

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---



**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESPACIOS DE TRÁFICOS**

**UN NUEVO MÉTODO PARA EL ESTUDIO DE MATRICES  
ALEATORIAS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**JORGE GARZA VARGAS**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. OCTAVIO ARIZMENDI ECHEGARAY  
2017**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A los dos científicos que más admiro,  
Rubi y Jorge,  
mis padres.*



## Agradecimientos

Dado que este trabajo marca la conclusión de un ciclo, es pertinente hacer un esfuerzo por agradecer a aquellos que contribuyeron de manera esencial en mi crecimiento, lamentando desde un comienzo que sea una tarea imposible incluirlos a todos.

En primer lugar agradezco a mis padres por su apoyo infinito e incondicional, así como por su tolerancia y comprensión.

Agradezco a la Olimpiada de Matemáticas por haber sido una pieza fundamental en mi desarrollo matemático. Tanto mis profesores, como mis amigos y alumnos dentro de esta comunidad aportaron ampliamente a mi crecimiento académico y personal. En el ámbito profesional estoy en deuda con decenas de personas en esta organización. Me gustaría hacer un especial agradecimiento a Fernando Campos por haber sido un guía durante varios años y por introducirme a un mundo desconocido para mí.

También agradezco a mis dos tutores, Isabel y Octavio. A Isabel por todo su apoyo durante la primer parte de mi licenciatura, por su disposición sin paragon y por su apertura al diálogo, así como por transmitirme, con el ejemplo, múltiples enseñanzas y ser una fuente de inspiración. A Octavio por abrirme las puertas a un universo repleto de matemáticas emocionantes, por generar en mí una intuición matemática que atesoro, y por ponerme en contacto con un medio de investigación activo. El año que pasé en CIMAT bajo su asesoría me permitió entender de mejor manera lo que significa ser un científico.

Agradezco al grupo de probabilidad libre en CIMAT, del cuál fue un honor formar parte. La interacción con los miembros que lo conforman me permitió tener una perspectiva del tema que me hubiera sido imposible adquirir por medio de libros y artículos. En particular doy las gracias a Víctor Pérez Abreu; por ser un modelo a seguir, por su tiempo y apoyo altruista, y por su constante esfuerzo por vincularnos, a los alumnos, con matemáticos de talla internacional.

Nuestra condición de humanos no nos permite separar por completo lo profesional de lo personal. Los logros académicos requieren de un cierto nivel de bienestar individual, para el cual, sobre todo en los momentos difíciles, se requiere de la amistad. En este sentido agradezco a dos de mis amigos, Ian y Daniel, que son lo más cercano que tengo a hermanos; por su apoyo en los momentos difíciles y también por los momentos de diversión que tuvimos. También agradezco a Fernanda, por su infinita comprensión y su respaldo en el tiempo en que desarrollé este trabajo, así como por incitarme siempre,

antes de cualquier otra cosa, a perseguir mis metas.

Es labor de los profesores enseñar a los alumnos, pero en ocasiones hay algunos que de manera directa o indirecta contribuyeron de manera excepcional en mi desarrollo matemático, abriendo mi mente a una nueva forma de pensar. Por esto, agradezco a Mihai Putinar, Itay Neeman, Natalia García Colín y Alejandro Darío.

Finalmente, agradezco a mis sinodales, porque con su trabajo mejoraron sustancialmente la calidad de esta tesis.





# Índice

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>1 Probabilidad libre y matrices aleatorias</b>	<b>1</b>
1.1 Probabilidad clásica . . . . .	2
1.1.1 Distribuciones y funcionales . . . . .	2
1.1.2 Relación entre los momentos y la distribución . . . . .	4
1.1.3 La independencia clásica es la independencia tensorial . . . . .	8
1.1.4 Momentos mixtos y distribución conjunta . . . . .	11
1.1.5 Distribuciones asintóticas en el caso clásico . . . . .	12
1.2 Probabilidad libre . . . . .	15
1.2.1 Distribuciones-* . . . . .	19
1.2.2 Distribuciones analíticas asociadas . . . . .	21
1.2.3 Independencia Libre . . . . .	24
1.2.4 Distribuciones asintóticas en probabilidad no conmutativa . . . . .	28
1.3 Matrices Aleatorias . . . . .	33
1.3.1 Matrices de Wigner . . . . .	34
1.3.2 Matrices aleatorias de permutación . . . . .	36
1.3.3 Matrices unitarias de Haar . . . . .	38
1.3.4 Método de los momentos en matrices aleatorias . . . . .	39
1.3.5 Distribuciones espectrales asintóticas . . . . .	41
1.3.6 Asintoticidad libre . . . . .	43
<b>2 Gráficas y matrices</b>	<b>47</b>
2.1 Motivación . . . . .	48
2.2 Carcajes de entrada-salida . . . . .	49
2.3 Gráficas de matrices . . . . .	54
2.4 $K$ -operaciones de gráfica . . . . .	57
2.5 Cotas y gráficas . . . . .	60

<b>3</b>	<b>Fundamentos de espacios de tráfico</b>	<b>69</b>
3.1	Gráficas como operaciones . . . . .	70
3.1.1	Estructura de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ -álgebras . . . . .	70
3.1.2	Operaciones de gráficas como momentos generalizados . . . . .	73
3.2	Espacios algebraicos de tráfico . . . . .	76
3.2.1	Distribución de tráfico . . . . .	77
3.2.2	Positividad para el funcional de tráfico . . . . .	80
3.3	Independencia y producto libre en tráfico . . . . .	82
3.3.1	Producto libre de $\mathcal{G}$ -álgebras . . . . .	83
3.3.2	Independencia en espacios de tráfico. . . . .	85
<b>4</b>	<b>Distribución de tráfico</b>	<b>89</b>
4.1	Preliminares . . . . .	90
4.2	Matrices de Wigner . . . . .	94
4.2.1	Fórmulas para los momentos de matrices de Wigner . . . . .	94
4.2.2	Distribución límite de las matrices de Wigner . . . . .	100
4.3	Matrices de aleatorias de permutación . . . . .	101
4.4	Matrices unimodulares . . . . .	103
4.5	Matrices unitarias de Haar . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Teoremas asintóticos</b>	<b>113</b>
5.1	Asintoticidad libre en tráfico . . . . .	113
5.1.1	Demostración del teorema de independencia asintótica en tráfico . . . . .	117
5.2	Teoremas límites . . . . .	121
5.2.1	Ley de los grandes números para espacios de tráfico . . . . .	121
5.2.2	Teorema del límite central para espacios de tráfico . . . . .	126

# Introducción

La Teoría de Probabilidad Libre, introducida en la década de los 80 por Dan-Virgil Voiculescu, ha adquirido gran importancia en el estudio asintótico de familias de matrices aleatorias. En particular, los espacios de probabilidad no conmutativa son utilizados para modelar el comportamiento límite de álgebras de matrices aleatorias cuando la dimensión de estas tiende a infinito, siendo la independencia libre, en muchos de los casos, el concepto clave para describir la relación entre familias de matrices aleatorias generadas de manera independiente. Esta teoría moderna, a pesar de haberse desarrollado en analogía con la Teoría de Probabilidad Clásica, muestra fenómenos esencialmente distintos, lo que podría sugerir que la probabilidad libre y la probabilidad clásica deben de ser estudiadas de manera paralela.

A pesar de haber proveído herramientas importantes, la probabilidad libre está todavía lejos de jugar un papel concluyente en el mundo de las matrices aleatorias grandes. Por ejemplo, desde la probabilidad libre se pueden estudiar satisfactoriamente familias de matrices aleatorias que son invariantes en ley cuando se conjugan por matrices unitarias determinísticas, pero si esta condición se relaja, en general las respuestas que provee la probabilidad libre no son igual de satisfactorias. En el 2011, Camille Male introdujo la Teoría de Tráficos en su tesis doctoral y la dio a conocer en su artículo [19]. Esta nueva teoría fue concebida como una extensión de la probabilidad libre y se desarrolló con el fin de estudiar el comportamiento asintótico de familias de matrices aleatorias invariantes en ley bajo conjugación por matrices determinísticas de permutación. Sin embargo, la Teoría de Tráficos es potencialmente mucho más que una herramienta para el estudio de ciertas familias de matrices aleatorias.

Male usó el trabajo hecho por James Mingo y Roland Speicher en [20], para asociar a cada gráfica dirigida una operación entre matrices y posteriormente utilizar las operaciones construidas de esta manera para obtener estadísticas sobre las matrices aleatorias en cuestión. En este sentido, estudiar lo que Male nombró como la *distribución en tráficos*, puede ser pensado

como una generalización del método de los momentos. La distribución en tráfico interpola la noción usual de distribución que se usa en probabilidad no conmutativa, y con esto da lugar a una nueva noción de independencia, *independencia libre en tráfico*, que parece ser la clave para unificar la Teoría de Probabilidad Clásica con la Teoría de Probabilidad Libre.

La Teoría de Tráfico es una teoría en desarrollo. En el 2016, en [6], Guillaume Cébron, Antoine Dahlqvist y Male dieron estructura a los fundamentos, demostrando entre otras cosas, que cualquier espacio de probabilidad no conmutativo tiene una extensión canónica a un espacio de tráfico. Además, dieron una nueva caracterización de la noción de independencia en tráfico con la cual encontraron la relación de esta con algunas de las nociones usuales de independencia en probabilidad no conmutativa. Por otro lado, en [2] Benson Au dio un ejemplo de un modelo de matrices aleatorias, que interpola dos modelos que habían sido estudiados de forma paralela, y en donde la independencia libre falla en describir la relación límite entre familias de matrices aleatorias independientes, pero la independencia libre en tráfico lo hace de manera adecuada.

Esta tesis, por un lado busca contextualizar la Teoría de Tráfico y por el otro presentar sus resultados más interesantes. De parte del lector, se asume un conocimiento de los temas básicos de Álgebra, Probabilidad y Combinatoria, así como dominio de los temas estándar de Análisis Funcional. Cualquier concepto fuera de las categorías mencionadas anteriormente se desarrolla dentro de esta tesis.

El primer capítulo es introductorio. En él se exponen los conceptos de probabilidad, probabilidad libre y matrices aleatorias que serán utilizados en el resto de la tesis, en un lenguaje coherente con la Teoría de Tráfico. Además, se le da al lector la bibliografía suficiente para profundizar en cualquiera de los temas que en este capítulo se tratan.

El Capítulo 2 se presenta el trabajo desarrollado en [20] como precursor a la Teoría de Tráfico. Este es el preámbulo técnico para el resto de la tesis.

El Capítulo 3 es un sumario de [6] y busca establecer las bases de la Teoría de Tráfico de la forma más directa, evitando las tecnicidades.

En el cuarto capítulo se presenta la relación entre la Teoría de Tráfico y las matrices aleatorias. Además del análisis asintótico del espectro de matrices aleatorias hecho por Male en [19], se derivan fórmulas explícitas para los momentos de la distribución espectral empírica promedio de algunos modelos.

Finalmente, en el último capítulo presentamos los dos principales resultados de la tesis doctoral de Male. Estos, en cierta manera unifican teoremas de probabilidad clásica con teoremas de probabilidad libre.

# Capítulo 1

## Fundamentos de probabilidad libre y matrices aleatorias

Este es un capítulo introductorio. Tiene como propósito principal presentar todos los conceptos necesarios para la comprensión profunda del resto de la tesis y es prescindible para un lector familiarizado con el mundo de la probabilidad libre y las matrices aleatorias.

En la sección de probabilidad clásica se trata con particular atención el método de momentos por su relevancia conceptual en la teoría de tráfico. Además de que la presentación de esta área se hace en el contexto del análisis funcional para motivar de una mejor manera los fundamentos de la probabilidad libre.

En la sección de probabilidad libre se busca hacer una exposición compacta de las nociones de probabilidad libre que serán generalizadas en los capítulos subsecuentes, la cual ha sido escrita escogiendo un lenguaje que busca establecer una conexión evidente entre la teoría de tráfico y la teoría de probabilidad libre.

La primera parte de la sección de matrices aleatorias se centra en el estudio de propiedades globales asintóticas del espectro de algunos de los modelos más comunes en la teoría de matrices aleatorias. La mayoría de los resultados expuestos en esta sección serán demostrados posteriormente utilizando los métodos de la teoría de tráfico, y algunos de ellos serán generalizados. En la última parte de esta sección establecemos la manera en que la noción de independencia libre aparece de forma natural cuando se trabaja con matrices aleatorias grandes. La noción de independencia libre

y su relación con matrices aleatorias será extendida posteriormente en el contexto de la teoría de tráfico.

## 1.1 Probabilidad clásica

Esta sección tiene como propósito desarrollar las nociones básicas de probabilidad en el contexto del análisis funcional, motivando el contenido de la siguiente sección, en donde se introducirán las bases de la probabilidad libre. Asumiremos un dominio de los temas básicos de probabilidad clásica, una exposición completa de estos se da en el capítulo introductorio del libro *Temas selectos en Matrices Aleatorias*, de Terrence Tao [31]. También asumiremos un dominio de los temas básicos de análisis funcional, estos pueden ser consultados en el libro *Métodos de la física matemática moderna*, de Michael Reed y Barry Simon [25], y en el libro *Análisis Funcional* de Walter Rudin [27].

Típicamente denotaremos a un espacio de probabilidad como una terna  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  en donde  $\Omega$  es un conjunto,  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $P$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{B}$ . Llamaremos a  $\Omega$  el espacio muestral, y a los elementos de  $\mathcal{B}$  conjuntos medibles o eventos.

Cuando consideremos un espacio topológico  $S$ , denotaremos por  $\mathcal{B}(S)$  a la familia de conjuntos borelianos de  $S$ , es decir, a la  $\sigma$ -álgebra generada por el conjunto de abiertos de  $S$ . En este capítulo  $\mathcal{R}$  denotará a  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{C}$  y será utilizado cuando algún concepto o resultado sea válido tanto para variables aleatorias complejas como para reales.

### 1.1.1 Distribuciones y funcionales

**Definición 1.1.1** (Variable aleatoria). *Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  un espacio de probabilidad. Si la función  $X : (\Omega, \mathcal{B}, P) \rightarrow \mathcal{R}$  es medible diremos que es una variable aleatoria. Si  $\mathcal{R} = \mathbb{R}$  diremos que  $X$  es una variable aleatoria real, si  $\mathcal{R} = \mathbb{C}$  diremos que es compleja.*

En la definición anterior, la hipótesis de medibilidad sobre  $X$  establece una relación entre los conjuntos medibles del espacio de probabilidad y los conjuntos medibles de  $\mathcal{R}$ . Dicha relación se expresa en la noción de distribución.

**Definición 1.1.2** (Distribución). *Preservando la notación de la Definición 1.1.1, definimos la distribución de  $X$  como la medida  $\mu_X$  sobre  $\mathcal{R}$  definida por  $\mu_X(E) = P(X^{-1}[E])$  para todo  $E$ , conjunto Borel medible en  $\mathcal{R}$ . En otras palabras,  $\mu_X$  es el pushforward de  $P$  al espacio  $\mathcal{R}$  inducido por  $X$ .*

En la práctica, la distribución carga con todas las propiedades probabilísticas de interés en una variable aleatoria, permitiendo transferir el estudio de variables aleatorias al estudio de medidas sobre  $\mathcal{R}$ . Con esto, es posible enunciar teoremas generales sobre variables aleatorias que no dependen de su dominio. Posteriormente definiremos el concepto de distribución para espacios de probabilidad libre y espacios de tráfico. En ambos casos es importante entender que cualquier definición de distribución debe depender únicamente de un objeto que sea común a todas las variables aleatorias de interés, aún cuando estas estén definidas sobre espacios muestrales distintos.

Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio medible y  $\mathcal{L}(\Omega)$  el espacio de todas las funciones Lebesgue integrables de  $\Omega$  a  $\mathcal{R}$ , donde  $\mathcal{R} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Notemos que  $\mathcal{M}(\Omega)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathcal{R}$  y  $\ell_\mu : f \mapsto \int f d\mu$  es un funcional lineal sobre dicho espacio. Con frecuencia, los funcionales lineales se pueden manejar con mayor facilidad que las medidas, es entonces natural buscar caracterizar aquellos funcionales lineales que son inducidos por una medida. Agregando hipótesis topológicas en el espacio de medida y métricas sobre el espacio de funciones se puede establecer una relación directa entre las medidas y los funcionales. El lector puede consultar una exposición más detallada de esto en el Capítulo 4 de [25].

Dado un espacio topológico  $S$ , denotaremos por  $C(S)$  al espacio de funciones continuas que van de  $S$  a  $\mathcal{R}$ . Si  $S$  es compacto,  $C(S)$  puede ser equipado con la norma uniforme, convirtiéndolo en un espacio de Banach.

**Definición 1.1.3** (Espacio dual). *Sea  $W$  un espacio de Banach sobre  $\mathcal{R}$ . El espacio dual de  $W$ , denotado por  $W^*$ , es el espacio de los funcionales lineales continuos de  $W$  a  $\mathcal{R}$ .*

Para todo espacio de Banach, los funcionales continuos coinciden con los funcionales acotados con respecto a la norma operador. En el caso particular de  $C(S)$ , tenemos de forma explícita que

$$C^*(S) := \{ \lambda : C(S) \rightarrow \mathcal{R} : \lambda \text{ es lineal y } \|\lambda\| = \sup_{f \in C(S)} \frac{\|\lambda(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} < \infty \}.$$

Si además  $S$  es un espacio de medida con medida finita  $\mu$ , el funcional sobre  $C(S)$ , dado por  $\ell_\mu(f) := \int f d\mu$ , cumple que

$$|\ell_\mu(f)| \leq \int |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(S)$$

y por lo tanto  $\ell_\mu \in C^*(S)$ . Más aún, para toda  $f \in C(S)$  con  $f \geq 0$  se tiene que  $\ell_\mu(f) \geq 0$ .

Los funcionales lineales  $\lambda : C(S) \rightarrow \mathcal{R}$ , que cumplen que  $\lambda(f) \geq 0$  cuando  $f \geq 0$ , son llamados funcionales positivos. Entonces, si  $\mu$  es una medida,  $\ell_\mu$  es un funcional continuo y positivo. De hecho, en general, es cierto que si un funcional lineal es positivo, entonces es continuo. Resulta ser que, asumiendo una hipótesis topológica técnica, la positividad caracteriza a los funcionales provenientes de una medida. La hipótesis topológica necesaria es la de que la medida sea una medida regular, concepto en el cual no profundizaremos y que puede ser consultado en [25].

**Proposición 1.1.1.** *Sea  $S$  un espacio Hausdorff compacto. Para cualquier funcional lineal positivo  $\ell$  en  $C(S)$  existe una única medida regular  $\mu$  sobre  $S$  con*

$$\ell(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C(S).$$

De hecho, la condición de que  $S$  sea un espacio compacto se puede relajar a que el espacio sea localmente compacto. En este caso, no todas las funciones en  $C(S)$  serán acotadas por lo que este espacio no puede ser dotado de la norma uniforme. En vez, consideraremos  $C_\infty(S)$ , el espacio de las funciones continuas que se desvanecen en el infinito. Este es un espacio de Banach con la norma uniforme, al igual que  $C_\infty^*(S)$  con la norma de operador.

**Teorema 1.1.1** (Teorema de representación de Riesz-Markov). *Sea  $S$  un espacio topológico, Hausdorff y localmente compacto. Entonces, para cada funcional continuo y positivo  $\ell$ , sobre  $C_\infty(S)$ , existe una única medida regular  $\mu_\ell$  sobre  $S$  que cumple que*

$$\ell(f) = \int f d\mu_\ell, \quad \forall f \in C_\infty(S).$$

### 1.1.2 Relación entre los momentos y la distribución

**Definición 1.1.4** (Esperanza). *Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  una variable aleatoria integrable, definimos el valor esperado de  $X$  como*

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathcal{R}} z d\mu_X(z).$$

Si fijamos a  $\Omega$ , el conjunto de variables aleatorias de  $\Omega$  a  $\mathcal{R}$  forman un álgebra sobre  $\mathcal{R}$ . Como para cualesquiera variables aleatorias  $X, Y$  y  $\alpha \in \mathcal{R}$  se cumple que  $\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y]$ , y  $\mathbb{E}[X] \geq 0$  cuando  $X \geq 0$ ,  $\mathbb{E}$  es un funcional lineal positivo sobre el álgebra de variables aleatorias.



Dada una función medible  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  y una variable aleatoria  $X$ , es útil poder relacionar las distribuciones de  $X$  y  $f(X)$ . En particular nos interesa la siguiente ecuación

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathcal{R}} z d\mu_{f(X)}(z) = \int_{\Omega} f \circ X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathcal{R}} f(z) d\mu_X(z). \quad (1.1)$$

El valor esperado de una variable aleatoria  $X$ , no es más que el valor promedio de la función  $X$ . En muchos casos la distribución  $\mu_X$  se concentre alrededor de  $\mathbb{E}[X]$ , este fenómeno se interpreta en términos probabilísticos como el hecho de que la probabilidad de que la realización de una variable aleatoria esté *lejos* de la media es *pequeña*.

Por simplicidad, a partir de este momento tomaremos  $\mathcal{R} = \mathbb{R}$  a menos que se indique lo contrario, es decir, consideraremos únicamente variables aleatorias reales. Resultados análogos pueden ser obtenidos para variables aleatorias complejas.

**Teorema 1.1.2** (Desigualdad de Markov). *Sea  $X$  una variable aleatoria. Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se satisface la siguiente desigualdad*

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[|X|].$$

Notemos que esta cota solo es útil cuando  $\lambda$  es considerablemente grande respecto a  $\mathbb{E}[|X|]$ , es decir, para desviaciones muy grandes. Para obtener resultados con mayor precisión es necesario involucrar conceptos adicionales al de valor esperado.

**Definición 1.1.5** (Varianza). *Dada una variable aleatoria escalar  $X$  que cumple que  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ , definimos su varianza como*

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Una vez involucrada la varianza en la descripción de una variable aleatoria, se puede fortalecer la desigualdad de Markov.

**Teorema 1.1.3** (Desigualdad de Chebyshev). *Sea  $X$  una variable aleatoria, entonces para todo real positivo  $\lambda$  tenemos la siguiente desigualdad*

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

Este resultado da una cota cuadrática sobre la desviación de la variable aleatoria en términos de  $\mathbb{E}[X^2]$  y  $\mathbb{E}[X]$ . Con la información adicional proporcionada por el valor esperado de  $X^2$  pudimos describir con mayor precisión

la distribución de la variable aleatoria alrededor de su media, de hecho, entre más valores de la forma  $\mathbb{E}[X^n]$  se conozcan se pueden obtener cotas más fuertes sobre la probabilidad de tener una cierta desviación.

**Definición 1.1.6.** *Sea  $X$  una variable aleatoria. Si  $\mathbb{E}[X^k]$  es finito, llamaremos a dicho valor el  $k$ -ésimo momento de  $X$ . Notemos que la ecuación (1.1) nos permite expresar al  $k$ -ésimo momento como*

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_R z^k d\mu_X.$$

Los momentos cuantifican propiedades sobre la distribución de la variable aleatoria de forma concisa. Por ejemplo, el hecho de que los momentos de orden alto estén acotados indicará un decaimiento rápido de las colas de la distribución. En el caso en el que los momentos de una variable aleatoria  $X$  son finitos y decaen suficientemente rápido, utilizando la expansión de Taylor podemos trabajar con la función generadora de momentos  $M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$ . Esto resulta ser de suma utilidad cuando se quiere acotar desviaciones de sumas de variables aleatorias independientes, obteniendo resultados como el de la desigualdad de Chernoff, la cual puede ser consultada en el Capítulo 2.1. de [31].

Ha quedado claro que la información que brindan los momentos es útil en la descripción de la distribución de una variable aleatoria. En algunas ocasiones toda la información de la distribución está codificada en sus momentos, es decir, la distribución queda determinada por sus momentos. Veremos que este es el caso cuando el soporte de la distribución es compacto.

**Teorema 1.1.4.** *Sean  $X, Y$  variables aleatorias de soporte compacto. Si para todo entero positivo  $k$  se cumple que  $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ , entonces  $X$  y  $Y$  tienen la misma distribución, es decir  $X \stackrel{\text{Ley}}{=} Y$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  un compacto que contiene a los soprtres de  $X$  y  $Y$ . Sean  $\ell_X, \ell_Y \in C^*(K)$  definidos por  $f \mapsto \int f d\mu_X$  y  $f \mapsto \int f d\mu_Y$  respectivamente. La hipótesis de que las variables aleatorias tienen los mismos momentos se traduce en  $\ell_X(x^k) = \ell_Y(x^k)$  para todo entero positivo  $k$ . Como los polinomios son combinaciones lineales finitas de los monomios  $x^k$ , tenemos que para todo polinomio  $p(x)$  definido sobre  $K$  se tiene que  $\ell_X(p(x)) = \ell_Y(p(x))$ . Como  $K$  es compacto, el teorema de Stone-Weierstrass nos garantiza que el conjunto de polinomios es denso en  $C^*(K)$ , y dado que los funcionales  $\ell_X$  y  $\ell_Y$  son continuas y coinciden en un conjunto denso podemos concluir que  $\ell_X = \ell_Y$ . Por el teorema de representación de Riesz-Markov sabemos que hay una relación unívoca entre funcionales y medidas, por lo tanto  $\mu_X = \mu_Y$ .  $\square$

Al problema de determinar la distribución de una variable aleatoria a partir de sus momentos se le conoce como el problema clásico de los momentos. En el Capítulo 30 de [5], se hace un análisis de este problema y se formula el siguiente criterio sobre la determinación de una distribución a partir de sus momentos. Para ahondar en el tema el lector podrá consultar [1].

**Teorema 1.1.5.** *Sea  $\mu$  una distribución con soporte en los reales y momentos de todos los órdenes, i.e.  $m_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu < \infty$  para todo entero positivo  $k$ . Si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k r^k}{k!}$  tiene un radio positivo de convergencia, entonces  $\mu$  es la única medida de probabilidad con momentos  $m_1, m_2, \dots$*

Consideremos una variable aleatoria Gaussiana  $X$  con media  $\lambda$  y varianza  $\sigma^2$ . Usando integración por sustitución es fácil ver que su función generadora de momentos está dada por

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\lambda t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Entonces, en el caso  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$  tenemos que  $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}(\sigma t)^2}$ , por lo tanto  $m_{2k} := \mathbb{E}[X^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^k$  y  $m_{2k-1} = 0$ . Utilizando el criterio del cociente, dado que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2(k+1)} = 0$ , el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{2^k k!} r^{2k},$$

es infinito, entonces, del criterio presentado en el Teorema 1.1.5 concluimos que cualquier distribución normal centrada está determinada por sus momentos. Es intuitivo y fácil de formalizar, que lo anterior implica que para todo  $\lambda, \sigma$ , la distribución  $\mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$  también está determinada por momentos.

Por otro lado, no todas las distribuciones están determinadas por sus momentos. En [26] se muestra que todas las distribuciones cuya densidad está dada por

$$\rho_{\alpha}(x) = \frac{1}{24} e^{-x^{\frac{1}{4}}} (1 - \alpha \sin(x^{\frac{1}{4}})) I_{(0, \infty)}(x),$$

con  $\alpha$  corriendo en el intervalo  $(0, 1)$ , tienen los mismos momentos. Por lo tanto, hay una sucesión de momentos que está asociada a una infinidad de distribuciones.

### 1.1.3 La independencia clásica es la independencia tensorial

En ocasiones, en vez de estudiar una variable aleatoria de manera aislada, es necesario estudiar una familia de variables aleatorias que interactúan entre sí. Una manera en que se relacionan entre ellas se describe a través de la noción de dependencia.

En este contexto estableceremos la independencia de variables aleatorias en términos de sus medidas, pero en lo que sigue será útil comenzar a pensar la independencia como una propiedad algebraica.

Dado un conjunto de  $\sigma$ -álgebras podemos hablar de su producto, esto permite definir un espacio de probabilidad que englobe a todos los espacios a considerar cuando las variables aleatorias en juego se encuentren en distintos espacios muestrales.

**Definición 1.1.7** (Producto de  $\sigma$ -álgebras). *Sea  $J$  un conjunto de índices, para cada  $j \in J$  consideremos el espacio de medida  $(\Omega_j, \mathcal{B}_j)$ . Entonces, denotaremos al producto cartesiano de dichos espacios como  $\bigotimes_{j \in J} \Omega_j$ , en donde el conjunto de puntos será el producto cartesiano  $\prod_{j \in J} \Omega_j$  y la  $\sigma$ -álgebra será la generada por los conjuntos de la forma  $B \hat{\times} \prod_{i \neq j} \Omega_i$ , donde  $B \in \mathcal{B}_j$ , y el producto anterior denota el producto cartesiano en donde en la posición  $j$  se toma el conjunto  $B$ , mientras que en las otras el respectivo  $\Omega_i$ .*

En el caso en que todos los espacios  $(\Omega_j, \mathcal{B}_j)$  sean iguales denotaremos el producto como  $\Omega^J$ . En el caso en el que se trate únicamente con dos espacios  $S$  y  $T$  denotaremos a dicho producto como  $S \otimes T$ . Si los espacios son espacios topológicos y para cada  $j \in J$ ,  $\mathcal{B}_j$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos de  $\Omega_j$ , se tendrá que la  $\sigma$ -álgebra obtenida como el producto de  $\sigma$ -álgebras da como resultado la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos en el espacio topológico  $\prod_{j \in J} \Omega_j$ . En particular, los borelianos en  $\mathbb{C}^J$  son precisamente los obtenidos en el producto de los borelianos en  $\mathbb{C}$ , y los Lebesgue-medibles en  $\mathbb{C}^J$  son los obtenidos en el producto de la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue-medibles en  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.1.8** (Distribución conjunta). *Dada una familia de variables aleatorias  $(X_j : \Omega_j \rightarrow \mathcal{R})_{j \in J}$ , la distribución conjunta de la familia es la medida de probabilidad en  $\mathcal{R}^J$  que para cada evento  $E \subset \mathcal{R}^J$  indica la probabilidad de que el vector aleatorio  $(X_j)_{j \in J}$  esté en  $E$ .*

Notemos que en la definición anterior la distribución conjunta no está dada en términos de las distribuciones de cada variable aleatoria. De hecho,

la relación entre distribución conjunta y la distribución de cada variable aleatoria indicará la manera en que las variables interactúan entre sí. Para cada variable aleatoria en la familia, definimos su distribución marginal como la distribución de la variable aleatoria considerada por separado cuando se fija el valor del resto de las variables aleatorias. Entonces, la dependencia de variables aleatorias está dada en términos de la relación entre las distribuciones marginales y la distribución conjunta. La distribución conjunta es un ensamble de las distribuciones marginales. Dentro de las formas de ensamblar medidas hay una que es de particular importancia y se presenta de forma general en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.6** (Lebesgue-Fubini-Tonelli). *Dados dos espacios de medida  $\sigma$ -finitos  $(S, \mathcal{S}, \mu)$  y  $(T, \mathcal{T}, \nu)$ , existe una única medida  $\mu \otimes \nu$  sobre  $S \otimes T$  que cumple que*

$$\mu \otimes \nu(B \times C) = \mu(B)\nu(C), \quad \text{para todo } B \in \mathcal{S}, C \in \mathcal{T}.$$

Más aún, para cualquier función medible no negativa  $f : S \times T \rightarrow \mathcal{R}$ , que cumple que  $\int |f| d\mu \otimes \nu < \infty$  se tiene que

$$\int f d\mu \otimes \nu = \int d\mu(s) \int f(s, t) d\nu(t) = \int d\nu(t) \int f(s, t) d\mu(s). \quad (1.2)$$

Una demostración compacta de este resultado puede ser consultada en el primer capítulo de [16], mientras que una más detallada en el séptimo capítulo de [15]. Como la notación lo indica, el producto apenas definido es en efecto un producto tensorial. A la medida  $\mu \otimes \nu$  la llamaremos *producto tensorial*, o *cartesiano*, de las medidas  $\mu$  y  $\nu$ . Veremos la relación que hay entre este producto tensorial y el producto tensorial entre espacios de Hilbert, basándonos en la manera en que este concepto es tratado en [25].

Dados  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , dos espacios de Hilbert, para cada  $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$  y  $\phi_2 \in \mathcal{H}_2$ , definiremos  $\phi_1 \otimes \phi_2$  como la forma bilineal sobre  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  definida por

$$\phi_1 \otimes \phi_2(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1, \phi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Sea  $\mathcal{E}$  el conjunto de combinaciones lineales finitas de dichas formas bilineales, definamos el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $\mathcal{E}$  como

$$\langle \phi \otimes \psi, \eta \otimes \mu \rangle := \langle \phi, \eta \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi, \mu \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Es sencillo demostrar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  está bien definido y que es positivamente definido. De esta manera, definimos el producto tensorial entre  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

como la completación de  $\mathcal{E}$  con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , el cual es nuevamente un espacio de Hilbert.

Esta manera de construir el producto tensorial difiere de la manera algebraica, en donde el tensor se define como un cociente del producto cartesiano de los espacios en cuestión. Para el lector familiarizado con la definición algebraica, hacemos notar que la equivalencia con la definición presentada aquí estriva en dos hechos, uno de ellos es el teorema de representación de Riesz, y el otro es la identificación del espacio  $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)^*$  con  $\mathcal{H}_1^* \otimes \mathcal{H}_2^*$ , en donde a cada  $u_1 \otimes u_2$  le corresponde el funcional dado por  $(\phi_1 \otimes \phi_2 \mapsto u_1(\phi_1)u_2(\phi_2))$ .

Consideremos el caso en el que  $\mathcal{H}_1 = L^2(S, \mu)$  y  $\mathcal{H}_2 = L^2(T, \nu)$ . Si  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son separables se cumple que

$$L^2(S, d\mu) \otimes L^2(T, d\nu) \cong L^2(S \times T, d\mu \otimes d\nu). \quad (1.3)$$

Donde el producto tensorial del lado izquierdo es el definido para espacios de Hilbert y el del lado derecho es el definido para espacios de medidas. El isomorfismo está dado explícitamente por la función  $f \otimes g \mapsto fg$ .

El producto tensorial de espacios de medidas puede ser definido de la misma manera para más de dos espacios y de esta manera se define la noción de independencia clásica entre variables aleatorias desde el punto de vista de teoría de la medida. Por esta razón, esta noción de independencia es también conocida como independencia tensorial.

**Definición 1.1.9** (Independencia clásica). *Una familia  $(X_j)_{j \in J}$  de variables aleatorias se dice que es conjuntamente independiente si su distribución conjunta es el producto tensorial de las distribuciones de cada variable<sup>1</sup>.*

Sea  $\mathcal{A}_S := L^2(S, d\mu)$  el espacio de variables aleatorias con segundo momento finito y dominio  $S$  y  $\mathcal{A}_T := L^2(T, d\nu)$  el respectivo espacio para  $T$ . Como se mencionó anteriormente, la esperanza puede ser pensada como un funcional positivo sobre un espacio de variables aleatorias, sean  $\mathbb{E}_S, \mathbb{E}_T$  los respectivos funcionales. Si los espacios  $S$  y  $T$  son separables, por la equivalencia (1.3), la esperanza  $\mathbb{E}$  sobre el espacio  $L^2(S \otimes T, \mu \otimes \nu)$  es el producto tensorial de las esperanzas, es decir  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_S \otimes \mathbb{E}_T$ . La identificación antes mencionada, del producto tensorial de dos espacios duales con el dual del espacio tensorial nos dice que el producto tensorial de dos funcionales se puede

---

<sup>1</sup>Con lo desarrollado hasta el momento solo es posible definir el producto tensorial de una cantidad finita de medidas, es decir, la definición anterior solo tiene sentido cuando  $J$  es finito. Sin embargo es posible también definir la medida producto para una cantidad infinita de medidas, esto puede ser consultado en la Sección 2.4 de [30].

ver como el producto de los funcionales. Por lo tanto, para cualesquiera dos variables aleatorias  $X \in \mathcal{A}_S$  y  $Y \in \mathcal{A}_T$  tenemos

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}_S[X]\mathbb{E}_T[Y].$$

De hecho, en el caso en el que las distribuciones de  $X$  y  $Y$  sean absolutamente continuas con respecto a  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente, por el teorema de Radon-Nikodym, estas tendrán densidades asociadas, digamos  $\rho_X(z)$  y  $\rho_Y(z)$ . Como el isomorfismo de la equivalencia (1.3) está dado por  $f \otimes g \mapsto fg$ , la densidad del vector aleatorio  $(X, Y)$  estará dada por  $\rho_X(z)\rho_Y(z)$ , es decir, la densidad también se factoriza.

El hecho de que la esperanza y la densidad se factoriza cuando se toman dos variables aleatorias es también cierto cuando estas no tienen segundo momento finito. Esto puede ser demostrado directamente recurriendo al Teorema 1.1.6. Sin embargo, es importante, como motivación del concepto de independencia libre que será introducido en el siguiente capítulo, que el lector sea consciente de que la esperanza de un vector aleatorio con entradas independientes puede ser entendida como el funcional positivo resultante del producto tensorial de los funcionales positivos en cada álgebra.

#### 1.1.4 Momentos mixtos y distribución conjunta

De la misma manera en que los momentos pueden ser utilizados para estudiar la distribución de una variable aleatoria, los momentos mixtos pueden ser utilizados para estudiar la distribución conjunta de una familia de variables aleatorias.

**Definición 1.1.10** (Momentos mixtos). *Sea  $X_1, \dots, X_n$  una familia finita de variables aleatorias. Si estas son reales, los momentos mixtos de la familia son los valores de la forma*

$$\mathbb{E}[X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}],$$

donde  $k_1, \dots, k_n$  son enteros no negativos. Si son variables aleatorias complejas, los momentos mixtos son los valores de la forma

$$\mathbb{E}[X_1^{k_1} \overline{X_1}^{k'_1} \dots X_n^{k_n} \overline{X_n}^{k'_n}],$$

donde  $k_1, k'_1, \dots, k_n, k'_n$  son enteros no negativos.

Consideremos el vector aleatorio  $\hat{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . Notemos que

$$\text{supp}(\hat{X}) = \bigcup_{j=1}^n \text{supp}(X_j),$$

por lo que si todas las variables aleatorias de la familia tienen soporte compacto, el soporte de  $\hat{X}$  será compacto. Notemos que la distribución de  $\hat{X}$  es precisamente la distribución conjunta de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ . Con un argumento análogo al dado en la demostración del Teorema 1.1.4, se puede demostrar que la distribución de  $\hat{X}$  queda determinada por los momentos mixtos de la familia, y por lo tanto la distribución conjunta está determinada por sus momentos mixtos.

Si se relaja la condición del soporte compacto a que las variables aleatorias de la familia estén determinadas por momentos, se puede obtener que un resultado más débil. La independencia tensorial de las variables es equivalente al hecho de que para cada  $k_1, \dots, k_n \geq 0$ , los momentos mixtos se factorizan de la siguiente manera

$$\mathbb{E}[X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}] = \mathbb{E}[X_1^{k_1}] \dots \mathbb{E}[X_n^{k_n}].$$

La relación entre la distribución y los momentos mixtos es evidente y de suma utilidad a nivel teórico. De hecho, en varias ocasiones, una manera alternativa de describir la distribución de una familia de variables aleatorias  $\mathbf{X} = (X_j)_{j=1}^m$ , es a través del siguiente conjunto

$$\Phi_m^{\mathbf{X}} := \{(i_1, \dots, i_m) \mapsto \mathbb{E}[X_{i_1} \dots X_{i_m}] : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}. \quad (1.4)$$

Este conjunto será llamado la familia de aplicaciones de momentos de orden  $n$ .

### 1.1.5 Distribuciones asintóticas en el caso clásico

En esta tesis estudiaremos el comportamiento asintótico de sucesiones de matrices aleatorias. Cuando se piensan a las matrices como variables aleatorias, el álgebra definida por estas no es conmutativa, marcando una diferencia importante al caso en el que el álgebra de variables aleatorias sí conmuta. En particular, en esta sección veremos que para ciertas sucesiones de variables aleatorias es posible definir la noción de una “variable aleatoria límite”. En el caso de matrices aleatorias, dado que consideraremos sucesiones de matrices crecientes en dimensión, no será posible hablar de “una matriz aleatoria límite”. Esta es una motivación importante para estudiar espacios de variables aleatorias no conmutativas de forma abstracta, las cuales sirven como espacios límites de sucesiones de espacios de matrices aleatorias.

Una sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  define una sucesión de distribuciones en  $\mathcal{R}$ , digamos  $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ , que como se comentó en la primera



sección, definen una sucesión de funcionales  $(\ell_n)_{n=1}^\infty$  en  $C_\infty^*(\mathcal{R})$ . Dado que este último es un espacio de Banach, la noción de convergencia tiene sentido, sin embargo, típicamente es más importante estudiar la convergencia de funcionales en una topología que no es la inducida por la métrica.

**Definición 1.1.11** (Topología débil). *Sea  $W$  un espacio de Banach y  $W^*$  su espacio dual. La topología débil en  $W$  es la topología más débil para la cual todos los funcionales en  $W^*$  son continuos.*

Si  $W$  es un espacio de Banach,  $W^*$  también lo es, por lo que podemos hablar de  $W^{**} := (W^*)^*$ . Entonces,  $W^{**}$  induce la topología débil sobre  $W^*$ . En este caso hay una inclusión continua y densa  $W \hookrightarrow W^{**}$  dada por  $x \mapsto \bar{x}$ , donde  $\bar{x}$  es el funcional sobre  $W^*$  definido por la aplicación evaluación en  $x$ , es decir  $\bar{x}(\lambda) = \lambda(x)$ , para todo  $\lambda \in W^*$ . Denotemos por  $\overline{W}$  a la inclusión de  $W$  en  $W^{**}$ , entonces  $\overline{W}$  induce una topología aún más débil en  $W^*$ .

**Definición 1.1.12** (Topología débil-\*). *Sea  $W^*$  el dual de un espacio de Banach. La topología débil-\* es la topología más débil sobre  $W^*$  para la cual las aplicaciones  $\lambda \mapsto \lambda(x)$ , con  $x \in W$  fija, son continuos.*

De la definición anterior, es claro que una sucesión de funcionales  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  en  $W^*$ , converge a un  $\lambda \in W^*$  si y solo si para todo  $x \in W$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \lambda(x)$ . En el caso particular en el que  $W = C(\mathcal{R})$  y tomamos los funcionales  $(\ell_n)_{n=1}^\infty$  en  $C_\infty^*(\mathcal{R})$  definidos anteriormente, tenemos que estos convergen a un funcional  $\ell_\mu$  si y solo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(f) = \ell_\mu(f)$ . Si este es el caso, es fácil ver que  $\ell_\mu$  es positivo, por el Teorema 1.1.1, hay una medida  $\mu$  tal que para toda función  $f \in C_\infty^*(\mathcal{R})$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.1.13** (Convergencia en distribución). *Sea  $(X_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de variables aleatorias tomando valores en  $\mathcal{R}$ . Diremos que esta sucesión converge en distribución a una variable aleatoria  $\mathcal{R}$ , si para cualquier función continua y acotada,  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ .*

Dado un entero positivo  $k$ , de la definición anterior, en el caso particular en donde el soporte de las variables aleatorias es compacto, tomando  $f(x) = x^k$ , notemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[X^k]$ . Entonces, en el caso en que las variables aleatorias son reales, los momentos de las variables en la sucesión convergen a los momentos de la variable límite. Tomando la función  $f(z) = z^k \bar{z}^l$ , se obtiene el mismo resultado para el caso en el que las variables aleatorias son complejas.

**Definición 1.1.14** (Convergencia en momentos). *La sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_{n=1}^\infty$  converge en momentos a la variable aleatoria  $X$  si*

- Cuando  $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ : Para todo entero positivo  $k$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[X^k]$ .
- Cuando  $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ : Para cualesquiera enteros positivos  $k, l$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k \overline{X_n}^l] = \mathbb{E}[X^k \overline{X}^l]$ .

En el caso en el que las variables de la sucesión, así como la variable límite, tienen soporte compacto, la convergencia en distribución implica convergencia en momentos. Como las variables aleatorias con soporte compacto están determinadas por sus momentos, la convergencia en momentos también implica convergencia en distribución. Más aún, se puede demostrar que en el caso en el que la variable límite tiene una distribución determinada por momentos, la convergencia en momentos implica la convergencia en distribución. En estos casos, para demostrar convergencia en distribución basta demostrar convergencia en momentos, a esta eurística de demostración se le conoce como el método de los momentos.

La virtud de las nociones de convergencia en distribución y en momentos, es que no requiere que las variables aleatorias tengan el mismo dominio. Cuando las variables aleatorias coinciden en el dominio es posible definir nociones más fuertes de convergencia.

**Definición 1.1.15** (Convergencia en probabilidad). *La sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_{n=1}^\infty$  converge en probabilidad a la variable aleatoria  $X$ , si para cada  $\epsilon > 0$  se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - X_n(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

La convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución. El lector puede consultar distintas nociones de convergencia, y la relación entre ellas, en el primer capítulo de [31].

A continuación presentaremos dos teoremas fundamentales sobre distribuciones asintóticas. A pesar de ser estándar, han sido incluidos, por un lado para contrastarlos con sus análogos libres, y por otro porque las demostraciones incluidas ilustran de forma clara el método de momentos.

**Teorema 1.1.7** (Ley de los grandes números). *Sea  $(X_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de variables aleatorias escalares independientes e idénticamente distribuidas, denotamos por*

$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Entonces, la sucesión de variables aleatorias  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  converge en probabilidad a  $\mu$ . Donde  $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ .

