Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

La Función $\mathcal{R}$.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
PABLO VÁZQUEZ CÁRDENAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx, 2017

Índice general

Introducción

Un espacio topológico es un *continuo* si tal espacio es metrizable, compacto y conexo. Decimos que un continuo es *cíclicamente conexo* si para cualquier par de puntos, se puede encontrar una curva cerrada simple que los contenga. Un espacio topológico es *homogéneo*, si para cualquier par de elementos p y q, existe un homeomorfismo h del espacio en si mismo tal que $h(p)=q$.

En 1913, Hahn y Mazurkiewicz probaron que, dado un continuo localmente conexo, existe una función continua y suprayectiva de $[0,1]$ al continuo en cuestión (i.e: todo continuo localmente conexo es imagen continua de $[0,1]$ arco). Tal resultado dio inicio a una etapa de mucho interés y progreso en el estudio de tales continuos. En 1927 G.T. Whyburn publicó una serie de artículos ([14], [15], [16], [13]) que dieron inicio a la *Teoría del Elemento Cíclico*: una herramienta poderosa para estudiar a los continuos localmente conexos (B.L McAllister [10] ha hecho una introducción a esta teoría, así como un resumen de su historia). Quizá uno de los resultados mas importantes de tales artículos, es la caracterización de los subcontinuos localmente conexos y cíclicamente conexos del plano. Fue a partir de ese momento que la conexidad cíclica comenzó a ser una propiedad de gran relevancia e interés para la Teoría de Continuos. En 1981, David P. Bellamy y Lewis Lum [1] probaron que los continuos arco conexos homogéneos son cíclicamente conexos. Para obtener estos resultados, los autores definieron una función (denotada por $\mathcal{R}$) similar a la función $\mathcal{K}$ propuesta por J.T. Goodykoontz, Jr. en [6]. En 2007, Benjamín Espinoza y Sergio Macías [5] extendieron la definición de $\mathcal{R}$ y estudiaron nuevas propiedades, tales como la continuidad y la relación con la función $\mathcal{K}$. Pues bien, esta tesis tiene por objetivo explicar y refinar los resultados obtenidos por Benjamín Espinoza y Sergio Macías [5]; así como continuar con la investigación que ambos autores han hecho.

Para comprender este texto, se necesitarán conceptos y resultados importantes tanto de la Teoría de Continuos como de la Teoría de Hiperespacios. Supondremos que el lector está familiarizado con un curso básico de Teoría de Continuos; de manera que también se espera un amplio conocimiento de Topología General. Por otro lado, la herramienta requerida perteneciente a la Teoría de Hiperespacios es básica y sencilla de entender; así pues, la misma será expuesta y probada en su totalidad.

En el Capítulo 0 trabajaremos los preliminares para la comprensión de este texto, mientras que en el Capítulo 1 daremos la definición de la función $\mathcal{R}$ y trataremos algunos ejemplos. Posteriormente, en el Capítulo 2 veremos propiedades generales de la misma (es ahí donde integraremos el trabajo hecho por Bellamy, Espinoza, Lum y Macías). Por otro lado, en el Capítulo 3, definiremos la función $\mathcal{K}$; probaremos algunas propiedades básicas de la misma y veremos su semejanza con $\mathcal{R}$. También veremos que, en la clase de los dendroides, ambas funciones coinciden; lo cual resulta conveniente para ligar el trabajo hecho por Goodykoontz, Espinoza y Macías.

Capítulo 0

Preliminares

0.1. Topología General

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto del mismo, entonces denotaremos por $\overline{A}$, $Int(A)$, $Fr(A)$ a la cerradura de A, el interior de A, y a la frontera de A, respectivamente.

Decimos que un espacio topológico X es normal si el mismo es T_1 y para cualesquiera cerrados ajenos $A, B \subset X$, existen abiertos ajenos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

En un futuro no muy distante, será de gran utilidad recordar la siguiente.

Proposición 0.1. *[4, 1.2.1] Sean X un conjunto y $\mathfrak{B}$ una colección de subconjuntos de X que satisface las condiciones:*

(i) Para todo $x \in X$, existe $U_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in U_x$.

(ii) Si $V, W \in \mathfrak{B}$, entonces para cualquier $x \in V \cap W$, existe $U_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in U_x \subset V \cap W$.

Definamos $T_{\mathfrak{B}} := \{U \subset X :$ existe $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ tal que $U = \bigcup \mathfrak{C}\}$. Entonces $T_{\mathfrak{B}}$ es una topología para X y $\mathfrak{B}$ es una base para $T_{\mathfrak{B}}$.

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ al espacio topológico formado por el conjunto $\mathbb{R}^n$, con la topología generada por la métrica usual. Por otro lado, I denotará el espacio formado por el intervalo $[0, 1]$ y $\mathbb{S}^1$ denotará el espacio formado por las parejas ordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Si X es un espacio topológico, entonces decimos que un subconjunto α de X es un *arco* si existe un homeomorfismo $h : I \to \alpha$. A los puntos $h(0)$ y $h(1)$ se les conoce como los *puntos extremos* de α.

Por otro lado, decimos que un subconjunto Γ de X es una curva cerrada simple si el mismo es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Observemos que si Γ es una curva cerrada simple y x es un punto de la misma, entonces siempre podemos encontrar una función $h : I \to \Gamma$, inyectiva en $I \setminus \{1\}$ tal que $h(0) = x = h(1)$.

Si X es un espacio métrico, entonces daremos por hecho que X tiene la topología inducida por la métrica en cuestión; además, dado un punto x de X y un real positivo r, denotaremos por $B_r(x)$ a la bola de radio r con centro en x.

Si X es un espacio topológico, entonces para cada punto p del mismo, definimos la *componente de p en X* como la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a p. Si X es conexo, entonces para cada subconjunto no vacío $A \subset X$, definimos la *componente de A en X* como la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a A.

Los siguientes resultados nos serán de gran utilidad:

Teorema 0.2. *[3, 3.2] Sea X un espacio topológico. Entonces:*

i) Para todo $p \in X$, la componente de p en X es maximal respecto a todos los subconjuntos conexos de X que contienen a p.

ii) La colección de todas las componentes de X forma una partición de X.

iii) Para todo $p \in X$, la componente de p en X es un subconjunto cerrado y conexo de X.

Decimos que un espacio topológico X es *conexo por trayectorias* si para cualquier par de puntos p y q en X, existe una función continua $\tau : I \to X$ tal que $\tau(0) = p$ y $\tau(1) = q$. A τ se le conoce como *trayectoria* entre p y q.

Decimos que X es *arco conexo* si para cualesquiera p, q puntos diferentes de X, existe un arco $\alpha \subset X$ cuyos puntos extremos son p y q. Si además, dicho arco es único, entonces diremos que X es *únicamente arco conexo.*

Recordemos la relación que existe entre los espacios conexos por trayectorias y los arco conexos.

Proposición 0.3. *[17, 31.6] Sea X un espacio topológico T_2. Entonces, X es conexo por trayectorias si y sólo si X es arco conexo.*

En cuanto a las propiedades locales de conexidad, recordemos que un espacio topológico X es *localmente conexo en x* si para cualquier abierto U que contiene a x, existe algún abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$. Si para cualquier x se tiene que X es localmente conexo en x, entonces decimos que X es *localmente conexo.*

Por otro lado, X es *conexo en pequeño en x*, si para cualquier abierto U que contiene a x, existe un conjunto conexo $K \subset X$ tal que $x \in \mathrm{int}(K) \subset K \subset U$. Si para cualquier x, se tiene que X es conexo en pequeño en x, entonces decimos que X es *conexo en pequeño.*

Los siguientes son resultados que relacionan algunos de los conceptos mencionados anteriormente.

Teorema 0.4. *[17, 27.9] Sea X un espacio topológico. Entonces, X es localmente conexo si y sólo si cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierta.*

Teorema 0.5. *[8, 3-11] Sea X un espacio topológico. Si para todo $p \in X$ se tiene que X es conexo en pequeño en p, entonces X es localmente conexo.*

Para concluir esta sección, probaremos una proposición que nos auxiliara en muchas de las demostraciones del texto.

Si X es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces decimos que $\mathcal{F}$ es *cerrada bajo intersecciones finitas* si para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ es elemento de $\mathcal{F}$. Notemos que por el principio de inducción, para probar que una colección F es cerrada bajo interseccióńes finitas basta comprobar que para cualesquiera $U, V \in \mathcal{F}$, se tiene que $U \cap V \in \mathcal{F}$.

La proposición anunciada es el siguiente.

Proposición 0.6. *Sean X un espacio topológico compacto, $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de X, y $U \subset X$ abierto tal que $\bigcap \left\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\} \subset U$. Si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset \overline{F} \subset U$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Si tomamos complementos de ambos lados en la contención enunciada, obtenemos que $X \backslash U \subset \bigcup \left\{X \backslash \overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\}$. Esto implica que la colección $\left\{X \backslash \overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\}$ es una cubierta abierta del conjunto $X \backslash U$; y por la compacidad de éste último, existen $n \in \mathbb{N}$ y $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tales que $X \backslash U \subset \bigcup_{i=1}^{n} X \backslash \overline{F_i}$. Tomando complementos de ambos lados en la contención anterior, concluimos que $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i} \subset U$. Definamos $F := \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ y notemos que F es un elemento de la colección $\mathcal{F}$, pues ésta última es cerrada bajo intersecciones finitas; además, $F \subset \overline{F} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i} \subset U$. †

0.2. Teoría de Continuos

Un espacio topológico no vacío X es un *continuo* si X es un espacio métrico, compacto, y conexo (si X consta de un sólo punto, decimos que es un continuo *degenerado*). Un subespacio Y de un continuo X es un *subcontinuo* si resulta ser no vacío, cerrado y conexo.

Un punto p de un continuo X es un *punto de corte* si $X\setminus\{p\}$ es disconexo. Por otro lado, dado un subconjunto no vacío A de X, decimos que *p separa* a A si existen abiertos ajenos $U, V \subset X$, tales que $X\setminus\{p\} = U \cup V$ y $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$.

A lo largo del texto, utilizaremos los siguientes resultados acerca de los continuos localmente conexos.

Teorema 0.7. *[17, 31.4] Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X es uniformemente localmente arco conexo.*

Teorema 0.8. *[12, 8.26] Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces para todo abierto $U \subset X$ se tiene que U es arco conexo.*

Teorema 0.9. *[12, 8.45] Sean X un continuo localmente conexo y $p \in X$. Si p no es un punto de corte, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto conexo $U \subset X$ tal que $p \in U$, $X\setminus U$ es conexo, y diam$(U) < \varepsilon$.*

Un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera subcontinuos A, B de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Si cualquier subcontinuo de X es unicoherente, entonces decimos que X es *hereditariamente unicoherente*. Por otro lado un continuo X es un *dendroide* si X es arco conexo y hereditariamente unicoherente.

Los siguientes resultados serán de gran utilidad cuando tratemos con dendroides.

Proposición 0.10. *Sea X un continuo. Entonces, X es hereditariamente unichoerente si y sólo si para cualesquiera A, B subcontinuos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Proposición 0.11. *Sea X un dendroide. Si A es un subcontinuo de X, entonces A es un dendroide.*

0.3. Teoría de Hiperespacios

En esta sección, desarrollaremos los conceptos y herramientas pertenecientes a la Teoría de los Hiperespacios que necesitaremos para la comprensión del texto. Lo primero que haremos será definir el objeto principal de estudio de esta rama.

Definición 0.12. Sea X un continuo. Entonces, definimos el *hiperespacio de los cerrados de* X como la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X. Dicha colección es denotada por 2^X.

Por otro lado, definimos el *hiperespacio de los subcontinuos de* X como la colección de todos los elementos de 2^X que son conexos. Dicha colección es denotada mediante $C(X)$.

La Teoría de Hiperespacios tiene una cantidad espectacular de resultados, sin embargo, en este texto sólo utilizaremos los resultados básicos.

A continuación definiremos la Topología de Vietoris: la topología que generalmente se utiliza para los hiperespacios. La misma se construye tomando cierta colección $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de 2^X y generando una topología para la cual, $\mathfrak{B}$ es una base.

Definición 0.13. Sea X un espacio topológico. Para cada familia finita de abiertos $U_1, \ldots, U_n \subset X$, definimos el *Vietórico* de $U_1, \ldots U_n$ como el siguiente conjunto:

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle := \Big\{ A \in 2^X : \ A \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \Big\}.$$

Teorema 0.14. *Sea X un espacio topológico. Definamos las siguientes colecciones:*

$$\mathfrak{B} := \Big\{ \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset 2^X : \ n \in \mathbb{N} \textit{ y } U_i \subset X \textit{ abierto para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \Big\}.$$

$$T_{\mathfrak{B}} := \Big\{ \mathcal{U} \subset 2^X : \quad \textit{existe } \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B} \textit{ tal que } \mathcal{U} = \bigcup \mathfrak{C} \Big\}.$$

Entonces, $T_{\mathfrak{B}}$ es una topología para 2^X y $\mathfrak{B}$ es una base para la misma.

Demostración. Utilizaremos la Proposición 0.1 para probar el enunciado en cuestión. Para mostrar que se satisface (i), notemos que, dado $A \in 2^X$, se tiene que $A \in \langle X\rangle \in \mathfrak{B}$. Para probar (ii), basta comprobar que para cualesquiera dos elementos de $\mathfrak{B}$, la intersección de los mismos es un elemento de $\mathfrak{B}$. Tomemos pues $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y $\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Definamos los conjuntos $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V := \bigcup_{j=1}^m V_i$; observemos que $\langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U\rangle$ es un elemento de $\mathfrak{B}$. De esta manera, de comprobar la siguiente igualdad, habríamos acabado:

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U\rangle. \tag{1}$$

Entonces, observemos que:

$$U \cap V = \Big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n (U_i \cap V) \Big) \cup \Big(\textstyle\bigcup_{j=1}^m (V_j \cap U) \Big). \tag{2}$$

Ahora, sea A un elemento de $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Notemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y como $A \cap U_i \subset A \subset V$, entonces $A \cap U_i \cap V \neq \emptyset$. Similarmente, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, se obtiene que $A \cap V_j \cap U \neq \emptyset$. El hecho de que tales intersecciones sean no vacías y la igualdad en (2) implican que A es un elemento de $\langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U\rangle$. Esto prueba una de las contenciones necesarias para asegurar la igualdad en (1).

Ahora, tomemos un elemento A de $\langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U\rangle$. Notemos que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $A \cap U_i \cap V \neq \emptyset$ entonces $A \cap U_i \neq \emptyset$. Similarmente, para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que $A \cap V_j \neq \emptyset$. El hecho de que estas intersecciones sean no vacías y la igualdad en (2) garantizan que A es un elemento tanto de $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ como de $\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Esto asegura que la contención restante es válida.

Hemos probado así que la igualdad en (1) es válida; lo cual nos permite asegurar que $\mathfrak{B}$ cumple (ii). Finalmente, utilizando la Proposición 0.1, obtenemos que $T_{\mathfrak{B}}$ es una topología para 2^X y que $\mathfrak{B}$ es una base para la misma.

†

Proposición 0.15. *Sea X un continuo. Consideremos el siguiente conjunto:*

$$\mathfrak{S} := \{\langle U\rangle : U \subset X \text{ es abierto}\} \cup \{\langle X, V\rangle : V \subset X \text{ es abierto}\}.$$

Entonces, $\mathfrak{S}$ es una subbase para la topología $T_{\mathfrak{B}}$.

Demostración. Definamos $\mathfrak{B}^*$ como la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{S}$. Para mostrar que $\mathfrak{S}$ es una subbase, debemos de probar que $\mathfrak{B}^*$ es una base para la topología $T_{\mathfrak{B}}$; así pues, en tanto que $\mathfrak{B}$ es una base para $T_{\mathfrak{B}}$ (Proposición 0.14), si comprobamos que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$ entonces habremos acabado. Pues bien, para mostrar que $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$, hemos de probar que cualquier intersección finita de elementos de $\mathfrak{S}$ pertenece a $\mathfrak{B}$. Gracias al principio de inducción, para comprobar lo anterior basta asegurar que la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathfrak{S}$, pertenece a $\mathfrak{B}$. Entonces, notemos que por las definiciones de $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{B}$, cualquier elemento de $\mathfrak{S}$ pertenece a $\mathfrak{B}$. Ahora, recordemos que en la prueba de la Proposición 0.14, hemos visto que la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathfrak{B}$ es en sí, un elemento de $\mathfrak{B}$ (inclusive dimos la forma que tiene dicha intersección); de manera que cualquier intersección finita de elementos de $\mathfrak{S}$ pertenece a $\mathfrak{B}$.

