/V_\lambda > g_\lambda/V_\lambda$. Entonces,

$$(g_\gamma - h_\gamma)/(1/2U_\gamma) \leq g_\gamma/V_\gamma \qquad \text{y} \qquad (g_\lambda - h_\lambda)/(1/2U_\lambda) \leq h_\lambda/V_\lambda$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \sum_\alpha (g_\alpha - h_\alpha)/(1/2U_\alpha) & = & \sum_\lambda (g_\lambda - h_\lambda)/(1/2U_\lambda) + \sum_\gamma (g_\gamma - h_\gamma)/(1/2U_\gamma) \\ & \leq & \sum_\lambda h_\lambda/V_\lambda + \sum_\gamma g_\gamma/V_\gamma \\ & < & 1+1 \end{array}$$

Es decir,

$$\sum_\alpha (g_\alpha - h_\alpha)/U_\alpha \leq \frac{1}{2}\sum_\alpha (g_\alpha - h_\alpha)/(1/2U_\alpha) < 1$$

Entonces $(g_\alpha - h_\alpha)_{\alpha\in A} \in U(U_\alpha)$ y $V(V_\alpha) - V(V_\alpha) \subset U$.
c) Se cumple en todo grupo abeliano.
d) Sea $(g_\alpha)_{\alpha\in A} \in U = U(U_\alpha)$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los índices tales que $g_{\alpha_i} \neq e$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $c > 0$ tales que

$$\frac{1}{2^m} + c < 1 - \sum_\alpha g_\alpha/U_\alpha$$

Definamos para toda $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $V_\alpha = 1/2^m U_\alpha$. Supóngase que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ están ordenados de manera que, para cada $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $g_i/U_i \neq 0$, y para cada $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n$, $g_i/U_i = 0$. Si $i = 1, \ldots, s$, $g_i \in (g_i/U_i)U_i$, entonces existe V_i tal que

$$g_i + V_i \subset (g_i/U_i)U_i$$

Si $i = s+1, \ldots, n$, sea m_i tal que $1/2^{m_i} < c/(n-s)$ y tal que $g_i \in 1/2^{m_i}U_i$. Entonces sea V_i una vecindad simétrica del neutro tal que $g_i + V_i \subset 1/2^{m_i}U_i$. Se afirma que

$$(g_\alpha)_{\alpha\in A} + V(V_\alpha) \subset U(U_\alpha)$$

Si $(v_\alpha)_{\alpha\in A} \in V(V_\alpha)$,

$$\begin{array}{rcl}
\sum_\alpha (g_\alpha + v_\alpha)/U_\alpha & = & (g_1+v_1)/U_1 + \cdots + (g_n+v_n)/U_n + \sum_{\alpha\neq 1,\ldots,n} v_\alpha/U_\alpha \\
& \leq & g_1/U_1 + \cdots + g_s/U_s + \\
& & (g_{s+1}+v_{s+1})/U_{s+1} + \cdots + (g_n+v_n)/U_n + \sum_{\alpha\neq 1,\ldots,n} v_\alpha/U_\alpha \\
& \leq & g_1/U_1 + \cdots + g_s/U_s + c + \sum_{\alpha\neq 1,\ldots,n} v_\alpha/U_\alpha \\
& = & g_1/U_1 + \cdots + g_s/U_s + c + \sum_{\alpha\neq 1,\ldots,n} \frac{1}{2^m}(v_\alpha/V_\alpha) \\
& \leq & g_1/U_1 + \cdots + g_s/U_s + c + \frac{1}{2^m}\sum_\alpha v_\alpha/V_\alpha \\
& < & 1
\end{array}$$

Por lo tanto $(g_\alpha)_{\alpha\in A} + V(V_\alpha) \subset U(U_\alpha)$. Entonces $\bigoplus_\alpha G_\alpha$, con la topología *, es un grupo topológico.

Supóngase cada G_α de Hausdorff. Si $(g_\alpha)_{\alpha\in A} \neq (e_\alpha)_{\alpha\in A}$, existe g_0 tal que $g_0 \neq e_0$. Sea U_0 una vecindad de e_0 que no contiene a g_0. Definamos para toda $\alpha \neq 0$, $U_\alpha = G_\alpha$. Entonces $U(U_\alpha)$ es una vecindad de $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ que no contiene a $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$. □

Proposición 4.35. *Si a la suma directa se le da la topología *, las inclusiones son continuas.*

Demostración. Sea $G_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} \bigoplus_\alpha G_\alpha$ una incusión y sea $U(U_\alpha)$ una vecindad de $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$. Existe $V \subset G_\alpha$ una vecindad del neutro tal que $V + V \subset U_\alpha$. Para todo $v \in V$, $\iota_\alpha(v) = (g_\alpha)_{\alpha\in A} \in U(U_\alpha)$, pues

$$\sum_\alpha g_\alpha/U_\alpha = v/U_\alpha \leq 1/2$$

□

Observación 4.36. Para una familia arbitraria de grupos abelianos la topología *, definida en la suma directa por Samuel Kaplan no es, en general, la topología de coproducto en la categoría de grupos topológicos abelianos. Para ver la definición de la topología de coproducto, su comparación con la topología * y con otras topologías definidas de manera natural en la suma directa, así como ejemplos en donde estas topologías son distintas, véase el artículo de Philip Higgins, "Coproducts of topological abelian groups".[18]

Lema 4.37. *Si W es una vecindad abierta, simétrica y conexa de $1_{\mathbb{S}^1}$, contenida en Λ_1, para todo abierto $V \subset G^*$, existe $K \subset G$ compacto tal que $W^K \subset V$.*

Demostración. Existe $U^L \subset V$, con $U \in \Sigma$ abierta. Sea Λ_m tal que $\Lambda_m \subset U \cap 1/2W$. Existe n, el primer natural tal que

$$1/2W \subset n\Lambda_m \subset W$$

Utilizando la idea en la demostración del Lema 3.13, uno se puede convencer que

$$\begin{array}{rcl}
W^{2nL} & = & (1/2W)^{nL} \\
& \subset & (n\Lambda_m)^{nL} \\
& = & {\Lambda_m}^L
\end{array}$$

□

[18] Philip Higgins, "Coproducts of topological abelian groups", *Journal of Algebra* vol. 44, Nueva York, 1977, p. 152-157.

Lema 4.38. *Si $V = U^K$, con $U \subset \Lambda_1$, para todo $\varphi \in V$,*

$$\varphi(K) \subset (\varphi/V)U \quad y \quad \varphi(K) \not\subset 1/2(\varphi/V)U$$

Demostración. Es inmediato de las definiciones. □

Teorema 4.39. *Si cada G_α es Hausdorff y a la suma directa le damos la topología *, el homomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} (\prod_\alpha G_\alpha)^* & \xrightarrow{\Psi} & \bigoplus_\alpha {G_\alpha}^* \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi \circ \iota_\alpha)_{\alpha \in A} \end{array}$$

definido en la Proposición 4.31, es un homeomorfismo.

Demostración. Como el codominio y dominio de Ψ son grupos topológicos (ver la Proposición 3.3 y el Teorema 4.34), demostraremos que Ψ es continua alrededor de $\mathbb{1}$ y que Ψ^{-1} es continua alrededor de $(\mathbb{1}_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Sea $U = U(U_\alpha)$ una vecindad de $(\mathbb{1}_\alpha)_{\alpha \in A}$. Cada U_α tiene contenida una vecindad de $\mathbb{1}_\alpha$ de la forma $W_\alpha = V^{K_\alpha}$, con K simétrico y tal que contiene a e_α y con $V \subset \Lambda_1$ abierto, conexo y simétrico (ver el Lema 4.37). Obsérvese que cada W_α es simétrico. Se tiene que

$$(\mathbb{1}_\alpha)_{\alpha \in A} \in W(W_\alpha) \subset U(U_\alpha)$$

y se afirma que

$$\Psi\left((1/2V)^{\prod_\alpha K_\alpha}\right) \subset W(W_\alpha)$$

Si $\varphi \in (1/2V)^{\prod_\alpha K_\alpha}$ y

$$\Psi(\varphi) = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \notin W(W_\alpha)$$

o algún $\varphi_\alpha \notin W_\alpha$, o $\sum_\alpha \varphi_\alpha/W_\alpha \geq 1$. Si lo primero es el caso, existe $k \in K_\alpha$ tal que $\varphi_\alpha(k) \notin V$. Llamemos (k) al elemento de $\prod_\alpha G_\alpha$ tal que su α-ésima entrada es igual a k y el resto iguales al neutro. Entonces $\varphi((k)) = \varphi_\alpha(k) \notin V$, lo cual es una contradicción.

Si $\sum_\alpha \varphi_\alpha/W_\alpha \geq 1$, existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tales que

$$1 \leq \varphi_1/W_1 + \cdots + \varphi_n/W_n < 2$$

Por el Lema 4.38, para cada i existe $k_i \in K_i$ tal que

$$\varphi_i(k_i) \in (\varphi_i/W_i)V \quad \text{y} \quad \varphi_i(k_i) \notin 1/2(\varphi_i/W_i)V$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi_i(k_i)$ tiene argumento positivo. Sea $(g_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_\alpha G_\alpha$ el elemento tal que cada i-ésima entrada es igual a k_i y el resto son iguales al neutro. Se afirma que

$$\varphi((g_\alpha)_{\alpha \in A}) = \varphi_1(k_1) \cdot \cdots \cdot \varphi_n(k_n) \notin 1/2V$$

lo cual sería una contradicción. Si llamamos $r(V)$ al supremo de los argumentos de elementos de V, como consecuencia del Lema 4.38, para toda i,

$$1/2(\varphi_i/W_i)r(V) \leq arg(\varphi_i(k_i)) < (\varphi_i/W_i)r(V)$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} 1/2r(V) & \leq & 1/2\big(\varphi_1/W_1 + \cdots + \varphi_n/W_n\big)r(V) \\ & \leq & arg\big(\varphi_1(k_1) \cdot \cdots \cdot \varphi_n(k_n)\big) \\ & < & \big(\varphi_1/W_1 + \cdots + \varphi_n/W_n\big)r(V) \\ & < & 2r(V) \\ & < & 2/3 \end{array}$$

Por lo tanto $\varphi_1(k_1) \cdot \cdots \cdot \varphi_n(k_n) \notin 1/2V$, lo cual es una contradicción. Hemos demostrado que la función Ψ es continua.

Ahora mostraremos que Ψ^{-1} es continua. Sea V^K una vecindad de $\mathbb{1} \in (\prod_\alpha G_\alpha)^*$, con $V \subset \Lambda_1$ simétrica y conexa. Como K está contenido en el producto de sus proyecciones en cada G_α, sin pérdida de generalidad, podemos suponer K de la forma $\prod_\alpha K_\alpha$. Para cada α definamos $W_\alpha = V^{K_\alpha}$. Se afirma que

$$\Psi^{-1}\big(W(W_\alpha)\big) \subset V^K$$

Si $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \in W(W_\alpha)$,

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha/W_\alpha < 1$$

Por el Lema 4.38,

$$\varphi_\alpha(K_\alpha) \subset (\varphi_\alpha/W_\alpha)V$$

Entonces si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son las entradas distintas del neutro, para toda $(k_\alpha)_{\alpha \in A}$ en $\prod_\alpha K_\alpha$,

$$\begin{array}{rcl} \Psi^{-1}\big((\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}\big)((k_\alpha)_{\alpha \in A}) & = & \varphi_1(k_1) \cdot \cdots \cdot \varphi_n(k_n) \\ & \in & (\varphi_1/W_1)V \cdot \cdots \cdots (\varphi_n/W_n)V \\ & \subset & V \end{array}$$

Por lo tanto Ψ es un isomorfismo topológico. □

Los siguientes resultados nos permitirán demostrar que el grupo dual de una suma directa de grupos reflexivos es topológicamente isomorfo al producto de los grupos duales de los sumandos. Así probaremos que el producto y la suma directa (con la topología *) de grupos reflexivos están en dualidad y que la categoría de grupos reflexivos es cerrada bajo coproductos y productos.

Lema 4.40. *Si a $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ le damos la topología *, para todo $K \subset \bigoplus_\alpha G_\alpha$ compacto existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $K \subset G_1 \times \cdots \times G_n \times \{(e_\alpha)_{\alpha \neq 1,\ldots,n}\}$.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de la suma directa y sea $B \subset A$ el conjunto de índices β tales que la proyección de K en G_β es distinta del neutro. Supongamos que B es infinito.