*Demostración.* Recordemos que la varianza abre sumas de variables aleatorias independientes con sumas, es decir, si  $X, Y$  son variables aleatorias independientes entonces  $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$ , más aún, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces  $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$ . Utilizando que las variables  $(X_j)$  son i.i.d. obtenemos que  $Var(Y_n) = \frac{n}{n^2} Var(X_1) = \frac{Var(X_1)}{n}$ , de donde  $Var(Y_n) \rightarrow 0$ . Ahora, utilizando la desigualdad de Chebyshev, tenemos que para cada  $\varepsilon > 0$  y para todo  $n$ ,

$$P(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(Y_n)}{\varepsilon^2},$$

de donde concluimos que  $P(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ . Por definición, lo anterior demuestra que  $Y_n$  converge en probabilidad a  $\mu$ .  $\square$

En el siguiente capítulo presentaremos la versión libre del teorema del límite central, en donde daremos una prueba de este en el marco de la Probabilidad no Conmutativa que también proveerá una demostración para la siguiente versión débil del teorema del límite central clásico.

**Teorema 1.1.8** (Teorema del límite central clásico). *Sea  $(X_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, centradas y con todos sus momentos finitos. Denotamos*

$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

*Entonces la sucesión  $(Z_n)_{n=1}^\infty$  converge en distribución a una variable aleatoria con distribución Gaussiana y parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = Var(X_1)$ .*

## 1.2 Probabilidad libre

La probabilidad libre fue introducida por Dan-Virgil Voiculescu en la década de los 80 en los trabajos [32, 33, 36]. Esta teoría nació con el objetivo de resolver problemas clásicos en la teoría de álgebras de Von Neumann, siendo el problema del isomorfismo uno de sus principales objetivos.

Posteriormente la teoría de probabilidad libre tomó distintas vertientes y actualmente es un área de investigación por sí misma. Esta teoría permite entender a profundidad la naturaleza asintótica de familias de matrices aleatorias de relevancia en diversas áreas, y por ende ha sido utilizada en numerosas ocasiones al resolver problemas de teoría de la información,

mecánica cuántica y gráficas aleatorias. En [34], el lector puede consultar un artículo panorámico sobre los contextos en los cuáles la teoría de probabilidad libre ha proliferado, así como los conceptos clave desarrollados, mientras que en [14] se pueden consultar los temas en desarrollo más prometedores de la actualidad en esta área, dentro de los cuales figura la Teoría de Tráficos.

Además de ser un punto central del cual emanan resultados de importancia en distintas áreas de las matemáticas, la probabilidad libre ha sido desarrollada haciendo uso también de diversas áreas de las matemáticas, siendo el análisis funcional, análisis complejo y la combinatoria enumerativa las principales áreas utilizadas.

En esta tesis nos interesan las aplicaciones a la teoría de matrices aleatorias, por lo que la presentación que se desarrolla a continuación se hará con esta orientación. Cualquier consulta general en el área se puede hacer en [29].

Para estudiar espacios de variables aleatorias de manera abstracta pensaremos a estas de manera puntual. En vez de ser objetos con una estructura subyacente, solo serán elementos de un álgebra.

**Definición 1.2.1** (Espacio de probabilidad no conmutativo). *Un espacio de probabilidad no conmutativo  $(\mathcal{A}, \phi)$  consiste de una álgebra unitaria  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathbb{C}$  y un funcional lineal*

$$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \phi(1_{\mathcal{A}}) = 1.$$

La noción de espacio de probabilidad no conmutativo generaliza a la noción clásica en donde las variables aleatorias sí conmutan.

**Ejemplo 1.2.1.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\mathcal{A} = L^{\infty-}(\Omega, P)$  el álgebra de variables aleatorias complejas que tienen todos sus momentos. Tomamos  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por  $\phi(X) = \mathbb{E}[X]$  para todo  $X \in \mathcal{A}$ .*

Como se observó en la sección anterior,  $\phi = \mathbb{E}$  es un funcional lineal, además, en  $L^{\infty-}(\Omega, P)$  la identidad es  $1_{\mathcal{A}} = \mathbb{1}_{\Omega}$ , es decir, la función constante 1, como

$$\phi(1_{\mathcal{A}}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Omega}] = \int_{\Omega} 1 dP(\omega) = P(\Omega) = 1,$$

el espacio definido en el ejemplo anterior es en efecto un espacio de probabilidad no conmutativo.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$  el espacio de matrices aleatorias complejas de  $n \times n$ . Tomemos  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  como la traza normalizada, es decir, para todo  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , con  $A = (a_{ij})$  definamos

$$\phi(A) := tr(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

La traza normalizada es un funcional lineal, y cumple que  $tr(I) = 1$  cuando  $I$  es la matriz identidad. Nuevamente, el espacio definido en el ejemplo anterior es un espacio de probabilidad no conmutativo, esta vez con elementos que no conmutan.

En general, dado un espacio de probabilidad no conmutativo  $(\mathcal{A}, \phi)$ , podemos considerar el espacio  $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ , de matrices con entradas en  $\mathcal{A}$ , este con el funcional  $tr \otimes \phi = \phi \circ tr$  es nuevamente un espacio de probabilidad no conmutativo. Así podemos combinar los Ejemplos 1.2.1 y 1.2.2 para obtener el siguiente.

**Ejemplo 1.2.3.** Sea  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C}) \otimes L^{\infty-}(\Omega, P)$  el álgebra de matrices cuyas entradas son variables aleatorias complejas sobre  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , dada  $A \in \mathcal{A}$  definimos

$$\phi(A) = \mathbb{E}[tr(A)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[a_{ii}].$$

La identidad en el álgebra anterior es la matriz determinista  $I$ , nuevamente tenemos  $\phi(I) = 1$ , obteniendo un espacio de probabilidad no conmutativo. En el ejemplo anterior, al igual que en la mayoría de los casos dentro de la teoría clásica de matrices aleatorias, se considera a las matrices como ensambles de matrices aleatorias. Una de las razones por las cuales la probabilidad no conmutativa tiene aplicaciones importantes al estudio de las matrices aleatorias es que permite tratar a estas como una variable aleatoria por sí misma.

Dado un espacio de probabilidad no conmutativo fijo, se pueden considerar distintos funcionales sobre él, lo cual dotará de distribuciones distintas a las variables aleatorias del álgebra, como veremos posteriormente. Por ejemplo, sea  $\mathcal{A}$  como en el Ejemplo 1.2.3, el funcional  $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\tau(A) := \mathbb{E}[a_{11}], \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (1.5)$$

también cumple que  $(\mathcal{A}, \tau)$  es un espacio de probabilidad no conmutativo.

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $G$  un grupo y  $\mathbb{C}G$  el álgebra de grupo de  $G$ , es decir el espacio vectorial sobre los complejos obtenido al tomar los elementos de

$G$  como base, en donde la multiplicación se define de la manera que sea distributiva con la suma. Definamos el funcional  $\tau_G : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$\tau_G \left( \sum_{g \in G} \lambda_g g \right) = \lambda_e,$$

donde  $e$  es la identidad de  $G$ . Entonces  $(\mathbb{C}G, \tau_G)$  es un espacio de probabilidad no conmutativo.

Para hacer un análisis sobre la distribución de variables aleatorias no conmutativas es necesario trabajar con espacios de probabilidad no conmutativos equipados con una involución  $*$ .

**Definición 1.2.2** (Espacio de probabilidad- $*$  no conmutativo). *Diremos que  $(\mathcal{A}, \phi)$  es un espacio de probabilidad- $*$ , si es un espacio de probabilidad no conmutativo equipado con una involución  $*$ , que cumple que para todo  $a, b \in \mathcal{A}$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ :*

- *La involución es antilineal:  $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*$ .*
- *$(ab)^* = b^*a^*$ .*
- *El funcional  $\phi$  es positivo:  $\phi(aa^*) \geq 0$ .*

*Si  $\mathcal{A}$  tiene las primeras dos propiedades, aún cuando no tenga un funcional  $\phi$  satisfaciendo el tercer punto, diremos que  $\mathcal{A}$  es un álgebra- $*$ .*

En el Ejemplo 1.2.1 la involución corresponde a la conjugación compleja, en 1.2.2 y 1.2.3 a la adjunción matricial, y en 1.2.4 la definimos como la extensión antilineal de  $g^* = g^{-1}$  para todo  $g \in G$ . En todos estos casos, los funcionales mencionados resultan ser positivos.

Veremos que la positividad del funcional puede ser explotada ampliamente cuando el espacio está dotado de una métrica “consistente” con las operaciones del álgebra. Aún cuando este no es el caso, se pueden inferir resultados importantes a partir de la positividad. La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en el primer capítulo de [29].

**Teorema 1.2.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad- $*$ . Para cualquier pareja de elementos  $a, b \in \mathcal{A}$  se tiene la siguiente desigualdad*

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b).$$

Así mismo, ciertas propiedades algebraicas de las variables con respecto a la involución permitirán obtener resultados sobre su distribución. Es por esto que se le da un nombre a ciertos tipos de variables aleatorias no conmutativas.

**Definición 1.2.3.** *Sea  $\mathcal{A}$  una álgebra- $*$  y  $a \in \mathcal{A}$ .*

- *Si se cumple que  $a = a^*$  diremos que  $a$  es autoadjunto.*
- *Si  $a^*a = aa^* = 1$  diremos que  $a$  es unitario.*
- *Si  $aa^* = a^*a$  diremos que  $a$  es normal.*

### 1.2.1 Distribuciones- $*$

En la sección de probabilidad clásica se definió la distribución de una variable aleatoria como el *pushforward* de la medida del dominio de la variable aleatoria al rango  $\mathcal{R}$ . Notemos que esta definición explota la estructura subyacente de las variables aleatorias consideradas. En el marco de probabilidad no conmutativa, las variables aleatorias no son más que elementos de un álgebra por lo que a primera vista no es claro cómo asociarles una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{R}$ . En la sección de probabilidad clásica también se discutió la relación entre momentos y distribución, mencionando casos en los que los momentos codificaban por completo la información de la distribución. En general, dada una variable aleatoria no conmutativa, no siempre será posible asociarle una medida, por lo que la información proveída por la familia de aplicaciones de momentos (análogo a (1.4)) será el objeto que más se asemeje a su distribución.

Para hablar formalmente de la familia de aplicaciones de momentos en este contexto, recurriremos al álgebra  $\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$ , la cual se define como sigue.

Dado un símbolo  $x$ , sea  $\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$  el conjunto de combinaciones lineales formales con coeficientes complejos de palabras de la forma  $x^{\varepsilon(1)}x^{\varepsilon(2)}\dots x^{\varepsilon(k)}$ , donde  $\varepsilon(i) \in \{1, *\}$ . A este tipo de palabras les llamaremos monomios- $*$  de indeterminadas y cuando sea claro dentro del contexto simplemente las llamaremos monomios- $*$ .

Dicho de otra forma,  $\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$  es el espacio vectorial sobre los complejos generado al tomar como conjunto de vectores base a los elementos del grupo libre generado por  $x$  y  $x^*$ .

El producto de monomios- $*$  en  $\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$  se define como la concatenación de las respectivas palabras, i.e.

$$(x^{\varepsilon_1(1)} \dots x^{\varepsilon_1(k)}) \cdot (x^{\varepsilon_2(l)} \dots x^{\varepsilon_2(l)}) = x^{\varepsilon(1)} \dots x^{\varepsilon(k+l)},$$

en donde  $\varepsilon(j) = \varepsilon_1(j)$  si  $j \leq k$  y  $\varepsilon(j) = \varepsilon_2(j)$  si  $j \geq k$ . Extendiendo este producto linealmente a  $\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$  obtenemos una álgebra sobre  $\mathbb{C}$ . Esta álgebra puede ser pensada como el espacio de polinomios no conmutativos en las variables  $x$  y  $x^*$ .

La distribución de una variable aleatoria  $a \in \mathcal{A}$  podría ser definida como la familia de aplicaciones de momentos mixtos, la versión no conmutativa de la familia definida en la ecuación (1.4). Sin embargo, la familia de aplicaciones de momentos involucra a la variable aleatoria en sí, y como se mencionó anteriormente la distribución es un concepto que debe de estar definido sobre un espacio genérico y común a todas las variables aleatorias, independientemente del espacio en donde viven.

Introduciremos este concepto con minuciosa formalidad con el fin de motivar apropiadamente el concepto de distribución cuando se trabaje con la noción extendida de momento en los espacios de tráfico.

**Definición 1.2.4** (Distribución-\*). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad-\* y  $a \in \mathcal{A}$ . La distribución\* de  $a$  se define como el funcional lineal  $\mu : \mathbb{C}\langle x, x^* \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  dado por:*

$$\mu(x^{\varepsilon(1)} \dots x^{\varepsilon(k)}) = \phi(a^{\varepsilon(1)} \dots a^{\varepsilon(k)})$$

Para todo  $k \geq 0$  y todo  $\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(k) \in \{1, *\}$ .

Sea  $P \in \mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$  y  $a \in \mathcal{A}$ , podemos pensar a  $P$  como un polinomio, dando sentido a  $P(a) \in \mathcal{A}$ , es decir, a la evaluación de  $P$  en  $a$ .

**Definición 1.2.5** (La aplicación evaluación). *Sea  $\mathcal{A}$  una álgebra-\*. Dada  $\mathbf{x} = (x_j)_{j \in J}$  una familia de indeterminadas y  $\mathbf{a} = (a_j)_{j \in J}$  una familia de variables aleatorias no conmutativas de  $\mathcal{A}$ . Definimos la aplicación  $eval_{\mathbf{a}}$ , como la función lineal*

$$eval_{\mathbf{a}} : \mathbb{C}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \rightarrow \mathcal{A},$$

que cumple que para cada  $P \in \mathbb{C}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ ,  $eval(P) := P(\mathbf{a})$ , donde  $P(\mathbf{a})$  es el elemento en  $\mathcal{A}$  obtenido al sustituir las indeterminadas que aparecen en  $P$  por los respectivos elementos en  $\mathbf{a}$  que tienen el mismo índice.

De manera análoga, definimos la distribución-\* conjunta de variables aleatorias no conmutativas como la familia de aplicaciones de momentos mixtos. Formalmente, dada una familia de índices  $J$  consideraremos la familia de indeterminadas  $\mathbf{x} = (x_i)_J$  y tomaremos a  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$  como el álgebra libre sobre  $\mathbb{C}$  generada por los símbolos en  $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^*$ , donde  $\mathbf{x}^* = (x_i^*)_{i \in J}$ .



Es decir, al álgebra que consiste de las combinaciones lineales finitas de monomios de la forma

$$x_{j(1)}^{\varepsilon(1)} \cdots x_{j(k)}^{\varepsilon(k)},$$

donde  $j(i) \in J$  y  $\varepsilon(i) \in \{1, *\}$  para todo  $i \in [k]$ . Dando la siguiente definición.

**Definición 1.2.6** (Distribución-\* conjunta). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad-\* y  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}$  una familia de variables aleatorias indexada por la familia de índices  $J$ , es decir,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in J}$ . La distribución conjunta de la familia  $\mathbf{a}$  está dada por la aplicación lineal  $\mu_{\mathbf{a}} : \mathbb{C}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por*

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_{j(1)}^{\varepsilon(1)} \cdots x_{j(k)}^{\varepsilon(k)}) = \phi(a_{j(1)}^{\varepsilon(1)} \cdots a_{j(k)}^{\varepsilon(k)}),$$

para todo  $\varepsilon : [k] \rightarrow J$  y  $j : [k] \rightarrow J$ .

### 1.2.2 Distribuciones analíticas asociadas

Como se mencionó anteriormente, nociones métricas en el álgebra-\* nos permitirán asociar medidas a algunas de las variables aleatorias.

**Observación 1.2.1.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  el espacio de operadores acotados sobre  $\mathcal{H}$ . Si en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  tomamos a la involución  $*$  como la adjunción de operadores, este espacio se vuelve una álgebra-\*. Más aún, cualquier subálgebra de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , cerrada bajo adjunción, es también una álgebra-\**.

Por otro lado, es posible caracterizar a las álgebras-\* que se pueden encajar en un espacio de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert. Un desarrollo detallado de esto se lleva a cabo en [22].

**Definición 1.2.7** (Álgebra de Banach). *Sea  $\mathcal{A}$  una álgebra compleja. La pareja  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  es un álgebra de Banach si se cumple que  $\|\cdot\|$  es una norma cuando  $\mathcal{A}$  es visto como espacio vectorial, dicha norma es completa y cumple la siguiente condición de continuidad respecto a la multiplicación*

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Para las álgebra de Banach que son álgebra-\* se puede pedir una condición de continuidad para la involución que la dota de una topología suficientemente fuerte para enunciar teoremas espectrales.

**Definición 1.2.8** (Álgebra  $C^*$ ). *Decimos que  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  es una álgebra  $C^*$  si es un álgebra-\*, una álgebra de Banach y el operador  $*$  cumple la siguiente condición respecto a la norma*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Gelfand y Naimark demostraron que cualquier álgebra- $*$  tiene una representación isométrica [11], conocida como la representación GNS, obteniendo el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.2** (Representación Gelfand-Naimark-Segal). *Dada  $\mathcal{A}$  una álgebra  $C^*$ , existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y una isometría- $*$   $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .*

Notemos que combinando el resultado anterior con el teorema de representación de Riesz, además de que podemos representar muchas de las álgebras de espacios de probabilidad- $*$  no conmutativos, también podemos representar sus funcionales a través del producto interior en el espacio de Hilbert asociado.

Los teoremas de representación de Gelfand-Naimark hacen un fuerte uso del análisis espectral de operadores.

**Definición 1.2.9** (Espectro). *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Diremos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  está en el espectro de  $T$  si  $T - \lambda I$  no es invertible, donde  $I$  es el operador identidad. De esta manera, para cada  $T$ , el espectro de  $T$  es un subconjunto de  $\mathbb{C}$  que denotaremos por  $\sigma(T)$ .*

En el caso en el que  $\mathcal{H}$  tiene dimensión finita  $n$ , tenemos que  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong M_n(\mathbb{C})$ . Dada  $A \in M_n(\mathbb{C})$  es claro que  $\sigma(A)$  es el conjunto de eigenvalores de  $A$ . En el caso de matrices, los eigenvalores de una matriz dan una descripción tangible de esta, de la misma manera en que propiedades de la matriz se ven reflejadas en su conjunto de eigenvalores. Por ejemplo, es conocido que si una matriz es hermitiana, es decir  $A^* = A$ , entonces es diagonalizable y todos sus eigenvalores son reales.

Análogamente, si  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es un operador autoadjunto, es decir  $T^* = T$ , entonces  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ . Si  $T$  es un operador unitario, es decir  $TT^* = I$ , entonces  $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ , donde  $\mathbb{T}$  es el grupo de complejos unitarios, una prueba de esto último puede ser consultada en el primer capítulo de [22]. Si  $T$  es un operador positivo, o equivalentemente si existe  $S$  tal que  $T = SS^*$  entonces  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ .

En general, independientemente de las propiedades del operador  $T$ , se cumple que  $\sigma(T)$  es un subconjunto compacto y no vacío de  $\mathbb{C}$ . A continuación presentamos un resultado que se desprende del teorema espectral.

**Teorema 1.2.3** (Cálculo funcional). *Sea  $T$  un operador autoadjunto acotado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces hay un único homomorfismo- $*$  isométrico y continuo,  $\Phi : C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . A  $\Phi$  se le conoce como el cálculo funcional de  $T$  y satisface que si  $f(z) \in C(\sigma(T))$  es la función  $f(z) = z$ , entonces  $\Phi(f) = T$ .*

Regresando al problema de asociar medidas a variables aleatorias no conmutativas, sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad- $*$  no conmutativo tal que  $\mathcal{A}$  es una álgebra  $C^*$ , sea  $a \in \mathcal{A}$  autoadjunta. Sabemos que hay un encaje  $\pi$  de  $\mathcal{A}$  en una álgebra de operadores  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Como  $a$  es autoadjunta,  $T := \pi(a)$  también es autoadjunto, por lo que podemos tomar el cálculo funcional  $\Phi : C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Sea  $\mathcal{A}'$  el álgebra  $C^*$  unitaria generada por  $a$ , i.e.  $\mathcal{A}' := cl(\langle a, 1_{\mathcal{A}} \rangle)$ . Si  $\phi' = \phi \upharpoonright_{\mathcal{A}'}$ , entonces  $(\mathcal{A}', \phi')$  es un espacio de probabilidad- $*$  no conmutativo. Notemos que la cadena

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Phi^{-1}} C(\sigma(T)),$$

induce una biyección entre  $\mathcal{A}'$  y  $C(\sigma(T))$ <sup>2</sup>, lo cual permite pensar al funcional  $\phi'$  a un funcional  $\ell$  sobre  $C(\sigma(T))$ . La positividad de  $\phi$  induce positividad en  $\phi'$  y esta se traduce en la positividad de  $\ell$ . Por el teorema de Riesz-Markov (Teorema 1.1.1), existe una medida  $\mu$  que cumple que

$$\ell(f) = \int_{\sigma(T)} f(x) d\mu(x),$$

para toda  $f \in C(\sigma(T))$ . Notemos que a  $a \in \mathcal{A}'$  le corresponde la función  $x \mapsto x$  en  $C(\sigma(T))$  y a  $1_{\mathcal{A}}$  le corresponde la función constante 1 sobre  $\sigma(T)$ , por lo que a  $a^n$  le corresponde la función  $x^n$  para todo entero no negativo  $n$ , por la construcción de  $\ell$  obtenemos

$$\phi(a^n) = \ell(x^n) = \int_{\sigma(T)} x^n d\mu(x).$$

Es decir, los momentos de  $a$  y los de  $\mu$  coinciden. Más aún, como  $\phi$  es un funcional unitario,  $\phi'(1_{\mathcal{A}'}) = \phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$  y por lo tanto

$$1 = \phi'(1_{\mathcal{A}'}) = \int_{\sigma(T)} 1 d\mu = \mu(\sigma(T)),$$

---

<sup>2</sup>Es importante mencionar que en el diagrama anterior estamos cometiendo un abuso de notación, ya que  $\Phi^{-1}$  no está definido en todo  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , sin embargo sí está en la imagen de la inclusión que estamos considerando.

con lo cual se concluye que  $\mu$  es una medida de probabilidad. Finalmente, como  $T$  es autoadjunto,  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ . Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.4** (Definición de distribución analítica). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad-\* no conmutativo tal que  $\mathcal{A}$  tiene estructura de álgebra  $C^*$ . Sea  $a \in \mathcal{A}$  una variable aleatoria autoadjunta. Existe una medida de probabilidad con soporte compacto  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}$  que cumple que*

$$\phi(a^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

A la medida  $\mu$  se le conoce como la distribución analítica de  $a$ .

Existe una versión más general del cálculo funcional para el caso en el que  $a$  es normal [25], un argumento análogo al anterior da como resultado el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.5.** *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad-\* no conmutativo. Sea  $a \in \mathcal{A}$  una variable aleatoria normal. Entonces  $a$  tiene distribución analítica de soporte compacto  $\mu$  sobre  $\mathbb{C}$ , tal que para cualesquiera  $k, l$  enteros no negativos se tiene*

$$\phi(a^k (a^*)^l) = \int_{\mathbb{C}} z^k \bar{z}^l d\mu(z).$$

Como la medida se construye sobre el espectro, en el caso en el que se toma una variable aleatoria unitaria  $u$ , dado que  $u$  es también normal tiene una distribución sobre  $\mathbb{C}$ , como es unitaria su espectro está contenido en  $\mathbb{T}$  al igual que el soporte de su medida.

Más en general, dada una familia finita de  $n$  variables aleatorias normales que conmutan entre sí, es posible asociarles una distribución analítica conjunta sobre  $\mathbb{C}^n$  que tenga los mismos momentos mixtos. Actualmente, no hay un método general para analizar casos en donde no haya conmutatividad, dejando clara la necesidad de una extensión de la teoría de probabilidad libre.

### 1.2.3 Independencia Libre

La noción de independencia libre fue introducida por Voiculescu. Aunque originalmente el concepto surgió en el marco de álgebras de Von Neumann, posteriormente, este descubrimiento resultó ser relevante en varias áreas de

las matemáticas. Hay varias formas de hablar de este concepto, la exposición que damos a continuación principalmente se basa en los Capítulos 5 y 6 de [29].

**Definición 1.2.10** (Independencia Libre de Álgebras). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad no conmutativo e  $I$  un conjunto de índices. Para cada  $i \in I$  sea  $\mathcal{A}_i$  una subálgebra unitaria de  $\mathcal{A}$ .*

*Diremos que las subálgebras  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  son independientes en el sentido libre si para toda  $k$ -tupla  $a_1, a_2, \dots, a_k$  con  $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ , se tiene que bajo la hipótesis de que  $\phi(a_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, k$  y  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$ , se puede concluir que*

$$\phi(a_1 \cdots a_k) = 0.$$

Diremos que un conjunto de variables aleatorias son independientes si las álgebras unitarias generadas por ellas lo son. La definición anterior, para variables aleatorias, se traduce en la siguiente.

**Definición 1.2.11.** *[Independencia libre para v.a.n.c.] Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad no conmutativo e  $I$  un conjunto de índices. Las variables aleatorias no conmutativas  $(a_i)_{i \in I}$  son libres si para cualesquiera polinomios  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{C}\langle x \rangle$  y cualesquiera  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  con  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$  se cumple que*

$$\phi(P_1(a_{i_1}) \cdots P_k(a_{i_k})) = 0,$$

*siempre que se cumpla que  $\phi(P_j(a_{i_j})) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, k$ .*

Cuando el espacio sea un espacio de probabilidad-\*, la independencia libre-\* entre variables aleatorias requiere que las álgebras-\* unitarias generadas sean libremente independientes, por lo que la definición anterior cambia a, en vez de solo considerar polinomios en  $\mathbb{C}\langle x \rangle$ , también se deben considerar los polinomios en  $\mathbb{C}\langle x, x^* \rangle$ .

El nombre *libre* viene precisamente del hecho de que el producto universal \* corresponde al producto libre de álgebras. Para motivar tomemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.2.5.** *Del ejemplo 1.2.4 recordemos que, dado un grupo  $G$ ,  $(\mathbb{C}G, \tau_G)$  es un espacio de probabilidad-\*. Sea  $I$  un conjunto de índices y  $(G_i)_{i \in I}$  es una familia de subgrupos. Es fácil ver que los siguientes dos enunciados son equivalentes.*

- *Los grupos  $(G_i)_{i \in I}$  son libres.*
- *Las álgebras  $(\mathbb{C}G_i)_{i \in I}$  son independientes en el sentido libre en el espacio de probabilidad no conmutativo  $(\mathbb{C}G, \tau_G)$ .*

Más generalmente, dado un conjunto de espacios de probabilidad no conmutativos, se pueden obtener realizaciones independientes en el sentido libre de estos espacios, encajándolos en su producto libre.

**Definición 1.2.12** (Producto libre de álgebras unitarias). *Sea  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  una familia de álgebras unitarias. El producto libre de  $(\mathcal{A}_i, \phi_i)_{i \in I}$  con identificación de unidades es una álgebra unitaria  $\mathcal{A}$  junto con una familia de homeomorfismos unitarios  $(V_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A})_{i \in I}$ , cumpliendo la siguiente propiedad universal. Siempre que  $\mathcal{B}$  sea una álgebra unitaria sobre  $\mathbb{C}$  y  $(W_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B})_{i \in I}$  una familia de homeomorfismos, entonces existe un único homeomorfismo  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  cumpliendo que  $\Phi \circ V_i = W_i$  para toda  $i \in I$ .*

Se puede demostrar a partir de la propiedad universal que el álgebra  $\mathcal{A}$  es única salvo isomorfismos y que los morfismos  $V_i$  son encajes, por lo que podemos pensar a las álgebras en la familia como subálgebras del producto libre, en donde la unidad de  $\mathcal{A}$  es la unidad de todas. Esta última forma de pensar el producto libre es la canónica y la denotaremos por

$$\ast_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

Notemos que en el producto  $\mathcal{A} := \ast_{i \in I} \mathcal{A}_i$  las álgebras  $\mathcal{A}_i$  solo coinciden en el álgebra generada por la unidad, es decir en  $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ . Para cada  $i \in I$  sea  $\mathcal{A}_i^0$  un espacio subespacio de  $\mathcal{A}_i$  de codimensión 1 complemento del espacio  $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ . De lo mencionado anteriormente tenemos que las subálgebras  $\mathcal{A}_i^0$  son ajenas, por lo que aunque la misma álgebra aparezca más de una vez en el producto (por ejemplo  $\mathcal{B} \ast \mathcal{B} \ast \mathcal{B}$ ), sus respectivos encajes solo coincidirán en  $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ . Con esto en mente, podemos dar una descripción tangible del producto libre.

$$\ast_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathbb{C}1 \oplus \left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\substack{i_1, \dots, i_n \in I \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n}} \mathcal{W}_{i_1, \dots, i_n} \right). \quad (1.6)$$

En donde para cada  $n$ -tupla de índices que cumple  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$ , definimos a  $\mathcal{W}_{i_1, \dots, i_n}$  como el álgebra generada por los elementos de la forma  $a_1 \dots a_n$  que cumplen que  $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Con esta última descripción en mano podemos definir el producto libre de espacios de probabilidad no conmutativos.

**Definición 1.2.13** (Producto libre de espacios de probabilidad). *Sea  $(\mathcal{A}_i, \phi_i)_{i \in I}$  una familia de espacios de probabilidad no conmutativos. Para cada  $i \in I$*

sea  $\mathcal{A}_i^0 := \text{Ker}(\phi_i)$ . Definimos el producto libre de estos espacios como el espacio de probabilidad no conmutativo  $(\mathcal{A}, \phi)$ , donde  $\mathcal{A} := \ast_{i \in I} \mathcal{A}_i$  y  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es el un morfismo unitario que cumple que

$$\text{Ker}(\phi) = \left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\substack{i_1, \dots, i_n \in I \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n}} \mathcal{W}_{i_1, \dots, i_n} \right).$$

Donde los  $\mathcal{W}_{i_1, \dots, i_n}$  están definidos como antes tomando las subálgebras  $\mathcal{A}_i^0 := \text{Ker}(\phi_i)$  para cada  $i \in I$ .

En la definición anterior, los encajes de las álgebras  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  son independientes en el sentido libre, ya que para cada  $i \in I$ , el conjunto  $\mathcal{A}_i^0$  es el conjunto de los elementos centrados de la respectiva álgebra y los elementos en los conjuntos de la forma  $\mathcal{W}_{i_1, \dots, i_n}$  son precisamente los productos que se deben de anular para que se satisfaga la condición pedida en la Definición 1.2.10.

Dada una familia de álgebras, cualquier álgebra que las contenga se puede obtener como el cociente del producto libre de estas, en donde el cociente está inducido por las relaciones algebraicas entre los elementos de distintas álgebras. Entonces, si un conjunto de variables aleatorias es independiente en el sentido libre, estas tienen muy pocas relaciones algebraicas entre sí. Como la conmutatividad es un tipo de relación algebraica, es de esperarse que la teoría de probabilidad libre sea una teoría altamente no-conmutativa.

Para concluir esta sección expondremos la manera estándar de calcular momentos mixtos de variables libres.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad no conmutativo. Sean  $a_1, a_2, b \in \mathcal{A}$  variables que cumplen que  $\{a_1, a_2\}$  es libre de  $b$ .

Para calcular  $\phi(a_1 b a_2)$ , notemos que como las variables no están centradas no es posible aplicar directamente la Definición 1.2.11. Para resolver esto basta observar que  $a_1 - \phi(a_1)1_{\mathcal{A}}, a_2 - \phi(a_2)1_{\mathcal{A}}$  y  $b - \phi(b)1_{\mathcal{A}}$  son libres y centradas, por lo que

$$\phi((a_1 - \phi(a_1)1_{\mathcal{A}})(b - \phi(b)1_{\mathcal{A}})(a_2 - \phi(a_2)1_{\mathcal{A}})) = 0.$$

Después de desarrollar el producto dentro de  $\phi$ , utilizar la linealidad de este y cancelar términos correspondientes, se obtiene

$$\phi(a_1 b a_2) = \phi(a_1 a_2) \phi(b). \quad (1.7)$$

En el caso particular en que  $a_2 = 1_{\mathcal{A}}$  tenemos que

$$\phi(a_1b) = \phi(a_1)\phi(b). \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.7) y (1.8) brindan reglas importantes para factorizar momentos mixtos. Por ejemplo, si ahora  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{b_1, b_2\}$  y  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  son libres, para calcular  $\phi(a_1c_1a_2c_2b_1b_2c_3a_3)$ , notemos que por la asociatividad y conmutatividad de la noción de independencia libre, la familia  $AUC$  es libre de  $B$ , por lo que utilizando la ecuación (1.7) obtenemos  $\phi(a_1a_2c_1c_2b_1b_2c_3a_3) = \phi(a_1a_2c_1c_2c_3a_3)\phi(b_1b_2)$ . Luego, como  $A$  y  $C$  son libres tenemos que  $\phi(a_1a_2c_1c_2c_3a_3) = \phi(a_1a_2a_3)\phi(c_1c_2c_3)$ . Concluyendo que

$$\phi(a_1a_2c_1c_2b_1b_2c_3a_3) = \phi(a_1a_2a_3)\phi(b_1b_2)\phi(c_1c_2c_3).$$

En cambio, la misma técnica no puede ser aplicada para calcular

$$\phi(a_1c_1c_2a_2b_1c_3a_3).$$

Es natural preguntarse cuándo un momento mixto es igual al producto de los momentos en cada álgebra. Este se puede hacer analizando la combinatoria del producto dentro del funcional. Dado un producto  $w_1w_2 \cdots w_n$  de variables aleatorias no conmutativas, pertenecientes a algunas álgebras que se sabe que son libres, podemos asociarle una partición del conjunto  $[n]$  en donde cada bloque estará conformado por el conjunto de índices que cumplen que las respectivas variables están en una misma álgebra. Por ejemplo, la partición del conjunto  $\{1, 2, \dots, 8\}$  asociada al producto  $a_1a_2c_1c_2b_1b_2c_3a_3$ , es  $\{\{1, 2, 8\}, \{5, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$  y la partición asociada al producto  $a_1c_1c_2a_2b_1c_3a_3$  es  $\{\{1, 4, 7\}, \{5\}, \{2, 3, 6\}\}$ . Las cuales se pueden representar en diagramas de la siguiente forma

Notemos que el primero corresponde a una partición que no se cruza mientras que el segundo a una que sí se cruza. Se puede ver que los productos que se pueden factorizar bajo el funcional son precisamente aquellos cuya partición asociada es una partición que no se cruza.

Al igual que en el ejemplo anterior, la retícula de particiones que no se cruzan surge de forma natural cuando se estudia la combinatoria de la probabilidad libre.

#### 1.2.4 Distribuciones asintóticas en probabilidad no conmutativa

Dado que la noción de distribución analítica solo se tiene para algunas variables aleatorias no conmutativas, en la teoría de probabilidad no conmutativa, la convergencia en distribución se define como la convergencia en momentos.



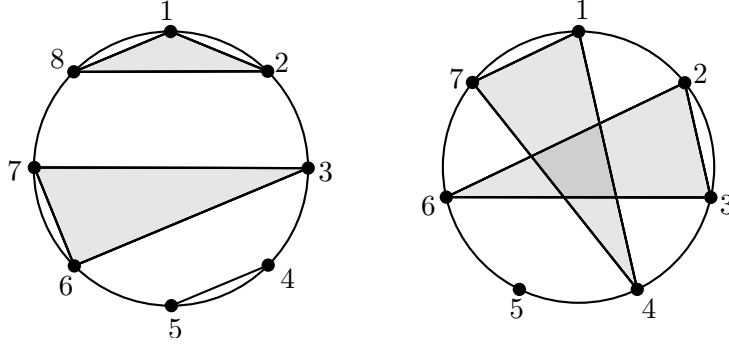


Figura 1: En cada diagrama muestra las envolventes convexas de los puntos que corresponden a elementos en un mismo bloque en la respectiva partición.

**Definición 1.2.14** (Convergencia en distribución). Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de variables aleatorias no conmutativas, con  $a_n$  en el espacio de probabilidad- $*$   $(\mathcal{A}_n, \phi_n)$ . Diremos que la sucesión converge en distribución a  $a \in \mathcal{A}$ , donde  $(\mathcal{A}, \phi)$  es un espacio de probabilidad- $*$ , si las familias de aplicaciones de momentos mixtos de cada  $a_n$  convergen a la familia de aplicaciones de momentos de  $a$ . En otras palabras, si para cada  $k$  entero positivo y cualesquiera  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{*, 1\}$ , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(a_n^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_k}) = \phi(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_k}).$$

De manera más general, se define la convergencia en distribución conjunta, como la convergencia en momentos mixtos.

**Definición 1.2.15** (Convergencia en distribución conjunta). Sea  $I$  un conjunto de índices y  $((a_{i,n})_{i \in I})_{n=1}^{\infty}$  una familia de sucesiones de variables aleatorias no conmutativas, cada una en un espacio de probabilidad- $*$   $(\mathcal{A}_n, \phi_n)$ . Diremos que la sucesión converge a la familia de variables aleatorias no conmutativas  $(a_i)_{i \in I}$  en el espacio de probabilidad- $*$   $(\mathcal{A}, \phi)$ , si se cumple que para todo  $k$ , para cualesquiera  $i_1, \dots, i_k \in I$  y cualesquiera  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{*, 1\}$ , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(a_{i_1,n}^{\varepsilon_1} a_{i_2,n}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_k,n}^{\varepsilon_k}) = \phi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_k}^{\varepsilon_k}).$$

Por el Teorema 1.2.5, si las variables consideradas son normales, cada una de ellas tendrá una distribución analítica con soporte compacto. Las variable límite también será normal con distribución analítica con soporte compacto. En este caso, las distribuciones asociadas a las variables de la sucesión convergerán a la distribución asociada a la variable aleatoria límite.

Sea  $(a_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de variables aleatorias autoadjuntas, independientes, ya sea en el sentido tensorial o en el libre, e idénticamente distribuidas en el espacio de probabilidad- $*$   $(\mathcal{A}, \phi)$ . Sean

$$y_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad z_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}.$$

Estudiaremos la distribución de  $y_n$  y  $z_n$  por el método de momentos. Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos fijos, entonces, dado que  $\phi$  es lineal

$$\phi((a_1 + \cdots + a_n)^m) = \sum_{r: [m] \rightarrow [n]} \phi(a_{r(1)} \cdots a_{r(m)}). \quad (1.9)$$

Ahora, tal y como se mostró en la sección anterior, la independencia de  $a_1, \dots, a_n$  nos da una regla para expresar sus momentos mixtos en términos de sus momentos individuales. La manera en que  $\phi$  se descomponga en las distribuciones marginales dependerá de la función  $r$  que se esté considerando. Específicamente, si  $r$  y  $s$  son funciones de  $[m]$  a  $[n]$ , dado que las variables  $a_1, \dots, a_n$  son independientes e idénticamente distribuidas, tendremos que

$$\phi(a_{r(1)} \cdots a_{r(m)}) = \phi(a_{s(1)} \cdots a_{s(m)}),$$

si para todo  $i, j \in [m]$  se cumple que  $r(i) = r(j)$  si y solo si  $s(i) = s(j)$ . Esto motiva el concepto de kernel.

**Definición 1.2.16** (Kernel de una función). *Sea  $X$  cualquier conjunto y  $r : [m] \rightarrow X$ . Definimos el kernel de  $r$ , denotado por  $\ker(r)$ , como la partición en  $\mathcal{P}(m)$ , cuyos bloques están dados por las imágenes inversas de los elementos en  $\text{Im}(r)$ . Es decir, cualesquiera  $i, j \in [m]$  están en un mismo bloque de  $\ker(r)$ , si y solo si  $r(i) = r(j)$ .*

Con esto, la observación anterior se puede reformular como el hecho de que para toda  $\pi \in \mathcal{P}(m)$ , el valor del funcional evaluado en los productos asociados a las funciones cuyo kernel es  $\pi$ , tienen un valor común que denotaremos por  $f(\pi)$ . Ahora notemos que para cada  $\pi \in \mathcal{P}(m)$ , si  $|\pi|$  es la cantidad de bloques de  $\pi$ , entonces el número de funciones  $r : [m] \rightarrow [n]$  con  $\ker(r) = \pi$ , es  $n(n-1) \cdots (n-|\pi|+1)$ , pues a cada bloque le corresponde un valor distinto en  $[n]$ . Si denotamos por  $(n)_{|\pi|}$  al valor  $n(n-1) \cdots (n-|\pi|+1)$ , podemos rescribir la ecuación (1.9) como

$$\phi((a_1 + \cdots + a_n)^m) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(m)} f(\pi)(n)_{|\pi|}. \quad (1.10)$$

Entonces, si queremos estudiar el límite de  $\phi(y_n^m)$  cuando  $n$  tiende a infinito, basta dividir la suma anterior por  $n^m$  y calcular el límite. Dado que  $(n)_{|\pi|}$  es asintótico a  $n^{|\pi|}$ , todos los términos asociados a una partición  $\pi$  con  $|\pi| < m$  serán asintóticamente 0, por lo que en el límite los únicos términos representativos son aquellos asociados a particiones con  $m$  bloques. Por otro lado, la única partición con  $m$  bloques es  $1_m$ . Además, por lo demostrado en la sección anterior, si  $a$  y  $b$  son variables aleatorias no conmutativas, entonces  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ , si  $a$  y  $b$  son independientes ya sea en el sentido libre o tensorial. De aquí que  $f(1_m) = \phi(a_1)^m$  y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y_n^m) = \phi(a_1)^m.$$

Si llamamos  $\mu = \phi(a_1)$ , por el método de momentos, concluimos que la distribución límite de  $y_n$  es  $\delta_\mu$ . Lo cual nos da una demostración de la ley de los grandes números, tanto para el caso clásico como para el libre. Es importante notar, que aunque en este caso las distribuciones límites son iguales tanto en el caso libre como en el clásico, no siempre pasa esto. De hecho, veremos a continuación, que la distribución “gaussiana” libre, no es igual a la distribución gaussiana clásica.

Ahora, supongamos que las variables aleatorias no conmutativas de la sucesión  $(a_n)_{n=1}^\infty$  son centradas y de varianza  $\sigma^2$ , es decir  $\phi(a_1) = 0$  y  $\phi(a_1^2) = \sigma^2$ . Para analizar el límite de  $\phi(z_n^m)$  tenemos que dividir la suma en la ecuación (1.10), por  $n^{\frac{m}{2}}$ . Notemos que los términos asociados a particiones con menos de  $\frac{m}{2}$  bloques son asintóticamente 0. Por otro lado, supongamos que  $\pi \in \mathcal{P}(m)$  tiene un singulete, es decir, un bloque de tamaño uno. Si las variables aleatorias son independientes en el sentido clásico, podemos directamente factorizar el elemento asociado al singulete, y dado que las variables consideradas son centradas, el producto asociado a  $\pi$  será cero. Si las variables son independientes en el sentido libre, recordemos de la sección anterior, que si  $\{a_1, a_2\}$  es libre de  $\{b\}$ , entonces  $\phi(a_1 b a_2) = \phi(a_1 a_2) \phi(b)$  y  $\phi(a_1 b) = \phi(a_1) \phi(b) = \phi(b a_1)$ . Entonces, independientemente de cuál sea el singulete en la partición, podremos factorizar en  $\phi$  el elemento asociado a este y nuevamente el producto será cero. Por lo tanto, para que  $f(\pi) \neq 0$ , todos los bloques de  $\pi$  tendrán que tener más de un bloque, luego, dado que solo nos interesan las particiones con  $|\pi| \geq \frac{m}{2}$ , concluimos que las únicas particiones cuyo valor asociado es asintóticamente representativo son los emparejamientos. Por lo tanto, los momentos impares de  $z_n$  son asintóticamente cero. Para analizar los momentos pares analizemos por separado el caso libre y el clásico.

- *Caso clásico:* Sea  $\mathcal{P}_2(m)$  el conjunto de emparejamientos de  $m$ . Note-

mos que si  $\pi \in \mathcal{P}_2(m)$ , utilizando que las variables son independientes en el sentido tensorial, tenemos que  $f(\pi) = \phi(a_1^2)^{\frac{m}{2}} = \sigma^m$ , independientemente de  $\pi$ . Con esto, basta contar la cantidad de emparejamientos. Sea  $m = 2k$ , entonces

$$|\mathcal{P}_2(m)| = \frac{1}{k!} \binom{2k}{2} \binom{2k-2}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

De aquí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(z_n^m) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} f(\pi) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} & \text{si } m = 2k. \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Estos son precisamente los momentos de una distribución gaussiana centrada con varianza  $\sigma^2$ , la cual, como demostramos en la sección anterior, está determinada por sus momentos. Con esto, obtenemos una demostración del teorema del límite central clásico.