Para comprobar que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^*$, tomemos un elemento $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ de $\mathfrak{B}$ y mostremos que:

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \langle \textstyle\bigcup_{i=1}^n U_i\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \langle U_i, X\rangle \right). \tag{3}$$

Tomemos pues un elemento A de $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Notemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $A \in \bigcap_{i=1}^n \langle X, U_i\rangle$; además, como $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, también se tiene que $A \in \langle \bigcup_{i=1}^n U_i\rangle$. De esta manera, hemos comprobado una de las contenciones necesarias para asegurar la igualdad en (3). Ahora, tomemos un elemento A de $\langle \bigcup_{i=1}^n U_i\rangle \cap \bigcap_{i=1}^n \langle U_i, X\rangle$. El que A pertenezca a la primera de estas dos colecciones nos da que $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, mientras que la pertenencia a la segunda nos permite afirmar que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto garantiza que A es elemento de $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.

De esta manera obtenemos las dos contenciones necesarias para asegurar que la igualdad en (3) es válida. Así pues, cualquier elemento de $\mathfrak{B}$ se puede ver como una intersección finita de elementos de $\mathfrak{B}^*$. †

En este texto, siempre que hablemos del hiperespacio 2^X pensaremos que tiene la topología de Vietoris. Como $C(X)$ es un subconjunto de 2^X, entonces $C(X)$ hereda la topología de 2^X.

Para concluír esta sección, hablaremos acerca del concepto de *función multivaluada*: se trata de una función que a los puntos p de un continuo X les asigna un subconjunto A de un continuo Y. Si a cada uno de estos puntos, el subconjunto que se le asigna es cerrado y no vacío, entonces en realidad estamos hablando de una función que sale de X y entra a 2^Y. Dado que ambos espacios son métricos, entonces tiene sentido preguntarse acerca de la continuidad de estas funciones.

Existen dos conceptos (semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior) que permiten abordar la continuidad de este tipo de funciones. A continuación definiremos tales conceptos y veremos que una función multivaluada satisface ambos tipos de semicontinuidad si y sólo si es continua.

Definición 0.16. Sean X, Y espacios topológicos y $F : X \to 2^Y$ una función.

i) Decimos que F es *semicontinua superiormente* en algún punto p de X si para todo $V \subset Y$ abierto tal que $F(p) \subset V$ existe $U \subset X$ abierto tal que $p \in U$ y $F(x) \subset V$ para cualquier $x \in U$. Decimos que F es semicontinua superiormente si lo es para cada punto p de X.

ii) Decimos que F es *semicontinua inferiormente* en algún punto p de X si para todo $V \subset Y$ abierto tal que $F(p) \cap V \neq \emptyset$, existe algún $U \subset X$ abierto tal que $p \in U$ y $F(x) \cap V \neq \emptyset$ para cualquier $x \in U$. Decimos que F es semicontinua inferiormente si lo es para cada $p \in X$.

Lema 0.17. *Sean X, Y espacios topológicos y $F : X \to 2^Y$ una función. Entonces:*

(i) F es semicontinua superiormente si y solo si para todo $V \subset Y$ abierto, se obtiene que $F^{-1}(\langle V \rangle)$ es abierto.

(ii) F es semicontinua inferiormente si y solo si para todo $V \subset Y$ abierto, se obtiene que $F^{-1}(\langle V, Y \rangle)$ es abierto.

Demostración. Para mostrar la ida de (i), supongamos que F es semicontinua superiormente. Tomemos $V \subset Y$ abierto y veamos que $F^{-1}(\langle V \rangle)$ es abierto. Sea pues p un elemento de $F^{-1}(\langle V \rangle)$. Entonces $F(p) \in \langle V \rangle$; lo cual implica que $F(p) \subset V$. Como F es semicontinua superiormente en p, existe un abierto $U \subset X$ tal que $p \in U$ y $F(x) \subset V$ para cada $x \in U$. Entonces, $F(x) \in \langle V \rangle$ para cada $x \in U$; de modo que $p \in U \subset F^{-1}(\langle V \rangle)$.

Para mostrar el regreso de (i), supongamos que $F^{-1}(\langle V\rangle)$ es abierto para todo abierto $V\subset Y$ y mostremos que F es semicontinua superiormente. Tomemos pues un punto $p\in X$ y un abierto $V\subset Y$ que contenga a $F(p)$. Notemos que $F(p)\in\langle V\rangle$, de manera que $p\in F^{-1}(\langle V\rangle)$; además, $F^{-1}(\langle V\rangle)$ es abierto por nuestra suposición inicial. Por otro lado, si $x\in F^{-1}(\langle V\rangle)$, entonces $F(x)\in\langle V\rangle$, por lo que $F(x)\subset V$. De esta manera, F es semicontinua superiormente para cualquier $p\in X$.

Para mostrar la ida de (ii), supongamos que F es semicontinua inferiormente. Tomemos un abierto $V\subset Y$ y probemos que $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$ es abierto. Sea pues p elemento de $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$. Esto quiere decir que $F(p)$ intersecta a V; como F es semicontinua inferiormente en p, existe un abierto $U\subset X$ que contiene a p y tal que $F(x)\cap V\neq\emptyset$ para cualquier $x\in U$. Entonces, U es un abierto tal que $p\in U\subset F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$, luego $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$ es abierto.

Para mostrar el regreso de (ii), supongamos que para todo abierto $V\subset Y$ se tiene que $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$ es abierto. Tomemos un punto $p\in X$ y veamos que F es semicontinua inferiormente en p. Sea $V\subset Y$ abierto tal que $F(p)$ intersecta a V. Entonces $p\in F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$; además, $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$ es abierto por nuestra suposición. Por otro lado, si x es elemento de $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$, entonces $F(x)\cap V\neq\emptyset$. De esta manera, F es semicontinua inferiormente. †

Proposición 0.18. *Sean X,Y espacios topológicos y $F:X\to 2^Y$ una función. Entonces, F es continua si y sólo si F es semicontinua inferiormente y superiormente.*

Demostración. Para mostrar la ida, supongamos que F es continua. Para todo abierto $V\subset Y$, se tiene que $\langle V\rangle$ y $\langle V,X\rangle$ son abiertos en 2^Y; así que por la continuidad de F, los conjuntos $F^{-1}(\langle V\rangle)$ y $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$ son abiertos. Según el Lema 0.17, esto implica que F es semicontinua superiormente e inferiormente.

Para probar el regreso, supongamos que F es semicontinua superiormente e inferiormente. Por el Lema 0.17, para todo abierto $V\subset Y$ se tiene que $F^{-1}(\langle V\rangle)$ y $F^{-1}(\langle V,Y\rangle)$ son abiertos de X. Notemos que por la Proposición 0.15, la colección $\mathfrak{S}=\{\langle V\rangle:\ V\subset Y \text{ es abierto}\}\cup\{\langle Y,V\rangle:\ V\subset Y \text{ es abierto}\}$ es una subbase para la topología de 2^Y. Entonces, la imagen inversa de cada elemento de $\mathfrak{S}$ es un abierto de X, lo cual implica que F es continua. †

Capítulo 1

Definición y Ejemplos

En este capítulo, llevaremos a cabo dos tareas. La primera de ellas será definir la función $\mathcal{R}$, mientras que la segunda será el cálculo de la misma en algunos continuos específicos. Para comenzar, requerimos de la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea X un continuo arco conexo. Entonces, para cada elemento $A \in 2^X$, consideremos la colección $\mathcal{V}_A$ de todos los subconjuntos arco conexos de X que contienen a A en su interior. Definamos:

$$\mathcal{R}_A := \bigcap \left\{ \overline{K} : K \in \mathcal{V}_A \right\}.$$

Notemos que el pedir que X sea arco conexo en la definición anterior garantiza que $\mathcal{V}_A$ es una colección no vacía, así pues, el conjunto $\mathcal{R}_A$ siempre está definido.

Ahora, nuestro objetivo es definir una función de 2^X en 2^X tal que a cada elemento A le asigne el conjunto $\mathcal{R}_A$. Para ello sería conveniente comprobar que dichos conjuntos son efectivamente elementos de 2^X. Pues bien, la siguiente proposición contiene tal resultado, así como otros que serán de gran utilidad a lo largo del texto.

Proposición 1.2. *Sean X un continuo arco conexo y A, B elementos de 2^X. Entonces:*

(i) $A \subset \mathcal{R}_A$.

(ii) Si $A \subset B$, entonces $\mathcal{R}_A \subset \mathcal{R}_B$.

(iii) Si $A = B$, entonces $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$.

(iv) $\mathcal{R}_A$ es cerrado y no vacío.

Demostración. Para mostrar el primer enunciado, notemos que para cualquier $K \in \mathcal{V}_A$, como el interior de K contiene a A, entonces $A \subset \overline{K}$. Esto garantiza que $A \subset \mathcal{R}(A)$.

Para probar el segundo enunciado, primero notemos que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{V}_B \subset \mathcal{V}_A$. En efecto, si K es algún elemento de $\mathcal{V}_B$, como K es arco conexo y $A \subset B \subset \text{int}(K)$, entonces K pertenece a la colección $\mathcal{V}_A$. Ahora $\mathcal{R}_A \subset \mathcal{R}_B$, pues si x es un punto de $X \backslash \mathcal{R}_B$, entonces existe $K \in \mathcal{V}_B$ tal que $x \notin \overline{K}$; pero como $K \in \mathcal{V}_A$, entonces la definición de $\mathcal{R}_A$ garantiza que x es un punto de $X \backslash \mathcal{R}_A$.

Por otro lado, si $A = B$, entonces $A \subset B$ y $B \subset A$; de manera que por (ii) se obtienen las contenciones necesarias para asegurar que $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$.

Finalmente, $\mathcal{R}_A$ no puede ser vacío, pues según el primer enunciado, dicha colección contiene a un subconjunto no vacío. Por otro lado, $\mathcal{R}_A$ es cerrado por ser una intersección de cerrados. †

Definición 1.3. Sea X un continuo arco conexo. Entonces, definimos la función $\mathcal{R} : 2^X \to 2^X$ como $\mathcal{R}(A) := \mathcal{R}_A$.

Notemos que $\mathcal{R}$ es efectivamente una función, pues gracias a los incisos (iii) y (iv) de la Proposición 1.2, se tiene que $\mathcal{R}$ es una relación univoca y bien definida en el codominio sugerido.

Ahora bien, nuestra segunda tarea en esta sección es el cálculo de $\mathcal{R}$ en algunos continuos específicos. Sin embargo, antes de pasar a ello enunciaremos una proposición que resultará extremadamente útil a lo largo del texto.

Proposición 1.4. *Sean X un continuo arco conexo, x un punto del mismo y A elemento de 2^X. Si existe un subconjunto arco conexo K_x tal que $A \subset int(K)$ y $x \notin \overline{K}$, entonces $x \notin \mathcal{R}(A)$.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto K_x con las caraterísticas mencionadas en el enunciado anterior. Notemos que K_x es un elemento de $\mathcal{V}_A$ cuya cerradura evade a x, y recordando que $\mathcal{R}(A)$ es la intersección de todas las cerraduras de los elementos de $\mathcal{V}_A$, se obtiene que $x \notin \mathcal{R}(A)$. †

Corolario 1.5. *Sean X un continuo arco conexo, B un subconjunto del mismo y A un elemento de 2^X. Si para cualquier $x \in X \backslash B$ existe un subconjunto arco conexo K_x tal que $A \subset int(K)$ y $x \notin \overline{K}$, entonces $\mathcal{R}(A) \subset B$.*

Demostración. Supongamos que para cualquier $x \in X \backslash B$ existe un subconjunto K_x con las características enunciadas. Por la Proposición 1.4, esto significa que $X \backslash B$ está contenido en $X \backslash \mathcal{R}(A)$. Luego, $\mathcal{R}(A) \subset B$. †

Ejemplo 1.6. En el intervalo I, se tiene que $\mathcal{R}(A) = [\text{ínf}\, A, \sup A]$ para cualquier $A \in 2^X$. Para ver que el intervalo $[\text{ínf}\, A, \sup A] \subset \mathcal{R}(A)$, notemos que para cualquier $K \in \mathcal{V}_A$, como $\overline{K}$ es un subconjunto conexo y cerrado de I, entonces $\overline{K}$ es un intervalo cerrado, digamos $[a, b]$ para algunos $a, b \in I$. Como $\overline{K}$ contiene a A, entonces a y b son cotas para A; luego, $a \leqslant \text{ínf}\, A$ y $\sup A \leqslant b$. Esto quiere decir que $[\text{ínf}\, A, \sup A] \subset [a, b]$ (Figura 1.1); así pues, para cualquier $K \in \mathcal{V}_A$ se tiene que $[\text{ínf}\, A, \sup A] \subset \overline{K}$. De esta manera, $[\text{ínf}\, A, \sup A] \subset \mathcal{R}(A)$.

[redacted]

Figura 1.1: El intervalo $[a, b]$.

Ahora, utilizaremos el Corolario 1.5 para comprobar que $\mathcal{R}(A) \subset [\text{ínf}\, A, \sup A]$. Tomemos pues un punto x fuera del intervalo $[\text{ínf}\, A, \sup A]$ y encontremos un subconjunto arco conexo cuyo interior contenga a A y cuya cerradura evada a x. Entonces, tenemos dos casos: $0 \leqslant x < \text{ínf}\, A$ o $\sup A < x \leqslant 1$. Supongamos que ocurre lo primero y tomemos un racional q tal que $x < q < \text{ínf}\, A$. Luego, consideremos el intervalo $[q, 1]$ (Figura 1.2) y notemos que la naturaleza de q garantiza que $[q, 1]$ es un subconjunto arco conexo, cuyo interior contiene a A y cuya cerradura evade a x. Observemos que podemos proceder de manera similar si es que ocurre el segundo caso; así pues, utilizando el Corolario 1.5, obtenemos que $\mathcal{R}(A) \subset [\text{ínf}\, A, \sup A]$.

Esto implica que $\mathcal{R}(A) = [\text{ínf}\, A, \sup A]$ para cualquier A elemento de 2^X.

[redacted]

Figura 1.2: El intervalo $[q, 1]$.

Ejemplo 1.7. Definamos los siguientes conjuntos:

- $G := \left\{ (x, \text{sen}\, \frac{1}{x}) : \ x \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right] \right\}$
- $L := \{0\} \times [-1, 1]$
- $S := G \cup L$

Notemos que S es el resultado de tomar la cerradura de G en $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, tomemos un arco α contenido en el cuarto cuadrante del plano, cuyos puntos extremos sean $(0, -1)$, $\left(\frac{1}{2\pi}, 0\right)$ y cuya intersección con S sea únicamente ese par de puntos. Definamos al conjunto $W := S \cup \alpha$ y consideremos el espacio topológico que se forma al tomar W con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$. Tal espacio es conocido como "*El Circulo de Varsovia*" (Figura 1.3).