Para cada $\beta \in B$ elijamos un $k_\beta \in K$ tal que su β-ésima entrada es distinta del neutro. Se afirma que el conjunto $Q = \{k_\beta\}_{\beta \in B}$ no tiene puntos de acumulación. Supóngase $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ un punto de acumulación de Q. Si $\alpha \in A \setminus B$, definamos $U_\alpha = G_\alpha$. Si $\beta \in B$ y $g_\beta \neq e_\beta$, sea $U_\beta = G_\beta$. Si $\beta \in B$ y $g_\beta = e_\beta$, sea U_β una vecindad abierta y simétrica de e_β que no contiene a la β-ésima entrada de k_β. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los índices tales que $g_{\alpha_i} \neq e_{\alpha_i}$,

$$\sum_\alpha g_\alpha/U_\alpha = g_{\alpha_1}/G_{\alpha_1} + \cdots + g/G_{\alpha_n} = 0$$

Entonces $U(U_\alpha)$ es una vecindad de $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ que, para toda β tal que $g_\beta = e_\beta$, no contiene a k_β. Entonces $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ no puede ser punto de acumulación de Q y esto es una contradicción. Por lo tanto B es finito. $\square$

Teorema 4.41. *Si cada G_α es un grupo reflexivo y a la suma directa le damos la topología *, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*)^* & \xrightarrow{\Phi} & \prod_\alpha {G_\alpha}^{**} \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi \circ \iota_\alpha)_{\alpha\in A} \end{array}$$

donde ι_α es la inclusión de ${G_\alpha}^*$ en la suma directa, es un isomorfismo topológico.

Demostración. Claramente Φ es un homomorfismo de grupos inyectivo. Si

$$(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_\alpha {G_\alpha}^{**}$$

para cada

$$f = (f_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*$$

definamos $\varphi(f) = \varphi_1(f_1)\cdot\cdots\varphi_n(f_n)$, donde $f_1, \ldots, f_n$ son las entradas de f distintas del neutro. Se afirma que $\varphi \in (\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*)^*$. Como φ es un homomorfismo, para demostrar que es continua basta hacerlo en el neutro. Cada G_α es reflexivo, entonces $\varphi_\alpha = \omega_{G_\alpha}(g_\alpha)$, para alguna $g_\alpha \in G_\alpha$. Sea $V \subset \Lambda_1$ una vecindad simétrica de 1. Si Ψ es el homeomorfismo del Teorema 4.39, $\Psi\left(V^{\{(g_\alpha)_{\alpha\in A}\}}\right)$ es una vecindad abierta de $(\mathbb{1}_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*$. Sea $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\in A} \in \Psi\left(V^{\{(g_\alpha)_{\alpha\in A}\}}\right)$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son las entradas de γ distintas del neutro,

$$\begin{aligned} \varphi((\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}) &= \varphi_1(\gamma_1)\cdot\cdots\cdot\varphi_n(\gamma_n) \\ &= \gamma_1(g_1)\cdot\cdots\cdot\gamma_n(g_n) \\ &= \Psi^{-1}(\gamma)((g_\alpha)_{\alpha\in A}) \in V \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es continua y Φ es suprayectiva.

Demostraremos que Φ es un isomorfismo topológico. Sea

$${U_1}^{Q_1} \times \cdots \times {U_n}^{Q_n} \times \prod_{\alpha\neq 1,\ldots,n} {G_\alpha}^{**}$$

una vecindad de $(\mathbb{1}_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $\prod_\alpha {G_\alpha}^{**}$ y, sin pérdida de generalidad, supóngase para toda i, $U = U_i \subset \Lambda_1$ y supóngase que cada Q_i contiene al neutro. Cada Q_i es un compacto de ${G_i}^*$, por lo tanto $\iota_1(Q_1) \cdot \cdots \cdot \iota_n(Q_n)$ es un subconjunto compacto de $\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*$. Afirmamos que

$$\Phi\left(U^{\left(\iota_1(Q_1)\cdot\cdots\cdot\iota_n(Q_n)\right)}\right) \subset U^{Q_1} \times \cdots \times U^{Q_n} \times \prod_{\alpha \neq 1,\ldots,n} {G_\alpha}^{**}$$

Sea $\varphi \in U^{\left(\iota_1(Q_1)\cdot\cdots\cdot\iota_n(Q_n)\right)}$. Entonces $\Phi(\varphi) = (\varphi \circ \iota_\alpha)_{\alpha \in A}$. Si $i = 1, \ldots, n$,

$$\varphi \circ \iota_i(Q_i) \subset \varphi\big(\iota_1(Q_1) \cdot \cdots \cdot \iota_n(Q_n)\big) \subset U$$

Por lo tanto

$$\Phi(\varphi) \in U^{Q_1} \times \cdots \times U^{Q_n} \times \prod_{\alpha \neq 1,\ldots,n} {G_\alpha}^{**}$$

Entonces Φ es continua en el neutro.

Ahora demostraremos que Φ manda vecindades abiertas del neutro del dominio en vecindades del neutro del codominio. Sea U^K una vecindad del neutro en $(\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*)^*$. Por el Lema 4.40, $K \subset G_1 \times \cdots G_n \times \{(e_\alpha)_{\alpha \neq 1,\ldots,n}\}$. Es fácil demostrar que las proyecciónes

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\alpha {G_\alpha}^* & \xrightarrow{\pi_\alpha} & {G_\alpha}^* \\ (\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} & \longmapsto & \varphi_\alpha \end{array}$$

son continuas. Por lo tanto

$$\iota_1(\pi_1(K)) \cdot \cdots \cdot \iota_n(\pi_n(K)) = \pi_1(K) \times \cdots \times \pi_n(K) \times \{(e_\alpha)_{\alpha \neq 1,\ldots,n}\}$$

es un compacto que contiene a K. Sin pérdida de generalidad supongamos K de esa forma. Si V es una vecindad abierta de 1 tal que $V^n \subset U$, Se afirma que

$$V^{K_1} \times \cdots \times V^{K_n} \times \prod_{\alpha \neq 1,\ldots,n} {G_\alpha}^* \subset \Phi\left(U^{\left(K_1 \times \cdots \times K_n \times \{(e_\alpha)_{\alpha \neq 1,\ldots,n}\}\right)}\right)$$

Sea

$$(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \in V^{K_1} \times \cdots \times V^{K_n} \times \prod_{\alpha \neq 1,\ldots,n} {G_\alpha}^*$$

Como Ψ es suprayectiva, $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} = \Phi(\varphi)$, para alguna $\varphi \in (\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*)^*$. Para toda

$$(k_\alpha)_{\alpha \in A} \in K_1 \times \cdots \times K_n \times \{(e_\alpha)_{\alpha \neq 1,\ldots,n}\}$$

se tiene que

$$\varphi((k_\alpha)_{\alpha \in A}) = \varphi \circ \iota_1(k_1) \cdot \cdots \cdot \varphi \circ \iota_n(k_n) \in V^n \subset U$$

Por lo tanto $\varphi \in U^{\left(K_1 \times \cdots \times K_n \times \{(e_\alpha)_{\alpha \neq 1,\ldots,n}\}\right)}$. Hemos demostrado que Φ es abierta. □

Teorema 4.42. *Si cada G_α es reflexivo, $\prod_\alpha G_\alpha$ es reflexivo.*

Demostración. Se afirma que el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\prod_\alpha G_\alpha \arrow[r, "\prod \omega_{G_\alpha}"] \arrow[ddr, "\omega_{\prod G_\alpha}"'] & \prod_\alpha {G_\alpha}^{**} \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\
& (\bigoplus_\alpha {G_\alpha}^*)^* \arrow[d, "\Psi^*"] \\
& (\prod_\alpha G_\alpha)^{**}
\end{tikzcd}$$

con Ψ y Φ los isomorfismos topológicos definidos en el Teorema 4.39 y el Teorema 4.41 respectivamente, es conmutativo y, por lo tanto, que $\omega_{\prod G_\alpha}$ es un isomorfismo topológico.

Si $(g_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_\alpha G_\alpha$, $\varphi \in (\prod_\alpha G_\alpha)^*$ y $\varphi \circ \iota_i$ son todas las entradas distintas del neutro de $\Psi(\varphi)$,

$$\begin{array}{rcl}
\Psi^*\Big(\Phi^{-1}\big((\omega_{G_\alpha}(g_\alpha))_{\alpha\in A}\big)\Big)(\varphi) & = & \Phi^{-1}\Big((\omega_{G_\alpha}(g_\alpha))_{\alpha\in A}\Big)\big(\Psi(\varphi)\big) \\
& = & \varphi\circ\iota_1(g_1)\cdot\cdots\cdot\varphi\circ\iota_n(g_n) \\
& = & \varphi\big((g_\alpha)_{\alpha\in A}\big) \\
& = & \omega_{\prod G_\alpha}\big((g_\alpha)_{\alpha\in A}\big)(\varphi)
\end{array}$$

□

Observación 4.43. Si A es infinito y para cada $\alpha \in A$, G_α es ALCH y no compacto, $\prod_\alpha G_\alpha$ es reflexivo y no es localmente compacto. Por lo tanto la clase de grupos reflexivos es estrictamente mayor que la clase de grupos ALCH.

Teorema 4.44. *Si cada G_α es reflexivo, $\bigoplus_\alpha G_\alpha$, con la topología *, es reflexivo.*

Demostración. Primero lo demostraremos para grupos de la forma ${H_\alpha}^*$ con H_α un grupo reflexivo (ver la Proposición 4.1). Si Ψ y Φ son los isomorfismos topológicos definidos en el Teorema 4.39 y el Teorema 4.41 respectivamente, se afirma que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_\alpha {H_\alpha}^* \arrow[r, "\Psi^{-1}"] \arrow[ddr, "\omega_{\oplus {H_\alpha}^*}"'] & (\prod_\alpha H_\alpha)^* \arrow[d, "(\prod \omega_{H_\alpha}{}^{-1})^*"] \\
& (\prod_\alpha {H_\alpha}^{**})^* \arrow[d, "\Phi^*"] \\
& (\bigoplus_\alpha {H_\alpha}^*)^{**}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si $\Gamma \in (\bigoplus_\alpha {H_\alpha}^*)^*$, $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigoplus_\alpha {H_\alpha}^*$ y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ son las entradas distintas del neutro de $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$,

$$\begin{aligned}\Phi^*\Big(\big(\prod \omega_{H_\alpha}{}^{-1}\big)^*\big(\Psi^{-1}((\varphi_\alpha)_{\alpha\in A})\big)\Big)(\Gamma) &= \Big(\big(\prod \omega_{H_\alpha}{}^{-1}\big)^*\big(\Psi^{-1}((\varphi_\alpha)_{\alpha\in A})\big)\Big)(\Phi(\Gamma))\\ &= \Psi^{-1}((\varphi_\alpha)_{\alpha\in A})\big(\prod \omega_{H_\alpha}{}^{-1}(\Phi(\Gamma))\big)\\ &= \varphi_1\big(\omega_{H_1}{}^{-1}(\Gamma\circ\iota_1)\big)\cdot \cdots \cdot \varphi_n\big(\omega_{H_n}{}^{-1}(\Gamma\circ\iota_n)\big)\\ &= \Gamma\circ\iota_1(\varphi_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma\circ\iota_n(\varphi_n)\\ &= \Gamma((\varphi_\alpha)_{\alpha\in A})\\ &= \omega_{\oplus H_\alpha{}^*}\big((\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\big)(\Gamma)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigoplus_\alpha H_\alpha{}^*$ es reflexivo. Si declaramos $H_\alpha = G_\alpha{}^*$. Usando la naturalidad de la trasformación ω y el hecho que si L_α es topológicamente isomorfo a H_α para cada α, entonces las sumas directas (con la topología *), son topológicamente isomorfas, es fácil demostrar que si $\omega_{\oplus H_\alpha{}^*}$ es un isomorfismo topológico, $\omega_{\oplus L_\alpha{}^*}$ también lo es. Entonces el resultado se tiene para todo grupo reflexivo. $\square$

En general la topología de coproducto en la categoría de grupos topológicos y la topología * son distintas, de hecho, Peter Nickolas, en el artículo "Coproducts of abelian topological groups"[19], demostró que para una familia de grupos ALCH el coproducto en la categoría de grupos abelianos es reflexivo si, y sólo si, todos salvo una cantidad numerable de los elementos de la familia son discretos. También demostró que la topología de coproducto hace reflexiva a la suma directa si, y sólo si, ésta coincide con la topología *. Como la topología * en la suma dicrecta de grupos reflexivos es reflexiva (ver el Teorema 4.44), en la suma directa de una familia de grupos ALCH no discretos, la topología * y la topología de coproducto en la categoría de grupos topológicos abelianos no son la misma.

Aunque si nos restringimos a la categoría de grupos reflexivos, la topología * sí es la topología de coproducto.

Teorema 4.45. *Si para cada α, G_α es reflexivo y existe $G_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} H$ un homomorfismo continuo a un grupo reflexivo H, la función*

$$\bigoplus_\alpha G_\alpha \xrightarrow{\oplus\varphi_\alpha} H$$

*es continua, si a $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ se le da la topología *.*

Demostración. Sin pérdidad de generalidad supóngase $H = L^*$ para algún L grupo reflexivo. Demostraremos que $\oplus\varphi_\alpha$ es cotinua en el neutro. Si $\Lambda_n{}^K$ es una vecindad de $e\in H$, sin pérdida de generalidad, con K simétrico y tal que $e\in K$, para cada α existe V_α, una vecindad simétrica de e_α tal que $\varphi_\alpha(V_\alpha)\subset\Lambda_n{}^K$. Se afirma que $\oplus\varphi_\alpha\left(V(V_\alpha)\right)\subset\Lambda_n{}^K$.