- *Caso libre:* Tomemos  $r : [m] \rightarrow [n]$  tal que  $\ker(r) \in \mathcal{P}_2(m)$ . Recordemos que una de las caracterizaciones de independencia libre es que un producto de elementos centrados, donde cualesquiera dos consecutivos son libres, es también centrado. Por lo tanto, si no hay un  $j \in [m]$  tal que  $r(j) = r(j+1)$ , entonces el producto se anulará. Por otro lado, si  $r(j) = r(j+1)$  para algún  $j$  entonces

$$\phi(a_{r(1)} \cdots a_{r(m)}) = \phi(a_{r(j)} a_{r(j+1)}) \phi \left( \prod_{i \neq j, j+1} a_{r(i)} \right).$$

Y ahora podemos repetir lo mismo con el producto restante, pensando a la restricción de  $r$  sobre  $[m] \setminus \{j, j+1\}$  como una función sobre  $[m-2]$ . Iterando este proceso, notemos que si en cada paso de la reducción encontramos dos elementos consecutivos iguales al final tendremos

$$\phi(a_{r(1)} \cdots a_{r(m)}) = \phi(a_1^2)^{\frac{m}{2}} = \sigma^m.$$

De lo contrario, el producto se anulará bajo  $\phi$ . Es fácil ver que la condición de encontrar siempre dos consecutivos es equivalente a la condición de que  $\pi \in NC_2(m)$ , donde  $NC_2(m)$  es el conjunto de emparejamientos que no se cruzan. Es un resultado clásico, el cual puede ser consultado en [29], que la cantidad de emparejamientos de  $[2k]$

que no se cruzan es igual al  $k$ -ésimo número de Catalán, dado por  $C_k := \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ . Por lo que en este caso obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(z_n^m) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} f(\pi) = \begin{cases} C_k \sigma^{2k} & \text{si } m = 2k. \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Para concluir la demostración del caso libre, resta encontrar una distribución que tenga los momentos indicados. Esta resulta ser la distribución semicircular.

**Definición 1.2.17** (Distribución semicircular). *Dado  $\sigma$  un real positivo. Definimos la distribución semicircular con varianza  $\sigma^2$  como la medida de probabilidad sobre los reales inducida por la función de densidad*

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi\sigma} \sqrt{4 - \frac{t^2}{\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}_{-2\sigma^2 \leq t \leq 2\sigma^2}.$$

Como la distribución semicircular es simétrica, es claro que los momentos impares una variable aleatoria semicircular serán 0. Integrando por partes se puede demostrar que los momentos pares de la distribución semicircular coinciden con los respectivos números de Catalán multiplicado por la respectiva potencia de  $\sigma$ . Dado que la distribución semicircular tiene soporte compacto, está determinada por sus momentos. Con esto se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.6** (Teorema del límite central libre). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  un espacio de probabilidad-\* y  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de variables aleatorias libres, autoadjuntas, centradas e idénticamente distribuidas. Entonces la sucesión*

$$z_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}},$$

*converge en distribución a una variable aleatoria con distribución semicircular de parámetro  $\sigma$ , donde  $\sigma^2 = \phi(a_1^2)$ .*

Esto establece una analogía entre la distribución del semicírculo y la distribución Gaussiana clásica. Esta analogía se puede extender a medidas infinitamente divisibles [3].

### 1.3 Matrices Aleatorias

La teoría moderna de matrices aleatorias se originó en el marco de la física nuclear y hasta la fecha ambas áreas se mantienen entrelazadas. Sin embargo, en décadas recientes se han encontrado numerosas aplicaciones de la

teoría de matrices aleatorias a distintas áreas de las matemáticas. Entre estas figuran la teoría de números, la teoría de gráficas y el estudio de sistemas de comunicación inalámbrica. A su vez, los problemas relacionados con matrices aleatorias han sido resueltos en marcos diversos. Sin duda, en la actualidad, el análisis armónico y la combinatoria son dos herramientas fundamentales para el estudio de esta teoría. En esta tesis presentaremos un estudio combinatorio de las matrices aleatorias originado en el marco de la probabilidad libre.

Para el estudio de matrices aleatorias en general, referimos al lector a [9] para un estudio profundo del tema en el contexto de física cuántica, a [13] y [31] como referencias que abarcan desde un nivel introductorio hasta temas especializados, y a [21] como referencia para entender las conexiones entre matrices aleatorias y probabilidad libre.

El espectro de una matriz aleatoria, es decir el conjunto de sus eigenvalores, es un objeto relevante en muchas de las aplicaciones de la teoría de matrices aleatorias.

Recordemos que dos matrices  $A, B \in M_N(\mathbb{C})$  se dicen unitariamente equivalentes si existe una matriz unitaria  $U$  con  $A = UBU^*$ . El teorema espectral en dimensión finita nos da una importante condición de diagonalización.

**Teorema 1.3.1** (Teorema espectral para matrices). *Una matriz cuadrada es normal si y solo si es unitariamente equivalente a una matriz diagonal. Más aún, si la matriz es autoadjunta entonces su espectro está contenido en los reales.*

Geoméricamente, en el caso de matrices reales, el teorema anterior puede ser entendido como que la condición de normalidad de una matriz es equivalente a la condición de que una matriz sea isométricamente equivalente a una expansión.

De la definición de matriz normal es claro que si una matriz es autoadjunta o unitaria, entonces es normal. A continuación presentaremos resultados clásicos que serán retomados posteriormente sobre las matrices aleatorias autoadjuntas (matrices de Wigner), sobre las matrices aleatorias uniformes unitarias (matrices unitarias de Haar), y sobre matrices aleatorias de permutación, las cuales son un subconjunto de las unitarias.

### 1.3.1 Matrices de Wigner

Una matriz aleatoria hermitiana, o autoadjunta, es una matriz que es tomada de forma aleatoria dentro del conjunto de matrices hermitianas. Esto puede

hacerse de varias maneras, nosotros nos enfocaremos en el estudio del modelo introducido por el físico Eugene Wigner para el estudio de núcleos pesados.

**Definición 1.3.1** (Matriz de Wigner). *Una matriz aleatoria  $W_N = (w_{ij})$  de  $N \times N$  es una matriz de Wigner si las variables aleatorias  $w_{ij}$  son conjuntamente independientes para todo  $1 \leq i \leq j \leq N$  y  $w_{ij} = \overline{w_{ji}}$  para todo  $1 \leq i, j \leq N$ . Más aún, pediremos que las variables aleatorias  $w_{ij}$  sean centradas con  $\text{Var}(w_{ij}) = \frac{1}{N}$  para todo  $i \neq j$ , y  $\text{Var}(w_{ii}) = \frac{2}{N}$  para todo  $1 \leq i \leq N$ , y que  $w_{ij}$  sean idénticamente distribuidas para todo  $i < j$ , así como las  $w_{ii}$  para todo  $i$ .*

Como las matrices de Wigner son matrices autoadjuntas, los eigenvalores de cualquier realización de una matriz de Wigner serán reales. Entonces, los eigenvalores de una matriz de Wigner son variables aleatorias reales, y su espectro puede ser pensado como un vector aleatorio real de tamaño  $N$ . Dentro de las matrices de Wigner los ensambles gaussianos son de particular interés.

**Definición 1.3.2** (GOE y GUE). *Un ensamble gaussiano de dimensión  $N$ , digamos  $B_N$ , es una matriz de Wigner de  $N \times N$  en donde sus entradas son variables aleatorias gaussianas. Si las entradas fuera de la diagonal son reales diremos que  $B_N$  es el ensamble gaussiano ortogonal (GOE) y cuando son complejas lo llamaremos el ensamble unitario gaussiano (GUE).*

Los ensambles GOE y GUE son de relevancia dentro de la física cuántica, ya que se usan como un modelo en el estudio de espectros altamente excitados de algunos sistemas cuánticos [9]. Por otro lado, dado que son matrices aleatorias cuya distribución es invariante bajo conjugación unitaria y en donde los momentos mixtos de sus entradas pueden ser manejados con relativa facilidad, por ejemplo con la fórmula de Wick (Capítulo 1 de [21]), estos ensambles han sido estudiados ampliamente. Por ejemplo, se conoce la fórmula explícita para su distribución conjunta de eigenvalores.

**Teorema 1.3.2** (Densidad conjunta de eigenvalores). *Sea  $B_N$  un ensamble gaussiano con eigenvalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , entonces la densidad de la distribución conjunta de estos está dada por la fórmula*

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{G_{\beta, N}} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum \lambda_j^2\right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |\lambda_k - \lambda_j|^\beta, \quad (1.13)$$

donde  $\beta$  es el índice de Dyson, este vale 1 cuando el ensamble es el GOE y 2 cuando se considera el GUE.  $G_{\beta, N}$  es la respectiva constante de normalización.

Notemos que dentro de la expresión (1.13) aparece como factor el determinante de Vandermonde asociado al conjunto de eigenvalores. Esto nos dice que la densidad se vuelve pequeña cuando dos eigenvalores son cercanos. En otras palabras, hay un fenómeno de repulsión entre los eigenvalores, ejemplificando con esto el alto nivel de dependencia que hay entre ellos. Esta dependencia hace que el comportamiento del espectro de una matriz de Wigner sea ordenado para matrices que no son pequeñas. El comportamiento límite del espectro de una matriz de Wigner está dado por la ley del semicírculo, la cual será discutida posteriormente.

### 1.3.2 Matrices aleatorias de permutación

Sea  $N$  un entero positivo fijo. Sea  $\gamma_N$  la permutación de  $[N]$  con único ciclo  $(1, 2, \dots, N)$  y  $A_{\gamma_N}$  la matriz de permutación asociada. Es fácil calcular su polinomio característico de forma explícita,  $f_{A_{\gamma_N}}(z) = (-1)^N z^N + (-1)^{N+1}$ , el cual tiene raíces  $1, \omega, \dots, \omega^{N-1}$ , para  $\omega$  una raíz  $N$ -ésima primitiva de la unidad.

De aquí es fácil calcular el espectro de una matriz de permutación en general. Si  $\sigma \in S_N$  es una permutación, con ciclos  $c_1, \dots, c_k$ , y  $A_\sigma$  es la matriz de permutación asociada, entonces

$$f_{A_\sigma}(z) = \prod_{i=1}^k f_{A_{c_i}}(z) = (-1)^{\sum_{j=1}^k \ell(c_j) + k} \prod_{j=1}^k (z^{\ell(c_j)} - 1),$$

donde  $\ell(c_i)$  denota la longitud del ciclo  $c_i$ . Por lo tanto, el espectro de  $A_\sigma$  está contenido en la circunferencia unitaria y es una unión del conjunto de raíces  $\ell(c_j)$ -ésimas de la unidad, con  $j$  corriendo de 1 a  $k$ .

El conjunto de matrices de permutación es un grupo finito que refleja las propiedades de  $S_N$ . Desde el punto de vista de matrices aleatorias es de interés entender el espectro de matrices de permutación con medida uniforme en  $S_N$ .

**Definición 1.3.3** (Matrices aleatorias de permutación). *Una matriz aleatoria de permutación  $U_N$  es una matriz tomada con distribución uniforme en el conjunto de matrices de permutación de  $N \times N$ .*

Para hacer un análisis asintótico del espectro de estas matrices es necesario conocer algunas estadísticas de las permutaciones aleatorias uniformes.

Sea  $N$  un entero positivo fijo. Una manera de generar una permutación aleatoria con distribución uniforme en  $S_N$  es a través del siguiente proceso. Primero se toma un entero  $j_1 \in [N]$  arbitrario. Luego, se toma otro entero



del mismo conjunto con distribución uniforme, si este es nuevamente  $j_1$  entonces este entero será un ciclo de la permutación de longitud 1, de lo contrario se considera el entero  $j_2 \neq j_1$  escogido. Entonces, el siguiente entero se escoge dentro del conjunto  $[N] - \{j_2\}$ , si este es nuevamente  $j_1$ , el ciclo se cierra y  $(j_1 j_2)$  será un ciclo de la permutación aleatoria. Si  $j_3 \neq j_1$  el proceso continúa sobre el conjunto  $[N] - \{j_2, j_3\}$ , hasta que  $j_1$  vuelva a aparecer. En el momento en el que un ciclo se forma, todos sus elementos se retiran del espacio muestral y el proceso se reinicia, pero ahora sobre el nuevo conjunto de enteros. Esta forma de generar permutaciones aleatorias nos permite obtener resultados sobre las permutaciones aleatorias de forma sencilla.

**Lema 1.3.1.** *Sea  $N$  y  $k$  enteros positivos con  $k \leq N$  y sea  $j \in [N]$  arbitrario. Sea  $\sigma \in S_N$  una permutación aleatoria uniforme. Entonces, la probabilidad de que  $j$  pertenezca a un ciclo de tamaño  $k$  en  $\sigma$  es  $\frac{1}{N}$ .*

*Demostración.* Tomando  $\sigma$  de acuerdo al proceso descrito anteriormente con  $j = j_1$ , vemos que para que el ciclo al que  $j$  pertenece sea de longitud  $k$  se requiere que  $j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_k = j_1$ . Esto último ocurre con probabilidad

$$\frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdots \frac{N-k+1}{N-k+2} \cdot \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N}.$$

□

Del resultado anterior podemos obtener el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.1.** *Sean  $j \in [N]$  y  $\sigma$  como antes. El valor esperado de la longitud del ciclo al cual pertenece  $j$  en  $\sigma$  es  $\frac{N+1}{2}$ .*

*Demostración.* Sea  $\ell$  la longitud aleatoria del ciclo de  $j$ , entonces

$$\mathbb{E}[\ell] = \sum_{i=1}^N \frac{i}{N} = \frac{N+1}{2}.$$

□

Dado que un ciclo de longitud  $l$  aporta al espectro el conjunto de raíces  $l$ -ésimas de la unidad, el hecho de que el valor esperado de las longitudes de los ciclos sea *grande* nos dice que el espectro de una matriz de permutación está bien distribuido en el círculo unitario en  $\mathbb{C}$ . Esta discusión se retomará posteriormente.

### 1.3.3 Matrices unitarias de Haar

Dado que las matrices de Wigner son un ensamble de variables aleatorias se puede hacer un análisis de las entradas de la matriz de forma directa, más aún, como veremos en capítulos subsecuentes, el hecho de tener control sobre cada entrada de la matriz permite obtener estadísticas precisas del espectro. En el caso de matrices aleatorias de permutación, aunque estas no pueden ser vistas como un ensamble, es fácil dar un modelo de ellas dado que la cantidad de matrices de permutación con una dimensión fija es finita. En el caso de las matrices unitarias, no es sencillo dar un modelo no trivial cuyas realizaciones estén en este conjunto.

Si  $G$  un grupo topológico localmente compacto, entonces existe una medida de probabilidad invariante bajo la acción del grupo en sí mismo, esta medida es conocida como la medida de Haar. Para una exposición directa y autocontenida del tema el lector puede consultar [12]. En particular necesitamos el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.3** (Existencia y unicidad de la medida de Haar). *Sea  $G$  un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una medida de Borel regular  $\mu$  que cumple que para cualquier subconjunto Borel medible  $S \subset G$  y todo  $g \in G$ , se tiene que  $\mu(gS) = \mu(S)$ . Más aún, si  $\mu'$  es otra medida que cumple las mismas condiciones, entonces  $\mu = a\mu'$  para algún real positivo  $a$ . Más aún, si  $G$  es compacto entonces las medidas que cumplen lo anterior son finitas.*

Recordemos que el conjunto de matrices complejas unitarias de  $N \times N$  forma un grupo, el cual se conoce como el grupo unitario y se denota por  $\mathcal{U}(N)$ . Pensando a las matrices como puntos en  $\mathbb{R}^{N^2}$ ,  $\mathcal{U}(N)$  es un grupo topológico compacto. Por el teorema anterior, hay una única medida de probabilidad sobre  $\mathcal{U}(N)$  que es invariante bajo la acción del grupo en sí mismo.

**Definición 1.3.4** (Matriz unitaria de Haar). *Sea  $\mu$  la medida de Haar sobre  $\mathcal{U}(N)$  con  $\mu(\mathcal{U}(N)) = 1$ . Una matriz unitaria de Haar de  $N \times N$  es una matriz aleatoria tomada en  $\mathcal{U}(N)$  con distribución  $\mu$ .*

En el desarrollo de esta tesis, explotaremos el hecho de que en el caso de las matrices de Wigner es posible calcular el valor esperado de productos de sus entradas de forma explícita, más aún el hecho de que las entradas en una matriz de Wigner, o son independientes, o son totalmente dependientes. Dado que las matrices unitarias de Haar no se pueden ver como un ensamble de variables aleatorias, y en particular, dado que sus entradas no

son independientes, no es posible, a primera vista, calcular los valores esperados de productos de sus entradas. Para hacer esto es necesario el cálculo de Weingarten, un método introducido por Benoît Collins en [7]. Para los propósitos de este texto serán suficientes los siguientes resultados.

**Teorema 1.3.4.** *Sea  $U_N = (u_{ij})_{i,j=1}^N$  una matriz unitaria de Haar y  $k \leq N$ . Sean  $r$  y  $r'$  enteros positivos,  $i, j : [r] \rightarrow [N]$  e  $i', j' : [r'] \rightarrow [N]$  entonces*

$$\mathbb{E}[u_{i(1)j(1)} \cdots u_{i(r)j(r)} \bar{u}_{i'(1)j'(1)} \cdots \bar{u}_{i'(r')j'(r')}],$$

vale cero cuando  $r \neq r'$ , y cuando  $r = r'$  vale

$$\sum_{\sigma, \tau \in S_k} \delta_{i(\sigma(1))i'(1)} \cdots \delta_{i(r)\i'(r)} \delta_{j(\tau(1))j'(1)} \cdots \delta_{j(\tau(r))j'(r)} Wg(\sigma \circ \tau^{-1}, N). \quad (1.14)$$

Donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $Wg(\alpha, N)$  es la función de Weingarten dada por

$$Wg(\alpha, N) = \mathbb{E}[u_{11} \cdots u_{rr} \bar{u}_{1\alpha(1)} \cdots \bar{u}_{r\alpha(r)}].$$

El cálculo de Weingarten originalmente fue desarrollado por Collins con métodos avanzados, aunque actualmente hay un tratamiento elemental que puede encontrarse en [24]. Para efectos de esta tesis basta entender el comportamiento asintótico de la función  $Wg$ . En [8] se presenta la siguiente aproximación de la función de Weingarten que utilizaremos en el Capítulo 4.

**Lema 1.3.2.** *Sean  $\sigma, \tau \in S_N$  y  $r$  como antes, entonces*

$$Wg(\sigma \circ \tau^{-1}, N) = \psi(\sigma \circ \tau^{-1}) N^{-2r + \#(\sigma \circ \tau^{-1})} (1 + O(N^{-2})),$$

con  $\psi(\sigma \circ \tau^{-1}) = \prod_{i=1}^L (-1)^{k_i - 1} C_{k_i - 1}$ , donde  $C_k$  denota al  $k$ -ésimo número de Catalán y  $k_1, \dots, k_L$  son las longitudes de los ciclos de  $\sigma \circ \tau^{-1}$ .

### 1.3.4 Método de los momentos en matrices aleatorias

Ha quedado claro que muchas propiedades estadísticas del espectro de una matriz aleatoria pueden ser descritas de manera satisfactoria. Consideremos el experimento de tomar una matriz al azar y de esta matriz tomar uno de sus eigenvalores al azar con probabilidad uniforme.

Primero, si  $A$  es una matriz normal determinística de  $N \times N$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  son sus eigenvalores, y  $\lambda$  es la variable aleatoria que describe el proceso de tomar un eigenvalor al azar, entonces la distribución de  $\lambda$  es

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}.$$

En cambio, si  $W_N$  es una matriz de Wigner, con eigenvalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , entonces  $\mu(W_N) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$  es una medida aleatoria. El tratamiento formal de las medidas aleatorias es técnico pero intuitivo pues estas se comportan de manera muy similar a las variables aleatorias, por esta razón no ahondaremos en el tema, pero referimos al lector a [17] para una exposición formal.

Dada una medida aleatoria, es posible integrar sobre ella funciones determinísticas, lo cual da como resultado una variable aleatoria. En particular, los momentos de una medida aleatoria son variables aleatorias. También, dada una medida aleatoria es posible hablar de su valor esperado, el cual es una medida determinística.

En este caso, a  $\mu(W_N)$  la llamaremos la medida espectral de  $W_N$ , y a su valor esperado, denotado por  $\mathbb{E}[\mu(W_N)]$ , la llamaremos la medida espectral promedio. Resulta ser que la medida espectral promedio es una medida de probabilidad determinística y es precisamente la distribución de la variable aleatoria real dada por el proceso de tomar una realización de  $W_N$  y posteriormente tomar un eigenvalor al azar. Típicamente, la distribución espectral promedio se estudia con el método de los momentos. Para estudiar los momentos de la medida espectral promedio, es de suma utilidad saber que para toda función continua y acotada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(W_N) \right] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathbb{E}[\mu(W_N)].$$

En particular, los valores esperados de los momentos de  $\mu(W_N)$  son los momentos de  $\mathbb{E}[\mu(W_N)]$ . Por otro lado, el  $k$ -ésimo momento de la distribución espectral está dado por

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(W_N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k \lambda_j^k = \frac{1}{N} \text{Tr}(W_N^k) = \text{tr}(W_N^k),$$

donde  $\text{tr}(\cdot)$  denota la traza normalizada. Por lo tanto, el  $k$ -ésimo momento de la distribución espectral promedio estará dado por  $\mathbb{E}[\text{tr}(W_N^k)]$ .

En general, si  $A$  es una matriz aleatoria, llamaremos al conjunto de valores de la forma  $\mathbb{E}[\text{tr}(A^k)]$ , los momentos de  $A$ , y estos nos darán información sobre su distribución espectral. En ocasiones, estos momentos se pueden dar de manera explícita. Un ejemplo es el caso del GUE, en donde la fórmula para sus momentos es un polinomio en la dimensión del ensamble, esta esclarece una propiedad topológica sobre las particiones que tienen asociadas sumandos que no se anulan asintóticamente. Para una descripción más

amplia del tema el lector puede consultar la Sección 1.7 de [21], en donde se desarrolla el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.5** (Expansión por género). *Sea  $X_N$  un GUE de dimensión  $N$  y  $k$  un entero positivo. Sea  $\gamma_{2k}$  la permutación de  $[2k]$  que tiene un único ciclo  $(1, 2, \dots, 2k)$ , entonces*

$$\mathbb{E}[\text{tr}(X_N^{2k})] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} N^{\#(\gamma_{2k}\pi) - k - 1},$$

donde para cada emparejamiento  $\pi \in \mathcal{P}_2(2k)$ ,  $\#(\gamma_{2k}\pi)$  denota el número de ciclos de la permutación  $\gamma_{2k}\pi$  cuando  $\pi$  se piensa como la respectiva involución.

### 1.3.5 Distribuciones espectrales asintóticas

Como se mencionó anteriormente, en la mayoría de los modelos de matrices aleatorias, los eigenvalores de estas son altamente dependientes entre sí. Esto tiene como consecuencia que, aún en dimensiones no muy grandes, los eigenvalores de las realizaciones muestren ya un cierto orden, como se puede observar en la Figura 2.

Como es de esperarse, después de ver los resultados de las simulaciones, la distribución espectral de las matrices aleatorias de permutación, así como la de la familia de matrices Haar unitarias, converge a la medida de probabilidad uniforme en la circunferencia unitaria. Por otro lado, las matrices de Wigner convergen a la distribución del semicírculo con soporte en los reales.

**Teorema 1.3.6.** *Sea  $(U_N)_{N=1}^\infty$  una familia de matrices aleatorias de permutación o una familia de matrices unitarias de Haar. Para cada  $N$ , sea  $\mu_N$  la distribución espectral promedio de  $U_N$ . Entonces, la sucesión  $\mu_N$  converge en distribución a la medida  $\nu$ . Donde  $\nu$  es la medida de Lebesgue normalizada sobre la circunferencia unitaria  $\mathbb{T}$ .*

La discusión previa sobre matrices de permutación nos brinda algo de intuición sobre el Teorema 1.3.6. Por ejemplo, ya vimos que si una permutación  $\sigma$  tiene un ciclo de tamaño  $k$ , entonces este aporta al espectro de la matriz asociada el conjunto de raíces  $k$ -ésimas de la unidad. Por otro lado, si  $\sigma$  es una permutación aleatoria uniforme en  $S_N$ , entonces para cualquier elemento fijo  $j \in [N]$ , el valor esperado de la longitud del ciclo al que  $j$  pertenece en  $\sigma$  es  $\frac{N+1}{2}$ . Esto nos dice que las realizaciones de permutaciones aleatorias típicamente tienen ciclos grandes, los cuales a su vez contribuyen a que el espectro de la matriz esté distribuido uniformemente en el círculo.

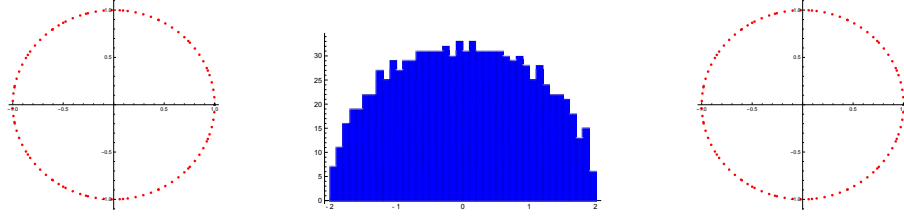


Figura 2: En la figura de la izquierda se muestran los eigenvalores de una realización de una matriz aleatoria de permutación de dimensión 100. En la figura del centro se muestra el histograma de los eigenvalores de una realización de un GOE de dimensión 1000. Hasta la derecha se muestran los eigenvalores de una realización de una matriz de Haar de dimensión 100.

**Teorema 1.3.7** (Teorema de Wigner). *Sea  $(W_N)_{N=1}^{\infty}$  una familia de matrices de Wigner y para cada  $N$ , sea  $\mu_N$  la distribución espectral promedio de  $W_N$ . Entonces, la sucesión  $\mu_N$ , converge en distribución a la distribución semicircular con parámetro 1 descrita en la Definición 1.2.17.*

El teorema de Wigner se puede demostrar utilizando el método de los momentos. Aquí presentaremos un esbozo de la demostración utilizando la expansión por género para el caso en que las matrices de Wigner son GUE, es decir, cuando las entradas son variables aleatorias gaussianas complejas. Como se mencionó al final de la Sección 2, los momentos impares de la distribución semicircular son cero y para todo  $k$ , el momento  $2k$  es el número de Catalán  $C_k$ . No es difícil ver que los momentos impares de las matrices de Wigner se anulan. Para los momentos pares basta demostrar que para todo  $k$  se cumple que

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} N^{\#(\gamma_{2k}\pi) - k - 1} \longrightarrow C_k.$$

Notemos que si  $\#(\gamma_{2k}\pi) - k - 1 < 0$  entonces el respectivo sumando,  $N^{\#(\gamma_{2k}\pi) - k - 1}$ , es asintóticamente cero. En el primer capítulo de [21] se hace un análisis sobre la relación de las propiedades de  $\pi$  con el valor de  $\#(\gamma_{2k}\pi) - k - 1$ , en particular se usa el resultado de Philippe Biane que establece que para todo  $k$  y todo  $\pi \in \mathcal{P}_2(2k)$ , se tiene que  $\#(\gamma_{2k}\pi) - k - 1 \leq 0$ , con igualdad si y solo si  $\pi \in NC_2(2k)$ . El resultado se sigue del hecho de que la cantidad de emparejamientos que no se cruzan en  $[2k]$  es precisamente  $C_k$ . Cabe destacar que hay un resultado aún más general, en donde a cada permutación se le asocia una gráfica. Luego, con esta asociación se cumple

que para cualquier entero positivo  $n$  y para cualesquiera dos particiones  $\sigma, \pi \in [n]$  que cumplan que el grupo generado por ellas actúa transitivamente en  $[n]$ , se satisface que  $\#(\pi) + \#(\pi^{-1}\sigma) + \#(\sigma) = n + 2(1 - g)$ , donde  $g$  es el mínimo entero tal la gráfica de  $\pi$  relativa a  $\sigma$  se puede encajar en una superficie de género  $g$  sin autointersectarse, de ahí el nombre que se le da a la fórmula. Para este caso, tomando  $n = 2k$  y  $\sigma = \gamma_{2k}$ , tenemos que la gráfica asociada a  $\gamma_{2k}$  es un ciclo de  $2k$  vértices, y dado que  $\pi$  es una involución, su gráfica asociada es la unión de segmentos cuyos extremos son elementos que están en un mismo bloque. Por otro lado, estamos buscando caracterizar las  $\pi$  que cumplen que  $\#(\gamma_{2k}\pi) = k + 1$ , entonces

$$2k+2 = k+(k+1)+1 = \#(\pi) + \#(\pi^{-1}\sigma) + \#(\sigma) = n+2(1-g) = 2k+2(1-g),$$

por lo tanto  $g = 0$ . Entonces buscamos encajar la gráfica descrita en una esfera. De aquí que las particiones que buscamos son precisamente  $NC_2(2k)$ .

### 1.3.6 Asintoticidad libre

Recordemos de la sección anterior, que dado un espacio de probabilidad- $*$   $(\mathcal{A}, \phi)$ , un elemento  $s \in \mathcal{A}$  es semicircular si es autoadjunto y su distribución analítica es semicircular. Equivalentemente,  $s$  es semicircular si es autoadjunto y para todo  $m > 0$

$$\phi(s^m) = \begin{cases} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} & \text{si } m = 2k. \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases} \quad (1.15)$$

En el contexto de probabilidad libre, dado que podemos ver al conjunto de matrices aleatorias de dimensión fija como un espacio de probabilidad- $*$ , lo obtenido con el método de los momentos implica que una sucesión de matrices de Wigner converge a un elemento semicircular. Esto, no es más que parafrasear la convergencia en distribución presentada anteriormente. La verdadera ventaja de hablar de convergencia a elementos de un álgebra en el contexto de probabilidad libre, es que esto permite también hablar de la relación entre límites de sucesiones independientes. En [35], Voiculescu encontró la siguiente generalización del teorema de Wigner.

**Teorema 1.3.8.** Sean  $\{W_N^{(1)}\}_{N=1}^\infty, \{W_N^{(2)}\}_{N=1}^\infty, \dots, \{W_N^{(p)}\}_{N=1}^\infty$ , familias de matrices de Wigner independientes entre sí. Entonces

$$W_N^{(1)}, \dots, W_N^{(p)} \xrightarrow{\text{dist.}} s_1, \dots, s_p,$$

donde  $s_1, \dots, s_p$  son elementos semicirculares libres y la convergencia es en distribución conjunta.

Este teorema fue un parteaguas, pues abrió una línea de investigación que fusionó la probabilidad libre con la teoría de matrices aleatorias. Más aún, dio un ejemplo en donde la independencia libre surge de manera natural a partir de la independencia tensorial. De este momento en adelante, la independencia libre asintótica en modelos de matrices aleatorias fue estudiada ampliamente.

Sea  $\nu$  la distribución espectral límite de las matrices unitarias de Haar, es decir,  $\nu$  es la medida de probabilidad uniforme con soporte en la circunferencia unitaria  $\mathbb{T}$ . Es fácil ver que

$$\int_{\mathbb{T}} z^k \bar{z}^l d\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.3.5** (Elemento unitario de Haar). *Sea  $(\mathcal{A}, \phi)$  espacio de probabilidad-\** *y  $u \in \mathcal{A}$ . Diremos que  $u$  es un elemento unitario de Haar, si  $u$  es unitario y sus momentos mixtos están dados por*

$$\phi(u^k (u^*)^l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.17)$$

El hecho de que la distribución espectral límite de las matrices unitarias de Haar sea la medida de Lebesgue con soporte en  $\mathbb{T}$  es equivalente a que la sucesión de matrices unitarias de Haar converge a un elemento unitario de Haar. Nuevamente, Voiculescu demostró que en este caso, familias independientes de matrices unitarias de Haar convergen a elementos unitarios de Haar libres. De hecho dio un resultado aún más general, en donde estudió su relación con matrices determinísticas.

**Teorema 1.3.9.** *Sean  $\{U_N^{(1)}\}_{N=1}^\infty, \{U_N^{(2)}\}_{N=1}^\infty, \dots, \{U_N^{(p)}\}_{N=1}^\infty$  sucesiones independientes de matrices unitarias de Haar y sean  $\{D_N^{(1)}\}_{N=1}^\infty, \{D_N^{(2)}\}_{N=1}^\infty, \dots, \{D_N^{(q)}\}_{N=1}^\infty$  sucesiones de matrices determinísticas que cumplen que*

$$D_N^{(1)}, \dots, D_N^{(q)} \xrightarrow{\text{dist.}} d_1, \dots, d_q.$$

*Entonces se cumple que*

$$U_N^{(1)}, (U_N^{(1)})^*, \dots, U_N^{(p)}, (U_N^{(p)})^*, D_N^{(1)}, \dots, D_N^{(q)} \xrightarrow{\text{dist.}} u_1, u_1^*, \dots, u_p, u_p^*, d_1, \dots, d_q,$$

*donde los  $u_i$  son elementos unitarios de Haar, la convergencia es en distribución conjunta y los conjuntos  $\{u_1, u_1^*\}, \dots, \{u_p, u_p^*\}, \{d_1, \dots, d_q\}$  son libres.*



Este teorema tiene diversos corolarios. Por ejemplo, dadas dos sucesiones de matrices determinísticas  $\{D_N^{(1)}\}$  y  $\{D_N^{(2)}\}$  que convergen en distribución a  $d_1, d_2$ , y  $\{U_N\}$  una sucesión de matrices unitarias de Haar, se cumple que la sucesión  $\{U_N D_N^{(2)} U_N^*\}$  converge a un elemento con la misma distribución que  $d_2$ , pero libre de  $d_1$ .

Posteriormente, Alexandru Nica demostró que sucesiones independientes de matrices aleatorias de permutación también convergen a un conjunto de elementos unitarios de Haar libres [23].



## Capítulo 2

# Gráficas asociadas a productos de matrices

En el 2012, Roland Speicher y James Mingo, en [20], encontraron una manera de asociar gráficas a algunos tipos de sumas de productos de entradas de matrices, que aparecen con frecuencia en la Teoría de Matrices Aleatorias. Estas gráficas a su vez, pueden ser entendidas como una operación entre transformaciones lineales, lo cuál permite acotar la suma considerada en términos de las normas de las matrices involucradas, dando una cota que puede ser expresada en términos de la estructura combinatoria de la gráfica asociada. Aunque el resultado principal de este artículo está presentado en términos elementales, el trabajo desarrollado es profundo. Este capítulo tiene dos propósitos, elucidar lo presentado en [20], así como evidenciar la conexión de este con el trabajo realizado posteriormente, del 2012 al 2016, por Camille Male y otros en [6, 19].

Por lo apenas mencionado, los objetos que consideraremos en este capítulo, pueden ser pensados de varias maneras: como la codificación de una suma de productos de entradas de matrices, como una “composición ramificada” de operadores, y de manera abstracta como operaciones entre variables aleatorias no conmutativas. Originalmente, los autores llamaron a estos objetos *gráficas de matrices*, nombre que utilizaremos cuando trabajemos con sumas de productos de entradas de matrices. Sin embargo, cuando estos objetos se piensan como composiciones ramificadas de operadores, los llamaremos carcajes de entrada-salida, por razones que serán aparentes a continuación. Finalmente, cuando estos objetos son pensados de manera abstracta en el contexto de espacios de tráfico, nos referiremos a ellos como  $K$ -operaciones de gráfica.

## 2.1 Motivación

Al estudiar las propiedades asintóticas del espectro de familias de matrices aleatorias, con frecuencia es necesario calcular el orden de sumas de la siguiente forma

$$\sum_{\substack{j:[2m] \rightarrow [N] \\ \text{Tal que } P(j)}} a_{j_1 j_2}^{(1)} a_{j_3 j_4}^{(2)} \cdots a_{j_{2m-1} j_{2m}}^{(m)}, \quad (2.1)$$

en donde para todo  $j$ ,  $a_{j_{2i-1} j_{2i}}^{(i)}$  es la entrada de alguna matriz  $A_i$  y  $P(j)$  denota una propiedad que debe de cumplir la función  $j$  para ser considerada dentro de la suma, varios ejemplos de esto pueden ser encontrados en [21] y [29]. Por ejemplo, dadas matrices de  $N \times N$ , digamos  $A_1, \dots, A_k$  con  $A_i = (a_{rs}^{(i)})$ , es fácil ver que

$$\text{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \sum_{j:[m] \rightarrow [N]} a_{j_1 j_2}^{(1)} a_{j_2 j_3}^{(2)} \cdots a_{j_m j_1}^{(m)}. \quad (2.2)$$

Para reescribir esta suma en la forma de la expresión (2.1), la condición  $P(j)$  requerida es  $j_2 = j_3, j_4 = j_5, \dots, j_{2m-2} = j_{2m-1}, j_{2m} = j_1$ . En general, nos enfocaremos en estudiar sumas en donde  $P(j)$  puede ser expresada como una conjunción de igualdades entre índices, en este caso podemos asociar a  $P(j)$  una partición de  $[2m]$  en donde los bloques estarán compuestos por los índices que deben de ser iguales.

Recordemos de la Definición 1.2.16, que dada una función  $j : [2m] \rightarrow [N]$ , el kernel de  $j$ , dotado por  $\ker(j)$ , es la partición de  $2m$  en donde dos elementos en  $[2m]$ , digamos  $r$  y  $s$ , están en un mismo bloque de  $\ker(j)$  si y solo si  $j(r) = j(s)$ . Dado que a  $P = P(j)$  le podemos asociar una partición  $\pi_P$ , la suma que consideraremos correrá sobre todas las funciones  $j : [2m] \rightarrow [N]$  que cumplan que  $\pi_P$  es un refinamiento de  $\ker(j)$ . Por ejemplo, en la expresión (2.2), la condición  $P(j) \equiv (j_2 = j_3) \wedge (j_4 = j_5) \wedge \cdots \wedge (j_{2m-2} = j_{2m-1}) \wedge (j_{2m} = j_1)$ , tiene asociada la partición  $\pi_P := \{(1, 2m), (2, 3), \dots, (2m-2, 2m-1)\}$  y por lo tanto

$$\text{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \sum_{\substack{j:[2m] \rightarrow [N] \\ \ker(j) \geq \pi}} a_{j_1 j_2}^{(1)} a_{j_3 j_4}^{(2)} \cdots a_{j_{2m-1} j_{2m}}^{(m)}. \quad (2.3)$$

A continuación desarrollaremos las herramientas necesarias para establecer las conexiones entre este tipo de sumas y gráficas dirigidas.

## 2.2 Carcajes de entrada-salida

**Definición 2.2.1** (Carcaj). *Un carcaj  $G = (V, E)$  es una gráfica dirigida finita en donde se permiten lazos, así como varias aristas entre una misma pareja de vértices. Para cada arista  $e \in E$ , denotaremos por  $s(e)$  al vértice del cual esta sale y por  $t(e)$  al vértice al cual entra <sup>1</sup>.*

**Definición 2.2.2** (Representación de un carcaj). *Una representación  $\mathcal{G}$  de  $G = (V, E)$  está dada por asociar a cada vértice  $v \in V$  un espacio vectorial  $\mathcal{H}_v$ , y a cada arista  $e \in E$ , una transformación lineal  $T_e : \mathcal{H}_{s(e)} \rightarrow \mathcal{H}_{t(e)}$ . Esto lo denotaremos por  $\mathcal{G} = (G = (V, E), (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$ .*

En esta sección estaremos interesados en una familia particular de carcajes, a los cuales llamaremos *carcajes de entrada-salida*, veremos que estos se pueden entender de manera natural como una composición “ramificada” de operadores.

**Definición 2.2.3** (Carcaj de entrada-salida). *Sea  $G$  un carcaj. Diremos que  $G$  es un carcaj de entrada-salida si tiene dos subconjuntos no vacíos de vértices, denotados por  $V_{in}$  (vértices de entrada) y  $V_{out}$  (vértices de salida) que cumplen las siguientes condiciones:*

- $G$  no tiene ningún ciclo dirigido.
- Cualquier vértice de  $G$  pertenece a una trayectoria dirigida que va de un vértice en  $V_{in}$  a un vértice en  $V_{out}$ .
- Cualquier vértice de entrada solo tiene aristas que van hacia afuera, mientras que cualquier vértice de salida solo tiene aristas que entran a él.

Sea  $G = (V, E)$  un carcaj de entrada-salida, sean  $V_{in}$  sus vértices de entrada y  $V_{out}$  los de salida. Para cada representación de  $G$ , digamos  $\mathcal{G} = (G, (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$ , asociaremos una transformación lineal resultante

$$T_{\mathcal{G}} : \bigotimes_{v \in V_{in}} \mathcal{H}_v \rightarrow \bigotimes_{w \in V_{out}} \mathcal{H}_w.$$

Esto se puede hacer de forma natural para ciertas representaciones. Por ejemplo, es natural asociar a  $\mathcal{G}_1$ , la representación en la Figura 3, la transformación  $T_{\mathcal{G}_1} : \mathcal{H}_{v_n} \rightarrow \mathcal{H}_{v_0}$ , dada por  $T_{\mathcal{G}_1} = T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_n$ . Para  $\mathcal{G}_2$ , la

---

<sup>1</sup>Las definiciones de carcaj y gráfica son las mismas. Se utiliza la palabra carcaj, en vez de gráfica, para indicar que el objeto se está pensando en el contexto de teoría de representaciones y que en algún momento se equipará con una estructura adicional

transformación  $T_{\mathcal{G}_2} : \mathcal{H}_{u_1} \otimes \mathcal{H}_{u_2} \rightarrow \mathcal{H}_{v_1} \otimes \mathcal{H}_{v_2}$  estará dada por  $T_{\mathcal{G}_2} = S \otimes T$ . Sin embargo, cuando haya vértices en los cuales entren y salgan varias aristas, como en  $\mathcal{G}_3$ , no serán suficientes las nociones de tensor y composición.

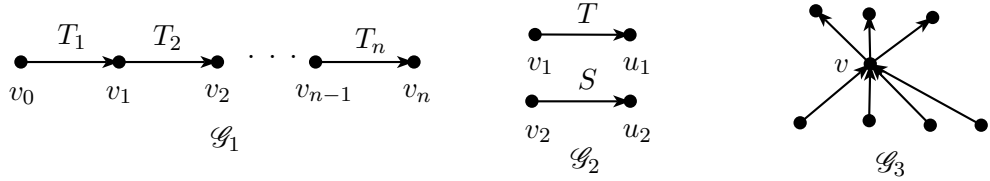


Figura 3: Ejemplos de representaciones de carcajes.

Sea  $\mathcal{G}$  un carcaj de entrada-salida. Si un vértice  $v$  de  $\mathcal{G}$  tiene varias aristas entrando y varias saliendo,  $v$  puede ser pensado como una compuerta lógica que recibe información, si la información es “consistente”, canalizará la información a sus vecinos, de lo contrario la anulará. De hecho, el carcaj completo puede ser pensado como una maquina, en donde los vértices de entrada reciben información, es decir cada vértice  $v \in V_{\text{in}}$  recibe un vector en  $\mathcal{H}_v$ , o equivalentemente el carcaj recibe un vector en  $\bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \mathcal{H}_v$  y los vértices en  $V_{\text{out}}$  emiten el producto final. Cuando la información fluye dentro de  $\mathcal{G}$ , cada vértice recibe vectores de los operadores asociadas a las aristas que entran a él y emite otros a través de los operadores asociados a las aristas que salen de él. Entonces, si a  $v$  llegan varias aristas, quiere decir que en algún momento recibirá información de varios operadores, para poder canalizar esta información a los operadores asociados a las aristas que salen de  $v$ , esta deberá de ser coherente. Formalmente, si  $\mathcal{H}_v$  es el espacio vectorial asociado a  $v$ , con base  $(\xi_i)_{i \in I}$ ,  $\delta^-(v)$  es la cantidad de aristas que entran a  $v$  y  $\delta^+(v)$  las que salen de él,  $v$  será pensado como el operador  $L_v : \mathcal{H}_v^{\otimes \delta^-(v)} \rightarrow \mathcal{H}_v^{\otimes \delta^+(v)}$ , definido por

$$L_v(\xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_{\delta^-(v)}}) = \begin{cases} \xi_{i_1}^{\otimes \delta^+(v)} & \text{si } i_1 = i_2 = \cdots = i_{\delta^-(v)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

Sea  $\mathcal{H}_1$  el subespacio de  $\mathcal{H}_v^{\otimes \delta^-(v)}$  generado por los vectores de la forma  $\xi_i^{\otimes \delta^-(v)}$  y  $\mathcal{H}_2$  el de  $\mathcal{H}_v^{\otimes \delta^+(v)}$  generado por los de la forma  $\xi_i^{\otimes \delta^+(v)}$ . Como  $L_v$  es trivial en el complemento ortogonal de  $\mathcal{H}_1$  y  $L_v \upharpoonright_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  es una isometría,  $L_v$  es una isometría parcial. De la definición no es difícil calcular de forma explícita a  $L_v$ , para hacer esto basta saber cómo evaluarla en los tensores puros. Sean  $w_1, \dots, w_{\delta^-(v)}$  vectores en  $\mathcal{H}_v$  dados por  $w_j = \sum \lambda_{j,i} \xi_i$ , entonces

$$\begin{aligned}
& L_v(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{\delta^-(v)}) \\
&= \sum \lambda_{1,i_1} \lambda_{2,i_2} \cdots \lambda_{\delta^-(v),i_{\delta^-(v)}} L_v(\xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_{\delta^-(v)}}) \\
&= \sum \left( \prod_{j=1}^{\delta^-(v)} \lambda_{j,i} \right) \xi_i^{\otimes \delta^+(v)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Habiendo entendido cómo tratar localmente este nuevo tipo de “composición” de operadores cuando el vértice tiene varias aristas entrando y varias saliendo, resta entender el “orden” en que debemos componer los operadores. Para aplicar los operadores que salen de un vértice primero se debieron haber aplicado todos los operadores que entran a él, los cuales a su vez necesitan la información de todos los operadores que llegan a sus respectivas entradas. Entonces, los vértices de la gráfica, al igual que las aristas, deben de ser jerarquizados, siendo los vértices de entrada los del primer estrato y los de salida los del último. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 2.2.4.** *Dado  $G = (V, E)$  un carcaj de entrada-salida. Para cada  $v \in V$  definimos el rango de  $v$ , denotado por  $r(v)$ , como la longitud del mayor camino dirigido que hay de algún vértice de entrada a  $v$ .*

La función  $r$  estratifica a  $V$  en los conjuntos  $V_k = \{v \in V | r(v) = k\}$ , donde  $V_0 = V_{\text{in}}$ . En principio esto es suficiente para definir  $T_{\mathcal{G}}$  para cualquier representación  $\mathcal{G}$  de  $G$ . Sin embargo, para disminuir el nivel de tecnicismo requerido, comenzaremos por definir  $T_{\mathcal{G}}$  para una familia particular de carcajes de entrada-salida.