A continuación probaremos que, si $A := \{(0, 0)\}$, entonces $\mathcal{R}(A) = W$. Esto lo haremos comprobando que para cualquier elemento $K \in \mathcal{V}_A$, se tiene que $W \subset \overline{K}$. Tomemos pues un subconjunto arco conexo K que contenga a $(0, 0)$ en

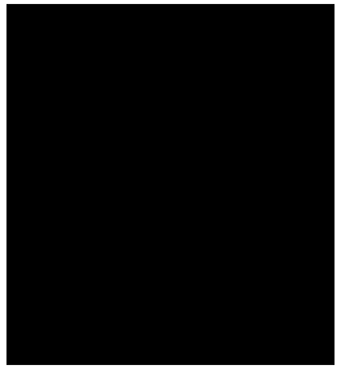

Figura 1.3: El Circulo de Varsovia.

su interior. Primero veremos que K contiene a $G \cup \alpha$. Consideremos la sucesión $\{(\frac{1}{2n\pi}, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ y notemos que la misma converge al punto $(0,0)$. Como el interior de K es un subconjunto abierto que contiene a dicho punto, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2n\pi}, 0)$ es un punto interior de K para cualquier $n \geqslant N$. Ahora, si $(x,y) \in G$, entonces podemos tomar $n \geqslant N$ tal que $\frac{1}{2n\pi} < x$. Notemos que $(0,0)$ y $(\frac{1}{2n\pi}, 0)$ son puntos de K, así que podemos tomar un arco β contenido en K cuyos puntos extremos sean esos dos puntos (Figura 1.4). Observemos que debido a la estructura de W, tal arco no puede evadir a los puntos de G que se encuentran a la derecha de $(\frac{1}{2n\pi}, 0)$ (es decir, los puntos $(u,v) \in G$ tales que $\frac{1}{2n\pi} \leqslant u$); así que (x,y) debe de ser un punto de β . De esta manera, (x,y) es un punto de K. Esto prueba que $G \subset K$; sin embargo, el arco β que hemos tomado en la prueba anterior debe de contener al arco α. Entonces, también se tiene que $\alpha \subset K$.

Figura 1.4: El arco β.

Hemos comprobado que K contiene a $G\cup\alpha$. Sabiendo esto podemos concluir que:

$$W=\overline{G}\cup\alpha=\overline{G\cup\alpha}\subset\overline{K}.$$

Tal contención muestra que, para todo $K\in\mathcal{V}_A$, se tiene que $W\subset\overline{K}$. Esto implica que $W\subset\mathcal{R}(A)$. Ahora, en tanto que la contención contraria es inmediata de la definición de $\mathcal{R}$, podemos entonces concluir que $\mathcal{R}(A)=W$.

Por otro lado, veamos que si (u,v) es un punto de $G\backslash\{(\frac{1}{2\pi},0)\}$ y $B:=\{(u,v)\}$, entonces $\mathcal{R}(B)=B$. Notemos que como $B\subset\mathcal{R}(B)$ (Proposición 1.2), para comprobar dicha igualdad basta mostrar que se tiene la contención contraria. Pues bien, haremos uso del Corolario 1.5: tomemos un punto de $(x,y)\in W\backslash B$ y construyamos un subconjunto arco conexo cuyo interior contenga a (u,v) y cuya cerradura evada a (x,y). Como $(x,y)\neq(u,v)$, se tiene que $x\neq u$ o $y\neq v$.

Supongamos que $x\neq u$; por lo que $x<u$ o $u<x$. Pensemos que ocurre lo primero y escojamos racionales p,q tales que $x<p<u<q<\frac{1}{2\pi}$. Tomemos un arco β cuyos puntos extremos sean $(p,\operatorname{sen}\frac{1}{p})$ y $(q,\operatorname{sen}\frac{1}{q})$ y observemos que dicho arco contiene a (u,v) en su interior; además, la manera en que hemos tomado a p y q garantiza que (x,y) no es un punto de β, sin importar que posición ocupe (x,y) en W (Figura 1.5). Por otro lado, si $u<x$, entonces podemos adaptar la construcción anterior para obtener un arco con las mísmas características.

Ahora, supongamos que $y\neq v$. Daremos por hecho que $x=u$, pues recién hemos visto como proceder cuando x es diferente a u. Tales condiciones y la estructura de W obligan a que (x,y) no sea un punto extremo de α. De esta manera, G es un subconjunto arco conexo cuyo interior contiene a (u,v) y cuya cerradura evade a (x,y).

Entonces, para cualquier $(x,y)\in W\backslash B$ siempre se puede encontrar un subconjunto arco conexo cuyo interior contenga a (u,v) y cuya cerradura evada a (x,y). Utilizando la proposición 1.5 se obtiene que $\mathcal{R}(B)\subset B$. Esto implica que $\mathcal{R}(B)=B$.

Figura 1.5: El arco β y las posibles posiciones de (x,y).

Ejemplo 1.8. Denotemos por C al conjunto de Cantor y para cada $c \in C$, definamos $\bar{c} := (c, 0)$; además, consideremos $\bar{v} := (\frac{1}{2}, 1)$. Luego, para cada punto $\bar{x}$ del plano, denotemos por $L(\bar{x})$ al segmento de recta cuyos puntos extremos son $\bar{x}$ y $\bar{v}$. Tomemos los segmentos de recta $L(\bar{c})$ tales que $c \in C$ y definamos el conjunto X como la unión de todos éstos. Finalmente, consideremos el espacio topológico que se forma al tomar X con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$.

Este espacio es conocido como "*El Abanico de Cantor*" (Figura 1.6). Notemos que X es compacto por ser un subespacio cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$; además es conexo por ser la unión de segmentos de recta que se intersectan en un único punto. De esta manera, X es un continuo.

Figura 1.6: El Abanico de Cantor.

A continuación veremos que $\mathcal{R}(\{\bar{x}\}) = L(\bar{x})$ para cada $\bar{x} \in X$. Tomemos pues un punto $\bar{x}$ de X y supongamos que $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Para probar que $\mathcal{R}(\{\bar{x}\}) \subset L(\bar{x})$, utilicemos el Corolario 1.5: tomemos un punto $\bar{y} \in X \setminus L(\bar{x})$ y encontremos un subconjunto arco conexo K cuyo interior contenga a $\bar{x}$ y cuya cerradura evada a $\bar{y}$. Supongamos que $\bar{y} = (y_1, y_2)$ y observemos que tenemos dos casos: $y_2 < x_2$ o $x_2 \leqslant y_2$.

Supongamos que ocurre lo primero, de manera que podemos tomar un racional q tal que $y_2 < q < x_2$. Definamos $K := X \cap (\mathbb{R} \times [q, \infty))$ (la colección de todos los puntos de X cuya segunda coordenada es mayor o igual a q) (Figura 1.7). Notemos que K es arco conexo, pues es la unión de segmentos de recta que se intersectan en un único punto; además, la selección de q garantiza que K contiene a $\bar{x}$ en su interior y que su cerradura evade a $\bar{y}$.

Figura 1.7: El conjunto K cuando $y_2 < x_2$.

Ahora, supongamos que $x_2 \leqslant y_2$ y notemos que $\bar{x} \neq \bar{v}$. Por la construción de X, existen $u, w \in C$ tales que $\bar{x} \in L(\bar{u})$ y $\bar{y} \in L(\bar{w})$. Notemos que $u \neq w$, pues de lo contrario obtendríamos que $\bar{y}$ es un punto del segmento $L(\bar{x})$. Supongamos que $w < u$ y tomemos un punto p del conjunto de Cantor tal que $w < p < u$. Definamos K como la unión de todos los segmentos de recta $L(\bar{c})$ tales que $c \in C$ y $p \leqslant c \leqslant 1$. Notemos que K (Figura 1.8) es arco conexo, pues es la unión de segmentos de recta que se intersectan en un único punto; además, la selección de p garantiza que K cumple con las características deseadas. Resta ver cómo definir K cuando $u < w$, sin embargo la construcción anterior se puede adaptar fácilmente a este caso.

Hemos visto que para cualquier $\bar{y} \in X \setminus L(\bar{x})$, existe un subconjunto arco conexo cuyo interior contiene a $L(\bar{x})$ y cuya cerradura evade a $\bar{y}$. Entonces, el Corolario 1.5 asegura que $\mathcal{R}(\{\bar{x}\}) \subset L(\bar{x})$.

Figura 1.8: El conjunto K cuando $x_2 \leqslant y_2$.

Mostremos ahora que $L(\bar{x}) \subset \mathcal{R}(\{\bar{x}\})$. Si $\bar{x} = \bar{v}$, entonces $L(\bar{x})$ coincide con $\{\bar{v}\}$; de manera que por la Proposición 1.2 se obtiene la contención anterior. Supongamos entonces que $\bar{x} \neq \bar{v}$; tomemos un subconjunto arco conexo K que contenga a $\bar{x}$ en su interior y veamos que $L(\bar{x}) \subset K$.

Como $\bar{x}$ es un punto interior de K, existe un subconjunto abierto U tal que $\bar{x} \in U \subset K$. Consideremos el espacio topológico $C^* := X \cap (\mathbb{R} \times \{x_2\})$ y observemos que C^* no puede ser el conjunto unitario $\{\bar{v}\}$, pues $\bar{x} \neq \bar{v}$. Este hecho y la estructura de X obligan a que C^* sea homeomorfo a C, de manera que C^* no contiene puntos aislados. Esto asegura la existencia de $\bar{p} \in C^* \cap U \setminus \{\bar{x}\}$. Ahora, notemos que tanto $\bar{x}$ como $\bar{p}$ son puntos de K, así que podemos tomar un arco α contenido en K cuyos extremos sean estos mismos puntos (Figura 1.9). Observemos que $\bar{v} \in \alpha$, pues de lo contrario, α sería disconexo. Como α es arco conexo, entonces α debe de contener un arco cuyos puntos extremos sean $\bar{x}$ y $\bar{v}$; pero debido a la estructura de X, el único arco que existe entre estos dos puntos es el segmento $L(\bar{x})$. De esta manera, dicho segmento está contenido en α; lo cual asegura que $L(\bar{x}) \subset K$. Esto nos permite concluir que $L(\bar{x}) \subset \mathcal{R}(\{\bar{x}\})$.

Finalmente, ambas contenciones prueban que $\mathcal{R}(\{\bar{x}\}) = L(\bar{x})$ para cualquier $\bar{x} \in X$.

Figura 1.9: El arco $\alpha \subset K$ cuyos puntos extremos son $\bar{x}$ y $\bar{p}$.

Ejemplo 1.9. Definamos el conjunto $S := \{(-1+\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(-1,0)\}$. Para cada $\bar{x} \in S$ denotemos por:

- $L(\bar{x})$ al segmento de recta que va de $\bar{x}$ a $(0,1)$.
- $L(-\bar{x})$ al segmento de recta que va de $-\bar{x}$ a $(0,1)$.
- $C(\bar{x})$ a la media circunferencia contenida en el tercer y cuarto cuadrante del plano, cuyo centro sea $(0,0)$ y cuyos puntos extremos sean $\bar{x}$ y $-\bar{x}$.
- $T(\bar{x}) := L(\bar{x}) \cup L(-\bar{x}) \cup C(\bar{x})$.

Definamos X como la unión de todos los $T(\bar{x})$ y consideremos el espacio topológico formado por X con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$ (Figura 1.10). Notemos que X es un continuo por ser un subespacio compacto y conexo por trayectorias de un espacio métrico.

Figura 1.10: El continuo X.

Definamos $A := \{(-1,0)\}$ y veamos que $\mathcal{R}(A) = \{(-1,0),(0,1)\}$. Primero, comprobemos que $\mathcal{R}(A)$ contiene a los dos puntos en cuestión. Puesto que $\mathcal{R}(A)$ contiene a A (Proposición 1.2), se tiene que $(-1,0)$ es un punto de $\mathcal{R}(A)$; de esta manera, sólo resta ver que $(0,1)$ también es un punto de $\mathcal{R}(A)$. Tomemos pues un subconjunto arco conexo K que contenga a $(-1,0)$ en su interior y veamos que $(0,1)\in\overline{K}$. Observemos que la sucesión $\{(-1+\frac{1}{n},0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $(-1,0)$, de manera que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $n\geqslant N$, se tiene que $(-1+\frac{1}{n},0)$ es un punto interior de K. Esto implica que $\bar{p}:=(-1+\frac{1}{N},0)$ es un punto de K. Tomemos un arco α contenido en K cuyos puntos extremos sean $(-1,0)$ y $\bar{p}$. Veamos que $(0,1)\in\alpha$. Si suponemos lo contrario, entonces obtenemos que α está contenido en el subconjunto $X\backslash\{(0,1)\}$. Dicho subconjunto resulta ser disconexo, más aún, las componentes del mismo son de la forma $T(\bar{x})\backslash\{(0,1)\}$ donde $\bar{x}\in S$ (denotaremos a estas componentes por $T^*(\bar{x})$), así que α debe de estar contenido en la componente $T^*(-1,0)$. Esto significa que $\bar{p}$ es un punto de $T^*(-1,0)$, pero $\bar{p}$ también es un punto de $T^*(\bar{p})$, pues $p\in S$. Hemos concluido así que existen dos componentes diferentes que no son ajenas, lo cual es una contradicción. De esta manera, $(0,1)\in\alpha$. Ahora, recordemos que α es un arco contenido en K, por lo que $(0,1)$ es un punto de K. Esto prueba que $(0,1)\in\overline{K}$, así que $(0,1)\in\mathcal{R}(A)$. Por tanto, $\{(-1,0),(0,1)\}\subset\mathcal{R}(A)$.

Para ver la contención contraria utilicemos el Corolario 1.5: tomemos un punto $(x,y)\in X\backslash\{(-1,0),(0,1)\}$; construyamos un subconjunto arco conexo K cuyo interior contenga a A y cuya cerradura evada a (x,y). Notemos que, si $(x,y)\in T(\bar{s})$ para algún $\bar{s}\in S\backslash\{(-1,0)\}$, entonces podemos definir a K como el conjunto $X\backslash T^*(\bar{s})$ (Figura 1.11).

Figura 1.11: $X\backslash T^*(\bar{s})$.

Por otro lado si (x,y) es un punto de $T(-1,0)$, entonces nos vemos en la necesidad de considerar tres casos. Primero, si $(x,y)=(1,0)$, entonces definamos $K:=X\cap([-1,\frac{1}{2}]\times\mathbb{R})$; esto es, la colección de puntos de X cuya primera coordenada es menor o igual a $\frac{1}{2}$) (Figura 1.12).

Figura 1.12: El subconjunto K cuando $(x,y)=(1,0)$.

Ahora, supongamos que (x,y) es un punto de $L(-1,0)$. Esto y el hecho de que los puntos $(-1,0),(x,y),(0,1)$ sean todos distintos entre sí, nos permite concluir que $0<y<1$. Tomemos entonces números racionales p,q tales que $0<p<y<q<1$, y definamos $K:=X\backslash([-1,0]\times[p,q])$ (Figura 1.13). Podemos hacer una construcción similar que la construcción de K cuando (x,y) es un punto de $L(1,0)$.

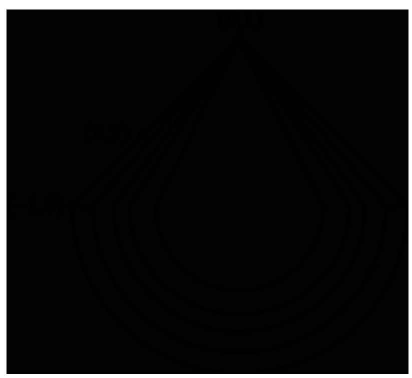

Figura 1.13: El conjunto K cuando $(x,y)\in L(-1,0)$.

Finalmente, supongamos que (x,y) es un punto de $C(-1,0)$. Pensemos que $(x,y)\neq(1,0)$, pues ya hemos visto lo que ocurre en el caso contrario, además, recordemos que $(x,y)\neq(-1,0)$. Esto implica que $y<0$, de manera que existe un racional q tal que $y<q<0$. Definamos $K:=X\cap([-1,1]\times[q,\infty))$ (la colección de puntos de X cuya segunda coordenada es mayor o igual a q) (Figura 1.14). Para cualquier punto (x,y) de $X\backslash\{(-1,0),(0,1)\}$ hemos construido un subconjunto arco conexo K cuyo interior contiene a $(-1,0)$ y cuya cerradura evade a (x,y), así que por el Corolario 1.5, obtenemos que $\mathcal{R}(A)\subset\{(-1,0),(0,1)\}$. Finalmente, $\mathcal{R}(A)=\{(-1,0),(0,1)\}$.

Figura 1.14: El conjunto K cuando $(x,y)\in C(-1,0)$.