Obsérvese que $\Lambda_n{}^K$ no contiene subgrupos no triviales. Si $m\cdot f\in\Lambda_n{}^K$, para toda $k\in K$, $f(k)^m\in\Lambda_n$, pero Λ_n no contiene subgrupos no triviales (ver el Lema 3.8).

[19]Peter Nickolas, "Coproducts of abelian topological groups", *Topology and its Applications* vol. 120, Ámsterdam, 2002, p. 403-426.

Si $v = (v_\alpha)_{\alpha\in A} \in V(V_\alpha)$ y $v_1, \dots, v_m$ son las entradas distintas del neutro de v,

$$\sum_\alpha v_\alpha/V_\alpha = v_1/V_1 + \cdots + v_m/V_m < 1$$

Para cada i tal que $v_i/V_i \neq 0$, $v_i \in (v_i/V_i)V_i$ y

$$\varphi_i(v_i) \in (v_i/V_i)\left({\Lambda_n}^K\right) = \left((v_i/V_i)\Lambda_n\right)^K$$

Si $v_i/V_i = 0$, para toda $l \in \mathbb{N}$ existe $m > l$ tal que, $m \cdot v_i \in V_i$, entonces, para toda $k \in K$,

$$\varphi_i(m \cdot v_i)(k) = m \cdot \varphi_i(v_i)(k) \subset \Lambda_n$$

Por lo tanto si $v_i/V_i = 0$, para toda $k \in K$, $\varphi_i(v_i)(k) = 1$. Sean $v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$ las entradas distintas del neutro de v tales que $v_{i_j}/V_{i_j} \neq 0$. Como para toda $k \in K$, $\varphi_{i_j}(v_{i_j})(k) \in (v_{i_j}/V_{i_j})\Lambda_n$,

$$\begin{array}{rcl} arg\big(\varphi_1(v_1)(k)\cdot\cdots\cdot\varphi_n(v_n)(k)\big) & = & arg\big(\varphi_{i_1}(v_{i_1})(k)\cdot\cdots\cdot\varphi_{i_p}(v_{i_p})(k)\big) \\ & = & arg\big(\varphi_{i_1}(v_{i_1})(k)\big) + \cdots + arg\big(\varphi_{i_p}(v_{i_p})(k)\big) \\ & \leq & (v_{i_1}/V_{i_1})\frac{1}{3n} + \cdots + (v_{i_p}/V_{i_p})\frac{1}{3n} \\ & = & \frac{1}{3n}\big(v_{i_1}/V_{i_1} + \cdots + v_{i_p}/V_{i_p}\big) \\ & < & \frac{1}{3n} \end{array}$$

Por lo tanto $\oplus\varphi_\alpha\big((v_\alpha)_{\alpha\in A}\big)(k) \in {\Lambda_n}^K$. Hemos demostrado que $\oplus\varphi_\alpha$ es continua. □

4.5. Espacios vectoriales

En esta sección V será un espacio vectorial topológico real, Hausdorff y localmente convexo.

Definición 4.46. *Llamemos V^+ al conjunto de funcionales continuos de V a $\mathbb{R}$.*

Lema 4.47. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in V^*$ (el grupo dual del grupo aditivo de V), para toda $v \in V$, $\varphi(\lambda v) = \varphi(v)^\lambda$.*

Demostración. Si $q \in \mathbb{Z}$ y $v \in V$,

$$\varphi(v) = \varphi\left(\frac{1}{q}v\right)^q = \left(\varphi(v)^{\frac{1}{q}}\right)^q$$

Entonces, por la Proposición 3.73, $\varphi\left(\frac{1}{q}v\right) = \varphi(v)^{\frac{1}{q}}$. Por lo tanto, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, $\varphi\left(\frac{p}{q}v\right) = \varphi(v)^{\frac{p}{q}}$, y por continuidad, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda v) = \varphi(v)^\lambda$. □

Lema 4.48. *Si V es localmente convexo y Hausdorff, para toda $v \in V \setminus \{0\}$, $\lambda v \mapsto \lambda$ es un isomorfismo topológico entre el espacio vectorial generado por v y $\mathbb{R}$.*

Demostración. Como la función en cuestión es un homomorfismo de grupos topológicos, sólo vamos a demostrar que es continua en 0. Sean $0 < \lambda_0 < \epsilon$. Elijamos U, una vecindad convexa y simétrica de 0, en el espacio generado por v, tal que $\lambda_0 v \notin U$. Se afirma que si $\lambda v \in U$, entonces $|\lambda| < \epsilon$. Si $|\lambda| \geq \epsilon$ y $\lambda v \in U$, entonces $\lambda_0 v \in U$, ya que U es convexa. Lo cual es una contradicción. Como la inversa, $\lambda \mapsto \lambda v$, es continua, $\lambda v \mapsto \lambda$ es un isomorfismo topológico. $\square$

Teorema 4.49. *Si V es un espacio vectorial Hausdorff y localmente convexo, para todo $v \neq 0$ existe un caracter φ tal que $\varphi(v) \neq 1$.*

Demostración. Si $v \neq 0$, por el Lema 4.48, la función $\lambda v \mapsto \lambda$ es continua. Por el Teorema de Hahn-Banach,[20] existe f, una extensión lineal y continua de ésta. Entonces, para algún $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot f(v) \notin \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, $\pi \circ \lambda \cdot f(v) \neq 1$. $\square$

Lema 4.50. *Sea V es un espacio vectorial con una topología que lo hace grupo topológico. Entonces V es un espacio vectorial topológico si, y sólo si,*
a) $v \mapsto \lambda v$ es continua en 0.
b) $\lambda \mapsto \lambda v$ es continua en 0.
c) $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ es continua en $(0,0)$.

Demostración. Las funciones $v \mapsto \lambda v$ y $\lambda \mapsto \lambda v$ son homomorfismos entre grupos topológicos, por lo tanto, si son continuas en el cero, son continuas en todo su dominio. Entonces si se tienen a), b) y c), y debido a que

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ es continua. $\square$

Proposición 4.51. *Si V es un espacio vectorial localmente convexo y Hausdorff, V^* es un espacio vectorial localmente convexo y Hausdorff.*

Demostración. Definamos $\lambda \cdot \varphi(v) = \varphi(\lambda v)$. Claramente $\lambda \cdot \varphi$ es un caracter y la operación recién definida se distribuye correctamente con la operación de V^*. Por la Proposición 3.3, sólo hace falta demostar que multiplicar por escalares es continuo. Demostraremos que se cumplen los tres incisos del Lema 4.50.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea ${\Lambda_n}^K$ un abierto subbásico alrededor de $\mathbb{1} \in V^*$. Entonces, para toda $\varphi \in {\Lambda_n}^{\lambda \cdot K}$ y para toda $k \in K$,

$$\lambda \cdot \varphi(k) = \varphi(\lambda k) \in \Lambda_n$$

Por lo tanto la función $\varphi \mapsto \lambda\varphi$ es continua en $\mathbb{1}$.

Como V es localmente convexo, para toda $U \in \Sigma$ abierta existe $W \in \Sigma$ contenida en U tal que W es simétrica y convexa. Obsérvese que para toda $-1 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda \cdot W \subset W$. Para cada $v \in V$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \cdot v \in W$ y, por lo tanto, tal que para toda $-1/n < \lambda < 1/n$, $\lambda v \in W$. Si $0 < \lambda \leq \gamma$, $\lambda \cdot W \subset \gamma \cdot W$, ya que $\gamma \cdot W$ es convexo. Entonces si $K \subset V$ es compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $-1/m < \lambda < 1/m$, $\lambda \cdot K \subset W$.

[20] Helmut Schaefer y Manfred Wolff, *op. cit.*, p. 49.

Sea $\varphi \in V^*$ y sea ${\Lambda_n}^K$ una vecindad de $\mathbb{1} \in V^*$. Como φ es continua, existe W, como arriba, tal que $\varphi(W) \subset \Lambda_n$. Por lo dicho anteriormente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $-1/m < \lambda < 1/m$, $\lambda \cdot K \subset W$. Por lo tanto si $-1/m < \lambda < 1/m$, $\lambda \cdot \varphi \in {\Lambda_n}^K$. Entonces la función $\lambda \mapsto \lambda \cdot \varphi$ es continua en 0.

Sea ${\Lambda_n}^K$ una vecindad de $\mathbb{1} \in V^*$. Si

$$(\lambda, \varphi) \in (-\epsilon, \epsilon) \times {\Lambda_n}^{[-\epsilon,\epsilon]\cdot K}$$

para toda $k \in K$,

$$\lambda \cdot \varphi(k) = \varphi(\lambda k) \in \Lambda_n$$

Por lo tanto la función $(\lambda, \varphi) \mapsto \lambda \cdot \varphi$ es continua en $(0, \mathbb{1})$.

Hemos demostrado que V^* es un espacio vectorial topológico. Se afirma que ${\Lambda_n}^K$ es convexo. Si $t \in [0,1]$ y $\varphi, \psi \in {\Lambda_n}^K$, para toda $k \in K$,

$$(1-t) \cdot \varphi(k) + t \cdot \psi(k) = \varphi(k)^{1-t}\psi(k)^t = e^{i((1-t)\theta_1 + t\theta_2)}$$

con $\theta_1, \theta_2 \in (-1/3n, 1/3n)$. Por lo tanto $(1-t) \cdot \varphi + t \cdot \psi \in {\Lambda_n}^K$. □

Teorema 4.52. *Sea V es un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff y sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos acotados*[21] *de V tal que para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, existe $D_3 \in \mathcal{D}$ que contiene a $D_1 \cup D_2$. Definamos*

$$U^D = \{f \in V^+ \mid \overline{f(D)} \subset U \subset \mathbb{R}\}$$

Y sea

$$\Sigma = \{U^D | D \in \mathcal{D} \text{ y } U \subset \mathbb{R} \text{ un abierto alrededor de } 0\}$$

Si declaramos que $A \in \mathcal{A}$ si, y sólo si, para toda $f \in A$, existe $W \in \Sigma$, tal que $f + W \subset A$, entonces $\mathcal{A}$ es una topología de espacio vectorial topológico localmente convexo. Si además $V = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$, la topología $\mathcal{A}$ es de Hausdorff.

Demostración. Primero probaremos que Σ cumple los incisos de la Proposición 3.2. Si $U_1^{D_1}$ y $V_2^{D_2}$ pertenecen a Σ, existe $D_3 \in \mathcal{D}$ tal que $D_1 \cup D_2 \subset D_3$, y por lo tanto,

$$(U_1 \cap U_2)^{D_3} \subset U_1^{D_1} \cap U_2^{D_2}$$

Si $U^D \in \Sigma$ y $V \subset \mathbb{R}$ es un abierto alrededor de 0 tal que $V - V \subset U$,

$$V^D - V^D \subset (V - V)^D \subset U^D$$

Sea $U^D \in \Sigma$ y $f \in U^D$. Como D es acotado y f es lineal y continua, $f(D)$ es acotado y, por lo tanto, $\overline{f(D)}$ es compacto. Entonces existe $W \subset \mathbb{R}$ vecindad abierta de 0 tal que $\overline{f(D)} + W \subset U$.[22] Por lo tanto, $f + W^D \subset U^D$.

Por la Proposición 3.2, $\mathcal{A}$ es una topología de grupo abeliano. Ahora probaremos que se cumplen los incisos del Lema 4.50.

[21] Un subconjunto D de un espacio vectorial topológico se dice acotado si para cada $U \in \Sigma$ (simétrica) existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda \cdot D \subset U$.

[22] Mikhail Tkachenko, *et al.*, *op. cit.*, p. 10.

Sea $f \in V^+$ y sea U^D una vecindad de $\mathcal{O} \in V^+$. Sin pérdida de generalidad supóngase a U convexa. Como $f(D)$ es acotado existe $0 < r < 1$ tal que, para toda γ con valor absoluto menor a r,

$$\gamma \cdot \overline{f(D)} = \overline{\gamma \cdot f(D)} \subset U$$

Por lo tanto, para toda $\gamma \in (-r, r)$, $\gamma \cdot f \in U^D$.

