



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

AVANCES EN LA ESTADÍSTICA DEL  
MODELO TASEP

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:

**Rodolfo Martínez Bon**

DIRECTOR DEL TRABAJO:

THOMAS HENRY SELIGMAN SCHURCH

Ciudad Universitaria, Cd.Mx., Mayo 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Gracias a la vida que me llevó a conocer a personas increíbles. Quisiera agradecer a Thomas Seligman por su apoyo, abrirme las puertas de su casa y enseñarme como es la política en la ciencia. La lista es extensa, gracias a Soham Biswas por mostrarme el arte de hablar, gracias a François Leyvraz y Carlos Pineda por su tiempo, brindarme parte de sus conocimientos y buscar mi crecimiento.

A mi familia por su apoyo y a mis amigos. Especialmente a Chicharo, Melchor, Hanz, Omar, Miguel, Max, Josué y Yenni por su apoyo en este proceso. A esa familia que encontré, que siempre estarán en mi corazón, al capitán Carmen y al Otidu-Matrat de José, a la niña latosa y toda la familia.

Y finalmente, al proyecto DGAPA-PAPIIT IG100616 y CONACyT-FRONTERAS 201.

Fecha: Mayo 2017

Lugar: Ciudad Universitaria, Cd.Mx.

(Rodolfo Martínez Bon)

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos Fundamentales y Metodología</b>	<b>4</b>
2.1. Proceso Asimétrico de Simple Exclusión . . . . .	4
2.1.1. Condiciones de frontera . . . . .	5
2.2. Proceso Totalmente Asimétrico de Simple Exclusión . . . . .	5
2.3. Aproximación de Campo Medio . . . . .	7
2.3.1. Baja Densidad . . . . .	9
2.3.2. Alta Densidad . . . . .	11
2.3.3. Máxima Corriente . . . . .	12
2.3.4. Línea de Coexistencia . . . . .	12
2.3.5. Diagrama Fase . . . . .	13
2.4. Matrices de Correlación . . . . .	14
2.5. Ensemble Ortogonal de Wishart(WOE) . . . . .	15
2.6. Ley de Potencias para el Espectro . . . . .	16
2.7. Razón de Participación . . . . .	17
2.8. Distribución del Espaciamiento a Primeros Vecinos para Eigenvalores . . . . .	18
<b>3. Resultados</b>	<b>19</b>
3.1. Preámbulo . . . . .	19
3.2. Gráficas y Discusión . . . . .	21
<b>4. Conclusión y Perspectivas a Futuro</b>	<b>48</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La forma en que se encuentra enlazada la naturaleza en su totalidad resulta un misterio. Determinar las correlaciones en un sistema de gran complejidad no resulta tarea fácil. Erróneamente se piensa que solo causas grandes generan efectos grandes; sin embargo, existen sistemas cuya complejidad es mayúscula que se auto-organizan hasta llegar a un estado crítico donde la dinámica del sistema puede ser alterada totalmente por el aleteo de una mariposa. Los efectos que vemos en la naturaleza generalmente no son aditivos[A<sup>+</sup>72], es decir, el efecto no es el que se espera a primera vista considerando las causas actuando individualmente.

Los fenómenos naturales son complejos, por lo que es difícil establecer las causas de los efectos que percibimos, como consecuencia se han buscado herramientas que nos permitan tener un mejor entendimiento de los mismos. En la actualidad, los sistemas de muchos cuerpos en equilibrio termodinámico se entienden bajo el marco de la mecánica estadística. No obstante, esta teoría tiene su estrechez, sistemas reales como los seres vivos se encuentran fuera de equilibrio y la condición de balance detallado característica de sistemas en equilibrio, no aplica. Un ser vivo tiene una constante ingesta y pérdida de energía; tanto su entorno como ellos están en un estado de cambio constante, por lo que no hay sistema vivo que esté realmente en equilibrio termodinámico y pueda ser descrito de una manera precisa por la mecánica estadística. En el sistema estudiado en este trabajo, la condición de balance detallado, no aplica, implicando que los potenciales

termodinámicos no estén definidos; al igual que un ser vivo, dicho sistema tiene una constante entrada y pérdida de partículas, distinguiéndose del equilibrio termodinámico.

Existen sistemas formados por partículas, los cuales se ponen en contacto con dos depósitos de diferentes densidades o temperaturas con los que intercambian partículas o energía. Este tipo de sistemas son de particular interés para este trabajo, los cuales son un caso particular de los nombrados "sistemas impulsados de difusión" [DZSL95].

En la naturaleza hay fenómenos que evolucionan hacia estados estacionarios que transportan corriente constante, como los derivados de campos externos o partículas autopropulsadas. Ejemplos de estos fenómenos serían el tránsito de carros de una carretera [Kno13], tráfico en colonias de insectos [JSCN09], conducción eléctrica [Cho04], sistemas biológicos como los ribosomas que se mueven a lo largo del ácido ribonucleico mensajero (m-RNA por sus siglas en inglés) [SK11] o el flujo de energía entre dos reservorios de temperatura distintas [Der07], entre otros. Debido a esta gran variedad de fenómenos se han buscado modelos matemáticos que nos permitan tener un mejor entendimiento de los mismos, tales como el modelo casete de unión ATP (ATP-binding cassette) [JG04], el modelo del trinquete browniano (Brownian ratchet) [CSN05] y el modelo del proceso totalmente asimétrico de simple exclusión (TASEP por sus siglas en inglés) [DDM92]. Es en este último modelo donde tiene injerencia este trabajo.

La simplicidad, versatilidad y el conocimiento de la solución exacta del TASEP [DDM92] resulta altamente atractivo para aplicaciones. Es por esta razón que recibe un nombre a pesar de ser un caso particular del modelo proceso asimétrico de simple exclusión [MGP68] (ASEP por su siglas en inglés). El modelo TASEP se ha convertido en uno de los paradigmas de la física de sistemas estacionarios fuera de equilibrio. Este modelo presenta un rico comportamiento de fase.

Hoy en día, en diferentes partes del mundo existe un problema de tránsito vehicular. En la Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM), compuesta por las 16 delegaciones de la Ciudad de México, 58 municipios del Estado de México y 1 del Estado de Hidalgo, hay un problema de tránsito que afecta a toda la sociedad. Se estima que el número de los viajes metropolitanos (los que cruzan el límite de la Ciudad de México y el

Estado de México) para el 2020 serán cercanos a los 5.6 millones por día y representará cerca del 20 % del total de viajes en la ZMVM (28.3 millones de viajes en total)[día]. El análisis de sistemas como el TASEP puede ser de gran beneficio para la comunidad en el sentido de transporte. Hoy en día existen instituciones con la información y capacidad económica necesaria para empezar a resolver el problema del tránsito que, como se mencionó, afecta a toda la sociedad. El estudio de correlaciones en el modelo TASEP, puede ser un paso de aprendizaje hacia la solución de este problema.

El objetivo de este trabajo es hacer el análisis de correlación para series de tiempo provenientes del modelo TASEP, y mostrar propiedades de las matrices de correlación. Esto se logró viendo que los eigenvalores en un diagrama de Zipf siguen un comportamiento de ley de potencias sobre la transición de fase entre alta y baja densidad existentes en el TASEP. Estudiando efectos de tamaño finito se encontraron también propiedades interesantes en la zona correspondiente a la máxima corriente del plano fase. Se observó la distribución del espaciamiento a primeros vecinos de los eigenvalores utilizando el método de desdoblamiento sobre los eigenvalores. Lo más novedoso es el análisis del comportamiento de los eigenvectores observando la distribución de probabilidad de sus amplitudes y la razón de participación.

## Capítulo 2

# Conceptos Fundamentales y Metodología

### 2.1. Proceso Asimétrico de Simple Exclusión

El modelo ASEP fue propuesto por MacDonald en el año 1968[MGP68]. Éste es un modelo estocástico de cadenas propulsadas que entra en el ámbito de estudio de la física estadística fuera de equilibrio. Para fines de este trabajo nos enfocaremos en modelos unidimensionales, pero puede ser generalizado para redes[NKP11].

Se consideran partículas localizadas en una cadena discreta que saltan a lo largo del tiempo. En cada una de las cajas de la cadena puede haber a lo más una partícula, ésta puede saltar a sus cajas vecinas siempre y cuando estén vacías, a este proceso se le nombra de “simple exclusión”. A las tasas de transición de las partículas hacia su izquierda y hacia la derecha las llamaremos  $q$  y  $p$  respectivamente.

Digamos que la cadena tiene una longitud  $L$  y sus cajas están etiquetadas por  $i = 1, 2, \dots, L$ . Debido a que este sistema es intrínsecamente no determinista, la dinámica se describe por la probabilidad de que una partícula que está localizada en el sitio  $i$  salte al sitio  $i - 1$  o al sitio  $i + 1$  la cual está dada por  $qdt$  y  $pdt$  respectivamente y están condicionadas por el principio de simple exclusión.

### 2.1.1. Condiciones de frontera

Hasta ahora se ha explicado la dinámica para partículas situadas en una caja y sus cajas vecinas, no obstante, podemos enriquecer este modelo considerando diferentes posibles condiciones de frontera[CMZ11].

- Condiciones periódicas.

El sitio  $i$  es el mismo sitio  $i + L$ , es decir, la cadena es un anillo Fig. 2.1a.

- Cadenas infinitas.

Las fronteras las mandamos a  $\pm\infty$  Fig. 2.1b.

- Fronteras abiertas.

Consiste en la existencia de reservorios en los extremos de la cadena. Si la caja  $i=1$  se encuentra vacía, entonces puede entrar una partícula con tasa de transición  $\alpha$ , si se encuentra llena con una tasa de transición  $\gamma$  puede salir de la cadena, análogamente para  $i=L$  donde  $\beta$  es la tasa de salida y  $\delta$  es la de entrada Fig. 2.1c.

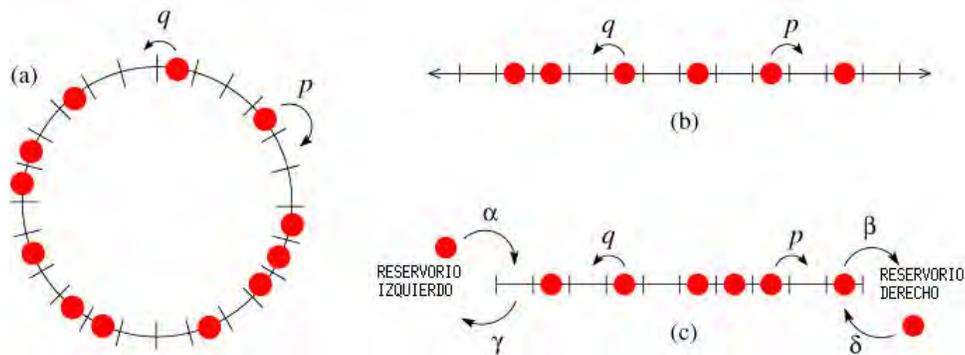


Figura 2.1: (a) ASEP con condiciones periódicas . (b) ASEP con cadena infinita. (c) ASEP con fronteras abiertas[CMZ11].

## 2.2. Proceso Totalmente Asimétrico de Simple Exclusión

Considerando el modelo de la Sección 2.1 y el flujo de partículas en una sola dirección, se obtendrá el modelo TASEP.

TASEP con fronteras abiertas es el modelo que se estudiará en este trabajo [DDM92]; es decir,  $q = \gamma = \delta = 0$ . Primero se considera una cadena de longitud  $L$ , donde el valor de ocupación  $\tau_i = 1$  si hay una partícula en la caja  $i$  y  $\tau_i = 0$  si no la hay ( $1 \leq i \leq L$ ). Para evolucionar en el tiempo el sistema se utilizó una simulación de Monte Carlo; para simular avanzar un paso de tiempo (de  $t$  a  $t+1$ ) equivaldrá a tomar aleatoriamente una caja  $i$ , de lo cual se tienen diferentes posibles casos.

- $2 \leq i \leq L - 1$ .

Si  $\tau_i(t) = 1$  y  $\tau_{i+1}(t) = 0$ , entonces la partícula saltará al sitio  $i + 1$ , pero si  $\tau_i(t) = 0$ , el valor de  $\tau_{i+1}(t) = \tau_{i+1}(t + 1)$ , esto quiere decir que

$$\tau_i(t + 1) = \tau_i(t)\tau_{i+1}(t)$$

y

$$\tau_{i+1}(t + 1) = \tau_{i+1}(t) + (1 - \tau_{i+1}(t))\tau_i(t)$$

- Si  $i=1$ .

Si  $\tau_1(t) = 1$  regresamos al caso anterior. Suponiendo que no hay flujo a la caja 2 entonces, si la caja 1 estaba ocupada al tiempo  $t$  así seguirá a  $t+1$ , pero si estaba vacía se ocupará con probabilidad  $\alpha$  al tiempo  $t+1$ , esto es,

$$\tau_1(t + 1) = 1 \quad \text{con probabilidad} \quad \tau_1(t) + (1 - \tau_1(t))\alpha$$

$$\tau_1(t + 1) = 0 \quad \text{con probabilidad} \quad (1 - \tau_1(t))(1 - \alpha)$$

- Si  $i=L$ .

Si está vacía la caja  $L$  al tiempo  $t$ , entonces así seguirá a  $t+1$ , pero si está llena podrá desocuparse con probabilidad  $\beta$ , es decir

$$\begin{aligned}\tau_1(t+1) &= 1 && \text{con probabilidad } (1-\beta)\tau_L(t) \\ \tau_1(t+1) &= 0 && \text{con probabilidad } 1-(1-\beta)\tau_L(t)\end{aligned}$$

El valor de  $L$  es importante para seleccionar adecuadamente el tiempo de evolución. Si la cadena tiene 3 cajas y se mueve una partícula dentro de la cadena se habrán actualizado el 66.66% de la cadena, por otro lado, si la cadena tiene 5000 cajas (como en este trabajo) y se mueve una partícula dentro de la misma, se habrá actualizado el 0.04% de la cadena. Podemos decir que después de haber seleccionado  $L$  veces cajas al azar, se habrá seleccionado en promedio cada caja una vez ya que existen  $L$  cajas, es por eso que si se desea que una caja sea seleccionada en promedio  $x$  veces se tendrán que hacer  $x \times L$  iteraciones. En este trabajo cada  $x \times L$  iteraciones se tomará un estado del sistema para analizar.

### 2.3. Aproximación de Campo Medio

Para el modelo propuesto en la sección 2.2 se hará una teoría de campo medio, el desarrollo está basado en el artículo [DDM92]. Primero que nada, se buscarán relaciones analíticas sencillas de forma aproximada en un estado estacionario de las funciones de correlación. Para lo anterior se busca que en tal estado  $\langle \tau_i(t) \rangle_T$  sea constante, donde  $\langle \cdot \rangle_T$  es el promedio sobre el tiempo  $T$ . Prosigamos tomando aleatoriamente en el tiempo  $t$  la caja  $i$ , supongamos que  $2 \leq i \leq L-1$ , entonces pueden pasar varias cosas al tiempo  $t+1$ , que el sitio actualizado sea el  $i-1$ , que sea el  $i$  o que sea cualquier otro, o sea,

$$\tau_i(t+1) = \tau_i(t) + (1 - \tau_i(t))\tau_{i-1}(t) \quad \text{con probabilidad } 1/L \quad (2.1)$$

$$\tau_i(t+1) = \tau_i(t)\tau_{i+1}(t) \quad \text{con probabilidad } 1/L \quad (2.2)$$

$$\tau_i(t+1) = \tau_i(t) \quad \text{con probabilidad } 1 - 2/L \quad (2.3)$$

Promediando [Ec.2.1],[Ec.2.2] y [Ec.2.3] sobre el tiempo tenemos

$$\langle \tau_i(t+1) \rangle = \langle \tau_i(t) \rangle + \frac{\langle \tau_i(t)\tau_{i+1}(t) \rangle - \langle \tau_i(t)\tau_{i-1}(t) \rangle + \langle \tau_{i-1}(t) \rangle - \langle \tau_i(t) \rangle}{L}$$

Debido a que en el estado estacionario la dependencia en el tiempo se descarta ( $\langle \tau_i(t) \rangle = \langle \tau_i(t+1) \rangle$ ), entonces

$$\langle \tau_i \rangle - \langle \tau_{i+1}\tau_i \rangle = \langle \tau_{i-1} \rangle - \langle \tau_i\tau_{i-1} \rangle \quad (2.4)$$

Análogamente para las fronteras  $i = 1, N$  obteniendo respectivamente

$$\langle \tau_1 \rangle - \langle \tau_1\tau_2 \rangle = \alpha(1 - \langle \tau_1 \rangle) \quad (2.5)$$

$$\langle \tau_{L-1} \rangle - \langle \tau_L\tau_{L-1} \rangle = \beta\langle \tau_L \rangle \quad (2.6)$$

Las tres ecuaciones previas son las buscadas, no obstante  $\langle \tau_i \rangle$  está relacionado con  $\langle \tau_i\tau_{i+1} \rangle$  que está relacionado a su vez con más correlaciones, por lo que no resulta útil calcular  $\langle \tau_i \rangle$ . Para intentar resolver este problema se utilizará una aproximación de campo medio donde se suprimen la correlaciones entre las partículas esto es  $\forall i, j \in [1, L]$   $\langle \tau_i\tau_j \rangle$  se puede ver como  $\langle \tau_i \rangle \langle \tau_j \rangle$ .

Entonces las ecuaciones 2.4 ,2.5 y 2.6 quedarán como

$$\langle \tau_i \rangle - \langle \tau_{i+1} \rangle \langle \tau_i \rangle = \langle \tau_{i-1} \rangle - \langle \tau_i \rangle \langle \tau_{i-1} \rangle \quad (2.7)$$

$$\langle \tau_1 \rangle - \langle \tau_1 \rangle \langle \tau_2 \rangle = \alpha(1 - \langle \tau_1 \rangle) \quad (2.8)$$

$$\langle \tau_{L-1} \rangle - \langle \tau_L \rangle \langle \tau_{L-1} \rangle = \beta\langle \tau_L \rangle \quad (2.9)$$

Resolviendo estas L ecuaciones obtendremos el promedio de ocupación de cada caja.

Notemos ahora que el valor de ocupación promedio de una caja es lo mismo que la densidad promedio a lo largo del tiempo, esto es  $\langle \tau_i \rangle = \rho_i$ , que también nos indica la

probabilidad de encontrar la caja  $i$  ocupada, por lo que la probabilidad de encontrarla vacía está determinada por  $\langle 1 - \tau_i \rangle$ . Para que una partícula salte de un sitio  $i$  a uno  $i + 1$ , el sitio  $i$  debe estar lleno y el  $i + 1$  vacío lo cual, por la aproximación de campo medio, la probabilidad de que esto ocurra es  $P(\tau_i, 1 - \tau_{i+1}) = \langle \tau_i \rangle \langle 1 - \tau_{i+1} \rangle$ , esta probabilidad está directamente enlazada con el concepto de corriente debido a que es la probabilidad de que exista la configuración necesaria para que exista el salto de  $i$  a  $i + 1$ , es por eso por lo que la corriente está dada por  $J_{i+1} = P(\tau_i, 1 - \tau_{i+1})$ . Ya que la corriente de partículas se debe conservar en el sistema, entonces

$$J = \alpha \langle 1 - \tau_1 \rangle = \langle \tau_1 \rangle \langle 1 - \tau_2 \rangle = \dots = \beta \langle \tau_L \rangle \quad (2.10)$$

La ecuación 2.7 puede ser escrita, utilizando la ecuación 2.10 por el mapeo

$$\langle \tau_{i+1} \rangle = 1 - \frac{J}{\langle \tau_i \rangle} \quad (2.11)$$

Esta ecuación tiene dos puntos fijos para  $J < \frac{1}{4}$  entonces,

$$\langle \tau \rangle_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4J}}{2}$$

Con  $\langle \tau \rangle_+$  es un punto estable y  $\langle \tau \rangle_-$  es inestable Fig. 2.2.

El diagrama fase de las densidades puede ser analizado completamente con esta aproximación discreta de campo medio. La ecuación 2.11 se puede resolver utilizando el siguiente ansatz

$$\langle \tau_i \rangle = \frac{-\langle \tau \rangle_+ \langle \tau \rangle_- (\langle \tau \rangle_+^{i-1} - \langle \tau \rangle_-^{i-1}) + (\langle \tau \rangle_+^i - \langle \tau \rangle_-^i) \langle \tau_1 \rangle}{-\langle \tau \rangle_+ \langle \tau \rangle_- (\langle \tau \rangle_+^{i-2} - \langle \tau \rangle_-^{i-2}) + (\langle \tau \rangle_+^i - \langle \tau \rangle_-^i) \langle \tau_1 \rangle} \quad (2.12)$$

Donde  $\langle \tau_1 \rangle = 1 - J/\alpha$  y la corriente  $J$  es solución de  $\langle \tau_L \rangle = J/\beta$  En las siguientes tres secciones consideraremos las posibles soluciones para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 2.3.1. Baja Densidad

Condición:  $\langle \tau_i \rangle = \langle \tau \rangle_- \pm \epsilon$ ,  $\langle \tau_L \rangle < \langle \tau \rangle_+$

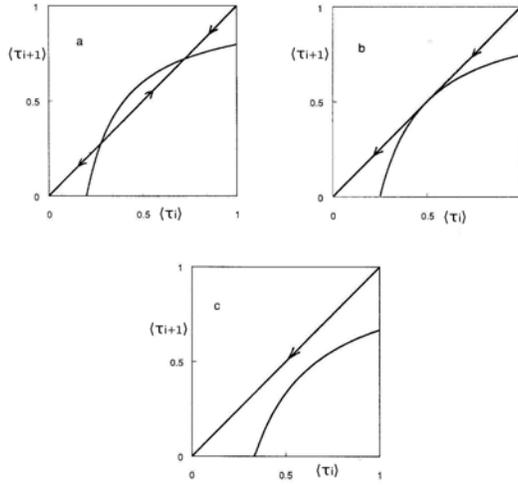


Figura 2.2: Iteración del mapeo (2.11) donde (a)  $J < 1/4$ , (b)  $J = 1/4$ , (c)  $J > 1/4$  [DDM92].

$\langle \tau_i \rangle$  empieza infinitesimalmente cerca de  $\langle \tau \rangle_-$  y se mantiene así hasta llegar a  $i \approx N$  donde se aleja de  $\langle \tau \rangle_-$  ya sea para arriba o para abajo dependiendo de  $\langle \tau_1 \rangle$ . Perfil de densidades mostrado en Fig. 2.3.

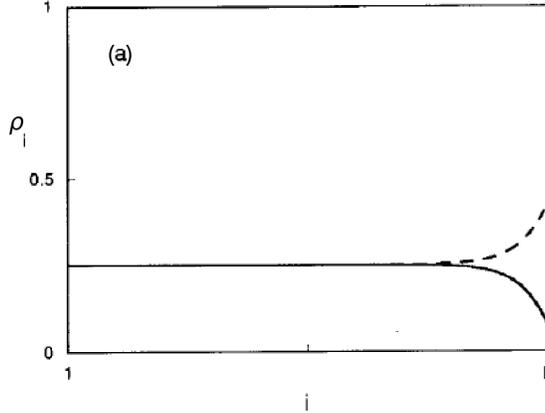


Figura 2.3: Perfil de densidad para TASEP en baja densidad [Nos11].

La solución en este caso determina,

$$\langle \tau_1 \rangle = \alpha, \quad \langle \tau_L \rangle = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta}, \quad J = \alpha(1-\alpha)$$

Utilizando las ecuaciones previas y las de la condición se determina que esta fase

existe cuando,

$$\alpha \leq 1/2 \quad \text{y} \quad \beta > \alpha$$

### 2.3.2. Alta Densidad

Condición:  $\langle \tau_L \rangle = \langle \tau \rangle_+ \pm \epsilon$ ,  $\langle \tau_1 \rangle > \langle \tau \rangle_-$

$\langle \tau_i \rangle$  empieza en el rango donde el punto fijo  $\langle \tau \rangle_+$  atrae, entonces se va pegando a él hasta  $\langle \tau_L \rangle$  donde serán infinitesimalmente cercanos. Perfil de densidades mostrado en Fig. 2.4.

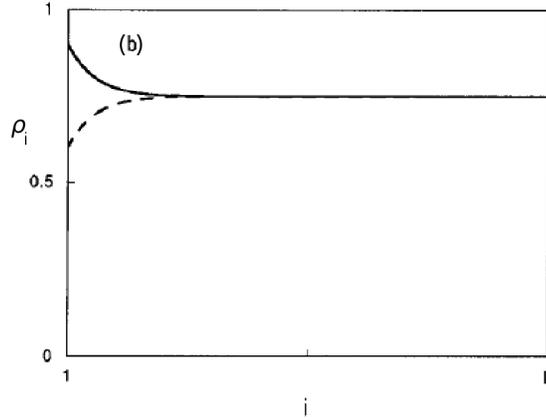


Figura 2.4: Perfil de densidad para TASEP en alta densidad[Nos11].

La solución en este caso determina,

$$\langle \tau_L \rangle = 1 - \beta, \quad \langle \tau_1 \rangle = \frac{\beta(1 - \beta)}{\alpha}, \quad J = \beta(1 - \beta)$$

Utilizando las ecuaciones previas y las de la condición se determina que esta fase existe cuando,

$$\beta \leq 1/2 \quad \text{y} \quad \beta < \alpha$$

### 2.3.3. Máxima Corriente

Condición:  $\langle \tau_1 \rangle \geq 1/2$ ,  $\langle \tau_L \rangle \leq 1/2$

En este caso  $J = 1/4$ , para un sistema finito se tiene la Fig. 2.2c pero si  $L \rightarrow \infty$  se aproxima a la Fig. 2.2b. Perfil de densidades mostrado en Fig. 2.5.