Debido a que $\mathcal{R}$ es una función cuyo dominio y contradominio es el hiperespacio 2^X, es natural hacerse las siguientes preguntas:

- ¿La imagen bajo $\mathcal{R}$ de cualquier subcontinuo, siempre resulta ser un subcontinuo?
- ¿$\mathcal{R}$ es siempre una función continua?

Las respuestas a estas dos preguntas resultan ser negativas. Primero, en el Ejemplo 1.9, hemos visto que $\mathcal{R}(A)=\{(-1,0),(0,1)\}$ cuando $A:=\{(-1,0)\}$, lo cual nos dice que la imagen de un conexo no necesariamente es un conexo. Por otro lado, en el Ejemplo 1.7, la sucesión $\{A_n\}_{n=2}^{\infty}$ definida por $A_n=\{(\frac{1}{2n\pi},0)\}$ converge a $A=\{(0,0)\}$; sin embargo, la sucesión $\{\mathcal{R}(A_n)\}_{n=2}^{\infty}$ (la cual coincide con la sucesión original) no converge a $\mathcal{R}(A)$. Esto nos dice que $\mathcal{R}$ no siempre es continua.

Pese a que las respuestas de ambas preguntas son negativas, no debemos de perder la esperanza a encontrar condiciones suficientes que garanticen los comportamientos sugeridos. Por ejemplo, en el intervalo I (Ejemplo 1.6) hemos visto que la imagen bajo $\mathcal{R}$ de cualquier elemento de 2^I siempre resulta ser un subcontinuo; también se tiene que $\mathcal{R}$ es continua, aunque esta última afirmación aún no la hemos probado. Precisamente, en el segundo capítulo daremos una condición para garantizar que la imagen bajo $\mathcal{R}$ de cualquier elemento de 2^X resulta ser un subcontinuo; mientras que en el tercer capítulo trataremos el tema de la continuidad.

Capítulo 2

Propiedades Generales

En este capítulo, trataremos la mayoría de los resultados que se tienen para la función $\mathcal{R}$. El primero de ellos es que la arco conexidad única de X garantiza que $\mathcal{R}(A)$ es conexo, sin importar que A sea o no un subconjunto conexo de X. Cabe mencionar que dicho resultado resuelve una de las preguntas planteadas al final del capítulo anterior.

Para llevar a cabo lo anterior utilizaremos el concepto de colección cerrada bajo intersecciones finitas. Recordamos al lector que la definición del mismo se puede encontrar en la sección 0.1 del capítulo de preliminares.

Lema 2.1. *Sean X un continuo arco conexo y A un elemento de 2^X. Si X es únicamente arco conexo, entonces para cualquier abierto U tal que $\mathcal{R}(A) \subset U$, existe $K \in \mathcal{V}_A$ tal que $K \subset \overline{K} \subset U$.*

Demostración. Supongamos que X es únicamente arco conexo. Probemos que $\mathcal{V}_A$ es una colección cerrada bajo intersecciones finitas: tomemos $H, K \in \mathcal{V}_A$ y mostremos que $H \cap K$ es un elemento de $\mathcal{V}_A$. Para ello, veremos que $A \subset \operatorname{int}(H \cap K)$ y que $H \cap K$ es arco conexo.

Lo primero se obtiene fácilmente: como H y K son elementos de $\mathcal{V}_A$, entonces A está contenido tanto en el interior de H como en el interior de K; de manera que $A \subset \operatorname{int}(H) \cap \operatorname{int}(K) \subset \operatorname{int}(H \cap K)$.

Para probar lo segundo, tomemos puntos distintos $x, y \in H \cap K$. Como K y H son arco conexos, entonces existen arcos $\alpha \subset H$ y $\beta \subset K$ cuyos puntos extremos son x y y; sin embargo $\alpha = \beta$, pues X es únicamente arco conexo. De esta manera, α es un arco contenido en $H \cap K$ cuyos puntos extremos son x y y.

Esto prueba que para cualesquiera $H, K \in \mathcal{V}_A$, se tiene que $H \cap K$ es un elemento de $\mathcal{V}_A$; lo cual implica que $\mathcal{V}_A$ es cerrada bajo intersecciones finitas. De esta manera, si U es un abierto que contiene a $\mathcal{R}(A)$, entonces la Proposición 0.6 nos permite encontrar $K \in \mathcal{V}_A$ tal que $K \subset \overline{K} \subset U$. †

Teorema 2.2. *Sean X un continuo arco conexo. Si X es únicamente arco conexo, entonces $\mathcal{R}(A)$ es un subcontinuo de X para cualquier $A \in 2^X$.*

Demostración. Supongamos que X es únicamente arco conexo y tomemos un elemento de $A \in 2^X$. Ya hemos visto en la Proposición 1.2 que $\mathcal{R}(A)$ es cerrado; y como X es compacto, se tiene que $\mathcal{R}(A)$ es compacto. Así pues, sólo resta ver que $\mathcal{R}(A)$ es conexo. Entonces, supongamos lo contrario, de manera que existen abiertos ajenos no vacíos $U, V \subset X$ tales que:

(i) $\mathcal{R}(A) \subset U \cup V$.

(ii) $\mathcal{R}(A) \cap U \neq \emptyset \neq \mathcal{R}(A) \cap V$.

Utilizando el Lema 2.1 en (i) podemos encontrar $K \in \mathcal{V}_A$ tal que $\overline{K} \subset U \cup V$. Como $\mathcal{R}(A) \subset \overline{K}$, entonces (ii) nos permite concluir que U y V intersectan a $\overline{K}$. Esto nos dice que $\overline{K}$ es disconexo, pero esto es imposible pues K es arco conexo. Hemos llegado a una contradicción, por lo que $\mathcal{R}(A)$ debe de ser conexo. †

Como se pudo apreciar en el Teorema 2.2, el tipo de conexidad de X puede llegar a tener un gran impacto en el comportamiento de $\mathcal{R}$; así pues, es natural preguntarse qué podemos observar si pedimos que X tenga otro tipo de estructura.

A continuación veremos que un continuo localmente conexo hace de $\mathcal{R}$ la función identidad para el hiperespacio de los subcontinuos.

Teorema 2.3. *Sean X un continuo arco conexo y A un subcontinuo de X. Si X es localmente conexo, entonces $\mathcal{R}(A) = A$.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Recordemos que por la Proposición 1.2, se tiene que $A \subset \mathcal{R}(A)$. Para probar la contención contraria, utilicemos el Corolario 1.5: tomemos $p \in X \setminus A$ y obtengamos un subconjunto K arco conexo cuyo interior contenga a A y cuya cerradura evada a p.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(p)} \cap A = \emptyset$. Definamos $W = X \setminus \overline{B_\varepsilon(p)}$. Notemos que W es abierto y $A \subset W$. Tomemos la componente K de W que contiene a A. Observemos que como X es localmente conexo, entonces K es un abierto conexo (Teorema 0.4), y por el Teorema 0.8, se tiene K es arco conexo. Además, $p \notin \overline{K}$ pues $B_\varepsilon(p)$ y K son ajenos.

Por el Corolario 1.5, tenemos que $\mathcal{R}(A) \subset A$; luego $R(A) = A$. †

Es importante notar que la conexidad local de X no garantiza que $\mathcal{R}$ sea la función identidad del espacio 2^X. Tal es el caso del intervalo I (Ejemplo 1.6), en donde ya hemos visto que $\mathcal{R}(\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

Por otro lado, el regreso del Teorema 2.3 es falso. El hallar un contraejemplo que sustente lo anterior puede resultar una tarea difícil, pues para empezar deberíamos de encontrar un continuo X en donde $\mathcal{R}$ se comporte como la función identidad en $C(X)$. Afortunadamente, existe un concepto que nos permite clasificar este tipo de comportamiento.

Definición 2.4. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es *colocalmente arco conexo en x* si para cualquier U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, existe $K \subset X$ tal que $x \in \operatorname{int}(K) \subset K \subset U$ y $X \setminus K$ es arco conexo. Si X es colocalmente arco conexo en cualquiera de sus puntos, entonces decimos que X es *colocalmente arco conexo.*

Ejemplo 2.5. $\mathbb{S}^1$ es colocalmente arco conexo. En efecto, tomemos x un punto de $\mathbb{S}^1$ y U un subconjunto abierto que contenga a x, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Observemos que sin perdida de generalidad, podemos suponer que $B_\varepsilon(x) \subsetneq \mathbb{S}^1$; de manera que $B_\varepsilon(x)$ es un arco de circunferencia (Figura 2.1) que contiene a x en su interior y que esta contenido en U. Por otro lado, en tanto que el complemento de $B_\varepsilon(x)$ no es vacío, este resulta ser un arco de $\mathbb{S}^1$; así pues, $X \setminus B_\varepsilon(x)$ es arco conexo.

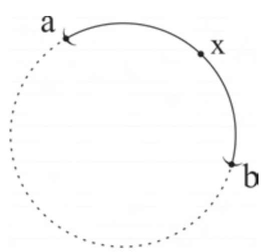

Figura 2.1: La bola de radio ε con centro en x

Teorema 2.6. *Sea X un continuo arco conexo. Entonces, X es colocalmente arco conexo si y sólo si $\mathcal{R} = Id_{2^X}$.*

Demostración. Para mostrar la ida, supongamos que X es colocalmente arco conexo; tomemos un elemento de $A \in 2^X$ y veamos que $\mathcal{R}(A) = A$. Notemos que por la Proposición 1.2 se tiene que $A \subset \mathcal{R}(A)$; la contención contraria la probaremos utilizando el Corolario 1.5. Tomemos pues $x \in X \setminus A$ y algún abierto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus A$. Nuestra suposición garantiza la existencia un subconjunto K cuyo complemento es arco conexo y tal que $x \in \operatorname{int}(K) \subset K \subset U$. Notemos que:

$$A \subset X \setminus \overline{U} \subset X \setminus U \subset X \setminus K.$$

En tanto que $X \setminus \overline{U}$ es abierto, la contención anterior asegura que A está contenido en el interior de $X \setminus K$; además, x no puede ser un punto de la cerradura de $X \setminus K$ porque x es un punto interior de K.

Hemos encontrado un conjunto arco conexo cuyo interior contiene a A y cuya cerradura evade a x; así pues, el Corolario 1.5 garantiza que $\mathcal{R}(A) \subset A$. Esto concluye que $\mathcal{R}(A) = A$ para cualquier $A \in 2^X$; de modo que $\mathcal{R}$ coincide con la función identidad.

Para mostrar el regreso, supongamos que $\mathcal{R}$ es la función identidad y mostremos que X es colocalemente conexo. Tomemos pues un punto $x \in X$ y un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$U \subsetneq X$, de manera que $X \setminus U$ es un elemento de 2^X. Entonces $\mathcal{R}(X \setminus U) = X \setminus U$, lo cual significa que x es un punto de $X \setminus \mathcal{R}(X \setminus U)$. Esto garantiza la existencia de un subconjunto arco conexo K que contiene a $X \setminus U$ en su interior y tal que $x \in X \setminus \overline{K}$. Notemos que como $X \setminus \overline{K}$ es un abierto que está contenido en $X \setminus K$, entonces $x \in \operatorname{int}(X \setminus K)$. Por otro lado, $X \setminus U \subset \operatorname{int}(K) \subset K$, así que $X \setminus K \subset U$; además, $X \setminus (X \setminus K)$ es arco conexo pues K es arco conexo. Esto prueba que X es colocalmente conexo en x, de manera que X es colocalmente conexo. †

Ahora estamos en condiciones de dar un contrajemplo del regreso del Teorema 2.3 sin la necesidad de calcular "manualmente" los valores de la función $\mathcal{R}$.

Ejemplo 2.7. Definamos al conjunto $S := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ y consideremos el producto $Y := S \times I$. Tomemos $H := I \times \{0\}$ y $H' := I \times \{1\}$. Hagamos $X := H \cup H' \cup Y$ y consideremos el espacio topológico formado por X con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$ (Figura 2.2). Notemos que X es un continuo por ser un subespacio cerrado y conexo por trayectorias de $\mathbb{R}^2$; además, X no es localmente conexo en los puntos de la forma $(0, y)$ donde $0 < y < 1$.

Figura 2.2: El continuo X

Antes de probar que X es colocalmente arco conexo haremos algunas observaciones. Para cualesquiera $(x_1, x_2) \in X$ y $\varepsilon > 0$, definiremos:

$$C(\bar{x}, \varepsilon) := \big((x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)\big) \cap X.$$

Debido a que el producto de intervalos abiertos es un conjunto básico para la topología usual de $\mathbb{R}^2$, entonces el conjunto $C(\bar{x}, \varepsilon)$ resulta ser básico para X. Por otro lado, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $L_n = \{\frac{1}{n}\} \times (0, 1)$ y $Z := \{0\} \times I$, entonces:

$$X = Z \cup \big(\textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n\big) \cup H \cup H'. \tag{2.1}$$

Habiendo dicho lo anterior, mostremos que X es colocalmente arco conexo. Tomemos un punto $\bar{p} \in X$ y un abierto U que lo contenga; escojamos $r > 0$ tal que $\bar{p} \in C(\bar{p}, r) \subset U$. Notemos que de encontrar $\varepsilon \leqslant r$ tal que $X \setminus C(\bar{p}, \varepsilon)$ sea conexo por trayectorias, entonces habríamos acabado (si $\varepsilon < r$, entonces $C(\bar{p}, \varepsilon) \subset C(\bar{p}, r) \subset U$). La definición de ε dependerá de que posición ocupe $\bar{p}$.

Supongamos que $\bar{p} \in L_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\bar{p} = (\frac{1}{k}, t)$ donde $0 < t < 1$. Definamos $\varepsilon = \text{mín}\{r, d(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}), d(t,1), d(t,0)\}$. Para ver que $X \setminus C(\bar{p}, \varepsilon)$ es conexo por trayectorias, definamos $V := \{\frac{1}{k}\} \times [0, t - \varepsilon]$ y $V' := \{\frac{1}{k}\} \times [0, t + \varepsilon]$. Entonces, la definición de ε hace que $X \setminus C(\bar{p}, \varepsilon)$ se vea como en la Figura 2.3.

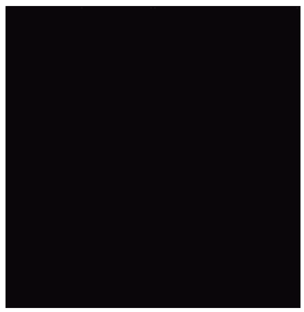

Figura 2.3: $(X \setminus L_k) \cup V \cup V'$.

Supongamos que $\bar{p} \in H$. Pensemos además que $\bar{p} \neq (0,0)$ (el caso contrario será considerado cuando $\bar{p}$ pertenezca a Z). Esto quiere decir que $\bar{p} = (s, 0)$ donde $0 < s \leqslant 1$. Supongamos que s no es de la forma $\frac{1}{n}$, de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k+1} < s < \frac{1}{k}$. Definamos $\varepsilon := \text{mín}\{r, d(\frac{1}{k}, s), d(\frac{1}{k+1}, s)\}$. Para mostrar que $X \setminus C(\bar{p}, \varepsilon)$ es conexo por trayectorias, hagamos $H^* := ([0, s - \varepsilon] \cup [s + \varepsilon, 1]) \times \{0\}$ y observemos que la definición de ε hace que $X \setminus C(\bar{p}, \varepsilon)$ se vea como en la Figura 2.4.

Figura 2.4: $(X \setminus H) \cup H^*$.

En el caso en que $s=\frac{1}{k}$ para algún $k\in\mathbb{N}$, definamos $\varepsilon:=\text{mín}\{r, d(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k})\}$. Para probar que $X\backslash C(\bar{p},\varepsilon)$ es conexo por trayectorias, definamos los conjuntos $H^*:=([0,s-\varepsilon]\cup[s+\varepsilon,1])\times\{0\}$ y $V:=[\varepsilon,1]\times\{\frac{1}{k}\}$; observemos que ε hace que $X\backslash C(\bar{p},\varepsilon)$ se vea como en la Figura 2.5.