Sea U^D una vecindad de $\mathcal{O}$ y sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad supóngase U convexa. Si $f \in U^{\gamma \cdot D}$,

$$\overline{\gamma \cdot f(D)} = \overline{f(\gamma \cdot D)} \subset U$$

Si $t \in [0,1]$ y $f, g \in U^D$, con U convexa y alrededor de 0,

$$(t \cdot f + (1-t) \cdot g)(D) \subset \overline{t \cdot f(D) + (1-t) \cdot g(D)}$$

Como $\overline{f(D)}$ y $\overline{g(D)}$ son compactos y están contenidos en U, tanto $s = \sup\{f(d), g(d)\}_{d \in D}$ como $i = \inf\{f(d), g(d)\}_{d \in D}$ pertenecen a U. Cualquier combinación convexa de elementos de las imágenes de f y de g pertenece a $[i, s] \subset U$. Por lo tanto

$$\overline{(t \cdot f + (1-t) \cdot g)(D)} \subset \overline{t \cdot f(D) + (1-t) \cdot g(D)} \subset [i, s] \subset U$$

Entonces U^D es convexo. Demostramos que V^+, con la topología $\mathcal{A}$, es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Supóngase que $V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$. Si $f \neq \mathcal{O}$, existen $v \in V$ tal que $f(v) \neq 0$ y $D \in \mathcal{D}$ tal que $v \in \mathcal{D}$. Si U es una vecindad de 0 que no contiene a $f(v)$, $f \notin U^D$. Entonces V^+ con la topología $\mathcal{A}$ es Hausdorff. □

Teorema 4.53. *Si $\mathcal{D}$ es la colección de subconjuntos compactos de V, la topología $\mathcal{A}$ y la compacto abierta son la misma.*

Demostración. Si $f \in U^K$, para cada $k \in K$ existe $W_k \subset \mathbb{R}$, una vecindad abierta de 0 tal que $2W_k + f(k) \in U$. Como f es continua y $\mathbb{R}$ es regular, existe $V_k \subset V$, una vecindad abierta de k, tal que $f(\overline{V_k}) \subset f(k) + W_k$. Como K es compacto, existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que

$$K = K \cap V_1 \cup \cdots \cup K \cap V_n$$

Entonces si $W = W_1 \cap \cdots \cap W_n$, se afirma que $f + W^K \subset U^K$. Sean $g \in W^K$ y $k \in K$. Para alguna i, $k \in K \cap V_i$, por lo tanto

$$g(k) + f(k) \subset 2W_i + f(k_i) \subset U$$

Hemos demostrado que todo abierto de la topología compacto abierta es abierto de la topología $\mathcal{A}$.

Sea $-f + U^K$ una vecindad de $-f$ en la topología $\mathcal{A}$. Si $g + f \in U^K$, para cada $k \in K$ existe $W'_k \subset \mathbb{R}$, una vecindad abierta de $g(k)$ precompacta, tal que $\overline{W_k} + f(k) \subset U$. Como $\overline{W_k}$ es compacto, existe Y_k, una vecindad abierta de $f(k)$, tal que $\overline{W_k} + Y_k \subset U$. Sea $V_k \subset V$ una vecindad abierta de k tal que $g(\overline{V_k}) \subset W_k$ y tal que $f(\overline{V_k}) \subset Y_k$. Como K es compacto, existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que

$$K = \overline{K \cap V_1} \cup \cdots \cup \overline{K \cap V_n}$$

Se afirma que

$$W_1^{\overline{K \cap V_1}} \cap \cdots \cap W_n^{\overline{K \cap V_n}} + f \subset U^K$$

Sean

$$h \in W_1^{\overline{K \cap V_1}} \cap \cdots \cap W_n^{\overline{K \cap V_n}}$$

y $k \in K$. Para alguna i, $k \in V_i$, por lo tanto,

$$h(k) + f(k) \in W_i + Y_i \subset U$$

Entonces $h \in -f + U^K$. Hemos demostrado que todo abierto en la topología $\mathcal{A}$ es abierto en la topología compacto abierta. □

Proposición 4.54. *Si a V^* y V^+ les damos la topología compacto abierta, estos son topológicamente isomorfos como espacios vectoriales reales.*

Demostración. Si

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{S}^1 \\ r & \longmapsto & e^{r2\pi i} \end{array}$$

es la proyección canónica, se afirma que la función

$$\begin{array}{ccc} V^+ & \xrightarrow{\Gamma} & V^* \\ f & \longmapsto & \pi \circ f \end{array}$$

es un isomorfismo topológico lineal.

Como V es localmente convexo, V es localmente conectable por trayectorias. Además todo espacio vectorial es fuertemente contraíble al 0 y conectable por trayectorias, por lo tanto, para toda función continua $V \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$, tal que $f(0) = 1$, existe un único levantamiento, $V \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(0) = 0$.

Sea $f \in V^*$. Para cada $v \in V$ elijamos $\sigma[v]$ una trayectoria que empieza en 0 y termina en v. Sea $L(f \circ \sigma[v], 0)$ el único levantamiento de $f \circ \sigma[v]$ que empieza en 0. Entonces, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, $\lambda \cdot \sigma[v]$ y $\sigma[\lambda v]$ son dos trayectorias en V que empiezan en 0 y terminan en λv, entonces (ver el capítulo acerca de aplicaciones cubrientes del libro de Carlos Prieto, *Topología básica*[23]),

$$L(f \circ \lambda \cdot \sigma[v], 0)(1) = L(f \circ \sigma[\lambda v], 0)(1)$$

Como $\lambda L(f \circ \sigma[v], 0)$ es un levantamiento de $f \circ \lambda \cdot \sigma[v]$ que empieza en 0,

$$\lambda L(f \circ \sigma[v], 0) = L(f \circ \lambda \cdot \sigma[v], 0)$$

[23]Carlos Prieto, *op. cit.*

Entonces,

$$\begin{array}{rcl}\tilde{f}(\lambda v) & = & L(f \circ \sigma[\lambda v], 0)(1) \\ & = & L(f \circ \lambda \cdot \sigma[v], 0)(1) \\ & = & \lambda L(f \circ \sigma[v], 0)(1) \\ & = & \lambda \tilde{f}(v)\end{array}$$

Como $\sigma[v] + \sigma[w]$ es una trayectoria que empieza en 0 y termina en $v + w$, y como

$$L(f \circ \sigma[v], 0) + L(f \circ \sigma[v], 0)$$

es un levantamiento de $f \circ (\sigma[v] + \sigma[w])$ que empieza en 0,

$$L(f \circ \sigma[v], 0) + L(f \circ \sigma[v], 0)(1) = L(f \circ (\sigma[v] + \sigma[w])(1) = L(f \circ \sigma[v + w])(1)$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl}\tilde{f}(v) + \tilde{f}(w) & = & L(f \circ \sigma[v], 0)(1) + L(f \circ \sigma[w], 0)(1) \\ & = & L(f \circ \sigma[v + w], 0)(1) \\ & = & \tilde{f}(v + w)\end{array}$$

Por lo tanto $\tilde{f} \in V^+$. Como $\Gamma(\tilde{f}) = f$, hemos demostrado que Γ es suprayectiva.

Si $\pi \circ f = \pi \circ g$, $im(f - g) \subset \mathbb{Z}$. Todo espacio vectorial es conexo, por lo tanto $f = g$. Entonces Γ es inyectiva.

Para todas $f, g \in V^+$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}\Gamma(f + \lambda \cdot g) & = & \pi \circ (f + \lambda \cdot g) \\ & = & (\pi \circ f) \cdot (\pi \circ \lambda \cdot g) \\ & = & (\pi \circ f) \cdot (\pi \circ g)^\lambda\end{array}$$

Hemos demostrado que Γ es un isomorfismo lineal.

Si U^K es una vecindad de $\mathbb{1}$ en V^*, para toda $f \in \pi^{-1}(U)^K$, $\Gamma(f) \in U^K$. Por lo tanto Γ es continua. Sea U^K una vecindad de $\mathcal{O} \in V^+$. Sin pérdida de generalidad supóngase que U es convexa y que es una hoja de la aplicación cubriente π. Se afirma que $\pi(U)^K \subset \Gamma\left(U^K\right)$. Si $\varphi \in \pi(U)^K$, para toda $0 \leq t \leq 1$ y para toda $k \in K$,

$$\varphi(t \cdot k) = \varphi(k)^t \in \pi(U)$$

Si $k \in K$, la trayectoria $t \overset{\gamma_k}{\longmapsto} tk$ inicia en 0 y termina en k. Por lo tanto

$$\tilde{\varphi}(k) = L(\varphi \circ \sigma[k], 0)(1) = L(\varphi \circ \gamma_k, 0)(1)$$

Para toda $k \in K$, $\varphi(tk) \in \pi(U)$, entonces

$$L(\varphi \circ \gamma_k, 0) = \pi|_U{}^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_k$$

Por lo tanto

$$\tilde{\varphi}(k) = \pi|_U{}^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_k(1) \in U$$

y $\pi(U)^K \subset \Gamma\left(U^K\right)$. Hemos demostrado que Γ es abierta. $\square$

Definición 4.55. *Un espacio vectorial localmente convexo y Hausdorff V es reflexivo (como espacio vectorial) si $V \xrightarrow{\omega_V} V^{++}$ es un isomorfismo topológico, cuando a V^+ se le da la topología $\mathcal{A}$, definida en el Teorema 4.52 a partir de la colección de todos los subconjuntos acotados de V. A V^+ con esta topología lo llamaremos V^{+b}. En adelante usaremos la notación V^+ para el conjunto de funcionales continuos de V. Se supondrá V^+ con la topología compacto abierta.*

Para ver ejemplos de espacios vectoriales reflexivos que, en particular, no son de Banach, consúltese el libro *Topological Vector Spaces*,[24] de Helmut Schaefer y Manfred Wolff.

En el artículo "The Pontrjagin duality theorem in linear spaces"[25] Marianne Smith demostró que el grupo abeliano subyacente a un espacio vectorial reflexivo (como espacio vectorial) es reflexivo (como grupo abeliano). También probó que el grupo subyacente a un espacio de Banach es reflexivo (como grupo). A continuación se expondrán sus resultados.

Proposición 4.56. *Si V es reflexivo, V^+ y V^{+b} tienen los mismos funcionales continuos.*

Demostración. Sea f un funcional continuo de V^{+b}. Demostraremos que pertenece a V^{++}. Como V es reflexivo, f está dada por la evaluación en un elemento v_0 de V. Probaremos que toda función de este estilo es un funcional continuo de V^+. Si $v \in V$ y U es una vecindad de $0 \in \mathbb{R}$, para toda $g \in U^{\{v\}}$, $g(v) \in U$.

Como todo subconjunto compacto de V es acotado (ver la demostración de la Proposición 4.51), toda vecindad de $\mathcal{O} \in V^+$ de la forma U^K es una vecindad de $\mathcal{O}$ en V^{+b}. Por lo tanto $V^{++} = V^{+b+}$. $\square$

Proposición 4.57. *Si $V^{+b+} = V^{++}$, la función $V^{+b+b} \xrightarrow{Id} V^{++}$ es continua.*

Demostración. Demostraremos que Id es continua alrededor del neutro. Sea U^K una vecindad de $\mathcal{O} \in V^{++}$. Entonces K es un compacto de V^+ con la topología compacto abierta. Demostraremos que K es acotado en V^{+b}. Si K no es acotado en V^{+b}, existe $f \in V^{+b+}$ tal que $f(K)$ no es acotado.[26] Por hipótesis, $f \in V^{++}$, y por lo tanto, como K es acotado en V^+, $f(K)$ es acotado. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto K es acotado en V^{+b} y U^K es un abierto de V^{+b+b}. $\square$

Lema 4.58. *Si $S \subset V$ es abierto,*

$$K = \{f \in V^+ \mid \sup_{v \in S} |f(s)| \leq 1\}$$

es compacto en V^+.

[24] Helmut Schaefer y Manfred Wolff, *op. cit.*, p. 147.

[25] Marianne Smith, "The Pontrjagin duality theorem in linear spaces", *Annals of Mathematics* vol. 56 núm. 2, Princeton, 1952, p. 248-253.

[26] Walter Rudin, *Functional Analysis*, segunda edición, Singapur, McGraw-Hill, 1991, p. 70.

Demostración. En el artículo "Equicontinuous sets of mappings"[27], Sumner Myers demostró que, para X un espacio topológico conexo y Y un espacio métrico completo y localmente compacto, si $Q \subset Top(X, Y)$ es equicontinuo y es tal que para alguna x en X, $\{f(x)\}_{f \in Q}$ tiene cerradura compacta en Y, entonces Q es compacto en $Top(X, Y)$ con la topología compacto abierta.

Demostraremos que K cumple las hipótesis del teorema de Myers. Para $u \in S$, el conjunto $\{g(u) \mid g \in K\}$ tiene cerradura compacta, pues es acotado. Si $\epsilon > 0$ se tiene que,

$$K = \left\{ f \in V^+ \mid \sup_{v \in \frac{\epsilon}{2} \cdot S} |f(v)| \leq \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

Si $v \in V$, sea $U = v + \frac{\epsilon}{2} \cdot S$. Para toda $f \in K$ y para toda $u \in U$, $|f(u) - f(v)| \leq \epsilon/2$, ya que $u - v \in \frac{\epsilon}{2} \cdot S$. Entonces K es equicontinuo, y por el resultado de Myers, K es compacto. $\square$

Proposición 4.59. *Si V es reflexivo, la función $V^{++} \xrightarrow{Id} V^{+b+b}$ es continua.*

Demostración. Por la Proposición 4.56, la función Id está bien definida. Demostraremos que Id es continua alrededor del neutro. Sea U^D una vecindad abierta de $\mathcal{O}$ en V^{+b+b}. Sin pérdida de generalidad supongamos a U contenido en $(-1, 1)$. Como V es reflexivo, existe $W \subset V$ abierto tal que $\omega_V(W) = U^D$. Si definimos

$$K = \{f \in V^+ \mid \sup_{v \in W} |f(v)| \leq 1\}$$

por el Lema 4.58, K es compacto en V^+. Si $h \in D$ y $v \in W$, $h(v) \in U$. Entonces $D \subset K$ y $U^K \subset U^D$. $\square$

Corolario 4.60. *Si V es un espacio reflexivo, $V \xrightarrow{\omega_V} V^{++}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de que $V^{++} \xrightarrow{Id} V^{+b+b}$ sea un isomorfismo topológico. $\square$

Teorema 4.61. *Si V es reflexivo como espacio vectorial, V es reflexivo como grupo topológico.*

Demostración. Sea Ψ el isomorfismo topológico entre V^+ y V^* definido en la Proposición 4.54. Sea $(\Psi^{-1})^+$ el isomorfismo topológico, entre V^{++} y $(V^*)^+$ inducido por Ψ^{-1}. Llamemos Ψ' al isomorfismo topológico, definido en la Proposición 4.54, entre V^{*+} y V^{**}. Si $V \xrightarrow{\omega'_V} V^{++}$ es el isomorfismo topológico evaluación, para $v \in V$ y para

[27]Sumner Myers, "Equicontinuous sets of mappings", *Annals of Mathematics* vol. 47 núm 3, Princeton, 1946, p. 496-502.

