



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**MOVIMIENTOS COREOGRÁFICOS EN EL PROBLEMA DE
N-CUERPOS: UN ENFOQUE VARIACIONAL**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA
REYNALDO CASTANEIRA RAMÍREZ

DIRECTOR
DR. PABLO PADILLA LONGORIA
IIMAS, UNAM

COMITÉ TUTOR
DR. HÉCTOR FIDENCIO SÁNCHEZ MORGADO
IMATE, UNAM

DR. RENATO GABRIEL ITURRIAGA ACEVEDO
CIMAT



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia, en especial: a Tere y Hannia, mi esposa e hija,
por ser mi compañía y motivación.*

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mis directores de tesis: Dr. Pablo Padilla Longoria y Dr. Héctor F. Sánchez Morgado, por su amistad, apoyo y paciencia a lo largo del desarrollo de este trabajo. Personal y académicamente son personas que admiro y de las cuales he aprendido mucho. Es sorprendente su entrega y pasión hacia la matemática. Estoy seguro que sin la colaboración de alguno de ellos este trabajo no hubiese sido posible.

Agradezco a los siguientes investigadores que fungieron como sinodales de mi tesis: Dr. Joaquín Delgado Fernández. (UAM-I), Dr. Ernesto Pérez Chavela (ITAM), Dr. Carlos García Azpeitia (Facultad de Ciencias, UNAM). Al Dr. Renato G. Iturriaga Acevedo (CIMAT) que formó parte del comité tutor.

También quiero aprovechar este espacio para agradecer al Dr. Rolando Jiménez Benítez, que en su momento me alentó y apoyó mucho para estudiar la maestría.

Por último, pero no menos importante, a mis padres: Reynaldo Castaneira González y Francisca Ramírez Pérez, por haberme dado la oportunidad de estudiar. Su confianza y apoyo incondicional han sido el motor que me impulsa a seguir superando metas.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Cálculo de variaciones	1
1.1.1. Diferenciabilidad	2
1.1.2. Espacios de funciones	5
1.1.3. Ecuación de Newton	7
1.1.4. El método directo del cálculo de variaciones	9
1.1.5. Principio de Simetría Crítica	13
1.2. El problema de N -cuerpos	15
1.2.1. Integrales de movimiento	16
1.2.2. Configuraciones centrales y soluciones homográficas	17
1.2.3. Soluciones coreográficas	20
1.3. Enfoque variacional en la búsqueda de soluciones periódicas para el problema de N -cuerpos	23
1.3.1. Coercitividad del funcional de acción	24
1.3.2. Semicontinuidad inferior débil de la acción	25
1.3.3. Mínimos de la acción y equilibrios relativos	27
2. Problema de 4-cuerpos	29
2.1. Existencia de mínimos	34
2.2. Exclusión de curvas con colisiones	37
2.2.1. Cotas inferiores para soluciones generalizadas de 4 cuerpos.	41

2.2.2. Exclusión de curvas con colisiones mediante curvas de prueba. . .	42
2.3. Falla de perturbación local dado la restricción topológica	44
3. Coreografías continuas	52
3.1. La ecuación de movimiento	53
3.2. Enfoque variacional de las coreografías continuas	56
3.3. Coreografía circular	58

Prólogo

El objetivo de la presente tesis es el estudio de soluciones coreográficas en el problema de N -cuerpos con potencial homogéneo de grado α , $\alpha < 0$, mediante un enfoque variacional. En especial, consideramos el problema con masas iguales cuando $N \rightarrow \infty$ bajo la restricción de coreografía y $\alpha \in (-1, 0)$. En este caso estudiamos una ecuación integro-diferencial asociada que los movimientos deben satisfacer, con soluciones llamadas *coreografías continuas* correspondientes a coreografías límite.

La historia del problema de N -cuerpos se remonta a los tiempos de la formulación de la ley de gravitación de Newton (1667). En la travesía de resolver el problema se han empleado y desarrollado algunas ramas de la matemática. Este tema también ha atraído la atención de varias de las personas más prodigiosas en la historia de la humanidad tales como Euler, Lagrange, Laplace, Poincaré, entre otros. Sin embargo, aunque se han presentado avances sustanciales, existen preguntas centrales que hoy en día siguen sin respuesta [30].

Antes de 1993, a excepción del problema de 2 cuerpos el cual se puede resolver completamente, para $N \geq 3$ se conocían muy pocas soluciones. En particular, para el caso de 3 cuerpos se conocían dos soluciones: la solución colineal de Euler (1767), donde los cuerpos se mueven proporcionalmente sobre una línea recta fija y la solución de Lagrange (1772), en la que los cuerpos se encuentran localizados en los vértices de un triángulo equilátero que rota con velocidad constante.

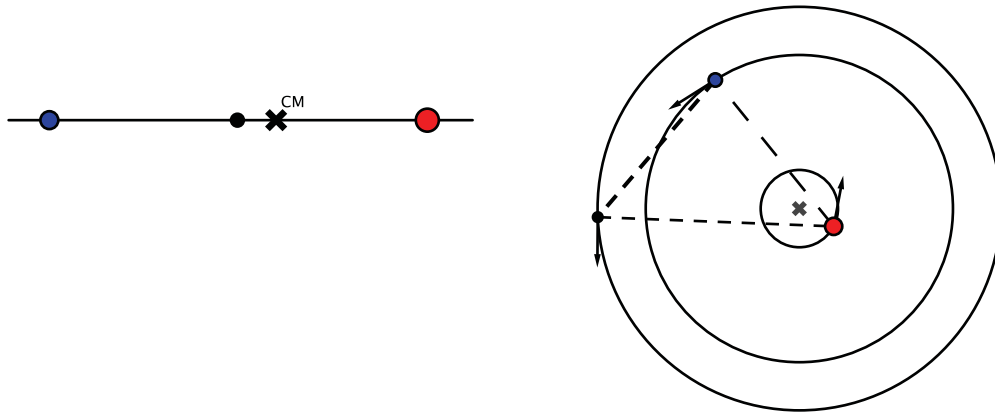


Figura 0-1: Solución de Euler y Lagrange respectivamente.

Fue hasta la última década del siglo XX cuando se probó la existencia de una nueva curva solución, cuya órbita tiene forma de “figura-8”, para el problema de tres cuerpos con masas iguales en el plano, sobre la cual todos los cuerpos se persiguen uno al otro sin chocar.

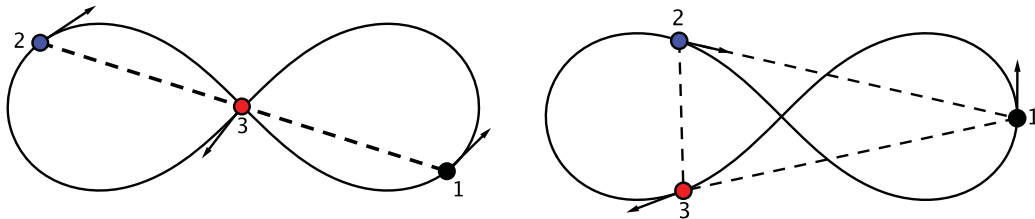


Figura 0-2: Solución coreográfica, “figura-8”.

C. Moore en [31] dio evidencia numérica de la existencia de esta solución y posteriormente de manera independiente el resultado fue establecido de forma analítica por A. Chenciner y R. Montgomery en [15]. Inspirado en el movimiento que describen los cuerpos sobre la órbita “figura-8” C. Simó introdujo el término *coreografía* para caracterizar esta clase especial de soluciones del problema de N -cuerpos [38]. A grosso modo, una solución del problema de N -cuerpos es una *solución coreográfica* o simplemente *coreografía* si es

una solución periódica cuya órbita es la unión de curvas cerradas, donde cada una es la trayectoria de al menos dos cuerpos. En particular, si la órbita consta de sólo una curva cerrada, decimos que es una *coreografía simple*.

La primer coreografía simple fue dada por Lagrange, donde tres masas iguales viajan sobre el círculo unitario con velocidad angular constante y forman un triángulo equilátero todo el tiempo. Esto se puede generalizar para cualesquiera N ($3 \leq N < \infty$) masas iguales formando un N -ágono todo tiempo y rotando rígidamente respecto al centro de masa con velocidad angular constante [3, 36]. Estas soluciones son los equilibrios relativos asociados al N -ágono y son llamadas *soluciones triviales*. La órbita en “figura-8” fue la primer coreografía simple no trivial. Poco después de esta solución Gerver [17] y Simó [38] dan evidencia numérica de varias familias de coreografías simples no triviales para distintos valores de N . Algunos otros ejemplos de coreografías más recientes pueden ser encontrados en [28].

La importancia del trabajo de A. Chenciner y R. Montgomery no sólo radica en la aportación de una nueva solución del problema de 3 cuerpos, sino también en la implementación de métodos variacionales para la obtención de ésta. En las últimas dos décadas los métodos variacionales han sido empleados con mayor frecuencia en el problema de N -cuerpos para encontrar nuevas soluciones (no necesariamente coreografías) [3, 9, 10, 15, 16, 17, 22, 28, 43]. Sin embargo, la implementación del enfoque variacional presenta fuertes problemas debido a las singularidades del funcional de acción (colisiones), la falta de compacidad del espacio de configuraciones, así como también con la trivialidad de soluciones. Estos problemas algunas veces son superados al imponer restricciones de simetría, topológicas o mixtas sobre el espacio de configuraciones y con ayuda del principio de simetría crítica de Palais.