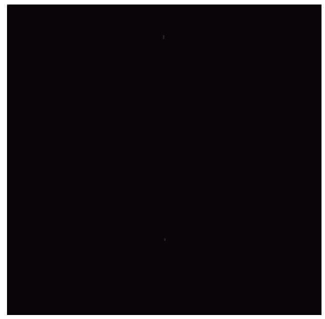

Figura 2.5: $(X\backslash H\cup L_k)\cup H^*\cup V$.

Hemos de notar que el caso en el que $\bar{p}\in H'$ y $\bar{p}\neq(0,1)$ se resuelve de manera similar al anterior, así que sólo resta ver cómo definir ε cuando $\bar{p}\in Z$. Si ocurre lo anterior obtenemos que $\bar{p}=(0,t)$ donde $0\leqslant t\leqslant 1$. Tomemos la sucesión $\{(\frac{1}{n},t)\}_{n=1}^{\infty}$ y notemos que la misma converge al punto $\bar{p}$; de esta manera, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{k},t)$ es un punto de $C(\bar{p},r)$. Definamos pues $\varepsilon:=\text{mín}\{r, d(0,\frac{1}{k}), d(1,t), d(0,t)\}$. Para mostrar que $X\backslash C(\bar{p},\varepsilon)$ es conexo por trayectorias, para cada $j>k$ definamos $V_j:=\{\frac{1}{j}\}\times([0,t-\varepsilon]\cup[t+\varepsilon,1])$; además, consideremos el conjunto $Z^*:=\{0\}\times([0,t-\varepsilon]\cup[t+\varepsilon,1])$. Entonces, la definición de ε hace que $X\backslash C(\bar{p},\varepsilon)$ se ve como en la Figura 2.6.

De esta manera, hemos visto que no importa la posición que ocupe $\bar{p}$ en X, siempre podemos definir $\varepsilon\leqslant r$ tal que $X\backslash C(\bar{p},\varepsilon)$ es arco conexo. Finalmente, X es colocamente arco conexo.

Ahora, por el Teorema 2.6, $\mathcal{R}$ coincide con la función identidad en 2^X, de manera que $\mathcal{R}(A)=A$ para cualquier A subcontinuo de X; sin embargo, ya hemos visto que X no es localmente conexo. Esto corrobora que el regreso del Teorema 2.6 es inválido.

Figura 2.6: $Z^*\cup(\bigcup_{j>k}V_j)\cup(\bigcup_{m=1}^{k}L_k)\cup H\cup H'$.

A continuación veremos que si $\mathcal{R}$ se comporta como la función identidad en los unitarios de un continuo únicamente arco conexo X, entonces X es localmente conexo.

Teorema 2.8. *Sea X un continuo únicamente arco conexo. Si $\mathcal{R}(\{p\}) = \{p\}$ para todo $p \in X$, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que para todo $p \in X$ se tiene que $\mathcal{R}(\{p\}) = \{p\}$. Veamos que X es localmente conexo mostrando que X es conexo en pequeño (Teorema 0.5). Tomemos un punto $p \in X$ y un abierto $U \subset X$ tal que $p \in U$. Como $\mathcal{R}(\{p\}) \subset U$ y X es únicamente arco conexo, el Lema 2.1) nos permite encontrar $K \in \mathcal{V}_{\{p\}}$ tal que $K \subset \overline{K} \subset U$. Notemos que K es arco conexo y $p \in \operatorname{int}(K)$.

Hemos encontrado un subconjunto conexo K cuyo interior contiene a p y cuya cerradura se queda contenida en U; de manera que X es conexo en pequeño. Esto implica que X es localmente conexo.

†

Corolario 2.9. *Sea X un continuo únicamente arco conexo. Entonces, X es localmente conexo si y sólo si $\mathcal{R}(A) = A$ para todo $A \in C(X)$.*

Demostración. Notemos que la ida es lo enunciado en el Teorema 2.3. Para el regreso, observemos que si X no es localmente conexo, entonces por el Teorema 2.8 existe $p \in X$ tal que $\mathcal{R}(\{p\}) \neq \{p\}$. †

Corolario 2.10. *Sea X un continuo únicamente arco conexo. Si X es colocalmente arco conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Si X es colocalmente arco conexo, entonces por el Teorema 2.6 se tiene que $\mathcal{R} = Id_{2^X}$; lo cual según el Corolario 2.9 implica que X es localmente conexo. †

Por el momento, dejaremos de lado la relación que existe entre el tipo de conexidad y el comportamiento de $\mathcal{R}$, para abordar el comportamiento de esta función con las operaciones conjuntistas usuales.

Primero observemos que $\mathcal{R}$ no es una función que "abra uniones". Esto se puede apreciar en el Ejemplo 1.6, en donde hemos visto que:

$$\mathcal{R}\left(\left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}\right\}\right) = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \neq \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\} = \mathcal{R}(\{\tfrac{1}{3}\}) \cup \mathcal{R}(\{\tfrac{2}{3}\}).$$

Así pues, es natural preguntarse si existen condiciones bajo las cuales un continuo hace de $\mathcal{R}$ una función que respete las uniones.

Definición 2.11. Sea X un continuo. Decimos que X es $\mathcal{R}$-aditivo si para cualquier colección $\mathcal{A}$ de elementos de 2^X tal que $\bigcup \mathcal{A}$ es un elemento de 2^X, se tiene que $\mathcal{R}\left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \bigcup \{\mathcal{R}(A) : A \in \mathcal{A}\}$.

Veremos que, para que un continuo X sea $\mathcal{R}$-aditivo, es suficiente y necesario que $\mathcal{R}$ respete uniones por pares. Para probar este resultado, haremos uso de la siguiente proposición.

Proposición 2.12. *Sean X un continuo arco conexo y $\mathcal{F}$ una colección de elementos de 2^X. Si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces:*

$$\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}\big)=\bigcap\{\mathcal{R}(G):\ G\in\mathcal{F}\}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y definamos $A:=\bigcap\{\mathcal{R}(G):\ G\in\mathcal{F}\}$. Para comprobar que $\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}\big)\subset A$, observemos que para todo $G\in\mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap\mathcal{F}\subset G$, de manera que $\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}\big)\subset\mathcal{R}(G)$.

Para probar la contención contraria, veamos que $X\setminus\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}\big)\subset X\setminus A$. Tomemos $x\in X\setminus\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}\big)$, de manera que existe un subconjunto arco conexo K tal que $\bigcap\mathcal{F}\subset\operatorname{int}(K)$ y $x\notin\overline{K}$. Por la Proposición 0.6, existe $G\in\mathcal{F}$ tal que $G\subset\overline{G}\subset\operatorname{int}(K)$, así que K es un elemento de $\mathcal{V}_G$ tal que $x\notin\overline{K}$. Esto implica que $x\notin\mathcal{R}(G)$, por lo que $x\in X\setminus A$.

Finalmente, $\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}\big)=A$. †

Proposición 2.13. *Sea X un continuo arco conexo. Entonces, X es $\mathcal{R}$-aditivo si y sólo si para cualesquiera $A,B\in 2^X$ se tiene que $\mathcal{R}(A\cup B)=\mathcal{R}(A)\cup\mathcal{R}(B)$.*

Demostración. Para mostrar la ida notemos que para cualesquiera $A,B\in 2^X$, la colección $\{A,B\}\subset 2^X$ es tal que $\bigcup\{A,B\}=A\cup B$. De esta manera, si X es $\mathcal{R}$-aditivo, entonces se obtiene que $\mathcal{R}(A\cup B)=\mathcal{R}(A)\cup\mathcal{R}(B)$.

Para mostrar el regreso, supongamos que para cualquier par de elementos de 2^X, se obtiene la igualdad enunciada; posteriormente tomemos $\mathcal{A}$ una colección de elementos de 2^X tal que $\bigcup\mathcal{A}$ sea elemento de 2^X. Definamos los conjuntos $R:=\bigcup\{\mathcal{R}(A):A\in\mathcal{A}\}$ y $A':=\bigcup\mathcal{A}$. Notemos que la Proposición 1.2, garantiza que $R\subset\mathcal{R}(A')$.

Para mostrar la contención contraria veamos que $X\setminus R\subset X\setminus\mathcal{R}(A')$. Tomemos $x\in X\setminus R$ y para cada $A\in\mathcal{A}$, consideremos la colección $\mathcal{F}_A$ de todos los elementos de 2^X que contengan a A en su interior. Notemos que $\mathcal{F}_A$ es cerrada bajo intersecciones finitas, pues si $F,G\in\mathcal{F}_A$, entonces $F\cap G\in\mathcal{F}$ en tanto que $A\subset\operatorname{int}(F)\cap\operatorname{int}(G)\subset\operatorname{int}(F\cap G)$. También se tiene que:

$$\bigcap\mathcal{F}_{\mathcal{A}}=A. \tag{2.2}$$

Para probar dicha igualdad, primero notemos que la definición de $\mathcal{F}_A$ garantiza que $A\subset\bigcap\mathcal{F}_A$. Por otro lado, si p es un elemento de $X\setminus A$, entonces $A\subset X\setminus\{p\}$; de manera que existe un abierto V tal que $A\subset V\subset\overline{V}\subset X\setminus\{p\}$. Esto quiere decir que $\overline{V}$ es un elemento de $\mathcal{F}_A$ que no contiene a p, por lo que $p\in X\setminus\bigcap\mathcal{F}_A$.

Utilizando la Proposición 2.12 junto con la igualdad (2.2) obtenemos que:

$$\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}\big(\bigcap\mathcal{F}_A\big)=\bigcap\{\mathcal{R}(F):F\in\mathcal{F}_A\} \tag{2.3}$$

Recordemos que $x\in X\setminus R$, lo cual significa que para cada $A\in\mathcal{A}$, se tiene que $x\in X\setminus\mathcal{R}(A)$; así pues, utilizando la igualdad en (2.3) concluimos que para cada $A\in\mathcal{A}$, existe $F_A\in\mathcal{F}_A$ tal que $x\in X\setminus\mathcal{R}(F_A)$.
Consideremos la colección $\mathcal{C}:=\{\operatorname{int}(F_A):\ A\in\mathcal{A}\}$ y notemos que $\mathcal{C}$ resulta ser una cubierta abierta de $\bigcup\mathcal{A}$, por lo que existen $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$ tales que:

$$\bigcup\mathcal{A}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{int}(F_{A_i})\subset\bigcup_{i=1}^{n}F_{A_i}.$$

Esta contención y la Proposición 1.2 garantizan que $\mathcal{R}\big(\bigcup\mathcal{A}\big)\subset\mathcal{R}\big(\bigcup_{i=1}^{n}F_{A_i}\big)$. Por otro lado, utilizando nuestra hipótesis original y el principio de inducción, obtenemos que $\mathcal{R}\big(\bigcup_{i=1}^{n}F_{A_i}\big)=\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{R}(F_{A_i})$; luego:

$$\mathcal{R}\big(\bigcup\mathcal{A}\big)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{R}(F_{A_i}). \tag{2.4}$$

Observemos que, como $x\in X\backslash\mathcal{R}(F_{A_i})$ para cada i, la contención (2.4) garantiza que $x\in X\backslash\mathcal{R}\big(\bigcup\mathcal{A}\big)$; lo cual implica que $X\backslash R\subset X\backslash\mathcal{R}(A')$.

Finalmente $\mathcal{R}\big(\bigcup\mathcal{A}\big)=R$, por lo que X es $\mathcal{R}$-aditivo.

†

A fin de encontrar aún mas condiciones que garanticen el que un continuo sea $\mathcal{R}$-aditivo, definimos los siguientes conceptos.

Definición 2.14. Sea X un continuo arco conexo. Entonces, decimos que X es *$\mathcal{R}$-simétrico* si para cualesquiera $A,B\in 2^X$ tales que $A\cap\mathcal{R}(B)\neq\emptyset$, se tiene que $\mathcal{R}(A)\cap B\neq\emptyset$. Por otro lado, decimos que X es *puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico* si para cualesquiera $p,q\in X$ tales que $p\in\mathcal{R}(\{q\})$, se obtiene que $q\in\mathcal{R}(\{p\})$.

Hemos de notar que el que X sea puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico significa que X es $\mathcal{R}$-simétrico en los subconjuntos unitarios.

Por otro lado, no todos los continuos resultan ser $\mathcal{R}$-simétricos, pues en el intervalo I (Ejemplo 1.6), los conjuntos $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]=\mathcal{R}\left(\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}\right)$ se intersectan, mientras que $\left\{\frac{1}{2}\right\}=\mathcal{R}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ y $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$ son ajenos.

A continuación veremos que los continuos $\mathcal{R}$-simétricos también son $\mathcal{R}$-aditivos.

Proposición 2.15. *Sea X un continuo arco conexo. Si X es $\mathcal{R}$-simétrico, entonces X es $\mathcal{R}$-aditivo.*

Demostración. Supongamos que X es $\mathcal{R}$-simétrico y utilicemos la Proposición 2.13 para probar que X es $\mathcal{R}$-aditivo. Tomemos pues $A,B\in 2^X$ y notemos que, por la Proposición 1.2, se obtiene que $\mathcal{R}(A)\cup\mathcal{R}(B)\subset\mathcal{R}(A\cup B)$.

Para mostrar la contención contraria, tomemos $x\in\mathcal{R}(A\cup B)$ y observemos que $\mathcal{R}(\{x\})\cap(A\cup B)\neq\emptyset$ porque X es $\mathcal{R}$-simétrico. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{R}(\{x\})\cap A\neq\emptyset$; lo cual implica que $\{x\}\cap\mathcal{R}(A)\neq\emptyset$. Entonces $x\in\mathcal{R}(A)\cup\mathcal{R}(B)$, así que $\mathcal{R}(A\cup B)\subset\mathcal{R}(A)\cup\mathcal{R}(B)$.

Por la Proposición 2.13 obtenemos que X es $\mathcal{R}$-aditivo. †

Proposición 2.16. *Sea X un continuo arco conexo. Entonces, X es $\mathcal{R}$-simétrico si y sólo si X es puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico y $\mathcal{R}$-aditivo.*

Demostración. Si X es $\mathcal{R}$-simétrico, entonces es inmediato de la Definición 2.14 que X es puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico; además, la Proposición 2.15 implica que X es $\mathcal{R}$-aditivo.

Para probar el regreso, supongamos que X es $\mathcal{R}$-aditivo y puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico. Tomemos elementos $A,B\in 2^X$ tales que $A\cap\mathcal{R}(B)\neq\emptyset$ y probemos que $\mathcal{R}(A)\cap B\neq\emptyset$. Como X es $\mathcal{R}$-aditivo, se tiene que:

$$\mathcal{R}(B)=\bigcup\{\mathcal{R}(\{b\}):b\in B\}.$$

De esta manera, si $x \in A \cap \mathcal{R}(B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $x \in \mathcal{R}(\{b\})$; luego, utilizando que X es puntualmente $\mathcal{R}$-simétrico, obtenemos que $b \in \mathcal{R}(\{x\})$. Como $\{x\} \subset A$, entonces $\mathcal{R}(\{x\}) \subset \mathcal{R}(A)$ (Proposición 1.2), de manera que $b \in \mathcal{R}(A) \cap B$. Esto prueba que $\mathcal{R}(A)$ intersecta a B. Por tanto X es $\mathcal{R}$-simétrico. †

En la introducción mencionamos a la familia de los continuos cíclicamente conexos; y de cómo su investigación dio lugar a nuevas herramientas como la función $\mathcal{R}$. Precisamente, es en esta clase donde se puede asegurar que un continuo es $\mathcal{R}$-aditivo.

Definición 2.17. Sea X un continuo. Decimos que X es cíclicamente conexo si y sólo si para cualesquiera puntos distintos $x, y \in X$, existe una curva cerrada simple $\Gamma \subset X$ que contiene a x y y.