$\varphi \in V^*$,

$$
\begin{aligned}
\Big(\Psi' \circ (\Psi^{-1})^+ \circ \omega'_V(v)\Big)(\varphi) &= \pi \circ \Big((\Psi^{-1})^+\big(\omega'_V(v)\big)\Big)(\varphi) \\
&= \pi\Big(\omega'_V(v)\big(\Psi^{-1}(\varphi)\big)\Big) \\
&= \pi\big(\Psi^{-1}(\varphi)(v)\big) \\
&= \big(\pi \circ \Psi^{-1}(\varphi)\big)(v) \\
&= \varphi(v) \\
&= \omega_V(v)(\varphi)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto ω_V es una composición de isomorfismos topológicos. □

En el resto de la sección nos concentraremos en demostrar que todo grupo subyacente a un espacio de Banach es reflexivo. Robert James demostró que no todo espacio de Banach es reflexivo como espacio vectorial.[28] Por lo tanto estaríamos "ampliando"la clase de grupos reflexivos. En lo siguiente V será un espacio de Banach.

Lema 4.62. *Si V es un espacio de Banach, V^{+b} tiene la topología inducida por la norma en V^+ y es completo.*

Demostración. Demostraremos que en ambas topologías $\mathcal{O}$ tiene las mismas vecindades. Sea U^D una vecindad abierta de $\mathcal{O}$ en V^{+b}. Sin pérdida de generalidad supóngamos U un intervalo abierto de radio ϵ alrededor de $0 \in \mathbb{R}$. Como D es acotado existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda \cdot D \subset \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\} = B$$

Entonces si

$$\|f\| = \sup_{v \in B} |f(v)| < \frac{1}{2}\lambda\epsilon$$

como para toda $d \in D$ existe $b \in B$ tal que $d = \frac{1}{\lambda}b$,

$$
\begin{aligned}
|f(d)| &= \tfrac{1}{\lambda}|f(b)| \\
&< \tfrac{1}{2}\epsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\overline{f(D)} \subset U$, es decir, $f \in U^D$.

Sea $\epsilon > 0$. Es fácil demostrar que B es un conjunto acotado. Si U es un intervalo abierto de radio ϵ alrededor de $0 \in \mathbb{R}$, para toda $f \in U^B$, $\overline{f(B)} \subset U$, y por lo tanto, $\|f\| < \epsilon$.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V^{+b}. Para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todos $l, m > n$, $\|f_m - f_l\| < \epsilon$. Entonces para toda $v \in V \setminus \{0\}$,

$$|f_m(v/\|v\|) - f_l(v/\|v\|)| < \epsilon$$

[28] Robert James, "A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* vol. 37, Washington, 1951, p. 174-177.

Por lo tanto existe el límite de la sucesión $(f_n(v/\|v\|))_{n\in\mathbb{N}}$. Multiplicando por $\|v\|$ obtenemos el límite de la sucesión $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$. Por ello $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia equicontinua de funciones.[29] Si definimos

$$f(v) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(v)$$

f es un funcional continuo. Se afirma que f es el límite, en V^{+b}, de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todas $l, m > n$ y para toda $b \in B$, $|f_l(b) - f_m(b)| < \epsilon/2$. Por lo tanto, para toda $b \in B$ y para toda $l > n$, $|f(b) - f_l(b)| < \epsilon$. Entonces f es el límite de la sucesión. □

Lema 4.63. *Si V es un espacio de Banach, la función $V \xrightarrow{\omega_V} V^{+b+b}$, es una isometría.*

Demostración. Sean $v \in V$ y U, una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\omega_V(v)\left(U^{\{v\}}\right) \subset U$$

Por lo tanto $\omega_V(v) \in V^{+b+}$. Entonces ω_V está bien definida. Para todo $v \in V$ existe $f_v \in V^+$ tal que $f_v(v) = \|v\|$ y $|f_v(x)| \leq \|x\|$, para toda $x \in V$.[30] Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \|\omega_V(v)\| & = & \sup_{\|f\|\leq 1} |\omega_V(v)(f)| \\ & \geq & \omega_V(v)(f_v) \\ & = & \|v\| \end{array}$$

Si $\|v\| = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \|\omega_V(v)\| & = & \sup_{\|f\|\leq 1} |\omega_V(v)(f)| \\ & = & \sup_{\|f\|\leq 1} |f(v)| \\ & \leq & \|v\| \end{array}$$

Como ω_V es lineal, para toda $v \in V$, $\|\omega_V(v)\| \leq \|v\|$. □

Corolario 4.64. *Sea V es un espacio de Banach. Entonces V es reflexivo (como espacio vectorial) si, y sólo si, ω_V es suprayectiva.*

Demostración. Si V es de Banach, ω_V es una isometría. □

Lema 4.65. *Si V es un espacio de Banach y llamamos V^{+p} a V^+ con la topología definida en el Teorema 4.52 a partir de la colección de subconjuntos finitos de V, todo $K \subset V^{+p}$ compacto es acotado en V^{+b}.*

Demostración. Para $v \in V$ fija y $f \in K$, $f \in U_f^{\{v\}}$, con U_f un intervalo abierto acotado alrededor de 0 que contiene a $f(v)$. Como K es compacto en V^{+p}, existen $f_1, \ldots, f_n \in K$ tales que

$$K \subset {U_{f_1}}^{\{v\}} \cup \cdots \cup {U_{f_n}}^{\{v\}} = (U_{f_1} \cup \cdots \cup U_{f_n})^{\{v\}}$$

Entonces, para toda $v \in V$, $\{f(v) | f \in K\}$ es un conjunto acotado. Por lo tanto K es una familia equicontinua de funcionales continuos.

[29] Walter Rudin, *op. cit.*, p. 45.
[30] Walter Rudin, *op. cit.*, p. 59.

Sea U^D una vecindad de $\mathcal{O} \in V^{+b}$. Sin pérdida de generalidad sea $U = (-\epsilon, \epsilon)$. Como D es acotado y K es equicontinua,

$$\{f(d) \mid f \in K \text{ y } d \in D\}$$

es un conjunto acotado,[31] digamos por algún $\frac{\delta}{2} > 0$. Si tomamos $\lambda = \frac{\delta}{\epsilon}$, para toda $f \in K$,

$$f \in (\lambda \cdot U)^D = \lambda \cdot U^D$$

$\square$

Teorema 4.66. *Si V es un espacio de Banach, $V \xrightarrow{\omega_V} V^{++}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Es inmediato mostrar que ω_V es una función (transformación lineal) bien definida. Como V es un espacio localmente convexo y Hausdorff, ω_V es inyectiva (ver el Teorema 4.49).

Sea $\mathcal{D}$ la familia de subconjuntos compactos y convexos de V. Como en espacios completos la cerradura de la envolvente convexa de un compacto es compacta,[32] si $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, existe $D_3 \in \mathcal{D}$ tal que $D_1 \cup D_2 \subset D_3$. En el artículo "Duality in linear spaces",[33] Richard Arens demostró que si c es la topología definida en el Teorema 4.52 a partir de la familia de subconjuntos convexos y compactos de un espacio vectorial localmente convexo V, la función $V \xrightarrow{\omega_V} V^{+c+}$ es suprayectiva.

Es inmediato que todo abierto en V^{+c} es abierto en V^+. Sea U^K es un abierto alrededor de $\mathcal{O}$ en V^+. Si $\tilde{K}$ es la cerradura de la envolvente convexa de K, $U^{\tilde{K}}$ es un subconjunto de U^K. Por lo tanto, en espacios de Banach, estas dos topologías son iguales. Entonces $V^{++} = V^{+c+}$, y por lo tanto, $V \xrightarrow{\omega_V} V^{++}$ es suprayectiva.

Ahora demostraremos que $V \xrightarrow{\omega_V} V^{++}$ es una función continua. Sea U^K una vecindad de $\mathcal{O} \in V^{++}$, con $U = (-r, r)$. Si $0 \in V$ no está en el interior de $\omega_V^{-1}\left(U^K\right)$, para cada $\epsilon > 0$ existe $v_\epsilon \in V$, con norma menor a ϵ, tal que $v_\epsilon \notin \omega_V^{-1}\left(U^K\right)$, es decir, tal que $\omega_V(v_\epsilon) \notin U^K$. Entonces existe $f_\epsilon \in K$ tal que $f_\epsilon(v_\epsilon) \notin U$. Como $\|v_\epsilon\| < \epsilon$,

$$\begin{array}{rcl} \left| f_\epsilon\left(\frac{1}{\|v_\epsilon\|} v_\epsilon\right) \right| & = & \frac{1}{\|v_\epsilon\|} \left| f_\epsilon\left(v_\epsilon\right) \right| \\ & > & \frac{1}{\epsilon} |f_\epsilon(v_\epsilon)| \\ & \geq & \frac{r}{\epsilon} \end{array}$$

Entonces $\|f_\epsilon\| > \frac{r}{\epsilon}$, es decir, la norma no es acotada en K.

Por lo tanto $K \subset V^{+b}$ no es acotado (ver el Lema 4.62). Entonces, por el Lema 4.65, $K \subset V^{+p}$ no es compacto. Como todo abierto en V^{+p} es abierto en V^+, K no es compacto en V^+. Lo cual es una contradicción. Entonces $0 \in V$ está contenido en el interior de $\omega_V^{-1}\left(U^K\right)$, y por ello, ω_V es continua.

---

[31] *Ídem*, p. 44.

[32] Walter Rudin, *op. cit.*, p. 72.

[33] Richard Arens, "Duaity in linear spaces", *Duke Mathematical Journal* vol. 14, Durham, 1947, p. 787-793.

Demostraremos que ω_V es abierta. Para ello basta probar que ω_V manda a $\tilde{B}$, el interior de B, la bola de radio 1 y centro en 0, en una vecindad de $\mathcal{O} \in V^{++}$. Debido al Lema 4.58,

$$\begin{aligned} K &= \{f \in V^+ \mid \sup_{x\in\tilde{B}} |f(x)| \leq 1\} \\ &= \{f \in V^+ \mid \sup_{x\in B} |f(x)| \leq 1\} \end{aligned}$$

es compacto en V^+. Se afirma que $\omega_V(\tilde{B}) = \tilde{B}^K$. Sea $v \in V$ tal que $\omega_V(v) \in \tilde{B}^K$. Por el Lema 4.63 y como K es la bola cerrada de radio 1 en V^{+b},

$$\|v\| = \|\omega_V(v)\| \leq 1$$

Entonces, $\tilde{B}^K \subset \omega_V(\tilde{B})$. La otra contención es inmediata. $\square$

Teorema 4.67. *Si V es un espacio de Banach, V es un grupo reflexivo.*

Demostración. La demostración es idéntica a la del Teorema 4.61, ambas se basan en que $V \xrightarrow{\omega_V} V^{++}$ es un isomorfismo topológico. $\square$

Capítulo 5

Una aplicación homotópica

En este capítulo se probará, siguiendo el artículo "Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms"de Wladimiro Scheffer,[1] que toda función punteada que vaya de un grupo ACH conexo a un grupo ALCH es homotópica a un único homomorfismo de grupos. Como consecuencia de esto se tendrá que si dos grupos ACH conexos son homotópicos de manera punteada, son topológicamente isomorfos. También se demostrará que, para todo G grupo ALCH, $\pi_1(G,e)$ es isomorfo a $Hom(\mathbb{S}^1, G)$, el conjunto de homomorfismos continuos de $\mathbb{S}^1$ en G, y que $\pi_n(G,e) = 0$, para toda $n \geq 2$.

Dados G y H grupos topológicos, denotemos por $Top_e(G,H)$ a $Top\big((G,e),(H,e)\big)$, con la topología compacto abierta.

Lema 5.1. *Sea π la proyección canónica de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^1$. Para todo grupo ACH G, la función*

$$\begin{array}{ccc} Top_e(G,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\eta} & Top_e(G,\mathbb{S}^1) \\ f & \longmapsto & \pi \circ f \end{array}$$

es un homomorfismo continuo, abierto e inyectivo.

Demostración. Claramente es un homomorfismo y, por la Proposición 1.9, es continua. Por lo dicho en la Observación 3.4, tanto $Top_e(G,\mathbb{R})$ como $Top_e(G,\mathbb{S}^1)$ son grupos topológicos. Por lo tanto para demostrar que η es abierta basta probar que manda vecindades abiertas de $\mathcal{O}$ en vecindades de $\mathbb{1}$.