**Definición 2.2.5.** *Decimos que un carcaj  $G = (V, E)$  de entrada-salida está bien estratificado si para cualesquier  $e \in E$  se cumple que  $r(t(e)) = r(s(e)) + 1$  y para cualesquiera dos vértices de salida,  $u$  y  $v$  se cumple que  $r = r(u) = r(v)$ .*

Tomemos  $G$  un carcaj de entrada salida bien estratificado y  $\mathcal{G}$  una representación de  $G$ . Sea  $E_k = \{e \in E | r(t(e)) = k\}$ , como  $G$  está bien estratificado,  $E_k$  es el conjunto de aristas que conectan a un vértice en  $V_{k-1}$  con un vértice en  $V_k$ . Entonces, sea

$$T_k : \bigotimes_{e \in E_k} \mathcal{H}_{s(e)} \rightarrow \bigotimes_{e \in E_k} \mathcal{H}_{t(e)} \quad \text{dado por} \quad T_k := \bigotimes_{e \in E_k} T_e,$$

y sea,

$$L_k := \bigotimes_{v \in V_k} L_v \quad \text{en donde } L_v \text{ es como antes.}$$

Notemos que en la definición de  $T_k$  el producto tensorial corre sobre todas las aristas de un estrato, en vez de sobre todos los vértices. Entonces, en el dominio de  $T_k$ , cada espacio  $\mathcal{H}_v$ , con  $v \in V_k$ , aparece  $\delta^+(v)$  veces, mientras que en el rango de  $T_k$  cada espacio  $\mathcal{H}_v$ , con  $v \in V_{k+1}$ , aparece  $\delta^-(v)$  veces, por lo tanto tienen sentido las composiciones  $L_k \circ T_k$  y  $T_{k+1} \circ L_k$ .

**Definición 2.2.6.** Definimos  $T_{\mathcal{G}} : \bigotimes_{v \in V_{in}} \mathcal{H}_v \rightarrow \bigotimes_{w \in V_{out}} \mathcal{H}_w$ , como  $T_{\mathcal{G}} := T_r \circ L_{r-1} \circ T_{r-1} \circ \cdots \circ T_1$ .

Para extender la definición de  $T_{\mathcal{G}}$  a los carcajes de entrada-salida que no están bien estratificados encontraremos una fórmula explícita para  $T_{\mathcal{G}}$ . Para motivar la fórmula, recordemos que si  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son espacios de Hilbert con bases  $(\xi_i)_{i \in I}$  y  $(\xi_j)_{j \in J}$  respectivamente, y  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  es un operador lineal, entonces  $A(\xi_l) = \sum_k \langle \xi_k, A(\xi_l) \rangle \xi_k$ . Por lo tanto  $\langle \xi_k, A(\xi_l) \rangle$  es el coeficiente de  $\xi_k$  cuando expresamos a  $A(\xi_l)$  en la base  $(\xi_j)_{j \in J}$ . Entonces, es suficiente con conocer a los valores de la forma  $\langle \xi_k, A(\xi_l) \rangle$  para determinar a  $A$ , más aún, en el caso en el que  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  sean de dimensión finita, el valor  $\langle \xi_k, A(\xi_l) \rangle$  corresponderá a la entrada  $kl$  de la matriz asociada a  $A$  con respecto a las bases que consideramos. Más en general, si  $A : \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_{i_k} \rightarrow \bigotimes_{k=1}^M \mathcal{H}_{j_k}$ , en donde  $(\xi_i^{(k)})_{i \in I_k}$  es una base para  $\mathcal{H}_{i_k}$  y  $(\xi_j^{(k)})_{j \in J_k}$  es una base para  $\mathcal{H}_{j_k}$ , nos bastará con conocer los valores de la forma  $\langle \bigotimes_{r=1}^N \xi_{j_r}^{(k)}, A(\bigotimes_{s=1}^M \xi_{i_s}) \rangle$ , para todo  $j : [N] \rightarrow \cup_{r=1}^N J_r$  e  $i : [M] \rightarrow \cup_{s=1}^M I_s$ , donde  $j_r \in J_r$  para todo  $r \in [N]$  e  $i_s \in I_s$  para todo  $s \in [M]$ . Dicho valor indicará el coeficiente de  $A(\bigotimes_{s=1}^M \xi_{i_s})$  cuando se expresa en la respectiva base de  $\bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_{j_k}$ .

**Teorema 2.2.1.** Sea  $\mathcal{G} = (G, (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$  un carcaj de entrada-salida bien estratificado y sea  $T_{\mathcal{G}} : \bigotimes_{v \in V_{in}} \mathcal{H}_v \rightarrow \bigotimes_{w \in V_{out}} \mathcal{H}_w$  el operador definido anteriormente. Entonces, para cualesquiera funciones  $i$  y  $j$  con respectivos dominios y rangos adecuados, se tiene que

$$\left\langle \bigotimes_{w \in V_{out}} \xi_{j_w}, T_{\mathcal{G}} \left( \bigotimes_{v \in V_{in}} \xi_{i_v} \right) \right\rangle = \sum_{k: V \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{e \in E} \langle \xi_{k_{t(e)}}, T_e(\xi_{k_{s(e)}}) \rangle, \quad (2.6)$$

en donde la suma de la derecha corre sobre todas las funciones  $k$  que cumplen que  $k|_{V_{in}} = i$ ,  $k|_{V_{out}} = j$  y que  $\xi_{k(s(e))}$  y  $\xi_{k(t(e))}$  son elementos de las bases de  $\mathcal{H}_{s(e)}$  y  $\mathcal{H}_{t(e)}$ , para toda  $e \in E$ .



*Demostración.* Primero calcularemos  $\chi_1 := T_1(\bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi_{i_v})$ . Recordemos que para todo  $e \in E_1$  se cumple que

$$T_e(\xi_{i_{s(e)}}) = \sum_{r=1}^{\dim \mathcal{H}_{t(e)}} \langle \xi_r^{(t(e))}, T_e(\xi_{i_{s(e)}}) \rangle \xi_r^{(t(e))},$$

donde los  $\xi_r^{(t(e))}$  son los elementos de la base de  $\mathcal{H}_{t(e)}$ . Luego, como  $\chi_1 = \bigotimes_{e \in E_1} T_e(\xi_{i_{s(e)}})$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \bigotimes_{e \in E_1} \left( \sum_{r=1}^{\dim \mathcal{H}_{t(e)}} \langle \xi_r^{(t(e))}, T_e(\xi_{i_{s(e)}}) \rangle \xi_r^{(t(e))} \right) \\ &= \sum_{k_1: t(E_1) \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{e \in E_1} \langle \xi_{k_1(t(e))}^{(t(e))}, T_e(\xi_{i_{s(e)}}) \rangle \bigotimes_{e \in E_1} \xi_{k_1(t(e))}^{(t(e))}. \end{aligned}$$

Entonces al aplicar  $L_1(\chi_1)$  notemos que todos los términos asociados a los tensores puros de la forma  $\bigotimes_{e \in E_1} \xi_{k_1(t(e))}^{(t(e))}$  se harán cero bajo  $L_1$  si para algunas aristas  $e$  y  $f$  se cumple que  $k_1(t(e)) \neq k_1(t(f))$  y  $t(e) = t(f)$  cuando se piensan como vértices. De aquí que  $k_1$  pueda reducirse a una función sobre  $V_1$ , digamos  $k'_1$ .

Iterando este proceso, tantas veces como el rango del carcaj de entrada-salida se obtiene la fórmula (2.6), donde la  $k$  de la suma de esta es  $k = \bigcup_{l=1}^{\text{rank}(\mathcal{G})} k'_l$ .  $\square$

Utilizaremos la fórmula anterior para extender la definición de  $T_{\mathcal{G}}$  para el caso en el que  $G$  es un carcaj de entrada-salida que no está bien estratificado.

**Definición 2.2.7.** Sea  $\mathcal{G} = (G, (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$  un carcaj de entrada-salida, entonces definimos  $T_{\mathcal{G}} : \bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \mathcal{H}_v \rightarrow \bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \mathcal{H}_w$  como

$$\left\langle \bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \xi_{j_w}, T_{\mathcal{G}} \left( \bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi_v \right) \right\rangle = \sum_{k: V \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{e \in E} \langle \xi_{k_{t(e)}}^{(t(e))}, T_e(\xi_{k_{s(e)}}) \rangle, \quad (2.7)$$

para todo  $i, j$  funciones con dominios y rangos adecuados, y en donde la suma de la derecha corre sobre todas las funciones  $k$  que cumplen que  $k \upharpoonright_{V_{\text{in}}} = i, k \downharpoonright_{V_{\text{out}}} = j$  y que  $\xi_{k_{s(e)}}^{(s(e))}$  y  $\xi_{k_{t(e)}}^{(t(e))}$  son elementos de las bases de  $\mathcal{H}_{s(e)}$  y  $\mathcal{H}_{t(e)}$ , para toda  $e \in E$ .

Finalmente, demostraremos que cualquier carcaj de entrada-salida puede ser modificado en un carcaj de entrada-salida bien estratificado, de forma que el lado derecho de (2.7) permanezca invariante. Esto, además de servir

como justificación de la Definición 2.2.7, será de suma utilidad para acotar sumas asociadas a productos de matrices en las Sección 4 de este capítulo.

Sea  $\mathcal{G} = (G, (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$  un carcaj de entrada-salida. Primero notemos que para cualquier  $e \in E$  se tiene que  $r(t(e)) \geq r(s(e)) + 1$ , modificaremos el carcaj para que se cumpla  $r(t(e)) = r(s(e)) + 1$ . Para esto, agregaremos una arista  $e'$  poniendo una copia de  $s(e)$ , digamos  $u$ , de modo que  $e' = (u, s(e))$  y todas las aristas que entraban a  $s(e)$  ahora entran a  $u$ . Luego, si en  $\mathcal{G}$  la transformación  $T_e$  estaba asociada a  $e$ , en la representación que tomaremos asociada al nuevo carcaj pondremos en  $u$  una copia de  $\mathcal{H}_{s(e)}$ , en  $e'$  la transformación  $\text{Id}_{\mathcal{H}_{s(e)}}$  y en  $e_2$  la transformación  $T_e$ , las transformaciones y espacios asociados al resto de aristas y vértices serán las mismas. Es claro que si  $r(t(e)) > r(s(e)) + 1$ , este procedimiento hace que  $r(s(e))$  aumente en 1, mientras que  $r(t(e))$  se preserva. Por otro lado, de la fórmula (2.7) vemos que este procedimiento no altera a  $T_{\mathcal{G}}$ , una demostración de este hecho se hará más adelante en el Lema 2.5.1 para el caso de matrices, el caso general se hace de la misma manera. Iterando el proceso, llegaremos a que  $r(t(e)) = r(s(e)) + 1$ . Repitiendo lo mismo para todas las aristas obtendremos un carcaj en donde los rangos de  $t(e)$  y  $s(e)$  diferirán exactamente en 1, para toda  $e \in E$ .

Finalmente, modificaremos el carcaj de manera que cualesquiera dos vértices en  $V_{\text{out}}$  tengan el mismo rango. Sea  $m = \max\{r(v) | v \in V_{\text{out}}\}$ . Si, para algún  $v \in V_{\text{out}}$  tenemos que  $r(v) < m$ , al igual que antes podemos tomar la única arista que entra al vértice y “partirla” en dos agregando un vértice, la primera parte de la arista tendrá la transformación identidad y la segunda la transformación que originalmente tenía la arista, esto aumenta el valor de  $r(v)$  en 1. Nuevamente este proceso no altera a  $T_{\mathcal{G}}$ . Iterando hasta obtener  $r(v) = m$  y repitiendo lo mismo para todos los vértices en  $V_{\text{out}}$ , habremos modificado el carcaj a uno bien estratificado y el operador final asociado igual al original.

### 2.3 Gráficas de matrices

Sea  $\mathcal{G} = (G, (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$  un carcaj de entrada-salida, si todos los espacios  $\mathcal{H}_v$  son de dimensión finita, entonces podemos pensar a los operadores  $T_e$  como matrices. Para cada arista  $e \in E$  sea  $A_e$  la matriz asociada a  $T_e$  en la base canónica, entonces, el lado derecho de la ecuación (2.6) puede ser expresado en términos de las entradas de las matrices  $A_e$ , ya que

$A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) = \langle \xi_{k_{t(e)}}, T_e(\xi_{k_{s(e)}}) \rangle$ . Explícitamente tenemos

$$\langle \bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \xi_{i_w}, T_{\mathcal{G}}(\bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi_{j_v}) \rangle = \sum_{\substack{k: V \rightarrow \mathbb{N} \\ k|_{V_{\text{in}}} = j, k|_{V_{\text{out}}} = i}} \prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}), \quad (2.8)$$

donde la suma corre sobre todas las funciones  $k$  que cumplen que  $k(v) \leq \dim \mathcal{H}_v$  para todo  $v \in V$ . Entonces, si sumamos dicha expresión sobre todas las posibles  $i : V_{\text{out}} \rightarrow \mathbb{N}$  y  $j : V_{\text{in}} \rightarrow \mathbb{N}$ , obtendremos una expresión que no dependerá de los conjuntos  $V_{\text{in}}$  ni  $V_{\text{out}}$ . Esta suma, que solo depende de la estructura del carcaj  $G$  y de las matrices en la representación  $\mathcal{G}$ , digamos  $A_1, A_2, \dots, A_m$  si  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es una enumeración de las aristas, la denotaremos por

$$S(\mathcal{G}) = \sum_{k: V \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{i=1}^m A_i(k_{t(e_i)}, k_{s(e_i)}).$$

Más aún,  $S(\mathcal{G})$  puede ser expresada en la forma de la expresión (2.3) que presentamos al principio del capítulo. Para ver esto tomaremos una partición  $\pi_{\mathcal{G}} \in \mathcal{P}(2m)$  en donde dados  $i, j \in [2m]$ , estos estarán en un mismo bloque si y solo si  $s(e_i) = s(e_j)$  en el caso en el que  $i, j$  sean impares,  $t(e_i) = t(e_j)$  en el caso en el que  $i, j$  sean pares,  $s(e_i) = t(e_j)$  si  $i$  es impar y  $j$  par, y  $t(e_i) = s(e_j)$  si  $i$  es par y  $j$  impar. Es decir, etiquetamos a los vértices  $s(e_i)$  y  $t(e_i)$  con los números  $2i - 1$  y  $2i$  y después juntamos en un bloque a todas las etiquetas que se hayan puesto en un mismo vértice. Es claro que

$$S(\mathcal{G}) = \sum_{k: V \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) = \sum_{\substack{j: [2m] \rightarrow [N] \\ \ker(j) \geq \pi_{\mathcal{G}}}} A_1(j_1, j_2) A_2(j_3, j_4) \cdots A_m(j_{2m-1}, j_{2m}).$$

Por otro lado, si se comienza con una partición  $\pi$  y una suma

$$\sum_{\substack{j: [2m] \rightarrow [N] \\ \ker(j) \geq \pi}} A_1(j_1, j_2) A_2(j_3, j_4) \cdots A_m(j_{2m-1}, j_{2m}),$$

podemos construir  $\mathcal{G}_{\pi}$  de modo que  $S(\mathcal{G}_{\pi})$  sea la suma de arriba. Para esto tomemos  $m$  aristas dirigidas disjuntas, digamos  $e_1, \dots, e_m$ . Luego, para cada  $1 \leq i \leq m$ , sea  $v_{2i-1} = s(e_i)$  y  $v_{2i} = t(e_i)$ . El carcaj  $G_{\pi}$  será el resultado de identificar a todos los vértices cuyo subíndice esté en un mismo bloque de  $\pi$ , y la representación  $\mathcal{G}_{\pi}$  que tomaremos será la que le asocia a cada  $e_i$  la matriz  $A_i$ .

**Ejemplo 2.3.1.** Sean  $A_1, \dots, A_m$ , matrices de  $N \times N$ , al principio del capítulo vimos que la suma  $\text{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_m)$  tiene asociada la partición  $\pi = \{\{1, 2m\}, \{2, 3\}, \dots, \{2m-2, 2m-1\}\}$ . Entonces la gráfica  $G_\pi$  descrita anteriormente, es en este caso un ciclo dirigido de  $m$  vértices, en donde para todo  $1 \leq i \leq m$ , la arista  $e_i$  tiene asociada a la matriz  $A_i$ .

En el caso particular en el que tenemos  $m = 1$ , es decir consideramos  $\text{Tr}(A)$ , el carcaj asociado consiste de un vértice con un lazo en el cual pondremos la matriz  $A$ .

Notemos que en los casos considerados en esta sección, los espacios asociados a los vértices en una representación dejan de ser relevantes, además de que no es necesario que la gráfica considerada sea un carcaj de entrada-salida. Más aún, podemos considerar directamente a las matrices asociadas a los operadores puestos en las aristas. Cuando este sea el caso, simplemente denotaremos a la representación como  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  y llamaremos a los objetos de esta forma *gráficas de matrices*. Es importante recalcar que para que una gráfica de matrices tenga sentido, las matrices que salen de un mismo vértice deben de tener la misma cantidad de columnas así como las matrices que entran a un mismo vértice deben de tener la misma cantidad de filas.

Con este simple concepto es posible obtener resultados que relacionen la estructura combinatoria de una gráfica con la suma asociada.

**Lema 2.3.1.** Sea  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  una gráfica de matrices. Sean  $G_1, G_2, \dots, G_n$  las componentes conexas de  $G$  y  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$  las respectivas gráficas de matrices. Entonces

$$S(\mathcal{G}) = S(\mathcal{G}_1)S(\mathcal{G}_2) \cdots S(\mathcal{G}_n).$$

*Demostración.* Para cada  $1 \leq i \leq n$  sea  $G_i = (V_i, E_i)$ . Denotemos por  $F(V_i, \mathbb{N})$  a la familia de funciones de  $V_i$  a  $\mathbb{N}$ , cuyo valor en  $v$  no excede al número de columnas de las matrices que salen del vértice, o equivalentemente el número de filas de las matrices que entran, para todo  $v \in V_i$ . Dado que los conjuntos de vértices de la subgráficas  $G_i$  son ajenos, podemos definir una biyección de  $F(V, \mathbb{N})$  a  $F(V_1, \mathbb{N}) \times F(V_2, \mathbb{N}) \times \cdots \times F(V_n, \mathbb{N})$ , dada por  $k \mapsto (k \upharpoonright_{V_1}, k \upharpoonright_{V_2}, \dots, k \upharpoonright_{V_n})$ . Entonces la siguiente igualdad se da debido a que cada término del lado izquierdo aparece exactamente una vez del lado derecho y viceversa

$$\sum_{k: V \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{k: V_i \rightarrow \mathbb{N}} \prod_{e \in E_i} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) \right).$$

□

## 2.4 $K$ -operaciones de gráfica

En el siguiente capítulo desarrollaremos de manera abstracta la noción de espacio de tráfico dando una especial atención a una familia de espacios de tráfico particular que llamaremos *espacios de tráfico de matrices*. Con lo desarrollado hasta el momento podemos presentar las operaciones que se utilizarán dentro de los espacios de tráfico de matrices, a las que llamaremos  $K$ -operaciones de gráfica.

Sea  $\mathcal{G}$  un carcaj de entrada-salida en donde  $|V_{\text{in}}| = |V_{\text{out}}| = 1$ , es decir, que solo tiene un vértice de entrada, al cual denotaremos por  $v_{\text{in}}$  y uno de salida que denotaremos por  $v_{\text{out}}$ . En este caso tendremos que  $T_{\mathcal{G}} : \mathcal{H}_{v_{\text{in}}} \rightarrow \mathcal{H}_{v_{\text{out}}}$ . Entonces, en el caso en que los espacios asociados a los vértices sean de dimensión finita, tanto el operador  $T_{\mathcal{G}}$ , como los operadores asociados a las aristas, podrá ser pensados como una matriz. Si denotamos por  $\xi_i$  a los vectores base de los espacios en los vértices y por  $A_{\mathcal{G}}$  a la matriz asociada a  $T_{\mathcal{G}}$ , la ecuación (2.8) se convierte en

$$A_{\mathcal{G}}(i, j) = \langle \xi_i, T_{\mathcal{G}}(\xi_j) \rangle = \sum_{\substack{k: V \rightarrow \mathbb{N} \\ k(v_{\text{out}})=i, k(v_{\text{in}})=j}} \prod_{e \in E} A_e(k_t(e), k_s(e)).$$

Al igual que en las gráficas de matrices, podemos ahora olvidarnos de los espacios asociados a los vértices y pensar a los carcajes de entrada-salida como un objeto en el cual podemos insertar matrices, cuidando la compatibilidad de filas y columnas de matrices adyacentes a un mismo vértice, y obtener una nueva matriz. Más aún, si todas las matrices son cuadradas y de la misma dimensión, podemos pensar al carcaj como una  $m$ -operación en  $M_N(\mathbb{C})$ , en donde  $m$  es la cantidad de aristas del carcaj y  $N$  es cualquier entero positivo de nuestra elección. Esto motiva la siguiente definición, introducida en [6].

**Definición 2.4.1** ( $K$ -operación de gráfica). *Dado un entero no negativo  $K$ , una  $K$ -operación de gráfica es una gráfica conexa con  $K$  aristas orientadas y dos vértices distinguidos  $v_{\text{in}}$  y  $v_{\text{out}}$ . Al conjunto de todas las  $K$ -operaciones de gráfica, con  $K$  corriendo sobre todos los enteros no negativos, lo denotaremos por  $\mathcal{G}$ .*

Una  $K$ -operación de gráfica debe de ser pensada como una operación que recibe  $K$  objetos y emite uno del mismo tipo.

**Definición 2.4.2.** *Si  $g$  es una  $K$ -operación de gráfica, definimos la transformación lineal  $Z_g : M_N^{\otimes K}(\mathbb{C}) \rightarrow M_N(\mathbb{C})$  como*

$$Z_g(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_K) = \sum_{k:V \rightarrow [N]} \left( \prod_{e \in E} A_e(k_t(e), k_s(e)) \right) E_{k_{v_{out}}, k_{v_{in}}}, \quad (2.9)$$

donde  $E_{i,j}$  es la matriz con un 1 en la entrada  $ij$  y 0 en todas las demás.

En la sección anterior, vimos cómo a partir de una suma con cierta restricción de índices podíamos construir una gráfica de matrices con dicha suma asociada. De la misma manera, ahora podemos construir  $K$ -operaciones de gráfica que estén asociadas a una operación dada, para una gama amplia de operaciones. Por supuesto, el considerar  $K$ -operaciones de gráfica nos permitirá hablar en un mismo marco de operaciones que anteriormente se definían de forma aislada.

**Ejemplo 2.4.1.** *Aquí presentamos las gráficas asociadas a algunas operaciones conocidas. Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $N \times N$ .*

- *Identidad: Solo hay 4 1-operaciones de gráfica, una de ellas se comporta como la identidad.*

*Sea  $I$  la 1-operación con conjunto de vértices  $V = \{v_{in}, v_{out}\}$  y con una sola arista saliendo de  $v_{out}$  y terminando en  $v_{in}$ . Es claro de la fórmula (2.9) que  $Z_I(A) = A$ .*

- *Transpuesta : Sea  $I^t$  la 1-operación de gráfica que resulta de invertir la orientación de la única arista en  $I$ , entonces se tiene que  $Z_{I^t}(A) = A^t$ .*
- *Proyección sobre la diagonal: Sea  $\Delta$  la 1-operación de gráfica con un solo vértice, que es a la vez vértice de entrada y vértice de salida, y con una arista que conecta al vértice con sí mismo. Entonces,  $Z_\Delta(A)$  es la matriz que resulta de modificar a  $A$  poniendo ceros en todas las entradas fuera de la diagonal.*
- *Grado: Sea  $\delta$  la 1-operación de gráfica, con dos vértices, uno de ellos será vértice de entrada y de salida. La única arista de  $\delta$  irá del vértice que es entrada y salida al otro vértice. Entonces, si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica  $G$  de  $N$  vértices, entonces  $Z_\delta(A) = \text{diag}((\sum_{j=1}^N a_{ij})_{i=1}^N)$  es la matriz de grados de  $G$ , es decir, es la matriz diagonal que en la entrada  $ii$  tiene el grado del vértice  $i$ .*
- *Multiplicación: Como era de esperarse, cuando  $g$  es la 2-operación de gráfica con tres vértices  $\{v_{in}, u, v_{out}\}$ , y dos aristas  $E = \{e_1, e_2\}$ , con  $e_1$  yendo de  $u$  a  $v_{in}$  y  $e_2$  de  $v_{out}$  a  $u$ , entonces  $Z_g(A \otimes B) = AB$ .*

- Producto de Hadamard: Sea  $I \circ I$  la 2-operación con dos vértices  $V = \{v_{in}, v_{out}\}$  y dos aristas, ambas de  $v_{out}$  a  $v_{in}$ . Entonces  $Z_{I \circ I}(A \otimes B) = A \circ B$ , donde  $\circ$  denota el producto de Hadamard, también conocido como el producto entrada por entrada.

El conjugar por una matriz define un automorfismo en  $(M_N(\mathbb{C}), \cdot)$ , de manera explícita, si  $Q \in M_N(\mathbb{C})$  es una matriz invertible, entonces para cualesquiera  $A, B \in M_N(\mathbb{C})$  se cumple que

$$Q^{-1}(AB)Q = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}BQ).$$

Cuando se enriquece la estructura algebraica de  $M_N(\mathbb{C})$  con las operaciones en  $\mathcal{G}$  es natural que se pierda simetría, pues ahora se tienen operaciones que permiten discernir propiedades que eran indistinguibles antes. En el siguiente capítulo ahondaremos en este tema, por el momento notemos que conjugar por una matriz, en general, ya no es un automorfismo de  $(M_N(\mathbb{C}), \mathcal{G})$ , por ejemplo  $Q^{-1}(A \circ B)Q$  no necesariamente es igual a  $(Q^{-1}AQ) \circ (Q^{-1}BQ)$ . Sin embargo, esta propiedad se preserva para el caso en el que  $Q$  es una matriz de permutación.

**Lema 2.4.1.** *Sea  $g$  una  $K$ -operación, sean  $A_1, \dots, A_K \in M_N(\mathbb{C})$ , y sea  $U_N$  una matriz de permutación de  $N \times N$ . Entonces*

$$Z_g(U_N A_1 U_N^* \otimes \dots \otimes U_N A_K U_N^*) = U_N Z_g(A_1 \otimes \dots \otimes A_K) U_N^*.$$

*Demostración.* Sea  $\sigma$  la permutación del conjunto  $[N]$  asociada a la matriz  $U_N$ . Sabemos que dada una matriz  $A$  tendremos que  $U_N A U_N^*(i, j) = A(\sigma(i), \sigma(j))$ . Fijemos  $i$  y  $j$ . Para cada función  $k : V \rightarrow [N]$ , con  $k(v_{in}) = j$  y  $k(v_{out}) = i$  tenemos que

$$\prod_{e \in E} U_N A_e U_N^*(k(t(e)), k(s(e))) = \prod_{e \in E} A_e(\sigma(k(t(e))), \sigma(k(s(e)))).$$

Por lo tanto, el sumando asociado a la función  $k$  cuando se calcula  $Z_g(U_N A_1 U_N^* \otimes \dots \otimes U_N A_K U_N^*)(i, j)$ , será igual al sumando asociado a la función  $\sigma \circ k$  cuando se calcula  $Z_g(A_1 \otimes \dots \otimes A_K)(i, j)$ , entonces la entrada  $(i, j)$  de la primera matriz será igual a la entrada  $\sigma(i)\sigma(j)$  de la segunda. La igualdad se sigue.  $\square$

## 2.5 Cotas para sumas asociadas a gráficas de matrices

En esta sección unificaremos lo desarrollado en las Secciones 2.1 y 2.2 para obtener una cota para sumas de la forma de la expresión (2.3).

Sea  $\mathcal{G} = (G, (\mathcal{H}_v)_{v \in V}, (T_e)_{e \in E})$  un carcaj de entrada-salida y  $T_{\mathcal{G}}$  su transformación lineal asociada. Supongamos nuevamente que las dimensiones de los espacios en los vértices son finitas y sea  $N_v = \dim \mathcal{H}_v$ . Fijando bases en cada espacio, podemos tomar las matrices  $A_e$  correspondientes a cada  $T_e$  y pensar a  $\mathcal{G}$  también como una gráfica de matrices. Notemos, de (2.8), que los coeficientes de  $T_{\mathcal{G}}$  son similares a la suma total  $S(\mathcal{G})$ . Sin embargo, la suma  $S(\mathcal{G})$  corre sobre todas las elecciones de índices posibles para los vértices de  $G$ , mientras que los coeficientes de  $T_{\mathcal{G}}$  se pueden expresar como sumas en donde los valores de los índices asociados a los vértices en  $V_{\text{in}} \cup V_{\text{out}}$  son fijos, mientras que los índices de los vértices internos corren sobre todos los valores posibles. Entonces  $S(\mathcal{G})$  es la suma de los coeficientes de  $T_{\mathcal{G}}$ . Explícitamente, tenemos

$$S(\mathcal{G}) = \sum_{\substack{i: V_{\text{in}} \rightarrow \mathbb{N} \\ j: V_{\text{out}} \rightarrow \mathbb{N}}} \sum_{k: V \rightarrow \mathbb{N} \\ k|_{V_{\text{in}}} = i, k|_{V_{\text{out}}} = j} \prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}).$$

Notemos el lado derecho puede ser factorizado. Para cada vértice  $v$ , sea  $\xi^v := \sum_{i=1}^{N_v} \xi_i \in \mathcal{H}_v$ , entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$S(\mathcal{G}) = \left\langle \bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \xi^w, T_{\mathcal{G}} \left( \bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi^v \right) \right\rangle.$$

Una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, junto con la definición de norma de operador, nos da

$$S(\mathcal{G}) = \left\langle \bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \xi^w, T_{\mathcal{G}} \left( \bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi^v \right) \right\rangle \leq \left\| \bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi^v \right\| \left\| \bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \xi^w \right\| \|T_{\mathcal{G}}\|.$$

En la Sección 1.3. se introdujo el concepto de producto tensorial para espacios de Hilbert. De la definición es claro que si  $\phi \in \mathcal{H}_1$  y  $\psi \in \mathcal{H}_2$  son cualesquiera dos vectores, entonces  $\|\phi \otimes \psi\|_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \|\phi\|_{\mathcal{H}_1} \|\psi\|_{\mathcal{H}_2}$ . Más aún, se puede demostrar que si  $S$  y  $T$  son transformaciones lineales entre espacios de Hilbert, no necesariamente iguales, entonces  $\|S \otimes T\| = \|S\| \|T\|$ . De aquí que podamos expresar la norma de  $\bigotimes_{v \in V_{\text{in}}} \xi^v$  como producto de las normas de los  $\xi^v$  y de igual manera con  $\bigotimes_{w \in V_{\text{out}}} \xi^w$ , luego tenemos que



$\|\xi^v\| = \dim \mathcal{H}_v = N_v^{\frac{1}{2}}$ . También, dado que  $T_{\mathcal{G}} = T_r \circ L_{r-1} \circ \cdots \circ T_1$ , y que para todo  $1 \leq k \leq r$ ,  $T_k = \bigotimes_{e \in E_k} T_e$ , tenemos que  $\|T_k\| = \prod_{e \in E_k} \|T_e\|$ . Por otro lado, es un hecho conocido que dados dos operadores acotados,  $S$  y  $T$ , se tiene que  $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ . Con esto, aunado al hecho de que los  $L_k$  son cuasi-isometrías y por tanto tienen norma 1, podemos acotar a  $T_{\mathcal{G}}$  por  $\prod_{k=1}^r \|T_k\|$ . Juntando todo y usando que  $\|T_e\| = A_e$  obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.1.** *Sea  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  una gráfica de matrices proveniente de un carcaj de entrada-salida con espacios de dimensión finita asociados a los vértices. Entonces tenemos*

$$S(\mathcal{G}) \leq \left( \prod_{v \in V_{in} \cup V_{out}} N_v \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{e \in E} \|A_e\|,$$

donde  $N_v = \dim \mathcal{H}_v$  para todo  $v \in V$ . En el caso particular en que todos los espacio son de dimensión  $N$ , lo anterior se rescribe como

$$S(\mathcal{G}) \leq N^{\frac{1}{2}|V_{in} \cup V_{out}|} \prod_{e \in E} \|A_e\|.$$

El teorema anterior nos da, para cada suma con restricción de índices, el orden asintótico en términos de la dimensión de las matrices con el que podemos acotar a dicha suma. Es decir, el teorema anterior es precisamente el tipo de resultado que estábamos buscando.

Sin embargo, no todas las gráficas de matrices provienen de un carcaj de entrada-salida, o equivalentemente, hay restricciones sobre los índices que generan sumas con gráficas asociadas para las que no podemos aplicar el teorema anterior. En lo que sigue presentaremos un procedimiento para modificar cualquier gráfica de matrices en una que proviene de un carcaj de entrada-salida, de manera que la suma asociada quede invariante, así como el producto de las normas de las matrices en sus aristas. Esto permitirá aplicar el teorema anterior para cualquier gráfica de matrices, sin embargo esto no será suficiente, pues para obtener la cota sería necesario en cada caso, primero encontrar el carcaj de entrada-salida en el que quedará modificada la gráfica en cuestión, lo cual representaría un obstáculo para obtener un resultado general. Entonces, el último paso consistirá en encontrar características combinatorias de la gráfica de matrices que predigan el tipo de gráfica de entrada-salida que se obtendrá al final. Para esto primero introduciremos algunos términos.

**Definición 2.5.1.** Sea  $G$  una gráfica.

- **Árbol:** Si  $G$  es conexa y no tiene ciclos, diremos que  $G$  es árbol.
- **2-conexidad:** Si  $G$  es conexa, una arista de corte en  $G$  es una arista que cumple que al borrarla la gráfica resultante es desconexa. Si  $G$  no tiene aristas de corte diremos que  $G$  es 2-conexa. Una componente 2-conexa de una gráfica será una subgráfica 2-conexa que no está contenida en ninguna otra subgráfica 2-conexa.
- **Bosques y hojas:** Diremos que  $G$  es un bosque si es una unión disjunta de árboles. Diremos que un árbol es trivial si consiste únicamente de un vértice. En los árboles no triviales llamaremos hojas a los vértices que tengan grado 1. El único vértice en un árbol trivial también será llamado hoja trivial.

Dada una gráfica  $G$ , denotaremos por  $\mathcal{F}(G)$  a la gráfica que resulta de poner un vértice por cada componente 2-conexa de  $G$  y poner una arista no dirigida entre dos vértices de  $\mathcal{F}(G)$  si las respectivas componentes 2-conexas están conectadas por una arista de corte. Notemos que  $\mathcal{F}(G)$  no puede tener ciclos, de lo contrario si tomamos cualquier arista de corte asociada a una arista del ciclo, su eliminación no desconectaría a  $G$ , pues la modificación de  $\mathcal{F}(G)$  sigue siendo conexa y por lo tanto  $G$  es conexa. De aquí que  $\mathcal{F}(G)$  siempre es un bosque, al cual llamaremos bosque de componentes 2-conexas. Dada  $G$ , definimos  $\tau(G) = \frac{h_1}{2} + h_2$ , donde  $h_1$  es la cantidad de hojas no

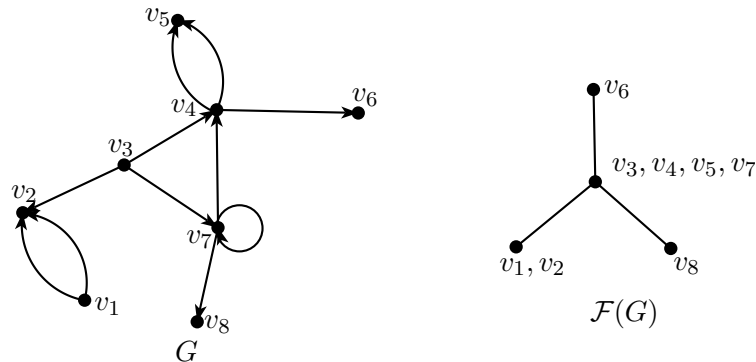


Figura 4: Un carcaj con su respectivo árbol de componentes 2-conexas.

triviales y  $h_2$  es la cantidad de hojas triviales de  $\mathcal{F}(G)$ . En lo que sigue nos enfocaremos a probar el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.2.** *Sea  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  una gráfica de matrices de  $N \times N$ , entonces*

$$|S(\mathcal{G})| \leq N^{\tau(G)} \prod_{e \in E} \|A_e\|.$$

*Además, la cota es justa en el sentido de que para toda gráfica dirigida  $G$ , existe una gráfica de matrices de  $N \times N$ , digamos  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$ , que cumple que  $\|A_e\| = 1$  para todo  $e \in E$  y*

$$S(\mathcal{G}) = N^{\tau(G)}.$$

Para la prueba de este resultado se necesitan varios elementos. Desarrollaremos el procedimiento para convertir cualquier gráfica de matrices en una gráfica de entrada-salida. Sea  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  un gráfica de matrices arbitraria. Primero notemos que por la definición de  $S(\mathcal{G})$ , podemos cambiar la orientación de las aristas, si la respectiva matriz se cambia por su transpuesta, dejando invariante esta suma. Esto último no altera el bosque de componentes 2-conexas  $\mathcal{F}(G)$ . Además, dado que para toda matriz cuadrada  $A$ , se cumple que  $\|A\| = \|A^t\|$ , esta modificación tampoco altera el producto de las normas de las matrices.

Recordemos que parte de la definición de carcaj de entrada-salida requiere que este no tenga ciclos dirigidos. Para “destruir” los ciclos dirigidos de  $G$  no bastará con cambiar las orientaciones de sus aristas, esto es evidente para el caso en el que hay un ciclo de longitud uno.

**Lema 2.5.1.** *Sea  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  una gráfica de matrices de  $N \times N$ . Supongamos que para una arista  $f \in E$ ,  $A_f = \text{Id}_N$ . Sea  $\hat{\mathcal{G}} = (\hat{G}, (A_e)_{e \in E-f})$  la gráfica de matrices obtenida al identificar los extremos de  $f$  en  $\mathcal{G}$  y borrar esta arista. Entonces*

$$S(\mathcal{G}) = S(\hat{\mathcal{G}}).$$

*Demostración.* Los sumandos de  $S(\mathcal{G})$  son de la forma  $\prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)})$ . Para que un sumando dado sea distinto de cero, se tiene que cumplir en particular que  $A_f(k_{t(f)}, k_{s(f)}) \neq 0$ , pero como  $A_f = \text{Id}_N$  entonces  $k_{t(f)} = k_{s(f)}$ , en cuyo caso  $A_f(k_{t(f)}, k_{s(f)}) = 1$  y entonces  $\prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) = \prod_{e \in E-f} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)})$ . Esta última observación nos permite construir una biyección entre los sumandos no nulos de  $S(\mathcal{G})$  y los de  $S(\hat{\mathcal{G}})$ .  $\square$

**Definición 2.5.2** (Modificación de una gráfica de matrices). *Decimos que  $\hat{\mathcal{G}} = (\hat{G}, (A_e)_{e \in \hat{E}})$  es una modificación de  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$ , si se puede llegar de la última iterando las siguientes operaciones:*

- *Cambiar la dirección de una arista  $e$  y sustituir  $A_e$  por  $A_e^t$ .*
- *“Dividir” un vértice  $v$  en  $v$  y  $v'$ . Agregar una arista de  $v$  a  $v'$  asociándole la matriz  $\text{Id}_N$ . Luego, redistribuir las aristas que entran a  $v$  entre los nuevos vértices  $v$  y  $v'$  al igual que las aristas que salen de  $v$ . En el caso en el que  $\{v\}$  sea una componente 2-conexa de la gráfica se agregará una segunda arista de  $v$  a  $v'$  con las matriz  $\text{Id}_N$ .*

Ya habíamos observado que la primera operación en la definición anterior no altera la suma asociada a la gráfica de matrices, ni el producto de las normas de las matrices, ni la estructura combinatoria del bosque de las componentes 2-conexas. Del Lema 2.5.1 es claro que la segunda operación no altera la suma asociada a la gráfica de matrices. Luego, como  $\|\text{Id}_N\| = 1$ , el producto de las normas de las matrices también permanece invariante después de la operación. El agregar una doble arista en el caso en el que  $\{v\}$  sea una componente 2-conexa de la gráfica nos garantiza que el bosque de dos componentes conexas también permanezca invariante. Por lo tanto, cualquier modificación de una gráfica mantiene invariante los tres parámetros que estamos considerando. Para probar el Teorema 2.5.2, resta demostrar que toda gráfica de matrices tiene una modificación de entrada-salida.

Para modificar  $\mathcal{G}$  de manera apropiada, consideremos  $\mathcal{F}(G)$ . Como cada componente conexa puede ser tratada de manera independiente podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\mathcal{F}(G)$  es conexa, es decir, podemos asumir que es un árbol. Si  $\mathcal{F}(G)$  no es trivial, tomemos una hoja cualquiera, digamos  $w$ , la cual llamaremos hoja de entrada y a todas las demás las llamaremos hojas de salida. Como  $\mathcal{F}(G)$  es un árbol, para cada vértice hay un único camino de  $w$  a dicho vértice. Este camino define una orientación en las aristas pertenecientes a él, más aún, esta orientación de aristas es consistente para cualquier vértice que se tome. De esta manera, poniendo las aristas de  $\mathcal{F}(G)$  en la orientación inducida por los caminos que salen de  $w$ , obtenemos un flujo de  $w$  a las hojas de salida de  $\mathcal{F}(G)$ . Los vértices de  $\mathcal{F}(G)$  representan componentes 2-conexas de  $G$  y sus aristas corresponden a las aristas de corte de  $G$ . El lema que probaremos a continuación nos permitirá modificar cada una de las componentes 2-conexas en una gráfica de entrada-salida que tenga un único vértice de entrada y un único vértice de salida. Después, el vértice de entrada de la modificación final será el vértice de entrada de la componente correspondiente a la hoja de entrada. Los vértices de salida de las componentes correspondientes a las hojas de salida serán los vértices de salida de la modificación final. Mientras que el vértice de entrada de cada componente correspondiente a un vértice interno

en  $\mathcal{F}(G)$  se colocará en la parte final de la arista de corte que llega a dicha componente y el vértice de salida en la parte inicial de la arista de corte que sale de dicha componente. Esto producirá una gráfica de matrices de entrada-salida que será una modificación de  $\mathcal{G}$ . En esta modificación la cardinalidad de  $V_{\text{in}} \cup V_{\text{out}}$  será igual a la cantidad de hojas de  $\mathcal{F}(G)$ , de donde una aplicación directa del Teorema 2.5.1 concluirá la prueba en el caso en el que  $\mathcal{F}(G)$  sea un árbol no trivial. Si  $\mathcal{F}(G)$  es un árbol trivial, el siguiente lema garantiza que  $\mathcal{G}$  puede ser modificado en una gráfica de entrada-salida con  $|V_{\text{in}} \cup V_{\text{out}}| = 2$ , nuevamente una aplicación directa del Teorema 2.5.1 concluye la prueba.

**Lema 2.5.2.** *Sea  $\mathcal{G} = (G, (A_e)_{e \in E})$  una gráfica de matrices, con  $G$  2-conexa. Sean  $v$  y  $w$  cualesquiera dos vértices de  $G$ . Entonces existe una modificación  $\hat{\mathcal{G}} = (\hat{G}, (A_e)_{e \in E})$  que cumple que  $\hat{G}$  es una gráfica de entrada-salida, con  $v$  su único vértice de entrada y  $w$  su único vértice de salida.*

*Demostración.* Construiremos recursivamente gráficas de entrada-salida,  $G_0, G_1, \dots, G_p$ , todas ellas modificaciones de una subgráfica de  $G$ , de manera que  $G_p$  será la gráfica asociada a la modificación final buscada. Ignorando la orientación de las aristas de  $G$ , tomemos un camino de  $v$  a  $w$ . Definamos  $G_0$  como la gráfica orientada que representa dicho camino de  $v$  a  $w$ , con la orientación de aristas elegida de manera que el camino sea un camino orientado, en donde  $v$  será el vértice de entrada y  $w$  el vértice de salida. Ahora, supongamos que  $G_k$  ya ha sido definida, por construcción  $G_k$  es una modificación de una subgráfica de  $G$ , si esta subgráfica es todo  $G$  entonces habremos terminado. De lo contrario, hay un vértice en  $G$  y  $G_k$ , digamos  $x$ , que es adyacente a una arista de  $G$  que no está en  $G_k$ , sea  $e$  esta arista y  $z$  el otro de sus vértices. Como  $G$  es 2-conexa,  $e$  no es una arista de corte, por lo que si la eliminamos la gráfica se mantiene conexa, de donde hay un camino (no necesariamente orientado) de  $z$  a algún vértice de  $G$ , digamos  $y$ .