En este contexto, el objetivo de esta tesis es el estudio de soluciones coreográficas (simples) del problema de N -cuerpos con potencial homogéneo de grado α ($\alpha < 0$) mediante un enfoque variacional. La tesis está estructurada de la siguiente manera: En el capítulo 1, damos una breve introducción sobre los conceptos y resultados básicos del cálculo de variaciones, en particular, estudiamos en qué consiste el método directo del cálculo de variaciones. También en este capítulo, enunciamos el problema de N -cuerpos y algunos tipos particulares de soluciones de este problema tales como las soluciones homográficas y las coreografías. Estudiamos el enfoque variacional de este problema, más específicamente, la aplicación del método directo del cálculo de variaciones al problema de N -cuerpos, los problemas con los que se enfrenta y algunas formas de superarlas. En el capítulo 2, estudiamos soluciones no triviales del problema de cuatro cuerpos en el plano. En este problema damos de manera explícita restricciones de simetría y topológicas para superar los problemas que presenta el enfoque variacional. También en esta sección mostramos un inconveniente del método de minimización dada una restricción topológica. Por último, en el capítulo 3 consideramos el problema de N -cuerpos con masas iguales y potencial homogéneo de grado α , $\alpha \in (-1, 0)$, cuando $N \rightarrow \infty$. Primero obtenemos una ecuación integro-diferencial que los movimientos deben satisfacer al considerar soluciones coreográficas límite (llamadas *coreografías continuas*) correspondientes a distribuciones

continuas de masa del tipo onda viajera. Posteriormente consideramos el funcional de acción límite correspondiente y sus puntos críticos, mostramos que el círculo es una co-reografía continua para $\alpha \in (-1, 0)$ y entonces probamos nuestro resultado principal el cual asegura que de hecho el círculo es el mínimo absoluto del funcional de acción entre la clase de lazos con promedio cero en H^1 y período 1.

Movimientos coreográficos en el problema de N -cuerpos: Un enfoque variacional.

por

Reynaldo Castaneira Ramírez

Resumen

En los últimos años han surgido una serie de trabajos [3, 9, 10, 15, 16, 17, 22, 28, 43] entre otros, que ponen de manifiesto que los métodos variacionales son una herramienta poderosa para probar analíticamente la existencia de nuevas clases de soluciones periódicas en el problema de N -cuerpos, en particular en la clase de soluciones coreográficas. El objetivo de la presente tesis es el estudio de soluciones coreográficas en el problema de N -cuerpos homogéneo de grado $\alpha < 0$ mediante un enfoque variacional. Primero presentamos brevemente en qué consiste el método directo del cálculo de variaciones y las dificultades con las que se enfrenta en su implementación. Como una aplicación de este método estudiamos el problema de 4-cuerpos en el plano. Posteriormente consideramos el problema de N -cuerpos con masas iguales y potencial α -homogéneo, $\alpha \in (-1, 0)$, cuando $N \rightarrow \infty$. Obtenemos una ecuación integro-diferencial que los movimientos deben satisfacer al considerar soluciones coreográficas límite (llamadas *coreografías continuas*) correspondientes a distribuciones continuas de masa del tipo onda viajera. Por último, consideramos el funcional de acción límite correspondiente y sus puntos críticos. Mostramos que el círculo es una coreografía continua para $\alpha \in (-1, 0)$ y entonces probamos nuestro resultado principal el cual asegura que de hecho el círculo es el mínimo absoluto del funcional de acción entre la clase de lazos con promedio cero en H^1 y período 1. Nuestro resultado es equivalente al resultado principal de Barutello y Terracini presentado en [3] en el caso Newtoniano.

Capítulo 1

Introducción

En esta sección damos una breve introducción a los conceptos básicos del cálculo de variaciones, en especial en la implementación del *método directo*. También enunciamos el problema de N -cuerpos, primeras integrales y algunos tipos de soluciones particulares de este problema.

1.1. Cálculo de variaciones

El *cálculo de variaciones* consiste fundamentalmente en identificar clases de ecuaciones funcionales que pueden ser planteados de la forma:

$$F(u) = 0, \tag{1-1}$$

donde u es la variable desconocida en una clase de *funciones admisibles* dentro de un espacio de Banach y $F(\cdot)$ es la derivada de Fréchet de un funcional $E(\cdot)$. Simbólicamente,

$$F(\cdot) = DE(\cdot), \tag{1-2}$$

de manera que el problema (1-1) se escribe como:

$$DE(u) = 0. \tag{1-3}$$

La razón de interés de esta formulación es que las soluciones de (1-1) pueden ser identificados bajo ciertas circunstancias como puntos críticos de $E(\cdot)$. Además el espacio de funciones admisibles se puede elegir de manera adecuada que facilite emplear los principios variacionales, por ejemplo es común considerar espacios de Hilbert o espacios de Banach reflexivos.

1.1.1. Diferenciabilidad

El concepto de derivada juega un rol muy importante en el cálculo de variaciones, por lo que es necesario dar una definición precisa de lo que entenderemos por diferencial, derivada direccional y punto crítico.

La noción de derivada de una función entre espacios euclidianos se extiende a funciones entre espacios de Banach de la siguiente manera. Sean $V = (V, \|\cdot\|_V)$ y $W = (W, \|\cdot\|_W)$ espacios de Banach, Ω un subconjunto abierto de V . Recordemos que la continuidad de una función lineal entre ellos se caracteriza de la siguiente manera.

Proposición 1.1.1 *Si $T : V \rightarrow W$ es una función lineal, son equivalente las siguientes afirmaciones:*

- i) T es continua.*
- ii) T es continua en 0 .*
- iii) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tv\|_W \leq c\|v\|_V$ para todo $v \in V$.*
- iv) T es Lipschitz continua.*

Por otro lado, consideremos el siguiente espacio vectorial

$$L(V, W) := \{A : V \rightarrow W \mid A \text{ es lineal y continuo}\}.$$

Definición 1.1.1 Una función $f : \Omega \rightarrow W$ es Fréchet-diferenciable (o F-diferenciable) en el punto $q_0 \in \Omega$, si existe $A \in L(V, W)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(q_0 + h) - f(q_0) - Ah\|_W}{\|h\|_V} = 0. \quad (1-4)$$

Llamamos a A la diferencial de Fréchet (F-derivada) de f en q_0 y la denotamos por $f'(q_0)$ (o bien $Df(q_0)$).

Escribimos $f'(q_0)v$ en lugar de $f'(q_0)(v)$ para denotar al valor de la función $f'(q_0)$ en v .

Definición 1.1.2 $f : \Omega \rightarrow W$ es Fréchet-diferenciable (F-diferenciable) en Ω si lo es en cada punto $q \in \Omega$. La función

$$f' : \Omega \rightarrow L(V, W), \quad q \mapsto f'(q),$$

se llama la diferencial de Fréchet (F-derivada) de f . f' también se denota por Df .

De aquí en adelante diremos que f es diferenciable en vez de decir que es F-diferenciable y hablaremos de su derivada para referirnos a su F-derivada.

Definición 1.1.3 Una función $f : \Omega \rightarrow W$ es de clase C^1 (o continuamente diferenciable) en Ω si es diferenciable en Ω y su derivada $f' : \Omega \rightarrow L(V, W)$ es continua. Escribimos $f \in C^1$.

Si $f : \Omega \rightarrow W$ es diferenciable en el punto $q_0 \in \Omega$ y $v \in V$ entonces

$$f'(q_0)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(q_0 + tv) - f(q_0)}{t} \quad \forall v \in V.$$

El límite del lado derecho de la expresión anterior se llama *derivada direccional de f en q_0 en la dirección de v* .

Observación 1.1.1 *Condiciones necesarias para que f sea diferenciable en q_0 .*

1.- *Para cada $v \in V$, la derivada direccional de f en q_0 en la dirección v debe existir .*

2.- *La función $df(q_0) : V \rightarrow W$ definida por*

$$df(q_0)v := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(q_0 + tv) - f(q_0)}{t}$$

debe ser lineal y continua.

Esto motiva el siguiente concepto.

Definición 1.1.4 *Una función $f : \Omega \rightarrow W$ es Gâteaux-diferenciable (o G-diferenciable) en el punto $q_0 \in \Omega$, si existe $df(q_0) \in L(V, W)$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|f(q_0 + tv) - f(q_0) - tdf(q_0)v\|_W = 0, \quad (1-5)$$

para cada $v \in V$. Llamamos a $df(q_0)v$ la derivada de Gâteaux (G-derivada) de f en q_0 y dirección $v \in V$.

Decimos que f es Gâteaux-diferenciable en Ω si lo es en cada punto $q \in \Omega$. La función

$$df : \Omega \rightarrow L(V, W), \quad q \mapsto df(q),$$

se llama la derivada de Gâteaux (G-derivada) de f .