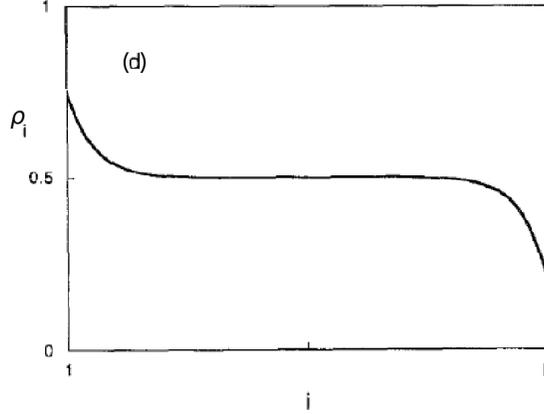


Figura 2.5: Perfil de densidad para TASEP en máxima corriente[Nos11].

La densidad es aproximadamente  $1/2$  exceptuando las zonas cercanas a los bordes.

La solución en este caso determina:

$$\langle \tau_1 \rangle = 1 - \frac{1}{4\alpha}, \quad \langle \tau_L \rangle = \frac{1}{4\beta}$$

Utilizando las ecuaciones previas y las de la condición se determina que esta fase existe cuando,

$$\beta \geq 1/2 \quad \text{y} \quad \alpha \geq 1/2$$

### 2.3.4. Línea de Coexistencia

Condición  $\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau \rangle_- + \epsilon$ ,  $\langle \tau_L \rangle = \langle \tau \rangle_+ - \epsilon$

$\langle \tau_1 \rangle$  empieza infinitesimalmente arriba de  $\langle \tau \rangle_-$  y termina infinitesimalmente cerca de  $\langle \tau \rangle_+$ . Perfil de densidades mostrado en Fig. 2.6.

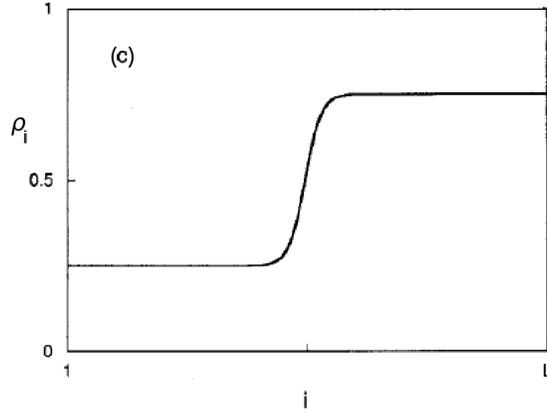


Figura 2.6: Perfil de densidad para TASEP en la línea de coexistencia. Nótese que la imagen es resultado para  $L$  finita[Nos11].

En este caso se obtiene la solución

$$\langle \tau_1 \rangle = \alpha, \quad \langle \tau_L \rangle = 1 - \alpha, \quad J = \alpha(1 - \alpha)$$

Utilizando las ecuaciones previas y las de la condición se determina que esta fase existe cuando,

$$\beta = \alpha < 1/2$$

### 2.3.5. Diagrama Fase

Tomando en cuenta los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en las secciones 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4 se hizo una simulación y promediando el valor de ocupación de cada caja sobre la cadena y sobre un cierto tiempo finito, se obtuvo como resultado el plano fase mostrado en la Fig. 2.7, donde se tiene una transición de fase de primer orden en la línea de coexistencia cuando  $L \rightarrow \infty$  y una transición continua entre alta densidad y máxima corriente, y entre máxima corriente y baja densidad. Acercándose al punto triple( $\alpha = \beta = 0.5$ ) las transiciones se marcan cada vez menos, lo cual indica que se necesitan tiempos cada vez más largos para definir las líneas.

Intuitivamente se puede pensar que, si tienes mucha salida y poca entrada de partícula-

las en la cadena, la cadena estará prácticamente vacía, esto corresponde a la fase de baja densidad. Si tienes mucha entrada y poca salida, la cadena estará muy llena de partículas, lo que corresponde con la fase de alta densidad. La zonas de transiciones de fase y de máxima corriente no son obvias; sin embargo, por el desarrollo hecho en la Sección 2.3 se logra verificar su existencia.

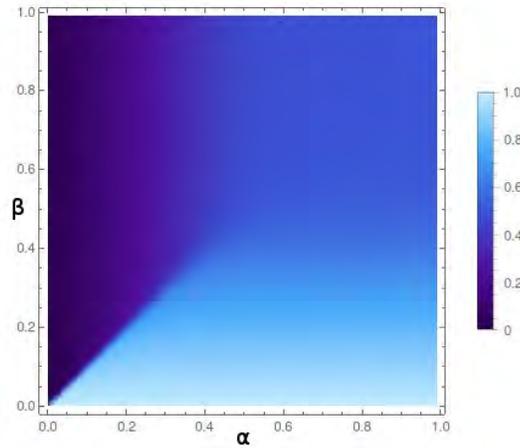


Figura 2.7: Plano fase de la densidad para TASEP. La tonalidad representa la densidad.

## 2.4. Matrices de Correlación

La correlación es una medida estadística de las relaciones entre dos variables. Si se tienen  $N$  variables  $\{x^N\}$  cuyo valor puede ir cambiando en el tiempo, sea  $x_\tau^k$  el valor de  $x^k$  a un cierto tiempo  $\tau$ , se puede entonces, calcular la matriz de covarianza  $\Sigma$  [S<sup>+</sup>13] cuyas entradas  $(i, j)$  son

$$\Sigma_{ij} = \langle (x_\tau^i - \mu_i)(x_\tau^j - \mu_j) \rangle_T \quad (2.13)$$

Donde  $\mu_k = \langle x^k \rangle$  es la media de la variable  $k$ , y  $\langle \cdot \rangle_T$  es el promedio sobre el horizonte de tiempo  $T$ .

Considerando  $\sigma_k = \sqrt{\langle (x_\tau^k - \mu_k)^2 \rangle_T}$  la desviación estándar de la variable  $k$ , se puede determinar la matriz de correlación como

$$C_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (2.14)$$

Para normalizar la serie de tiempo a lo largo del tiempo  $T$  para cada variable se tomará en cuenta la matriz de datos  $A$  con entradas  $(i, \tau)$

$$A_{i\tau} = \frac{x_\tau^i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (2.15)$$

por lo que,

$$C = AA^\dagger \quad (2.16)$$

con  $A^\dagger$  la transpuesta de  $A$ ,

## 2.5. Ensemble Ortogonal de Wishart(WOE)

La definición de una matriz de Wishart es como sigue (el desarrollo está basado en el artículo [S<sup>+</sup>13])

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger}{T} \quad (2.17)$$

Con  $\mathcal{A}$  una matriz de  $N \times T$ . Cada una de las entradas de  $\mathcal{A}$  provienen de una distribución gaussiana con media  $\mu_w = 0$  y varianza  $\sigma_w^2$ .

El conjunto de este tipo de matrices, estudiado en la teoría de matrices aleatorias se conoce como ensemble ortogonal de Wishart(WOE por sus siglas en inglés). El ensemble de Wishart puede ser fácilmente confundido con un ensemble de matrices de correlación, pero es solo una aproximación si las series de tiempo son largas; en el límite cuando el tiempo tiende a infinito se vuelven matrices de correlación. Si los tiempos son razonablemente largos es una aproximación certera.

La densidad de probabilidad conjunta de los elementos de  $\mathcal{A}$  es

$$P(\mathcal{A}) \propto e^{-Tr \frac{\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger}{2\sigma_w^2}} d\mathcal{A} \quad (2.18)$$

Donde  $d\mathcal{A}$  es la diferencial de volumen.

La densidad de probabilidad conjunta de los elementos de  $\mathcal{W}$  es

$$P(\mathcal{W})d\mathcal{W} \propto (\det\mathcal{W})^{\frac{N(\kappa-1)-1}{2}} e^{-T\frac{\text{Tr}\mathcal{W}}{2\sigma_w^2}} d\mathcal{W} \quad (2.19)$$

Donde  $\kappa = \frac{T}{N}$ ,  $d\mathcal{W} = \prod_{j>k}^N d\mathcal{W}_{jk} \prod_{j=1}^N d\mathcal{W}_{jj}$ . Esta ecuación la podemos transformar al espacio de los eigenvalores y eigenvectores e integrar los eigenvectores obteniendo la densidad de probabilidad conjunta para los eigenvalores como [S<sup>+</sup>13]

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto \prod_{j=1}^N \lambda_j^{\frac{N(\kappa-1)-1}{2}} e^{-\frac{N\kappa\lambda}{2\sigma_w^2}} \prod_{j>k}^N |\lambda_j - \lambda_k| \quad (2.20)$$

con  $\lambda_i$  los eigenvalores de  $\mathcal{W}$ .

Considerando  $N$  y  $T$  grandes y  $\kappa$  finita, la densidad espectral converge a la densidad de Marchenko-Pastur[MP67],

$$P(\lambda) = \kappa \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{2\pi\sigma_w^2 \lambda} \quad (2.21)$$

$\lambda_+$  y  $\lambda_-$  son el mayor y menor eigenvalor respectivamente,  $\lambda_{\pm} = \sigma_w(\kappa^{-1/2} \pm 1)^2$ .

## 2.6. Ley de Potencias para el Espectro

Cuando el cambio relativo en una cantidad resulta en un cambio proporcional a una potencia de otra cantidad, se dice que una de estas varía como una potencia de la otra. A este tipo de relación se le conoce como ley de potencias[Gue12]. En sistemas termodinámicos, las transiciones de fase están asociadas con el surgimiento de distribuciones de ley de potencias en ciertas cantidades.

Sea  $P(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , se dice que sigue una ley de potencias si

$$P(x) = e^c x^{-\eta} \quad (2.22)$$

Donde  $c, \eta \in \mathbb{R}$ .

Percatémonos entonces que, sacando el logaritmo de la ecuación anterior se tiene

$$\ln(P(x)) = -\eta \ln(x) + c \quad (2.23)$$

esto quiere decir que en escala log-log la función  $P(x)$  sigue una recta si obedece a una ley de potencias.

El ranking en estadística se define como una relación entre un conjunto de datos tales que, para uno o varios criterios, el primero de ellos presenta un valor superior al segundo, este a su vez mayor que el tercero y así sucesivamente, permitiéndose que dos o más elementos diferentes puedan tener la misma posición. La ley de Zipf establece que la frecuencia de ocurrencia de un elemento de una familia de conjuntos es inversamente proporcional a su lugar en el ranking de frecuencias[New05].

## 2.7. Razón de Participación

La razón de participación es un indicador para percibir comportamientos aleatorios de las eigenfunciones. En mecánica cuántica es una forma sencilla de cuantificar en cuántos estados una partícula está distribuida, ya que se tiene un grado de incertidumbre intrínseca.

El grado de localización de los eigenvectores de un miembro del ensemble se caracteriza frecuentemente por la razón de participación inversa [PGR<sup>+</sup>02]

$$IPR^k = \sum_i^N [\epsilon_i^k]^4 \quad (2.24)$$

Donde  $\epsilon_i^k$  es la entrada  $i$ -ésima del eigenvector  $k$ -ésimo  $\vec{\epsilon}^k$ . La razón de participación (PR por sus siglas en inglés) se define como

$$PR^k = \sum_i^N [\epsilon_i^k]^{-4} \quad (2.25)$$

Esta mide cuántas amplitudes de los eigenvectores participan significativamente en el eigenvector  $\vec{\epsilon}^k$ .

## 2.8. Distribución del Espaciamento a Primeros Vecinos para Eigenvalores

Una de las pruebas para identificar un ensemble ortogonal gaussiano(GOE por sus siglas en inglés) es la distribución del espaciamento a primeros vecinos  $x \equiv \xi_{k+1} - \xi_k$  de los eigenvalores desdoblados[GMGW98]. Para matrices de dimensión  $2 \times 2$  del tipo GOE, la función de densidad del espaciamentos de primeros vecinos sigue exactamente la conocida "Conjetura de Wigner"[Meh91] la cual está dada por

$$P_{CW}(x) = \frac{\pi x}{2} e^{-\frac{\pi x^2}{4}} \quad (2.26)$$

A pesar de estar definida para dimensión 2, es una aproximación para matrices GOE de cualquier dimensión.

# Capítulo 3

## Resultados

### 3.1. Preámbulo

En este capítulo se presentan resultados numéricos obtenidos para diferentes puntos del diagrama fase del TASEP en términos de las probabilidades de entrada y salida,  $\alpha$  y  $\beta$ .

Se construyó un ensemble con 50 matrices de datos. Para construir cada matriz de datos  $A$  de dimensión  $N \times T$ , se tomaron  $N$  renglones que representan las  $L$  cajas de la cadena ( $N = L = 5000$ ) y su respectiva serie de tiempo para  $T = 20000$  tiempos considerados con  $x = 4$  (20000 iteraciones entre cada tiempo) y se normalizó cada una de las series de tiempo [Eq. 2.15]. Posteriormente se obtuvo la matriz de correlación  $C = \frac{AA^\dagger}{T}$ .

Se obtuvo la función de correlación cruzada, la cual es una medida del orden en un sistema que nos dice cómo la densidad varía en promedio en una caja cuando se varía en otra a una cierta distancia. Para esto, se utilizó la matriz de correlación  $C$  con índices  $i$  y  $j$  para renglones y columnas respectivamente. Se hizo un promedio sobre las correlaciones cruzadas  $C_{ij}$  que cumplieran la condición  $k = |i - j|$ , esto para cada  $k$ , donde  $k$  corre de 1 a  $n - 1$ , obteniendo así la función de correlación cruzada  $\langle C \rangle_{ij}$ ; esto se hizo para 10 miembros del ensemble y se promedió sobre este subconjunto.

Para cada matriz de correlación del ensemble, se obtuvieron los eigenvalores y la

densidad de probabilidad haciendo un histograma, donde se comparó con la curva teórica de Marchenko-Pastur [Eq. 2.21].

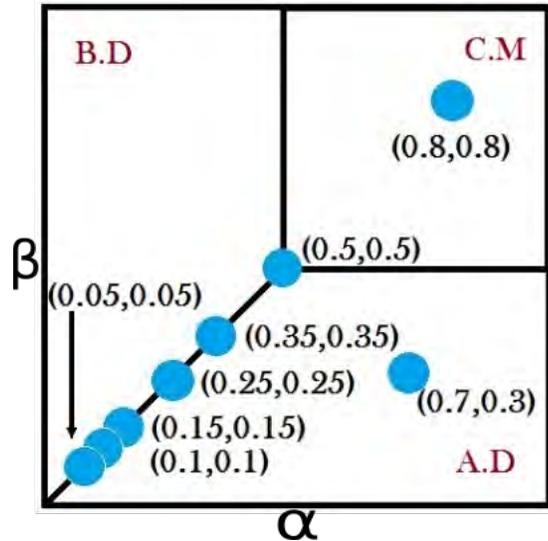


Figura 3.1: Puntos del plano fase a los cuales se les hizo el análisis de correlaciones. La línea diagonal representa la línea de transición de fase entre alta y baja densidad. Las líneas horizontal y vertical representan la transición continua entre corriente máxima y tanto alta como baja densidad respectivamente.

Se mostrará el diagrama de Zipf para los eigenvalores  $\lambda$  en orden descendiente y a escala log-log. Esto para cada miembro del ensemble y también para los eigenvalores promediados.

Utilizando el método de desdoblamiento [GMGW98] en los eigenvalores se obtuvieron los “eigenvalores desdoblados” y con estos se hizo la distribución del espaciamiento a primeros vecinos comparándola con la “Conjetura de Wigner”.

Finalmente para 10 miembros del ensemble se obtuvieron los correspondientes eigenvectores, de los cuales se calculó la razón de participación. También se hizo un histograma de la densidad de amplitudes de los primeros 100 eigenvectores (es decir, los eigenvectores correspondientes a los 100 eigenvalores más pequeños), lo mismo se hizo para 100 de la mitad y los últimos 100.

En la Fig. 3.1 se muestran los puntos del plano fase para los cuales se hizo el análisis previamente mencionado. Cabe mencionar que no se muestra ningún punto en baja densidad debido a la simetría que existe entre agujeros y partículas, siendo el análisis

idéntico al punto en alta densidad.

### 3.2. Gráficas y Discusión

Tenemos un conjunto sistemático de figuras para todos los puntos mostrados en el diagrama fase Fig. 3.1. En el texto vamos a mostrar las figuras más relevantes para la discusión pero para complementar vamos a mostrar las restantes en el apéndice.

Analizando la densidad de probabilidad de los eigenvalores se pudo observar que para el punto  $\alpha = 0.7, \beta = 0.3$  ésta se ajusta adecuadamente a la curva teórica de Marchenko-Pastur. Es decir, se asemeja a la función de densidad de probabilidad de una matriz con entradas Gaussianas independientes con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2$  Fig. 3.2. Para este punto únicamente existe un eigenvalor que discrepa de la curva teórica Tabla 3.1; sin embargo, la distancia entre el último eigenvalor que se ajusta bien y éste es relativamente corta, para fines prácticos despreciable; mientras que para todos los demás puntos existen varios eigenvalores que salen de la curva teórica Figs. 3.3, 5.1-5.5.

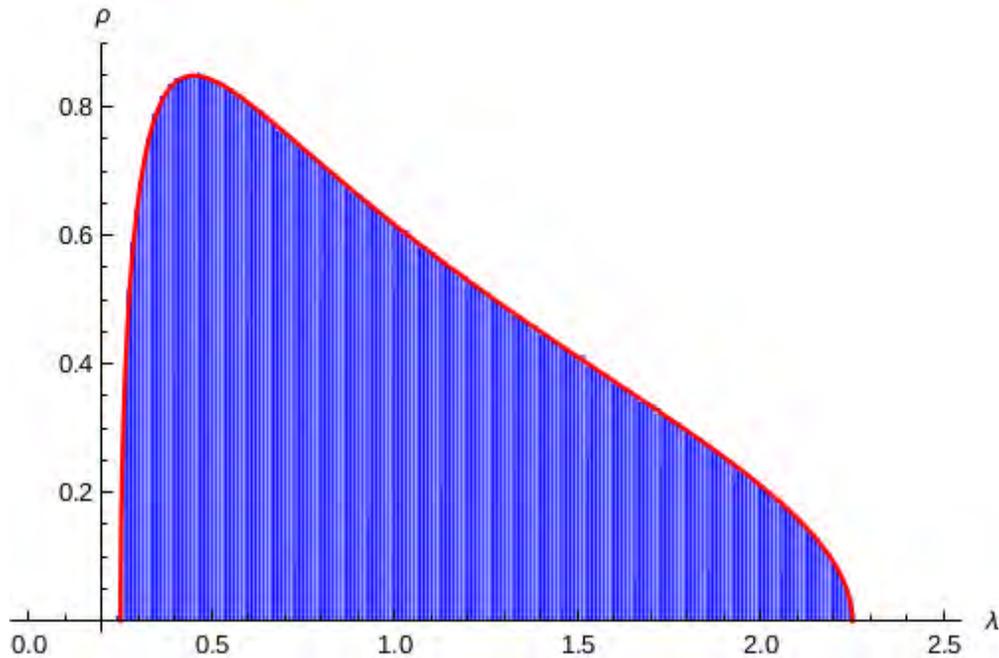


Figura 3.2: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.7, \beta = 0.3$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

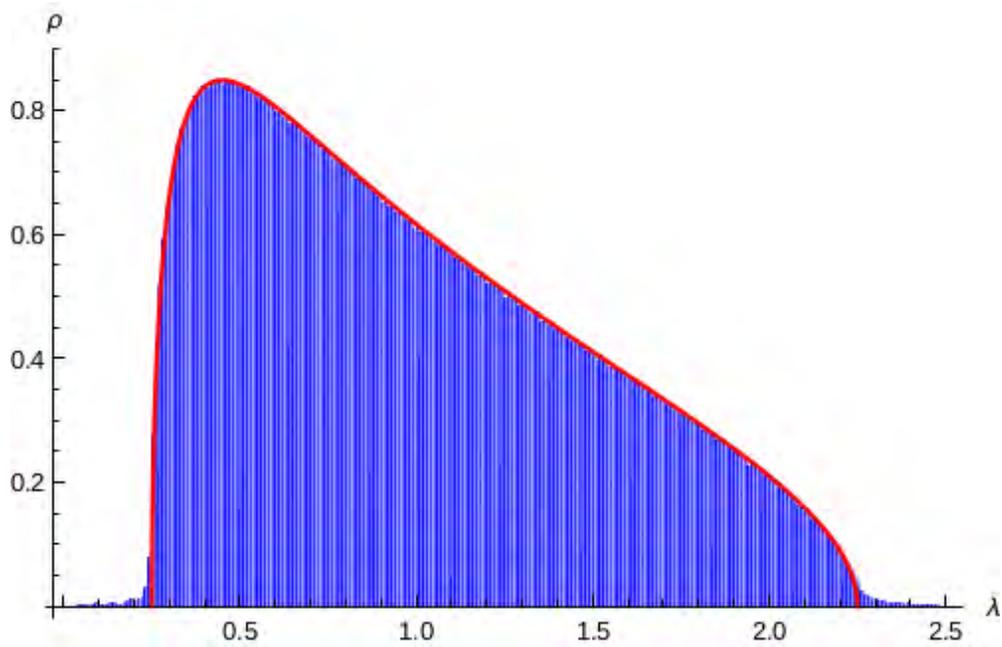


Figura 3.3: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.8$ . La línea muestra la distribución de Marchenko–Pastur teórica. Cabe señalar que existe una diferencia entre la curva de Marchenko–Pastur y los resultados numéricos, tanto a la izquierda como a la derecha del bulk.

Son de particular interés los primeros eigenvalores que no pertenecen a la curva teórica de Marchenko-Pastur en el punto  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$  Fig. 3.4, en la actualidad seguimos investigando este comportamiento. Podemos observar los eigenvalores más grandes no pertenecientes la curva de Marchenko-Pastur que nos indican correlaciones en la Tabla 3.1.

	$\alpha = \beta = 0.05$	$\alpha = \beta = 0.1$	$\alpha = \beta = 0.15$	$\alpha = \beta = 0.25$	$\alpha = \beta = 0.35$	$\alpha = \beta = 0.5$	$\alpha = \beta = 0.8$	$\alpha = 0.7\beta = 0.3$
1	0.0498	0.0343	0.0491	0.0389	0.0183	0.0052	0.0049	0.0073
2	0.1382	0.0899	0.1387	0.1268	0.0680	0.0108	0.0100	
3	0.2991	0.1853	0.3058	0.2814	0.1921	0.0185	0.0174	
4	0.5871	0.3774	0.5702	0.5450	0.4159	0.0269	0.0265	
5	1.1020	0.6802	1.0073	1.0195	1.0114	0.0374	0.0380	
6	1.9137	1.1138	1.7354	1.8915	2.2030	0.0540	0.0539	
7	3.3652	1.9536	2.9900	3.3328	6.2327	0.0743	0.0716	
8	6.0620	3.3126	5.1743	6.5970	24.863	0.1067	0.1012	
9	11.399	5.8385	9.8581	15.396		0.1515	0.1464	
10	25.9160	10.9393	23.2820	68.5320		0.2197	0.2379	
11	90.7197	25.9109	90.8795			0.3447	0.3956	
12		95.7497				0.6318		

Tabla 3.1: Distancias entre el eigenvalor más grande que queda dentro de la curva de Marchenko-Pastur teórica y los más grandes fuera de la curva.

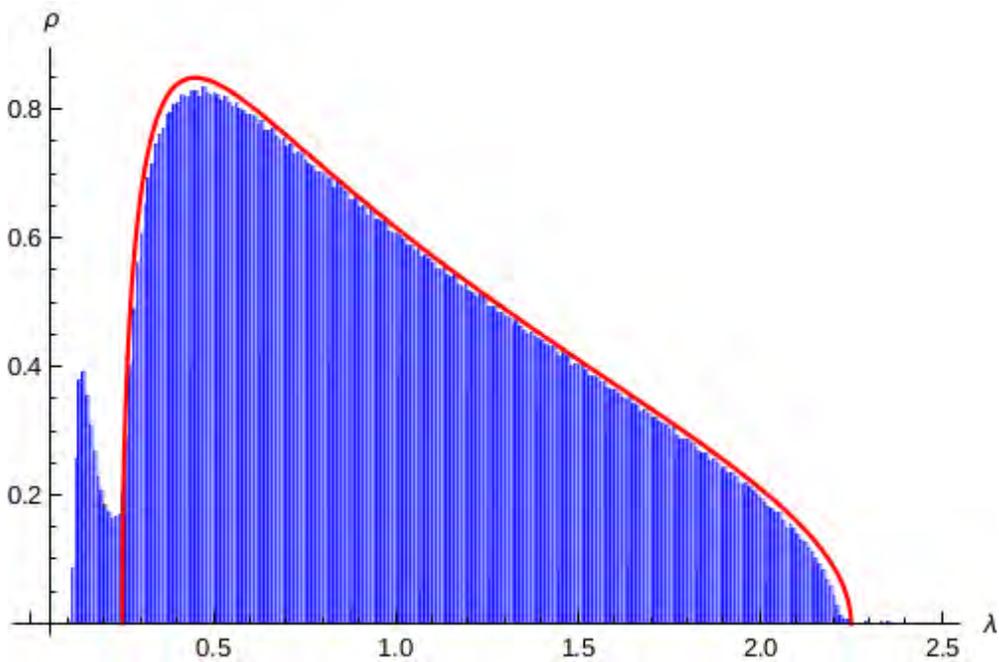


Figura 3.4: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

La distribución del espaciamento a primeros vecinos es similar para todos los puntos;

se muestra para el punto  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$  solamente para no ser redundante. Se hace una comparación con la curva de la conjetura de Wigner, la cual es una aproximación a la distribución proveniente de matrices GOE Fig. 3.5. Es importante mencionar que para el punto  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$  el método de desdoblamiento no puede ser aplicado, ya que como se puede ver en la Fig. 3.4 hay un pico al inicio de la distribución de los eigenvalores, lo que no permite hacer una buena estadística del comportamiento de los eigenvalores alrededor de este punto.