Abusando de la notación denotemos como U^K al conjunto de funciones continuas que mandan K en U y que mandan e a 0, o que mandan e a 1, según sea el caso. Cada vecindad de $\mathcal{O}$ de la forma U^K, con $U \subset \mathbb{R}$ abierto y $K \subset G$ compacto, contiene una de la forma V^G, donde V es una hoja de la aplicación cubriente π que contiene a 0.

Se afirma que $\eta(V^G) = \pi(V)^G$. Si $h \in V^G$, $\pi \circ h(G) \subset \pi(V)$. Y si $l \in \pi(V)^G$, se tiene que $\eta\big(\pi|_V{}^{-1} \circ l\big) = l$. Por lo tanto η es abierta.

Si $\eta(f) = \mathbb{1}$, $im(f) \subset \mathbb{Z}$, como G es conexo, $f = \mathcal{O}$. $\square$

[1]Wladimiro Scheffer, "Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms", *Proceedings of the American Mathematical Society* vol. 33 núm. 2, Providence, 1972, p. 562-567.

Proposición 5.2. *Para todo grupo G ACH y conexo, la función*

$$\begin{array}{ccc} Top_e(G,\mathbb{R})\times G^* & \xrightarrow{F} & Top_e(G,\mathbb{S}^1) \\ (f,\varphi) & \longmapsto & (\pi\circ f)\cdot\varphi \end{array}$$

es un isomorfismo topológico.

Demostración. F es un homomorfismo continuo. Si $F(f,\varphi)=\mathbb{1}$,

$$\pi\circ f=\varphi^{-1}\in G^*$$

Para cada $a\in G$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ b & \longmapsto & f(a\cdot b)-f(a)-f(b) \end{array}$$

es continua y su imagen está contenida en $\mathbb{Z}$, por ello es constante con valor 0. Entonces $f\in Hom(G,\mathbb{R})$, y como G es compacto, $im(f)$ es un subgrupo compacto de $\mathbb{R}$. Ya que $\mathbb{R}$ no tiene subgrupos compactos no triviales, $f=\mathcal{O}$ y $\varphi=\mathbb{1}$.

Ahora demostraremos que F es suprayectiva. Sea $f\in Top_e(G,\mathbb{S}^1)$. Para cada $a\in G$, sea $f_a\in Top(G,\mathbb{S}^1)$ la función $b\mapsto f(a\cdot b)$. Por la Proposición 1.4, las funciones $a\mapsto f_a$ y $a\mapsto f(a)\mathbb{1}$ son continuas. Por ello, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Gamma} & Top_e(G,\mathbb{S}^1) \\ a & \longmapsto & f(a)\mathbb{1}\cdot f\cdot {f_a}^{-1} \end{array}$$

es continua.

Sea η la función definida en el Lema 5.1. En ese lema se demostró que η es abierta. Por lo tanto la imagen de η es un subgrupo abierto, y por tanto, cerrado de $Top_e(G,\mathbb{S}^1)$. Como G es conexo y

$$\mathbb{1}=\Gamma(e)\in im(\eta)\cap im(\Gamma)$$

se tiene que $im(\Gamma)\subset im(\eta)$.

Dado que η es abierta e inyectiva, η es un homeomorfismo en su imagen. Por lo tanto

$$G\xrightarrow{\eta^{-1}\circ\Gamma} Top_e(G,\mathbb{R})$$

es una función continua. Se afirma que, para todos $a,b,x\in G$, se tiene la identidad

$$(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(a\big)(b)=(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(a\big)(bx)+(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(b\big)(x)-(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(ab\big)(x)$$

Si se fijan a y b, se puede definir la función $\kappa\in Top_e(G,\mathbb{R})$, tal que

$$\kappa(x)=(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(a\big)(bx)+(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(b\big)(x)-(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(ab\big)(x)-(\eta^{-1}\circ\Gamma)\big(a\big)(b)$$

Obsérvese que

$$\begin{array}{rcl} \eta(\kappa)(x) & = & \pi\circ\kappa(x) \\ & = & \Gamma(a)(bx)\cdot\Gamma(b)(x)\cdot\Gamma(ab)(x)^{-1}\cdot\Gamma(a)(b)^{-1} \\ & = & f(a)f(bx)f(bxa)^{-1}f(b)f(x)f(xb)^{-1}f(ab)^{-1}f(x)^{-1}f(xab)f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(ba) \\ & = & 1 \end{array}$$

Como η es inyectiva, $\kappa = \mathcal{O}$ y se tiene, para todos $a, b, x \in G$, la identidad buscada.

Definamos la función continua

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \int \eta^{-1} \circ \Gamma(a)(x)dx \end{array}$$

donde $\int$ es la integral de Von Neumann construida en el primer capítulo.

Para toda $a, b \in G$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \Delta(a) + \Delta(b) - \Delta(ab) & = & \int \eta^{-1} \circ \Gamma(a)(x)dx + \int \eta^{-1} \circ \Gamma(b)(x)dx - \int \eta^{-1} \circ \Gamma(ab)(x)dx \\ & = & \int \eta^{-1} \circ \Gamma(a)(bx)dx + \int \eta^{-1} \circ \Gamma(b)(x)dx - \int \eta^{-1} \circ \Gamma(ab)(x)dx \\ & = & \int \Big(\eta^{-1} \circ \Gamma(a)(bx) + \eta^{-1} \circ \Gamma(b)(x) - \eta^{-1} \circ \Gamma(ab)(x)\Big)dx \\ & = & (\eta^{-1} \circ \Gamma)\big(a\big)(b) \end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \pi(\Delta(a)) \cdot \pi(\Delta(b)) \cdot \pi(\Delta(ab))^{-1} & = & \pi\big(\eta^{-1}(\Gamma(a))(b)\big) \\ & = & (\pi \circ \eta^{-1} \circ \Gamma(a))(b) \\ & = & \Gamma(a)(b) \\ & = & f(a)f(b)f(ab)^{-1} \end{array}$$

Sea $h = f \cdot \eta(\Delta)^{-1}$. Por lo demostrado arriba, $h \in G^*$. Entonces $f = h \cdot \eta(\Delta)$. Lo que demuestra que F es suprayectiva.

Demostraremos que F es abierta en una vecindad abierta de $(\mathcal{O}, \mathbb{1})$. Como G^* es discreto, $Top_e(G, \mathbb{R}) \times \{\mathbb{1}\}$ es un abierto de $Top_e(G, \mathbb{R}) \times G^*$. La restricción de F a $Top_e(G, \mathbb{R}) \times \{\mathbb{1}\}$ es abierta (ver el Lema 5.1). $\square$

En adelante, al conjunto de homomorfismos continuos entre dos grupos topológicos, G y H, lo denotaremos $Hom(G, H)$.

Lema 5.3. *Si A es un grupo topológico, la asignación*

$$B \xmapsto{Hom(A,\_)} Hom(A, B)$$

es un funtor covariante de la categoría de grupos topológicos y homomorfismos continuos, en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas.

Demostración. Sea $G \xrightarrow{f} H$, un homomorfismo continuo. Se afirma que la función

$$\begin{array}{ccc} Hom(A, G) & \xrightarrow{Hom(f)} & Hom(A, H) \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

es continua. Sea $\varphi \in Hom(A, G)$ y sea Q^K un subbásico alrededor de $f \circ \varphi$. Entonces $\varphi \in f^{-1}(Q)^K$ y

$$Hom(f)\left(f^{-1}(Q)^K\right) \subset Q^K$$

$\square$

Observación 5.4. Con la demostración del lema anterior se puede probar que si A es un grupo topológico, $Top_e(A, \_)$ es un funtor covariante de la categoría de grupos topológicos a la categoría de espacios topológicos.

Lema 5.5. *Si A, B, C son grupos topológicos y A es localmente compacto, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} Hom(A,B) \times Hom(A,C) & \xrightarrow{\Gamma} & Hom(A, B \times C) \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi \times \psi \end{array}$$

es un isomorfismo y un homeomorfismo.

Demostración. La aplicación Γ es un isomorfismo de grupos, demostraremos que es un homeomorfismo. Sea

$$\varphi \times \psi \in Hom(A, B \times C)$$

Todo subbásico alrededor de $\varphi \times \psi$, haciendo un abuso de notación, es de la forma Q^K, con Q un abierto de $B \times C$ y K un compacto de A. Como $(\varphi \times \psi)(K) \subset Q$ es compacto, existen $V_1, \dots, V_n$ abiertos de B y $W_1, \dots, W_n$ abiertos de C, tales que

$$(\varphi \times \psi)(K) \subset V_1 \times W_1 \cup \dots \cup V_n \times W_n \subset Q$$

Todo $k \in K$ tiene una vecindad compacta U_k tal que, para alguna i,

$$(\varphi \times \psi)(U_k) \subset V_i \times W_i$$

Como K es compacto, $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_m$, para alguna $m \in \mathbb{N}$. Agrupando las U_i que pertenecen a la imagen inversa del mismo $V_j \times W_j$ y reordenando, si es necesario, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $m \leq n$ y

$$(\varphi \times \psi)(U_i) \subset V_i \times W_i$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Dicho esto,

$$\varphi \times \psi \in (V_1 \times W_1)^{U_1} \cap \dots \cap (V_m \times W_m)^{U_m} \subset Q^K$$

Entonces $\varphi \in {V_1}^{U_1} \cap \dots \cap {V_m}^{U_m}$, $\psi \in {W_1}^{U_1} \cap \dots \cap {W_m}^{U_m}$ y

$$\Gamma\left({V_1}^{U_1} \cap \dots \cap {V_m}^{U_m} \times {W_1}^{U_1} \cap \dots \cap {W_m}^{U_m}\right) = (V_1 \times W_1)^{U_1} \cap \dots \cap (V_m \times W_m)^{U_m}$$

Con ello queda demostrado que Γ es continua y abierta. $\square$

Teorema 5.6. *Si G es un grupo ACH conexo y H es un grupo ALCH, la función*

$$\begin{array}{rcl} Top_e(G, Hom(H^*, \mathbb{R})) \times Hom(G,H) & \xrightarrow{F'} & Top_e(G,H) \\ (f, \varphi) & \longmapsto & \left(g \xmapsto{F'(f,\varphi)} \omega_H^{-1}(\pi \circ f(g)) \cdot \varphi(g)\right) \end{array}$$

con π la proyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^1$, es un isomorfismo y un homeomorfismo.

Demostración. Sea

$$(f,\varphi) \in Top_e(G, Hom(H^*,\mathbb{R})) \times Hom(G,H)$$

La aplicación ${\omega_H}^{-1} \circ (\pi \circ \_) \circ f$ es una composición de funciones continuas, entonces $F'(f,\varphi)$ es continua.

Si $(f,\varphi),(f',\varphi') \in Top_e\big(G, Hom(H^*,\mathbb{R})\big) \times Hom(G,H)$,

$$\begin{array}{rcl} F'\big((f,\varphi)\cdot(f',\varphi')\big)(g) & = & \omega_H^{-1}\big(\pi\circ(f(g)+f'(g))\big)\cdot\varphi(g)\cdot\varphi'(g) \\ & = & \omega_H^{-1}\big((\pi\circ f(g))\cdot(\pi\circ f'(g))\big)\cdot\varphi(g)\cdot\varphi'(g) \\ & = & \omega_H^{-1}\big(\pi\circ f(g)\big)\cdot\omega_H^{-1}\big(\pi\circ f'(g)\big)\cdot\varphi(g)\cdot\varphi'(g) \\ & = & F'(f,\varphi)(g)\cdot F'(f',\varphi')(g) \end{array}$$

Por lo tanto F' es un homomorfsimo. Mostraremos que F' es una composición de homeomorfismos. Se afirma que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Hom\big(H^*, Top_e(G,\mathbb{R}) \times Hom(G,\mathbb{S}^1)\big) \arrow[r, "Hom(F)"] & Hom\left(H^*, Top_e(G,\mathbb{S}^1)\right) \arrow[dd, "\Delta"] \\
Hom\big(H^*, Top_e(G,\mathbb{R})\big) \times Hom\big(H^*, Hom(G,\mathbb{S}^1)\big) \arrow[u, "C"] & \\
Top_e(G, Hom(H^*,\mathbb{R})) \times Hom(G, Hom(H^*,\mathbb{S}^1)) \arrow[u, "\Psi\times\Gamma"] & Top_e(G, Hom(H^*,\mathbb{S}^1)) \\
Top_e(G, Hom(H^*,\mathbb{R})) \times Hom(G,H) \arrow[u, "Id\times A"] \arrow[r, "F'"] & Top_e(G,H) \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

Donde C es el isomorfismo y homeomorfismo construido en el Lema 5.5, $Hom(F)$ es el isomorfismo y homeomorfismo que se obtiene de aplicar el funtor $Hom(H^*, \_)$ a F. A y B son los isomorfismos y homeomorfismos que se obtienen de aplicar $Hom(G, \_)$ y $Top_e(G, \_)$ a ω_H. Las funciones Γ, Δ y Ψ son los isomorfismos y homeomorfismos que se obtienen de la ley exponencial (ver la Proposición 1.4).