En otras palabras $f : \Omega \rightarrow W$ es Gâteaux-diferenciable en el punto $q_0 \in \Omega$ si existe la derivada direccional de f en q_0 para cualquier dirección $v \in V$ y $df(q_0) \in L(V, W)$. El siguiente teorema proporciona un criterio para verificar la diferenciabilidad de una función y calcular su derivada.

Teorema 1.1.1 *$f : \Omega \rightarrow W$ es de clase C^1 en Ω si y sólo si f es Gâteaux-diferenciable en Ω y su derivada de Gâteaux $df : \Omega \rightarrow L(V, W)$ es continua. En tal caso, $f' = df$.*

Demostración. Ver Teorema 9.21 en [19]. ■

Definición 1.1.5 Sea Ω un subconjunto de V y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable de clase C^1 . Se dice que un punto $u \in \Omega$ es:

- *mínimo global* (*máximo global*) de f en Ω si $f(u) \leq f(v)$ ($f(u) \geq f(v)$) para todo $v \in \Omega$,
- *mínimo relativo* (*máximo relativo*) de f en Ω si u es un mínimo global (*máximo global*) de f en $\Omega \cap U$, para alguna vecindad U de u en V ,
- punto crítico de f en Ω si $f'(u) = 0$.

En las aplicaciones, debido a restricción de las función, a menudo se trabaja en un subconjunto de un espacio de Banach por lo que interesa estudiar sus máximos y mínimos locales, los cuales tienen la siguiente propiedad.

Proposición 1.1.2 Sea Ω un subconjunto abierto de V y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable de clase C^1 . Si u es un mínimo (*máximo*) local de f en Ω , entonces u es un punto crítico de f en Ω .

1.1.2. Espacios de funciones

Sea $I := [t_1, t_2]$, entonces tenemos los siguientes espacios de funciones clásicos:

$$L^2(I, \mathbb{R}^n) := \left\{ w : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid w \text{ es medible, } \int_{t_1}^{t_2} \|w(t)\|^2 dt < \infty \right\},$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_0 = \int_{t_1}^{t_2} \langle u(t), v(t) \rangle dt, \quad \|u\|_{L^2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|^2 dt,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathbb{R}^n .

$$H^1(I, \mathbb{R}^n) := \left\{ w : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid w \text{ es absolutamente continua, } w' \in L^2(I, \mathbb{R}^n) \right\},$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + (\dot{u}, \dot{v})_0, \quad \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

$C^0(I, \mathbb{R}^n) := \{w : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid w \text{ es continua}\}$ es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_\infty$, dada por

$$\|w\|_\infty = \sup \{\|w(t)\| : t \in I\}.$$

Teorema 1.1.2 *Si $w \in H^1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces*

$$\|w(t_2) - w(t_1)\| \leq |t_2 - t_1|^{1/2} \|w\|_{H^1}.$$

Demostración. Como w es absolutamente continua $w'(t)$ existe para casi toda $t \in I$ y

$$w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} w'(t) dt.$$

Esto implica que

$$\|w(t_2) - w(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} w'(t) dt \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|w'(t)\| dt,$$

luego usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \|w'(t)\| dt \leq |t_2 - t_1|^{1/2} \|w'\|_{L^2},$$

con lo que concluimos la prueba. ■

Corolario 1.1.1 *Si $w \in H^1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces $\|w(t)\|_\infty \leq 2\|w(t)\|_{H^1}$.*

Demostración. Por definición de $\|\cdot\|_{H^1}$ tenemos que $\|w(0)\| \leq \|w\|_{H^1}$ y $\|w'\|_{L^2} \leq \|w\|_{H^1}$. Luego como $\|w(t)\| \leq \|w(0)\| + \|w(t) - w(0)\|$, por el teorema 1.1.2 se sigue el resultado.

■

Corolario 1.1.2 *Las inmersiones $i : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$, $j : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(I, \mathbb{R}^n)$ son compactas.*

Demostración. Sea S un subconjunto acotado de $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces por el Corolario 1.1.1, S es acotado en $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ y por el Teorema 1.1.2 S satisface una condición de Hölder de orden $1/2$, lo que implica que es equicontinuo y por el teorema de Arzela-Ascoli es relativamente compacto. ■

1.1.3. Ecuación de Newton

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $q \in H^1(I, \Omega)$ y $L : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, v) := \frac{1}{2} \|v\|^2 + U(x),$$

donde $U \in C^1(\Omega)$. Consideremos el funcional

$$\mathcal{L} : H^1(I, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (1-6)$$

A la función L se le conoce como *lagrangiano*.

Teorema 1.1.3 *El funcional \mathcal{L} dado por (1-6) es diferenciable y su derivada está dada por*

$$\mathcal{L}'(q)h = \int_{t_1}^{t_2} (\nabla U(q(t))h(t) + \dot{q}(t)\dot{h}(t)) dt, \quad (1-7)$$

donde $h \in H^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Demostración. La desigualdad de Cauchy-Schwarz demuestra inmediatamente que $\mathcal{L}'(q)$ dado por la expresión (1-7) pertenece a $L(H^1(I, \mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Por otro lado, por el Corolario 1.1.1, para $h \in H^1(I, \mathbb{R}^N)$ pequeño en la norma $\| \cdot \|_{H^1}$, tenemos que $q + h \in H^1(I, \Omega)$. Además

$$L(q(t) + h(t), \dot{q}(t) + \dot{h}(t)) - L(q(t), \dot{q}(t)) = \dot{q}(t)\dot{h}(t) + (U(q + h) - U(q)).$$

Como $U \in C^1$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|h\|_{H^1} < \delta$ entonces

$$\left| \mathcal{L}(q+h) - \mathcal{L}(q) - \int_{t_1}^{t_2} (\nabla U(q(t))h(t) + \dot{q}(t)\dot{h}(t)) dt \right| \leq \epsilon \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| dt.$$

Luego por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_{t_1}^{t_2} |h(t)| dt \leq (t_2 - t_1)^{1/2} \|h\|_{L^2} \leq (t_2 - t_1)^{1/2} \|h\|_{H^1}.$$

■

Corolario 1.1.3 Si $q \in C^2$, la derivada del funcional \mathcal{L} en q está dada por

$$\mathcal{L}'(q)h = \int_{t_1}^{t_2} (\nabla U(q(t)) - \ddot{q}(t))h(t) dt + (\dot{q}(t)h(t)) \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (1-8)$$

donde $h \in H^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Demostración. Se sigue al integrar por partes el segundo término del lado derecho de la ecuación (1-7) ■

Dados $q_0, q_1 \in U$, definimos

$$\mathcal{B}(q_1, q_2) = \left\{ q \in H^1(I, \Omega) \mid q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2 \right\},$$

$$\mathcal{N}(q_1, q_2) = \left\{ h \in H^1(I, \mathbb{R}^N) \mid h(t_1) = 0, h(t_2) = 0 \right\}.$$

Observación 1.1.2 Si $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} \Big|_{\mathcal{B}(q_1, q_2)}$, entonces $\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}' \Big|_{\mathcal{N}(q_1, q_2)}$

Lema 1.1.1 (Lema fundamental) Sea $f(t) \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) = 0$ para cualquier función $h(t) \in \mathcal{N}(q_1, q_2)$, entonces $f(t) \equiv 0$.

Demostración. Supongamos que $f(t^*) > 0$ para algún $t^* \in (t_0, t_1)$. Como f es continua, entonces $f(t) > c$ para $t \in B := (t^* - \epsilon, t^* + \epsilon) \subset (t_0, t_1)$, ϵ suficientemente pequeño y fijo.

Por otro lado, sea $h(t) \in C^1$ definida de la siguiente manera: $h(t) = 0$ si $t \notin B$, $h(t) > 0$ si $t \in B$, en particular, $h(t) = 1$ para $t \in (t^* - \epsilon/2, t^* + \epsilon/2)$. Entonces claramente,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) \geq \epsilon c > 0, \quad (1-9)$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(t) = 0$, para todo $t \in (t_0, t_1)$. ■

Corolario 1.1.4 *Supongamos que $q \in C^2$, entonces la curva $q(t)$ es un punto crítico del funcional \mathcal{L}_0 si y sólo si satisface la ecuación de Newton*

$$\ddot{q}(t) = \nabla U(q(t)). \quad (1-10)$$

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 1.1.3 y del Lema 1.1.1. ■

En general, la ecuación que satisfacen los puntos críticos de un funcional \mathcal{L} definido como en (1-6) es llamada la *ecuación de Euler-Lagrange* asociada. En este caso la ecuación de Euler-Lagrange es precisamente la ecuación de Newton.

1.1.4. El método directo del cálculo de variaciones

El punto de minimizar un funcional es que nos proporciona un medio para la construcción de soluciones de sus ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, este enfoque presenta algunas limitaciones en su implementación de acuerdo a la naturaleza del funcional.

Formulación del problema: Sea

$$m(X) = \inf_{q \in X} \mathcal{L}(q), \quad \mathcal{L}(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (1-11)$$

donde $X \subset Y$ es un conjunto de curvas, correspondiente a condiciones de frontera o condiciones de puntos finales. Por ejemplo, se puede elegir X como el conjunto de todas las curvas $c : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfacen $c(t_1) = c_1$ y $c(t_2) = c_2$.