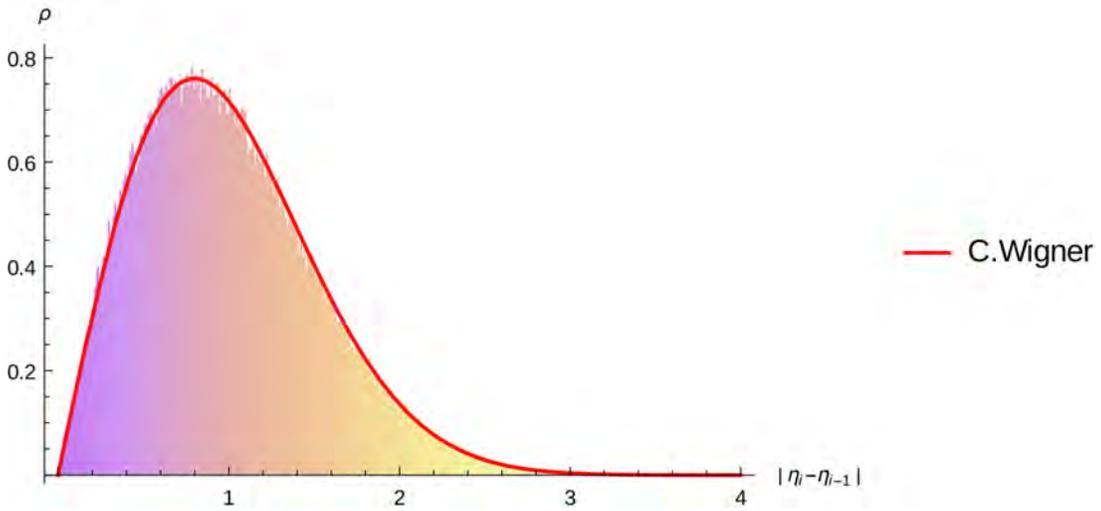
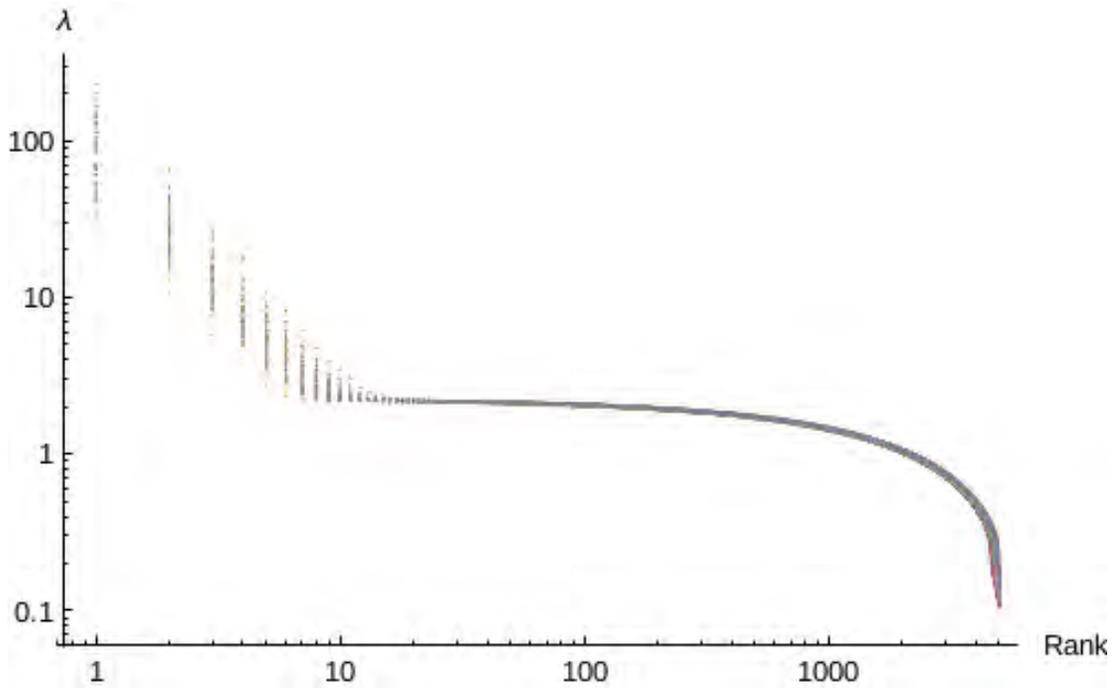
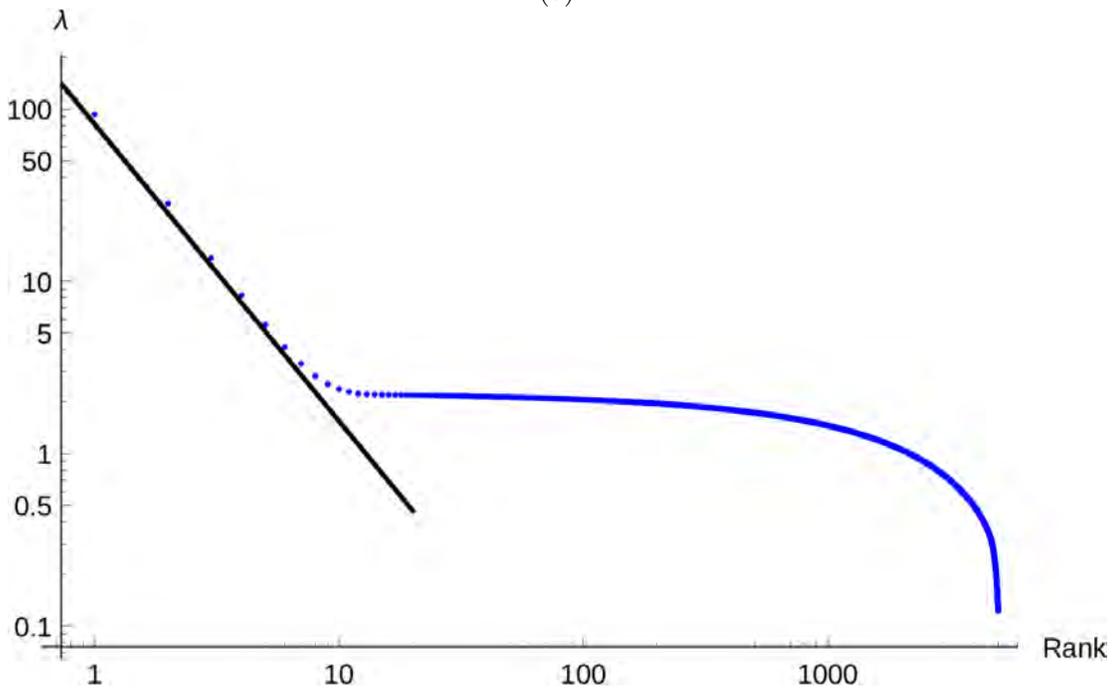


Figura 3.5: Distribución del espaciamiento a primeros vecinos para  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$ , la línea muestra muestra la Conjetura de Wigner.

Se muestra el diagrama de Zipf de los eigenvalores para cada miembro del ensemble y para los eigenvalores promedio. Los resultados que se buscan puntualizar se aprecian sobre la línea de transición de fase, para los que se percibe un comportamiento de ley de potencias en algunos casos, para los eigenvalores más grandes Figs. 3.6-3.10. Los puntos fuera de la línea de transición de fase entre alta y baja densidad claramente que no siguen una ley de potencias y no son de gran interés para este trabajo; sin embargo el diagrama de Zipf es muy similar para los puntos en la región de corriente máxima. Como se muestra en el apéndice, en los puntos de máxima corriente se ve una ligera curvatura convexa para los primeros eigenvalores y una discontinuidad notoria para los eigenvalores más pequeños Figs. 5.7-5.8 diferenciándose así del punto en alta densidad Fig. 5.6 .

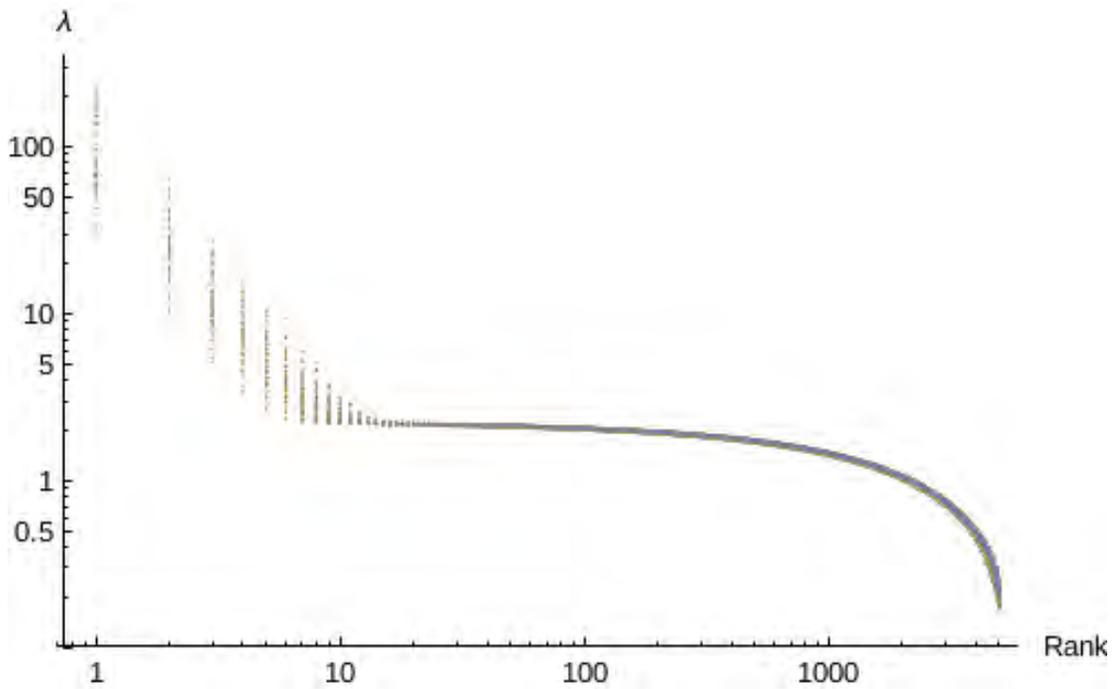


(a)

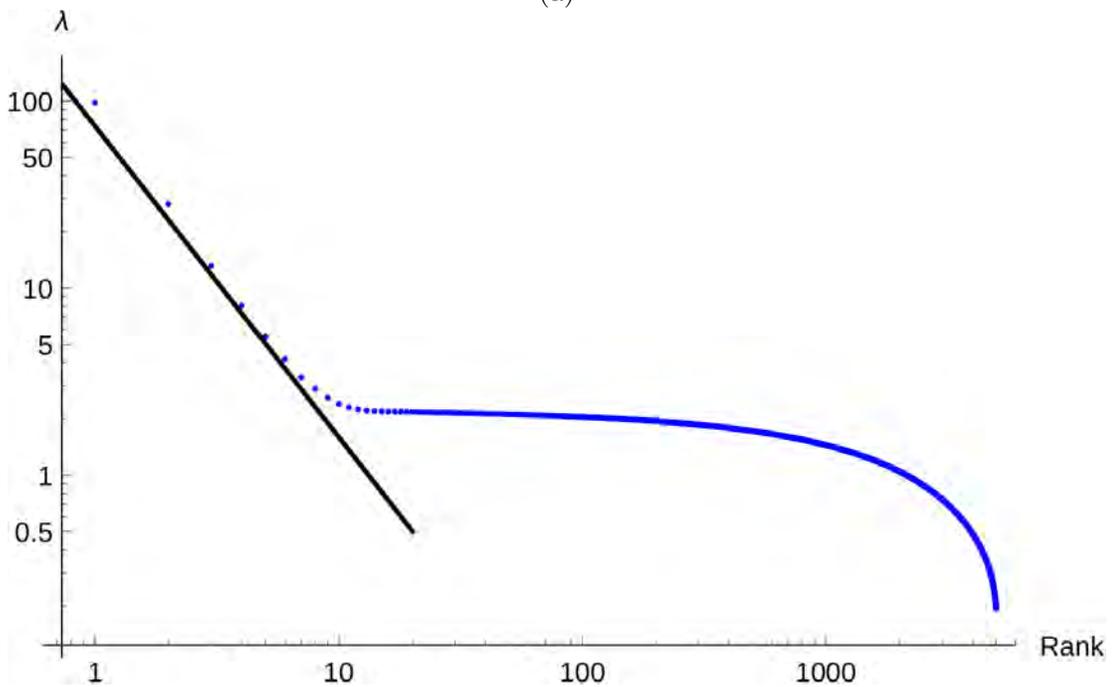


(b)

Figura 3.6: (a) Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . (b) Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto. La recta que mejor se ajusta a los primeros 6 eigenvalores promedio es:  $4.26 - 1.72 x$ .

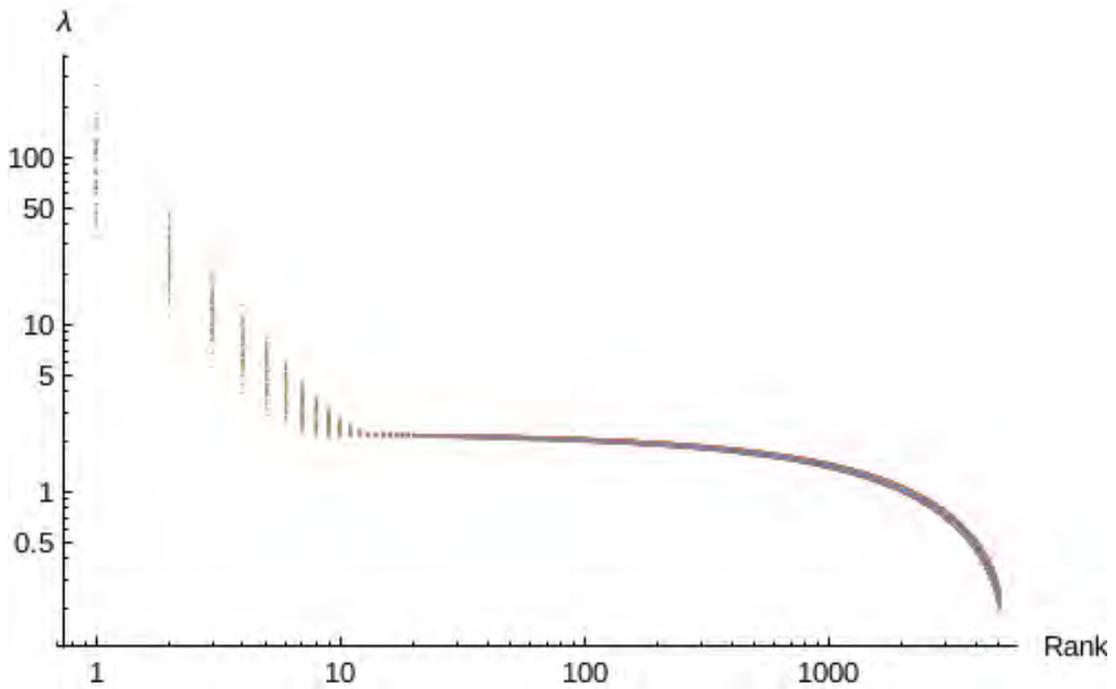


(a)

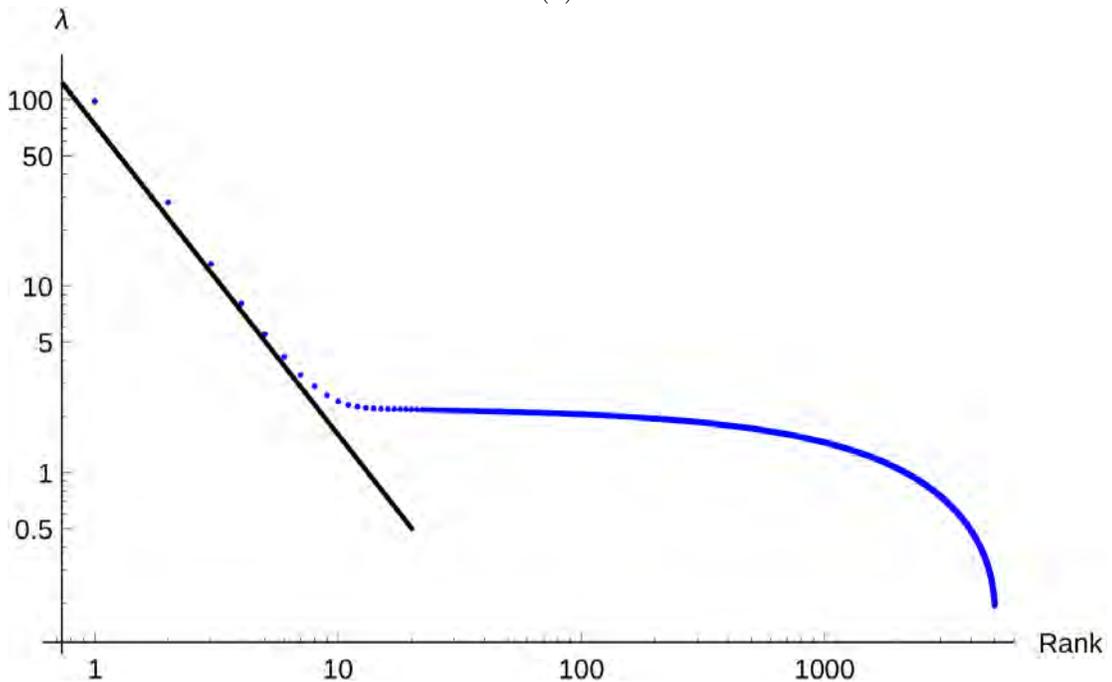


(b)

Figura 3.7: (a)Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ (b)Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto. La recta que mejor se ajusta del segundo eigenvalor promedio más grande al sexto es:  $2.23 - 1.73 x$ .

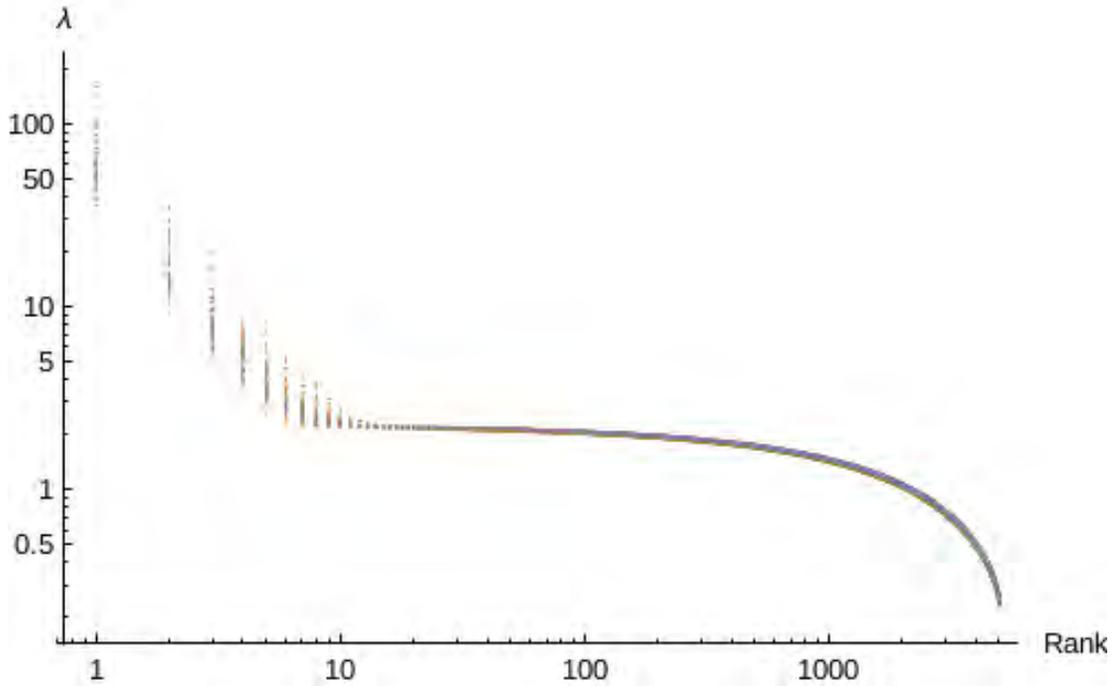


(a)

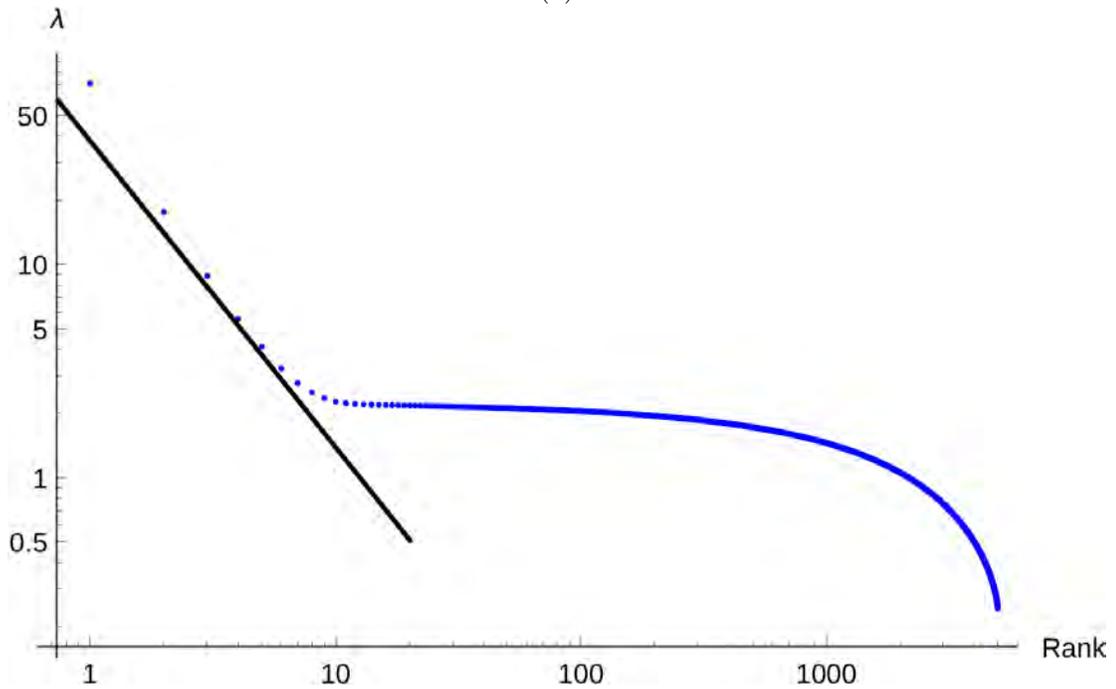


(b)

Figura 3.8: (a) Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0.15$  (b) Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto. La recta que mejor se ajusta del tercer eigenvalor promedio más grande al sexto es:  $2.00 - 1.61x$ . No obstante, no hay una ley de potencias que se pueda apreciar.