Algunos ejemplos fáciles de continuos cíclicamente conexos son $\mathbb{S}^n$, I^n ($n \geqslant 2$), el Ejemplo 1.9; por otro lado, dos continuos que no satisfacen este tipo de conexidad son el intervalo I y el Círculo de Varsovia. Cabe mencionar que la característica que impide la conexidad cíclica en estos dos ejemplos es la unicidad de los arcos. Precisamente, la conexidad cíclica se puede pensar como el concepto contrario a la arco conexidad única, pues dados dos puntos en un continuo cíclicamente conexo, de una curva cerrada simple que los contiene se pueden tomar dos arcos distintos cuyos puntos extremos son los puntos en cuestión. Otra manera de pensar lo anterior es que, para cualesquiera dos puntos distintos en un continuo cíclicamente conexo, siempre se puede asegurar la existencia de un arco entre los mismos que evada a un tercer punto. Tal resultado es formalizado en la siguiente proposición.

Proposición 2.18. *Sean X un continuo y x, y puntos distintos de X. Si X es cíclicamente conexo, entonces para cualquier $z \in X \setminus \{x, y\}$, existe un arco α que no contiene a z y cuyos puntos extremos son x, y.*

Demostración. Supongamos que X es cíclicamente conexo, tomemos un punto $z \in X \setminus \{x, y\}$ y encontremos un arco que cumpla con las características mencionadas. Por nuestra suposición existe una curva cerrada simple $\Gamma \subset X$ que contiene a los puntos x y y; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe una función $\gamma : I \to \Gamma$ continua y suprayectiva, tal que γ es inyectiva en $I \setminus \{1\}$ y $\gamma(0) = x = \gamma(1)$. Debido a que $y \neq x$, existe $t \in I \setminus \{0, 1\}$ tal que $\gamma(t) = y$. Entonces, definamos $\alpha_1 := \gamma([0, t])$ y $\alpha_2 := \gamma([t, 1])$ y notemos que las características de γ hacen de α_1 y α_2, dos arcos cuyos puntos extremos son precisamente x y y. (Figura 2.7). Si, ninguno de estos arcos contiene a z, entonces hemos acabado. Ahora, supongamos que α_1 contiene a z. Veamos que en este caso, α_2 no puede contener a z. Supongamos pues que $z \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ y observemos que, como z es distinto de x y y, entonces deben de existir $s_1 \in (0, t)$ y $s_2 \in (t, 1)$ tales que $\gamma(s_1) = z = \gamma(s_2)$. Esto implica que γ no es inyectiva en $I \setminus \{1\}$, lo cual es una contradicción al modo en que hemos tomado γ. De esta manera, α_2 no puede contener a z. Hemos de notar que si $z \in \alpha_2$, entonces de manera similar a la anterior se puede corroborar que α_1 no contiene a z.

Esto prueba que existe un arco con las características mencionadas. †

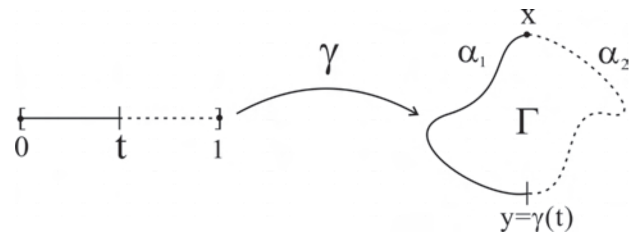

Figura 2.7: Los conjuntos α_1 y α_2

Teorema 2.19. *Sea X un continuo. Si X es cíclicamente conexo, entonces X es $\mathcal{R}$-aditivo.*

Demostración. Supongamos que X es cíclicamente conexo y utilicemos la Proposición 2.13 para probar que X es $\mathcal{R}$-aditivo. Tomemos pues A y B elementos de 2^X. Observemos que, como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, la Proposición 1.2 garantiza que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(A \cup B)$ y $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A \cup B)$; luego, $\mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A \cup B)$.

Para mostrar la contención contraria, utilicemos el Corolario 1.5. Tomemos pues $x \in X \setminus (\mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B))$, lo cual significa que existen subconjuntos arco conexos F, G cuyos interiores contienen a A y cuyas cerraduras evaden a x. Ahora, tomemos $p \in F$ y $q \in G$ y observemos que x es distinto de p y q, pues $x \notin \overline{F}, \overline{G}$; luego, utilizando la Proposición 2.18 podemos encontrar un arco α que no contenga a x y cuyos puntos extremos sean p y q.

Definamos $K := F \cup \alpha \cup G$ y notemos que $A \cup B$ está contenido en el interior de K pues:

$$A \cup B \subset \operatorname{int}(F) \cup \operatorname{int}(G) \subset \operatorname{int}(F \cup G) \subset \operatorname{int}(F \cup \alpha \cup G).$$

También se tiene que $\overline{K}$ no contiene a x, pues $\overline{K}$ coincide con el conjunto $\overline{F} \cup \alpha \cup \overline{G}$ y x no pertenece a ninguno de los uniendos anteriores. Finalmente, K es arco conexo. Esto se sigue del hecho de que la unión de dos conjuntos conexos por trayectorias que se intersectan es también conexo por trayectorias.

Hemos obtenido un conjunto arco conexo K cuyo interior contiene a $A \cup B$ y cuya cerradura evade a x; de manera que por el Corolario 1.5, obtenemos que $\mathcal{R}(A \cup B) \subset \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$.

Finalmente, $\mathcal{R}(A \cup B) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$; y mediante el uso de la Proposición 2.13 concluimos que X es $\mathcal{R}$-aditivo. †

En la introducción mencionamos que $\mathcal{R}$ ha sido producto de la investigación hecha por David P. Bellamy y Lewis Lum [1] acerca de los continuos arco conexos y homogéneos. De hecho, el resultado para el cual se necesitó tal función es el siguiente:

Teorema 2.20. *[1, Teorema 3] Sea X un continuo arco conexo. Si X es homogéneo, entonces X es cíclicamente conexo.*

Corolario 2.21. *[1, Corolario 1] Sea X un continuo arco conexo. Si X es homogéneo, entonces $\mathcal{R}(\{x\}) = \{x\}$ para todo $x \in X$.*

Pues bien, el que la conexidad cíclica implique la $\mathcal{R}$-aditividád del continuo en cuestión, nos permite asegurar que aquellos los continuos arco conexos y homogéneos resultan ser colocalmente arco conexos.

Teorema 2.22. *Sea X un continuo arco conexo. Si X es homogéneo, entonces X es colocalmente arco conexo.*

Demostración. Supongamos que X es homogéneo. Para ver que X es colocalmente arco conexo, utilicemos el Teorema 2.6: tomemos $A \in 2^X$ y mostremos que $\mathcal{R}(A) = A$. Entonces, como X es cíclicamente conexo (Teorema 2.20), se tiene que X es $\mathcal{R}$-aditivo (Proposición 2.19); de manera que:

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup \{\mathcal{R}(\{a\}) : \ a \in A\}.$$

Debido al Corolario 2.21, $\mathcal{R}(\{a\}) = \{a\}$ para todo $a \in A$; luego $\mathcal{R}(A) = A$.

Utilizando entonces el Teorema 2.6, obtenemos que X es colocalmente arco conexo. †

Dejaremos a un lado la conexidad cíclica para dar pie a los resultados acerca de la continuidad de $\mathcal{R}$.

Al final del Capítulo 1 vimos que $\mathcal{R}$ no necesariamente es una función continua, sin embargo, veremos que $\mathcal{R}$ siempre resulta ser una función semicontinua superiormente. Gracias a la Proposición 0.18, la afirmación anterior nos dice que no todo está perdido, pues sólo habría que preocuparse por la semicontinuidad inferior si es que se busca la continuidad de $\mathcal{R}$.

Proposición 2.23. *Sea X un continuo arco conexo. Entonces, $\mathcal{R}$ es una función semicontinua superiormente.*

Demostración. Utilizaremos el Lema 0.17 para probar el enunciado en cuestión: tomemos un abierto $V \subset X$ y probemos que $\mathcal{R}^{-1}(\langle V \rangle)$ es abierto. Entonces, escojamos un $A \in \mathcal{R}^{-1}(\langle V \rangle)$ y consideremos la colección $\mathcal{F}_A$ de todos los elementos de 2^X que contengan a A en su interior. En la Proposición 2.13 hemos visto que $\mathcal{F}_A$ es cerrada bajo intersecciones finitas y que $\bigcap \mathcal{F}_A = A$. Utilizando la Proposición 2.12, obtenemos que:

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}\big(\bigcap \mathcal{F}_A\big) = \bigcap \{\mathcal{R}(F) : \ F \in \mathcal{F}_A\}. \tag{2.5}$$

Consideremos la colección $\mathcal{C} := \{X \setminus \mathcal{R}(F) : \ F \in \mathcal{F}_A\}$ y notemos que $\mathcal{C}$ es una es una cubierta abierta de $X \setminus V$, pues el que A sea elemento de $\mathcal{R}^{-1}(\langle V \rangle)$ y la igualdad (2.5) garantizan que:

$$X \setminus V \subset X \setminus \mathcal{R}(A) = \bigcup \{X \setminus \mathcal{R}(F) : \ F \in \mathcal{F}_A\} = \bigcup \mathcal{C}.$$

Como $X \setminus V$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $F_1 \ldots F_n \in \mathcal{F}_A$ tales que:

$$X \setminus V \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^n X \setminus \mathcal{R}(F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n \mathcal{R}(F_i).$$

Observemos que la contención anterior implica:

$$\textstyle\bigcap_{i=1}^n \mathcal{R}(F_i) \subset V. \tag{2.6}$$

Definamos $U := \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int}(F_i)$ y $\mathcal{U} := \langle U \rangle$. Notemos que $\mathcal{U}$ es un abierto de 2^X por ser un básico de la topología (Proposición 0.14); además, $A \in \mathcal{U}$ pues A esta contenido en el interior de cada F_i. Por otro lado, si B es un elemento de $\mathcal{U}$, entonces $B \subset \operatorname{int}(F_i) \subset F_i$; lo cual implica que $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(F_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esta observación y la contención (2.23) garantizan $\mathcal{R}(B) \subset V$, por lo que $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^{-1}(\langle V \rangle)$.

Hemos obtenido un abierto $\mathcal{U} \subset 2^X$ tal que $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^{-1}(\langle V \rangle)$; así pues, $\mathcal{R}^{-1}(\langle V \rangle)$ es abierto. Finalmente, utilizando el Lema 0.17, concluimos que $\mathcal{R}$ es semicontinua superiormente. †

Proposición 2.24. *Sea X un continuo. Si X es arco conexo y homogéneo, entonces $\mathcal{R}$ es continua.*

Demostración. Según el Teorema 2.22, el que X sea arco conexo y homogéneo implica que X es colocalmente conexo; lo cual hace de $\mathcal{R}$ la función identidad de 2^X (Teorema 2.6). †

Otra clase de continuos en la cual podemos asegurar la continuidad de $\mathcal{R}$ es en la de los localmente conexos; sin embargo, la prueba de tal resultado involucra hablar de una función similar a $\mathcal{R}$.

En el próximo capítulo, hablaremos de la función $\mathcal{K}$ y de su relación con $\mathcal{R}$.

Capítulo 3

La función $\mathcal{K}$ y su relación con $\mathcal{R}$

En 1974, J.T. Goodykoontz Jr. [6] propuso una función $\mathcal{K}$ (originalmente denotada por g) con el objetivo de estudiar los hiperespacios de los continuos hereditariamente unicoherentes. Las definiciones de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}$ son similares, así que es natural preguntarnos si existe alguna relación entre ambas funciones. En este capítulo, estudiaremos algunas propiedades de $\mathcal{K}$ y veremos que, efectivamente, se puede establecer una conexión entre la misma y $\mathcal{R}$.

Definición 3.1. Sea X un continuo. Para todo $A \in 2^X$, consideremos la colección $\mathcal{N}_A$ de todos los subcontinuos de X que contienen a A en su interior. Posteriormente, definamos $\mathcal{K}_A = \bigcap \mathcal{N}_A$.

Proposición 3.2. *Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$. Entonces:*

(i) $\mathcal{K}_A$ está definido.

(ii) $A \subset \mathcal{K}_A$.

(iii) Si $A \subset B$, entonces $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}_B$.

(iv) $\mathcal{K}_A$ es cerrado y no vacío.

Demostración. Observemos que el conjunto $\mathcal{K}_A$ está definido, pues la colección $\mathcal{N}_A$ no es vacía (X es elemento de la colección $\mathcal{N}_A$). Por otro lado, para probar (ii), notemos que por definición, para cada $K \in \mathcal{N}_A$ se tiene que $A \subset \operatorname{int}(K) \subset K$; de manera que $A \subset \bigcap \mathcal{N}_A$.

Para mostrar (iii), primero notemos que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{N}_B \subset \mathcal{N}_A$. En efecto, dado un elemento $K \in \mathcal{N}_B$, como $A \subset B \subset \operatorname{int}(K)$, entonces $K \in \mathcal{N}_A$. Ahora, observemos que $X \setminus \mathcal{K}_B \subset X \setminus \mathcal{K}_A$, pues si p es un elemento de $X \setminus \mathcal{K}_B$, entonces existe $K \in \mathcal{N}_B$ tal que $p \notin K$; y como $K \in \mathcal{N}_A$, se obtiene que $p \in X \setminus \mathcal{K}_A$. Esto prueba que $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}_B$.

Finalmente, $\mathcal{K}_A$ no es vacío pues contiene a A; además, $\mathcal{K}_A$ es cerrado por ser una intersección de cerrados. †

Definición 3.3. Sea X un continuo. Definimos la función $\mathcal{K}: 2^X \to 2^X$ como $\mathcal{K}(A) := \mathcal{K}_A$.

Notemos que $\mathcal{K}$ es efectivamente una función, pues gracias a los incisos (iii) y (iv) de la Proposición 1.2, se tiene que $\mathcal{K}$ es una relación unívoca y bien definida en el codominio sugerido.

Por otro lado, quizá valga la pena comentar lo siguiente. Previo al trabajo de Goodykoontz en continuos hereditariamente unicoherentes, B. Jones [9, Teorema 2] definió una relación K (similar a la función T) para estudiar cierta propiedad, sin embargo, su estudio no se reestringe a los continuos hereditariamente unicoherentes. Posteriormente, W.J. Charatonik [2] mostró que la función g y la relación K coinciden.

A continuación, calcularemos los valores de $\mathcal{K}$ en el Circulo de Varsovia.

Ejemplo 3.4. Consideremos L, G, S, α como en el Ejemplo 1.7; así como el espacio W del mismo. Antes de proceder con el cálculo de $\mathcal{K}$, haremos la siguiente aclaración: dado $(p,q) \in G$, denotaremos por $G(p)$ a la colección de todos los puntos de G que se encuentran a la izquierda de (p,q). Esto quiere decir que $G(p) = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) \ : 0 < x < p\right\}$, además $\overline{G(p)} = G(p) \cup L \cup \{(p,q)\}$.

Tomemos $A := \{(0,0)\}$ y mostremos que $\mathcal{K}(A) = L$. Veamos que $L \subset \mathcal{K}(A)$; consideremos un subcontinuo K que contenga a A en su interior y comprobemos que $L \subset K$. Tomemos un abierto U tal que $(0,0) \in U \subset K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $p_n := \frac{1}{2n\pi}$ y consideremos la sucesión $\{(p_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$. Notemos que la misma está compuesta por puntos de G; además, dicha sucesión converge al punto $(0,0)$, de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(p_s, 0) \in K$ para cualquier $s \leqslant k$.

Observemos que si $G(p_k) \subset K$, entonces $L \subset \overline{G(p_k)} \subset K$; así pues, supongamos que $G(p_k) \not\subset K$. Esto quiere decir que existe un punto (u,v) de $G(p_k)$ tal que $(u,v) \notin K$. Ahora, tomemos $s > k$ tal que $p_s < u$ y veamos que $G(p_s) \subset K$. Supongamos pues que ocurre lo contrario, de manera que existe un punto (a,b) de $G(p_s)$ tal que $(a,b) \notin K$. Entonces, definamos $V_1 := \{(x, \sin\frac{1}{x}) : \ a < x < u\}$ y $V_2 := W \setminus \overline{V_1}$ (Figura 3.1).