Por definición de ínfimo existe una sucesión $\{q_n\}_n \in X$ de curvas con la propiedad $\mathcal{L}(q_n) \rightarrow m(X)$. Tal sucesión es llamada *sucesión minimizadora*. Entonces el *método directo del cálculo de variaciones* consiste en tomar una sucesión minimizadora $\{q_n\}_n$ y probar los siguientes pasos:

1. Probar que la sucesión $\{q_n\}_n$ converge a alguna curva \bar{q} .
2. Probar que $\bar{q} \in X$.
3. Probar que \bar{q} toma el ínfimo: $\mathcal{L}(\bar{q}) = m(X)$.
4. Probar que $\mathcal{L}'(\bar{q})(h) = 0$ para toda dirección $h \in X$.
5. Concluir que \bar{q} satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a \mathcal{L} .

En la mayoría de los funcionales de interés, el método directo en principio nos dará soluciones generalizadas o débiles de nuestro problema que pueden ser soluciones no clásicas. Con esto queremos decir que una solución clásica tiene que cumplir ciertas condiciones de diferenciabilidad. Así un segundo paso de estos métodos es probar que estas soluciones generalizadas son suficientemente diferenciables para considerarse como soluciones clásicas. El éxito del método directo se encuentra en gran medida en la elección del espacio de configuraciones. Por esta razón en las siguientes secciones identificamos condiciones suficientes sobre el lagrangiano $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ y sobre el espacio de funciones admisibles X para asegurar que el funcional \mathcal{L} tenga mínimos.

A. Coercitividad

En los métodos de minimización los conceptos de coercitividad y semicontinuidad inferior son muy utilizados, sin embargo muchas veces se desconoce el motivo de su implementación. Por esta razón, antes de dar la definición formal de estos términos presentamos dos ejemplos de minimización de funciones simples que ilustran de manera clara la definición de estos conceptos.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = (1 + t)^{-1}$, es claro que f es acotada inferiormente, pero no toma

su mínimo. Observe que $|f(t)| \rightarrow 0$, cuando $|t| \rightarrow +\infty$. Esto sugiere imponer alguna hipótesis de crecimiento proporcional entre la función y su argumento, por ejemplo:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = \infty. \quad (1-12)$$

Por otro lado, en el problema de minimización (1-11), sea $1 < p < \infty$ fijo y supongamos que existen $\alpha > 0, \beta \geq 0$ tal que $L(t, q(t), \dot{q}(t)) \geq \alpha|\dot{q}|^p - \beta$, para todo $\dot{q} \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n, t \in [t_1, t_2]$. Entonces

$$\mathcal{L}(q) \geq \alpha \|\dot{q}\|_{L^p}^p - \beta(t_2 - t_1), \quad (1-13)$$

y $\mathcal{L}(q) \rightarrow \infty$, cuando $\|\dot{q}\|_{L^p} \rightarrow \infty$.

A la relación de crecimiento entre la función y su argumento planteada en los ejemplos es precisamente a lo que damos el nombre de coercitividad. La definición formal es la siguiente:

Definición 1.1.6 *Un funcional \mathcal{L} de un espacio normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se dice que es coercitivo sobre un subespacio $Y_0 \subset Y$ si*

$$\lim_{\|q\|_Y \rightarrow \infty} \mathcal{L}(q) = \infty, \quad q \in Y_0. \quad (1-14)$$

Observación 1.1.3 *La condición de coercitividad garantiza que ninguna sucesión divergente puede ser sucesión minimizadora.*

La ecuación (1-13) muestra que para lograr la condición de coercitividad (1-14) no sólo es suficiente definir $\mathcal{L}(\cdot)$ sobre un espacio de funciones admisibles diferenciables, si no también considerar espacios con características extras, tales como espacios de Sobolev $W^{1,p}$.

B. Semicontinuidad inferior débil

La condición de coercitividad del funcional garantiza que en el subespacio donde minimizamos ninguna sucesión que converge a un mínimo diverge. Sin embargo para asegurar

que el límite de una sucesión minimizadora está en el espacio de configuraciones necesitamos algún tipo de compacidad, en algunos casos para esto es suficiente introducir la topología débil en el espacio como se muestra en los siguientes resultados.

Sea Y un espacio de Banach real. Decimos que una sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$ converge débilmente a $u \in Y$, escribimos

$$u_k \rightharpoonup u, \quad \text{si} \quad \langle u^*, u_k \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle \quad (1-15)$$

para cada funcional lineal acotado $u^* \in Y^*$. Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto interno.

Teorema 1.1.4 (Compacidad débil,[8]) *Sea Y un espacio de Banach reflexivo¹ y supongamos que la sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$ es acotada. Entonces existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $u \in Y$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u$.*

En otras palabras, *sucesiones acotadas en un espacio de Banach reflexivo son débilmente precompactas*. En particular, *una sucesión acotada en un espacio de Hilbert contiene una subsucesión convergente débilmente*.

La compacidad débil del espacio en algunos casos es suficiente para garantizar la existencia de mínimos. Sin embargo, muchos de los funcionales de interés son no continuos respecto a la convergencia débil, por lo que se requiere una condición extra para garantizar tal existencia. Esta condición está dada en la siguiente definición.

Definición 1.1.7 *Un funcional \mathcal{L} es débilmente inferiormente semicontinua con respecto a Y si*

$$\mathcal{L}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(u_n),$$

siempre que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad Y.$$

¹ $Y^{**} = Y$, * significa el dual.

Como conjunción de los conceptos introducidos en estas secciones damos el siguiente resultado clásico del método directo del cálculo de variaciones.

Lema 1.1.2 *Sea Y un espacio de Banach, $M \subset Y$ un subconjunto débilmente cerrado. Supongamos que $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ coercitivo y débilmente inferiormente semicontinuo con respecto a Y . Entonces \mathcal{L} es acotado inferiormente en M y alcanza su ínfimo en M .*

Demostración: El caso $\mathcal{L} \equiv +\infty$ es trivial. Supongamos que $\mathcal{L} \not\equiv +\infty$. Sea $m := \inf_M \mathcal{L}$ y $\{y_k\}_k$ una sucesión minimizadora, esto es, satisface $\mathcal{L}(y_k) \rightarrow m$. Por la coercitividad de $\mathcal{L}|_M$, $\{y_k\}_k$ es acotada. Ahora como Y es reflexivo por el Teorema (1.1.4) podemos asumir sin pérdida de generalidad que $y_k \rightarrow y$ para algún $y \in Y$. Pero como M es débilmente cerrado, entonces $y \in M$. Luego como el funcional \mathcal{L} es débilmente inferiormente semicontinuo en M ,

$$\mathcal{L}(y) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(y_k) = m,$$

entonces y es un mínimo de \mathcal{L} en M .

1.1.5. Principio de Simetría Crítica

Muchas veces trabajar sobre un subespacio Y_0 de Y resulta más fácil que trabajar sobre el espacio total Y , sin embargo hay que tener cuidado al emplear ciertos conceptos en Y_0 ya que pueden no ser ciertos en Y . En esta sección enunciamos un principio muy importante en el método directo del cálculo de variaciones, el cual garantiza bajo ciertas hipótesis sobre un subespacio $Y_0 \subset Y$ que un punto crítico de $f|_{Y_0}$ también lo es en Y . Este resultado es un caso particular del *principio de simetría crítica de Palais* [33].

Consideremos el espacio $H := H^1([0, 1], X) = W^{1,2}([0, 1], X)$ y $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, además supongamos que G es un grupo que está actuando sobre el espacio H . Diremos que f es *invariante* bajo G (G -*invariante*) si $f(g \cdot x) = f(x)$, para todo $g \in G$ y para

cualquier $x \in H$. Denotamos por H^G al subespacio de H invariante bajo G , esto es,

$$H^G = \{x \in H \mid g \cdot x = x, \forall g \in G\},$$

y por $f|_{H^G} : H^G \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la restricción.

Teorema 1.1.5 (Principio de criticalidad de Palais) *Sea G un grupo actuando sobre H y $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ G -invariante. Si $x \in H^G$ es un punto crítico de $f|_{H^G}$ entonces p es un punto crítico global de f .*

Demostración: Como f es G -invariante y usando la regla de la cadena, tenemos que para todo $g \in G$ y $x \in H$

$$Df(x) = D(f \circ g)(x) = Df(g \cdot x)g. \quad (1-16)$$

Por lo tanto si $\nabla f(x)$ denota el H^1 -gradiente de f en x , la ecuación anterior implica que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x), h \rangle_{H^1} &= Df(x)h \\ &= Df(g \cdot x)(gh) \\ &= \langle \nabla f(g \cdot x), g \cdot h \rangle_{H^1} \\ &= \langle g^{-1} \nabla f(g \cdot x), h \rangle_{H^1}, \end{aligned}$$

para todo $g \in G$ y todo $h \in H$. Equivalentemente, $g \cdot \nabla f(x) = \nabla f(g \cdot x), \forall g \in G, \forall x \in H$. En particular si $x \in H^G$ entonces $g \cdot \nabla f(x) = \nabla f(x), \forall g \in G$. Esto implica que $\nabla f(x) \in H^G$. Ahora si $x \in H^G$ es punto crítico de $f|_{H^G}$ entonces por definición el gradiente es ortogonal a H^G , de manera que $\nabla f(x) = 0$. Por lo tanto x es punto crítico de f .