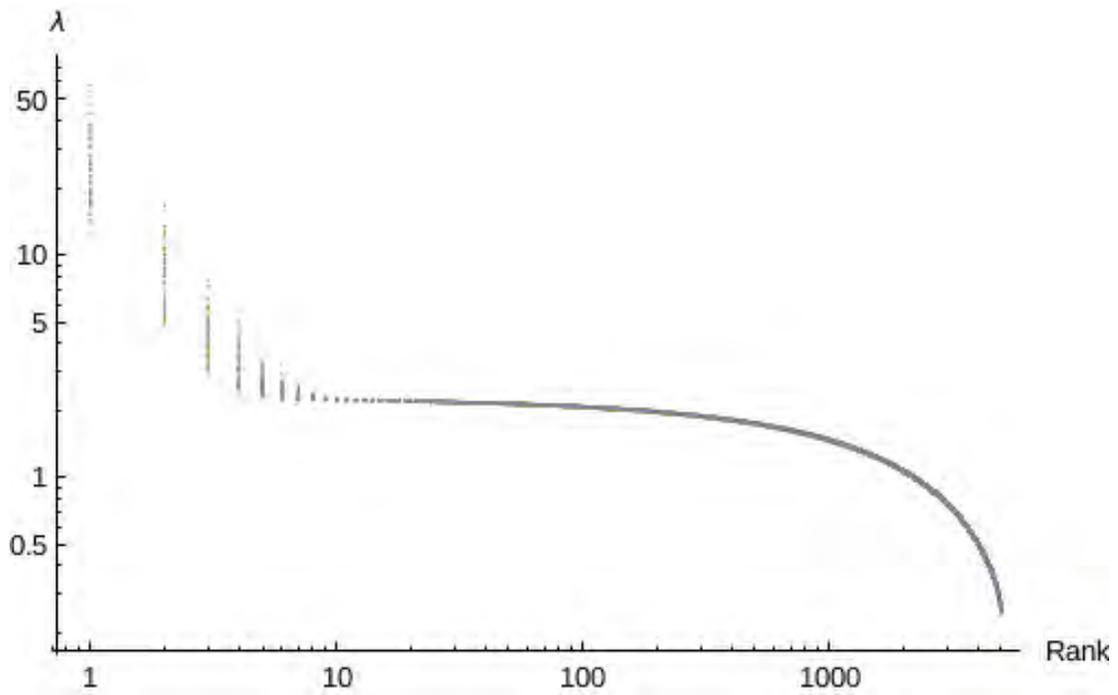


(a)

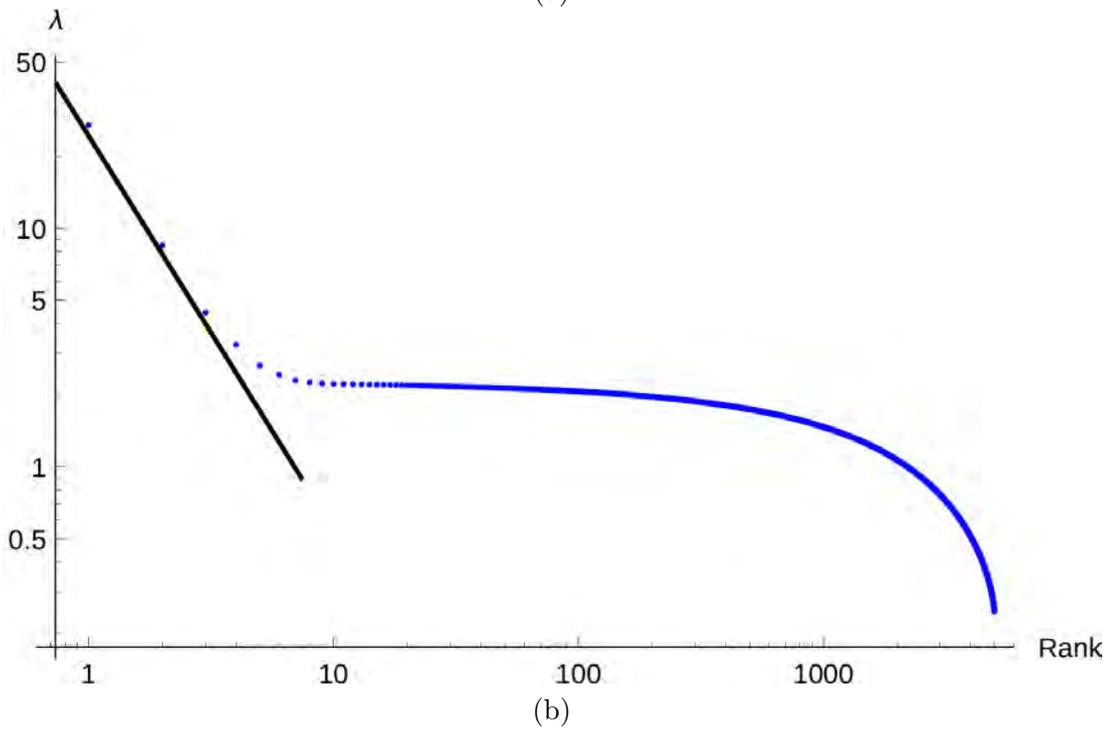


(b)

Figura 3.9: (a) Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$  (b) Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto. La recta que mejor se ajusta del segundo eigenvalor promedio más grande al quinto es:  $1.67 - 1.54 x$ . No obstante, no hay una ley de potencias que se pueda apreciar.



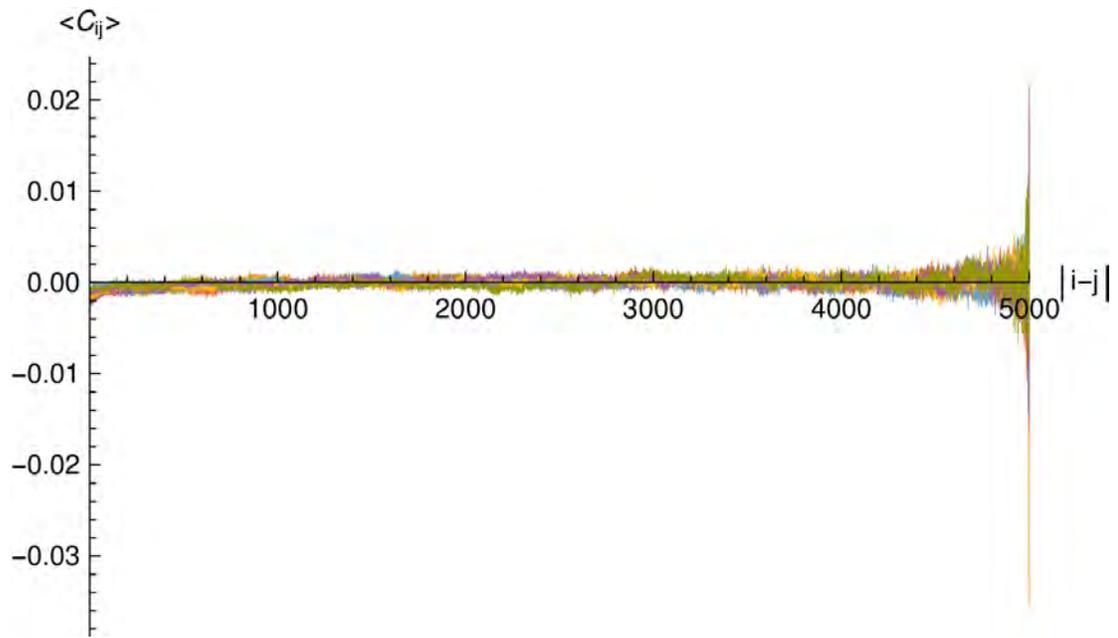
(a)



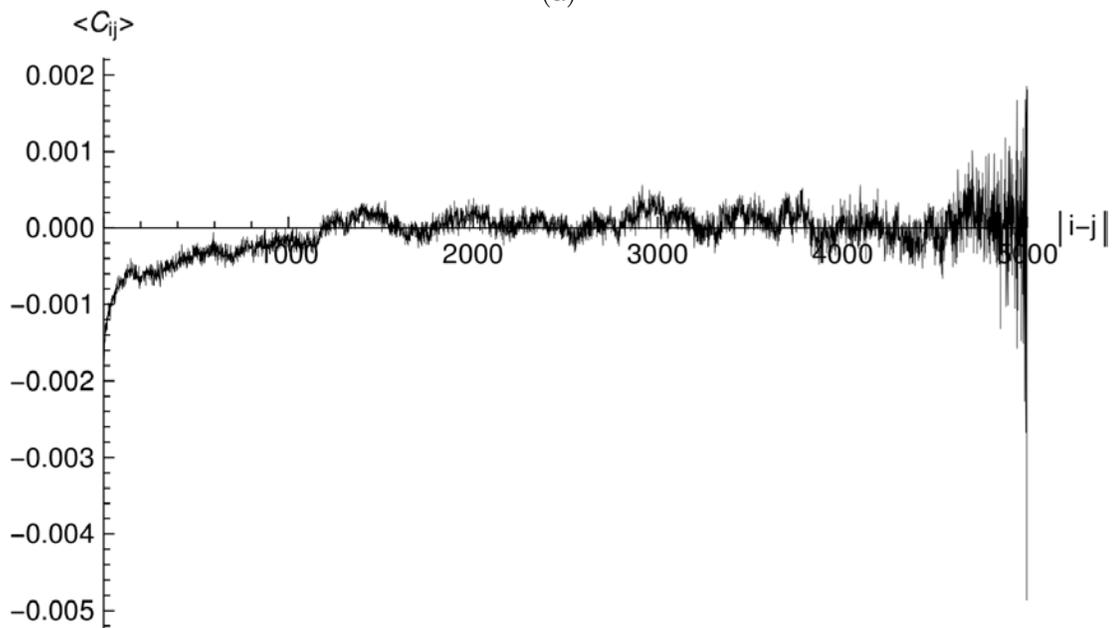
(b)

Figura 3.10: (a) Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.35$  (b) Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto. La recta que mejor se ajusta a los primeros 3 eigenvalores promedio es:  $1.06 - 1.64 x$ .

Para el punto en la región de alta densidad  $\alpha = 0.7$   $\beta = 0.3$  las correlaciones espaciales son despreciables. Para los puntos de máxima corriente la función de correlación cruzada cerca del origen indica anticorrelaciones, éstas a pesar de no ser considerablemente grandes respecto a las de la mayoría, existen, cosa que no pasa en ningún otro punto de las otras regiones del plano fase analizadas. En el punto  $\alpha = 0.8$   $\beta = 0.8$  Fig. 3.11 son mucho más notorias las anticorrelaciones que para  $\alpha = 0.5$   $\beta = 0.5$ . En el punto  $\alpha = 0.05$   $\beta = 0.05$ , haciendo el análisis, se puede apreciar que la función de correlación cruzada obtiene su máximo valor hasta la izquierda de la gráfica, esto quiere decir que entre cajas vecinas existe la mayor correlación; conforme la distancia entre dos puntos aumenta, las correlaciones se van desvaneciendo Fig. 3.12, como se muestra en el apéndice lo mismo pasa para los otros puntos en la transición entre baja y alta densidad, los puntos  $\alpha = 0.35$   $\beta = 0.35$  Fig. 5.12,  $\alpha = 0.25$   $\beta = 0.25$  Fig. 5.11,  $\alpha = 0.15$   $\beta = 0.15$  Fig. 5.10 y  $\alpha = 0.1$   $\beta = 0.1$  Fig. 5.9. Podemos apreciar que conforme aumentamos el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  sobre la línea de transición de fase, la función de correlación cruzada va decreciendo.



(a)



(b)

Figura 3.11: (a) Función de correlación cruzada para 10 miembros del ensemble  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.8$ . (b) Función de correlación cruzada promedio sobre los 10 miembros.

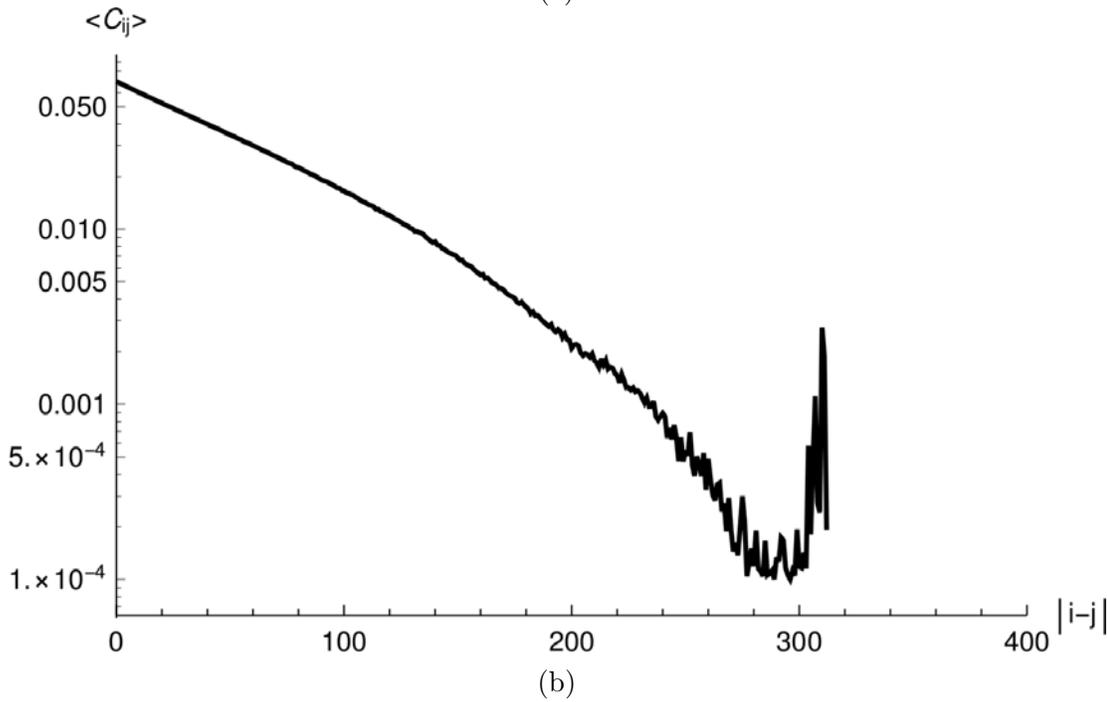
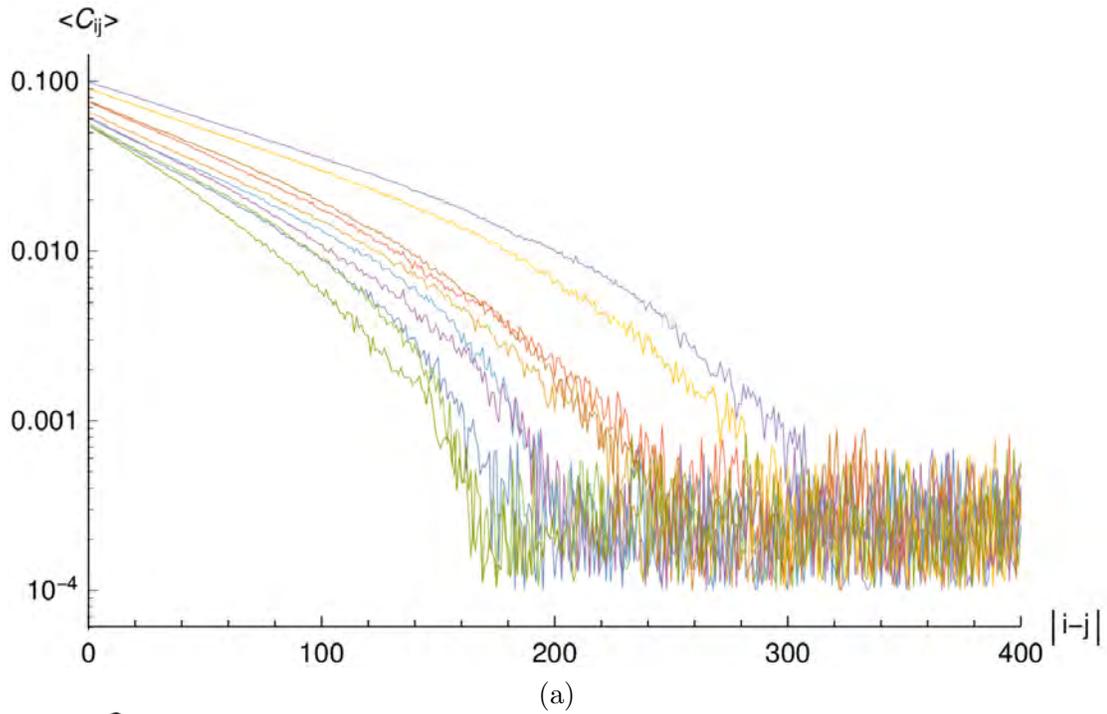


Figura 3.12: (a) Función de correlación cruzada para 10 miembros del ensemble  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . (b) Función de correlación cruzada promedio sobre los 10 miembros.

Haciendo el análisis de la densidad de probabilidad de las amplitudes se indica la gaussiana que mejor se ajusta a los datos. En el caso de los últimos 100 eigenvectores (los correspondientes a los 100 eigenvalores más grandes) se puede apreciar sobre la línea de transición de fase que no se ajustan adecuadamente a una gaussiana, de hecho se tiene una conducta peculiar parecida entre todos los puntos Figs. 3.13(b)-3.17(b); esto se puede percibir mejor en la gráfica donde la gaussiana quedaría linealizada (en la parte derecha de las Figs. 3.13(b)-3.17(b), es decir, donde los puntos que siguen un comportamiento gaussiano se ajustan a una recta; sin embargo, los puntos de hasta la izquierda son incompatibles con este comportamiento. En el caso de los primeros 100 eigenvectores (los correspondientes a los 100 eigenvalores más chicos), sobre la línea de transición de fase, conforme uno se va alejando del origen cada vez se asemeja más a un comportamiento gaussiano Figs. 3.13(a)-3.17(a). Para los eigenvectores de la mitad, en todos los puntos, la densidad de amplitudes empata adecuadamente con una gaussiana. Para todos los puntos fuera de la línea de transición de fase las amplitudes se ajustan admisiblemente a gaussianas como se muestra en la Fig. 5.13. El segundo momento de la función de densidad de probabilidad para los eigenvectores es mejor conocido como “anchura de dispersión”, el cual nos da información sobre la localización de los eigenvectores, éste es complementario a la razón de participación.

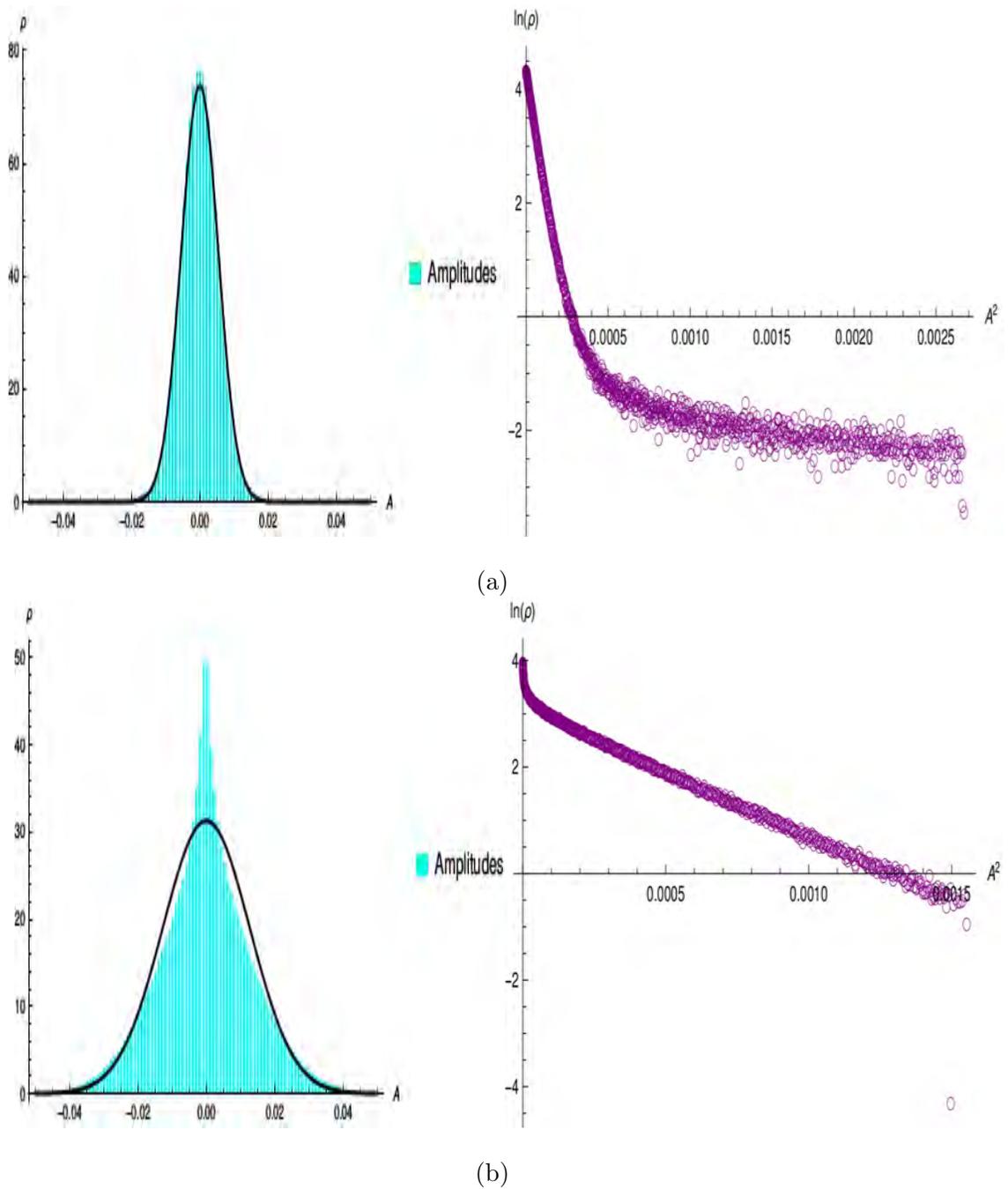
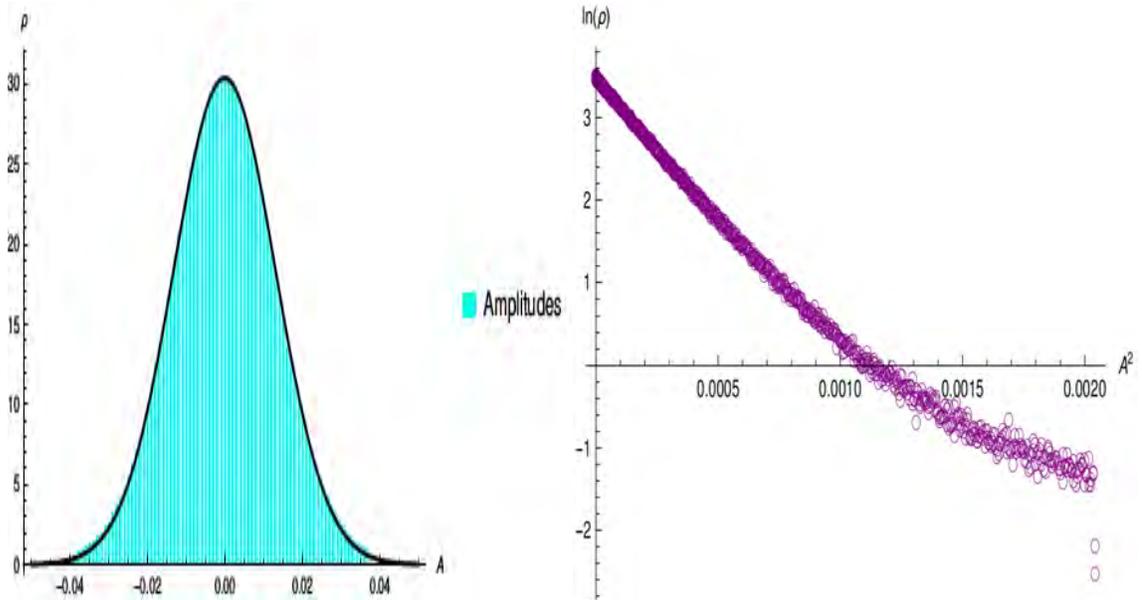
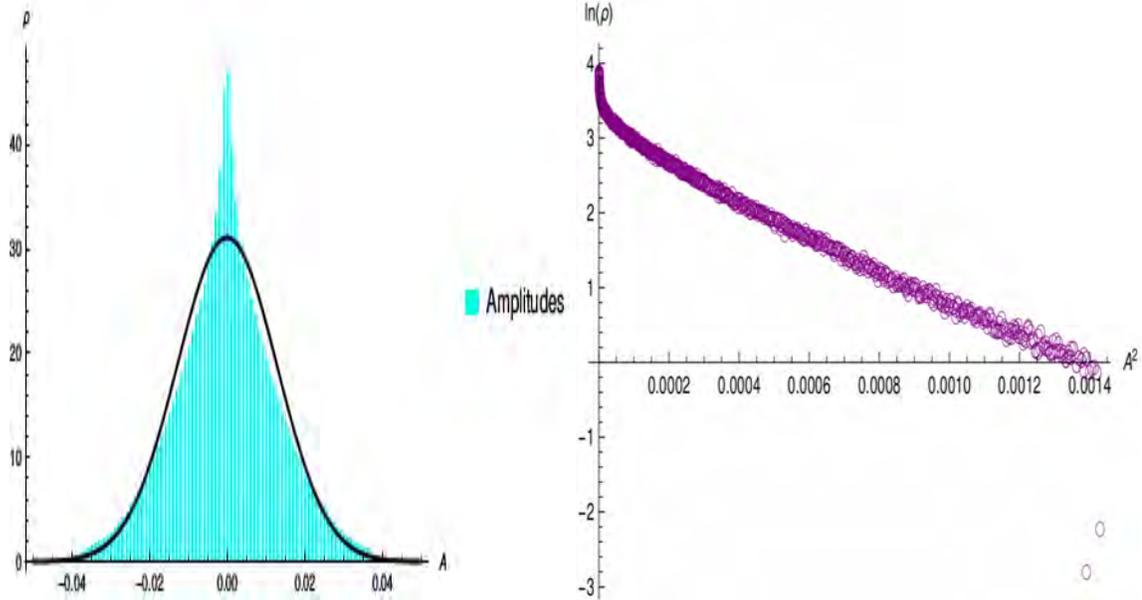


Figura 3.13: Amplitudes de los eigenvectores para el punto  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$  del lado izquierdo se muestran los histogramas con las curvas correspondientes a la gaussiana que mejor se ajusta a los datos y del lado derecho la gráfica al elevar las amplitudes al cuadrado  $A^2$  y aplicar  $\ln(\rho)$ . (a) Amplitudes de los primeros 100 eigenvectores. (b) Amplitudes de los últimos 100 eigenvectores.



(a)



(b)

Figura 3.14: Amplitudes de los eigenvectores para el punto  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  del lado izquierdo se muestran los histogramas con las curvas correspondientes a la gaussiana que mejor se ajusta a los datos y del lado derecho la gráfica al elevar las amplitudes al cuadrado  $A^2$  y aplicar  $\ln(\rho)$ . (a) Amplitudes de los primeros 100 eigenvectores. (b) Amplitudes de los últimos 100 eigenvectores.