Si  $y \neq x$ , entonces tomemos  $G_{k+1}$  será la gráfica resultante de agregarle a  $G_k$  la arista  $e$  y el camino de  $z$  a  $y$ . Si, dentro de  $G_k$  hay un camino dirigido de  $x$  a  $y$ , orientaremos el nuevo camino de  $x$  a  $y$  en esta misma dirección. En cambio, si en  $G_k$  hay un camino de  $y$  a  $x$ , orientaremos el nuevo camino en esta dirección. Notemos que solo una de las anteriores puede pasar, ya que  $G_k$  es una gráfica de entrada-salida y por ende no tiene ciclos dirigidos. En el caso en el que no haya ningún camino orientado de  $x$  a  $y$  ni viceversa, orientemos el nuevo camino en cualquiera de las dos direcciones posibles.

En el caso en el que  $x = y$ . Separemos a  $x$  en dos vértices,  $x$  y  $x'$ , poniendo una arista de  $x$  a  $x'$ , dejando todas las aristas en su lugar todas

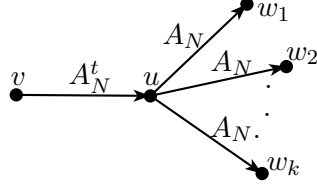
las aristas que entran a  $x$  y poniendo en  $x'$  todas las aristas que salían de  $x$ . Después, orientemos el nuevo camino de  $x$  a  $x'$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que el nuevo camino va de  $x$  a  $y$ . Es claro que, bajo una elección apropiada de matrices lo anterior garantiza que  $\mathcal{G}_{k+1}$  es una modificación de una subgráfica de  $G$  que ahora ya contiene a la arista  $e$ . Por construcción,  $G_{k+1}$  no tiene ciclos dirigidos. Luego, si  $u$  es un nuevo vértice en  $G_{k+1}$ , veremos que hay un camino del vértice de entrada al vértice de salida que pasa por  $u$ . Como  $G_k$  era una gráfica de entrada-salida, hay un camino dirigido de  $v$  a  $w$  que pasa por  $x$ , en particular hay un camino dirigido de  $v$  a  $x$ , de la misma manera hay un camino dirigido de  $y$  a  $w$ , luego, el nuevo camino que va de  $x$  a  $y$  pasa por  $u$ , componiendo estos tres caminos obtenemos un camino que va de  $v$  a  $w$  y pasa  $u$ . Con esto concluimos que la gráfica  $G_{k+1}$  es de entrada-salida.

Como podemos continuar el proceso indefinidamente, en cada paso garantizando que una arista nueva de  $G$  es considerada en la modificación correspondiente y  $G$  es finita, el proceso terminará en una cantidad finita de pasos.  $\square$

El lema anterior concluye la demostración de la cota. Para demostrar que la cota es óptima, recordemos que demostramos que cualquier gráfica de matrices puede ser convertida en una unión disjunta de gráficas conexas de entrada-salida, digamos  $G_1, \dots, G_r$ , cada una con un solo vértice de entrada, por lo que basta analizar este caso. Por el Lema 2.3.1, la suma  $S(\mathcal{G})$  es igual al producto de las  $S(G_i)$ , y como  $\tau(G) = \tau(G_1) + \dots + \tau(G_r)$  nos bastará con analizar el caso conexo. Supongamos que  $G$  es conexo, si en cada arista que no sea de corte ponemos la identidad, por el Lema 2.5.1, evaluar en la gráfica de matrices es equivalente a evaluar en  $\mathcal{F}(G)$ , con cualquier orientación de sus aristas. Para cada componente conexo no trivial en  $G$ , tomemos la orientación que genera un flujo del vértice de entrada al vértice de salida. Por lo tanto, bastará demostrar la cota en cada componente conexo. Notemos que una gráfica de matrices en donde todas las matrices son  $\text{Id}_N$  cumple que su suma asociada es  $N$ , por lo tanto las hojas triviales correspondientes aportan un término  $N$ . Para el caso en el que hay un árbol no trivial, pongamos nuevamente  $\text{Id}_N$  en todas las aristas internas, es decir en las aristas que no sean adyacentes a una hoja. Esto, nuevamente por el Lema 2.5.1 reducirá la gráfica a una *escoba* (Figura 5), es decir, la gráfica tendrá el vértice de entrada  $v$ , un solo vértice interno  $u$  y los vértices de salida  $w_1, \dots, w_k$ . Habrá una arista de  $v$  a  $u$  y una arista de  $u$  a cada  $w_i$ .

Sea  $A_N$  la matriz con entradas  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  en la primera columna y cero en

Figura 5:  $k$ -escoba de matrices.

las demás. La norma de esta matriz es la norma del vector  $\frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, \dots, 1)$ , entonces  $\|A_N\| = 1$ . Sea  $v$  el vértice de entrada de la escoba,  $u$  el interno y  $w_1, \dots, w_k$  los de salida. Como en la Figura 5, pongamos  $A_N^t$  en la arista de  $v$  a  $u$ , y la matriz  $A_N$  en cada una de las otras aristas. Sea  $\mathcal{E}_k$  la gráfica de matrices resultante. Sea  $E$  el conjunto de aristas de  $\mathcal{E}_k$ . Para calcular  $S(\mathcal{E}_k)$ , notemos que para que  $\prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) \neq 0$ , es necesario que  $k(t(e)) = 1$  si  $e = (v, u)$  y  $k(s(e)) = 1$  si  $e$  es cualquier otra arista. Entonces, para que el producto asociado a  $k$  no se anule podemos escoger libremente los valores  $k(v), k(w_1), \dots, k(w_k)$ . Por lo que hay  $N^{k+1}$  funciones cuyo producto asociado no se anula. Por otra parte, si  $\prod_{e \in E} A_e(k_{t(e)}, k_{s(e)}) \neq 0$  entonces es igual a  $N^{-\frac{k+1}{2}}$ , de donde

$$S(\mathcal{E}_k) = N^{k+1} N^{-\frac{k+1}{2}} = N^{\frac{k+1}{2}} = N^{\tau(G)} = N^{\tau(G)} \prod_{e \in E} \|A_e\|,$$

con lo cual se concluye la demostración del Teorema 2.5.2.





## Capítulo 3

# Fundamentos de espacios de tráfico

En el primer capítulo motivamos y fundamentamos el método de momentos y presentamos algunas aplicaciones de este dentro de la Teoría de Probabilidad Libre y Matrices Aleatorias. En el caso de espacios de probabilidad no conmutativa, ya vimos que la información proveída por los momentos es suficiente para definir una distribución analítica en el caso en el que las variables aleatorias no conmutativas son normales. También, en el estudio de matrices aleatorias, para varios modelos, el método de los momentos es suficiente para determinar la distribución espectral asintótica de estos. Sin embargo, para las variables aleatorias no conmutativas que no son normales no se tiene aún un método de estudio de su distribución que en general sea suficientemente descriptivo. De la misma manera, para varios modelos de matrices, el método de los momentos no basta, además de que en otros casos, la distribución espectral límite de modelos distintos resulta ser la misma, lo cual no permite discernir, desde la Teoría de Probabilidad Libre usual, a algunas matrices grandes provenientes de distintos modelos.

La Teoría de Tráfico toma las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior y las abstrae para darles un significado general dentro espacios de probabilidad no conmutativos. Ahora, para describir la distribución de un elemento, ya no nos limitaremos a estudiar sus momentos, sino que ahora por cada gráfica dirigida tendremos una noción de momento generalizado, logrando con esto interpolar la noción de distribución dentro de la Teoría de Probabilidad Libre. Aquí presentamos las bases de esta teoría y en los dos capítulos subsecuentes algunos de los logros obtenidos por ella.

## 3.1 Gráficas como operaciones

### 3.1.1 Estructura de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ -álgebras

De la sección anterior, recordemos la noción de  $K$ -operación de gráfica.

**Definición 3.1.1** ( $K$ -operación de gráfica). *Dado un entero no negativo  $K$ , una  $K$ -operación de gráfica es una gráfica dirigida, conexa, con  $K$  aristas numeradas y dos vértices distinguidos  $v_{in}$  y  $v_{out}$ . Al conjunto de todas las  $K$ -operaciones de gráfica, con  $K$  corriendo sobre todos los enteros no negativos, lo denotaremos por  $\mathcal{G}$ . A los elementos de este conjunto los llamaremos operaciones de gráfica.*

Sea  $g$  una  $K$ -operación de gráfica. Pensemos a  $g$  como un carcaj y tomemos una representación de este, es decir, pongamos espacios vectoriales en sus vértices y transformaciones lineales en sus aristas. Entonces, la  $K$ -operación de gráfica puede ser pensada como una composición de dichas transformaciones lineales que resulta en una transformación lineal que va del espacio en  $v_{in}$  al espacio en  $v_{out}$ , digamos  $T_g : \mathcal{H}_{v_{in}} \rightarrow \mathcal{H}_{v_{out}}$ . Por lo tanto, si tenemos dos operaciones de gráfica, digamos  $g_1$  con vértices distinguidos  $v_{in}^1$  y  $v_{out}^1$ , y  $g_2$  con  $v_{in}^2$  y  $v_{out}^2$ , es natural definir su concatenación  $g_1 g_2$ , como la operación de gráfica resultante de identificar  $v_{out}^1$  con  $v_{in}^2$ , tomando a  $v_{in}^1$  como el vértice de entrada de la nueva operación de gráfica y  $v_{out}^2$  como el de salida. De esta manera  $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} \circ T_{g_1}$ . Más en general, dada una operación de gráfica, podemos sustituir en cualquiera de sus aristas otra operación de gráfica, poniendo su vértice de entrada en el comienzo de la arista y su salida en el final de su arista como se muestra en la Figura 6.

**Definición 3.1.2** (Composición de operaciones de gráfica). *Sea  $K$  un entero positivo y sean  $L_1, \dots, L_K$  enteros no negativos. Sea  $g$  una  $K$ -operación de gráfica. Para  $i = 1, \dots, K$ , sea  $g_i$  una  $L_i$ -operación de gráfica. Definimos  $g(g_1, \dots, g_K)$  como la  $L_1 + L_2 + \dots + L_K$ -operación de gráfica que se obtiene al sustituir cada  $g_i$  en la arista  $i$  de  $g$  como se describió anteriormente. Esta operación será llamada composición de operaciones de gráficas.*

La composición de operaciones de gráfica depende de la enumeración de las aristas de la  $K$ -operación de gráfica. El grupo simétrico  $S_K$ , actúa sobre  $\mathcal{G}_K$ , el conjunto de  $K$ -operaciones de gráfica, donde cada elemento  $\sigma \in S_K$  manda a cada  $K$ -operación de gráfica a la operación que resulta de permutar con  $\sigma$  la numeración de sus aristas. Por ejemplo, si  $g$  es como en la definición y  $e_1, \dots, e_K$  son las aristas de  $g$  escritas en orden, entonces  $e_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(K)}$  será el orden de las aristas de  $g_\sigma := \sigma(g)$ .

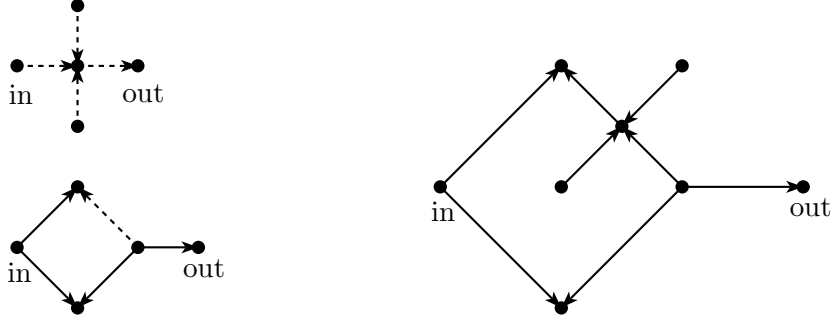


Figura 6: En la izquierda se muestra la operación de gráfica (con aristas punteadas) que se sustituye en la arista punteada de la gráfica debajo de ella. Esto produce la operación de gráfica de la derecha.

Recordemos del capítulo anterior que  $I$  es la operación de gráfica cuyo conjunto de vértices es  $\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$  y que tiene una única arista que va de  $v_{\text{in}}$  a  $v_{\text{out}}$ . En el caso en el que  $\mathcal{G}$  actúa sobre el espacio de matrices,  $I$  actúa como la función identidad. Cuando, dentro de  $\mathcal{G}$ , se considera la composición de una operación de gráfica con  $I$ , esta última también actúa como la identidad. Concretamente,  $\mathcal{G}$  con la composición tiene una estructura algebraica que satisface la siguientes propiedades:

- *I es la identidad:*  $g(I, \dots, I) = g = I(g)$ .
- *Asociatividad en la composición:*

$$g(g_1(g_{1,1}, \dots, g_{1,k_1}), \dots, g_K(g_{K,1}, \dots, g_{K,k_K})) = g(g_1, \dots, g_K)(g_{1,1}, g_{1,k_1}, \dots, g_{K,1}, \dots, g_{K,k_K}).$$

- *Equivarianza:* Si  $g$  es una  $K$ -operación, dada una permutación  $\sigma \in S_K$ , tenemos

$$g_\sigma(g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(K)}) = g(g_1, \dots, g_K).$$

También, si  $\sigma_1, \dots, \sigma_K$  son permutaciones, con  $\sigma_i \in S_{k_i}$  entonces

$$g((g_1)_{\sigma_1}, (g_2)_{\sigma_2}, \dots, (g_K)_{\sigma_K}) = g(g_1, \dots, g_K)_{\sigma_1 \times \dots \times \sigma_K}.$$

En el capítulo anterior definimos de manera explícita una acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $M_N(\mathbb{C})$ . La idea fundamental en la Teoría de Tráficos es la de considerar la acción de  $\mathcal{G}$ , de una manera más abstracta, sobre cualquier espacio

vectorial  $\mathcal{A}$  y con esto dotar al espacio con una estructura de álgebra unitaria en donde además habrá otras operaciones que permitan dar una mejor descripción de sus variables aleatorias no conmutativas.

**Definición 3.1.3** (Acción de  $\mathcal{G}$  sobre un espacio vectorial). *Una acción de  $\mathcal{G}$  sobre un espacio vectorial complejo  $\mathcal{A}$  está dada por una familia de aplicaciones lineales  $(Z_g)_{g \in \mathcal{G}}$ , con  $Z_g : \mathcal{A}^{\otimes K} \rightarrow \mathcal{A}$  cuando  $g \in \mathcal{G}_K$ , que satisfacen*

- $Z_I = Id_{\mathcal{A}}$ .
- $Z_g(Z_{g_1} \otimes \cdots \otimes Z_{g_K}) = Z_{g(g_1, \dots, g_K)}$ .
- $Z_g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_K) = Z_{g_\sigma}(a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(K)})$ .

Llamemos  $Z_0$  a la 0-operación de gráfica con un único vértice. Por convención  $Z_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$  y definimos  $1_{\mathcal{A}} := Z_0(1)$ .

La acción de  $\mathcal{G}$  induce una estructura algebraica en  $\mathcal{A}$ . Particularmente, si  $g$  es la operación de gráfica *multiplicación*, es decir la gráfica con tres vértices  $\{v_{\text{in}}, u, v_{\text{out}}\}$  y una arista yendo de  $v_{\text{in}}$  a  $u$  y otra de  $u$  a  $v_{\text{out}}$ , entonces esta le da a  $\mathcal{A}$  una estructura de álgebra compleja asociativa definida por el producto como  $ab := Z_g(a \otimes b)$ .

Si  $\mathcal{G}$  actúa sobre  $\mathcal{A}$ , diremos que  $\mathcal{A}$  es una  $\mathcal{G}$ -álgebra. Llamaremos  $\mathcal{G}$ -subálgebra a cualquier subespacio de  $\mathcal{A}$  invariante bajo la acción de  $\mathcal{G}$ . Dada otra álgebra  $\mathcal{B}$ , diremos que  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es un  $\mathcal{G}$ -morfismo si  $f(Z_g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_K)) = Z_g(f(a_1) \otimes \cdots \otimes f(a_K))$ . Como se mencionó al final de la Sección 2.4., la noción de  $\mathcal{G}$ -álgebra, en varios casos, es estrictamente más fuerte que la noción clásica de morfismo de álgebra.

Cuando se trabaje con álgebras-\* será también útil tener una noción de adjunción en  $\mathcal{G}$ . Explícitamente, si  $g \in \mathcal{G}_K$ , entonces  $g^*$  es la  $K$ -operación de gráfica obtenida al cambiar la orientación de las aristas de  $g$  e intercambiar el vértice de entrada con el vértice de salida. Por ejemplo  $I^* = I$ .

Por último, es importante notar que  $1_{\mathcal{A}}$  en efecto se comporta como la unidad. Sea  $g$  una  $K$ -operación de gráfica con elementos de  $\mathcal{A}$  sustituidos en sus aristas, de manera que en la arista  $i$  se encuentra  $1_{\mathcal{A}}$ . Por la asociatividad de la composición de operaciones de gráfica, y dado que  $1_{\mathcal{A}} = Z_0(1)$ , es lo mismo evaluar  $g$  en las variables que están en sus aristas, que sustituir la 0-gráfica en la arista  $i$ , y posteriormente evaluar. Esto se resume en la siguiente observación, la cual es una generalización del Lema 2.5.1.

**Observación 3.1.1.** *Sea  $g$  una  $K$ -operación de gráfica y  $\hat{g}$  la  $(K - 1)$ -operación de gráfica obtenida al identificar los extremos de la arista  $i$  en  $g$  y después borrar dicha arista. Si  $a_1, \dots, a_K \in \mathcal{A}$  y  $a_i = 1_{\mathcal{A}}$ , entonces*

$$Z_g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_K) = Z_{\hat{g}}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_K),$$

en donde  $a_i$  se omite en el producto de la derecha.

Aunque la noción de acción parece ser poco restrictiva, es posible hacer inferencias sobre la estructura algebraica de una  $\mathcal{G}$ -álgebra a partir de la información proveída por la acción de ciertos elementos en  $\mathcal{G}$ . Por ejemplo, tomemos  $\mathcal{A}$  una  $\mathcal{G}$ -álgebra, y sea  $\mathcal{A}_0 := \Delta(\mathcal{A})$ , donde  $\Delta$  es la 1-operación de gráfica con un único vértice que es de entrada y salida a la vez.

Recordemos que si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces  $\Delta(A)$  es la matriz que resulta de poner ceros en todas las entradas fuera de la diagonal de  $A$ , por lo que  $\Delta(M_N(\mathbb{C})) = D_N(\mathbb{C})$ , donde  $D_N(\mathbb{C})$  es la subálgebra de matrices diagonales. Más en general, si  $I^t$  es la 1-operación de gráfica en la cual su única arista va de  $v_{\text{out}}$  a  $v_{\text{in}}$ , dado que  $\Delta = I^t(\Delta)$ , tenemos que  $\Delta(a) = I^t(\Delta(a))$ . En otras palabras,  $\mathcal{A}_0$  es invariante bajo transposición. Por esta razón, en general, nos referiremos a los elementos de  $\mathcal{A}_0$  como elementos diagonales.

Notemos también que  $Z_{\Delta}(\Delta) = Z_{\Delta}$  y por lo tanto  $\Delta$  actúa como la identidad sobre  $\mathcal{A}_0$ , de aquí concluimos que  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una proyección. Más aún, si  $g$  es la 2-operación asociada a la multiplicación e  $I \circ I$  es la 2-operación de gráfica asociada al producto de Hadamard, definida en el capítulo anterior, entonces tenemos que  $\Delta(I \circ I) = g(\Delta, \Delta)$ . Ahora, sean  $\Delta(a), \Delta(b) \in \mathcal{A}$ , la simetría de  $g(\Delta, \Delta)$  junto con la propiedad de equivarianza nos da que  $g(\Delta, \Delta)(a, b) = g(\Delta, \Delta)(b, a)$  y por lo mencionado anteriormente tenemos que

$$g(\Delta(a), \Delta(b)) = g(\Delta, \Delta)(a, b) = g(\Delta, \Delta)(b, a) = g(\Delta(b), \Delta(a)).$$

Por lo tanto  $\mathcal{A}_0$  es una subálgebra abeliana.

### 3.1.2 Operaciones de gráficas como momentos generalizados

Recordemos del Capítulo 1, que dado un espacio de probabilidad-\*  $(\mathcal{A}, \phi)$ , la distribución de una variable aleatoria no conmutativa  $a \in \mathcal{A}$ , está dada por el conjunto de valores

$$\phi(a^{\varepsilon_1} a^{\varepsilon_2} \cdots a^{\varepsilon_n}),$$

donde  $\varepsilon_i \in \{1, *\}$  y  $n$  es cualquier entero positivo. En el caso en el que  $\mathcal{A} = M_N(\mathbb{C})$ , la distribución espectral de una matriz  $A \in \mathcal{A}$  queda determinada por sus momentos mixtos

$$\text{tr}(A^{\varepsilon_1} A^{\varepsilon_2} \cdots A^{\varepsilon_n}).$$

En espacios de tráfico, además de considerar los momentos mixtos de una variable aleatoria, también se considerarán los valores que toma la traza al evaluar la variable aleatoria en distintas operaciones de gráficas. Para el caso particular de matrices, la distribución en tráfico de una matriz  $A$  estará dada por el conjunto de valores de la forma

$$\text{tr}(Z_g(A^{\varepsilon_1} \otimes A^{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes A^{\varepsilon_n})),$$

donde  $\varepsilon_i \in \{1, *\}$ , y  $g$  es cualquier  $n$ -operación de gráfica. Denotemos por  $\hat{g} := \Delta(g)$ , es decir, a la gráfica que resulta de identificar  $v_{\text{in}}$  con  $v_{\text{out}}$  en  $g$ . Por la asociatividad de la composición, evaluar a un conjunto de matrices en  $\hat{g} = (\hat{V}, \hat{E})$  es equivalente a evaluarlas en  $g$  y luego poner cero en todas las entradas fuera de la diagonal en la matriz resultante. Entonces

$$\text{tr}(Z_g(A^{\varepsilon_1} \otimes A^{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes A^{\varepsilon_n})) = \text{tr}(Z_{\hat{g}}(A^{\varepsilon_1} \otimes A^{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes A^{\varepsilon_n})).$$

Notemos que la evaluación en  $\hat{g}$  ya no depende de dónde estén los vértice de entrada y salida ya que

$$\text{tr}(Z_{\hat{g}}(A^{\varepsilon_1} \otimes A^{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes A^{\varepsilon_n})) = \frac{1}{N} \sum_{k: \hat{V} \rightarrow [N]} \prod_{e \in \hat{E}} A(k(t(e)), k(s(e))).$$

Entonces, si otra operación de gráfica  $g'$  cumple que  $\hat{g}' \cong \hat{g}$ , donde el isomorfismo se toma ignorando el lugar del vértice de entrada y salida, obtendremos el mismo resultado al sacar la traza de la matriz resultante al evaluar un mismo conjunto de matrices en ambas operaciones de gráficas. Por lo tanto, la gráfica  $\hat{g}$  contiene la información de varias gráficas. Esto motiva las siguientes definiciones.

**Definición 3.1.4** (Momento de gráfica). *Diremos que  $T$  es un  $K$ -momento de gráfica si  $T$  es una gráfica dirigida conexa con  $K$  aristas numeradas. El conjunto de  $K$ -momentos de gráfica será denotado por  $\mathcal{T}_K$ , y denotaremos por  $\mathcal{T} = \cup_{K=1}^{\infty} \mathcal{T}_K$ .*

**Definición 3.1.5** (Funcional de tráfico en matrices). *Sea  $T = (V, E)$  un  $K$ -momento y  $A_1, \dots, A_K$  matrices de  $N \times N$ , definimos el funcional de*

tráfico  $\tau$  como

$$\tau[T(A_1, \dots, A_N)] := \frac{1}{N} \sum_{k:V \rightarrow [N]} \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))),$$

donde la matriz  $A_i$  será colocada en la  $i$ -ésima arista de  $T$ . Si las matrices son aleatorias entonces

$$\tau[T(A_1, \dots, A_K)] := \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \sum_{k:V \rightarrow [N]} \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \right].$$

En el caso de matrices aleatorias hay una descomposición de  $\tau$  que resulta sumamente útil.

**Definición 3.1.6** (Funcional inyectivo en matrices). *Sea  $T = (V, E)$  un  $K$ -momento y  $A_1, \dots, A_K$  matrices aleatorias de  $N \times N$ , definimos el funcional de tráfico  $\tau^0$  como*

$$\tau^0[T(A_1, \dots, A_K)] := \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k:V \rightarrow [N] \\ k \text{ es inyectiva}}} \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \right].$$

Sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica y  $k : V \rightarrow [N]$ . Recordemos del Capítulo 1 que el kernel de  $k$ , denotado por  $\ker(k)$ , es la partición de  $V$  en donde dos vértices  $u, v \in V$  están en el mismo bloque si  $k(u) = k(v)$ . Entonces, si denotamos por  $T^{\ker(k)}$  al momento de gráfica que resulta de identificar los vértices en  $V$  que están en un mismo bloque de  $\ker(k)$ , podemos pensar a la función  $k$  como una función inyectiva en  $T^{\ker(k)}$ . En general para toda  $\pi \in \mathcal{P}(V)$ , donde  $\mathcal{P}(V)$  es el conjunto de particiones del conjunto  $V$ , denotaremos por  $T^\pi = (V^\pi, E)$  al cociente de gráfica que resulta de identificar a los vértices de  $T$  que están en un mismo bloque de  $\pi$ . Entonces, para todo  $\pi$ , podemos pensar a las funciones inyectivas  $k : V^\pi \rightarrow [N]$  como funciones en los vértices de  $T$ . Es fácil ver que esta asociación es biyectiva, dándonos el siguiente resultado.

**Lema 3.1.1** (Descomposición inyectiva del funcional de tráfico). *Sea  $T = (V, E)$  un  $K$ -momento de gráfica y  $A_1, \dots, A_K$  matrices aleatorias. Entonces*

$$\tau[T(A_1, \dots, A_K)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \tau^0[T^\pi(A_1, \dots, A_K)].$$

En algunas ocasiones, cuando se estudie la distribución en tráfico de una familia de matrices  $\mathbf{A} = (A_j)_{j \in J}$ , y ya haya una asignación de algunas matrices en  $\mathbf{A}$  a las aristas de un momento de gráfica, por simplicidad denotaremos a la evaluación en el funcional como  $\tau[T(\mathbf{A})]$ . En el caso particular en el que se considere la distribución en tráfico de una sola matriz,  $\tau[T(A)]$  denotará el valor del funcional evaluado en  $T$  cuando la matriz  $A$  se pone en todas sus aristas.

En el siguiente capítulo presentaremos varias aplicaciones de la teoría de tráfico al estudio de matrices aleatorias.

## 3.2 Espacios algebraicos de tráfico

En su tesis doctoral, en el 2011, Male introdujo el concepto de funcional de tráfico para cualquier espacio de probabilidad no conmutativo y lo dio a conocer en [19]. Posteriormente, en el 2016, Male junto con Guillaume Cèbron y Antoine Dahlqvist modificaron ligeramente el concepto en lo que llamaron espacios algebraicos de tráfico [6].

**Definición 3.2.1** (Espacio algebraico de tráfico). *Un espacio algebraico de tráfico está dado por un espacio vectorial  $\mathcal{A}$  y un funcional lineal  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  cumpliendo:*

- *Existe una acción de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{A}$ , es decir  $\mathcal{A}$  es una  $\mathcal{G}$ -álgebra.*
- $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ .
- $\Phi$  es independiente de la entrada y la salida, es decir, para todo  $g \in \mathcal{G}$  se cumple que  $\Phi \circ Z_g = \Phi \circ Z_{\Delta(g)}$ .

*Un homomorfismo entre espacios algebraicos de tráfico  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con respectivos funcionales  $\Phi$  y  $\Psi$  es un  $\mathcal{G}$ -morfismo  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  que cumple que  $\Phi = \Psi \circ f$ .*

La condición de que el funcional sea independiente de la entrada y la salida implica que  $\Phi$  es un funcional tracial sobre el álgebra que se obtiene al dotar a  $\mathcal{A}$  con el producto definido por la operación de gráfica *multiplicación*. Para hablar de la distribución de los elementos de  $\mathcal{A}$ , así como de una noción de positividad para  $\Phi$ , es conveniente introducir una noción que generaliza las nociones de operación de gráfica y de momento de gráfica.

Recordemos del capítulo anterior que es posible considerar composiciones “ramificadas” de operadores que van del producto tensorial de un conjunto de espacios al producto tensorial de otro. Para esto, Mingo y Speicher,



en [20], consideraron carcajes con varios vértices de entrada y varios vértices de salida. Las operaciones de  $n$ -gráfica en cierto sentido rescatan esta estructura, pero sin hacer distinción entre los vértices de entrada y los vértices de salida. Para esto, recordemos que dados dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , sobre un mismo campo, hay una identificación natural  $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$ , donde el lado derecho denota al espacio de transformaciones lineales de  $V$  a  $W$ . En el caso en el que  $V$  es dimensión finita  $V \cong V^*$ , de donde  $V \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$ . En particular, dados  $N, n$  y  $m$  enteros positivos, tenemos que  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n+m} \cong \text{Hom}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n}, (\mathbb{C}^N)^{\otimes m})$ . Así, podemos pasar de una estructura con  $n$  vértices de entrada y  $m$  vértices de salida, por ejemplo un elemento en  $\text{Hom}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n}, (\mathbb{C}^N)^{\otimes m})$ , a una estructura con  $n + m$  vértices distinguidos, que en este caso puede ser pensado como un elemento en  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n+m}$ .

**Definición 3.2.2** (Operaciones de  $n$ -gráfica). *Los momentos de gráfica definidos anteriormente corresponden a las operaciones de 0-gráficas. Luego, si  $n \geq 1$ , una operación de  $n$ -gráfica es un momento de gráfica con  $n$  vértices distinguidos y ordenados, digamos  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Al conjunto de operaciones de  $n$ -gráfica lo denotaremos por  $\mathcal{G}^{(n)}$ .*

*En el caso en el que  $n = 2$ ,  $\mathcal{G}^{(2)}$  corresponde al conjunto de operaciones de gráfica definido anteriormente.*

Veamos cómo funcionan estos objetos en el caso particular de matrices aleatorias.

**Ejemplo 3.2.1.** *Sea  $\mathcal{A} = M_N(\mathbb{C}) \otimes L^{\infty-}(\Omega, S, P)$  el álgebra de matrices aleatorias cuyas entradas tienen todos sus momentos. Sea  $t = (V, E, \mathbf{v})$  una operación de  $n$ -gráfica con las matrices aleatorias  $(A_e)_{e \in E}$  colocadas en sus aristas. Entonces definimos la evaluación en  $t$ , como el tensor aleatorio  $T(t) \in (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ , como sigue. Si  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  entonces*

$$T(t) = \sum_{k: V \rightarrow [N]} \left( \prod_{e \in E} A(k(t(e)), k(s(e))) \right) \xi_{k(v_1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{k(v_n)}.$$

*En efecto, si  $n = 2$ , entonces  $T(t)$  corresponde a evaluar la operación de gráfica  $Z_t$  en las matrices correspondientes.*

### 3.2.1 Distribución de tráfico

Tomemos un espacio algebraico de tráfico  $(\mathcal{A}, \Phi)$ , la condición de que  $\Phi$  es independiente de las entradas y salidas, nos permitirá definir para cada

$K$ -momento de gráfica  $T$ , un funcional multilineal  $\tau[T(\cdot)] : \mathcal{A}^{\otimes K} \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por

$$\tau[T(\cdot)] := \Phi(Z_{\hat{g}}(\cdot)),$$

donde  $g$  es cualquier  $K$ -operación de gráfica que cumple que si se identifica su entrada con su salida, es decir al considerar  $\hat{g}$ , tenemos que  $\hat{g} \cong T$ . Alternativamente, si denotamos por  $\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathcal{A} \rangle$  al conjunto de momentos de gráficas con elementos de  $\mathcal{A}$  sustituidos en sus aristas, y por  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathcal{A} \rangle$  a sus combinaciones lineales formales con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , podemos pensar a  $\tau$ , extendiendo por linealidad, como el funcional

$$\tau : \mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathcal{A} \rangle \rightarrow \mathbb{C}.$$

El funcional  $\tau$  caracteriza completamente a  $\Phi$ , pues  $\tau[\Delta(a)] = \Phi(a)$ , entonces este es una extensión de  $\Phi$  que permite extraer información sobre los momentos de gráficas de variables aleatorias no conmutativas que anteriormente era imposible detectar. Podemos pensar a  $\tau$  como una interpolación de  $\Phi$ . Por esta razón llamaremos a  $\tau$  el funcional de tráfico y a partir de este definiremos la distribución en tráfico de nuestras variables aleatorias no conmutativas.

**Definición 3.2.3** (Distribución en tráfico). *Sea  $(\mathcal{A}, \Phi)$  un espacio algebraico de tráfico. Al funcional  $\tau : \mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathcal{A} \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  lo llamaremos el funcional de tráfico y a la información proveída por este, es decir a la familia de aplicaciones de momentos de gráfica, la llamaremos distribución en tráfico. Por ejemplo, si  $a \in \mathcal{A}$ , entonces su distribución en tráfico es*

$$\{(T, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K) \mapsto \tau[T(a^{\varepsilon_1}, \dots, a^{\varepsilon_K})] : T \in \mathcal{G}^{(0)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K \in \{1, *\}\}.$$

Típicamente, dado que de  $\tau$  se puede recuperar  $\Phi$ , y para indicar que  $\mathcal{A}$  no solo está siendo pensada como espacio de probabilidad-\*, sino que también se está considerando su estructura como espacio de tráfico, denotaremos al espacio como  $(\mathcal{A}, \tau)$ . Por la misma razón, en vez de llamarlos variables aleatorias no conmutativas, llamaremos tráfico a los elementos de  $\mathcal{A}$ .

Motivado por el caso en el que los tráfico son matrices, se define el funcional de tráfico inyectivo de la siguiente manera.

**Definición 3.2.4** (Funcional inyectivo). *Dado un espacio de tráfico  $(\mathcal{A}, \tau)$ , definimos el funcional inyectivo  $\tau^0 : \mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathcal{A} \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ , de manera implícita, con la siguiente fórmula*

$$\tau[T(a_1, \dots, a_K)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \tau^0[T^\pi(a_1, \dots, a_K)],$$

para cada  $T = (V, E)$  y  $K = |E|$ .

Es claro que el funcional inyectivo determina el funcional de tráfico. Es posible demostrar que el funcional de tráfico también determina el funcional inyectivo. Para esto se requiere la fórmula de inversión de Möbius para cada momento de gráfica  $T$ . Este último es un método estándar en la teoría de álgebras de incidencia que puede ser consultado en [28]. La aplicación de la fórmula de inversión de Möbius para este caso en particular se puede consultar en [6], en donde obtienen la siguiente fórmula

$$\tau^0[T(\cdot)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \text{Mob}(\pi, 1_{\mathcal{P}(V)}) \tau[T^\pi(\cdot)].$$

En ocasiones, particularmente cuando los tráficoes son matrices aleatorias, es más conveniente estudiar la distribución con respecto a  $\tau^0$  que la distribución con respecto a  $\tau$ .

Ahora, recordemos que, dentro de la Teoría de Probabilidad Libre, la distribución-\* conjunta de una familia de variables aleatorias no conmutativas se define formalmente como un funcional lineal en el espacio  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ , donde  $\mathbf{x}$  es una familia de indeterminadas. Es decir, el dominio de la distribución-\* conjunta es el espacio de polinomios-\* no conmutativos en la familia de indeterminadas  $\mathbf{x}$ .

El hecho de pensar a la distribución como una función lineal sobre el álgebra-\* libre generada por un conjunto de indeterminadas permite comparar las distribuciones de variables aleatorias no conmutativas que viven en distintos espacios de probabilidad-\*. De la misma manera, dentro de la Teoría de Tráficoes, en ocasiones es necesario recurrir a una noción más formal de distribución. En este marco, dada una familia de indeterminadas  $\mathbf{x} = (x_j)_{j \in J}$ , pensaremos ahora a los momentos de gráfica como objetos con una estructura adicional de la forma  $T = (V, E, \gamma, \varepsilon)$ , donde  $V$  y  $E$  son como antes,  $\gamma : E \rightarrow J$  y  $\varepsilon : E \rightarrow \{1, *\}$ . Escencialmente, ahora estamos agregando a la estructura de los momentos de gráfica una etiquetación de las aristas usando símbolos de la forma  $x_j$  y  $x_j^*$ . De la misma manera, podemos pensar a las operaciones de gráfica de manera formal como  $g = (V, E, v_{\text{in}}, v_{\text{out}}, \gamma, \varepsilon)$ , y más en general a las operaciones de  $n$ -gráfica como  $t = (V, E, \mathbf{v}, \gamma, \varepsilon)$ , donde  $\mathbf{v}$  es el vector de vértices distinguidos.

El álgebra  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$  es el conjunto de combinaciones lineales formales de monomios-\* con indeterminadas en la familia  $\mathbf{x}$ , los cuales son palabras de la forma  $x_{j(1)}^{\varepsilon(1)} \cdots x_{j(k)}^{\varepsilon(k)}$ . En el caso de tráficoes, los monomios de gráfica-\* serán las operaciones de gráfica etiquetadas que se mencionan en el párrafo

anterior y este espacio será denotado por  $\mathcal{G}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ . Más generalmente, denotaremos por  $\mathcal{G}^{(n)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$  al espacio de operaciones de  $n$ -gráfica en las indeterminadas  $\mathbf{x}$ . El espacio de combinaciones lineales formales de elementos en  $\mathcal{G}^{(n)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$  con coeficientes complejos será denotado por  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(n)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ , al cual nombraremos espacio de polinomios de gráfica-\*. Ahora, dado que la distribución en tráfico no se define sobre las operaciones de gráfica sino sobre los monomios de gráfica, para presentar el concepto formal de distribución en tráfico consideraremos al espacio de combinaciones lineales formales de momentos de gráficas etiquetadas, denotado por  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ .

**Definición 3.2.5** (Distribución formal en tráfico). *Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio algebraico de tráfico y  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}$  una familia de tráfico indexada como  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in J}$ . La distribución en tráfico de  $\mathbf{a}$  está dada por la aplicación lineal  $\mu_{\mathbf{a}} : \mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por*

$$\mu_{\mathbf{a}}(T) = \tau[T(\mathbf{a})],$$

donde  $\tau[T(\mathbf{a})]$  denota al resultado de evaluar  $\tau$  en  $T = (V, E)$  cuando en cada arista  $e \in E$  se sustituye la variable  $a_{\gamma(e)}^{\varepsilon(e)}$ .

Esto le da un sustento formal a la noción de convergencia en distribución de tráfico.

**Definición 3.2.6** (Convergencia en distribución de tráfico). *Sea  $(\mathcal{A}_n, \tau_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de espacios algebraicos de tráfico,  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráfico y  $J$  una familia de índices. Para cada  $n$ , sea  $\mathbf{a}_n \subset \mathcal{A}_n$  una familia indexada por  $J$ , al igual que  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}$ . Decimos que la sucesión  $(\mathbf{a}_n)_{n=1}^{\infty}$  converge en distribución en tráfico a la familia  $\mathbf{a} \subset \mathcal{A}$  si*

$$\tau_n[T(\mathbf{a}_n)] \rightarrow \tau[T(\mathbf{a})],$$

para todo  $T \in \mathcal{G}^{(0)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ , donde  $\mathbf{x}$  es una familia de indeterminadas indexada por  $J$ .

Es importante notar que la convergencia en distribución de tráfico con respecto al funcional  $\tau$  es equivalente a la convergencia en distribución de tráfico con respecto al funcional  $\tau^0$ . En los próximos capítulos utilizaremos ampliamente este hecho.

### 3.2.2 Positividad para el funcional de tráfico

La noción de adjunción también puede ser extendida a los espacios de tráfico algebraicos. Dada una operación de  $n$ -gráfica  $t$ , denotaremos por  $t^*$  a la

operación de  $n$ -gráfica obtenida al cambiar de orientación las aristas de  $t$ . Dado cualquier conjunto  $\mathcal{A}$ , denotaremos por  $\mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle$  al conjunto de operaciones de  $n$ -gráfica cuyas aristas están etiquetadas con elementos en  $\mathcal{A}$  y por  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle$  a las combinaciones lineales formales de estas con coeficientes complejos. Entonces, si en  $\mathcal{A}$  hay una noción de adjunción, es decir, una involución  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , para  $t \in \mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle$ ,  $t^*$  denotará a la operación de  $n$ -gráfica obtenida al invertir la orientación de las aristas de  $t$  y a cada etiqueta  $a \in \mathcal{A}$  cambiarla por  $a^*$ , es claro que esto define una involución

$$* : \mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle \rightarrow \mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle,$$

la cual puede ser extendida por antilinearidad a  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle$ .

Por ejemplo, si  $\mathbf{x}$  es una familia de indeterminadas y  $\mathcal{A} = \langle\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle$ , entonces para cada  $t = (V, E, \mathbf{v}, \gamma, \varepsilon) \in \mathcal{G}^{(n)}\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle$ , tendremos que  $t^* = (V, E^*, \mathbf{v}, \gamma, \varepsilon^*)$ , donde  $\varepsilon^*(e) = 1$  si  $\varepsilon(e) = *$  y  $\varepsilon^*(e) = *$  si  $\varepsilon(e) = 1$ , y  $E^*$  son las aristas con la orientación opuesta a las de  $E$ . En el caso en el que  $\mathcal{A}$  es una  $\mathcal{G}$ -álgebra tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.2.7.** *Si  $\mathcal{A}$  es una  $\mathcal{G}$ -álgebra, con una involución  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , compatible con la adjunción en operaciones de  $n$ -gráfica y la evaluación en estas, entonces diremos que  $\mathcal{A}$  es una  $\mathcal{G}^*$ -álgebra.*

*Un morfismo entre  $\mathcal{G}^*$ -álgebras es un morfismo de  $\mathcal{G}$ -álgebras que es compatible con  $*$ .*

Al igual que en Probabilidad Libre, en la Teoría de Tráficos es posible hablar de una noción de positividad para el funcional. Para esto, dados  $t, s \in \mathcal{G}^{(n)}$ , denotaremos por  $t|s$  al momento de gráfica obtenido al identificar el  $i$ -ésimo vértice distinguido de  $t$  con el  $i$ -ésimo vértice distinguido de  $s$ , y en la gráfica resultante olvidar los vértices distinguidos.

**Definición 3.2.8.** *Diremos que  $(\mathcal{A}, \tau)$  es un espacio de tráficos, si  $(\mathcal{A}, \tau)$  es un espacio algebraico de tráficos,  $\mathcal{A}$  es una  $\mathcal{G}^*$ -álgebra y el funcional de tráfico  $\tau$  es positivo, es decir, para cada entero positivo  $n$ , y para cada  $t \in \mathcal{G}^{(n)}\langle\mathcal{A}\rangle$ , se cumple que*

$$\tau[t|t^*] \geq 0.$$

*Un morfismo entre espacios de tráficos será un  $\mathcal{G}^*$ -morfismo que también es morfismo de espacio de tráficos algebraicos.*

Tomando  $n = 2$ , la positividad de  $\tau$  en un espacio de tráficos  $(\mathcal{A}, \tau)$ , implica que el funcional tracial inducido  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es positivo en el sentido de espacios de probabilidad no conmutativos. Para ver esto basta tomar la

2-operación de gráfica  $I$  definida anteriormente, entonces para toda variable aleatoria  $a$  la condición de positividad nos da que  $\Phi(aa^*) = \tau[I|I^*(a)] \geq 0$ . En otras palabras, si  $(\mathcal{A}, \tau)$  es un espacio de tráfico, entonces  $(\mathcal{A}, \Phi)$  es un espacio de probabilidad-\*

**Ejemplo 3.2.2.** *Conservando la notación del Ejemplo 3.2.1, demostraremos que  $(\mathcal{A}, \tau)$  es un espacio de tráfico, para lo cual ya solo resta demostrar que el funcional de tráfico es positivo. Para cada  $\mathbf{i} \in [N]^n$  denotemos por*

$$T(t)_i := \langle T(t), \xi_{i(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{i(n)} \rangle.$$

De la definición de  $T(t)$ , para cada  $\mathbf{i} \in [N]^n$  obtenemos la fórmula

$$T(t)_i = \sum_{\substack{k: V \rightarrow [N] \\ k|_v = \mathbf{i}}} \prod_{e \in E} A_e(t(e), s(e)).$$

Por otro lado, para calcular  $\tau[t|t^*]$ , notemos que cualquier función en los vértices de  $t|t^*$  puede ser descompuesta en una terna consistiendo de una función en los vértices de  $t$ , otra en  $\mathbf{v}$ , y otra en los vértices de  $t^*$ . Utilizando esta descomposición, notemos que para  $\mathbf{i} \in [N]^n$  fijo, el conjunto de funciones en los vértices de  $t|t^*$  cuya restricción a  $\mathbf{v}$  es  $\mathbf{i}$ , está en biyección con el conjunto de parejas formadas por una función sobre los vértices de  $t$  y otra sobre los vértices de  $t^*$ . De aquí que  $T(t|t^*)_i = T(t)_i T(t^*)_i$ . Además, de la definición de  $t^*$  se sigue que  $\overline{T(t)} = T(t^*)$ .

Finalmente notemos que  $\tau[t|t^*]$  no es más que el valor esperado de la suma de los valores de la forma  $T(t|t^*)_i$ , con  $\mathbf{i}$  corriendo en  $[N]^n$ . De donde

$$\tau[t|t^*] = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \sum_{\mathbf{i} \in [N]^n} T(t)_i \overline{T(t)_i} \right].$$

Lo cual claramente no es negativo.