1.2. El problema de N -cuerpos

El *problema de N -cuerpos* con potencial homogéneo de grado $-\alpha < 0$, es el estudio de la dinámica de N *masas puntuales*² positivas m_1, m_2, \dots, m_N moviéndose en \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, e interactuando de acuerdo a las ecuaciones

$$m_i \ddot{q}_i = - \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ j \neq i}} \alpha m_i m_j \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|^{2+\alpha}} \quad i = 1, \dots, N., \quad (1-17)$$

donde $q_i(t) \in \mathbb{R}^d$ representa la posición de la masa m_i al tiempo t . El caso $\alpha = 1$ es el *problema de N -cuerpos newtoniano*.

Equivalentemente, tenemos la ecuación diferencial de segundo orden,

$$M \ddot{q} = \nabla U(q), \quad q = (q_1, \dots, q_N), \quad (1-18)$$

donde $U : \mathbb{R}^{d \times N} \rightarrow [0, \infty]$,

$$U(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^\alpha}, \quad (1-19)$$

es la *función potencial* (el negativo de la *energía potencial*), ∇ es el *gradiente* en $\mathbb{R}^{d \times N}$, $M = \text{diag}[m_1 I_d, \dots, m_N I_d]$.

Sea $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{d \times N}$ definido como $p = M \dot{q}$, es decir, $p_i = m_i \dot{q}_i$ es el *momento* de la i -ésima partícula. Entonces la ecuación (1-18) se puede escribir como el sistema de primer orden:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1-20)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1-21)$$

²Se denomina así a un cuerpo o partícula cuyas dimensiones pueden despreciarse cuando se estudia su movimiento.

donde H es el *hamiltoniano o energía* definido por:

$$H = K - U \tag{1-22}$$

y K es la *energía cinética*,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{q}_i\|^2. \tag{1-23}$$

Las ecuaciones (1-20) y (1-21) son llamadas *ecuaciones de Hamilton* asociadas a (1-17).

1.2.1. Integrales de movimiento

En el movimiento de un sistema mecánico, las magnitudes q_i y p_i que determinan el estado del sistema varían en el tiempo. Sin embargo, existen algunas funciones de estas magnitudes cuyo valor permanece constante en el tiempo, dependiendo solamente de las condiciones iniciales. A estas funciones se les denomina *constantes de movimiento o primeras integrales*. En el problema de N -cuerpos existen 10 constantes de movimiento clásicas dadas por las componentes de las siguientes funciones:

- El *momento lineal total* del sistema, $L_0 = \sum_{i=1}^N p_i$.
- El *centro de masa* del sistema, $C_0 = \sum_{i=1}^N m_i q_i - t p_i$.
- El *momento angular* del sistema, $\omega = \sum_{i=1}^N q_i \times p_i$.
- La *energía* del sistema, H .

Estas funciones reducen el problema a un sistema dinámico sobre una variedad $(2dN - 10)$ dimensional.

Por otro lado, las ecuaciones del problema de N -cuerpos (1-17) (equivalentemente (1-20),(1-21)) son invariantes bajo la acción del *grupo galileano*, que es por definición el grupo de todas las transformaciones del *espacio-tiempo*, $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, que preservan intervalos

de tiempo y son isometrías del espacio para cualquier tiempo fijo $t \in \mathbb{R}$. Ejemplo, si (x, t) representa cualquier punto en el *espacio-tiempo*, las transformaciones:

- 1) *rotación*: $(x, t) \longrightarrow (Gx, t)$, donde $G \in O(d)$,
- 2) *traslación*: $(x, t) \longrightarrow (x + a, t + s)$, $a \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}$,
- 3) *movimiento uniforme*, con velocidad constante v : $(x, t) \longrightarrow (x + tv, t)$,

son galileanas. Así dos soluciones de (1-17) son consideradas equivalentes si una puede ser obtenida de la otra por medio de transformaciones galileanas. Entonces, sin pérdida de generalidad podemos fijar el centro de masa en el origen del sistema coordenado, de manera que el *espacio de configuraciones* de (1-18) es

$$\mathcal{X} = \left\{ q \in \mathbb{R}^{d \times N} \mid \sum_{i=1}^N m_i q_i = 0 \right\}. \quad (1-24)$$

Es usual denotar al espacio de configuraciones libre de colisión por $\tilde{\mathcal{X}}$,

$$\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta, \quad \Delta = \left\{ q \in \mathcal{X} \mid \exists \neq j, q_i = q_j \right\}, \quad (1-25)$$

donde Δ es el *conjunto de colisión*.

El espacio de configuraciones para el sistema hamiltoniano dado por las ecuaciones (1-20) y (1-21) es el *espacio tangente* $T\mathcal{X}$ sobre \mathcal{X} definido por:

$$T\mathcal{X} = \left\{ (q, v) \mid q \in \mathcal{X}, v \in \mathbb{R}^{d \times N} \right\}. \quad (1-26)$$

1.2.2. Configuraciones centrales y soluciones homográficas

Existen soluciones de (1-17) cuya configuración permanece similar a una configuración fija de los N -cuerpos a través del tiempo. Una clase de estas soluciones son las soluciones homográficas y sus correspondientes configuraciones fijas llamadas configuraciones centrales.

Definición 1.2.1 Una configuración central (CC) para las masas m_1, m_2, \dots, m_N es un arreglo de las N masas cuyo vector de configuración q satisface la ecuación

$$\nabla U(q) + \lambda Mq = 0, \quad (1-27)$$

para alguna constante λ .

Para cualquier configuración $q \in \mathcal{X}$, el momento de inercia es

$$I(q) = q^T Mq = \sum_{i=1}^N m_i |q_i|^2.$$

Note que $\nabla U(q) = 2Mq$, por lo que la ecuación de CC (1-27) puede ser escrita como

$$\nabla U(q) + \frac{1}{2} \lambda \nabla I(q) = 0.$$

Así se tiene la siguiente definición alternativa de configuración central: Una configuración q_0 es una configuración central si y sólo si es un punto crítico de $U(q)$ sujeto a la restricción $I(q) = k$, donde $k = I(q_0)$.

En el problema de 3-cuerpos con masas arbitrarias hay cuatro configuraciones centrales distintas: en tres de ellas las masas se encuentran en línea recta (Euler, 1767) y en la cuarta las masas permanecen en los vértices de un triángulo equilátero (Lagrange, 1772). Para masas arbitrarias m_1, m_2, \dots, m_N ($N > 3$) el problema de encontrar todas las CC o determinar el número de estas para cada N está lejos de ser resuelto completamente y conforma una área de investigación muy importante en la comprensión del problema de N -cuerpos (ver más en [27]). Aquí sólo mencionamos algunas configuraciones centrales particulares en el caso de masas iguales.

En \mathbb{R}^2 , si colocamos $N \geq 3$ masas iguales en los vértices de un N -ágono, obtenemos ejemplos simples de CC planas [27, 36]. En \mathbb{R}^3 si ponemos las N ($N = 4, 6, 8, 12, 20$) masas en los vértices de los sólidos platónicos: tetraedro, octaedro, hexaedro (cubo), dodecaedro, icosaedro respectivamente, obtenemos CC en el espacio [27].

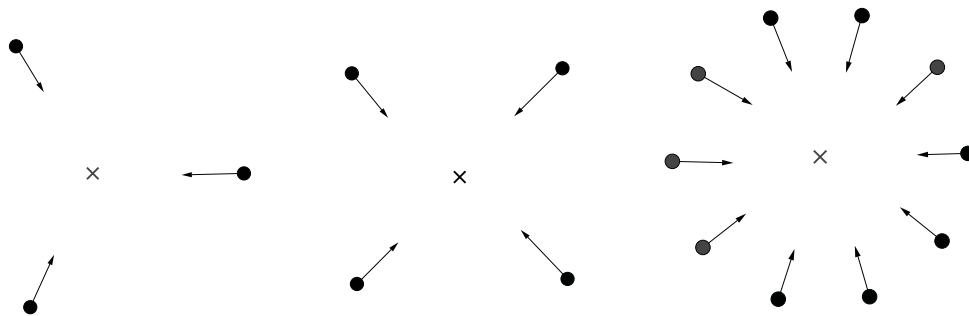


Figura 1-1: Configuraciones centrales planas, $N = 3, 4, 10$, respectivamente.

Por otro lado, mediante configuraciones centrales podemos obtener otras soluciones para el problema de N -cuerpos, las cuales son llamadas soluciones *homográficas*. Para este tipo de soluciones las configuraciones sólo cambian por traslaciones simultaneas, rotaciones y homotésias. En otras palabras, la configuraciones permanecen similares en el tiempo.

Definición 1.2.2 Una solución del problema de N -cuerpos es llamada *homográfica* o *auto-similar* si satisface

$$q(t) = r(t)R(t)q_0, \tag{1-28}$$

donde q_0 es una configuración fija, $r(t) > 0$ es una homotésia y $R(t) \in SO(d)$ una rotación. En particular, decimos que una solución es *homotética* si la configuración no rota (i.e., $R(t) = Id.$) y será un *equilibrio relativo* si la configuración es rígida (i.e., $r(t) = cte.$).