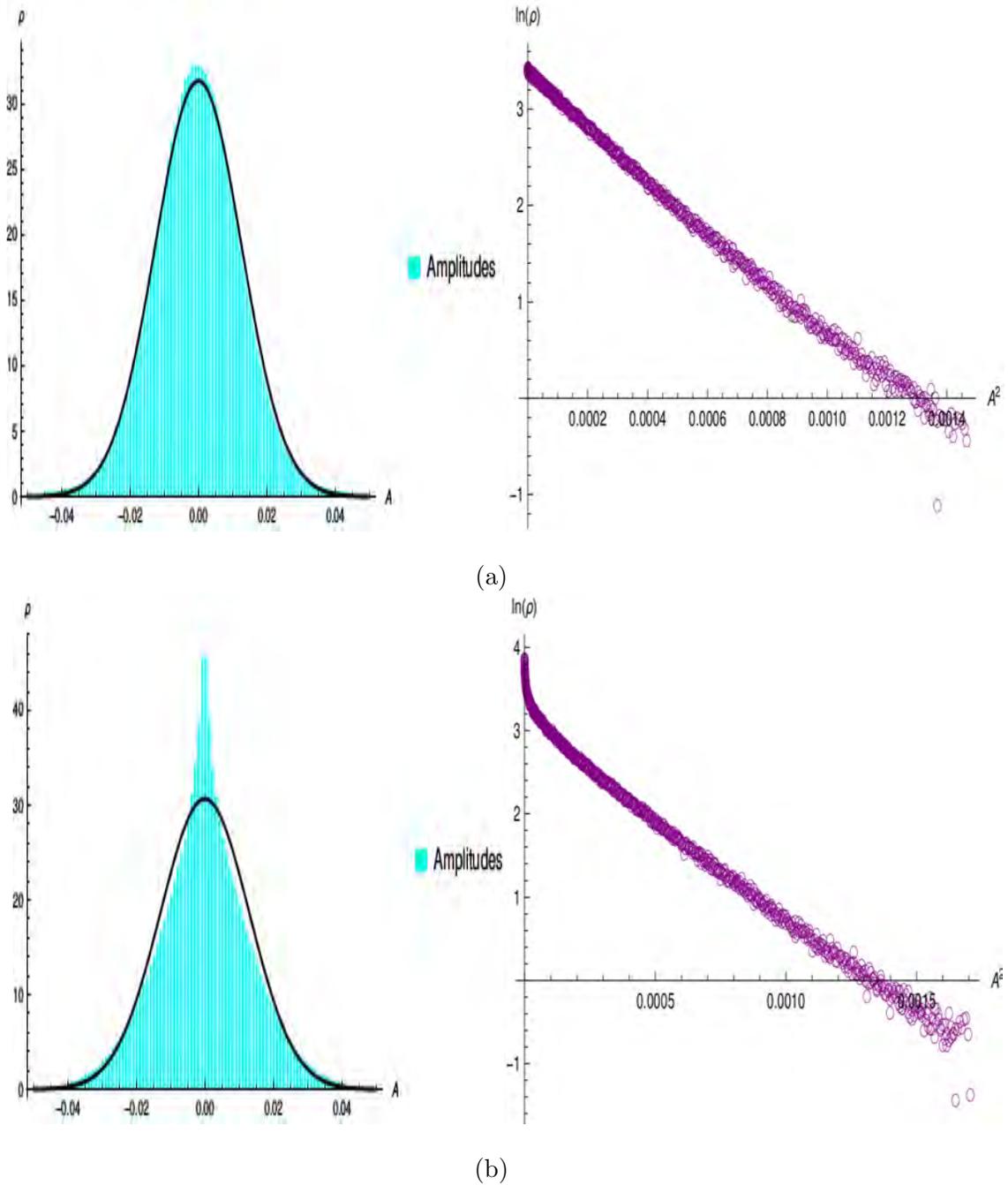


Figura 3.15: Amplitudes de los eigenvectores para el punto  $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0.15$  del lado izquierdo se muestran los histogramas con las curvas correspondientes a la gaussiana que mejor se ajusta a los datos y del lado derecho la gráfica al elevar las amplitudes al cuadrado  $A^2$  y aplicar  $\ln(\rho)$ . (a) Amplitudes de los primeros 100 eigenvectores. (b) Amplitudes de los últimos 100 eigenvectores.

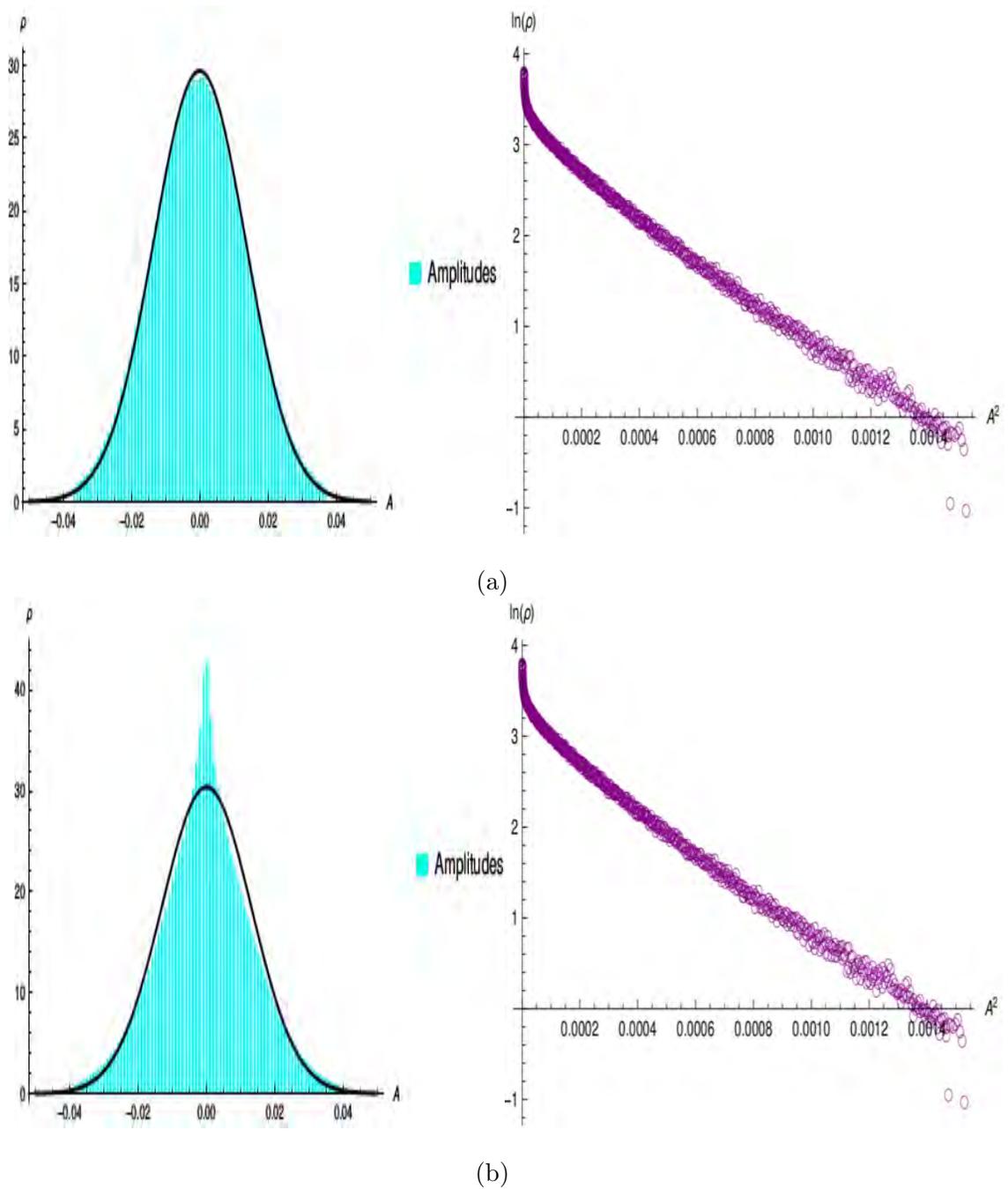


Figura 3.16: Amplitudes de los eigenvectores para el punto  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$  del lado izquierdo se muestran los histogramas con las curvas correspondientes a la gaussiana que mejor se ajusta a los datos y del lado derecho la gráfica al elevar las amplitudes al cuadrado  $A^2$  y aplicar  $\ln(\rho)$ . (a) Amplitudes de los primeros 100 eigenvectores. (b) Amplitudes de los últimos 100 eigenvectores.

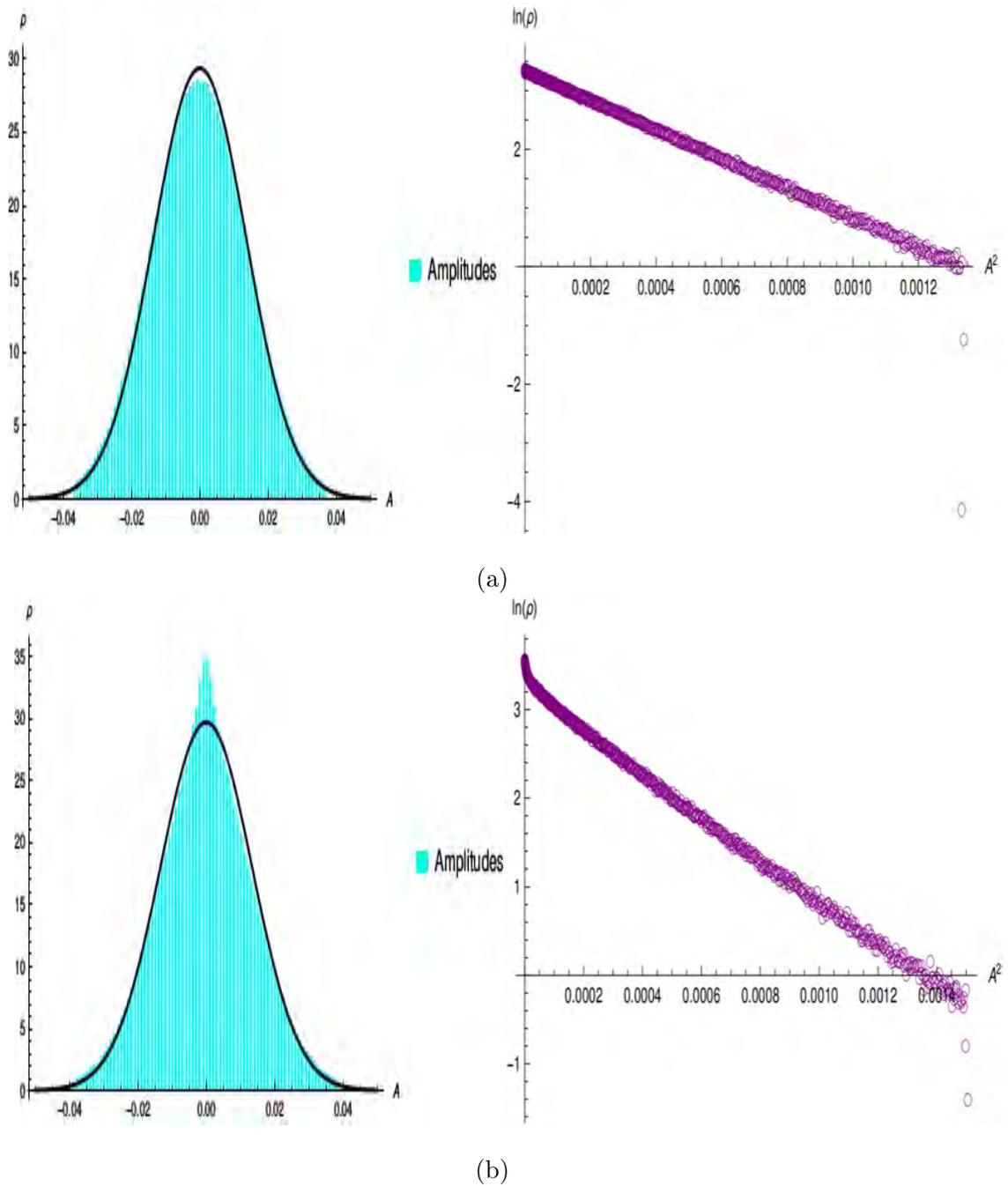


Figura 3.17: Amplitudes de los eigenvectores para el punto  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.35$  del lado izquierdo se muestran los histogramas con las curvas correspondientes a la gaussiana que mejor se ajusta a los datos y del lado derecho la gráfica al elevar las amplitudes al cuadrado  $A^2$  y aplicar  $\ln(\rho)$ . (a) Amplitudes de los primeros 100 eigenvectores. (b) Amplitudes de los últimos 100 eigenvectores.

Cuando la razón de participación tiene un valor cercano a  $1/3$ , empata con lo esperado para un comportamiento aleatorio. Para todos los puntos del plano fase, la mayor parte de las razones de participación están relativamente cerca de  $1/3$ . La cola que se ve al inicio y al final en la razón de participación sobre la línea de transición de fase se va aplanando conforme uno se aleja del origen. Esto quiere decir que sobre la línea de transición entre alta y baja densidad hay una menor contribución de las componentes para los primeros eigenvectores cerca del origen y la localización de los mismos está regida relativamente por pocas amplitudes Figs. 3.18-3.22. En la zona de corriente máxima, el comportamiento en los puntos tomados es totalmente diferente, podemos ver que mayor número de componentes en los primeros eigenvectores tienen la mayor participación, contrariamente a los mostrados en la línea de transición de fase entre alta y baja densidad Figs. 3.23-3.24. En el punto  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 0.3$  no existe ninguna razón de participación que sobresalga al comportamiento de la mayoría Fig. 3.25.

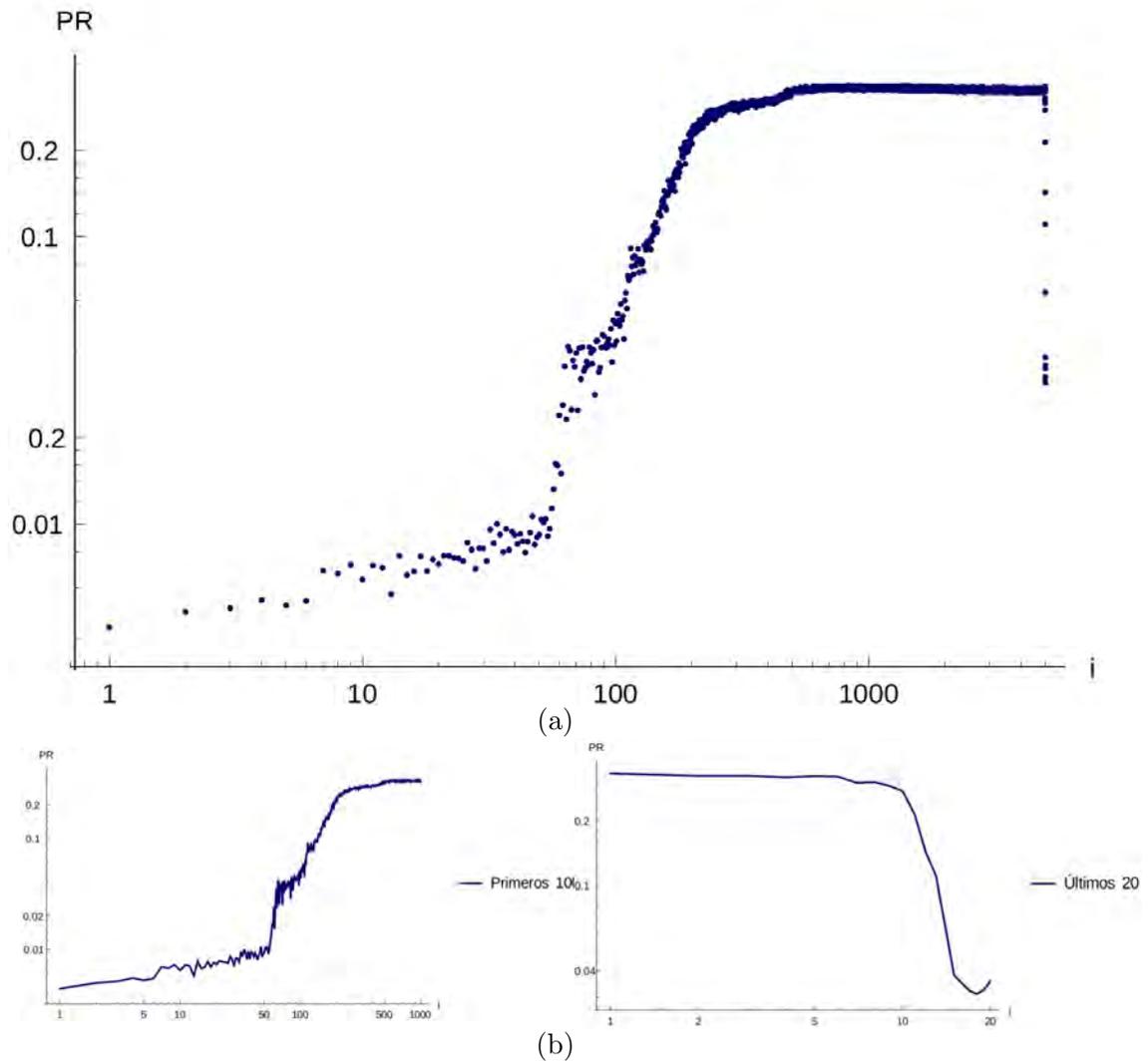
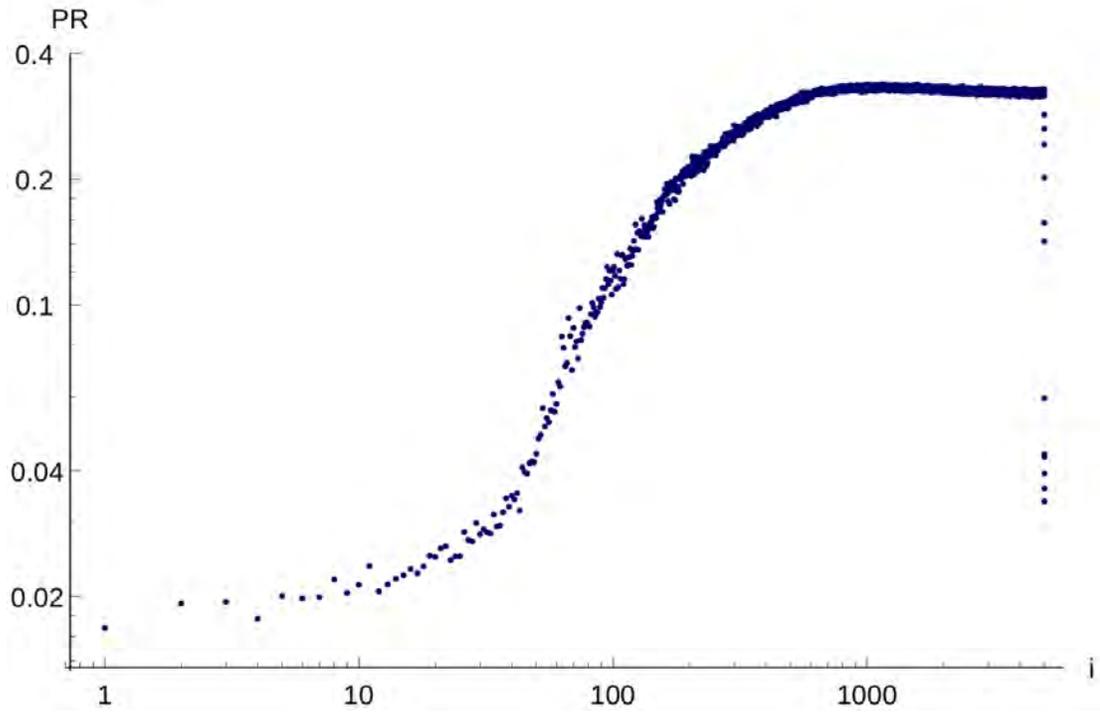
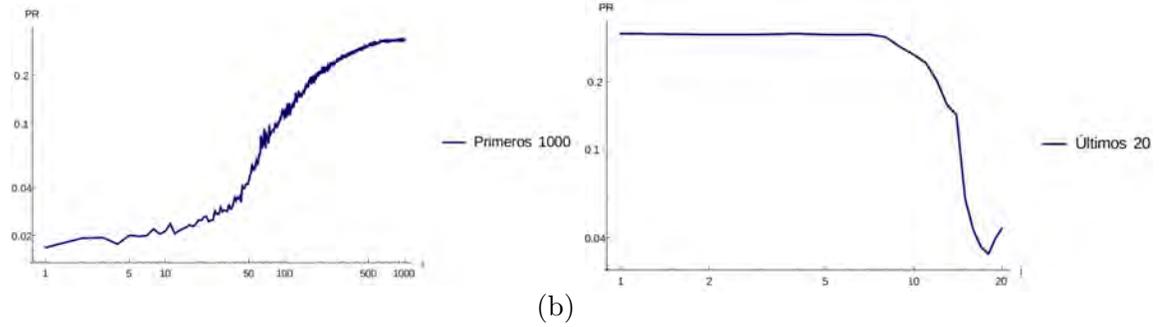


Figura 3.18: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . (b) La imagen de la izquierda muestra un enfoque de los primeros 1000 eigenvectores. La imagen de la derecha muestra un enfoque de los últimos 20 eigenvectores.

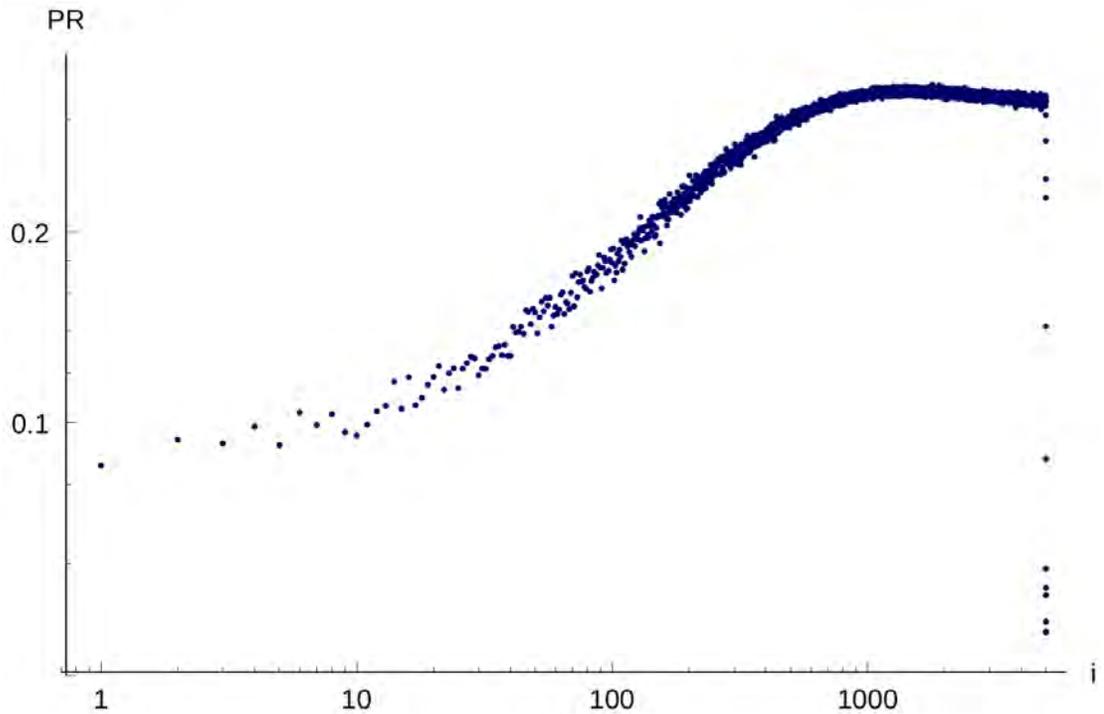


(a)

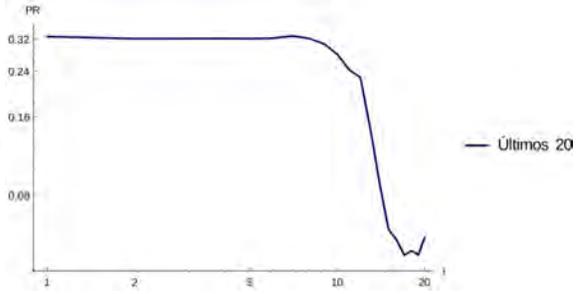
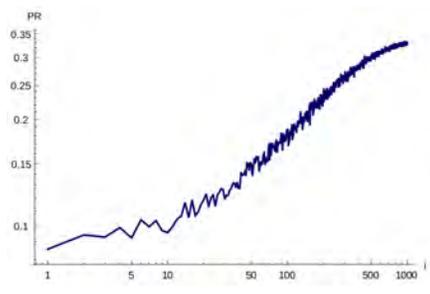


(b)

Figura 3.19: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ . (b) La imagen de la izquierda muestra un enfoque de los primeros 1000 eigenvectores. La imagen de la derecha muestra un enfoque de los últimos 20 eigenvectores.