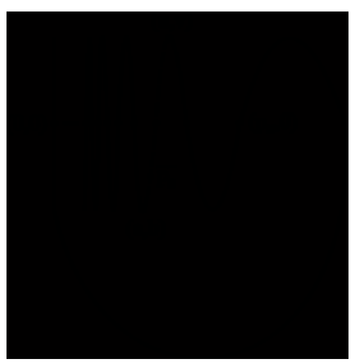

Figura 3.1: Los conjuntos V_1 y V_2

Notemos que V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos ajenos de W; además el punto $\overline{p_s} := (p_s, \sin\frac{1}{p_s})$ es elemento de $V_1 \cap K$, mientras que $(0,0)$ es un punto de $V_2 \cap K$. Por otro lado, $V_1 \cup V_2$ contiene a K pues $V_1 \cup V_2 = W \backslash \{(u,v),(a,b)\}$, con esto tenemos que K es disconexo. Esto es una contradicción, de manera que $G(p_s) \subset K$; luego, $L \subset \overline{G(p_s)} \subset \overline{K} = K$.

Concluimos así que, para cualquier subcontinuo K que contiene a A en su interior, se obtiene que $L \subset K$; lo cual nos asegura que $L \subset \mathcal{K}(A)$.

Por otro lado, veamos que la contención contraria es válida comprobando que $W \backslash L \subset W \backslash \mathcal{K}(A)$. Tomemos entonces $(x,y) \in W \backslash L$ y construyamos un subcontinuo que contenga a $(0,0)$ en su interior pero que evada (x,y). Consideremos un racional q tal que $0 < q < x$ y observemos que $\overline{G(q)}$ es un subcontinuo, pues además de ser un conjunto cerrado, también resulta ser conexo por ser la cerradura de un conexo. Por otro lado $(x,y) \notin \overline{G(q)}$, pues si tomamos el arco $\beta \subset W$ cuyos puntos extremos son $(q, \sin(\frac{1}{q}))$ y $(0,-1)$, entonces $\beta \backslash \{(q,\sin(\frac{1}{q})),(0,-1)\}$ es un conjunto abierto que contiene a (x,y) y que es ajeno a $G(q)$ (Figura 3.2). De esta manera se obtiene que $W \backslash L \subset X \backslash \mathcal{K}(A)$; luego $\mathcal{K}(A) \subset L$. Esto implica que $\mathcal{K}(A) = L$.

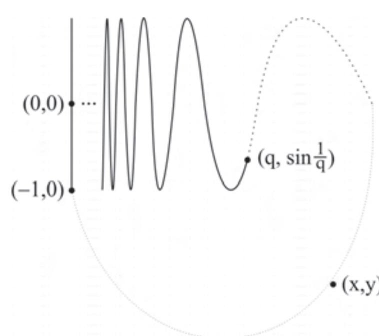

Figura 3.2: El continuo $\overline{G(q)}$ y el arco β.

Es conocido el hecho de que en general, la intersección de dos subcontinuos no necesariamente es conexa; de manera que no podemos esperar que $\mathcal{K}(A)$ resulte ser un subcontinuo. El siguiente ejemplo muestra tal observacón.

Ejemplo 3.5. Consideremos a X como la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Definamos el conjunto $A := \{(-1,0),(1,0)\}$ y veamos que $\mathcal{K}(A) = A$. Notemos que debido a la Proposición 3.2, para probar la igualdad anterior, basta ver $\mathcal{K}(A) \subset A$. Entonces, tomemos $x \in X \backslash A$ y encontremos algún subcontinuo de X que contenga a A en su interior pero que evada a x. Sea pues $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Entonces, $X \backslash B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ es un subcontinuo de X que contiene a A en su interior pero que evade a x; de manera que $x \notin \mathcal{K}(A)$. Finalmente, $\mathcal{K}(A) \subset A$; lo cual prueba que $\mathcal{K}(A) = A$. Ahora, notemos que A no es conexo, por lo que $\mathcal{K}(A)$ no es un subcontinuo de X.

Si lo que buscamos es asegurar el que $\mathcal{K}(A)$ es un subcontinuo de X, entonces deberíamos pedir que la intersección de cualesquiera dos subcontinuos sea conexa; lo cual es equivalente a pedir que el continuo X sea hereditariamente unicoherente (Proposición 0.10). Además de probar esta afirmación, veremos que la unicoherencia hereditaria también implica la semicontinuidad superior de $\mathcal{K}$.

Lema 3.6. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Si X es hereditariamente unicoherente, entonces para cualquier abierto U tal que $\mathcal{K}(A) \subset U$, existe $K \in \mathcal{N}_A$ tal que $K \subset U$.*

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente unicoherente. Notemos que $\mathcal{N}_A$ es cerrada bajo intersecciones finitas, pues para cualesquiera $H, J \in \mathcal{N}_A$, se obtiene que $A \subset \text{int}(H) \cap \text{int}(J) \subset \text{int}(H \cap J)$; además, la Proposición 0.10 garantiza que $H \cap J$ es un subcontinuo de X. De esta manera, si U es un abierto que contiene a $\mathcal{K}(A)$, entonces la Proposición 0.6 garantiza la existencia de $K \in \mathcal{N}_A$ tal que $K \subset U$. †

Proposición 3.7. *Sea X un continuo y $A \in 2^X$. Si X es hereditariamente unichoerente, entonces $\mathcal{K}(A)$ es un subcontinuo.*

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente unicoherente. Ya hemos visto que $\mathcal{K}(A)$ es cerrado y no vacío (Proposición 3.2); además $\mathcal{K}(A)$ es un subconjunto de un espacio métrico. Solo resta ver que $\mathcal{K}(A)$ es conexo.

Supongamos que $\mathcal{K}(A)$ es disconexo; de manera que existen abiertos ajenos no vacíos U y V tales que:

(i) $\mathcal{K}(A) \subset U \cup V$

(ii) $U \cap \mathcal{K}(A) \neq \emptyset \neq V \cap \mathcal{K}(A)$

Utilizando el Lema 3.6 en (i) podemos encontrar $K \in \mathcal{N}_A$ tal que $K \subset U \cup V$. Como $\mathcal{K}(A) \subset K$, (ii) nos permite concluir que U y V intersectan a K. Esto implica que K es disconexo, pero esto es imposible pues K es un subcontinuo de X. Finalmente, $\mathcal{K}(A)$ debe de ser conexo.

Esto prueba que $\mathcal{K}(A)$ es un subcontinuo de X †

Proposición 3.8. *Sea X un continuo. Si X es hereditariamente unicoherente, entonces $\mathcal{K}$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente unicoherente. Sea $A \in 2^X$ y $V \subset X$ abierto tal que $\mathcal{K}(A) \subset V$. Encontremos un abierto $\mathcal{U}$ de 2^X que contenga a A y tal que $\mathcal{K}(B) \subset V$ para todo $B \in \mathcal{U}$. Por el Lema 3.6 existe $K \in \mathcal{N}_A$ tal que $K \subset V$. Definamos $\mathcal{U} := \langle \text{int}(K) \rangle$ y notemos que $A \in \mathcal{U}$ pues A está contenido en el interior de K. Por otro lado, si $B \in \mathcal{U}$, entonces K es un elemento de $\mathcal{N}_B$, de manera que $\mathcal{K}(B) \subset K \subset V$. Esto prueba que $\mathcal{K}$ es semicontinua superiormente. †

Proposición 3.9. *Sea X un dendroide. Si para todo $x \in X$ se tiene que $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente en $\{x\}$, entonces $\mathcal{K}$ es continua.*

Demostración. Supongamos que para todo $x \in X$, se tiene que $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente en $\{x\}$. Como X es hereditariamente unicoherente, entonces $\mathcal{K}$ es semicontinua superiormente (Proposición 3.8); así pues, para mostrar que $\mathcal{K}$ es continua basta comprobar que $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente (Proposición 0.18). Tomemos pues $A \in 2^X$ y un abierto V tales que $\mathcal{K}(A) \cap V \neq \emptyset$. Construiremos un abierto $\mathcal{U}$ de 2^X tal que $A \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$ para cualquier $B \in \mathcal{U}$. Definamos $J := \bigcup_{a \in A} \mathcal{K}(\{a\})$ y analicemos dos casos.

Caso 1: $V \cap \overline{J} \neq \emptyset$. En este caso se tiene que $V \cap J \neq \emptyset$, de manera que existe $p \in A$ tal que $V \cap \mathcal{K}(\{p\}) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente en $\{p\}$, existe un abierto $\mathcal{U}'$ tal que $\{p\} \in \mathcal{U}'$ y $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{U}'$. Por el Teorema 0.14, podemos encontrar abiertos $U_1, \ldots, U_n$ tales que $\{p\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}'$. Definamos $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$ y notemos que U es un subconjunto abierto de X que contiene a p. Ahora, consideremos $\mathcal{U} := \langle U, X \rangle$ y veamos que $\mathcal{U}$ cumple con lo requerido. Tenemos que $\mathcal{U}$ es abierto por ser un básico de la topología de 2^X (Proposición 0.14); además, $A \in \mathcal{U}$ pues p es un punto tanto de A como de U. Si $B \in \mathcal{U}$, entonces existe $b \in B \cap U$; luego $\{b\} \in \langle U \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}'$. Entonces $\{b\}$ es elemento de $\mathcal{U}'$; así pues, $\mathcal{K}(\{b\})$ intersecta a V. Como $\mathcal{K}(\{b\}) \subset \mathcal{K}(B)$ (Proposición 3.2), entonces $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$.

Caso 2: $V \cap \overline{J} = \emptyset$. En este caso se tiene que $X \setminus V$ es un cerrado que contiene a J. Tomemos un abierto W tal que $J \subset \overline{J} \subset W \subset \overline{W} \subset X \setminus V$ y observemos que, debido a la definición de J, para cada $a \in A$ se tiene que $\mathcal{K}(\{a\}) \subset W$. Como $\mathcal{K}$ es semicontinua superiormente en los unitarios, para cada $a \in A$, existe un abierto $\mathcal{U}_a$ tal que $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ y $\mathcal{K}(B) \subset W$ para cualquier $B \in \mathcal{U}_a$. Por la Proposición 0.14, para cada $a \in A$ existen abiertos $U_1^a, \ldots, U_{m_a}^a$ tales que $\{a\} \in \langle U_1^a, \ldots, U_{m_a}^a \rangle \subset \mathcal{U}_a$. Definamos el conjunto $W_a := \bigcap_{i=1}^{m_a} U_i^a$ y notemos que la colección de todos los conjuntos W_a forma una cubierta abierta de A, de manera que existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}$. Consideremos $\mathcal{U} := \langle W_{a_1}, \ldots, W_{a_n} \rangle$ y observemos que $A \in \mathcal{U}$; además, $\mathcal{U}$ es abierto por ser básico de la topología de 2^X.

Resta ver que $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{U}$. Tomemos pues $B \in \mathcal{U}$ y notemos que para cada $i \in \{1 \ldots, n\}$, existe $b_i \in B \cap W_{a_i}$. De esta manera, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos definir el siguiente conjunto:

$$D_i := \bigcup \{\mathcal{K}(\{b_i, d\}) : \ d \in W_{a_i}\}$$

Notemos lo siguiente:

(i) D_i es conexo. En efecto, como X es herditariamente unicoherente, entonces $K(\{b_i, d\})$ es conexo para todo $d \in W_{a_i}$ (Proposición 3.7). Por otro lado, para cualquier $d \in W_{a_i}$ se tiene que $\{b_i\} \subset \mathcal{K}(\{b_i\}) \subset \mathcal{K}(\{b_i, d\})$; así pues, D_i es la unión de una familia de conjuntos conexos cuya intersección no es vacía.

(ii) $D_i \subset W$. Esto es cierto pues $\{b_i, d\} \in \langle W_{a_i} \rangle \subset \langle U_1^{a_i}, \ldots, U_{m_{a_i}}^{a_i} \rangle \subset \mathcal{U}_{a_i}$; de manera que $\mathcal{K}(\{b_i, d\}) \subset W$ para cada $d \in W_{a_i}$.

(iii) $W_{a_i} \subset D_i$ pues si $w \in W_{a_i}$, entonces $\{w\} \subset \mathcal{K}(\{w\}) \subset \mathcal{K}(\{b_i, w\}) \subset D_i$.

(iv) $D_i \cap \mathcal{K}(B) \neq \emptyset$. Esto es cierto pues $\{b_i\} = \mathcal{K}(\{b_i\}) \cap \mathcal{K}(B) \subset D_i \cap \mathcal{K}(B)$.

Definamos $D := \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D_i}$ y hagamos $C = D \cup \mathcal{K}(B)$. Observemos que C es cerrado. Por (iii), A está contenido en el interior de D, así que A esta contenido en el interior de C.

Veamos que C es conexo. Para probar esta afirmación primero notemos que $C = \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{D_i} \cup \mathcal{K}(B))$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\overline{D_i} \cup \mathcal{K}(B)$ es conexo, pues $\overline{D_i}$ es conexo por (i), $\mathcal{K}(B)$ es conexo por la Proposición 3.7, y según (iv), la intersección entre ambos conjuntos no es vacía. Entonces, C es una unión de subconjuntos conexos que contienen a $\mathcal{K}(B)$; de manera que C es conexo.

Como C es un subcontinuo de X que contiene a A en su interior, se obtiene que $\mathcal{K}(A) \subset C$; y recordando que V intersecta a $\mathcal{K}(A)$, se puede asegurar que $V \cap (D \cup \mathcal{K}(B)) \neq \emptyset$. Observemos que V y D son ajenos, pues (ii) garantiza que $D \subset X \setminus V$; luego $V \cap \mathcal{K}(B) \neq \emptyset$.

En los dos casos hemos podido construir un abierto $\mathcal{U}$ tal que $A \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$ para cualquier $B \in \mathcal{U}$. Con esto tenemos que $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente. Finalmente, la función $\mathcal{K}$ es continua por ser semicontinua superiormente e inferiormente. †

Por el momento, dejaremos de lado la continuidad de $\mathcal{K}$ para establecer la relación entre dicha función y $\mathcal{R}$. Notemos que en los continuos arco conexos, la función $\mathcal{K}$ no necesariamente coincide con $\mathcal{R}$, pues en el circulo de Varsovia hemos visto que $\mathcal{K}(\{(0,0)\}) = L$, mientras que $\mathcal{R}(\{(0,0)\}) = W$ (Ejemplos 1.7 y 3.4). Sin embargo, algo que podemos garantizar es que $\mathcal{R}(A)$ contiene a $\mathcal{K}(A)$.

A continuación, además de probar la afirmación anterior, veremos que tanto en la clase de los continuos localmente conexos como en los dendroides se obtiene la igualdad entre ambas funciones.

Proposición 3.10. *Sea X un continuo arco conexo. Entonces $\mathcal{K}(A) \subset \mathcal{R}(A)$ para todo $A \in 2^X$.*

Demostración. Notemos que la cerradura de cualquier elemento $K \in \mathcal{V}_A$ contiene a $\mathcal{K}(A)$, pues $\overline{K}$ es un subcontinuo debido a que K es arco conexo y $\overline{K}$ contiene a A en su interior ($A \subset \text{int}(K) \subset \text{int}(\overline{K})$). Entonces, por la definición de $\mathcal{R}(A)$ se tiene que $\mathcal{K}(A) \subset \mathcal{R}(A)$. †

Proposición 3.11. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces $\mathcal{K} = \mathcal{R}$.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Antes que nada, notemos que X es arco conexo (Teorema 0.8), de modo que no tenemos impedimento alguno para definir la función $\mathcal{R}$. Ahora, tomemos $A \in 2^X$ y veamos que $\mathcal{K}(A) = \mathcal{R}(A)$. Notemos que por la Proposición 3.10, para obtener dicha igualdad basta comprobar que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{K}(A)$. Pues bien, utilicemos la Proposición 1.5 para obtener dicho resultado.

Sea $x \in X \setminus \mathcal{K}(A)$. Entonces, existe un subcontinuo K que contiene a A en su interior y tal que $x \notin K$. Por el Teorema 2.3, se tiene que $\mathcal{R}(K) = K$; de manera que x es un punto de $X \setminus \mathcal{R}(K)$. Esto quiere decir que existe un subconjunto arco conexo J que contiene a K en su interior y tal que $x \notin \overline{J}$. Notemos que J contiene a A en su interior, pues $A \subset \operatorname{int}(K) \subset K \subset \operatorname{int}(J)$.