Las soluciones de equilibrio relativo asociados al N -ágono son llamadas *soluciones triviales* y nos referimos a estas con el nombre de *N -ágono rotante*.

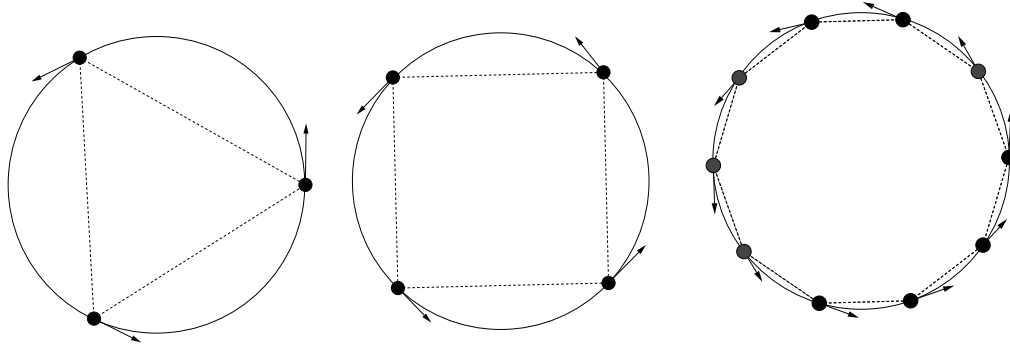


Figura 1-2: N -ágono rotante, $N = 3, 4, 10$, respectivamente.

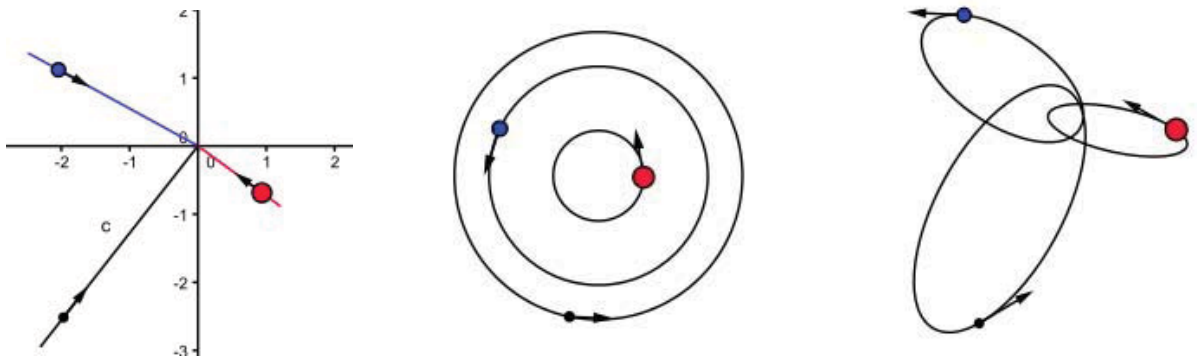


Figura 1-3: Solucion homotética, equilibrio relativo y homográfica respectivamente.

1.2.3. Soluciones coreográficas

Una familia particular de soluciones de (1-17) son las *soluciones coreográficas* o simplemente *coreografías* (nombre inspirado en el movimiento que describen las masas dado por Carles Simó). Una *coreografía* es una solución periódica $q(t)$ cuya órbita es la unión de curvas cerradas, cada una de las cuales es la trayectoria de al menos dos cuerpos. Si la solución consta sólo de una órbita periódica, entonces llamaremos a esta solución *coreografía simple*.

Definición 1.2.3 *En particular, en el problema de N -cuerpos con masas iguales decimos que una solución es una coreografía simple si es una solución T -periódica de (1-17), tal que todos los cuerpos se mueven sobre la misma curva y cambian sus posiciones después de un tiempo fijo, esto es, existe una función $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que:*

$$q_i(t) = q(t + (i - 1)\tau), \quad i = 1, \dots, N., \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1-29)$$

donde $\tau = T/N$. (ver [17, 43]).

En este trabajo sólo consideramos el caso de coreografía simple y de aquí en adelante nos referimos a esta última definición.

En el problema de 3-cuerpos, la primer coreografía que se descubrió fue el equilibrio relativo asociado al triángulo equilátero con masas iguales de Lagrange (1772). Más de dos siglos después se descubre el segundo ejemplo de coreografía, en esta curva la órbita tiene forma de “figura-8”. C. Moore en [31] dio evidencia numérica de la existencia de esta solución y posteriormente de forma independiente el resultado fue establecido de forma analítica por A. Chenciner y R. Montgomery [15]. En un período, cada cuerpo pasa dos veces el punto de autointersección de la trayectoria, y en estos instantes los 3 cuerpos están situados sobre una línea recta y forman una configuración colineal (ver Figura 1-4).

Para el problema de 4 cuerpos, A. Chenciner y A. Venturelli probaron en [16] la existencia de una coreografía simple no plana llamada *hip-hop*. En [9] K.C. Chen probó la existencia de una coreografía no simple y no homográfica (ver Figura 1-5).

Observe que en el caso de masas iguales, el N -ágono rotante, $N \geq 3$, es una coreografía simple (ver Figura 1-2). En general, para $N > 4$ soluciones coreográficas no homográficas sólo han sido encontradas numéricamente [17, 38, 43].

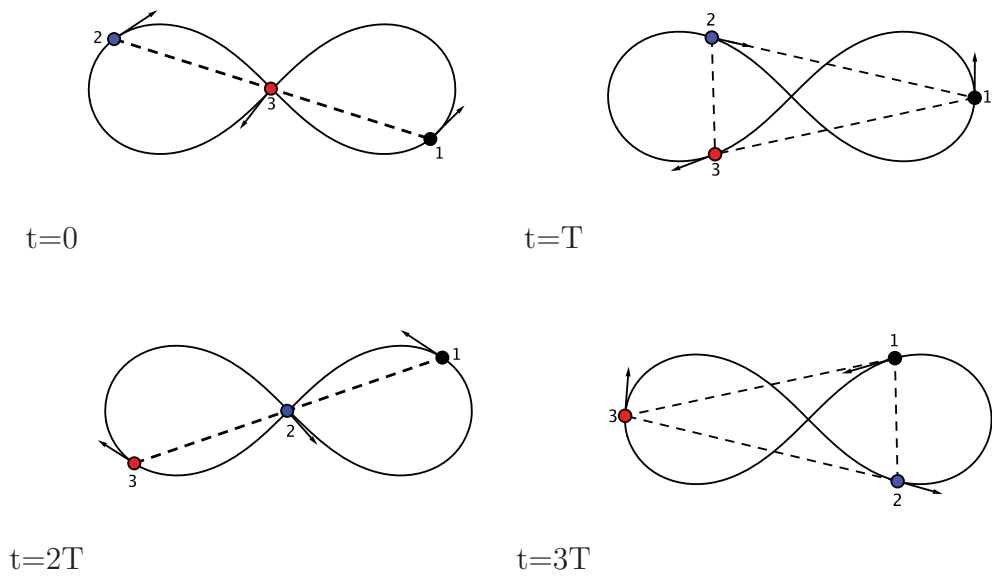


Figura 1-4: Órbita “figura-8”, en el caso de 3 masas iguales.

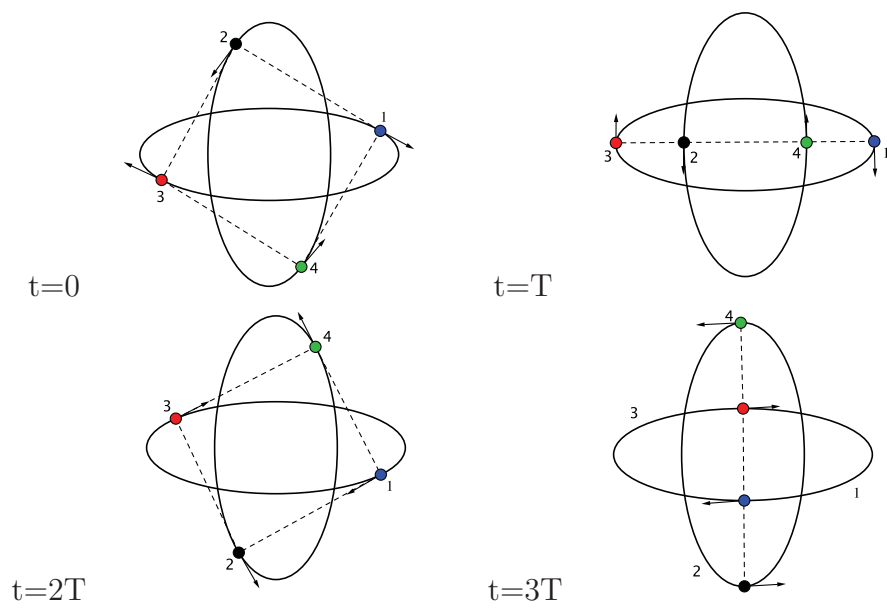


Figura 1-5: Coreografía no simple de K. C. Chen.