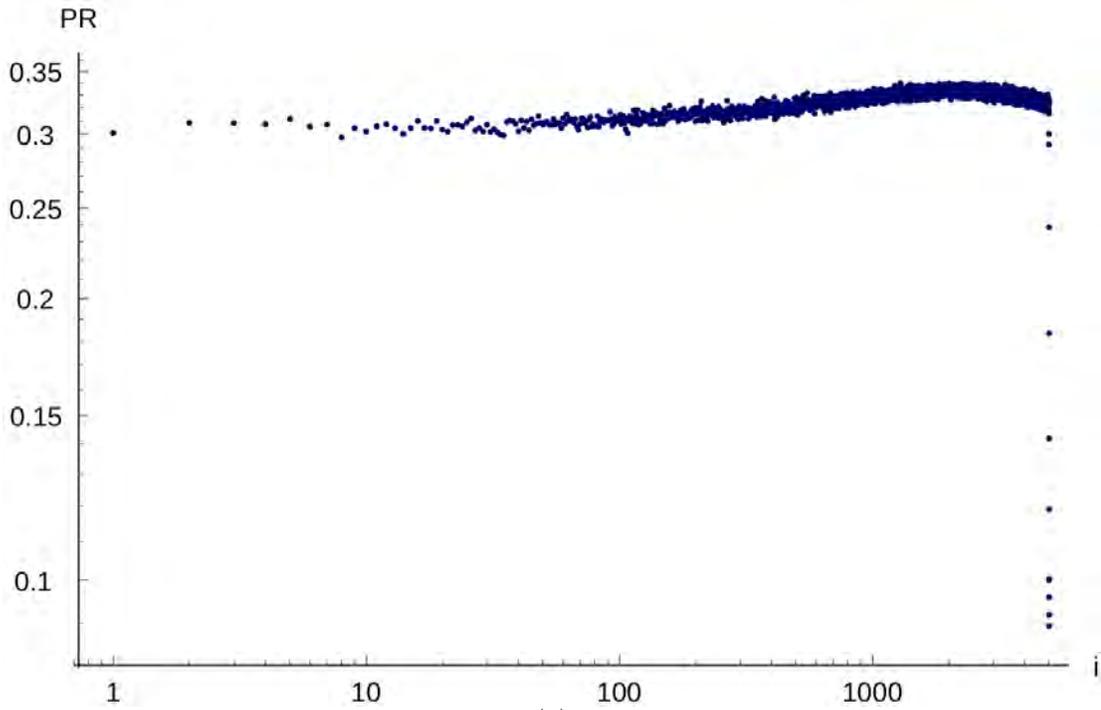


(a)

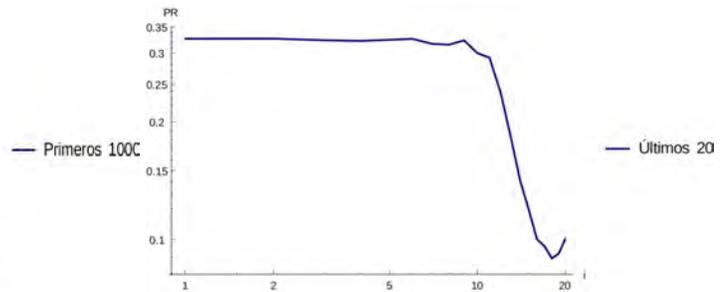
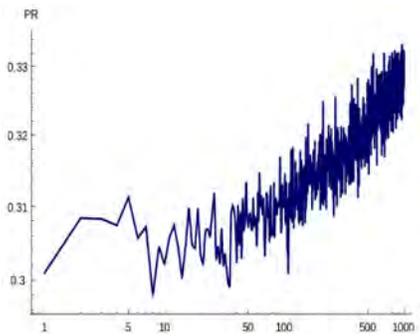


(b)

Figura 3.20: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0.15$ . (b) La imagen de la izquierda muestra un enfoque de los primeros 1000 eigenvectores. La imagen de la derecha muestra un enfoque de los últimos 20 eigenvectores.



(a)



(b)

Figura 3.21: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$ . (b) La imagen de la izquierda muestra un enfoque de los primeros 1000 eigenvectores. La imagen de la derecha muestra un enfoque de los últimos 20 eigenvectores.

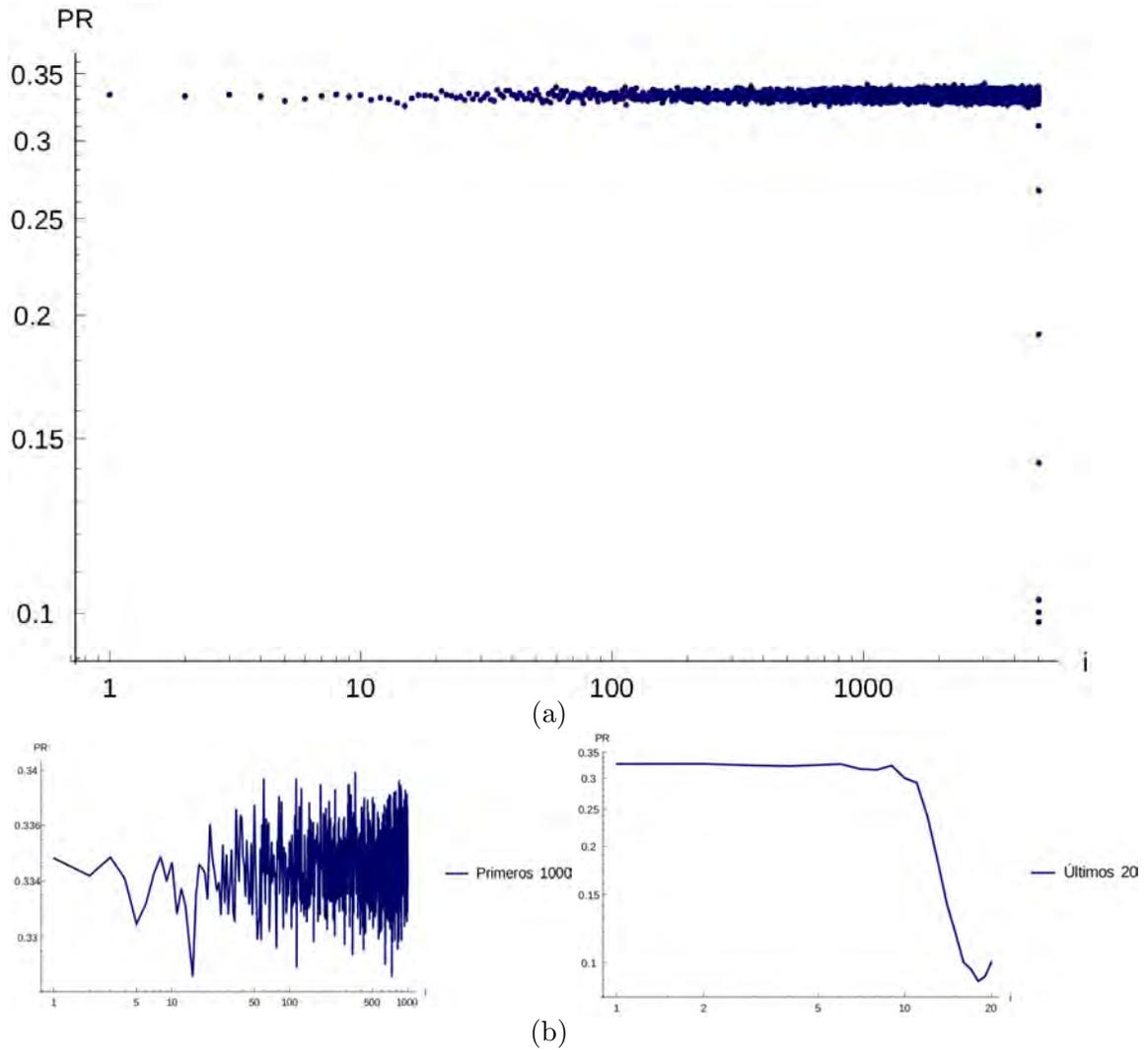


Figura 3.22: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.35$ . (b) La imagen de la izquierda muestra un enfoque de los primeros 1000 eigenvectores. La imagen de la derecha muestra un enfoque de los últimos 20 eigenvectores.

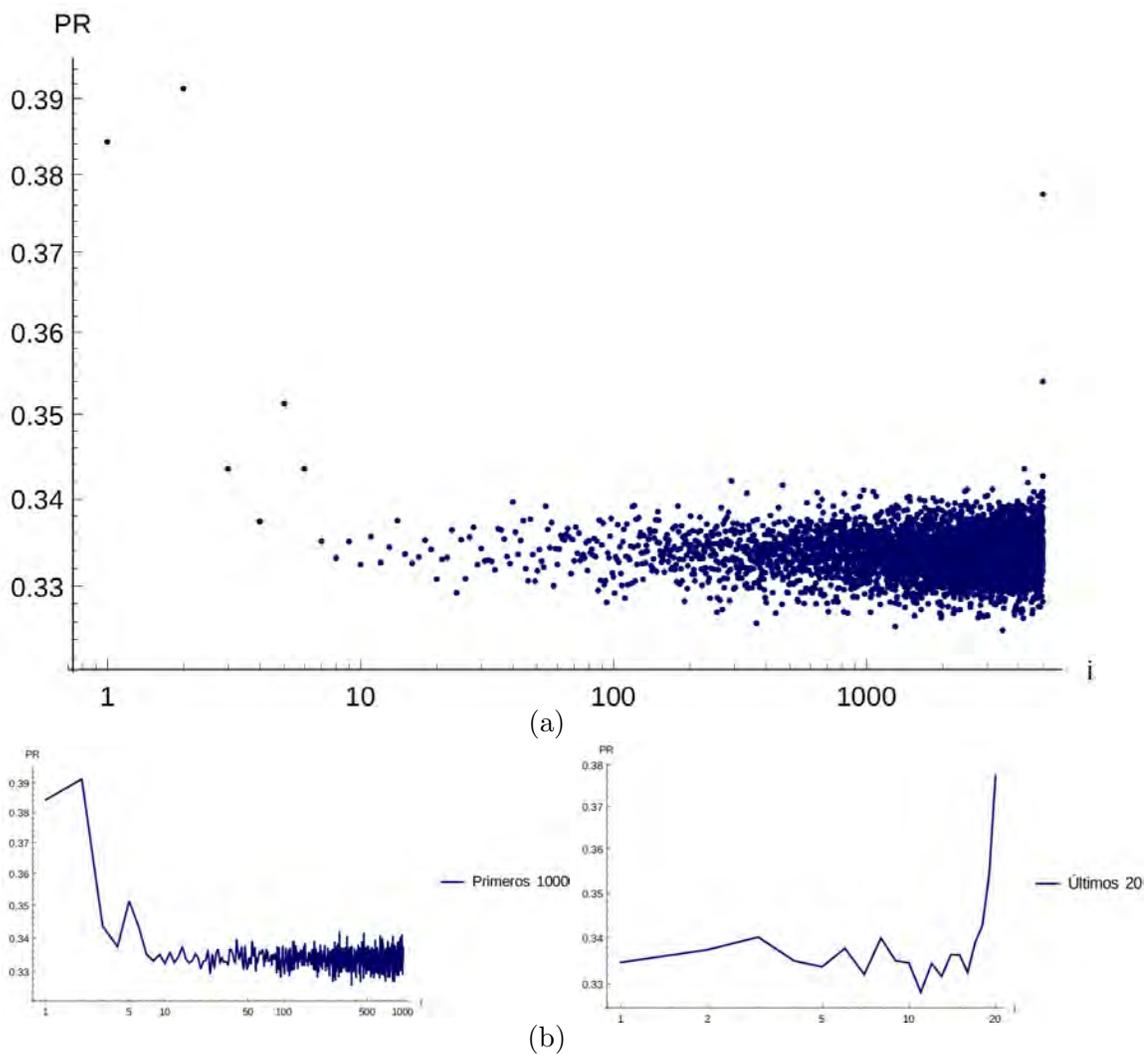


Figura 3.23: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ . (b) La imagen de la izquierda muestra un enfoque de los primeros 1000 eigenvectores. La imagen de la derecha muestra un enfoque de los últimos 20 eigenvectores.

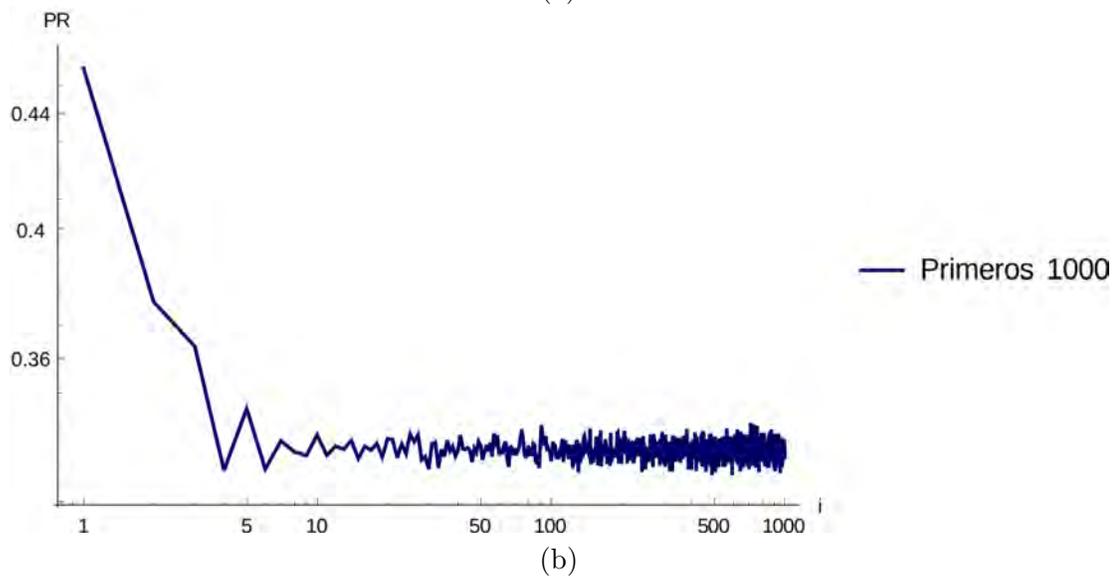
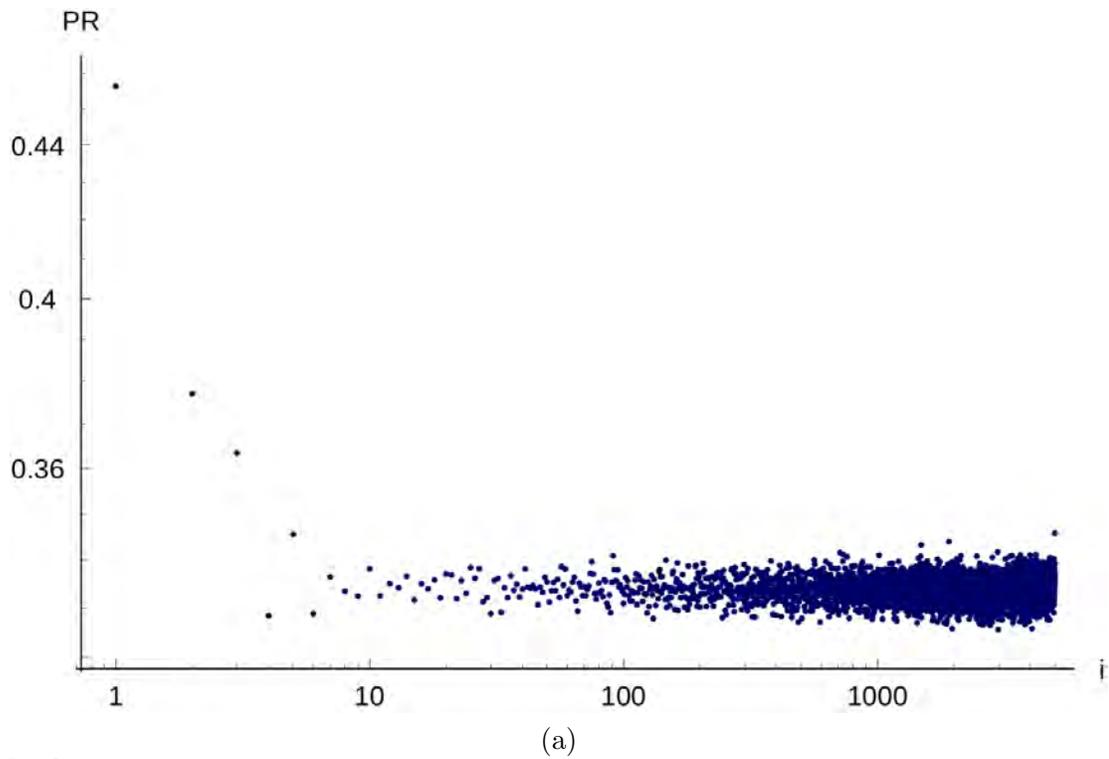


Figura 3.24: (a) Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.8$ . (b) Enfoque de los primeros 1000 eigenvectores.

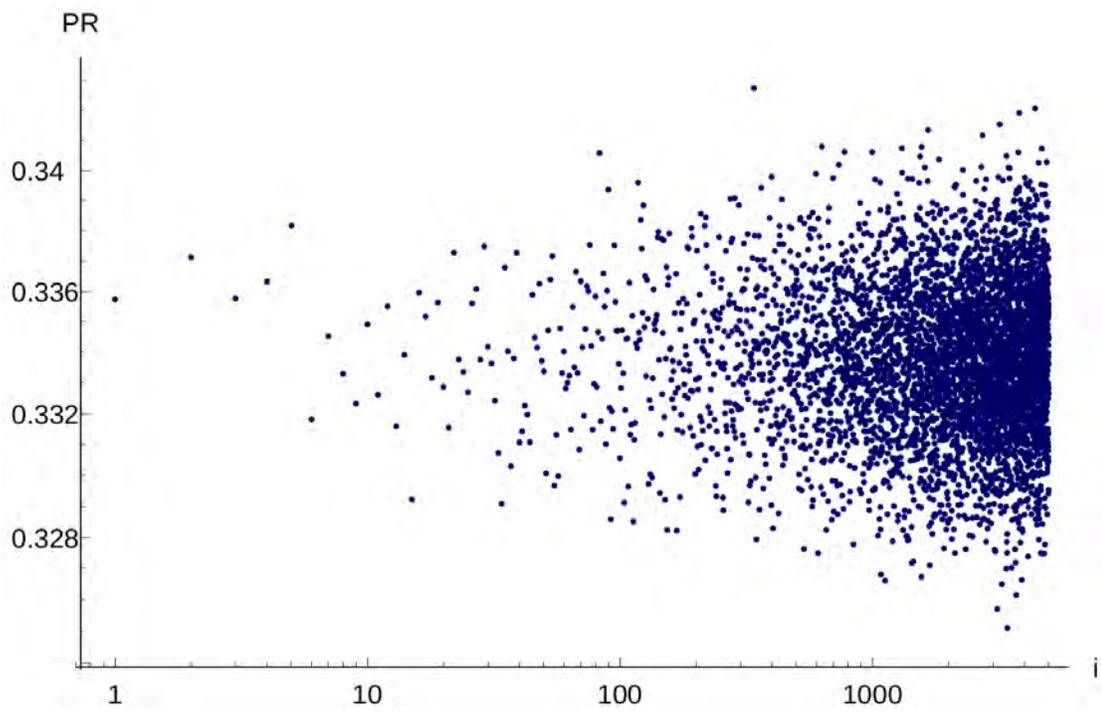


Figura 3.25: Razón de participación promediada sobre 10 miembros del ensemble para  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 0.3$ .

## Capítulo 4

# Conclusión y Perspectivas a Futuro

En este trabajo se estudiaron las correlaciones de un modelo estacionario fuera de equilibrio. Se detectó con buena confiabilidad que la distribución del ranking (Diagrama de Zipf) de los primeros eigenvalores de correlación sobre la línea de transición de fase  $\alpha = \beta < 1/2$ , siguen un comportamiento de ley de potencias, esto para una situación donde, a pesar de que existan correlaciones espaciales, éstas no siguen una ley de potencias. En el caso del sistema en equilibrio del modelo de Ising, existen antecedentes de que las correlaciones de largo alcance siguen una ley de potencias en una región del espectro y se puede calcular analíticamente la ley de potencia de los eigenvalores [PBS<sup>+</sup>14], pero en el modelo TASEP no se conoce a ciencia cierta el patrón de las correlaciones espaciales; sin embargo, definitivamente se aprecia que no siguen una ley de potencias. Éste es un resultado que exhibe invariancia de escala. Cabe destacar que en este trabajo se vio una ley de potencias sobre los primeros eigenvalores, en el artículo [PBS<sup>+</sup>14] la ley de potencias no está generada por los primeros eigenvalores, sino por algunos intermedios.

El comportamiento de las correlaciones espaciales en la fase de alta densidad es idéntico a la de baja densidad. Esto es debido a la simetría que existe entre espacios vacíos y espacios ocupados, la correlación en alta densidad es tan pequeña que para fines prácticos podemos decir que es despreciable.

Se probó la estadística de la matriz de correlación  $C$  para características universales de los eigenvalores y se observó que la distribución de separación a primeros vecinos siguen un comportamiento muy similar a las matrices de GOE. En el punto  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ , como se mencionó, el método de desdoblamiento de los eigenvalores es poco confiable; a pesar de ello, en otros estudios se han utilizado métodos para analizar funciones de densidad [DKMO<sup>+</sup>16] con un comportamiento similar a la función de densidad de probabilidad de los eigenvalores en este punto; se buscarán implementar estos métodos para un mejor entendimiento del fenómeno.

Consideramos importante investigar la zona de máxima corriente ya que no sabemos si el hecho de que los primeros eigenvalores que se salen del grueso (bulk), es debido a un efecto de tamaño finito o es consecuencia de que exista una fase crítica. Se tienen ya en marcha estudios que indican efectos de tamaño finito cerca de las líneas críticas y en la zona de máxima corriente, se está haciendo un escalamiento a tamaño finito, es decir, se está viendo cómo se comporta el sistema cambiando la escala. Todo esto con el fin de buscar una ley probablemente heurística, e intentar hacer un límite de tamaño infinito para ver su comportamiento.

La razón de participación sobre la línea de transición nos indica que, para los primeros y últimos eigenvectores, relativamente pocas entradas de los eigenvectores son participantes en la localización de los mismos. Conforme nos alejamos del origen sobre la línea de transición, el número de sitios participando en los primeros eigenvectores aumenta, tendiendo a un comportamiento aleatorio.

La función de densidad de probabilidad de las amplitudes para los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores más grandes sobre la línea de transición de fase es de gran interés debido a que estos nos indican correlaciones. El análisis de estas funciones queda abierto a futuros trabajos.

Este modelo se puede extender agregando la dinámica de acoplamiento-desacoplamiento de partículas en una cadena donde cada caja está acoplada a un reservorio (cinemática de Langmuir), aquí hay una competencia entre la dinámica en las fronteras de la cadena y la dinámica en toda la demás cadena, se ha empezado ya a estudiar este sistema y

hay resultados preliminares.

Este modelo y tipo de análisis son herramientas que nos permiten entender mejor el tránsito y de esta manera, encontrar soluciones al problema de flujo vehicular.

## Capítulo 5

## Apéndice

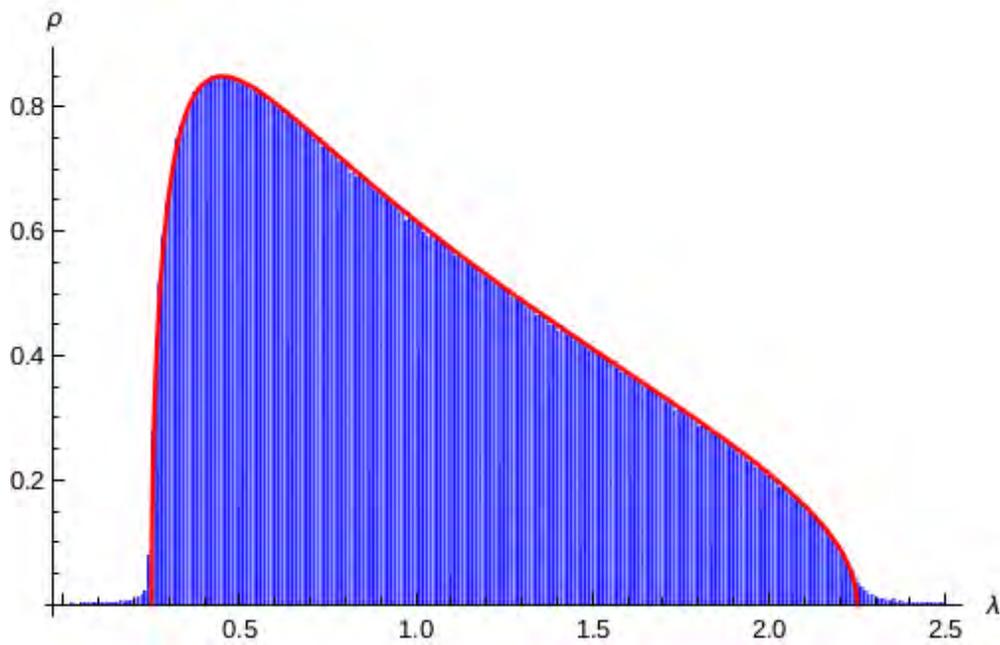


Figura 5.1: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

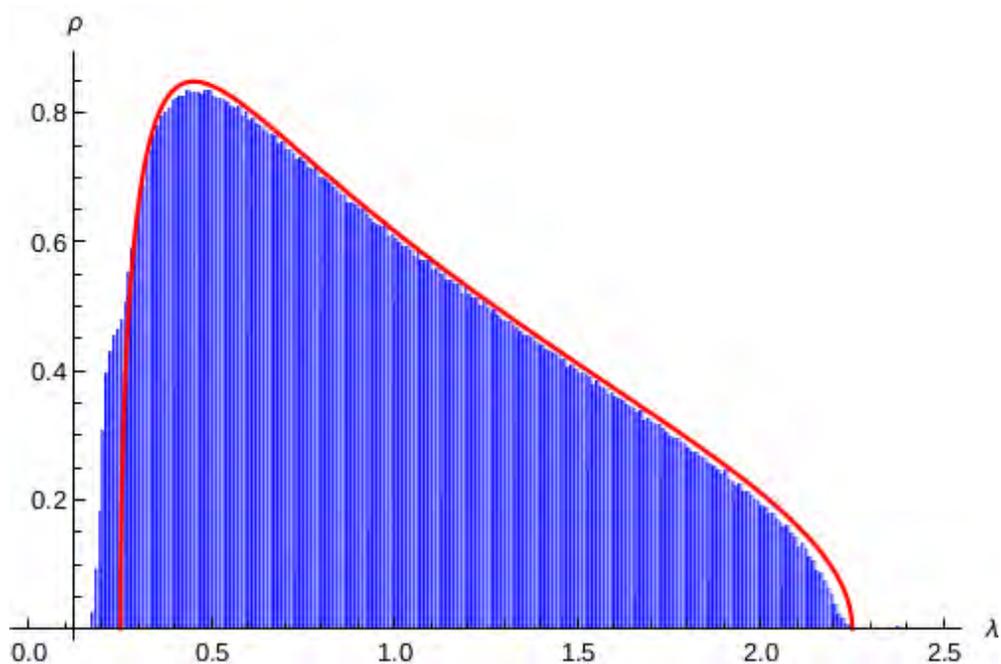


Figura 5.2: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.1$  ,  $\beta = 0.1$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