Hemos encontrado un subconjunto arco conexo de X que contiene a A en su interior pero que no contiene a x en su cerradura; así pues, por el Corolario 1.5 se tiene que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{K}(A)$. Por tanto, $\mathcal{K}(A) = \mathcal{R}(A)$ para cualquier $A \in 2^X$.

†

Proposición 3.12. *Sea X un continuo. Si X es un dendroide entonces $\mathcal{K} = \mathcal{R}$.*

Demostración. Supongamos que X es un dendroide. Tomemos $A \in 2^X$ y veamos que $\mathcal{R}(A) = \mathcal{K}(A)$. Notemos que por la Proposición 3.10, para obtener dicha igualdad basta comprobar que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{K}(A)$. Utilicemos entonces el Cororlario 1.5 para obtener dicha contención.

Sea x un elemento de $X \setminus \mathcal{K}(A)$. Esto quiere decir que existe un subcontinuo K que contiene a A en su interior y tal que $x \notin K$. Notemos que K es un dendroide por ser subcontinuo de un dendroide (Proposición 0.11); de manera que K es arco conexo. Esto quiere decir que K es un subconjunto arco conexo cuyo interior contiene a A y cuya cerradura evade a x (la cerradura de K coincide con K pues tal subconjunto es cerrado).

Finalmente, la Proposición 1.5 nos permite concluir que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{K}(A)$; luego, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{K}(A)$ para cualquier $A \in 2^X$. Esto significa que las funciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}$, coinciden. †

Corolario 3.13. *Sea X un dendroide. Si, para todo $x \in X$, $\mathcal{R}$ es continua en $\{x\}$, entonces $\mathcal{R}$ es continua.*

Demostración. Como X es un dendroide, se tiene que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{R}$ coinciden (Proposición 3.12). Utilizando la Proposición 3.9 se obtiene el resultado enunciado. †

El siguiente resultado es que, en la clase de los continuos localmente conexos, $\mathcal{K}$ resulta ser continua. Esto es una consecuencia de que en dicha familia, $\mathcal{K}(A)$ tiene una forma determinada.

A continuación veremos los resultados necesarios para probar estas afirmaciones. Utilizaremos los conceptos de punto de corte y punto de separación; las definiciones de los mismos se pueden encontrar en la sección 0.2 del capítulo de preliminares. Recordamos al lector que para cualquier continuo X y cada $A \in 2^X$, la colección de puntos que separan a A es denotada por C_A.

Proposición 3.14. *Sean X un continuo, A un elemento de 2^X y p un punto de X. Si p separa a A, entonces p es de corte.*

Demostración. Supongamos que p separa a A, por lo que existen $U, V \subset X$ abiertos ajenos que intersectan a A y tales que $U \cup V = X \setminus \{p\}$. Notemos que U y V son abiertos del subespacio $X \setminus \{p\}$, pues el conjunto base del mismo resulta ser abierto en X; además, U y V no pueden ser vacíos pues ambos intersectan a A.

De esta manera hemos encontrado un par de subconjuntos abiertos no vacíos de $X\setminus\{p\}$ cuya unión coincide con $X\setminus\{p\}$. Esto significa que $X\setminus\{p\}$ es disconexo; luego, p es de corte. †

Proposición 3.15. *Sea X un continuo. Entonces, para todo $A \in 2^X$, se tiene que $A \cup C_A \subset \mathcal{K}(A)$.*

Demostración. Sea A un elemento de 2^X. Notemos que $A \subset \mathcal{K}(A)$ (Proposición 3.2); así pues, solo resta ver que $C_A \subset \mathcal{K}(A)$. Tomemos pues $p \in C_A$ y comprobemos que para todo subcontinuo K que contenga a A en su interior, se tiene que $p \in K$.

Supongamos que existe un subcontinuo K que contiene a A en su interior y tal que $p \in X\setminus K$. Como p separa a A, entonces existen abiertos ajenos U, V que intersectan a A y tales que $X\setminus\{p\} = U \cup V$. Ahora, como K es un conexo tal que $K \subset X\setminus\{p\}$, entonces $K \subset U$ o $K \subset V$; sin embargo, K contiene a A. Esto significa que $A \subset U$ o $A \subset V$; pero esto es imposible pues U y V son ajenos.

De esta manera, para cualquier subcontinuo K que contenga a A, se tiene que $p \in K$; así pues, $p \in \mathcal{K}(A)$. Esto nos permite concluir que $C_A \subset \mathcal{K}(A)$. Por tanto, $A \cup C_A \subset \mathcal{K}(A)$ para cualquier A elemento de 2^X. †

Lema 3.16. *Sean X un continuo localmente conexo y A un elemento de 2^X. Si x es un punto de $\mathcal{K}(A)$ tal que $x \notin A$, entonces x es de corte.*

Demostración. Tomemos $x \in \mathcal{K}(A)$ tal que $x \notin A$ y supongamos que x no es de corte. Notemos que $X\setminus A$ es subconjunto abierto que contiene a x, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset \overline{B_\varepsilon(x)} \subset X\setminus A$. Entonces, por la Proposición 0.9, existe un abierto W que contiene a x, cuyo complemento es conexo y cuyo diámetro es menor a ε. Entonces, $W \subset B_\epsilon(x)$; de manera que $\overline{W} \subset \overline{B_\epsilon(x)}$. Esto implica que $W \subset \overline{W} \subset X\setminus A$, lo cual garantiza que:

$$A \subset X\setminus\overline{W} \subset X\setminus W \tag{3.1}$$

Recordemos que $X\setminus W$ es conexo y cerrado, por lo que es un subcontinuo de X; además, por (3.1) se tiene que $X\setminus W$ contiene a A en su interior. Esto implica que $\mathcal{K}(A) \subset X\setminus W$, por lo que $x \in X\setminus W$. Esto es una contradicción pues $x \in W$.

Hemos probado que x es un punto es de corte. †

Teorema 3.17. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces, para cualquier A elemento de 2^X se tiene que $\mathcal{K}(A) = A \cup C_A$.*

Demostración. Sea A elemento de 2^X. Observemos que por la Proposición 3.15, para comprobar la igualdad enunciada basta ver que $\mathcal{K}(A) \subset A \cup C_A$; así pues, tomemos $x \in \mathcal{K}(A)$ y supongamos que $x \notin A \cup C_A$. Entonces, por el Lema 3.16, obtenemos que x es un punto de corte; luego $X\setminus\{x\}$ es disconexo. Denotemos por $\mathcal{C}$ a la colección de componentes de $X\setminus\{x\}$, y notemos que como X es localmente conexo, entonces $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X que cubren a $X\setminus\{x\}$ (Teorema 0.4). Como $X\setminus\{x\}$ contiene a A, entonces debe de existir alguna componente C que intersecte a A. Afirmamos que $A \subset C$. Para probar dicho enunciado, supongamos lo contrario denotemos por $\mathcal{C}'$ a la colección de todas las componentes de $X\setminus\{x\}$ distintas a C. Definamos $D:=\bigcup\mathcal{C}'$ y notemos que C, D son dos subconjuntos abiertos ajenos de X tales que $X\setminus\{x\}=C\cup D$. Como $A\not\subset C$, entonces A intersecta tanto a C como a D, por lo que x separa a A. Esto es una contradicción a nuestra suposición original de que $x\notin C_A$, de manera que $A\subset C$.

Como C es un abierto que contiene a A, para cada $a\in A$ existe un abierto W_a tal que $a\in W_a\subset\overline{W_a}\subset C$. Por otro lado, X es localmente conexo, así que existe un subconjunto abierto conexo O_a tal que $a\in O_a\subset W_a$. De esta manera, para cada $a\in A$, existe un subconjunto abierto conexo O_a tal que $a\in O_a\subset\overline{O_a}\subset C$. Por la compacidad de A, existen $n\in\mathbb{N}$ y $a_1,\ldots,a_n\in A$ tales que:

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n} O_{a_i} \tag{3.2}$$

Ya que C es arco conexo por ser un subconjunto abierto de un espacio localmente conexo (Teorema 0.8); así pues, para cada $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ podemos tomar el arco $\alpha_i\subset C$ cuyos puntos extremos sean a_i, a_{i+1}.

Definamos:

$$K:=\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}\overline{O_{a_i}}\cup\alpha_i\right)\cup\overline{O_{a_n}}$$

Observemos que K es cerrado por ser una unión finita de subconjuntos cerrados; además, K es conexo por ser una unión finita de conjuntos conexos que se intersectan consecutivamente. Por otro lado, la contención (3.2) garantiza que A está contenido en el interior de K; y $x\notin K$ puesto todos los uniendos que constituyen a K son subconjuntos de $X\setminus\{x\}$. Así pues, K es un subcontinuo que contiene a A en su interior y que evade a x, por lo que $x\notin\mathcal{K}(A)$; sin embargo, esto es una contradicción. Por tanto $x\in A\cup C_A$, lo cual implica que $\mathcal{K}(A)\subset A\cup C_A$.

Hemos probado que $\mathcal{K}(A)=A\cup C_A$ para cualquier $A\in 2^X$. †

Teorema 3.18. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces $\mathcal{K}$ es continua.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Según la Proposición 0.18, para comprobar que $\mathcal{K}$ es continua, basta ver que tal función es semicontinua inferior y superiormente. Comprobemos que $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente utilizando el Lema 0.17. Tomemos un abierto V y $A\in\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$, lo cual significa que $\mathcal{K}(A)\cap V\neq\emptyset$. Debido a que $\mathcal{K}(A)=A\cup C_A$ (Teorema 3.17), se obtiene que $(A\cup C_A)\cap V\neq\emptyset$; luego $A\cap V\neq\emptyset$ o $C_A\cap V\neq\emptyset$. Ahora, veamos pues que en cada caso, A resulta ser un punto interior de $\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$.

Supongamos que $A\cap V$ no es vacío; de manera que $A\in\langle V, X\rangle$. Notemos que $\langle V, X\rangle\subset\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$, pues dado $B\in\langle V, X\rangle$, como $B\cap V\neq\emptyset$ y $B\subset\mathcal{K}(B)$, entonces $\mathcal{K}(B)\cap V\neq\emptyset$. De esta manera, $\langle V, X\rangle$ es un subconjunto abierto que contiene a A y que está contenido en $\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$, por lo que A es un elemento interior de $\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$.

Ahora, supongamos que $C_A\cap V$ no es vacío; de modo que existe un punto $x\in C_A\cap V$. Tal punto separa a A, por lo que existen abiertos ajenos O y W que intersectan a A y tales que $X\setminus\{x\}=O\cup W$. Definamos el conjunto $\mathcal{U}:=$

$\langle O \cup V, X\rangle \cap \langle W \cup V, X\rangle$ y notemos que $\mathcal{U}$ es abierto por ser la intersección de dos básicos; además, $A \in \mathcal{U}$ pues las intersecciones $A \cap O$ y $A \cap W$ no son vacías.

También se tiene que $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$. Para comprobarlo, tomemos $B \in \mathcal{U}$ y supongamos que $B \cap V$ es vacío (si ocurriese que $B \cap V \neq \emptyset$, como $B \subset \mathcal{K}(B)$, entonces se obtendría que $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$; lo cual aseguraría que $B \in \mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$). Debido a la definición de $\mathcal{U}$, se obtiene que $B \cap (O \cup V)$ y $B \cap (W \cup V)$ no son vacíos; pero B y V son ajenos, así que $B \cap O$ y $B \cap W$ no pueden ser vacíos. De esta manera, O y W resultan ser subconjuntos abiertos ajenos que intersectan a B y cuya unión coincide con $X \setminus \{x\}$; lo cual quiere decír x separa a B. Esta observación y el Teorema 3.17 nos permiten concluir que $x \in \mathcal{K}(B)$, por lo que $\mathcal{K}(B) \cap V \neq \emptyset$; luego, $B \in \mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$. Esto concluye que $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$.

Hemos visto que, en ambos casos, A es un punto interior de $\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$; de modo que $\mathcal{K}^{-1}(\langle V, X\rangle)$ es abierto. Utilizando el Lema 0.17 se obtiene que $\mathcal{K}$ es semicontinua inferiormente. Resta ver que $\mathcal{K}$ es semicontinua superiormente, pero como X es localmente conexo, entonces $\mathcal{K}$ y $\mathcal{R}$ coinciden (Proposición 3.11); y como $\mathcal{R}$ es semicontinua superiormente (Proposición 2.23), entonces $\mathcal{K}$ también lo es. Finalmente, como $\mathcal{K}$ es semicontinua superior e inferiormente, entonces $\mathcal{K}$ es continua. †

Corolario 3.19. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces:*

(i) $\mathcal{R}(A) = A \cup C_A$ *para todo A elemento de* 2^X.

(ii) $\mathcal{R}$ *es continua.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo; entonces $\mathcal{R} = \mathcal{K}$ (Proposición 3.11). Por el Teorema 3.17, $\mathcal{K}(A) = A \cup C_A$ para cualquier $A \in 2^X$, por lo que se obtiene (i). Por otro lado, $\mathcal{K}$ es continua (Teorema 3.18); por lo cual se cumple (ii). †

Hemos de notar que en la prueba del Teorema 3.18, para mostrar que $\mathcal{K}$ es semicontinua superiormente, hemos utilizado el hecho de que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{K}$ coinciden en los continuos localmente conexos; sin embargo, existen pruebas independientes de la relación entre ambas funciones (ver [11]). Por otro lado, tanto la Proposición 3.15 como los Teoremas 3.17 y 3.18 han sido extraidos de la tesis doctoral de Sandra Gorka [7]. Tal documento contiene una gran cantidad de resultados tanto de la función $\mathcal{K}$ como de otras funciones similares ($\mathcal{R}$ no se incluye pues la invención de la misma fue posterior al trabajo hecho por Gorka).

Bibliografía

[1] Bellamy, D., and Lum, L. *The Cyclic Connectivity of Homogeneous Arcwise Connected Continua.* Transactions of the American Mathematical Society *266*, 2 (1981), 389–396.

[2] Charatonik, W. J. *Some Functions on Hyperspaces of Continua.* Topology and its Applications *22*, 3 (1986), 211–221.

[3] Dugundji, J. *Topology.* Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Allyn and Bacon, 1966.

[4] Engelking, R. *General Topology*, vol. 6 of Sigma Series in Pure Mathematics. 1989.

[5] Espinoza, B., and Macías, S. *On the set function R.* Topology and its Applications *154*, 16 (2007), 2988–2996.

[6] Goodykoontz Jr., J. T. *Some Functions on Hyperspaces of Hereditarily Unicoherent Continua.* Fundamenta Mathematicae *95*, 1 (1977), 1–10.

[7] Gorka, S. *Serval Set Functions and Continuous Maps.* PhD thesis, University of Delaware, 1997.

[8] Hocking, J. G., and Young, G. S. *Topology.* Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 1961.

[9] Jones, F. B. *Concerning Non-Aposyndetic Continua.* American Journal of Mathematics *70*, 2 (1948), 403–413.

[10] McAllister, B. L. *Cyclic Elements in Topology, A History.* The American Mathematical Monthly *73*, 4 (1966), 337–350.

[11] Moreland Jr., W. T. *Some Properties of Four Set Valued Set Functions.* Master's thesis, University of Delaware, 1970.

[12] Nadler Jr., S. B. *Continuum Theory: An Introduction.* Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1992.

[13] Whyburn, G. T. *Concerning Certain Kinds of Continuous Curves and Other Continua.* Bulletin of the American Mathematical Society *33* (1927), 657.

[14] Whyburn, G. T. *Concerning Continua in the Plane.* Transactions of the American Mathematical Society *29*, 2 (1927), 369–400.

[15] Whyburn, G. T. *Cyclicly Connected Continuous Curves.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America *13*, 2 (1927), 31–38.

[16] Whyburn, G. T. *Some Properties of Continuous Curves.* Bulletin of the American Mathematical Society *33*, 3 (05 1927), 305–308.

[17] Willard, S. *General Topology.* Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 1970.