1.3. Enfoque variacional en la búsqueda de soluciones periódicas para el problema de N -cuerpos

En este capítulo consideramos el planteamiento variacional en el estudio del problema de N -cuerpos.

En las dos últimas décadas ha aparecido una serie de trabajos, [3, 9, 10, 15, 16, 17, 22, 28, 43] entre otros, que ponen de manifiesto que los métodos variacionales son una herramienta poderosa para probar la existencia de nuevas clases de soluciones periódicas en el problema de N -cuerpos.

Consideremos dicho problema (1-17) en el espacio de configuración \mathcal{X} (1-24). Definimos el *espacio de lazos* por:

$$\Lambda = H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X}) = \left\{ q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathcal{X} \mid q_i \in W^{1,2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^d) \right\},$$

donde

$$W^{1,2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^d) = \left\{ x \in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^d) \mid \dot{x} \in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^d), x(t+T) = x(t) \right\}.$$

El *funcional de acción* dado por

$$\mathcal{A}^\alpha : \Lambda \rightarrow [0, +\infty], \quad \mathcal{A}^\alpha(q) = \int_0^T L^\alpha(q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (1-30)$$

donde el *lagrangiano* $L^\alpha : T\mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty]$ está definido por

$$L^\alpha(q, v) := K(v) + U(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|v_i\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^\alpha}. \quad (1-31)$$

Las ecuaciones (1-17) son las *ecuaciones de Euler-Lagrange* asociadas al funcional (1-30).

El lagrangiano L^α es diferenciable en todo punto de $\tilde{\mathcal{X}}$. Entonces si $q \in \Lambda$ satisface que $q(t) \in \tilde{\mathcal{X}}$ para todo $t \in [0, T]$ y q es un punto crítico de \mathcal{A}^α , por el Teorema 1.1.4, q

satisface las ecuaciones de Newton (1-17) en $[0, T]$. En otras palabras,

Corolario 1.3.1 *Los puntos críticos $q \in \Lambda$ sin colisión de \mathcal{A}^α son soluciones de (1-17) en \mathcal{X} .*

Uno de los principales obstáculos del enfoque variacional es probar que los mínimos están libres de colisión. Poincaré notó, en el caso newtoniano, que aún cuando dos o más cuerpos colisionan y el lagrangiano es infinito al momento, el funcional de acción puede ser finito [37]. En la literatura, para probar que los mínimos están libres de colisión se usan los dos métodos siguientes:

- **Deformaciones locales:** combinando análisis asintótico alrededor de colisiones aisladas y la técnica de *explosión*, se trata de mostrar que después de una pequeña deformación de la trayectoria con colisión en la colisión aislada se obtiene una trayectoria sin colisión con funcional de acción estrictamente menor (ver [9, 22, 26, 29, 43]).
- **Estimaciones de nivel:** se da una cota inferior estimada específica del funcional de acción para todas las trayectorias con colisión en la clase admisible y luego se intenta encontrar una trayectoria de prueba dentro de la clase admisible cuyo funcional de acción es estrictamente menor que la cota inferior estimada ([9, 10, 43]).

Por otro lado, respecto a la existencia de puntos críticos, de acuerdo el Lema 1.1.2 y dado que Λ es un espacio reflexivo, para garantizar la existencia de mínimos de \mathcal{A}^α en Λ sólo se necesita probar la coercitividad y la semicontinuidad inferior débil del funcional \mathcal{A}^α .

1.3.1. Coercitividad del funcional de acción

Observe que la acción es siempre positiva en Λ . Entonces si consideramos la sucesión

$$q^k(t) = (q_1^k(t), \dots, q_N^k(t)) \in \mathbb{R}^{d \times N},$$

donde

$$q_i^k(t) = (k \cos(2\pi i/k), k \sin(2\pi i/k), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \dots, N,$$

tenemos que q^k diverge y $\mathcal{A}^\alpha(q^k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Esto muestra que $\inf_\Lambda \mathcal{A}^\alpha = 0$ y el ínfimo en esta familia no se alcanza. Por lo tanto \mathcal{A}^α no es coercitivo en Λ .

Lo anterior muestra que trabajar sobre el espacio total Λ no es suficiente. Sin embargo, en algunos casos este problema de coercitividad puede ser superado mediante la imposición de restricciones adecuadas para las configuraciones permitidas. Estas restricciones pueden ser:

- **Restricciones topológicas:** *homológicas* u *homotópicas*, introducidas inicialmente por Gordon en [24] en el caso newtoniano. Sin embargo, se ha visto que trabajar con este tipo de restricciones en el enfoque variacional resulta ser muy difícil (ver más en [11, 29] y sus referencias).
- **Restricciones de simetría:** este tipo de restricciones son más fáciles de tratar en comparación con las topológicas y han sido usadas por diferentes autores y recopiladas por Ferrario y Terracini en [22], Montaldi y Steckles en [28].

La idea de imponer este tipo de restricciones es que si son elegidas de manera adecuada, obtendremos un subespacio con el cual podremos emplear el principio de simetría crítica de Palais [33].

Es importante señalar que las restricciones también pueden ser mixtas. Ilustramos la implementación de estos tipos de restricciones en el problema de 4 cuerpos en el siguiente capítulo.

1.3.2. Semicontinuidad inferior débil de la acción

Lema 1.3.1 Sean $L^\alpha, \mathcal{A}^\alpha$ como en (1-31), (1-30) respectivamente. Entonces \mathcal{A}^α es débilmente inferiormente semicontinua en Λ .

Demostración. Sea $q^k = (q_1^k, \dots, q_N^k)$ una sucesión en Λ que converge débilmente a $q = (q_1, \dots, q_N)$. Es suficiente considerar sólo el caso

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^\alpha(q^k) = c < \infty, \quad (1-32)$$

ya que si $c = \infty$ el resultado es trivial. Sin pérdida de generalidad supongamos $\mathcal{A}^\alpha(q^k)$ está acotada por alguna constante C y $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^\alpha(q^k) = c < \infty$.

Sea $r_{ij}^k := |q_i^k - q_j^k|$, $T = 1$, por el Corolario 1.1.2 el encaje $\Lambda \hookrightarrow C^0([0, 1], \mathcal{X})$ es compacto, así, una subsucesión que denotamos de la misma manera, r_{ij}^k converge uniformemente a $r_{ij} := |q_i - q_j|$ y como $\mathcal{A}^\alpha(q^k)$ es acotada, la sucesión $1/r_{ij}^k$, para $1 \leq i < j \leq N$, es acotada en $L^1([0, 1])$.

Sea $Supp(r_{ij}) := \{t \in [0, 1] | r_{ij}(t) \neq 0\}$ y $\Delta(r_{ij}) := \{t \in [0, 1] | r_{ij}(t) = 0\}$. Claramente $Supp(r_{ij}) = [0, 1] \setminus \Delta(r_{ij})$. Mostraremos que $m(\Delta(r_{ij})) = 0$ donde m denota la medida de Lebesgue.

En efecto, supongamos que $m(\Delta(r_{ij})) = \mu_{ij} > 0$. Sea $\epsilon_{ij} := \frac{1}{C} m_i m_j \mu_{ij}$ y $N_{ij} \in \mathbb{N}$ tal que $\|r_{ij}^k - r_{ij}\|_{C^0} < \epsilon_{ij}$ siempre que $k \geq N_{ij}$, entonces

$$\mathcal{A}^\alpha(q^k) \geq m_i m_j \int_{\Delta(r_{ij})} \frac{1}{r_{ij}^k} > \frac{m_i m_j \mu_{ij}}{\epsilon_{ij}} = C,$$

lo cual es una contradicción. Así la sucesión $1/r_{ij}^k$ converge a $1/r_{ij}$ casi en todas partes. Luego por el lema de Fatou,

$$\int_0^1 \frac{1}{r_{ij}} dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{r_{ij}^k} dt. \quad (1-33)$$

Ahora como la convergencia débil de q^k a q en el espacio de Hilbert Λ implica que

$$\|q_i\|_{H^1}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|q_i^k\|_{H^1}^2,$$

tenemos que

$$\|\dot{q}_i\|_{L^2}^2 = \|q_i\|_{H^1}^2 - \|q_i\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|q_i^k\|_{H^1}^2 - \|q_i\|_{L^2}^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{q}_j^k\|_{L^2}^2. \quad (1-34)$$

Así de (1-33) y (1-34)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\alpha(q) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\dot{q}_j\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \int_0^1 \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\ &= \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N m_j \|\dot{q}_j^k\|_{L^2}^2 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \int_0^1 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^k} dt \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^\alpha(q^k). \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{A}^α es débilmente inferiormente semicontinua en Λ . ■

1.3.3. Mínimos de la acción y equilibrios relativos

En la literatura, pocos trabajos muestran de manera explícita mínimos de la acción sobre alguna clase especial de lazos. En [3] V. Barutello y S. Terracini, muestran que el mínimo de la acción entre lazos 2π -periódicos en H^1 es la solución de equilibrio relativo cuya configuración central es un mínimo absoluto del potencial entre todas las configuraciones tal que el movimiento de equilibrio relativo asociado es una coreografía simple. A continuación enunciamos brevemente el resultado principal de Barutello y Terracini el cual es equivalente al presentado en [7] en el caso continuo.