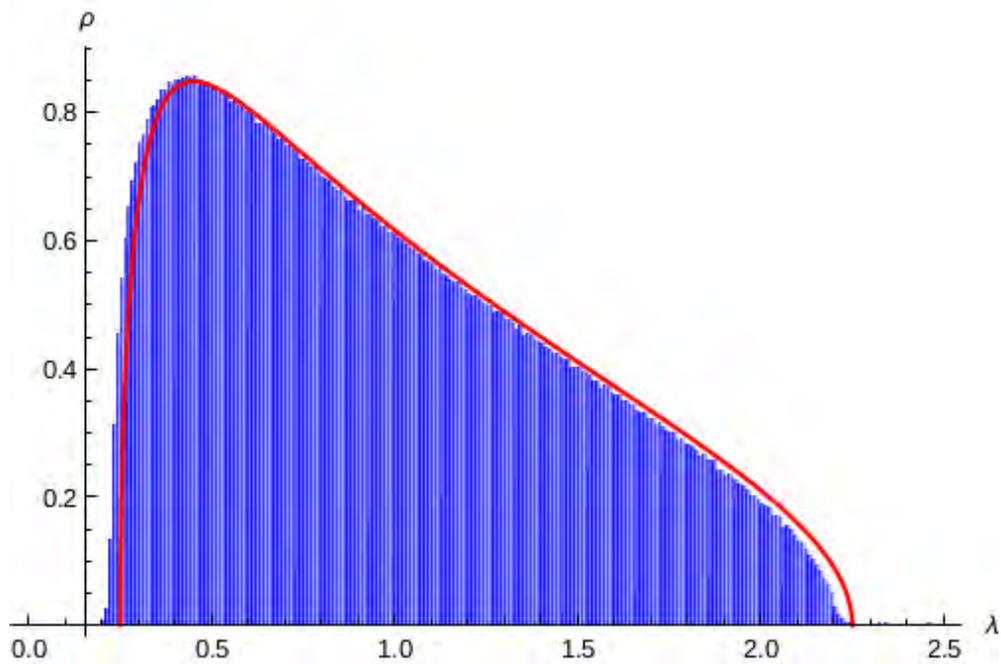


Figura 5.3: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.15$  ,  $\beta = 0.15$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

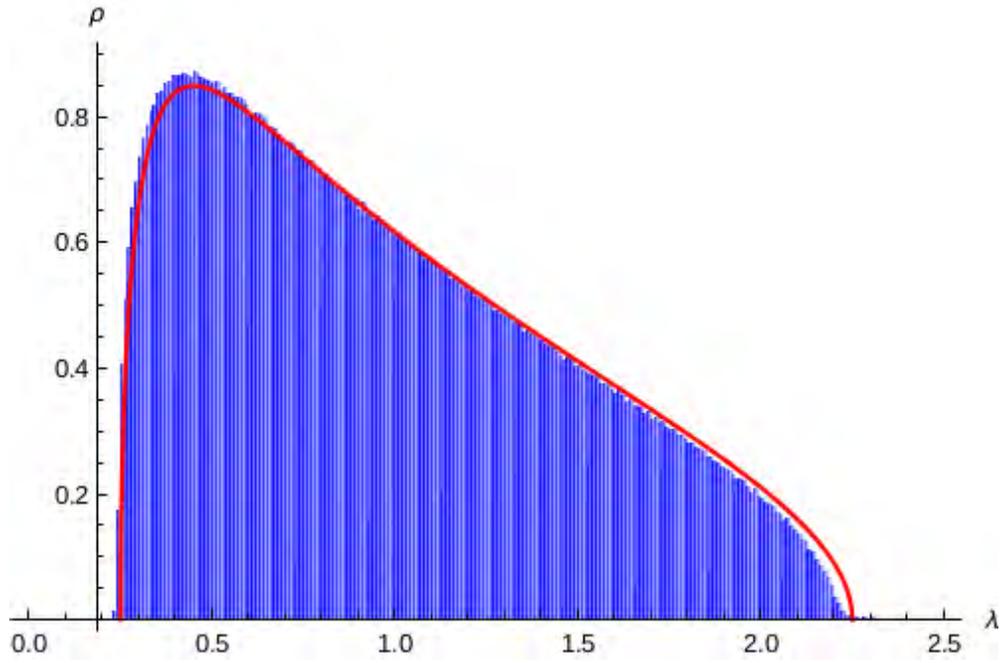


Figura 5.4: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

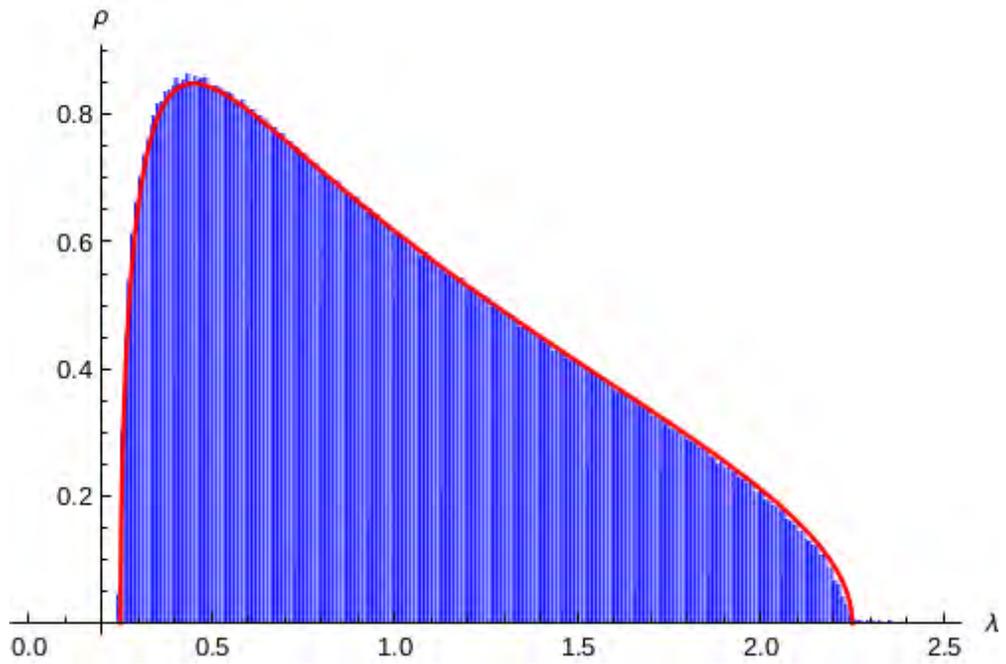
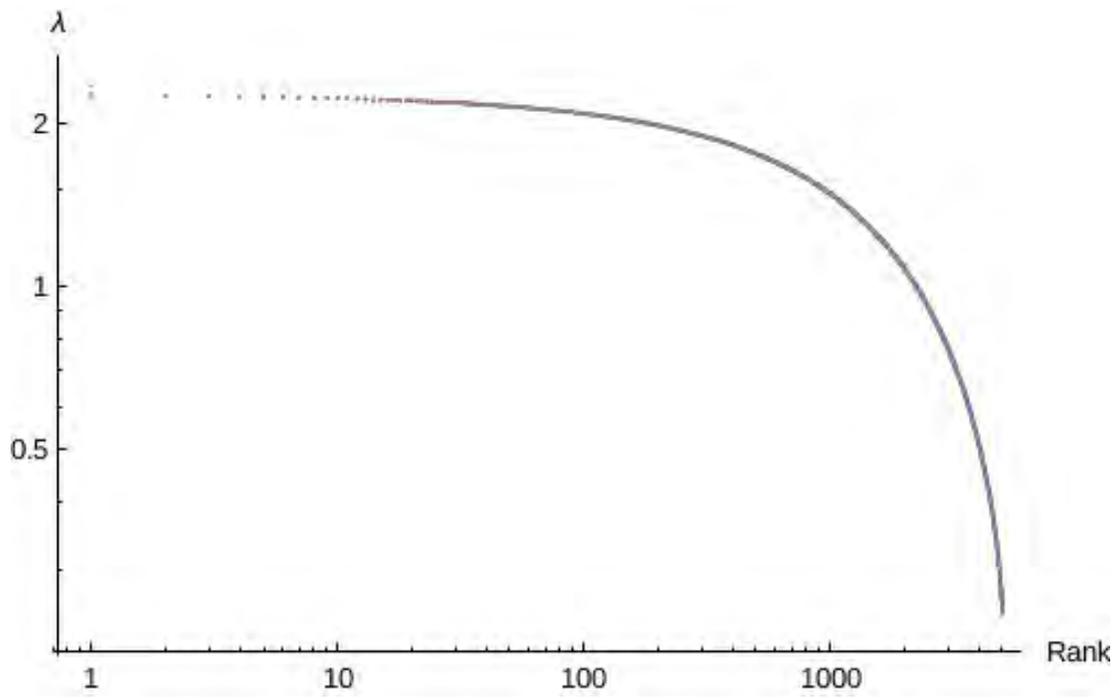
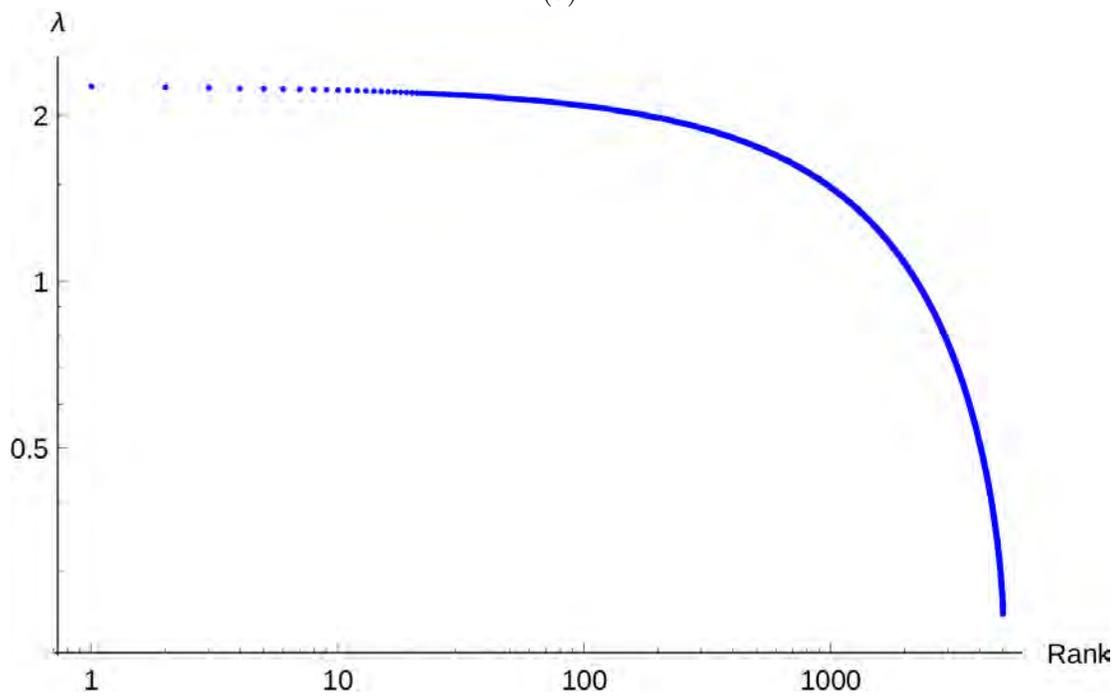


Figura 5.5: Histograma de todos los eigenvalores del ensemble para  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.35$ . La línea muestra la distribución de Marchenko-Pastur teórica.

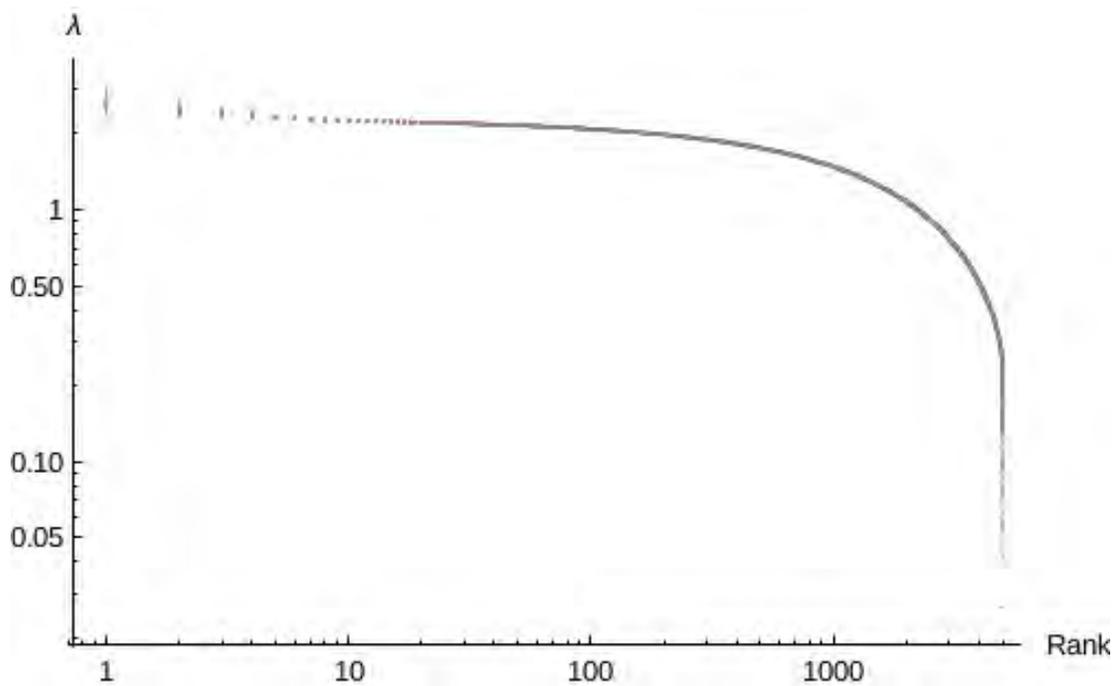


(a)

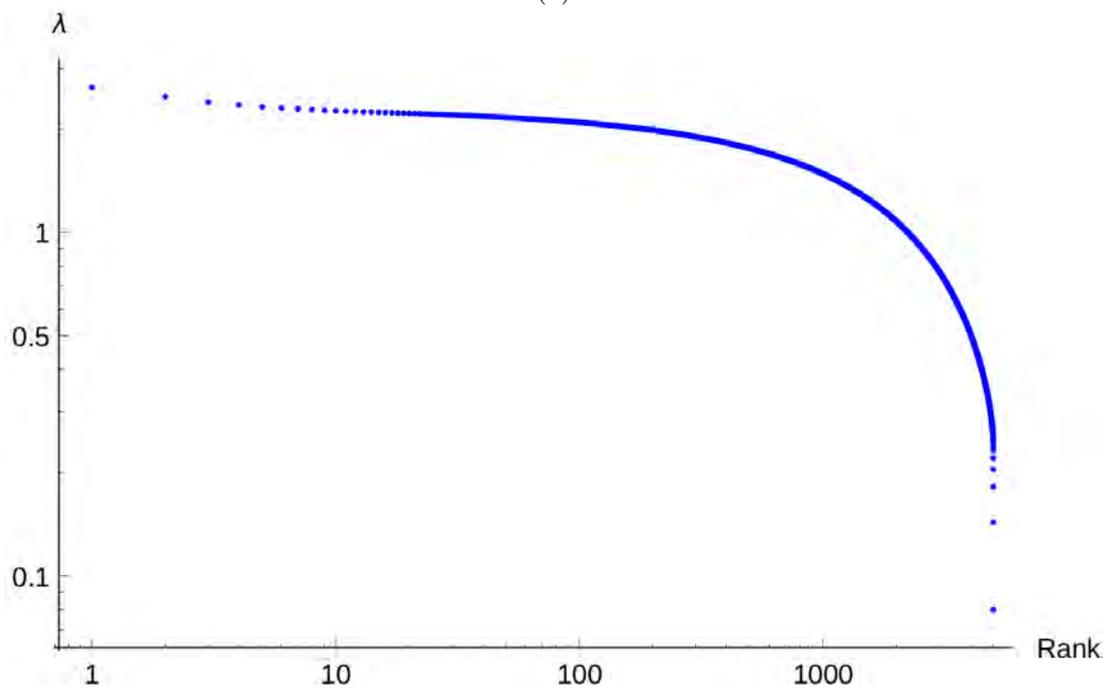


(b)

Figura 5.6: (a)Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 0.3$ (b)Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto.

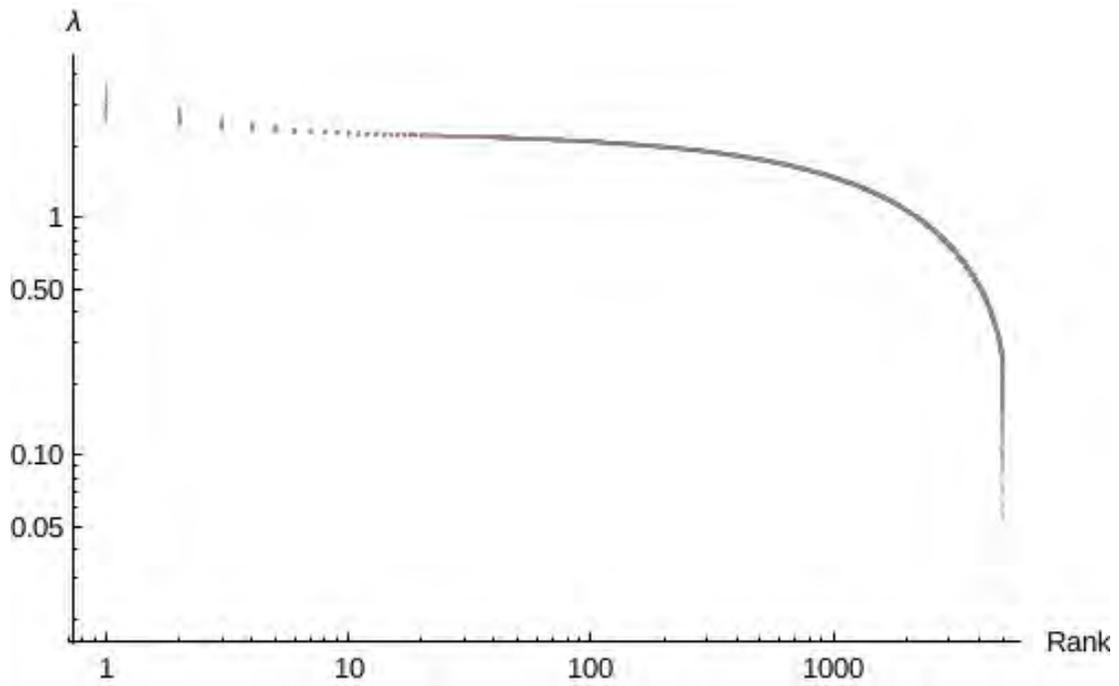


(a)

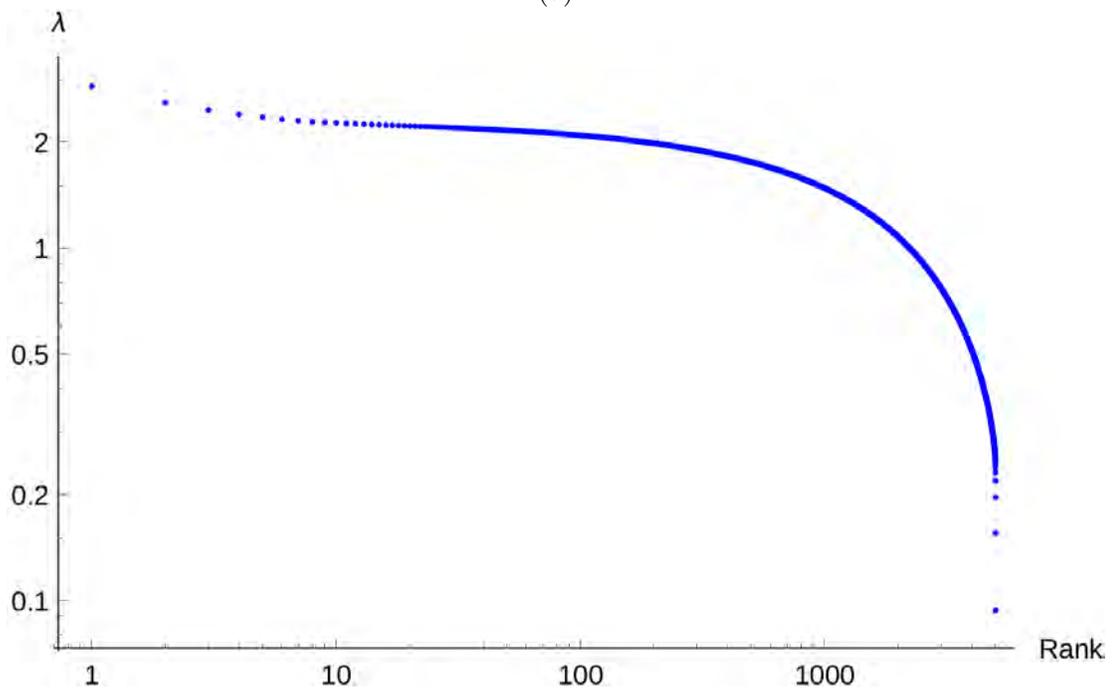


(b)

Figura 5.7: (a) Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.8$  (b) Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto.



(a)



(b)

Figura 5.8: (a)Diagrama de Zipf para los eigenvalores de cada miembro del ensemble,  $\lambda_n$  vs.  $n$ , para  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ (b)Diagrama de Zipf para los eigenvalores promedio en el mismo punto.