### 3.3 Independencia y producto libre en tráfico

La noción de independencia en espacios de tráfico es complicada y poco intuitiva. Inicialmente, en [19], Male estudió el comportamiento asintótico de familias independientes de matrices aleatorias bajo la acción de espacios de tráfico y en base a ello definió la independencia libre en tráfico. Posteriormente, en [6], Cèbron, Dahlqvist y Male, dieron una caracterización alternativa de la independencia para tráfico que les permitió estudiar la

relación de esta con las independencias que se tienen en Probabilidad no Conmutativa. Los resultados obtenidos, en cierto sentido, justificaron que la definición original es la “correcta”.

### 3.3.1 Producto libre de $\mathcal{G}$ -álgebras

Dada una familia de  $\mathcal{G}$ -álgebras  $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^\infty$ , recordemos que la multiplicación dentro de cada una está determinada por la acción de  $\mathcal{G}$  en esta, de la misma manera en que la  $\mathcal{G}$ -álgebra  $*_{j \in J} \mathcal{A}_j$  que construiremos estará definida en términos de la acción de  $\mathcal{G}$  sobre ella. Por esta razón es que el espacio de tráfico obtenido como el producto libre de tráfico será más grande que el producto libre usual.

Para motivar este concepto comencemos con su analogía en el caso libre. Supongamos que  $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in J}$  es una familia de álgebras no conmutativas. Como en el primer capítulo, para cada  $j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n \in J$  tomemos

$$\mathcal{W}_{j_1, \dots, j_n} = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in \mathcal{A}_{j_i}\}.$$

Entonces el producto libre de las álgebras no es más que tomar las combinaciones lineales formales con coeficientes complejos de todos los conjuntos con la forma anterior y con lo obtenido hacer una suma directa con  $\mathbb{C}$ , este último factor representará a los múltiplos escalares de la identidad en la nueva álgebra. Los conjuntos  $\mathcal{W}_{j_1, \dots, j_n}$  son las palabras formadas por elementos tomadas de las álgebras consideradas de manera que no hay dos letras consecutivas en la palabra que correspondan a elementos de la misma álgebra. Una manera diferente de definir el producto libre sería la de considerar todas las palabras posibles, sin tomar en cuenta la restricción de que letras consecutivas pertenezcan a álgebras distintas, y posteriormente identificar aquellas que deben de corresponder a elementos iguales de acuerdo a la multiplicación dentro de cada  $\mathcal{A}_j$ .

De acuerdo a lo mencionado en el párrafo anterior procederemos a hacer la construcción para  $\mathcal{G}$  álgebras. Para cada  $j \in J$ , sea  $\mathcal{A}_j$  un conjunto. Dado cualquier conjunto  $A$ , y cualquier entero positivo  $n$ , denotaremos por  $\mathcal{G}^{(n)}\langle A \rangle$  al conjunto de operaciones de  $n$ -gráfica cuyas aristas están etiquetadas por los elementos de  $A$  y por  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(n)}\langle A \rangle$  al conjunto de combinaciones lineales formales de estas. Denotaremos por  $\coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j$  a la unión disjunta de los conjuntos  $\mathcal{A}_j$ , es decir, si la intersección de algunos de estos conjuntos es no vacía, para cada elemento en dicha intersección se pondrá un elemento en  $\coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j$  por cada conjunto que lo contenga. Notemos por ejemplo, que  $\mathcal{G}^{(0)}\langle \coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j \rangle$  será el análogo en Teoría de Tráfico a los momentos mixtos en Probabilidad Libre.

**Definición 3.3.1** (Producto libre en tráficoos). Sea  $\{(\mathcal{A}_j, \tau_j)\}_{j=1}^{\infty}$  una familia de  $\mathcal{G}$ -álgebras. Denotamos por  $*_{j \in J} \mathcal{A}_j$  a la  $\mathcal{G}$ -álgebra dada por el cociente de  $\mathbb{C}\mathcal{G}^{(2)} \langle \coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j \rangle$  con respecto a las identificaciones

$$\begin{aligned} & Z_g \left( \cdot \xrightarrow{Z_{g_1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k)} \cdot \otimes \cdot \xrightarrow{a_{k+1}} \cdot \otimes \cdots \otimes \cdot \xrightarrow{a_n} \cdot \right) \\ &= Z_g \left( Z_{g_1} \left( \cdot \xrightarrow{a_1} \cdot \otimes \cdots \otimes \cdot \xrightarrow{a_k} \cdot \right) \otimes \cdot \xrightarrow{a_{k+1}} \cdot \otimes \cdots \otimes \cdot \xrightarrow{a_n} \cdot \right), \end{aligned}$$

para cualesquiera operaciones de gráfica  $g$  y  $g_1$ , y  $a_1, \dots, a_k$  elementos de una misma  $\mathcal{G}$ -álgebra. Donde  $\cdot \xrightarrow{a} \cdot$  denota a la operación de gráfica  $I$  cuya única arista está etiquetada con  $a$ . En la igualdad anterior, el lado derecho denota a la operación de gráfica obtenida al sustituir  $g_1$  en la primera arista de  $g$  y posteriormente poner las etiquetas correspondientes.

A la inclusión  $a \mapsto \cdot \xrightarrow{a} \cdot$  la denotaremos por  $V_j : \mathcal{A}_j \rightarrow *_{j \in J} \mathcal{A}_j$  para cada  $j \in J$ .

Podemos ver que la  $\mathcal{G}$ -álgebra definida es en efecto un producto libre en el sentido de que satisface la correspondiente propiedad universal. Es decir, toda familia de  $\mathcal{G}$ -morfismos de los factores a una  $\mathcal{G}$ -álgebra se factoriza de forma única a través del producto.

**Proposición 3.3.1.** Sea  $\mathcal{B}$  una  $\mathcal{G}$ -álgebra, y sea  $f_j : \mathcal{A}_j \rightarrow \mathcal{B}$  una familia de  $\mathcal{G}$ -morfismos. Entonces existe un único  $\mathcal{G}$ -morfismo  $*_{j \in J} f_j : *_{j \in J} \mathcal{A}_j \rightarrow \mathcal{B}$  cumpliendo que  $f_j = *_{j \in J} f_j \circ V_j$  para toda  $j \in J$ .

*Demostración.* Definimos  $*_{j \in J} f_j$  de la manera natural como

$$*_{j \in J} f_j \left( Z_{g_1} \left( \cdot \xrightarrow{a_1} \cdot \otimes \cdots \otimes \cdot \xrightarrow{a_k} \cdot \right) \right) = Z_g \left( f_{j(1)}(a_1) \cdot \otimes \cdots \otimes f_{j(n)}(a_n) \right),$$

donde  $j(i)$  es el índice correspondiente al álgebra a la cual pertenece el elemento  $a_i$ . Lo único que queda por hacer es ver que esta función está bien definida, pues por construcción es ya un morfismo. Para ver que está bien definida basta verificar que sea compatible con la identificación descrita en la definición anterior. Esto último se sigue directamente de que cada  $f_j$  es un morfismo. La unicidad de  $*_{j \in J} f_j$  se sigue de la propiedad universalidad apenas probada.  $\square$

Notemos que si para cada  $j \in J$ , tomamos a  $\mathcal{B}$  como  $\mathcal{A}_j$ , la proposición anterior implica que la aplicación  $V_j$  es inyectiva, mostrándonos que esta construcción nos da un espacio que contiene de manera disjunta a cada copia de los factores, tal como sucede en Probabilidad Libre usual. Cuando se define el producto libre de espacios algebraicos de tráficoos, surge la dificultad extra de entender el producto libre de funcionales.



### 3.3.2 Independencia en espacios de tráfico.

Para hablar de independencia en espacios de tráfico nos será útil asociar una gráfica no dirigida a cada momento de gráfica de un producto libre. Sea  $J$  un conjunto de índices y  $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in J}$  una familia de conjuntos. Tomemos un momento de gráfica  $T \in \mathcal{G}^{(0)}(\coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j)$ . Diremos que una arista de  $T$  está coloreada del color  $j \in J$  si está etiquetada con un elemento de  $\mathcal{A}_j$ . Entonces, dado un color  $j \in J$ , al borrar todas las aristas de  $T$  con un color distinto a  $j$  obtenemos una gráfica cuyas componentes conexas serán las subgráficas monocromáticas conexas maximales de  $T$  con el color  $j$ , a estas componentes las llamaremos componentes coloreadas. Si un vértice pertenece a más de una componente diremos que el vértice es un conector.

**Definición 3.3.2** (Gráfica de componentes coloreadas). *Si  $T$  es como antes, su gráfica de componentes coloreadas, denotada por  $G_{c.c.}(T)$ , es la gráfica no dirigida cuyo conjunto de vértices es la unión del conjunto de componentes coloreadas con el conjunto de conectores de  $T$ . En  $G_{c.c.}(T)$ , habrá una arista entre una componente coloreada y un conector si dicho conector pertenece a dicha componente.*

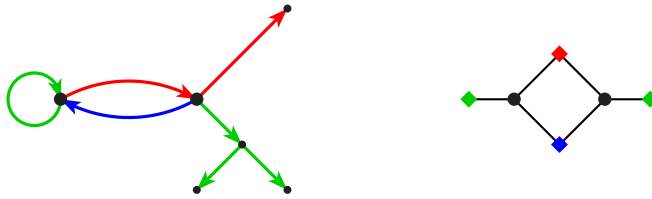


Figura 7: En la izquierda se muestra un momento de gráfica y en la derecha su gráfica de componentes coloreadas asociada.

El valor del funcional inyectivo en un momento de gráfica mixto dependerá de la estructura de la gráfica de componentes coloreadas de esta. Aunque poco intuitivo, esto no es completamente sorprendente si recordamos que en el capítulo anterior, establecimos el comportamiento asintótico de sumas asociadas a matrices en términos del árbol de componentes 2-conexas, el cual es parecido a la gráfica de componentes coloreadas. A continuación presentamos las nociones de independencia en espacios de tráfico y la de producto libre de funcionales de tráfico tal y como aparece en [6].

**Definición 3.3.3** (Independencia en tráfico y producto libre de funcionales). *Para cada  $j \in J$ , sea  $\mathcal{A}_j$  un conjunto y  $\tau_j : \mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}(\mathcal{A}_j) \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación*

lineal que manda al momento de gráfica sin ninguna arista al 1. El producto libre de las aplicaciones lineales  $\tau_j$ , denotado por  $\star_{j \in J} \tau_j : \mathbb{C}\mathcal{G}^{(0)}(\coprod \mathcal{A}_j) \rightarrow \mathbb{C}$ , es el funcional lineal cuya versión inyectiva está dada por la siguiente fórmula para todo  $T$  momento de gráfica

$$(\star_{j \in J} \tau_j)^0[T] = \chi_{G_{c.c.}(T) \text{ es un árbol}} \prod_S \tau^0[S],$$

donde el producto de la derecha corre sobre todas las  $S$  que son componentes coloreadas de  $T$ .

- Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio algebraico de tráfico y  $J$  un conjunto de índices. Para cada  $j \in J$ , sea  $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}$  una  $\mathcal{G}$ -subálgebra. Diremos que las subálgebras  $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$  son independientes en el sentido de tráfico, si la restricción de  $\tau$  al  $\mathcal{G}$ -álgebra generada por las  $\mathcal{A}_j$  coincide con  $\star_{j \in J} \tau_j$ .
- Sea  $\mathcal{A}$  como arriba y  $\{X_j\}_{j \in J}$  una familia de subconjuntos de  $\mathcal{A}$ , diremos que los conjuntos  $X_j$  son independientes en el sentido de tráfico si sus respectivas  $\mathcal{G}$ -álgebras generadas son independientes en el sentido de tráfico.
- Si,  $(\mathcal{A}_j, \tau_j)$  es un espacio de tráfico, entonces  $(\star_{j \in J} \mathcal{A}_j, \star_{j \in J} \tau_j)$  también lo es. Es decir, el producto libre de funcionales de tráfico preserva positividad.

En diferentes situaciones, la noción de independencia libre en tráfico codificará nociones distintas de independencia. En [6], se dieron condiciones para las cuales la independencia en el sentido de tráfico coincide con la independencia libre.

**Lema 3.3.1.** *Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráfico con funcional asociado  $\Phi$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}$ , sea*

$$\eta(a) := \Phi(\Delta(a^*)\Delta(a)) - |\Phi(a)|^2 = \Phi(a^* \circ a) - |\Phi(a)|^2.$$

*Si para cada  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\eta(a) = 0$ , entonces cualquier familia de  $\mathcal{G}$ -subálgebras de  $\mathcal{A}$  que sea independiente en el sentido de tráfico será independiente en el sentido libre.*

De la misma manera, si en una subálgebra  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , se cumple que  $\eta(a) = 0$  para todo  $a \in \mathcal{B}$ , entonces la independencia libre de familias de álgebras en  $(\mathcal{B}, \Phi|_{\mathcal{B}})$  es una consecuencia de la independencia en el sentido de tráfico en  $(\mathcal{A}, \tau)$ .

Por otro lado, en un espacio algebraico de tráficoos  $(\mathcal{A}, \tau)$ , la independencia en tráficoos es equivalente a la independencia tensorial cuando los tráficoos considerados son diagonales, es decir, cuando pertenecen al conjunto  $\mathcal{A}_0 := \{\Delta(a) | a \in \mathcal{A}\}$ . Para ver esto comencemos por probar el siguiente lema.

**Lema 3.3.2.** *Sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica, cuyas aristas tienen asignados tráficoos de una familia  $\mathbf{a}$ . Sea  $a \in \mathbf{a}$  un tráficoo diagonal. Si  $a$  está colocado en alguna arista  $e \in E$  que no es un lazo, entonces*

$$\tau^0[T(\mathbf{a})] = 0.$$

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre la cantidad de aristas de  $T$ . Para la base de inducción supongamos que  $T = \cdot \rightarrow \cdot$ . Como  $a$  es diagonal,  $\Delta(a) = a$ . Además, como  $a$  es diagonal, existe  $b$  tal que  $\Delta(b) = a$ , luego, por la asociatividad de la composición tenemos que  $\tau[\cdot \xrightarrow{a} \cdot] = \tau[\Delta(b)] = \tau[\Delta(a)]$ . Usando esto y la descomposición inyectiva tenemos  $\tau[\Delta(a)] = \tau[\cdot \xrightarrow{a} \cdot] = \tau^0[\cdot \xrightarrow{a} \cdot] + \tau^0[\Delta(a)]$ . Luego, como  $\Delta$  tiene un único vértice,  $\tau[\Delta(a)] = \tau^0[\Delta(a)]$  y por lo tanto  $\tau^0[\cdot \xrightarrow{a} \cdot] = 0$ .

Ahora supongamos que la proposición es cierta para todos los momentos de gráfica con  $n$  aristas y sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica con  $n + 1$  aristas. Sean  $v_1$  y  $v_2$  los extremos de la arista en la cual está colocado  $a$ . Usando la descomposición inyectiva tenemos que

$$\tau[T(\mathbf{a})] = \tau^0[T(\mathbf{a})] + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(V) \\ v_1 \sim_{\pi} v_2, \pi \neq 0_V}} \tau^0[T^{\pi}(\mathbf{a})] + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(V) \\ v_1 \sim_{\pi} v_2}} \tau^0[T^{\pi}(\mathbf{a})]. \quad (3.1)$$

Por hipótesis de inducción, para toda partición  $\pi$ , con  $v_1 \sim_{\pi} v_2$  y  $\pi \neq 0_V$ , tendremos  $\tau^0[T^{\pi}(\mathbf{a})] = 0$ . Luego, si  $\hat{T}(\mathbf{a})$  es el momento de gráfica que resulta de identificar  $v_1$  con  $v_2$  y poner  $a$  en el lazo resultante, entonces por la asociatividad de la composición y dado que  $\Delta(a) = a$ , tenemos  $\tau[\hat{T}(\mathbf{a})] = \tau[T(\mathbf{a})]$ . Por otro lado

$$\tau[\hat{T}(\mathbf{a})] = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(V) \\ v_1 \sim_{\pi} v_2}} \tau^0[T^{\pi}(\mathbf{a})].$$

Sustituyendo lo obtenido en (3.1), llegamos a que  $\tau^0[T(\mathbf{a})] = 0$ . Con lo cual se concluye la demostración.  $\square$

Ahora tomemos  $\mathbf{a} = (a_j)_{j \in J}$  una familia de tráficoos diagonales e independientes en el sentido de tráficoos. Por lo demostrado en el lema anterior,

si  $T$  es un momento de gráfica con una arista que no es un lazo tendremos que  $\tau^0[T(\mathbf{a})] = 0$ .

Utilizando la descomposición inyectiva, obtenemos que para todo momento de gráfica  $T$  se cumple que  $\tau[T(\mathbf{a})] = \tau^0[\hat{T}(\mathbf{a})]$ , donde  $\hat{T}$  es la gráfica obtenida al identificar todos los vértices de  $T$ . Además, como  $\hat{T}$  tiene un solo vértice,  $\tau^0[\hat{T}(\mathbf{a})] = \tau[\hat{T}(\mathbf{a})]$ . Denotemos por  $\Delta_k$  al momento de gráfica con un vértice y  $k$  lazos. Por lo ya mencionado, es suficiente estudiar la distribución de los elementos diagonales en los  $\Delta_k$ . Más aún, si en  $\Delta_k(\mathbf{a})$  coloreamos cada arista de color  $j$  si  $a_j$  o  $a_j^*$  están colocados en dicha arista, entonces  $G_{c.c.}(\Delta_k(\mathbf{a}))$  es una estrella, en particular es un árbol. Dado que estamos tomando las  $a_j$  independientes, por la definición de independencia en tráfico tenemos que para cualquier momento de gráfica  $T$  con  $K$  aristas se satisface que

$$\tau[T(\mathbf{a})] = \tau[\Delta_K(\mathbf{a})] = \tau^0[\Delta_K(\mathbf{a})] = \prod_{j \in J} \tau[\Delta_{k_j}(a_j, a_j^*)].$$

Entonces, dentro del álgebra abeliana  $\mathcal{A}_0$ , la independencia en tráfico es equivalente a la independencia tensorial. Más aún, si  $(a_j)_{j \in J} = \mathbf{a} \subset \mathcal{A}_0$  es una familia de tráfico independientes en el sentido de tráfico, y para cada  $j$  podemos encontrar una variable aleatoria clásica  $X_j$ , con  $\mathbb{E}[X_j^k \overline{X_j^l}] = \Delta_{k+l}(a_j, a_j^*)$ , donde en  $\Delta_{k+l}(a_j, a_j^*)$  aparece  $k$  veces  $a_j$  y  $l$  veces  $a_j^*$ . Entonces, tomando las  $X_j$  independientes en el sentido clásico, la familia  $\mathbf{X} = (X_j)_{j \in J}$  es un modelo analítico distribuido conjuntamente como  $\mathbf{a}$ . Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 3.3.4** (Tráfico gaussiano autoadjunto). *Dado  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráfico algebraico, diremos que  $d \in \mathcal{A}$  es un tráfico gaussiano clásico estándar si  $d$  es diagonal, autoadjunto y cumple que*

$$\tau[\Delta_m(d)] = \begin{cases} \frac{(2k)!}{k!2^k} & \text{si } m = 2k. \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Es decir, los momentos de  $d$  coinciden con los momentos de una variable aleatoria real gaussiana estándar.*

## Capítulo 4

# Distribución de tráfico para algunas familias de matrices aleatorias

En el capítulo anterior vimos que si  $\mathcal{A}$  es una álgebra de matrices aleatorias, entonces es posible definir  $\tau$  y operaciones de  $n$ -gráficas de modo que  $(\mathcal{A}, \tau)$  sea un espacio de tráfico. A pesar de ser una teoría nueva, algunas aplicaciones importantes de la Teoría de Tráfico al estudio de matrices aleatorias ya han sido encontradas, ver por ejemplo [2].

En este capítulo daremos aplicaciones concretas para el caso en el que los tráfico son matrices aleatorias. Presentaremos algunos resultados obtenidos por Male, que proveen demostraciones distintas para resultados clásicos, como el Teorema de Wigner. También, en la Sección 4.4, presentaré una manera de utilizar la teoría de tráfico para refutar una conjetura hecha en [18]. En cuanto a este resultado, agradezco particularmente a Jorge Fernández Hidalgo por desarrollar el código del programa que hizo posible dar una respuesta final.

Por otro lado, mostraremos que esta teoría nos da un marco en donde es posible discernir el comportamiento asintótico de modelos de matrices aleatorias que son indiscernibles desde la Teoría de Probabilidad Libre. Podemos observar este fenómeno aún en matrices muy simples, tomemos el ejemplo dado en [19] por Male. Para cada entero positivo  $N$ , sea  $J_N$  la matriz de  $N \times N$  cuyas entradas son todas iguales a  $\frac{1}{N}$ . Es claro que esta matriz es idempotente, es decir,  $J_N^2 = J_N$  y por lo tanto  $J_N^k = J_N$  para todo

$k > 0$  y entonces los momentos de  $J_N$  están dados por

$$\text{tr}(J_N^k) = \text{tr}(J_N) = \frac{1}{N}.$$

Entonces, todos los momentos de  $J_N$  convergen a cero cuando  $N$  tiende a infinito, y por lo tanto  $J_N$  converge a la variable aleatoria no conmutativa 0. Por otro lado, si  $T = (V, E)$  es un momento de gráfica, entonces

$$\begin{aligned} \tau[T(J_N^k)] &= \tau[T(J_N)] = \frac{1}{N} \sum_{k:V \rightarrow [N]} \prod_{e \in E} J_N(k(t(e)), k(s(e))) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k:V \rightarrow [N]} N^{-|E|} = N^{|V|-|E|-1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como  $T$  por definición es conexa, tenemos que  $|V| - |E| - 1 \leq 0$ , con igualdad si y solo si  $T$  es un árbol. Por lo tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau[T(J_N)] = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ es un árbol.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular, la distribución de tráfico límite de  $J_N$  no es idénticamente 0.

Observemos que los eigenvalores de  $J_N$  son 1 y 0, el primero con multiplicidad uno y el segundo con multiplicidad  $N - 1$ . Entonces, la distribución espectral empírica de  $J_N$  es  $\frac{N-1}{N}\delta_0 + \frac{1}{N}\delta_1$ . En efecto

$$\frac{N-1}{N}\delta_0 + \frac{1}{N}\delta_1 \xrightarrow{\text{dist}} \delta_0.$$

Sin embargo, el espectro no es suficiente para describir todas las propiedades algebraicas de una matriz. La distribución en tráfico permite extraer aquello que el espectro no detecta a nivel asintótico, en este caso las diferencias algebraicas entre la matriz  $0_N$  (la matriz cero de dimensión  $N$ ) y la matriz  $J_N$ .

## 4.1 Preliminares

El análisis de matrices aleatorias a través de la teoría de tráfico es sumamente combinatorio. A continuación introduciremos la notación que será requerida en este capítulo.

- *Símbolo de Pochhammer o factorial descendiente:* Dado un entero positivo  $k$ , denotamos por  $(x)_k$  al polinomio  $x(x-1)\cdots(x-k+1)$ . Y por  $(x)_0$  al polinomio constante 1.
- *Polinomios elementales simétricos:* Sea  $n$  un entero positivo. Para  $1 \leq k \leq n$  entero no negativo, definimos al polinomio elemental simétrico  $e_k(x_1, \dots, x_n)$ , como el polinomio homogéneo de grado  $k$  en  $n$  variables dado por la fórmula

$$e_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_k}.$$

Definimos  $e_0(x_1, \dots, x_n) = 1$  y  $e_k(x_1, \dots, x_n) = 0$  para  $k > n$ .

- *Números de Stirling del segundo tipo:* Denotaremos por  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  a la cantidad de particiones del conjunto  $[n]$  que tienen  $k$  bloques, este número es conocido como el número de Stirling del segundo tipo asociado a  $n$  y  $k$ .
- *Adyacencias de bloques:* Sea  $G = (E, V)$  una gráfica dirigida, con  $n$  vértices, digamos  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dada una partición  $\pi \in \mathcal{P}(n)$  y bloques  $V_1, V_2 \in \pi$ , denotamos por  $E_G(V_1, V_2) = \{(i, j) \in V_1 \times V_2 : (v_i, v_j) \in E\}$  y a  $e_G(V_1, V_2) = |E_G(V_1, V_2)|$ . Notemos que  $E_G(V_1, V_2)$  es precisamente el conjunto de aristas que van del vértice correspondiente al bloque  $V_1$  al vértice correspondiente a  $V_2$  en  $G^\pi$ .
- *Gráficas dobles:* Dada una gráfica dirigida  $G = (V, E)$ , diremos que esta es una gráfica doble si para cualesquiera dos vértices  $u, v \in V$  se cumple que  $e(u, v) + e(v, u)$  es par. Más aún, si para cualesquiera  $u, v \in V$  se cumple que  $e(u, v) = e(v, u)$  entonces diremos que  $G$  es una gráfica doble no dirigida.
- *Momentos de una distribución:* Sea  $\mu$  una distribución en  $\mathbb{R}$ . Definimos  $m_\mu(k) := \mathbb{E}[X^k]$  donde  $X \sim \mu$ . Luego, si  $\nu$  es una distribución en  $\mathbb{C}$ , definimos  $m_\nu(k, l) := \mathbb{E}[Z^k \overline{Z}^l]$ .

La familia de polinomios  $\{(x)_k\}_{k=0}^\infty$  forma una base algebraica para el espacio de polinomios. Esta base surge de manera natural en la Teoría de Tráficos y es conveniente para el estudio de los momentos de matrices aleatorias. Será entonces conveniente saber cambiar de la base usual  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  a la base  $\{(x)_k\}_{k=0}^\infty$ .

**Lema 4.1.1.** *Para todo entero positivo  $k$  se cumple que*

$$x^k = \sum_{j=1}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} (x)_j. \quad (4.2)$$

*Demostración.* Este lema puede ser demostrado por métodos elementales, aquí presentaremos una demostración directa utilizando Teoría de Tráficos.

Como la anterior es una igualdad entre polinomios, nos bastará demostrar que se cumple para todos los enteros positivos. Sea  $N$  un entero positivo y  $J_N$  como antes, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} = \tau[J_N] &= \tau[J_N^k] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(k)} \tau^0[C_k^\pi(J_N)] = \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(k) \\ |\pi|=j}} \tau^0[C_k^\pi(J_N)] \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(k) \\ |\pi|=j}} \frac{(N)_j}{N^{k+1}} = \sum_{j=1}^k \frac{\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} (N)_j}{N^{k+1}}. \end{aligned}$$

□

**Corolario 4.1.1** (Primera fórmula de cambio de base). *Si  $\sum_{j=1}^n a_j x^j = \sum_{j=1}^n b_j (x)_j$  para todo real  $x$ , entonces  $b_j = \sum_{k=j}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} a_k$ .*

*Demostración.* De la fórmula (4.2), para todo  $j$  tenemos que  $x^j = \sum_{k=1}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$ . Sustituyendo lo anterior en cada sumando de  $\sum_{j=1}^n a_j x^j$  y utilizando la hipótesis obtenemos

$$\sum_{j=1}^n b_j (x)_j = \sum_{j=1}^n a_j x^j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k \right) a_j = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=k}^n a_j \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \right) (x)_k.$$

Comparando las expresiones de los extremos y dado que los símbolos de Pochhammer son una base para los polinomios en  $x$ , tenemos que los respectivos coeficientes de los  $(x)_k$  tienen que ser iguales para todo  $k = 1, \dots, n$ . □

La fórmula anterior permite hacer un cambio de base de la base usual de polinomios a la base de símbolos de Pochhammer. Ahora haremos el procedimiento inverso.



**Lema 4.1.2.** *Para todo  $k$  se cumple que*

$$(x)_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} e_{k-j}(1, \dots, k-1) x^j.$$

*Demostración.* Las raíces del polinomio  $(x)_k$  son  $0, 1, \dots, k-1$ . De las relaciones de Vieta se sigue que el coeficiente de  $x^j$  al expandir  $(x)_j$  es  $(-1)^{k-j} e_{k-j}(0, 1, \dots, k-1)$ . Es trivial ver que  $e_{k-j}(0, 1, \dots, k-1) = e_{k-j}(1, \dots, k-1)$ .  $\square$

**Corolario 4.1.2** (Segunda fórmula de cambio de base). *Si  $\sum_{j=1}^n a_j x^j = \sum_{j=1}^n b_j(x)_j$ , para todo  $x$  real, entonces*

$$a_j = \sum_{k=j}^n (-1)^{k-j} e_{k-j}(1, \dots, k-1) b_k.$$

*Demostración.* Utilizando el Lema 4.1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j(x)_j &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} e_{j-k}(1, \dots, j-1) x^k \right) b_j \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} e_{j-k}(1, \dots, j-1) b_j \right) x^k. \end{aligned}$$

Combinando lo anterior con el hecho de que  $\sum_{j=1}^n a_j x^j = \sum_{j=1}^n b_j(x)_j$  y comparando coeficiente por coeficiente se concluye la demostración.  $\square$

A diferencia de como sucede con los métodos analíticos, dentro de la Teoría de Tráficos la mayoría de las veces es necesario pedir como condición que los momentos de las entradas de las matrices aleatorias por estudiar cumplan ciertas condiciones. En particular, es fácil manejar matrices cuyas entradas tienen una distribución con la siguiente propiedad.

**Definición 4.1.1** (Distribuciones balanceadas). *Sea  $\mu$  una distribución en  $\mathbb{R}$  y  $\nu$  una distribución en  $\mathbb{C}$ . Diremos que  $\mu$  y  $\nu$  son distribuciones balanceadas si*

$$m_\mu(k) = 0 \text{ para todo } k \text{ impar} \quad , \quad m_\nu(k, l) = 0 \text{ para todo } k \neq l. \quad (4.3)$$

Notemos que si  $\mu$  es una medida simétrica en  $\mathbb{R}$ , entonces es una medida balanceada. Más aún, si  $X, Y \sim \mu$  son variables aleatorias independientes reales, entonces  $Z = \frac{X+iY}{\sqrt{2}}$  tiene una distribución balanceada.

**Ejemplo 4.1.1** (Distribución gaussiana). *Sea  $\nu$  la distribución gaussiana real estándar. Es claro que esta es simétrica y por lo tanto balanceada. Más aún, sus momentos pares están dados por*

$$m_\nu(2k) = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Si  $Z = \frac{X+iY}{\sqrt{2}}$ , con  $X, Y \sim \nu$  independientes, entonces los momentos no nulos de  $Z$  están dados por

$$\mu_{\frac{\nu \otimes \nu}{\sqrt{2}}}(k, k) = k!.$$

Entonces, los ensambles *GOE* y *GUE* satisfacen la condición que necesitamos para hacer nuestro análisis utilizando la Teoría de Tráficos.

**Ejemplo 4.1.2** (Distribución uniforme en el círculo). *Sea  $\nu$  la distribución uniforme en el círculo unitario  $\mathbb{T}$ . Entonces  $\nu$  es una distribución balanceada cuyos momentos no nulos están dados por*

$$m_\nu(k, k) = 1.$$

## 4.2 Matrices de Wigner

Con los métodos desarrollados hasta el momento podremos estudiar las matrices de Wigner con entradas balanceadas. Esto engloba el caso para el cual las entradas son simétricas. Si consideramos matrices de Wigner con distribución  $\mu$  en las entradas de la diagonal y distribución  $\frac{1}{\sqrt{2}}\mu * \mu$  en las entradas fuera de la diagonal, una caracterización utilizada por Male con frecuencia es que  $\mu$  es simétrica si y solo si la respectiva matriz de Wigner  $W_N$  es invariante en distribución con respecto a la conjugación por matrices de permutación. Es decir, para toda matriz determinística de permutación  $U_N$ , se cumple que

$$W_N \stackrel{\text{Ley}}{=} U_N^* W_N U_N.$$

### 4.2.1 Fórmulas para los momentos de matrices de Wigner

Tanto en la Teoría de Tráficos como los resultados precursores a esta fueron concebidos para hacer un análisis asintótico de las matrices aleatorias. Sin

embargo, es también útil en el estudio de matrices “pequeñas”. Antes de presentar el estudio asintótico hecho por Male desarrollaremos un poco de la teoría de tráfico para matrices finitas.

**Lema 4.2.1.** *Sea  $W_N$  una matriz de Wigner con entradas balanceadas y  $T = (V, E)$  un momento de gráfica. Entonces  $\tau^0[T(W_N)] = 0$  si*

- *Caso complejo:  $T$  no es una gráfica doble no dirigida.*
- *Caso real:  $T$  no es una gráfica doble.*

*Demostración.* Sea  $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}}A_N$  y sea  $\mu$  la distribución de las entradas de la diagonal de  $A_N$  y  $\nu$  la distribución de las entradas fuera de la diagonal de esta matriz. Sea  $k : V \rightarrow [N]$  una función inyectiva. El producto asociado a  $k$  que aparecerá como sumando en  $\tau^0[T(W_N)]$  es

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} W_N(k(t(e)), k(s(e))) \right]. \quad (4.4)$$

Sean  $u, v \in V$  dos vértices conectados por una arista no necesariamente distintos. Como  $k$  es inyectiva, las únicas aristas que tengan en sus extremos los valores  $k(u)$  y  $k(v)$  serán aquellas en  $E(u, v) \cup E(v, u)$ . Dado que en las matrices de Wigner las únicas entradas correlacionadas son las simétricas respecto a la diagonal, todas las entradas de la matriz que aparezcan en el producto (4.4) y que estén asociadas a aristas fuera de  $E(u, v) \cup E(v, u)$ , serán independientes de las entradas tomadas de las aristas en  $E(u, v) \cup E(v, u)$ . Entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} W_N(k(t(e)), k(s(e))) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E(u, v) \cup E(v, u)} W_N(k(t(e)), k(s(e))) \right] \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E \setminus (E(u, v) \cup E(v, u))} W_N(k(t(e)), k(s(e))) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por lo tanto, para que el producto asociado a  $k$  no se anule se deberá de cumplir que

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E(u, v) \cup E(v, u)} W_N(k(t(e)), k(s(e))) \right] \neq 0. \quad (4.6)$$

- Caso complejo: Si  $\nu$  es una dsitrbución en  $\mathbb{C}$  y  $u \neq v$ , entonces el valor de la expresión (4.6) es

$$N^{-\frac{|E|}{2}} m_\nu(e_T(u, v), e_T(v, u));$$

y en el caso en el que  $u = v$  es

$$N^{-\frac{|E|}{2}} m_\mu(e_T(u, u)).$$

- Caso real: Si  $\nu$  está soportada en los reales y  $u \neq v$ , el valor en (4.6) es

$$N^{-\frac{|E|}{2}} m_\nu(e_T(u, v) + e_T(v, u));$$

si  $u = v$  entonces este valor es

$$N^{-\frac{|E|}{2}} m_\mu(e_T(u, u)).$$

Entonces, dado que las distribuciones de las entradas son balanceadas, en el caso complejo, para que el producto no se anule necesitaremos  $e_T(u, v) = e_T(v, u)$  para todo  $u \neq v$  y  $e_T(u, u)$  par. En el caso real, necesitaremos que  $e_T(u, v) + e_T(v, u)$  y  $e_T(u, u)$  sean pares para todo  $u \neq v$ .

Como lo anterior es válido para  $u$  y  $v$  adyacentes arbitrarios y no dependió de la elección de  $k$ , podemos concluir que si  $T$  no es una gráfica doble (respectivamente gráfica doble no dirigida) en el caso real (respectivamente complejo) entonces  $\tau^0[T(W_N)]$  será cero.  $\square$

El lema anterior restringe nuestro estudio de la traza inyectiva sobre los momentos de gráfica de una matriz de Wigner a los momentos que son gráficas dobles.

También, de lo desarrollado en la demostración anterior obtenemos que en el caso real, para cualquier momento de gráfica  $T$ , con  $k$  vértices,

$$\begin{aligned} \tau^0[T(W_N)] &= \\ &= \frac{\binom{N}{k}}{N^{\frac{|E|}{2}+1}} \prod_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} (m_\mu(e_T(u, v) + e_T(v, u)))^{\frac{1}{2}} \prod_{(u,u) \in E} m_\nu(e_T(u, u)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

En el caso complejo se tiene

$$\begin{aligned} \tau^0[T(W_N)] &= \\ &= \frac{\binom{N}{k}}{N^{\frac{|E|}{2}+1}} \prod_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} (m_\mu(e_T(u, v), e_T(v, u)))^{\frac{1}{2}} \prod_{(u,u) \in E} m_\nu(e_T(u, u)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Esto puede ser utilizado para calcular el funcional de tráfico utilizando la descomposición inyectiva. Es decir, si  $T$  es un momento de gráfica con  $k$  vértices, para calcular  $\tau[T(W_N)]$  tendremos que saber  $\tau^0[T^\pi(W_N)]$  para todo  $\pi \in \mathcal{P}(k)$ . Definamos en el caso real

$$f_T(\pi, \mu, \nu) := \prod_{\substack{V_1, V_2 \in \pi \\ V_1 \neq V_2}} (m_\nu(e_T(V_1, V_2) + e_T(V_2, V_1)))^{\frac{1}{2}} \prod_{V_1 \in \pi} m_\mu(e_T(V_1, V_1)),$$

y en el caso complejo

$$f_T(\pi, \mu, \nu) := \prod_{\substack{V_1, V_2 \in \pi \\ V_1 \neq V_2}} (m_\nu(e_T(V_1, V_2), e_T(V_2, V_1)))^{\frac{1}{2}} \prod_{V_1 \in \pi} m_\mu(e_T(V_1, V_1)).$$

Dándonos

$$\tau[T(W_N)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(k)} \tau^0[T^\pi(W_N)] = \frac{1}{N^{\frac{|E|}{2}+1}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(k)} f_T(\pi, \mu, \nu)(N)_{|\pi|}$$

Utilizando el hecho de que  $tr(W_N^k) = \tau[C_k(W_N)]$ , lo anterior nos permite dar una fórmula explícita para los momentos de una matriz de Wigner, la cual resulta ser un polinomio en  $N$ .

**Teorema 4.2.1** (Fórmula de momentos). *Si  $W_N$  es una matriz de Wigner, cuyas entradas tienen una distribución balanceada, entonces*

$$\mathbb{E}[tr(W_N^k)] = \frac{1}{N^{\frac{|E|}{2}+1}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(k)} f_{C_k}(\pi, \mu, \nu)(N)_{|\pi|}. \quad (4.9)$$

Para algunos ensambles, la función  $f_{C_k}$  se puede expresar de una manera relativamente simple, permitiendo describir de forma explícita los coeficientes del polinomio en (4.9), en la base de símbolos de Pochhammer. Típicamente esto se reduce a un problema combinatorio.

**Definición 4.2.1.** *Sea  $k$  un entero positivo. Diremos que  $\pi \in \mathcal{P}(k)$  es una partición doble si  $C_k^\pi$  es una gráfica doble. Diremos que  $\pi$  es una partición doble no dirigida si  $C_k^\pi$  es doble y no dirigida.*

**Ejemplo 4.2.1** (Matrices de Wigner unimodulares). *Sea  $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}}A_N$  la matriz de Wigner en donde las entradas fuera de la diagonal son variables aleatorias complejas con distribución uniforme en el círculo unitario  $\mathbb{T}$  y las entradas de la diagonal son variables aleatorias discretas uniformes en el*

conjunto  $\{-1, 1\}$ . Entonces,  $f_{C_k}(\pi, \mu, \nu)$  será igual a 1 ó 0. El Lema 4.2.1 nos dice que dicha función será igual a 1 si y solo si  $\pi$  es una partición doble no dirigida, por lo tanto

$$\text{tr}(A_N^k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k \mathcal{F}(k, j)(N)_k.$$

Donde  $\mathcal{F}(k, j)$  denota la cantidad de particiones dobles no dirigidas de  $[k]$  con  $j$  bloques.

Notemos que por definición,  $\mathcal{F}(k, j)$  se anula cuando  $k$  es impar o  $j$  es mayor a  $\frac{k}{2} + 1$ . Algunos de los valores de  $\mathcal{F}(k, j)$  se pueden calcular sin mucha dificultad.

Dada una gráfica doble  $G = (V, E)$ , definiremos la gráfica no dirigida  $\hat{G} = (V, \hat{E})$  como sigue. Si  $u, v \in V$  son vértices adyacentes en  $G$ , los conectaremos en  $\hat{G}$  con  $\frac{1}{2}(e_G(u, v) + e_G(v, u))$  aristas no dirigidas. De la definición es claro que  $|\hat{E}| = \frac{1}{2}|E|$ . Si  $\hat{G}$  es un árbol, diremos que  $G$  es un árbol doble. Si además  $G$  era una gráfica doble no dirigida y  $\hat{G}$  es un árbol, diremos que  $G$  es árbol doble no dirigido.

**Lema 4.2.2.** *Sea  $\pi \in \mathcal{P}(2k)$  una partición doble. Si  $C_{2k}^\pi$  es un árbol doble, entonces es un árbol doble no dirigido.*

*Demostración.* Procedamos por inducción. Supogamos que la afirmación es cierta para los cocientes de  $C_{2k-2}$  y tomemos un  $\pi \in \mathcal{P}(2k)$  que cumpla que  $C_{2k}^\pi$  es un árbol doble. Sea  $V \in \pi$  un bloque que pensado como vértice de  $C_{2k}^\pi$  es una hoja. Notemos que solo entra una arista a  $V$  y que solo sale una arista de  $V$ , por lo tanto  $V = \{v\}$ . Entonces, si borramos a  $V$  y a las aristas que llegan a él en  $C_{2k}^\pi$ , podemos pensar al resto de la gráfica como un cociente de  $C_{2k-2}$ , que por hipótesis de inducción es un árbol doble no dirigido.  $\square$

Notemos que si  $\pi$  es una partición tal que  $C_{2k}^\pi$  es un árbol doble, entonces  $\pi$  tiene  $k + 1$  bloques. Por otro lado, si  $\pi$  es una partición doble con  $k + 1$  bloques, entonces  $\hat{C}_k^\pi$  es una gráfica conexa con  $k$  aristas y  $k + 1$  vértices, por lo tanto es un árbol, así que  $C_{2k}^\pi$  es un árbol doble. De aquí que calcular  $\mathcal{F}(2k, k + 1)$  es equivalente a contar la cantidad de árboles dobles que pueden ser obtenidos como cocientes de  $C_{2k}$ .

**Lema 4.2.3.** *Para todo entero positivo  $k$  se cumple que*

$$\mathcal{F}(2k, k + 1) = C_k.$$

Donde  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$  es el  $k$ -ésimo número de Catalán.

*Demostración.* Definiremos una biyección entre las particiones cuyo cociente asociado es un árbol doble y los caminos de Dyck de longitud  $2k$ , es decir, cada árbol será codificado como una secuencia  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k}\}$ , con  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  para todo  $i = 1, \dots, 2k$  y donde se cumple que  $\sum_{i=1}^j \varepsilon_i \geq 0$  para toda  $j = 1, \dots, 2k$  y  $\sum_{j=1}^{2k} \varepsilon_j = 1$ . Sea  $\pi \in \mathcal{P}(2k)$  una partición que cumple las condiciones. Numeremos los vértices de  $C_{2k}$ , con los números del 1 al  $2k$ , en sentido horario y conservemos dichas etiquetas en el cociente  $C_{2k}^\pi$  como se muestra en la figura. Recorreremos los vértices de  $C_{2k}^\pi$  caminando por las aristas y empezando en el vértice etiquetado. En el paso  $j$ , pasaremos del vértice con la etiqueta  $j$  al vértice con la etiqueta  $j+1$ , si este último no ha sido visitado anteriormente en el recorrido definiremos  $\varepsilon_j := 1$ , en cambio, si este ya ha sido visitado con anterioridad definiremos  $\varepsilon_j := -1$ . Este proceso se continuará hasta pasar del vértice con la etiqueta  $2k$  al vértice con la etiqueta 1. En la siguiente figura se presenta un árbol doble de 5 vértice obtenido como cociente de  $C_{10}$  con su camino de Dyck asociado.

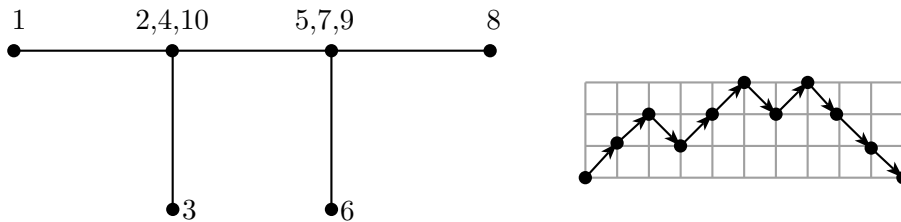


Figura 8: En la figura se muestra un árbol doble obtenido como cociente de  $C_{10}$  con su camino de Dyck asociado.

Como se está recorriendo un árbol doble no dirigido, cada vértice será visitado exactamente dos veces en el recorrido. Entonces, es claro que las sumas parciales de esta sucesión nunca serán negativas, pues cada  $-1$  en la sucesión esta asociado a un  $1$  que apareció antes, es decir, si en el recorrido se llega a un vértice antes visitado, el  $-1$  correspondiente se cancelará con el  $1$  que se escribió al visitar dicho vértice por primera vez. Más aún, la suma de todos los términos de la sucesión será cero, pues por cada  $1$  habrá un  $-1$ . De aquí que la sucesión asociada sea un camino de Dyck.

Por otro lado, dado un camino de Dyck de longitud  $2k$  se puede reconstruir el árbol doble asociado. Con lo cual podemos concluir que esta asociación es una biyección.