Para toda

$$(f,\varphi) \in Top_e(G, Hom(H^*,\mathbb{R})) \times Hom(G,H)$$

y para toda $g \in G$,

$$\begin{array}{rcl} B(F'(f,\varphi))(g) & = & \omega_H\big(F'(f,\varphi)(g)\big) \\ & = & \omega_H\big(\omega_H^{-1}(\pi\circ f(g))\cdot\varphi(g)\big) \\ & = & \pi\circ f(g)\cdot\omega_H(\varphi(g)) \end{array}$$

Por otro lado, para toda $\gamma \in H^*$,

$$\begin{aligned}
\Delta\Big[Hom(F)\Big(C\big(\Psi(f),(\Gamma\circ A)(\varphi)\big)\Big)\Big](g)(\gamma) &= Hom(F)\Big(C\big(\Psi(f),(\Gamma\circ A)(\varphi)\big)\Big)(\gamma)(g)\\
&= F\Big(C\big(\Psi(f),(\Gamma\circ A)(\varphi)\big)(\gamma)\Big)(g)\\
&= F\Big(\Psi(f)(\gamma),(\Gamma\circ A)(\varphi)(\gamma)\Big)(g)\\
&= \big(\pi\circ\psi(f)(\gamma)\big)(g)\cdot(\Gamma\circ A)(\varphi)(\gamma)(g)\\
&= \pi\big(f(g)(\gamma)\big)\cdot A\big(\varphi\big)(g)(\gamma)\\
&= \pi\big(f(g)(\gamma)\big)\cdot\omega_H\big(\varphi(g)\big)(\gamma)
\end{aligned}$$

Por lo tanto F' es un isomorfismo y un homeomorfismo. □

Proposición 5.7. *Si G es un grupo localmente compacto y V es un espacio vectorial topológico, $Top_e(G,V)$ es un espacio vectorial topológico.*

Demostración. Demostraremos que $Top_e(G,V)$ es un grupo topológico y que sus operaciones cumplen los tres incisos del Lema 4.50.

Para probar que $Top_e(G,V)$ es un grupo topológico, mostraremos que la base de vecindades formada de abiertos subbásicos Q^K alrededor de $\mathcal{O}$, cumple los cuatro incisos de la Proposición 3.2. Después demostraremos que la topología definida en esa proposición es la misma que la compacto abierta.

a) Es trivial. b) Si Q^K es una vecindad de $\mathcal{O}$, $0 \in Q$. Entonces existe U, una vecindad de $0 \in V$, tal que $U - U \subset V$. Obsérvese que $-(U^K) = (-U)^K$. Entonces

$$U^K - (U^K) = U^K + (-U)^K \subset (U-U)^K \subset V^K$$

c) Se cumple en todo grupo abeliano. d) Sea f en Q^K una vecindad de $\mathcal{O}$. Como $f(K)$ es compacto, existe U, un abierto alrededor de 0, tal que $f(K)+U \subset Q$. Por lo tanto

$$f + U^K \subset \big(f(K)+U\big)^K \subset Q^K$$

Ahora demostraremos que la topología compacto abierta y aquella definida en la Proposición 3.2 son la misma. Sea $f \in Q^K$. Como $f(K)$ es compacto, existe U vecindad abierta de 0 tal que $f(K)+U \subset Q$. Por lo tanto $\mathcal{O} \in U^K$ y

$$f + U^K \subset \big(f(K)+U\big)^K \subset Q^K$$

Entonces todo abierto de la topología compacto abierta es abierto de la topología definida en la Proposición 3.2.

Sea $A \subset Top_e(G,V)$ tal que para todo $a \in A$ existe Q^K, alrededor de $\mathcal{O}$, tal que $a + Q^K \subset A$. Sea $\varphi \in a + Q^K$. La función

$$\begin{array}{rcl} G\times V & \longrightarrow & V\\ (g,v) & \longmapsto & v - a(g)\end{array}$$

es continua. Por lo tanto, para cada $k \in K$ existen W_k', vecindad cerrada de k, y U_k, vecindad de $\varphi(k)$, tales que $U_k - a(W_k') \subset Q$. Como φ es continua, cada $k \in K$

tiene una vecindad compacta L_k tal que $\varphi(L_k) \subset U_k$. Definamos $W_k = W_k' \cap L_k$. Obsérvese que cada W_k es una vecindad compacta de k. Existen $k_1, \dots, k_n$ en K tales que $K \subset W_1 \cup \cdots \cup W_n$. Sea

$$f \in U_1^{W_1} \cap \cdots \cap U_n^{W_n}$$

Ya que cada $k \in K$ pertenece a algún W_i,

$$f(k) - a(k) \in U_i - a(W_i) \subset Q$$

Por lo tanto, $f - a \in Q^K$. Entonces

$$\varphi \in U_1^{W_1} \cap \cdots \cap U_n^{W_n} \subset a + Q^K$$

y por lo tanto, A es un abierto de la topología compacto abierta.

Ahora demostraremos que las operaciones de $Top_e(G, V)$ cumplen los tres incisos del Lema 4.50.

a) Se afirma que para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $\varphi \overset{\lambda\cdot\_}{\longmapsto} \lambda \cdot \varphi$ es continua en $\mathcal{O}$. Si $\lambda = 0$, $\lambda \cdot \_$ es constante. Sea Q^K un subbásico alrededor de $\mathcal{O}$ y sea $\lambda \neq 0$. Se tiene que $\mathcal{O} \in \left(\lambda^{-1} \cdot Q\right)^K$ y que

$$\lambda \cdot \_\left(\left(\lambda^{-1} \cdot Q\right)^K\right) \subset Q^K$$

b) Se asegura que el homomorfismo $\lambda \overset{\_\cdot\varphi}{\longmapsto} \lambda \cdot \varphi$ es continuo en 0. Si $\lambda = 0$, el homomorfismo es constante. Sea Q^K una vecindad de $\mathcal{O}$ y sea $\lambda \neq 0$. Como la función $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ es continua, para cada $k \in K$, existen $\epsilon_k > 0$ y U_k, una vecindad de $\varphi(k)$, tales que

$$(-\epsilon_k, \epsilon_k) \cdot U_k \subset Q$$

Cada $k \in K$ tiene una vecindad compacta W_k tal que $\varphi(W_k) \subset U_k$. Como K es compacto,

$$K \subset W_1 \cup \cdots \cup W_n$$

para alguna n. Definamos $r = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Sean $k \in K$ y $\gamma \in (-r, r)$. Como $k \in W_i$, para alguna i,

$$\gamma \cdot \varphi(k) \in (-\epsilon_i, \epsilon_i) \cdot U_i \subset Q$$

Por lo tanto $\gamma \cdot \varphi \in Q^K$.

c) En la demostración de b) se probó que

$$(-r, r) \cdot \left(U_1^{W_1} \cap \cdots \cap U_n^{W_n}\right) \subset Q^K$$

Por lo tanto la función $(\lambda, \varphi) \mapsto \lambda \cdot \varphi$ es continua en $(0, \mathcal{O})$. □

Teorema 5.8. *Si G es un grupo ACH conexo y H es un grupo ALCH, $Hom(G, H)$ es un retracto fuerte por deformación de $Top_e(G, H)$.*

Demostración. Definamos $V = Top_e(G, Hom(H^*, \mathbb{R}))$. Por la Proposición 5.7, V es un espacio vectorial topológico. En el Teorema 5.6 se demostró que existe

$$V \times Hom(G,H) \xrightarrow{\psi} Top_e(G,H)$$

un isomorfismo y un homeomorfismo tal que $\psi(0,\varphi) = \varphi$. Sean P_V y P_H las proyecciones de $V \times Hom(G,H)$ en V y en $Hom(G,H)$ respectivamente. Se afirma que la retracción buscada es

$$\begin{array}{rcl} Top_e(G,H) \times I & \xrightarrow{L} & Top_e(G,H) \\ (f,t) & \longmapsto & \Psi\Big((1-t)P_V\big(\Psi^{-1}(f)\big), P_H\big(\Psi^{-1}(f)\big)\Big) \end{array}$$

Si $f \in Top_e(G,H)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} L(f,0) & = & \Psi\Big(P_V\big(\Psi^{-1}(f)\big), P_H\big(\Psi^{-1}(f)\big)\Big) \\ & = & f \end{array}$$

y además

$$\begin{array}{rcl} L(f,1) & = & \Psi\Big(0, P_H\big(\Psi^{-1}(f)\big)\Big) \\ & = & P_H\big(\Psi^{-1}(f)\big) \\ & \in & Hom(G,H) \end{array}$$

Si $\varphi \in Hom(G,H)$, para toda $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{array}{rcl} L(\varphi,t) & = & \Psi\Big((1-t)P_V\big(\Psi^{-1}(\varphi)\big), P_H\big(\Psi^{-1}(\varphi)\big)\Big) \\ & = & \Psi(0,\varphi) \\ & = & \varphi \end{array}$$

□

Teorema 5.9. *Si G es un grupo ACH conexo y H es un grupo ALCH, toda función en $Top_e(G,H)$ es homotópica, relativa a e, a un único elemento de $Hom(G,H)$.*

Demostración. En la demostración del Teorema 5.6 se dedujo que toda función en $Top_e(G,H)$ es de la forma

$$\Big(g \xmapsto{F'(f,h)} \omega_H^{-1}(\pi \circ f(g)) \cdot h(g)\Big)$$

con $f \in Top_e(G, Hom(H^*, \mathbb{R}))$ y $h \in Hom(G,H)$.

La aplicación

$$g \mapsto \omega_H^{-1}(\pi \circ f(g))$$

es igual a $\omega_H^{-1} \circ \rho \circ f$, donde ρ es la función continua

$$\begin{array}{ccc} Hom(H^*, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\rho} & Hom(H^*, \mathbb{S}^1) \\ \varphi & \longmapsto & \pi \circ \varphi \end{array}$$

Como $Top_e(G, Hom(H^*, \mathbb{R}))$ es fuertemente contraíble a $\mathcal{O}$, toda $f \in Top_e(G, Hom(H^*, \mathbb{R}))$ es nulhomotópica relativa a e, por ello $\omega_H^{-1} \circ \rho \circ f$ también lo es. Entonces cada función de $Top_e(G, H)$ es de la forma $f \cdot \tau$, con $\tau \in Hom(G, H)$ y con $f \in Top_e(G, H)$ y homotópica, relativa a e, al neutro de $Top_e(G, H)$.

Si $G \times I \xrightarrow{L} H$ es la homotopía relativa a e que contrae a f al neutro, definamos la homotopía relativa a e

$$\begin{array}{rcl} G \times I & \longrightarrow & H \\ (g,t) & \longmapsto & L(g,t) \cdot \tau(g) \end{array}$$

que deforma $f \cdot \tau$ en τ. Por lo tanto cada función en $Top_e(G, H)$ es homotópica, relativa a e, a un homomorfismo continuo.

Veamos ahora que dos homomorfismos continuos de G en H son homotópicos si, y sólo si, son iguales. Si un homomorfismo $\gamma \in Hom(G, H)$ es nulhomotópico, para toda $\psi \in H^*$, $\psi \circ \gamma$ es nulhomotópica. Como toda aplicación cubriente es una fibración,[2] existe $\delta \in Top_e(G, \mathbb{R})$ tal que $\pi \circ \delta = \psi \circ \gamma$. Sea F el homomorfismo continuo construido para G en la Proposición 5.2. Entonces

$$F(\mathcal{O}, \psi \circ \gamma) = F(\delta, \mathbb{1})$$

En la Proposición 5.2 se demostró que F es inyectiva. Por lo tanto $\psi \circ \gamma = \mathbb{1}$, para toda $\psi \in H^*$. Entonces $\gamma = \mathbb{1}$.

Si dos homomorfismos φ y ψ son homotópicos, mediante L, podemos definir la homotopía

$$(g,t) \longmapsto \varphi(g) \cdot L(g,t)^{-1}$$

que empieza en $\mathbb{1}$ y termina en $\varphi \cdot \psi^{-1}$. Entonces, por lo dicho anteriormente, $\varphi = \psi$. □

Corolario 5.10. *Si G es un grupo ACH, simplemente conexo y localmente conectable por trayectorias, $G = 0$.*

Demostración. Sea π la proyección canónica de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1$. Por el criterio del levantamiento de aplicaciones, todo caracter φ de G, tiene un levantamiento $G \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}$. Por lo tanto todo caracter de G es nulhomotópico relativo a e. Por el Teorema 5.9, todo caracter de G es trivial. Por lo tanto $G = 0$. □

Corolario 5.11. *Si G es un grupo ACH conexo y H es un grupo ALCH, el grupo de clases de homotopía relativa a e, de funciones de G en H, $[G,H]_e$, es isomorfo a $Hom(G,H)$.*

Demostración. La operación en $[G,H]_e$ está definida, de manera obvia, utilizando la operación de H. Con esa estructura $[G,H]_e$ es un grupo abeliano.