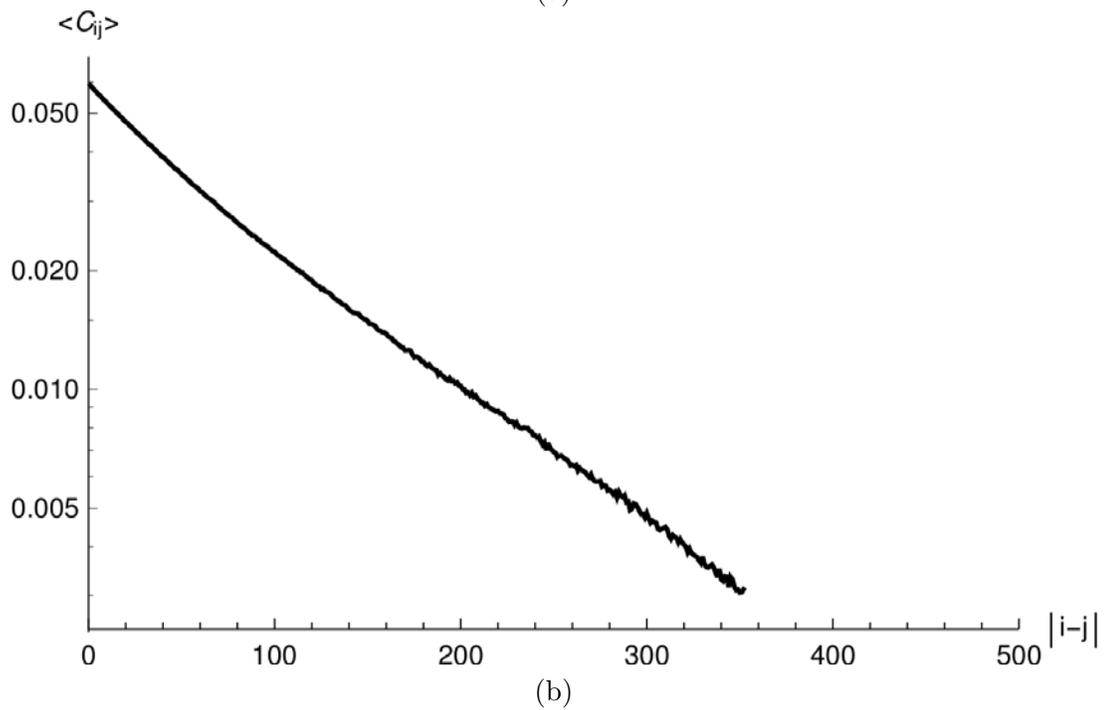
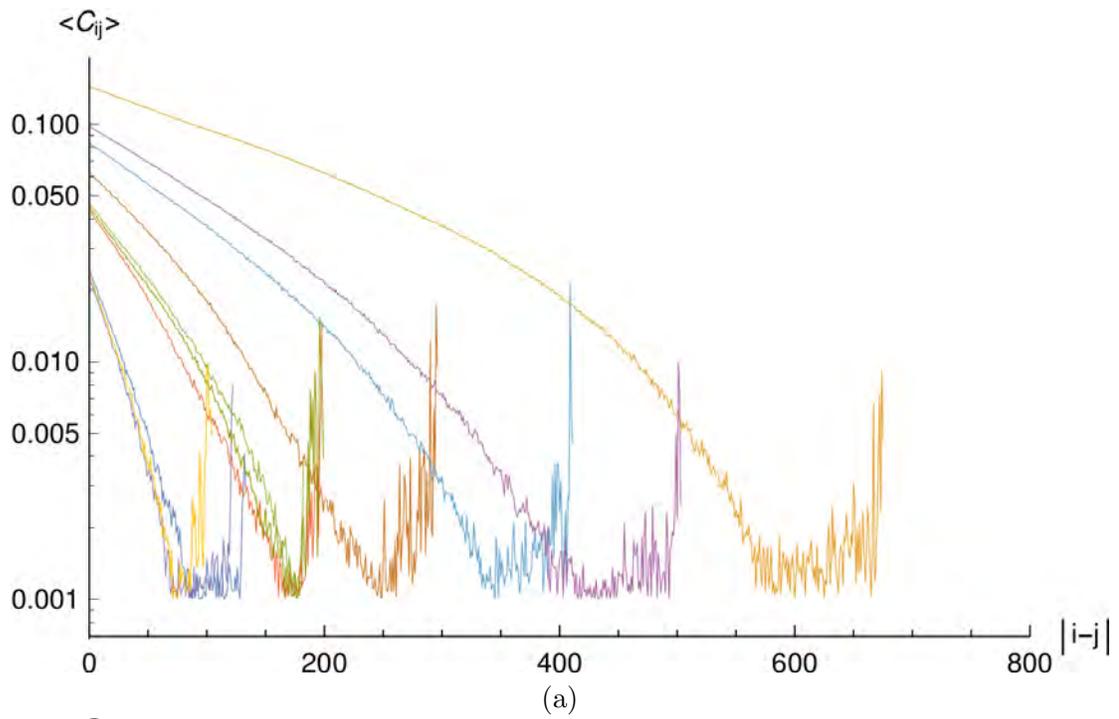
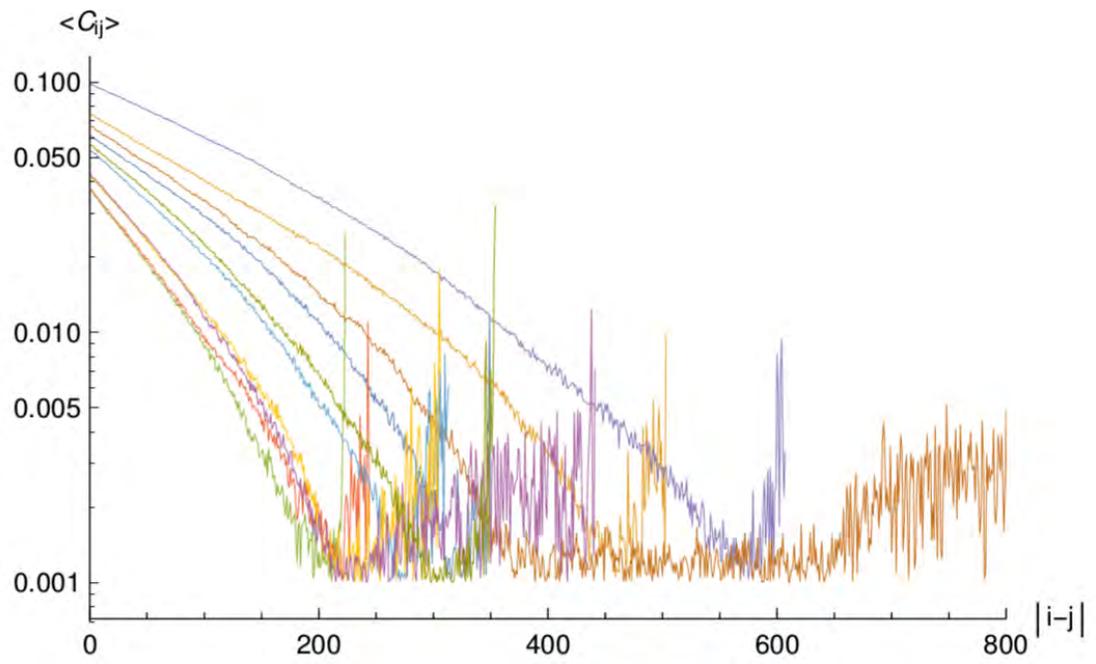
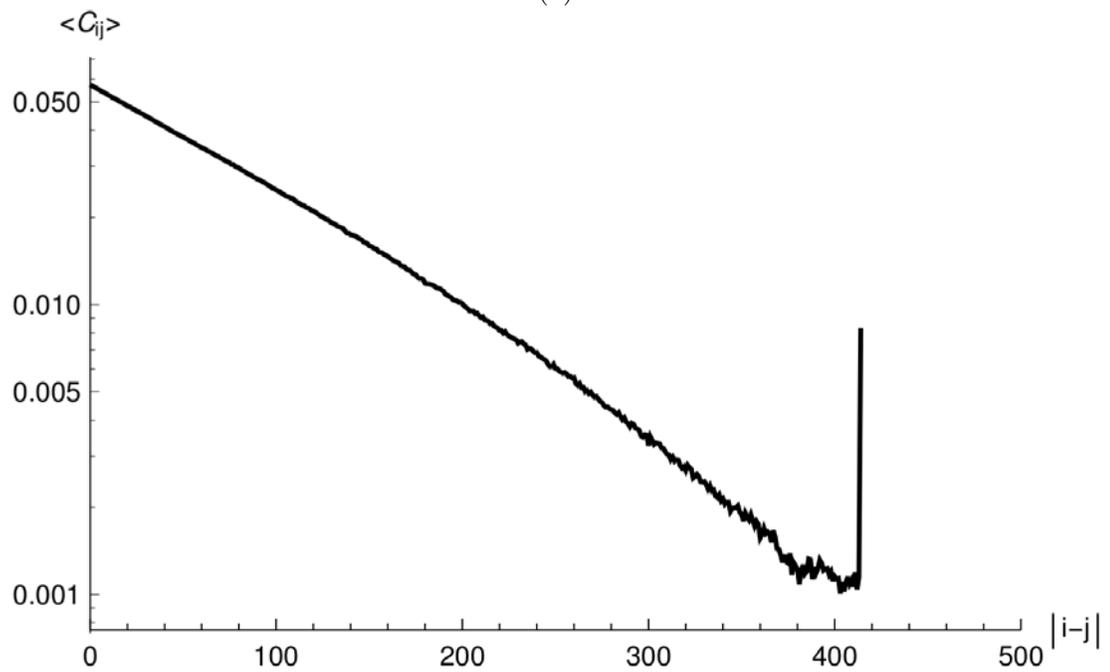


Figura 5.9: (a) Función de correlación cruzada para 10 miembros del ensemble  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ . (b) Función de correlación cruzada promedio sobre los 10 miembros.



(a)



(b)

Figura 5.10: (a) Función de correlación cruzada para 10 miembros del ensemble  $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0.15$ . (b) Función de correlación cruzada promedio sobre los 10 miembros.

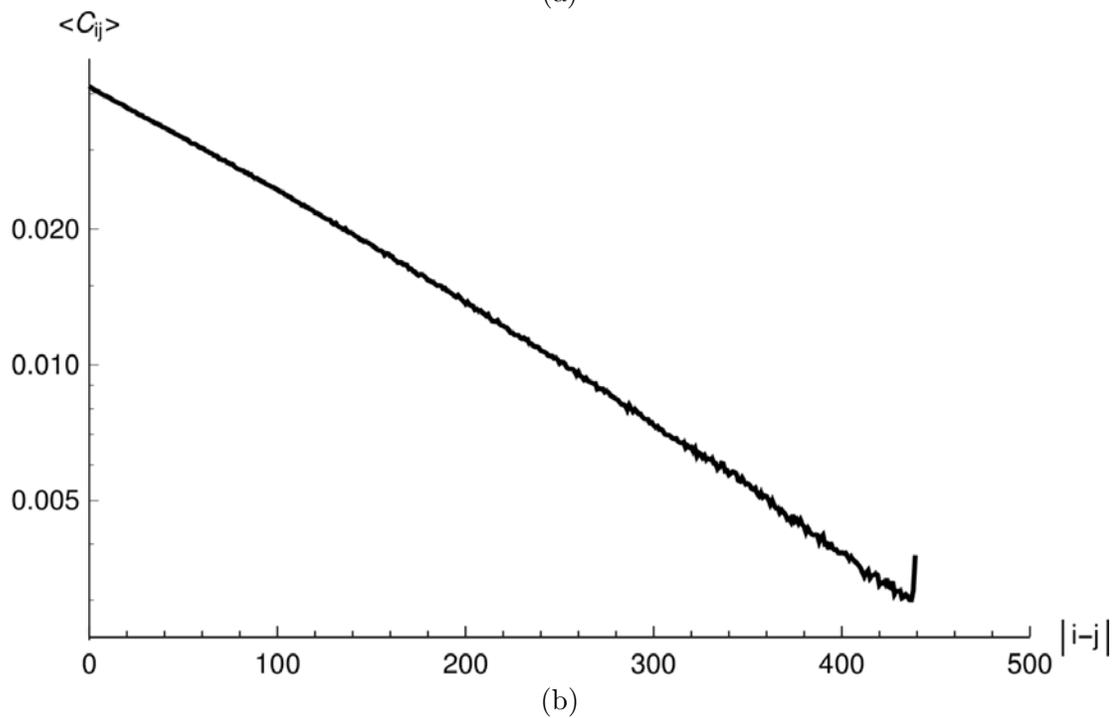
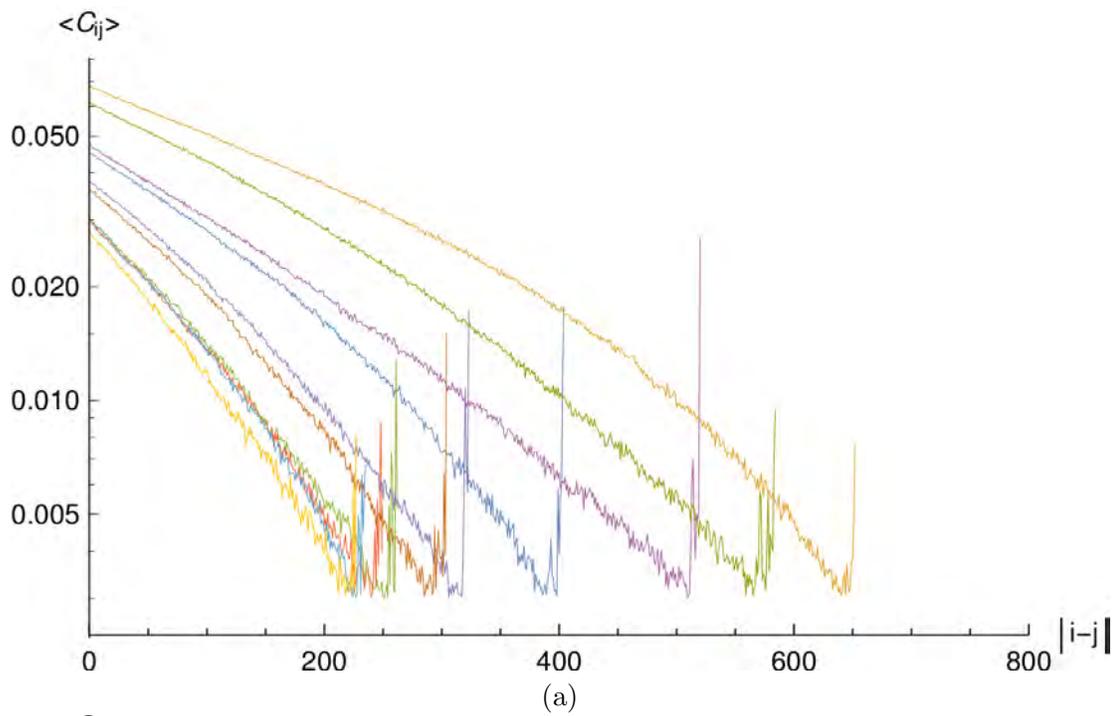


Figura 5.11: (a) Función de correlación cruzada para 10 miembros del ensemble  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.25$ . (b) Función de correlación cruzada promedio sobre los 10 miembros.

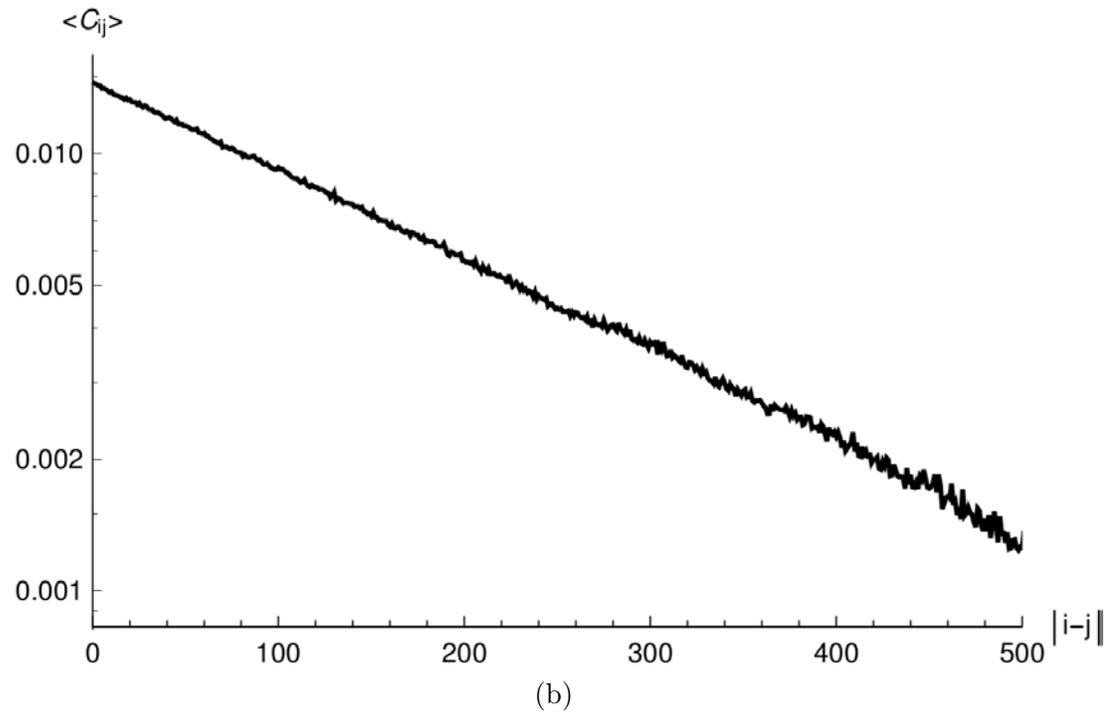
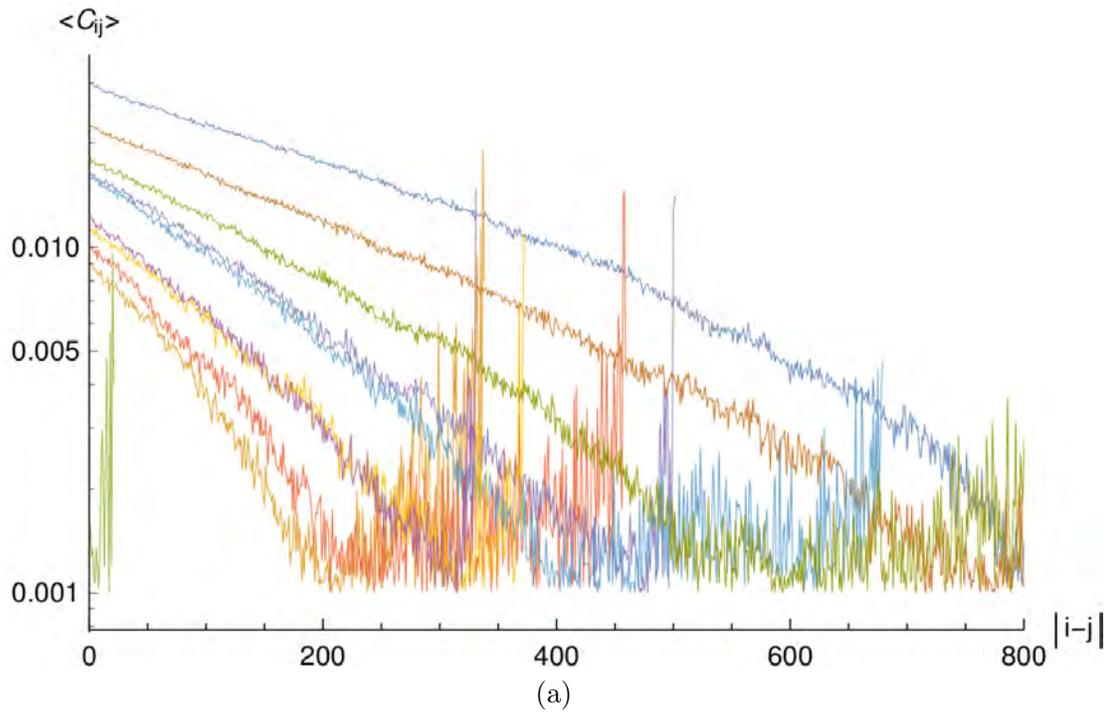
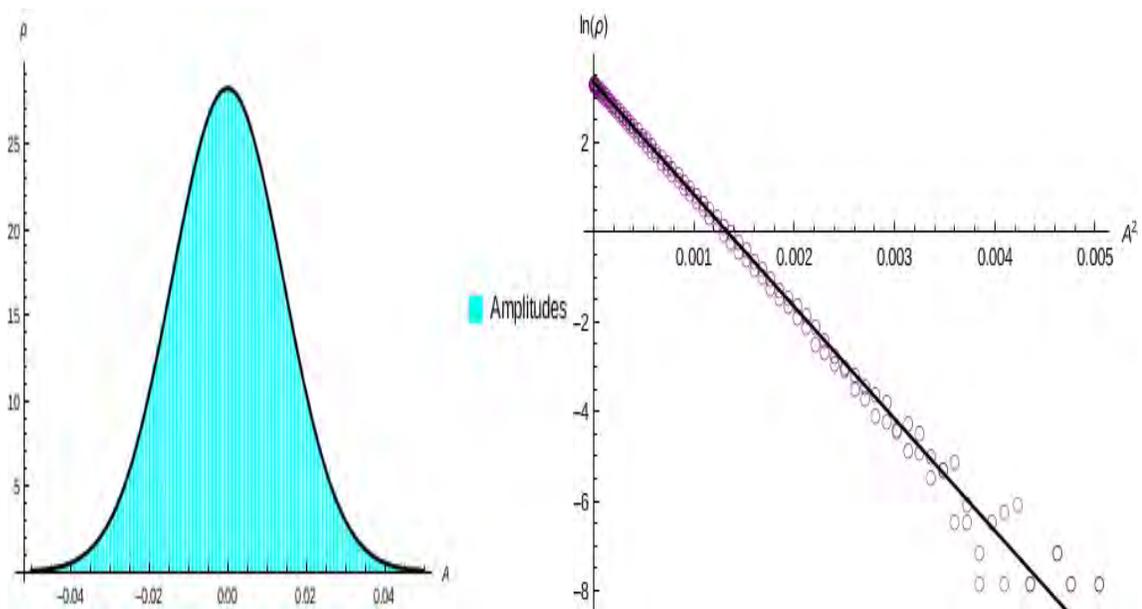
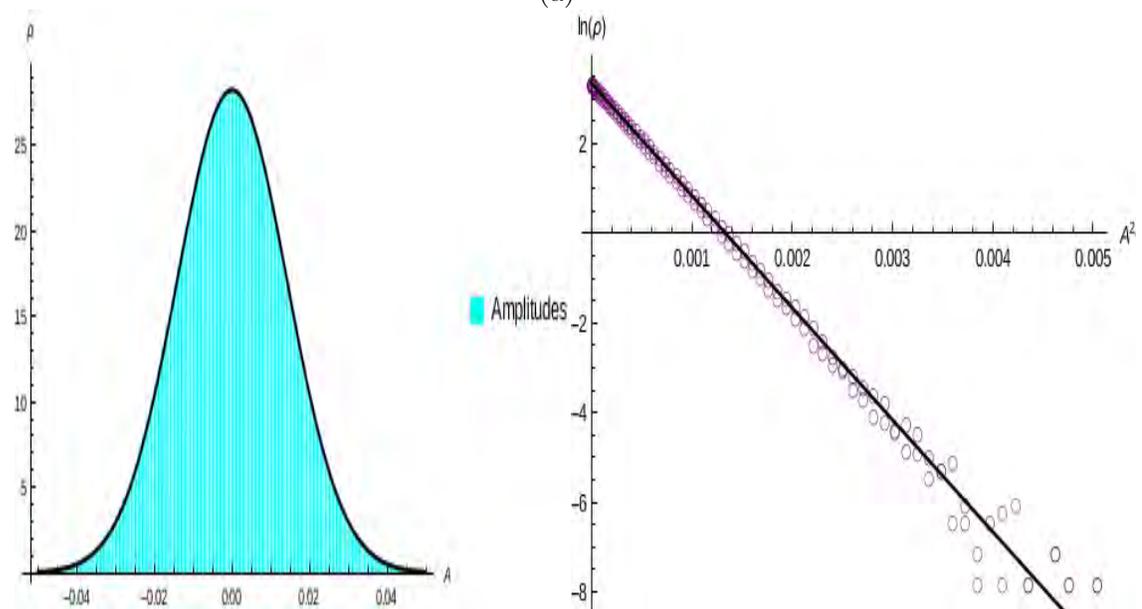


Figura 5.12: (a) Función de correlación cruzada para 10 miembros del ensemble  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.35$ . (b) Función de correlación cruzada promedio sobre los 10 miembros.



(a)



(b)

Figura 5.13: Amplitudes de los eigenvectores para el punto  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  del lado izquierdo se muestran los histogramas con las curvas correspondientes a la gaussiana que mejor se ajusta a los datos y del lado derecho la gráfica al elevar las amplitudes al cuadrado  $A^2$  y aplicar  $\ln(\rho)$ . (a) Amplitudes de los primeros 100 eigenvectores. (b) Amplitudes de los últimos 100 eigenvectores.

# Bibliografía

- [A<sup>+</sup>72] Philip W Anderson et al. More is different. *Science*, 177(4047):393–396, 1972.
- [Cho04] Tom Chou. Water alignment, dipolar interactions, and multiple proton occupancy during water-wire proton transport. *Biophysical journal*, 86(5):2827–2836, 2004.
- [CMZ11] T Chou, K Mallick, and RKP Zia. Non-equilibrium statistical mechanics: from a paradigmatic model to biological transport. *Reports on progress in physics*, 74(11):116601, 2011.
- [CSN05] Debashish Chowdhury, Andreas Schadschneider, and Katsuhiro Nishinari. Physics of transport and traffic phenomena in biology: from molecular motors and cells to organisms. *Physics of Life reviews*, 2(4):318–352, 2005.
- [DDM92] Bernard Derrida, Eytan Domany, and David Mukamel. An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries. *Journal of Statistical Physics*, 69(3-4):667–687, 1992.
- [Der07] Bernard Derrida. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2007(07):P07023, 2007.
- [dia] Diagnóstico de la movilidad de las personas en la Ciudad de México., <http://www.fimevic.df.gob.mx/problemas/1diagnostico.htm>. Acceso: 2015-11.

- [DKMO<sup>+</sup>16] B Dietz, T Klaus, M Miski-Oglu, A Richter, M Wunderle, and C Bouazza. Spectral properties of dirac billiards at the van hove singularities. *Physical review letters*, 116(2):023901, 2016.
- [DZSL95] Cyril Domb, Royce KP Zia, B Schmittmann, and Joel L Lebowitz. *Statistical mechanics of driven diffusive systems*, volume 17. Academic Press, 1995.
- [GMGW98] Thomas Guhr, Axel Müller-Groeling, and Hans A Weidenmüller. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, 299(4):189–425, 1998.
- [Gue12] Vincenzo Guerriero. Power law distribution: Method of multi-scale inferential statistics. *Journal of Modern Mathematics Frontier*, 1(1):21–28, 2012.
- [JG04] PM Jones and AM George. The abc transporter structure and mechanism: perspectives on recent research. *Cellular and Molecular Life Sciences CMLS*, 61(6):682–699, 2004.
- [JSCN09] Alexander John, Andreas Schadschneider, Debashish Chowdhury, and Katsuhiro Nishinari. Trafficlike collective movement of ants on trails: Absence of a jammed phase. *Physical review letters*, 102(10):108001, 2009.
- [Kno13] Florian Knorr. *Applicability and Application of Microscopic Traffic Simulations*. PhD thesis, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Physik» Theoretische Physik, 2013.
- [Meh91] ML Mehta. Random matrices 2nd ed. *Academic, New York*, 1991.
- [MGP68] Carolyn T MacDonald, Julian H Gibbs, and Allen C Pipkin. Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates. *Biopolymers*, 6(1):1–25, 1968.

- [MP67] Vladimir Alexandrovich Marchenko and Leonid Andreevich Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Matematicheskii Sbornik*, 114(4):507–536, 1967.
- [New05] Mark EJ Newman. Power laws, pareto distributions and zipf’s law. *Contemporary physics*, 46(5):323–351, 2005.
- [NKP11] Izaak Neri, Norbert Kern, and Andrea Parmeggiani. Totally asymmetric simple exclusion process on networks. *Physical review letters*, 107(6):068702, 2011.
- [Nos11] Juraž Szavits Nossan. *Phase transitions in driven diffusive systems far from equilibrium*. PhD thesis, Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2011.
- [PBS<sup>+</sup>14] T Prosen, B Buča, TH Seligman, et al. Spectral analysis of finite-time correlation matrices near equilibrium phase transitions. *EPL (Europhysics Letters)*, 108(2):20006, 2014.
- [PGR<sup>+</sup>02] Vasiliki Plerou, Parameswaran Gopikrishnan, Bernd Rosenow, Luis A Nunes Amaral, Thomas Guhr, and H Eugene Stanley. Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Physical Review E*, 65(6):066126, 2002.
- [S<sup>+</sup>13] Thomas H Seligman et al. Time series, correlation matrices and random matrix models. *arXiv preprint arXiv:1310.4447*, 2013.
- [SK11] Mamata Sahoo and Stefan Klumpp. Transcriptional proofreading in dense rna polymerase traffic. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(6):60004, 2011.