Finalmente, es un hecho conocido que la cantidad de caminos de Dyck de longitud  $2k$  es  $C_k$  [29], concluyendo la prueba.  $\square$

### 4.2.2 Distribución límite de las matrices de Wigner

En [19], Male describió de forma explícita la distribución inyectiva en tráfico de las matrices de Wigner con entradas balanceadas.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $W_N$  una matriz de Wigner con entradas balanceadas y sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica, entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T(W_N)] = \begin{cases} 1 & \text{Si } T \text{ es un árbol doble,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $\mu$  la distribución de las entradas en la diagonal y  $\nu$  la distribución de las entradas fuera de la diagonal. Del Lema 4.2.1, sabemos que el funcional inyectivo se anula cuando  $T$  no es una gráfica doble en el caso real, y cuando  $T$  no es una gráfica doble no dirigida en el caso complejo. Por lo tanto, bastará estudiar el límite para el caso de gráficas dobles o gráficas dobles no dirigidas, dependiendo si es el caso real o el complejo.

De las ecuaciones (4.7) y (4.8), sabemos que en cualquier caso, se tiene que

$$\tau^0[T(W_N)] = \frac{\binom{N}{|V|}}{N^{\frac{|E|}{2}+1}} f_T(\pi, \mu, \nu).$$

Como  $T$  es conexa,  $\hat{T}$  es conexa y por lo tanto  $|\hat{E}| + 1 \leq |V|$  con igualdad si y solo si  $\hat{T}$  es un árbol. Por otro lado  $\frac{|E|}{2} = |\hat{E}|$ , por lo que  $\frac{|E|}{2} + 1 \leq |V|$  con igualdad si y solo si  $\hat{T}$  es un árbol.

De la ecuación anterior,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T(W_N)] = 0$  si  $\frac{|E|}{2} + 1 < |V|$  y cuando  $\frac{|E|}{2} + 1 = |V|$  el límite es  $f(\pi, \mu, \nu)$ . Como  $C_{2k}^\pi$  es un árbol doble,  $f(\pi, \mu, \nu)$  será el producto de momentos mixtos de la forma  $m_\nu(1, 1)$  y  $m_\mu(2)$  en el caso complejo, y  $m_\nu(2)$  y  $m_\mu(2)$  en el caso real. Por definición de matriz de Wigner, estos valores son 1, así que para las particiones cuyo cociente asociado es un árbol doble no dirigido tendremos  $f(\pi, \mu, \nu) = 1$ . Con esto se concluye la prueba. □

Para estudiar los momentos límites de matrices de Wigner balanceadas notemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} tr(W_N^k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau[C_k(W_N)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(k)} \lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[C_k^\pi(W_N)].$$

Entonces, por el Teorema 4.2.2, el  $k$ -ésimo elemento de la distribución espectral límite será igual a la cantidad de particiones  $\pi \in \mathcal{P}(k)$  que cumplen



que  $C_k^\pi$  es un árbol doble. Primero notemos que esto implica que los momentos límite impares son cero. Luego, para calcular los momentos límite pares contemos la cantidad de particiones que inducen en  $C_{2k}$  un cociente que es un árbol doble no dirigido. Ya se demostró anteriormente que esta cantidad es  $\mathcal{F}(2k, k+1)$  la cual a su vez es  $C_k$ . Esto nos da una prueba del teorema de Wigner utilizando el método de los momentos. Más aún, ahora podemos dar una definición de lo que es un tráfico semicircular en un espacio de tráfico.

**Definición 4.2.2** (Tráfico semicircular). *Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráfico. Diremos que  $s \in \mathcal{A}$  es un elemento semicircular si para todo momento de gráfica  $T$  se cumple que*

$$\tau^0[T(s)] = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ es un árbol doble,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### 4.3 Matrices de aleatorias de permutación

Sea  $U_N$  una matriz de permutación determinística arbitraria con permutación asociada  $\sigma \in S_N$ . Dado que  $U_N$  tiene entradas reales, para estudiar su distribución en tráfico no será necesario considerar el caso en el que también se sustituye en un momento de gráfica la matriz  $U_N^*$ , ya que si una de estas aparece en una arista, es suficiente cambiar la orientación de la arista y pensar que esta tiene asociada a  $U_N$ .

Sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica. Si en  $T$  hay un vértice con al menos dos arista saliendo de él y yendo a vértices distintos, para toda función inyectiva  $k : V \rightarrow [N]$  se tendrá que

$$\prod_{e \in E} U_N(k(t(e)), k(s(e))) = 0.$$

Ya que la inyectividad de  $k$  implica que en el producto anterior hay dos entradas que fueron tomadas de la misma columna y como en una matriz de permutación solo hay una entrada no cero por columna, el producto se anulará. Por lo tanto, si  $T$  es como antes, tendremos que

$$\tau^0[T(U_N)] = 0.$$

De la misma manera, si un vértice en  $T$  tiene dos aristas entrantes que provienen de vértices distintos, el funcional inyectivo sobre  $T$  se anulará en cualquier matriz de permutación.

Entonces bastará enfocar nuestro análisis a los momentos de gráfica en donde todas las aristas que salen de un vértice van hacia el mismo vértice, de la misma manera que todas las aristas que entran a él vienen de un mismo vértice. Más aún, notemos que si  $T$  cumple lo anterior, dado que todas las entradas no nulas de  $U_N$  valen uno, la cantidad de aristas que van de un vértice a otro no afecta al valor de  $\tau^0[T(U_N)]$ . Por lo tanto, podemos suponer que  $T$  es un camino dirigido o un ciclo dirigido.

- Supongamos que  $T$  es un camino dirigido con vértices  $v_1, \dots, v_m$  y aristas  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{m-1}, v_m)$ . Sea  $k : V \rightarrow [N]$  inyectiva. Para que

$$\prod_{e \in E} U_N(k(t(e)), k(s(e))) \neq 0,$$

es necesario que  $\sigma(k(v_{j+1})) = k(v_j)$  para todo  $j = 1, \dots, m-1$ . Entonces, el valor de  $k$  en  $v_m$  determina el resto de los valores. Más aún, para que esto sea posible, es necesario que  $k(v_m)$  pertenezca a un ciclo de tamaño mayor o igual a  $m$ . Si este es el caso, el valor del producto asociado a  $k$  será 1. De aquí es claro que  $\tau^0[T(U_N)]$  será igual al número de elementos en  $[N]$  que pertenezcan a un ciclo de tamaño mayor o igual a  $m$ . Entonces, si  $c_1, \dots, c_t$  son los ciclos de  $\sigma$ , tenemos

$$\tau^0[T(U_N)] = \frac{1}{N} \sum_{\ell(c_i) \geq m} \ell(c_i).$$

- De manera análoga, si  $T$  es un ciclo dirigido con vértices  $v_1, \dots, v_m$  y aristas  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{m-1}, v_m), (v_m, v_1)$ . La condición adicional que se requiere para que el producto asociado a una función inyectiva  $k : V \rightarrow [N]$  no se anule es  $\sigma(k(v_1)) = k(v_m)$ , por lo tanto, en este caso

$$\tau^0[T(U_N)] = \frac{1}{N} \sum_{\ell(c_i)=m} \ell(c_i) = m \cdot |\{c_i : \ell(c_i) = m\}|.$$

Ahora analicemos el caso aleatorio. Sea  $\sigma \in S_N$  una permutación aleatoria uniforme,  $U_N$  su matriz asociada y  $m \leq N$  un entero fijo. Para cada  $j \in [N]$  y  $l$  entero positivo, sea  $\chi(j, l)$  la indicadora de que  $j$  pertenezca a un ciclo de tamaño mayor o igual a  $l$  y  $\psi(j, l)$  la indicadora de que  $j$  pertenezca a un ciclo de tamaño exactamente  $l$ . Entonces

$$\tau^0[T(U_N)] = \begin{cases} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^N \chi(j, m) \right] & \text{si } T \text{ es un camino dirigido,} \\ \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^N \psi(j, m) \right] & \text{si } T \text{ es un ciclo dirigido.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Por lo demostrado en el Lema 1.3.1, si  $m \leq N$ ,  $\mathbb{E}[\psi(j, m)] = \frac{1}{N}$  para todo  $j \in [N]$ . Por lo tanto, cuando  $T$  es un ciclo dirigido tenemos  $\tau^0[T(U_N)] = \frac{1}{N}$ .

Luego, como  $\chi(j, m) = \sum_{r=m}^N \psi(j, r)$ , tenemos que  $\mathbb{E}[\chi(j, m)] = \frac{N-m+1}{N}$  para todo  $j \in [N]$ . Entonces, si  $T$  es un camino dirigido de tamaño  $m$ , tendremos  $\tau^0[T(U_N)] = \frac{N-m+1}{N}$ . De esto podemos concluir el siguiente teorema establecido por Male en [19].

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $\{U_N\}_{N=1}^\infty$  una sucesión de matrices de permutación. Sea  $T$  un momento de gráfica. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T(U_N)] = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ es un camino dirigido,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.11)$$

De esta descripción de la distribución límite se concluye de manera directa que las matrices de permutación convergen en distribución a un elemento unitario de Haar.

## 4.4 Matrices unimodulares

**Definición 4.4.1** (Ensamble unimodular). *Definimos el ensamble unimodular  $A_N$  como la matriz aleatoria de  $N \times N$  cuyas entradas son variables aleatorias i.i.d. distribuidas uniformemente en el círculo unitario  $\mathbb{T}$ .*

En [18], Lakshminarayan, Puchala y Zyczkowski, definieron la matriz aleatoria

$$\rho_N := \frac{1}{N^2} A_N A_N^*,$$

e hicieron explícita la relación entre los momentos de la distribución espectral promedio de esta y el estudio de fenómenos en la teoría cuántica de la información. En ese trabajo conjeturaron la siguiente fórmula, que en esta tesis será refutada.

**Conjetura 4.4.1.** *Sean  $N, k$  enteros positivos, entonces*

$$\mathbb{E}[\text{tr}(\rho_N^k)] = \frac{1}{N^{2k+1}} \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{k-j+1} f_{k-1, k-j+1} N^j.$$

Donde  $f_{k,j} := \frac{1}{k+1} \binom{2k+2}{k-j} \binom{k+j}{j}$ , son los elementos del triángulo de Borel.

En esta sección, daré una idea de cómo atacar el problema de describir los momentos de  $\rho_N$  utilizando las herramientas de la teoría de tráfico. En

particular, llegaremos a una fórmula explícita para  $\mathbb{E}[tr(\rho_N^k)]$  en términos de  $N$  y  $k$ , con la cual demostraremos que la conjetura anterior es falsa.

Primero, describiremos la distribución en tráfico de  $\rho_N$  bajo el funcional inyectivo y para esto comenzaremos describiendo la distribución de  $A_N$ .

Sea  $\nu$  la medida de probabilidad uniforme en la circunferencia unitaria. Recordemos que  $\nu$  es balanceada y  $m_\nu(k, k) = 1$  para todo entero positivo  $k$ .

Ahora, dado un momento de gráfica  $T = (V, E)$  con  $m$  aristas, para calcular  $\tau^0[T(A_N^{\varepsilon_1}, \dots, A_N^{\varepsilon_m})]$  con  $\varepsilon_i \in \{1, *\}$ , colorearemos de rojo las aristas de  $T$  que tengan asociada la matriz  $A_N$  y de azul aquellas que tengan asociada la matriz  $A_N^*$ . Dados dos vértices  $u, v$ , denotaremos por  $e_T^1(u, v)$  la cantidad de aristas rojas que van de  $u$  a  $v$  y por  $e_T^2(u, v)$  a la cantidad de aristas azules que van de  $u$  a  $v$ . Observemos que para toda función  $k : V \rightarrow [N]$  inyectiva, el término del funcional inyectivo asociado a esta será

$$\prod_{u, v \in E} m_\nu(e_T^1(u, v), e_T^2(v, u))^{\frac{1}{2}} m_\nu(e_T^2(u, v), e_T^1(v, u))^{\frac{1}{2}}.$$

Dado que  $\nu$  es una distribución balanceada, para que el funcional inyectivo evaluado en  $T$  no sea cero se debe de cumplir, para todo  $u, v \in V$ , que  $e_T^1(u, v) = e_T^2(v, u)$  y  $e_T^2(u, v) = e_T^1(v, u)$ . A las gráficas que cumplan lo anterior las llamaremos gráficas bicolores dobles. Más aún, si  $T$  es una gráfica bicolor doble, dado que el producto anterior vale uno cuando no es nulo, tendremos que  $\tau^0[T(A_N^{\varepsilon_1}, \dots, A_N^{\varepsilon_m})] = \frac{1}{N}(N)_m$ .

Ahora, para calcular los momentos de  $\rho_N$  notemos que

$$\mathbb{E}[tr(\rho_N)^k] = \tau[C_k(\rho_N)] = \frac{1}{N^{2k}} \tau[C_{2k}(A_N, A_N^*)],$$

donde  $\tau[C_{2k}(A_N, A_N^*)]$  es una abreviación de  $\tau[C_{2k}(A_N, A_N^*, \dots, A_N, A_N^*)]$ . Entonces, coloreemos las aristas de  $C_{2k}$  de rojo y azul alternadamente, es decir, si los vértices de  $C_{2k}$  están numerados con los números del 1 al  $2k$  en orden cíclico, y en la arista  $(v_1, v_2)$  se encuentra la matriz  $A_N$ , entonces todas las aristas que vayan de un vértice impar a uno par serán azules, mientras que las que van de un vértice par a una impar serán rojas.

Diremos que una partición  $\pi \in \mathcal{P}(2k)$  es una partición bicolor doble si  $C_{2k}^\pi$  es una gráfica bicolor doble. De lo mencionado anteriormente tenemos que

$$\tau[C_{2k}(A_N, A_N^*)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(2k)} \tau^0[C_{2k}^\pi(A_N, A_N^*)] = \frac{1}{N} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(2k)} \chi_{\pi \text{ es bicolor doble}}(N)_{|\pi|}.$$

Sea  $\mathcal{G}(2k, j)$  la cantidad de particiones bicolors dobles de  $[2k]$  con  $j$  bloques. Notemos que una partición bicolor doble de  $[2k]$  tiene a lo más  $k + 1$  bloques, por lo que  $\mathcal{G}(2k, j) = 0$  si  $j > k + 1$ . De la fórmula anterior obtenemos

$$\mathbb{E}[tr(\rho_N^k)] = \frac{1}{N^{2k}} \tau[C_{2k}(A_N, A_N^*)] = \frac{1}{N^{2k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} \mathcal{G}(2k, j)(N)_j. \quad (4.12)$$

Si la conjetura fuera cierta tendríamos la igualdad

$$\sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{k-j+1} f_{k-1, k-j+1} N^j = \sum_{j=1}^{k+1} \mathcal{G}(2k, j)(N)_j.$$

Utilizando la fórmula de cambio de base obtenida en el Corolario 4.1.1, podemos reformular la conjetura.

**Conjetura 4.4.2.** *Para todo  $k, j$  enteros positivos se cumple la siguiente igualdad.*

$$\mathcal{G}(2k, j) = \sum_{r=j}^{k+1} (-1)^{k-r+1} \left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} f_{k-1, k-r+1}. \quad (4.13)$$

Los valores de  $\mathcal{G}(2k, j)$  y de  $\sum_{r=j}^{k+1} (-1)^{k-r+1} \left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} f_{k-1, k-r+1}$ , fueron calculados de forma explícita usando una computadora <sup>1</sup>. Dado que la conjetura fue hecha utilizando los primeros cuatro valores de  $k$ , no fue ninguna sorpresa ver que la igualdad (4.13) resultara cierta para todo  $k \leq 4$  y cualquier  $j$ . Por otro lado, fue sorprendente ver que la ecuación es también cierta para  $k = 5$  y para todo  $j$ , pero no es cierta en general para  $k > 5$ , lo cual demuestra que la conjetura es falsa. Sin embargo, resulta ser correcta para algunos valores de  $j$ . Para ver esto es necesario saber un poco más sobre los elementos del triángulo de Borel.

En [10], definen a los números del triángulo de Borel en términos de los números del triángulo de Catalán. Explícitamente, si  $C_{k,r} = \binom{k+r}{r} - \binom{k+r}{r-1}$ , entonces

$$f_{k,r} = \sum_{i=0}^k \binom{i}{r} C_{k,i}.$$

Alternativamente, para todo real  $t$  se cumple que

$$\sum_{r=0}^k C_{k,r} (t+1)^r = \sum_{r=0}^k f_{k,r} t^r.$$

---

<sup>1</sup>Agradezco a Jorge Fernández Hidalgo por haber desarrollado el programa que hiciera esto posible.

Tomando  $t = -1$  en la ecuación anterior y cambiando  $k$  por  $k - 1$  obtenemos que

$$1 = C_{k-1,0} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r f_{k-1,r} = \sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{k-r+1} f_{k-1,k-r+1}.$$

La suma de la derecha en la ecuación anterior es la suma que se obtiene cuando se sustituye  $j = 1$  en el lado derecho de la ecuación (4.13). Por otro lado, es claro que  $\mathcal{G}(2k, 1) = 1$ . Por lo tanto, la ecuación (4.13) es cierta para todo  $k$  cuando  $j = 1$ .

Para demostrar la validez de la ecuación en el caso  $j = k + 1$ , primero probemos el siguiente lema.

**Lema 4.4.1.** *Si  $\pi \in \mathcal{P}(2k)$  es una partición doble con  $k+1$  bloques, entonces es una partición bicolor doble.*

*Demostración.* Procedamos por inducción sobre  $k$ . Supongamos que el enunciado es cierto para  $k$ . Sea  $\pi \in \mathcal{P}(2k+2)$  una partición doble con  $k+2$  bloques, en la Sección 1 de este capítulo demostramos que esto implica que  $C_{2k+2}^\pi$  es un árbol doble. Sean  $v_1, \dots, v_{2k+2}$  los vértices de  $C_{2k+2}^\pi$  numerados en orden cíclico. Supongamos que  $v_j$  es una hoja del árbol doble  $C_{2k+2}^\pi$ . Borrando  $v_j$  y las dos aristas que lo tienen como extremo, podemos pensar al resto de la gráfica como un cociente de  $C_{2k}$ , aplicando la hipótesis de inducción, esta parte de la gráfica será un árbol doble bicolor, y dado que en  $C_{2k+2}^\pi$  en  $v_j$ , la arista que salía era de un color distinto a la arista que entraba, entonces  $C_{2k+2}^\pi$  es un árbol bicolor. El caso base  $k = 1$  es trivial.  $\square$

De lo anterior  $\mathcal{F}(2k, k+1) = \mathcal{G}(2k, k+1)$ , donde  $\mathcal{F}(2k, j)$  es el número de particiones dobles no dirigidas de  $[2k]$  con  $j$  bloques. En el Lema 4.2.3 se demostró que  $\mathcal{F}(2k, k+1) = C_k$ , por lo tanto  $\mathcal{G}(2k, k+1) = C_k$ .

Por otro lado, sustituyendo  $j = k+1$  en (4.13) el lado derecho se convierte en  $\sum_{r=1}^{k+1} f_{k-1,r} = C_k$ . Por lo que la conjetura también es cierta para el caso  $j = k + 1$ .

Se hicieron varios intentos para obtener una fórmula cerrada para los valores de  $\mathcal{G}(2k, j)$ . Sin embargo, solo fue posible demostrar que  $\mathcal{G}(2k, 2) = \binom{2k}{k} - 1$ <sup>2</sup>. En mi opinión, las particiones bicolors dobles carecen de la estructura necesaria para que exista una fórmula “satisfactoria” para los valores de  $\mathcal{G}(2k, j)$ , cuando  $k$  es grande y  $2 < j < k$ .

<sup>2</sup>Agradezco a Daniel Perales Anaya por dar una demostración de este hecho.

Finalmente, una aplicación directa de la identidad obtenida en el Corolario 4.1.2, a la fórmula (4.12), nos da una fórmula explícita para los coeficientes de la función racional que describe a  $\mathbb{E}[tr(\rho_N^k)]$ .

**Teorema 4.4.1.** *Sean  $N$  y  $k$  enteros positivos, entonces*

$$\mathbb{E}[tr(\rho_N^k)] = N^{-2k-1} \sum_{j=1}^{k+1} a_j N^j,$$

donde

$$a_j = \sum_{r=j}^{k+1} (-1)^{r-j} e_{r-j}(1, \dots, k) \mathcal{G}(2k, j). \quad (4.14)$$

## 4.5 Matrices unitarias de Haar

Para obtener la distribución asintótica en tráficos de las matrices unitarias de Haar se requieren herramientas más sofisticadas.

En el caso de las matrices de Wigner con entradas balanceadas, se utilizó de manera implícita que para cualquier momento de gráfica  $T = (V, E)$ , todos los sumandos de  $\tau^0[T]$  valen lo mismo, sin importar qué función inyectiva  $k : V \rightarrow [N]$  se tome. En el caso de matrices unitarias de Haar, y en general en matrices aleatorias que no pueden ser expresadas como ensambles de variables aleatorias, este tipo de propiedades no son evidentes y por lo tanto es conveniente desarrollar herramientas con las cuales se puedan tratar.

**Definición 4.5.1** (Densidad inyectiva). *Sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica, y sea  $\mathbf{A}_N = (A_e)_E$  una familia de matrices aleatorias de  $N \times N$  asignadas a las aristas de  $T$ . Sea  $\kappa_N$  una función aleatoria independiente de  $\mathbf{A}_N$ , que va de  $V$  a  $[N]$  y es tomada con distribución uniforme sobre el conjunto de funciones inyectivas de  $V$  a  $[N]$ . Entonces definimos*

$$\delta^0[T(\mathbf{A}_N)] := \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} A_e(\kappa_N(t(e)), \kappa_N(s(e))) \right].$$

De la definición es claro que la densidad inyectiva no es más que un múltiplo del funcional inyectivo. De hecho

$$\tau^0[T(\mathbf{A}_N)] = \frac{\binom{N}{|V|}}{N} \delta^0[T(\mathbf{A}_N)].$$

Una de las razones por las que Male introdujo este concepto es porque ayuda a simplificar algunas pruebas, ya que al utilizarlo, implícitamente se usa el método probabilístico, como se muestra a continuación.

**Lema 4.5.1.** *Sean  $\mathbf{A}_N$  y  $T$  como antes. Si cada matriz de  $\mathbf{A}_N$  es invariante bajo conjugación por una matriz de permutación, entonces para cada función inyectiva  $k : V \rightarrow [N]$  se tiene que*

$$\delta^0[T(\mathbf{A}_N)] = \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \right].$$

*Demostración.* Sea  $A_j \in \mathbf{A}_N$ . Como  $A_j$  es invariante bajo conjugación por permutación, la distribución conjunta de sus entradas también lo es y por lo tanto la distribución marginal de estas. Entonces, para toda función inyectiva  $k : V \rightarrow [N]$  y cualquier permutación  $\sigma \in S_N$  tenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \right] = \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} A_e(\sigma \circ k(t(e)), \sigma \circ k(s(e))) \right].$$

Entonces, la igualdad anterior se cumple con probabilidad 1 para cuando  $\sigma$  es la realización de una permutación aleatoria uniforme  $\sigma_N$ . Por lo tanto

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \right] = \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E} A_e(\sigma_N \circ k(t(e)), \sigma_N \circ k(s(e))) \right].$$

Por otro lado,  $\sigma_N \circ k$  se distribuye de la misma manera que  $\kappa$ , de donde se sigue el resultado.  $\square$

El soporte de la distribución límite en tráfico de las matrices unitarias de Haar es una familia de gráficas a las que llamaremos *cactus*.

**Definición 4.5.2.** *Una gráfica dirigida es un cactus si es conexa y es unión de ciclos dirigidos, de forma que no hay dos ciclos con una arista en común ni compartiendo más de un vértice.*

Ahora estamos listos para presentar la demostración de Male del siguiente teorema.

**Teorema 4.5.1.** *Sea  $\{U_N\}_{N=1}^\infty$  una sucesión de matrices unitarias de Haar y sea  $T$  un momento de gráfica. Pintemos de rojo las aristas de  $T$  en donde se sustituirán matrices de la forma  $U_N$  y de azul las aristas en donde se*



sustituirán matrices de la forma  $U_N^*$ . Entonces

$$\tau^0[T(U_N, U_N^*)] = \begin{cases} \prod_{i=1}^L (-1)^{\frac{k_i}{2}-1} C_{\frac{k_i}{2}-1} & \text{si } T \text{ es un cactus con ciclos} \\ & \text{pares coloreados alternadamente,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.15)$$

donde  $C_k$  denota el  $k$ -ésimo números de Catalán,  $L$  la cantidad de ciclos de  $T$  y  $k_1, \dots, k_L$  sus respectivas longitudes.

*Demostración.* Sea  $r$  y  $r'$  la cantidad de aristas rojas y azules respectivamente. Sea  $k : V \rightarrow [N]$  una función inyectiva y denotemos las aristas rojas como  $(j_1, i_1) \dots, (j_r, i_r)$  y las azules como  $(i'_1, j'_1), \dots, (i'_{r'}, j'_{r'})$ , donde cada  $i_n, j_n, i'_n, j'_n$  es el valor de  $k$  en el respectivo vértice. Luego, dado que las matrices unitarias de Haar son invariantes bajo conjugación por matrices de permutación, por el Lema 4.5.1 tenemos que

$$\delta_N^0[T(U_N)] = \mathbb{E}[U_N(i_1, j_1) \cdots U_N(i_r, j_r) U_N^*(j'_1, i'_1) \cdots U_N^*(j'_{r'}, i'_{r'})].$$

Por otra parte, por el Teorema 1.3.4, el producto anterior vale cero si  $r \neq r'$  y si hay la misma cantidad de aristas rojas que aristas azules vale

$$\sum_{\sigma, \tau \in S_k} \delta_{i_{\sigma(1)} i'_1} \cdots \delta_{i_{\sigma(r)} i'_r} \delta_{j_{\tau(1)} j'(1)} \cdots \delta_{j_{\tau(r)} j'(r)} Wg(\sigma \circ \tau^{-1}, N).$$

Sea  $T$  un momento de gráfica para el cual la suma anterior no sea trivial y sean  $\sigma$  y  $\tau$  permutaciones de  $S_r$  que cumplan que el producto de las respectivas deltas de Kronecker no sea cero. Relacionaremos la estructura de  $\sigma$  y  $\tau$  con la de  $T$ .

Como la  $k : V \rightarrow [N]$  que tomamos al inicio es inyectiva, si dos índices son iguales, su respectivo vértice será el mismo. Entonces, podemos pensar a las deltas de Kronecker como una regla para pegar las aristas  $(j_1, i_1), \dots, (j_r, i_r)$  con las aristas  $(i'_1, j'_1), \dots, (i'_{r'}, j'_{r'})$ . De la condición dada por las deltas, tenemos que  $i_{\sigma(n)} = i'_n$  y  $j_{\tau(n)} = j'_n$  para todo  $n$ .

Pensemos a  $\sigma$  como una función que va de las aristas azules a las aristas rojas con la siguiente regla  $(i'_n, j'_n) \mapsto (j_{\sigma(n)}, i_{\sigma(n)})$  y de la misma manera pensemos a  $\tau$  como una función de las aristas azules a las rojas con la regla  $(i'_n, j'_n) \mapsto (j_{\tau(n)}, i_{\tau(n)})$ . Intuitivamente,  $\sigma$  recorre las aristas hacia “atrás” y  $\tau$  las recorre hacia adelante. Ahora, tomemos una permutación  $\pi \in S_{|E|}$  cuya acción sobre  $E$  está dada por

$$\pi(e) := \begin{cases} \sigma(e) & \text{si } e \text{ es azul,} \\ \tau^{-1}(e) & \text{si } e \text{ es roja.} \end{cases}$$

De la definición podemos ver que la acción de  $\pi^2$  restringida a las aristas azules es igual a la acción de  $\sigma \circ \tau^{-1}$ . Entonces, la cantidad de ciclos de  $\pi$  es igual a la cantidad de ciclos de  $\sigma \circ \tau^{-1}$  y la longitud de los ciclos de  $\pi$  es igual al doble de la longitud de los respectivos ciclos de  $\sigma \circ \tau^{-1}$ . Esta observación es sumamente útil pues recordemos que el Lema 1.3.2 nos da la siguiente aproximación de la función de Waingarten

$$Wg(\sigma \circ \tau^{-1}, N) = \psi(\sigma \circ \tau^{-1}) N^{-2r + \#(\sigma \circ \tau^{-1})} (1 + O(N^{-2})),$$

donde  $\psi(\sigma \circ \tau^{-1}) = \prod_{i=1}^L (-1)^{k_i-1} C_{k_i-1}$ , y los  $k_i$  son las respectivas longitudes de los ciclos de  $\sigma \circ \tau^{-1}$ . Como  $\#(\pi) = \#(\sigma \circ \tau^{-1})$  y las longitudes de los ciclos de  $\pi$  están relacionadas con las longitudes de los ciclos de  $\sigma \circ \tau^{-1}$ , ahora podemos cambiar el problema a estudiar la relación entre la estructura de  $\pi$  y la de  $T$ . Esta última es clara, por ejemplo, dado que  $\pi \in S_{|E|}$  y su acción sobre  $E$  consiste en mandar cada arista en su adyacente anterior, los ciclos de  $\pi$  corresponden a ciclos dirigidos en  $T$ . Más aún, estos ciclos dirigidos de  $T$  deben de alternar colores, pues la acción de  $\pi$  siempre envía una arista roja a una azul y vice versa. Dado que los ciclos de  $\pi$  no tienen elementos en común, podemos concluir que  $T$  es una unión de ciclos dirigidos con colores alternados que no tienen aristas en común. En otras palabras,  $T$  es casi un cactus. Sin embargo, para ver que el hecho de que  $T$  es un momento de gráfica en donde la distribución asintótica de  $U_N$  no se anula, implica que los ciclos de  $T$  a lo más comparten un vértice, es algo que ya no se puede obtener para cada  $N$  y entonces será necesario hacer un análisis asintótico con la aproximación de la función de Waingarten mencionada anteriormente.

Construyamos una gráfica no dirigida,  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{V}$  será la unión de  $V$  con los ciclos de  $\pi$ . Luego, por cada arista en  $T$ , digamos  $e = (u, v)$ , pondremos una arista no dirigida en  $\mathcal{G}$ , entre un ciclo en  $\pi$  y  $v$ , si  $e$  pertenece a dicho ciclo. Como  $T$  es conexa,  $\mathcal{G}$  es conexa.

Por definición  $|\mathcal{V}| = |V| + \#(\pi)$  y  $|\mathcal{E}| = |E|$ .

Ahora recordemos que

$$\tau^0[T(U_N, U_N^*)] = \frac{\binom{N}{|V|}}{N} \delta^0[T(U_N, U_N^*)] = O(N^{|V|-1}) \delta^0[T(U_N, U_N^*)].$$

Sustituyendo la fórmula que tenemos para  $\delta^0$  en la ecuación anterior, asociando una  $\pi$  como antes a cada pareja de permutaciones  $\sigma$  y  $\tau$  que cumplen la condición y utilizando la aproximación de la función de Waingarten obten-

emos

$$\begin{aligned} \tau^0[T(U_N, U_N^*)] &= \sum_{\pi} N^{|\mathcal{V}|-1} \cdot N^{-2\frac{|\mathcal{E}|}{2} + \#(\pi)} \psi(\sigma \circ \tau^{-1})(1 + O(N^{-2})) \\ &= \sum_{\pi} N^{|\mathcal{V}|-|\mathcal{E}|-1} \psi(\sigma \circ \tau^{-1})(1 + O(N^{-2})). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Luego, como  $\mathcal{G}$  es conexa tenemos  $|\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| - 1 \leq 0$ , con igualdad si y solo si  $\mathcal{G}$  es un árbol. Entonces, si  $\mathcal{G}$  no es un árbol,  $\tau^0[T(U_N, U_N^*)] \rightarrow 0$ . Para determinar el valor al que converge en el caso en el que  $\mathcal{G}$  es un árbol, notemos que al tomar  $\sigma$  y  $\tau$  permutaciones arbitrarias cuyo término asociado no era cero, y tomando el  $\pi$  asociado a estas, demostramos que los ciclos de  $\pi$  coincidían en número y en tamaño con los de  $T$  y por otro lado, coincidían en número con los de  $\sigma \circ \tau^{-1}$  y tenían el doble de longitud que los de esta permutación. Entonces, el valor de  $\psi(\sigma \circ \tau^{-1})$  es constante en la suma anterior e igual a  $\prod_{i=1}^L C_{\frac{K_i}{2}-1}$ , donde  $K_1, \dots, K_l$  son las longitudes de los ciclos de  $T$ .

Por último, demostraremos que el hecho de que  $\mathcal{G}$  es un árbol es equivalente al hecho de que  $T$  es un cactus.

Primero veamos que si  $T$  no es un cactus entonces  $\mathcal{G}$  no es un árbol. Tomemos dos ciclos en  $T$ , digamos  $c_1$  y  $c_2$ , que se intersectan en dos vértices distintos  $u$  y  $v$ . Recordemos que los ciclos en  $T$  están en correspondencia con ciclos en  $\pi$ , entonces podemos pensar a  $c_1$  y  $c_2$  como vértices de  $\mathcal{G}$ . Por construcción, tanto  $c_1$  como  $c_2$  están conectados con  $u$  y  $v$ , por lo tanto los vértices  $u, c_1, v, c_2$  forman un ciclo y por lo tanto  $\mathcal{G}$  no es un árbol.

Ahora resta demostrar que si  $\mathcal{G}$  no es un árbol, entonces  $T$  no es un Cactus. Para esto tomemos un ciclo de  $\mathcal{G}$ , cuyos vértices en sentido cíclico serán denotados por  $v_1, c_1, \dots, v_l, c_l$ , donde  $v_i \in V$  y  $c_i$  son ciclos de  $T$ . Definiendo  $l+1 = 1$ , vemos que el hecho de que cada  $v_i$  esté conectado con  $c_{i-1}$  y  $c_i$  implica que hay un camino dirigido en  $T$  de  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . Concatenando estos caminos obtenemos un ciclo que pasa por los vértices  $v_1, \dots, v_l$  y utiliza las aristas de los ciclos  $c_1, \dots, c_l$ . En particular, este ciclo tiene una arista en común con cualquiera de los ciclos  $c_i$ , por lo tanto  $T$  no es un cactus.  $\square$

Notemos que la distribución asintótica en tráfico nos permite discernir la distribución límite de matrices aleatorias de permutación de la distribución límite de las matrices unitarias de Haar, algo que no se puede hacer desde la Probabilidad Libre usual. El resultado anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 4.5.3** (Tráfico unitario de Haar.). *Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráfico. Diremos que  $u \in \mathcal{A}$  es un tráfico unitario de Haar, si  $u$  es unitario*

*y tiene la distribución límite de las matrices unitarias de Haar.*

## Capítulo 5

# Teoremas asintóticos en la Teoría de Tráficos

La primer parte de este capítulo se enfoca en probar el teorema de asintoticidad libre en tráficos para matrices aleatorias independientes en el sentido clásico que son invariantes en ley bajo conjugación por matrices de permutación.

La segunda parte presenta dos ejemplos en los que la Teoría de Tráficos unifica las nociones de independencia clásica e independencia libre.

### 5.1 Asintoticidad libre en tráficos de matrices aleatorias

En la segunda sección del capítulo anterior estudiamos la distribución límite en tráficos de matrices de Wigner con entradas balanceadas.

Primero, a modo de ejemplo, consideremos el problema de estudiar la distribución conjunta asintótica en tráficos de familias de matrices de Wigner independientes. Sea  $J$  un conjunto de índices y consideremos la familia de sucesiones independientes de matrices de Wigner complejas  $\mathbf{W}_N = (W_N^{(j)})_{j \in J}$ , donde para cada  $j \in J$  y  $N$  entero positivo supondremos que  $\frac{1}{\sqrt{N}}A_N^{(j)} := W_N^{(j)}$  cumple que las entradas de  $A_N^{(j)}$  son balanceadas y de varianza uno. Denotemos  $\mathbf{A}_N = (A_N^{(j)})_{j \in J}$ .

Tomemos  $\mathbf{x} = (x_j)_{j \in J}$  una familia de indeterminadas. Recordemos del Capítulo 3, que todo  $T \in \mathcal{G}^{(0)}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ , es de la forma  $T = (V, E, \gamma, \varepsilon)$ , con  $\gamma : E \rightarrow \mathbf{x}$ ,  $\varepsilon : E \rightarrow \{1, *\}$  y que  $\tau[T(\mathbf{W}_N)]$  denota el resultado de evaluar el funcional  $\tau$  sobre  $T$ , cuando en cada arista  $e$  de  $T$  se sustituye la matriz

$(W_N^{\gamma(e)})^{\varepsilon(e)}$ . Si  $e$  es una arista de  $T$ , diremos que  $e$  es de color  $j$  si  $\gamma(e) = j$ . También recordemos que cuando borremos todas las aristas en  $T$  que no sean de un cierto color  $j \in J$ , la gráfica quedará dividida en componentes conexas monocromáticas maximales, las cuales son llamadas componentes coloreadas y en base a estas se construye la gráfica de componentes coloreadas, denotada por  $G_{c.c.}(T)$ , e introducida en la Definición 3.3.2.

Calcular  $\tau^0[T(\mathbf{W}_N)]$  es esencialmente igual a lo hecho en el capítulo anterior. De hecho, dado que las matrices  $W_N^{(j)}$  son independientes, con un razonamiento análogo al presentado en el Lema 4.2.1, obtenemos que para que el funcional inyectivo no se anule, las componentes coloreadas de  $T$  deben de ser gráficas dobles no dirigidas. Diremos que una gráfica coloreada  $G$  es una gráfica doble coloreada, si para cualesquiera dos de sus vértices, digamos  $u$  y  $v$ , la cantidad de aristas de un color dado que conectan a  $u$  con  $v$  es igual a la cantidad de aristas del mismo color que conectan  $v$  con  $u$ . Si  $G$  es una gráfica doble coloreada, denotaremos por  $\hat{G}$  a la gráfica coloreada obtenida al identificar parejas de aristas que conectan mismos vértices y que son del mismo color, las aristas obtenidas de esta manera serán coloreadas con el color de las respectivas aristas identificadas.

Luego, el análisis asintótico de  $\tau^0[T(\mathbf{W}_N)]$  también resulta ser totalmente análogo, pues  $\tau^0[T(\mathbf{W}_N)] = N^{-\frac{|E|}{2}-1} \tau^0[\mathbf{A}_N]$ , y nuevamente tenemos  $\tau^0[\mathbf{A}_N] = (N)_{|V|} \delta^0[T(\mathbf{A}_N)]$ . Entonces, necesitamos  $T$  tal que  $N^{|V|-\frac{|E|}{2}-1}$  no tenga límite cero, y esto solo sucede cuando  $T$  es un árbol doble no dirigido, en donde aristas que unen la misma pareja de vértices tienen el mismo color, a esta estructura la llamaremos árbol doble no dirigido coloreado.

Entonces, habiendo caracterizado la distribución conjunta en tráfico de  $\mathbf{W}_N$ , para demostrar que las matrices en  $\mathbf{W}_N$  son asintóticamente independientes en el sentido de tráfico, resta demostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T(\mathbf{W}_N)] = \chi_{G_{c.c.}(T) \text{ es un árbol}} \prod_S \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[S(\mathbf{W}_N)] \right), \quad (5.1)$$

en donde el producto anterior corre sobre todas las  $S$ , componentes coloreadas de  $T$ . Para esto, veamos que todo ciclo en  $G_{c.c.}(T)$  induce un ciclo en  $\hat{T}$ , entonces,  $\chi_{G_{c.c.}(T) \text{ es un árbol}} = 0$  implica que  $T$  tiene un ciclo y por lo mencionado anteriormente el lado izquierdo de (5.1) también será cero. Por otro lado, si el lado derecho de la ecuación (5.1) no es cero, entonces  $G_{c.c.}(T)$  es un árbol y  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[S(\mathbf{W}_N)] \neq 0$  para toda componente coloreada  $S$ . Como se vio en el capítulo anterior, esto solo sucede cuando  $S$  es un árbol doble no dirigido, en cuyo caso  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[S(\mathbf{W}_N)] = 1$ . Además, si cada  $S$  es un árbol doble no dirigido y  $G_{c.c.}(T)$  es un árbol, entonces  $T$  es un

árbol doble no dirigido coloreado, por lo que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau[T(\mathbf{W}_N)] = 1$ , en cuyo caso la igualdad (5.1) también se satisface. Con esto y lo elaborado en el capítulo anterior queda demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 5.1.1.** *Sea  $\mathbf{W}_N = (W_N^{(j)})_{j \in J}$  una familia de sucesiones de matrices de Wigner independientes con entradas balanceadas de varianza uno. Entonces cada  $\mathbf{W}_N$  converge en distribución a una familia de tráficoos semicirculares independientes en el sentido de tráficoos.*

Es posible demostrar un teorema mucho más general sobre la independencia asintótica en tráficoos.

**Teorema 5.1.1** (Independencia asintótica en tráficoos para matrices aleatorias). *Sean  $\mathbf{A}_N^{(1)}, \dots, \mathbf{A}_N^{(L)}$  sucesiones de familias independientes de matrices aleatorias. Para  $l = 1, \dots, L$ , denotemos  $\mathbf{A}_N^{(l)} = (A_j^{(l)})_{j \in J_l}$  y consideremos la familia de indeterminadas  $\mathbf{x}_l = (x_j^{(l)})$ . Supongamos lo siguiente:*

- *Cada familia es invariante en ley bajo conjugación por matrices de permutación.*
- *Cada familia converge en distribución de tráficoos.*
- *Cada familia  $\mathbf{A}_N^l$  satisface la propiedad de factorización: Para cualesquiera  $g_1, \dots, g_K \in \mathbb{C}\mathcal{G}^{(2)}\langle \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_l^* \rangle$ , se cumple que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \text{tr}(Z_{g_i}(\mathbf{A}_N^{(l)})) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^K \mathbb{E}[\text{tr}(Z_{g_i}(\mathbf{A}_N^{(l)}))]. \quad (5.2)$$

*Bajo las tres hipótesis anteriores las familias  $\mathbf{A}_N^{(1)}, \dots, \mathbf{A}_N^{(L)}$  son asintóticamente independientes en el sentido de tráficoos.*

Cabe resaltar que las matrices unitarias de Haar, las matrices aleatorias de permutación, y una familia grande de matrices de Wigner cumplen las tres hipótesis del teorema anterior. Ya mencionamos en el capítulo anterior que en el caso en el que las entradas de una matriz de Wigner son simétricas, entonces esta será invariante bajo conjugación por una matriz de permutación. Es un resultado clásico que tanto las matrices aleatorias de permutación como las matrices unitarias de Haar son invariantes bajo conjugación por matrices unitarias, lo cual es aún más fuerte que la primera hipótesis. En el capítulo anterior, demostramos que estos tres modelos de matrices satisfacen la convergencia en distribución de tráficoos. En [19], se

demuestra que estos tres modelos también satisfacen la propiedad de factorización.

Las dos primeras hipótesis del teorema anterior aparecen con frecuencia como hipótesis en varios resultados clásicos si se cambia la convergencia en distribución de tráfico por la convergencia en distribución usual, y la invarianza bajo conjugación por matrices de permutación por invarianza bajo conjugación por una matriz unitaria. Sin embargo, la tercera hipótesis puede resultar extraña a primera vista, incluso para un lector familiarizado con la Teoría de Matrices Aleatorias. Esta hipótesis garantiza la convergencia de productos que aparecen de manera natural al calcular los momentos de gráficas mixtos de familias de matrices aleatorias. Notemos que el lado derecho de la ecuación (5.2), puede ser rescrito como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^K \tau[\hat{g}_i((\mathbf{A}_N^{(l)}))],$$

donde  $\hat{g}_i$  es el momento de gráfica obtenido al identificar la entrada y la salida de  $g_i$ . Ahora veremos que esta propiedad de factorización es equivalente a otra propiedad de factorización similar para el funcional inyectivo.

**Lema 5.1.1.** *Sea  $\mathbf{A}_N$  una sucesión de familias de matrices aleatorias que converge en distribución de tráfico. Entonces  $\mathbf{A}_N$  satisface la propiedad de factorización del Teorema 5.1.1 si y solo si, para cualesquiera momentos de gráfica  $T_1, \dots, T_K$ , con  $K \geq 2$ , se cumple que*

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} \text{Tr}[T_k(\mathbf{A}_N)] \right] \longrightarrow \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \tau[T_i(\mathbf{A}_N)],$$

lo cual implica que para cualesquiera momentos de gráfica  $T_1, \dots, T_K$ , con  $K \geq 2$ , se cumple que

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} \text{Tr}^0[T_i(\mathbf{A}_N)] \right] \longrightarrow \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T_i(\mathbf{A}_N)].$$

*Demostración.* La primera parte del lema se sigue de la definición de  $\tau[T(\cdot)]$ . Ahora supongamos que

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} \text{Tr}[T_k(\mathbf{A}_N)] \right] \longrightarrow \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \tau[T_i(\mathbf{A}_N)],$$

y probemos la propiedad análoga para la traza inyectiva. De la misma manera en que podíamos escribir a  $\tau^0$  en términos de  $\tau$  utilizando la forma



de inversión de Möbius, también tenemos para todo  $i = 1, \dots, K$  la siguiente igualdad

$$Tr^0[T_i(\mathbf{A}_N)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V_i)} \text{Mob}(\pi, 1_{V_i}) Tr[T_i^\pi(\mathbf{A}_N)]. \quad (5.3)$$

Sustituyendo lo anterior en  $\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} Tr[T_i(\mathbf{A}_N)] \right]$  y desarrollando la expresión obtenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} Tr^0[T_i(\mathbf{A}_N)] \right] = \sum_{\substack{\pi_i \in \mathcal{P}(V_i) \\ i=1, \dots, K}} \left( \prod_{i=1}^K \text{Mob}(\pi_i, 1_{V_i}) \right) \cdot \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} Tr[T_i^{\pi_i}(\mathbf{A}_N)] \right].$$

Utilizando la suposición, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^K \frac{1}{N} Tr^0[T_i(\mathbf{A}_N)] \right] &= \sum_{\substack{\pi_i \in \mathcal{P}(V_i) \\ i=1, \dots, K}} \left( \prod_{i=1}^K \text{Mob}(\pi_i, 1_{V_i}) \right) \cdot \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \tau[T_i^{\pi_i}(\mathbf{A}_N)] \\ &= \sum_{\substack{\pi_i \in \mathcal{P}(V_i) \\ i=1, \dots, K}} \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Mob}(\pi_i, 1_{V_i}) \tau[T_i^{\pi_i}(\mathbf{A}_N)] = \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\pi \in V_i} \text{Mob}(\pi, 1_{V_i}) \tau[T_i^\pi(\mathbf{A}_N)] \\ &= \prod_{i=1}^K \lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T_i(\mathbf{A}_N)]. \end{aligned}$$

□

A continuación presentamos la demostración del Teorema 5.1.1 dada por Male en [19].