Definamos

$$[G,H]_e \xrightarrow{\Psi} Hom(G,H)$$

donde $\Psi([f])$ es el único homomorfismo de grupos en la clase de homotopía de f (ver el Teorema 5.9). Ψ es un homomorfismo de grupos. En el Teorema 5.9 se demostró que Ψ es un isomorfismo. □

[2]Edwin Spanier, *Algebraic Topology*, Nueva York, McGraw-Hill, 1966, p. 67.

Observación 5.12. En el último teorema es necesario que G sea abeliano. Si G es el grupo de los cuaterniones unitarios, el resultado no es cierto. Está claro que $Hom(\mathbb{S}^1, G) \neq 0$, pero toda función continua $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^3$ es nulhomotópica relativa a 1.

Proposición 5.13. *Si X un espacio topológico y $n \geq 2$, $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(W, c_{x_0})$, donde W es el conjunto de lazos nulhomotópicos basados en x_0 con la topología compacto abierta y donde c_{x_0} es la función constante x_0.*

Demostración. Sea $n \geq 2$. Dada $I^{n-1} \times I \xrightarrow{f} X$, sea $I^{n-1} \xrightarrow{\tilde{f}} Top(I, X)$ la función adjunta de f. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\Gamma} & \pi_{n-1}(W, c_{x_0}) \\ [f] & \longmapsto & \left[\tilde{f}\right] \end{array}$$

Se afirma que Γ es un isomorfismo. Primero demostremos que está bien definida.

Para toda $I^n \xrightarrow{f} X$ tal que $[f] \in \pi_n(X, x_0)$,

$$\tilde{f}(\partial I^{n-1}) = c_{x_0} \quad \text{y} \quad \tilde{f}(x)(0) = \tilde{f}(x)(1) = x_0$$

Sean $f \underset{\partial I^n}{\simeq} g$, mediante una homotopía $I^{n-1} \times I \times I \xrightarrow{H} X$. Si

$$\begin{array}{ccc} I^{n-1} \times I & \xrightarrow{\tilde{H}} & Top(I, X) \\ (x, t) & \longmapsto & \left(s \xmapsto{\tilde{H}(x,t)} H(x, s, t)\right) \end{array}$$

se tiene que

$$\tilde{H}(x, 0)(s) = H(x, s, 0) = f(x, s) = \tilde{f}(x)(s)$$

y

$$\tilde{H}(x, 1)(s) = H(x, s, 1) = g(x, s) = \tilde{g}(x)(s)$$

Además, si $x \in \partial I^{n-1}$, para toda $t \in I$, $(x, s) \in \partial I^n$, entonces

$$\tilde{H}(x, t)(s) = H(x, s, t) = x_0$$

Se afirma que si $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, para toda $x \in I^{n-1}$, $\tilde{f}(x)$ es un lazo nulhomotópico. Definamos la homotopía

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{L} & X \\ (s, t) & \longmapsto & f\Big((1-t)x, 1-(1-s)\big(1-t+(1-s)t\big)\Big) \end{array}$$

Se tiene que

$$L(s, 0) = f(x, s) = \tilde{f}(x)(s)$$

y que

$$L(s, 1) = f(0, 1-(1-s)^2) = x_0$$

Además, para toda $t \in I$,

$$L(0,t) = f\big((1-t)x, 1) = x_0 = f\big((1-t)x, 1\big) = L(1,t)$$

Por lo tanto, para toda $x \in I^{n-1}$, $\tilde{f}(x)$ es un lazo nulhomotópico. Concluimos que Γ es una función.

La estructura de grupo en $\pi_n(X, x_0)$ definámosla, convenientemente, de la siguiente manera. Si $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$, definimos $[f] \cdot [g] = [f * g]$, donde $f * g(t,x) = f(2t, x)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ y $f * g(t,x) = g(2t-1, x)$ si $\frac{1}{2} \leq t$. De manera análoga se define la estructura de grupo para $\pi_{n-1}(W, c_{x_0})$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma([f] \cdot [g]) &= \Gamma([f * g]) \\ &= \left[\widetilde{f * g}\right] \end{aligned}$$

Como $\left[\tilde{f}\right] \cdot [\tilde{g}] = \left[\tilde{f} * \tilde{g}\right]$, queremos demostrar que

$$\left[\widetilde{f * g}\right] = \left[\tilde{f} * \tilde{g}\right]$$

Sean $x \in I^{n-2}$ y $s \in I$. Si $t \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \big(\tilde{f} * \tilde{g}\big)(s,x)(t) &= \tilde{f}(2s, x)(t) \\ &= f(2s, x, t) \\ &= f * g(s, x, t) \\ &= \widetilde{f * g}(s, x)(t) \end{aligned}$$

Si $\frac{1}{2} \leq t$,

$$\begin{aligned} \big(\tilde{f} * \tilde{g}\big)(s,x)(t) &= \tilde{g}(2s-1, x)(t) \\ &= g(2s-1, x, t) \\ &= f * g(s, x, t) \\ &= \widetilde{f * g}(s, x)(t) \end{aligned}$$

Entonces Γ es un homomorfismo de grupos.

Si $\Gamma([f]) = e$, existe

$$I^{n-1} \times I \xrightarrow{\tilde{K}} W \subset Top(I, X)$$

una homotopía relativa a la frontera que empieza en $\tilde{f}$ y termina en la función con valor constante c_{x_0}. Sea K la función

$$\begin{array}{rcl} I^{n-1} \times I \times I & \xrightarrow{K} & X \\ (x, s, t) & \longmapsto & \tilde{K}(x,t)(s) \end{array}$$

cuya adjunta es $\tilde{K}$ (ver la Proposición 1.4). Obsérvese que

$$K(x, s, 0) = \tilde{K}(x, 0)(s) = \tilde{f}(x)(s) = f(x, s)$$

y

$$K(x, s, 1) = \tilde{K}(x, 1)(s) = c_{x_0}(s) = x_0$$

Sean $(x,s) \in \partial I^n$ y $t \in I$. Si $x \in \partial I^{n-1}$,

$$K(x,s,t) = \tilde{K}(x,t)(s) = c_{x_0}(s) = x_0$$

Si $s = 0, 1$,

$$K(x,0,t) = \tilde{K}(x,t)(0) = x_0 = \tilde{K}(x,t)(1) = K(x,1,t)$$

Por lo tanto $e = [f] \in \pi_n(X, x_0)$.

Sea $\left[\tilde{f}\right] \in \pi_{n-1}(W, c_{x_0})$ y sea $f \in Top(I^n, X)$, aquella cuya adjunta es $\tilde{f}$. Si x pertenece a ∂I^{n-1} y s pertenece a I,

$$f(x,s) = \tilde{f}(x)(s) = c_{x_0}(s) = x_0$$

Si $x \in I^{n-1}$ y $s \in \partial I$,

$$f(x,s) = \tilde{f}(x)(s) = x_0$$

pues $\tilde{f}(x)$ es un lazo. Entonces $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, y por lo tanto, Γ es suprayectiva. $\square$

Teorema 5.14. *Si G es un grupo ALCH, $\pi_1(G,e) \cong Hom(\mathbb{S}^1, G)$, y para toda $n \geq 2$, $\pi_n(G,e) = 0$.*

Demostración. $\pi_1(G,e) \cong Hom(\mathbb{S}^1, G)$ es una consecuencia directa del Corolario 5.11. En la prueba del Teorema 5.9 se mostró que toda $f \in Top_e(\mathbb{S}^1, G)$ es de la forma $\tau \cdot h$, con $\tau \in Top_e(\mathbb{S}^1, G)$ nulhomotópica y con $h \in Hom(\mathbb{S}^1, G)$. Ahí también se observó que f es homotópica a h.

En el Teorema 5.9 se demostró que dos caracteres son homotópicos si, y sólo si, son iguales. Por lo tanto, f es nulhomotópica si, y sólo si, $h = cte_e$. Si F' es el isomorfismo y homeomorfismo construido en el Teorema 5.6, el conjunto de lazos nulhomotópicos en G, W, es homeomorfo, mediante F'^{-1}, a

$$Top_e(\mathbb{S}^1, Hom(G^*, \mathbb{R})) \times \{cte_e\}$$

Como éste es un espacio vectorial topológico (ver la Proposición 5.7), W se puede contraer fuertemente a cte_e. En la Proposición 5.13 se demostró que $\pi_n(G,e)$ y $\pi_{n-1}(W, cte_e)$ son isomorfos. Por lo tanto $\pi_n(G,e) = 0$. $\square$

Teorema 5.15. *Si G y H son grupos ACH conexos, son equivalentes*
a) G es topológicamente isomorfo a H.
b) G es homotópicamente equivalente a H, relativo a e.
c) G^* es isomorfo a H^*.

Demostración. La equivalencia entre a) y c) es la dualidad de Pontryagin. Claramente a) implica b). Demostraremos que b) implica a).

Supóngamos que existe $G \xrightarrow{r} H$, equivalencia homotópica, basada, con inversa homotópica s. Por el Corolario 5.11, sabemos que r y s son homotópicas, de manera punteada, a únicos homomorfismos continuos φ y ψ, respectivamente. Las funciones $r \circ s$ y $s \circ r$ son homotópicas al homomorfismo identidad. Por lo tanto $\varphi \circ \psi = Id_H$ y $\psi \circ \varphi = Id_G$ (ver el Teorema 5.9). Entonces b) implica a). $\square$

Bibliografía

Arens, Richard, “Duaity in linear spaces”, *Duke Mathematical Journal* vol. 14, Durham, 1947, p. 787-793.

Arhangel’skii, Alexander y Mikhail Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, París, Atlantis Press, 2008.

Aussenhofer, Lydia y Saak Gabriyelyan, “On reflexive group topologies on abelian groups of finite exponent”, *Archiv der Mathematik* vol. 99, Basilea, 2012, p. 583-588.

Banaszczyk, Wojciech, *et. al.*, “Open subgroups and Pontryagin duality”, *Mathematische Zeitschrift* vol. 215, Berlín, 1994, p. 195-204.

Chasco, María Jesús, “Pontryagin duality for metrizable groups”, *Archiv der Mathematik* vol. 70, Basilea, 1998, p. 22-28.

Dugundji, James, *Topology*, Boston, Allyn and Bacon, 1966.

Gabriyelyan, Saak, “Reflexive group topologies on abelian groups”, *Journal of Group Theory* vol. 13, Berlín, 2010, p. 891-901.

Glicksberg, Irving, “Uniform boundedness for groups”, *Canadian Journal of Mathematics* vol. 14, Ottawa, 1962, p. 269-276.

Hewitt, Edwin y Kenneth Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Berlín, Springer-Verlag, 1963.

Higgins, Philip, “Coproducts of topological abelian groups”, *Journal of Algebra* vol. 44, Nueva York, 1977, p. 152-157.

Husain, Taqdir, *Introduction to topological groups*, Filadelfia, W. B. Saunders Company, 1966.

James, Robert, “A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* vol. 37, Washington, 1951, p. 174-177.

Kaplan, Samuel, “Extensions of the Pontrjagin duality I: infinite products”, *Duke Mathematical Journal* vol 15, Durham, 1948, p. 649-658.

Kasch, Friederich, *Modules and Rings*, Londres, Academic Press, 1982.

Leptin, Horst, "Zur Dualitätstheorie projektiver Limites abelscher Gruppen", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg* vol. 19, Hamburgo, 1955, p. 264-268.

Martín, Elena, "A reflexive admissible topological group must be locally compact", *Proceedings of the American Mathematical Society* vol. 123 núm 11, Providence, 1995, p. 3563-3566.

Munkres, James, *Topology*, segunda edición, Upper Saddle River, Prentice Hall, 2000, p. 290.

Myers, Sumner, "Equicontinuous sets of mappings", *Annals of Mathematics* vol. 47 núm 3, Princeton, 1946, p. 496-502.

Nickolas, Peter, "Coproducts of abelian topological groups", *Topology and its Applications* vol. 120, Ámsterdam, 2002, p. 403-426.

Pontryagin, Lev, *Grupos Continuos*, tercera edición, Moscú, Mir, 1978.

Prieto, Carlos, *Topología básica*, México, Fondo de Cultura Económica, 2003.

Remus, Dieter y Javier Trigos, "Abelian groups wich satisfy Pontryagin duality need not respect compactness", *Proceedings of the American Mathematical Society* vol. 117 núm. 4, Providence, 1993, p. 1195-1200.

Rotman, Joseph, *An Introduction to the Theory of Groups*, cuarta edición, Nueva York, Springer-Verlag, 1995.

Rudin, Walter, *Functional Analysis*, segunda edición, Singapur, McGraw-Hill, 1991.

Schaefer, Helmut y Manfred Wolff, *Topological Vector Spaces*, segunda edición, Nueva York, Springer-Verlag, 1999.

Scheffer, Wladimiro, "Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms", *Proceedings of the American Mathematical Society* vol. 33 núm. 2, Providence, 1972, p. 562-567.

Smith, Marianne, "The Pontrjagin duality theorem in linear spaces", *Annals of Mathematics* vol. 56 núm. 2, Princeton, 1952, p. 248-253.

Spanier, Edwin, *Algebraic Topology*, Nueva York, McGraw-Hill, 1966.

Tkachenko, Mikhail, *et al.*, *Grupos Topológicos*, México, UAM, 1997.