### 5.1.1 Demostración del teorema de independencia asintótica en tráfico

Probaremos el Teorema 5.1.1 por inducción sobre  $L$ . Es claro que el caso  $L = 2$  basta como caso base y también como paso inductivo. Entonces, en lo que sigue  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  serán dos familias de matrices aleatorias de  $N \times N$  independientes, invariantes en ley bajo conjugación por matrices de permutación y que cumplen la propiedad de factorización.

Para lo siguiente necesitaremos tratar objetos formados por uniones disjuntas de momentos de gráfica. A estos los llamaremos momentos desconexos. Dado un momento desconexo  $T = (V, E)$  cuyas aristas están etiquetadas por matrices aleatorias en  $\mathbf{A}$ , denotaremos

$$Tr^0[T(\mathbf{A})] := \sum_{\substack{k: V \rightarrow [N] \\ k \text{ es inyectiva}}} \prod_{e \in E} A_e(k(t(e)), k(s(e))).$$

Definiremos  $Tr[T(\mathbf{A})]$  de la misma manera, pero sin la restricción de que las funciones  $k$  sobre las que corre la suma sean inyectivas. Entonces, como antes,  $\tau[T(\mathbf{A})] = \frac{1}{N} \mathbb{E}[Tr[T(\mathbf{A})]]$  y  $\tau^0[T(\mathbf{A})] = \frac{1}{N} \mathbb{E}[Tr^0[T(\mathbf{A})]]$ .

**Lema 5.1.2.** *Sea  $T = (V, E)$  un momento desconexo cuyas aristas están etiquetadas con elementos en  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$ . Para  $i = 1, 2$ , sea  $T_i = (V_i, E_i)$  el momento desconexo que resulta de considerar solo las aristas de  $T$  que están etiquetadas con un elemento en  $\mathbf{A}_i$ . Entonces tenemos que*

$$\tau_N^0[T(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)] = N \cdot \frac{(N)_{|V|}}{(N)_{|V_1|} (N)_{|V_2|}} \tau_N^0[T_1(\mathbf{A}_1)] \tau_N^0[T_2(\mathbf{A}_2)].$$

*Demostración.* Sea  $\delta^0[\cdot]$  la densidad inyectiva definida en el capítulo anterior. Sea  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ , entonces  $\mathbf{B}$  es una familia de matrices aleatorias invariantes en ley bajo conjugación por una matriz de permutación. Dado que  $\tau^0$  es un múltiplo de  $\delta^0$  comencemos por estudiar  $\delta^0[T(\mathbf{B})]$ . Sea  $k: V \rightarrow [N]$  cualquier función inyectiva, por el Lema 4.5.1 tenemos que

$$\delta^0[T(\mathbf{B})] = \mathbb{E} \left[ \prod_{e \in E_1} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \times \prod_{e \in E_2} A_e(k(t(e)), k(s(e))) \right].$$

Utilizando el hecho de que  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  son independientes, el producto anterior se puede factorizar, además, dado que  $k \upharpoonright_{V_1}: V_1 \rightarrow [N]$ , y  $k \upharpoonright_{V_2}: V_2 \rightarrow [N]$  son funciones inyectivas, utilizando nuevamente el Lema 4.5.1, obtenemos que

$$\delta^0[T(\mathbf{B})] = \delta^0[T_1(\mathbf{A}_1)] \delta^0[T_2(\mathbf{A}_2)].$$

El resultado se sigue de las ecuaciones  $\tau^0[T(\mathbf{B})] = \frac{(N)_{|V|}}{N} \delta^0[T(\mathbf{B})]$ ,  $\tau^0[T_1(\mathbf{A}_1)] = \frac{(N)_{|V_1|}}{N} \delta^0[T_1(\mathbf{A}_1)]$  y  $\tau^0[T_2(\mathbf{A}_2)] = \frac{(N)_{|V_2|}}{N} \delta^0[T_2(\mathbf{A}_2)]$ .  $\square$

El teorema anterior nos permite factorizar la distribución conjunta inyectiva en tráficos de  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$ .

Recordemos que en el Lema 2.3.1 probamos que, si  $T$  es un momento desconexo con componentes  $T_1, \dots, T_n$ , entonces

$$\text{Tr}[T(\mathbf{A})] = \prod_{i=1}^n \text{Tr}[T_i(\mathbf{A})].$$

En el caso de  $\text{Tr}^0$  lo anterior no es cierto, sin embargo se puede obtener, en valor esperado y asintóticamente, un resultado parecido.

**Lema 5.1.3.** *Sea  $T = (V, E)$  un momento desconexo, con componentes conexas  $T_1 = (V_1, E_1), \dots, T_n(V_n, E_n)$ . Sea  $\mathbf{A}_N$  una familia de matrices aleatorias que cumple la propiedad de factorización. Supongamos que las matrices de  $\mathbf{A}_N$  se colocan en las aristas de  $T$ , entonces*

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N^n} \text{Tr}^0[T(\mathbf{A}_N)] \right] - \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{1}{N} \text{Tr}^0[T_i(\mathbf{A}_N)] \right] = O \left( \frac{1}{N} \right).$$

*Demostración.* Al igual que en la prueba del Lema 5.1.1, analicemos

$$\text{Tr}^0[T(\mathbf{A}_N)] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \text{Mob}(\pi, 1_V) \text{Tr}[T^\pi(\mathbf{A}_N)]. \quad (5.4)$$

Veremos cuáles de los términos de la derecha en la ecuación anterior se anulan asintóticamente cuando se divide por  $\frac{1}{N^n}$ . Sea  $\pi \in \mathcal{P}(V)$  y sea  $C_\pi$  la cantidad de componentes conexas de  $T^\pi$ , por lo mencionado anteriormente,  $\text{Tr}[T^\pi(\mathbf{A})]$  sí se factoriza como el producto de  $\text{Tr}$  sobre cada una de las componentes conexas de  $T^\pi$ . Luego, como  $\mathbf{A}_N$  tiene la propiedad de la factorización, el producto de evaluar  $\frac{1}{N} \text{Tr}$  sobre cada una de las componentes conexas de  $T^\pi$ , converge, en particular  $\text{Tr}[\frac{1}{N^{C_\pi}} T^\pi(\mathbf{A})]$  está acotado. De aquí que, si  $C_\pi < n$ ,  $\text{Tr}[T^\pi(\mathbf{A}_N)] = o(N^n)$ , es decir, los únicos términos representativos a nivel asintótico son aquellos en donde  $T^\pi$  tiene  $n$  componentes conexas. Como  $T$  tiene  $n$  componentes conexas, la única manera de que lo anterior suceda es que  $\pi$  solo identifique vértices en las mismas componentes. Cada  $\pi$  de esta forma puede ser pensado como unión de  $n$  particiones, en donde cada una es una partición del respectivo conjunto  $V_i$ . A la restricción de  $\pi$  a  $V_i$  la denotaremos por  $\pi_i$  y escribiremos  $\pi = \pi_1 \sqcup \dots \sqcup \pi_n$ . Entonces, utilizando nuevamente que  $\text{Tr}$  se factoriza como el producto de  $\text{Tr}$  en las componentes conexas, tenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N^n} \text{Tr}^0[T(\mathbf{A}_N)] \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{\pi_i \in \mathcal{P}(V_i) \\ i=1, \dots, n}} \text{Mob}(\pi_1 \sqcup \dots \sqcup \pi_n, 1_V) \text{Tr}[T^{\pi_i}(\mathbf{A}_N)] \right] + O \left( \frac{1}{N} \right).$$

Recordemos que la función Mob es multiplicativa. Sea  $\Lambda$  el conjunto de particiones que refinan a la partición  $\{V_1, \dots, V_n\}$ . Como

$$\Lambda = \mathcal{P}(V_1) \times \dots \times \mathcal{P}(V_n),$$

tenemos que  $\text{Mob}(\pi_1 \sqcup \dots \sqcup \pi_n, 1_V) = \text{Mob}(\pi_1, 1_{V_1}) \dots \text{Mob}(\pi_n, 1_{V_n})$ . Entonces, utilizando nuevamente la ecuación (5.4), la suma dentro de la esperanza del lado derecho de la ecuación anterior se puede factorizar como el producto de términos de la forma

$$\sum_{\pi_i \in \mathcal{P}(V_i)} \text{Tr}[T^{\pi_i}(\mathbf{A}_N)] = \text{Tr}^0[T_i^{\pi_i}(\mathbf{A}_N)].$$

De donde se sigue el resultado.  $\square$

Ahora tenemos la maquinaria suficiente para hacer un análisis asintótico de los momentos de gráfica mixtos de  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$ . Sea  $T$  un momento de gráfica con elementos de  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  en sus aristas. Sean  $T_1 = (V_1, E_1)$  y  $T_2 = (V_2, E_2)$  como en el Lema 5.1.2, y sean  $K_1$  y  $K_2$  la respectiva cantidad de componentes conexas. Para  $i = 1, 2$ , sean  $T_{i,1}, \dots, T_{i,K_i}$  las componentes conexas de  $T_i$ . Combinando los dos lemas anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} \tau^0[T(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)] &= \left( N \cdot \frac{(N)^{|V|}}{(N)^{|V_1|}(N)^{|V_2|}} \right) \\ &\times \left( (N^{K_1-1} \cdot N^{K_2-1}) \cdot \left( \prod_{i=1}^2 \mathbb{E} \left[ \prod_{k=1}^{K_i} \frac{1}{N} \text{Tr}^0[T_{i,k}(\mathbf{A}_i)] \right] + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sea  $\eta := K_1 + K_2 + |V| - |V_1| - |V_2| - 1$ , entonces la expresión anterior es precisamente de orden  $N^\eta(1 + O(\frac{1}{N}))$ . Por el Lema 5.1.1, la propiedad de factorización para  $\tau$  también implica la propiedad de factorización para  $\tau^0$ , entonces tenemos que para todo  $i$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \prod_{k=1}^{K_i} \frac{1}{N} \text{Tr}^0[T_{i,k}(\mathbf{A}_i)] \right] = \prod_{k=1}^{K_i} \lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T_{i,k}(\mathbf{A}_i)],$$

sustituyendo esto en la ecuación (5.5), obtenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)] = \left( \lim_{N \rightarrow \infty} N^\eta \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^2 \prod_{k=1}^{K_i} \lim_{N \rightarrow \infty} \tau^0[T_{i,k}(\mathbf{A}_i)] \right).$$

Por lo que para concluir la demostración nos bastará ver que  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^\eta = \chi_{G_{c.c.}(T)}$  es un árbol. Lo cual es equivalente a ver que  $\eta < 0$  cuando  $G_{c.c.}(T)$

no es un árbol y  $\eta = 0$  cuando sí es un árbol. Sea  $G_{c.c.}(T) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , demostraremos que  $\eta = |\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| - 1$ , con lo cual se concluirá la demostración.

Primero, sea  $C$  la cantidad de conectores en  $T$ , es decir, la cantidad de vértices que pertenecen a más de una componente coloreada. Por definición de  $G_{c.c.}(T)$ , tenemos que  $|\mathcal{V}| = K_1 + K_2 + C$ . Ahora, la fórmula de inclusión exclusión nos da  $C = |V_1| + |V_2| - |V|$ , sustituyendo esto último en  $\eta$  y utilizando que  $|\mathcal{V}| = K_1 + K_2 + C$  obtenemos que

$$\eta = K_1 + K_2 - C - 1 = |\mathcal{V}| - 2C - 1.$$

Por lo que es suficiente probar que  $|\mathcal{E}| = 2C$ . Sin embargo, esto último es claro pues cada arista en  $G_{c.c.}(T)$  une una componente conexa con un conector, es decir, cada arista tiene asignada un conector, por otro lado, cada conector pertenece exactamente a dos componentes conexas y por lo tanto cada conector tiene grado dos. Y con esto, se concluye la demostración.  $\square$

## 5.2 Unificación de teoremas límites libres y clásicos

En el primer capítulo se presentaron las versiones libres y clásicas de la ley de los grandes números y el teorema del límite central. Como ya vimos, en el teorema del límite central, las distribuciones límite difieren en cada caso, pues esta depende del tipo de independencia con que se esté trabajando.

En esta sección daremos los análogos a ambos teoremas dentro de la Teoría de Tráficos. En el caso del teorema del límite central, este teorema será una interpolación entre el teorema del límite central libre y el teorema del límite central clásico. En el caso de la ley de los grandes números, la distribución límite también será una interpolación, esta vez entre una delta de Dirac y una distribución de la que es imposible hablar desde el marco de probabilidad no conmutativa usual.

### 5.2.1 Ley de los grandes números para espacios de tráfico

Dado un espacio de probabilidad no conmutativo  $(\mathcal{A}, \phi)$ , en el primer capítulo demostramos que si  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de variables aleatorias no conmutativas, autoadjuntas, independientes e idénticamente distribuidas y  $y_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y_n^m) = \mu^m$ , donde  $\mu = \phi(a_1)$ . Demostramos que esto sucede tanto en el caso en el que las variables son independientes en el sentido clásico como en el caso en el que las variables son independientes en el sentido libre. La distribución analítica asociada a dicha familia de momentos es  $\delta_\mu$ , mientras que una variable aleatoria no conmutativa con dichos

momentos es  $\mu 1_{\mathcal{A}}$ . En el caso clásico, los múltiplos de la identidad se pueden caracterizar por la propiedad de ser variables aleatorias determinísticas. Sin embargo, al considerar un espacio de probabilidad no conmutativo es necesario dar otra caracterización a los elementos de  $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ . Resulta ser, que tanto en el caso libre como en el caso clásico, los múltiplos de la identidad son los únicos elementos del álgebra que son independientes de sí mismos.

Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráfico. Caracterizaremos todos los tráfico que son independientes de sí mismos en el sentido de tráfico. De ahora en adelante, cada que hablemos de independencia nos estaremos refiriendo a la independencia en el sentido de tráfico. De la misma manera que cuando hablemos de distribución nos estaremos refiriendo a la distribución en tráfico, a menos que de manera explícita se indique lo contrario.

Sea  $a \in \mathcal{A}$  independiente de sí mismo. Sea  $T$  un momento de gráfica cuyas aristas están etiquetadas con  $a$  o  $a^*$ . Dado que, para tráfico independientes, su distribución conjunta queda determinada por las distribuciones marginales, entonces, si en  $T$  cambiamos cualquier  $a^\varepsilon$  por  $(a')^\varepsilon$ , donde  $a'$  es un tráfico independiente de  $a$  e idénticamente distribuido, obtendremos que la evaluación del funcional inyectivo en el nuevo  $T$  permanecerá invariante. De esta manera, si  $T$  tiene  $K$  aristas, tomemos  $K$  tráfico independientes e idénticamente distribuidos a  $a$ , digamos  $a_1, \dots, a_K$ , entonces tenemos que  $\tau^0[T(a, a^*)] = \tau^0[T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K})]$ . Donde  $\tau[T(a, a^*)]$  denota a la evaluación en  $T$  del funcional con el etiquetamiento original de  $T$  con  $a$  y  $a^*$ , mientras que  $\tau[T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K})]$  denota a la evaluación en  $T$  del funcional cuando en la  $i$ -ésima arista de  $T$  se sustituye  $a_i^{\varepsilon_i}$ , con  $\varepsilon_i \in \{1, *\}$  escogido dependiendo de si en la arista  $i$  hay un  $a$  o un  $a^*$ . Notemos que si en  $T$  hay un ciclo de longitud mayor a uno, entonces en  $G_{c.c.}(T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K}))$  también habrá un ciclo, y por la definición de independencia tendremos que  $\tau^0[T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K})] = 0$  y por lo tanto  $\tau^0[T(a, a^*)] = 0$ . Así, una condición necesaria para que un tráfico sea independiente de sí mismo, es que el funcional inyectivo se anule en todos sus momentos de gráfica que tengan algún ciclo de longitud mayor a uno.

Recordemos de la definición de espacio algebraico de tráfico dada en el Capítulo 3, que el 0 denota a la operación con un único vértice y ninguna arista, por convención  $Z_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ , y definimos a la unidad de  $\mathcal{A}$  como  $1_{\mathcal{A}} = Z_0(1)$ . Por lo mencionado en la Observación 3.1.1, evaluar  $\tau$  en un momento de gráfica que tiene en una de sus aristas a  $1_{\mathcal{A}}$ , es equivalente a evaluar a  $\tau$  cuando se colapsa dicha arista, es decir, cuando se borra la arista y se identifican sus extremos. Además, la condición de que el funcional de traza inducido por  $\tau$  es unitario, se puede traducir como  $\tau[Z_0] = 1$ . Entonces, para todo momento gráfica  $T$  tenemos que  $\tau[T(1_{\mathcal{A}})] = 1$ . Luego,

si  $T$  es un momento de gráfica con un único vértice tenemos que  $\tau^0[T(1_{\mathcal{A}})] = \tau[T(1_{\mathcal{A}})] = 1$ .

Luego, como  $1_{\mathcal{A}}$  es un tráfico diagonal, el funcional inyectivo se anula en todo momento de gráfica con  $1_{\mathcal{A}}$  sustituido en una arista que no sea un lazo.

De esta manera, si  $T$  es un momento de gráfica con más de un vértice y  $K$  aristas, entonces  $\tau^0[T(a_1, \dots, a_K)] = 0$  para cualesquiera tráficos  $a_1, \dots, a_K$  distribuidos como  $1_{\mathcal{A}}$ , y en el caso en el que  $T$  tenga exactamente un vértice se tendrá  $\tau^0[T(a_1, \dots, a_K)] = 1$ . Se sigue por definición que  $1_{\mathcal{A}}$  es independiente de sí mismo.

Recordemos del Capítulo 4, que si  $J_N$  es la matriz de  $N \times N$  con  $\frac{1}{N}$  en todas sus entradas, entonces la distribución límite de esta sucesión es un tráfico que se anula en todos los momentos de gráfica que tienen ciclos, así que este límite es un candidato natural para otro tráfico independiente de sí mismo. De hecho, gracias al Teorema 5.1.1 podemos probar algo aún más fuerte. Dado que  $J_N$  es determinística y tiene todas sus entradas iguales, es invariante en ley bajo conjugación por una matriz de permutación. También ya demostramos que  $J_N$  converge en distribución. Por último,  $J_N$  satisface trivialmente la propiedad de factorización. Como las variables aleatorias determinísticas son independientes en el sentido clásico de cualquier otra variable aleatoria,  $J_N$  será independiente de cualquier matriz aleatoria. Por lo tanto, si  $\mathbf{A}_N$  es cualquier familia de matrices aleatorias que satisface las tres hipótesis del Teorema 5.1.1, tendremos que  $J_N$  y  $\mathbf{A}_N$  serán asintóticamente independientes en el sentido de tráficos. En particular,  $J_N$  es asintóticamente independiente de sí mismo. Denotemos por  $\mathcal{J}$  al tráfico distribuido como el límite de  $J_N$ .

**Proposición 5.2.1.** *Sea  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espacio de tráficos,  $\Phi$  el funcional tracial inducido por  $\tau$  y  $a \in \mathcal{A}$ . Si  $a$  es independiente de sí mismo en el sentido de tráficos, entonces  $a$  se distribuye como*

$$\Phi(a)1_{\mathcal{A}} + (\Phi(\text{deg}(a)) - \Phi(a))\mathcal{J}.$$

Donde  $\text{deg}$  es la 1-operación de gráfica con dos vértices, uno de ellos de entrada y salida a la vez y con su única arista yendo de este al vértice restante.

*Demostración.* Comencemos por calcular la distribución de  $a$ . Sea  $T$  un  $K$ -momento de gráfica, como ya mencionó anteriormente, dado que  $a$  es independiente de sí mismo,  $\tau[T(a, a^*)]$  será cero si  $T$  tiene un ciclo de longitud mayor que uno. Si  $\tau[T(a, a^*)] \neq 0$ , entonces  $T$  es un árbol al que posiblemente se le agregaron lazos en algunos de sus vértices, a esto tipo de estructura la llamaremos árbol decorado con lazos.

Ahora, si  $T$  es un árbol decorado con lazos, entonces  $G_{c.c.}(T)$  será un árbol. Entonces, tomando  $a_1, \dots, a_K$  tráfico independientes e idénticamente distribuidos a  $a$ , y  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K \in \{1, *\}$  de manera apropiada, tendremos que  $\tau^0[T(a, a^*)] = \tau^0[T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K})]$ . Por otro lado, dado que  $G_{c.c.}(T)$  es un árbol, utilizando la definición de independencia, tenemos que  $\tau^0[T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K})]$  se factoriza como el producto de la evaluación de  $\tau^0$  en cada arista, dándonos

$$\tau^0[T(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_K^{\varepsilon_K})] = \tau^0[\Delta(a)]^{l_1} \tau^0[\Delta(a^*)]^{l_2} \tau^0[\cdot \xrightarrow{a} \cdot]^{m_1} \tau^0[\cdot \xrightarrow{a^*} \cdot]^{m_2}.$$

Donde  $l_1$  es la cantidad de lazos con  $a$ ,  $l_2$  la cantidad de lazos con  $a^*$ ,  $m_1$  la cantidad de aristas con  $a$  y  $m_2$  la cantidad de aristas con  $a^*$ . Por definición  $\tau^0[\Delta(a)] = \tau[\Delta(a)] = \Phi(a)$ . De la misma manera  $\tau^0[\Delta(a^*)] = \Phi(a^*) = \Phi(a)$ . Por otro lado  $\tau^0[\cdot \xrightarrow{a} \cdot] = \tau[\cdot \xrightarrow{a} \cdot] - \tau[\Delta(a)] = \Phi(\deg(a)) - \Phi(a)$ . Análogamente  $\tau^0[\cdot \xrightarrow{a^*} \cdot] = \Phi(\deg(a)) - \Phi(a)$ .

Ahora veamos que la distribución de  $b := \Phi(a)1_{\mathcal{A}} + (\Phi(\deg(a)) - \Phi(a))\mathcal{J}$  es la misma, sea  $\alpha = \Phi(a)$  y  $\beta = \Phi(\deg(a)) - \Phi(a)$ . Como  $1_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{J}$  son independientes de sí mismo, cualquier combinación lineal de ellos también lo es. En particular  $b$  también lo es y por lo tanto se anula en los momentos de gráfica que tienen un ciclo de longitud mayor que uno. Sea  $T$  un árbol decorado con lazos. Como  $\tau^0[T(\cdot)]$  es multilineal, tenemos que

$$\tau^0[T(b)] = \sum_{\gamma: [K] \rightarrow \{1, 2\}} \alpha^{r_{1,\gamma}} \bar{\alpha}^{s_{1,\gamma}} \beta^{r_{2,\gamma}} \bar{\beta}^{s_{2,\gamma}} \tau^0[T_{\gamma}(1_{\mathcal{A}}, \mathcal{J})],$$

donde para cada elección de  $\gamma$ ,  $T_{\gamma}(1_{\mathcal{A}}, \mathcal{J})$  denota el momento de gráfica para el cual en la  $i$ -ésima entrada se sustituye  $(\alpha 1_{\mathcal{A}})^{\varepsilon_i}$  si  $\gamma(i) = 1$  y se substituye  $(\beta \mathcal{J})^{\varepsilon_i}$  si  $\gamma(i) = 2$ ; y donde  $r_{1,i}$  es la cantidad de  $i$ 's para las cuales  $\gamma(i) = 1$  y  $\varepsilon_i = 1$ ,  $s_{1,\gamma}$  la cantidad de  $i$ 's para las cuales  $\gamma(i) = 1$  y  $\varepsilon_i = *$ , análogamente para  $s_{1,\gamma}$  y  $s_{2,\gamma}$ . Luego, como  $T$  es un árbol decorado con lazos,  $G_{c.c.}(T)$  es un árbol. Además, como los tráfico  $1_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{J}$  son independientes de sí mismos e independientes entre sí, si  $\gamma(i) = 1$  y la  $i$ -ésima arista no es un lazo, utilizando un argumento análogo a antes podemos factorizar un término  $\tau^0[\cdot \xrightarrow{1_{\mathcal{A}}} \cdot]$ , el cual sabemos que será cero con lo cual se anulará el producto. De igual manera, si  $\gamma(i) = 2$  y la  $i$ -ésima arista no es un lazo, entonces podemos utilizar la definición de independencia para factorizar un término de la forma  $\tau^0[\Delta(\mathcal{J})]$ , y como  $\mathcal{J}$  está soportado en los árboles simples el producto se anulará. Por lo tanto, el único término que no se anula en la suma anterior es aquel en donde  $\gamma(i) = 1$  si la  $i$ -ésima arista es un lazo y  $\gamma(i) = 2$  en otro caso. Si  $\gamma$  es de la forma apenas descrita,



recordemos ahora que  $\tau^0$  siempre es uno en los momentos de  $1_{\mathcal{A}}$  y de  $\mathcal{J}$  que no se anulan. Por lo que

$$\tau^0[T(b)] = \alpha^{l_1} \bar{\alpha}^{m_1} \beta^{l_2} \bar{\beta}^{m_2},$$

donde  $l_1, l_2, m_1$  y  $m_2$  son como antes.  $\square$

De la proposición anterior vemos que los análogo en tráfico a las variables aleatorias con distribuciones con deltas de Dirac son los tráfico de la forma  $\alpha 1_{\mathcal{A}} + \beta \mathcal{J}$ . Parte de la demostración anterior se utilizará en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 5.2.1** (Ley de los grandes números). *Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de tráfico independientes en el sentido de tráfico e idénticamente distribuidos en tráfico. Sea  $y_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ . Entonces  $y_n$  converge en distribución de tráfico a*

$$\Phi(a_1) 1_{\mathcal{A}} + (\Phi(\text{deg}(a_1)) - \Phi(a_1)) \mathcal{J}.$$

*Demostración.* La demostración es muy similar a la demostración que dimos, de la ley de grandes números en probabilidad no conmutativa, al final de la sección dos del Capítulo 1. Sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica con  $y_n$  o  $y_n^*$  en cada una de sus aristas, tomemos  $\varepsilon : E \rightarrow \{1, *\}$ , de manera que  $\varepsilon(e) = 1$  si en la arista  $e$  se encuentra  $y_n$  y  $\varepsilon(e) = *$  en otro caso. Por la linealidad de  $\tau^0[T(\cdot)]$  tenemos que

$$\tau^0 \left[ T \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \frac{a_1^* + \dots + a_n^*}{n} \right) \right] = \sum_{\gamma: E \rightarrow [n]} n^{-|E|} \tau^0[T_{\gamma}(a_1, \dots, a_n)].$$

Donde para cada  $\gamma$ ,  $T_{\gamma}(a_1, \dots, a_n)$  denota el momento de gráfica en donde en la arista  $e$  de  $T$  se coloca la variable  $a_{\gamma(e)}^{\varepsilon(e)}$ . Como las  $a_i$  son independientes e idénticamente distribuidas, el valor de  $T_{\gamma}(a_1, \dots, a_n)$  solo dependerá de  $\ker(\gamma)$ . Entonces, dada  $\pi \in \mathcal{P}(E)$ , denotaremos por  $f(\pi)$  al valor común asociado a todas las  $\gamma$  con  $\ker(\gamma) = \pi$ . Por otro lado, para cada  $\pi \in \mathcal{P}(E)$ , la cantidad de funciones con kernel  $\pi$  es  $n^{|\pi|}$ . De aquí que

$$\tau^0 \left[ T \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \frac{a_1^* + \dots + a_n^*}{n} \right) \right] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(E)} n^{|\pi| - |E|} f(\pi).$$

Entonces, el único término representativo asintóticamente es aquel con  $|\pi| = |E|$ , o equivalentemente  $\pi = 0_E$ , es decir  $\pi$  es la partición con solo singuletes. Sea  $\gamma$  con  $\ker(\gamma) = 0_E$ . En este caso, si  $T$  tiene un ciclo de longitud mayor a

dos, tenemos que  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  tiene un ciclo y por definición de independencia  $\tau^0[T_\gamma(a_1, \dots, a_n)] = 0$ . Si  $T$  no tiene ciclos de longitud mayor que uno, es un árbol decorado con lazos, entonces  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  es un árbol, y por definición de independencia se factoriza en términos de la forma  $\tau^0[\cdot \xrightarrow{a_i} \cdot]$ ,  $\tau^0[\cdot \xrightarrow{a_i^*} \cdot]$ ,  $\tau^0[\Delta(a_i)]$  o  $\tau^0[\Delta(a_i^*)]$ , dependiendo de cuantos lazos y haya, y de como se  $\varepsilon$ . Recordemos de la prueba de la proposición anterior que esta es precisamente la distribución de

$$\Phi(a_1)1_{\mathcal{A}} + (\Phi(\text{deg}(a_1)) - \Phi(a_1))\mathcal{J}.$$

□

### 5.2.2 Teorema del límite central para espacios de tráfico

Ahora presentaremos una versión del teorema del límite central en espacios de tráfico. Esta interpola el teorema del límite central clásico y libre. Es importante notar, que en esta versión del teorema, solo se analiza la convergencia en distribución-\* y no la convergencia en distribución de tráfico, esta última fue tratada en la última edición de [19], y da como resultado un teorema que también engloba la versión booleana del teorema del límite central. Dado que en esta tesis no se desarrolla el concepto de independencia booleana, nos limitaremos a estudiar la convergencia en distribución-\*.

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $(a_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de tráfico idénticamente distribuidos, autoadjuntos, centrados, con varianza 1 e independientes en el sentido de tráfico. Sea  $z_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}}$ . Entonces existe un  $p \in [0, 1]$  tal que  $z_n$  converge en distribución-\* al tráfico*

$$\sqrt{pd} + \sqrt{1-ps},$$

donde  $d$  es un tráfico gaussiano autoadjunto estándar,  $s$  es un tráfico semi-circular y  $d$  y  $s$  son independientes en el sentido de tráfico.

*Demostración.* Dado que solo estamos interesados en la distribución-\* nos bastará entender a  $\tau$  en los momentos de gráfica que son ciclos dirigidos, o equivalentemente, usando la descomposición inyectiva del funcional de tráfico, nos bastará estudiar a  $\tau^0$  sobre los momentos de gráfica que son cocientes de ciclos dirigidos. Más aún, como las variables consideradas son autoadjuntas, no será necesario considerar momentos con adjunción.

Sea  $T = (V, E)$  un momento de gráfica obtenido como cociente en un ciclo dirigido. Por linealidad tenemos que

$$\tau^0 \left[ T \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \sum_{\gamma: E \rightarrow [n]} n^{-\frac{|E|}{2}} \tau^0 [T_\gamma(a_1, \dots, a_n)].$$

Donde  $T_\gamma(a_1, \dots, a_n)$  es el momento de gráfica en donde en cada arista  $e \in E$  se pone la variable  $a_{\gamma(e)}$ . Nuevamente, dado que las variables son independientes en el sentido de tráficos e idénticamente distribuidas, el valor de  $\tau^0[T_\gamma(a_1, \dots, a_n)]$  solo depende de  $\ker(\gamma)$ . Dado  $\pi \in \mathcal{P}(E)$ , denotaremos por  $f(\pi)$  al valor común del funcional inyectivo en los  $T_\gamma$  con  $\ker(\gamma) = \pi$ . Como hay  $n^{|\pi|}$  funciones  $\gamma : E \rightarrow [n]$ , con  $\ker(\gamma) = \pi$ , podemos describir

$$\tau^0 \left[ T \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \sum_{\gamma: E \rightarrow [n]} n^{|\pi| - \frac{|E|}{2}} f(\pi).$$

Entonces, los términos asintóticamente representativos serán aquellos con  $|\pi| \geq \frac{|E|}{2}$ . Supongamos que  $\pi$  tiene un singulete y tomemos un  $\gamma$  con  $\ker(\gamma) = \pi$ . Sea  $e$  la arista que se encuentra en el singulete en  $\pi$ , entonces  $e$  por sí sola es una componente coloreada de  $T_\gamma$ . Como  $T$  es el cociente de un ciclo, al remover a  $e$  de  $T$  la gráfica resultante seguirá siendo conexa. Ahora, si  $e$  no es un lazo, y dado que  $e$  es una componente coloreada, sus dos extremos serán conectores, luego si  $T_\gamma - e$  denota a al momento de gráfica obtenido al borrar  $e$ , dado que  $T_\gamma - e$  es conexo,  $G_{c.c.}(T_\gamma - e)$  es conexo, y entonces en  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  el vértice correspondiente a  $e$  se conecta por dos aristas a una gráfica conexa, por lo tanto  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  tiene un ciclo, y por la definición de independencia en tráficos  $f(\pi) = 0$ . Por otro lado, si  $e$  es un lazo y  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  es un árbol, por la definición de independencia en tráficos, podemos factorizar de  $f(\pi)$  al término  $\tau^0[\Delta(a_{\gamma(e)})]$ , pero por la hipótesis de que los tráficos son centrados, tenemos  $\tau^0[\Delta(a_{\gamma(e)})] = 0$ , concluyendo nuevamente que  $f(\pi) = 0$ .

De lo anterior, cualquier término representativo a nivel asintótico, deberá de tener asociada una partición  $\pi$  sin singuletes y con  $|\pi| \geq \frac{|E|}{2}$ , por lo tanto  $\pi$  deberá de ser un emparejamiento. Tomemos  $\gamma$  tal que  $\ker(\gamma) = \pi$  es un emparejamiento. Supongamos que  $e$  no es un lazo, si la otra arista con en el mismo bloque que  $e$  no comparte los dos vértices de  $e$ , por el mismo argumento que antes tendremos que  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  tiene un ciclo y por lo tanto  $f(\pi) = 0$ . Si  $e$  es un lazo y la otra arista en el mismo bloque de  $e$  no comparte el mismo vértice, por el mismo argumento que antes nuevamente tendremos  $f(\pi) = 0$ . De esta manera, si  $e$  es un lazo, la arista en su mismo bloque deberá de ser un lazo en el mismo vértice de  $e$  para que el producto no se anule. Entonces  $T_\gamma$  es una gráfica doble coloreada, es decir una gráfica en donde aristas del mismo color son lazos con su vértice en común o aristas con sus dos vértices en común. Denotemos por  $\hat{T}_\gamma$  a la gráfica no dirigida obtenida al fusionar las aristas en  $T_\gamma$  con el mismo color en una sola arista no dirigida. Si  $T$  no es un árbol decorado con lazos,  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  no será un

árbol y entonces tendremos  $f(\pi) = 0$ . Si  $\hat{T}_\gamma$  es un árbol decorado por lazos, entonces  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  es un árbol. Más aún, por el Lema 4.2.2 tendremos que aristas del mismo color en  $T_\gamma$  irán en sentidos opuestos. Utilizando la definición de independencia en tráfico y usando el hecho de que los tráfico están idénticamente distribuidos, obtenemos que

$$\tau^0[T_\gamma(a_1, \dots, a_n)] = \tau^0[C_2(a_1)]^m \prod_{v \in V} \tau^0[\Delta_2(a_1)]^{l_v}.$$

Donde  $C_2$  es el ciclo dirigido de longitud 2,  $\Delta_2$  es el momento de gráfica con un único vértice dos lazos,  $2l_v$  es la cantidad de lazos en el vértice  $v$ , mientras que  $m$  es la cantidad de aristas que conectan vértices distintos en  $\hat{T}_\gamma$ . Notemos que  $1 = \Phi(a_1^2) = \tau[C_2(a_1)] = \tau^0[\Delta_2(a_1)] + \tau^0[C_2(a_1)]$ . Tomemos  $p = \tau^0[\Delta_2(a_1)]$ , entonces  $1 - p = \tau^0[C_2(a_1)]$ .

Con lo demostrado hasta ahora podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^0[T(z_n)]$  se anula si  $T$  no es un árbol doble decorado con lazos dobles. En el caso en el que  $T$  es de esta forma ya caracterizamos las  $\pi$  cuyos términos asociados no se anulan y para estas calculamos  $f(\pi)$ , falta contar cuántas son. Por lo dicho anteriormente,  $\pi$  debe de ser un emparejamiento, más aún, las aristas que no son lazos y tienen los mismos extremos deberán de estar en un mismo bloque, entonces, los únicos bloques que no quedan determinados por la estructura de  $T$  son aquellos que emparejan lazos. Para  $v \in V$  fijo, si  $2l_v$  es la cantidad de lazos en  $v$ , entonces la cantidad de forma en que estos pueden ser emparejados es  $|\mathcal{P}_2(2l_v)| = \frac{(2l_v)!}{l_v! 2^{l_v}}$ . Por lo que la cantidad de particiones que cumplen lo buscado es  $\prod_{v \in V} \frac{(2l_v)!}{l_v! 2^{l_v}}$ . Dándonos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^0[T(z_n)] = (1 - p)^m \prod_{v \in V} \frac{(2l_v)!}{l_v! 2^{l_v}} p^{l_v}.$$

Ahora demostraremos que esta es precisamente la distribución de  $\sqrt{pd} + \sqrt{1 - ps}$ . Sea  $T$  un momento de gráfica. Utilizando la notación de antes, por linealidad tenemos que

$$\tau^0[T(\sqrt{pd} + \sqrt{1 - ps})] = \sum_{\gamma: E \rightarrow \{1,2\}} p^{\frac{l_\gamma}{2}} (1 - p)^{\frac{m_\gamma}{2}} \tau^0[T_\gamma(d, s)],$$

donde  $l_\gamma$  es la cantidad de aristas en  $T_\gamma$  con el tráfico  $d$  y  $m_\gamma$  la cantidad de aristas con el tráfico  $s$ . Como  $d$  es un tráfico diagonal, por el Lema 3.3.2, tendremos que  $\tau^0[T_\gamma(d, s)] = 0$  si algún  $d$  aparece en alguna arista que  $T_\gamma$  que no sea un lazo. Luego, suponiendo que todos los  $d$  están en lazos de  $T_\gamma$ , tenemos que  $G_{c.c.}(T_\gamma)$  es un árbol, más aún, hay una única componente

coloreada correspondiente a  $s$  la cual denotaremos por  $T_\gamma^s$  y por la definición de independencia en tráficos obtenemos

$$\tau^0[T_\gamma(d, s)] = \tau^0[T_\gamma^s(s)] \prod_{v \in V} \tau^0[\Delta_{k_v}(d)],$$

donde  $k_v$  denota la cantidad de lazos en el vértice  $v$  que tienen al tráfico  $d$  y  $\Delta_k$  denota el momento de gráfica con un solo vértice y  $k$  aristas. Ahora, como  $s$  es un tráfico semicircular, por definición, para que  $\tau^0[T_\gamma^s(s)] \neq 0$  es necesario que  $T_\gamma^s$  sea un doble árbol. En particular,  $T_\gamma^s$  no tiene lazos, y por lo tanto, en los lazos de  $T$  solo puede aparecer  $d$ . Esto implica que

$$\tau^0[T(\sqrt{p}d + \sqrt{1-ps})] = p^{\frac{l}{2}}(1-p)^{\frac{m}{2}} \tau^0[T_\gamma(d, s)],$$

donde  $\gamma$  es la función que pone a  $d$  en todos los lazos y a  $s$  en las demás aristas,  $l$  la cantidad de lazos y  $m$  la cantidad de aristas que no son lazos. Más aún, para que lo anterior no se anule es necesario que  $T_\gamma^s$  sea un árbol doble, en cuyo caso, por definición,  $\tau^0[T_\gamma^s(s)] = 1$ . Además, también por definición, si algún  $k_v$  es impar, tendremos que  $\tau^0[\Delta_{k_v}(d)] = 0$ , así que para que el producto no se anule,  $T$  deberá tener una cantidad par de lazos en cada vértice. Tomando  $l_v = \frac{k_v}{2}$ , por definición tenemos que  $\Delta_{2l_v}(d) = \frac{(2l_v)!}{l_v!2^{l_v}}$ .

Resumiendo,  $\tau^0[T(\sqrt{p}d + \sqrt{1-ps})]$  será igual a cero a menos que  $T$  sea un árbol doble decorado por lazos, con una cantidad par de lazos en cada vértice, la cual denotaremos  $2l_v$  para cada  $v \in V$ , en cuyo caso

$$\tau^0[T(\sqrt{p}d + \sqrt{1-ps})] = (1-p)^m \prod_{v \in V} p^{l_v} \frac{(2l_v)!}{l_v!2^{l_v}},$$

donde  $2m$  es la cantidad de aristas en  $T$  que no son lazos. Con esto se concluye la demostración.  $\square$



# Bibliografía

- [1] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, (translated by N. Kemmer), London: Oliver and Boyd, 1965.
- [2] B. Au, *Limit laws for random matrices from Traffic-Free Probability*, arxiv.org/abs/1601.02188, 2016.
- [3] H. Bercovici, V. Pata, *Stable laws and domains of attraction in Free Probability Theory*, Annals of Mathematics, 149, 1023-1060, 1999.
- [4] H. Bercovici, D.V. Voiculescu, *Free convolution of measures with unbounded support*, Indiana University Mathematics Journal, 42, 733-773, 1993.
- [5] P. Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley and sons, 1995.
- [6] G. Cèbron, A. Dahlqvist, C. Male, *Universal constructions for spaces of traffics*, arXiv:1601.00168, 2015.
- [7] B. Collins, *Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and Free Probability*, International Mathematics Research Notices, no. 17, 953–982, 2003.
- [8] B. Collins, P. Śniady, *Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group*, Communications in Mathematical Physics, 264, 3, 773-795, 2006.
- [9] P.J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, Princeton University Press, 2010.
- [10] C. Francisco, J. Mermin, J. Schweing, *Catalan numbers, binary trees, and pointed pseudotriangulations*, European Journal of Combinatorics, Vol. 45, 85-96, 2015.

- [11] I. Gelfand, M. Neimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Matematicheskii Sbornik, Vol. 12(54), No. 2, 197-217, 1943.
- [12] J. Gleason, *Existence and uniqueness of Haar measure*, [www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Gleason.pdf](http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Gleason.pdf).
- [13] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press, 2005.
- [14] A. Guionnet, R. Speicher, D. V. Voiculescu, *Report of the workshop on Free Probability*, 2015.
- [15] P.R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1974.
- [16] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 1997.
- [17] O. Kallenberg, *Random Measures*, Akademie Verlag, 1983.
- [18] A. Lakshminarayan, Z. Puchala, K. Zyczkowski, *Diagonal unitary entangling gates and contradiagonal quantum states*, Physical Review, A 90, 2014.
- [19] C. Male, *The distribution of traffics and their free product*, arXiv: 1111.4662, 2011.
- [20] J. A. Mingo, R. Speicher, *Sharp bounds for sums associated to graphs of matrices*, Journal of Functional Analysis, Vol. 262, 2272–2288, 2012.
- [21] J. A. Mingo, R. Speicher, *Free Probability and Random Matrices*, Springer, Saarbrücken Kingston, 2016.
- [22] G. J. Murphy, *C\*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press Inc, 1990.
- [23] A. Nica, *Asymptotically free families of random unitaries in symmetric groups*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 157, No. 2, 1993.
- [24] M. Novaes, *Elementary derivation of Weingarten functions of classical Lie groups*, [arxiv.org/pdf/1406.2182v2.pdf](http://arxiv.org/pdf/1406.2182v2.pdf), 2015.
- [25] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, 1: Functional analysis*, Academic Press, INC, 1980.



- [26] J.P. Romano, A. F. Siegel, *Counterexamples in Probability and Statistics*, Chapman & Hall, 1986.
- [27] W. Rudin, *Functional Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc, 1991.
- [28] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Second Edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2012.
- [29] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*, Cambridge University Press, 2006.
- [30] T. Tao, *An Introduction to Measure Theory*, American Mathematical Society, 2011.
- [31] T. Tao, *Topics in Random Matrix Theory*, American Mathematical Society, 2012.
- [32] D. V. Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product  $C^*$ -algebras*, Operator Algebras and their Connections with Topology in Ergodic Theory. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 556-588, 1985.
- [33] D. V. Voiculescu, *Addition of certain non-commuting random variables*, Journal of Functional Analysis Theory, 323-346, 1986.
- [34] D. V. Voiculescu, *Free Probability Theory: random matrices and von Neumann algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994.
- [35] D. V. Voiculescu, *Limit laws for random matrices and free products*, Inventiones mathematicae, 201-220, 1991.
- [36] D. V. Voiculescu, *Multiplication of certain non-commuting random variables*, Journal of Operator Theory, 223-235, 1987.