Resultado de V. Barutello y S. Terracini

Resolver (1-17) en el caso de masas iguales (sin pérdida de generalidad suponemos que cada $m_i=1$) bajo la restricción de coreografía simple (1-29) es equivalente a encontrar los puntos críticos del funcional

$$\mathcal{A}_1^\alpha(x) = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{N-1} \int_0^\tau |\dot{x}(t+h\tau)|^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{\substack{h,l=0 \\ h \neq l}}^{N-1} \int_0^\tau \frac{dt}{|x(t+l\tau) - x(t+h\tau)|^\alpha} \quad (1-35)$$

en el conjunto

$$\Lambda_1 = \{x \in H_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid x(t) \neq x(t + h\tau), \forall t \in \mathbb{R}, h = 1, \dots, N - 1\}. \quad (1-36)$$

La restricción de coreografía implica que las cantidades

$$\int_0^\tau dt / |q(t + l\tau) - q(t + h\tau)|^\alpha,$$

sólo dependen de $l - h$, ya que sólo hay $N - 1$ promedios distintos en $[0, 2\pi]$ de distancias entre dos cuerpos, entonces dividiendo entre N podemos rescribir la acción en (1-35) de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_1^\alpha(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|x(t) - x(t + h\tau)|^\alpha}. \quad (1-37)$$

El resultado principal de Barutello y Terracini es el siguiente:

Teorema 1.3.1 (*Teorema 1, [3]*) *Para cada $\alpha > 0$ y $d \geq 2$, el mínimo absoluto de \mathcal{A}_1^α en Λ_1 se alcanza en un movimiento de equilibrio relativo asociado con el N -ágono.*

En el capítulo 3 demostraremos un resultado análogo al teorema 1.3.1 en el contexto de coreografías continuas, utilizando ideas similares a las de Barutello y Terracini.

Capítulo 2

Problema de 4-cuerpos

En este capítulo estudiamos el problema newtoniano de 4-cuerpos con masas iguales ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$) en el plano (\mathbb{R}^2). Para este problema se prueba la existencia de una solución coreográfica simple no trivial mediante el enfoque variacional. Aunque la mayor parte de los resultados presentados en este capítulo han sido establecidos en [18, 22, 28]. El principal propósito de esta sección es ilustrar la implementación del método directo del cálculo de variaciones y algunas formas explícitas de cómo superar los problemas con los que se enfrenta, tales como la falta de coercitividad, la trivialidad de soluciones y posibles colisiones.

Como mencionamos en el capítulo anterior, una forma de obtener nuevas soluciones al problema de N -cuerpos mediante el enfoque variacional es elegir de entrada el espacio de configuraciones con las características deseadas, esto mediante la imposición de restricciones de simetría y/o topológicas y haciendo uso del principio de simetría crítica de Palais. En el problema de 4-cuerpos hagamos las siguientes consideraciones: sin pérdida de generalidad, tomemos $T = 1$ y $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ el círculo de radio 1. Consideremos el espacio de configuraciones \mathcal{X} definido en (1-24), el espacio de lazos como el espacio de Sobolev $\Lambda := H^1(S^1, \tilde{\mathcal{X}})$. También consideremos el grupo de simetría $D_{12} := \langle \gamma \rangle^1$ y

¹ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ significa el generado.

$\gamma := (\rho, \sigma, \tau)$, donde

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}, \quad \sigma = (1 \ 4 \ 3 \ 2), \quad \tau(t) = t - \frac{1}{12},$$

y γ actúa sobre $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \Lambda$ como

$$\gamma(q(t)) = (\rho, \sigma, \tau)(q(t)) = (\rho q_{\sigma^{-1}(1)}(\tau^{-1}(t)), \dots, \rho q_{\sigma^{-1}(4)}(\tau^{-1}(t))). \quad (2-1)$$

Observe que si denotamos por $\Sigma = \Lambda^{D_{12}}$, el subespacio de Λ invariante bajo D_{12} , tenemos que:

$$\Sigma = \left\{ q \in \Lambda \mid q_j(t + 1/3) = R_{\frac{2\pi}{3}} q_j(t), q_{j+1}(t) = q_j(t + \frac{1}{4}), j = 1, 2, 3; \right. \\ \left. q_1(t) = M q_1(-t), q_2(t) = M q_4(-t), q_3(t) = M q_3(-t) \right\},$$

donde,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}.$$

Observación 2.0.1 Observe que si $q_1(t) = (r \sin 2\pi t, r \cos 2\pi t)$, $t \in [0, 1/4]$ y $q_j(t) := q_1(t + \frac{j-1}{4})$, $j = 2, 3, 4$, entonces $q(t) := (q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)) \in \Sigma$. Es decir, la órbita circular de período 2π dada por $q_1(t)$, $t \in [0, 1]$, define una curva en Σ .



Figura 2-1: Ejemplo de curvas en Σ . Cada color representa el recorrido de uno de los cuerpos en el período de tiempo $[0, 1/4]$.

Como el espacio Σ consta de curvas que satisfacen la restricción de coreografía, entonces por el Teorema 1.3.1 y la Observación 2.0.1 el mínimo del funcional de acción \mathcal{A}^1 definido en (1-30) es el círculo. Entonces sin restricciones extras al espacio de configuraciones Σ que excluyan las órbitas circulares no podremos obtener soluciones no triviales mediante el método variacional de minimización. Para esto recurrimos a la restricción topológica del *índice* (*número de vueltas*) de una curva, la cual nos ayuda a excluir del espacio de configuraciones ciertas soluciones circulares.

Definición 2.0.1 Sea $\Upsilon := \{z(t) | t \in [a, b]\}$, una curva continua cerrada y orientada, p un punto en el plano que no está sobre la curva. El índice (número de vueltas) de la curva Υ alrededor de p , denotado por $I(\Upsilon, p)$, se define como

$$I(\Upsilon, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Upsilon} \frac{dz}{z - p}. \quad (2-2)$$

Si $p = 0$, entonces simplemente escribimos $I(\Upsilon)$.

El índice es el número de vueltas que $z(t)$ da alrededor de p en $[a, b]$. Las vueltas realizadas en sentido antihorario cuentan como positivas, mientras que las realizadas en sentido horario cuentan como negativas.

Ahora usando la restricción topológica del índice definimos el subespacio de Σ libre de colisión por:

$$\tilde{\Omega} = \left\{ q \in \Sigma \mid q_i(t) \neq q_j(t), \forall i \neq j, \forall t \in \mathbb{R}; I(q_i(t) - q_j(t)) = 2 \right\}. \quad (2-3)$$

La restricción del índice excluye del espacio de configuraciones la órbita circular dada por $q_1(t)$ en la Observación 2.0.1. Sin embargo no excluye la órbita circular de grado 2 dada por $\bar{q}_1(t) = (r \sin 4\pi t, r \cos 4\pi t)$, $t \in [0, 1]$, pues si $q_i(t) := q_1(t + (i-1)/4)$, $i = 2, 3, 4$, entonces $\bar{q}(t) := (\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t), \bar{q}_3(t), \bar{q}_4(t)) \in \Omega := \tilde{\Omega} \cup \Delta$. Pero por otro lado observe también que $\bar{q}_1(t) = \bar{q}_3(t)$ y $\bar{q}_2(t) = \bar{q}_4(t)$, luego por definición $\mathcal{A}(\bar{q}) = +\infty$. Así la curva circular de grado 2 no puede ser un mínimo de \mathcal{A} en Ω .

Observe que el subespacio $\tilde{\Omega}$ consta de curvas del tipo flor y del tipo trébol



Figura 2-2: Curva tipo flor y trébol, respectivamente.

La curva tipo flor y el trébol satisfacen la misma restricción de simetría impuestas en Σ , sin embargo ahora en $\tilde{\Omega}$ distinguimos una de la otra mediante la restricción topológica del índice. El trébol tiene índice 2 mientras que para la flor no tiene sentido el índice como tal, debido a que pasa por el origen, sin embargo sí lo tiene para las curvas $q_i - q_j$, donde q_i y q_j ($i \neq j$) están sobre la flor. Es por ello que pertenece al espacio de configuraciones $\tilde{\Omega}$.

Observación 2.0.2 *Respecto a la restricción impuesta en $\tilde{\Omega}$ surge naturalmente la siguiente pregunta ¿por qué no elegir $I(q_i) = 2$ en lugar de $I(q_i - q_j) = 2$? La razón es que si consideramos la restricción $I(q_i) = 2$ la curva tipo flor dejaría de estar en nuestro espacio de configuración. De hecho estaría en la frontera de éste y como veremos más adelante no podremos descartar que esta curva sea un mínimo de la acción. Por eso para evitar este problema una forma de considerarla en nuestro espacio de configuración es imponiendo la restricción $I(q_i - q_j) = 2$.*

Como ejemplo del movimiento de los cuerpos sobre curvas en $\tilde{\Omega}$ mostramos las configuraciones de los 4 cuerpos sobre el trébol, donde la simetría rotacional dada por ρ está desfasada por múltiplos de $1/12$.

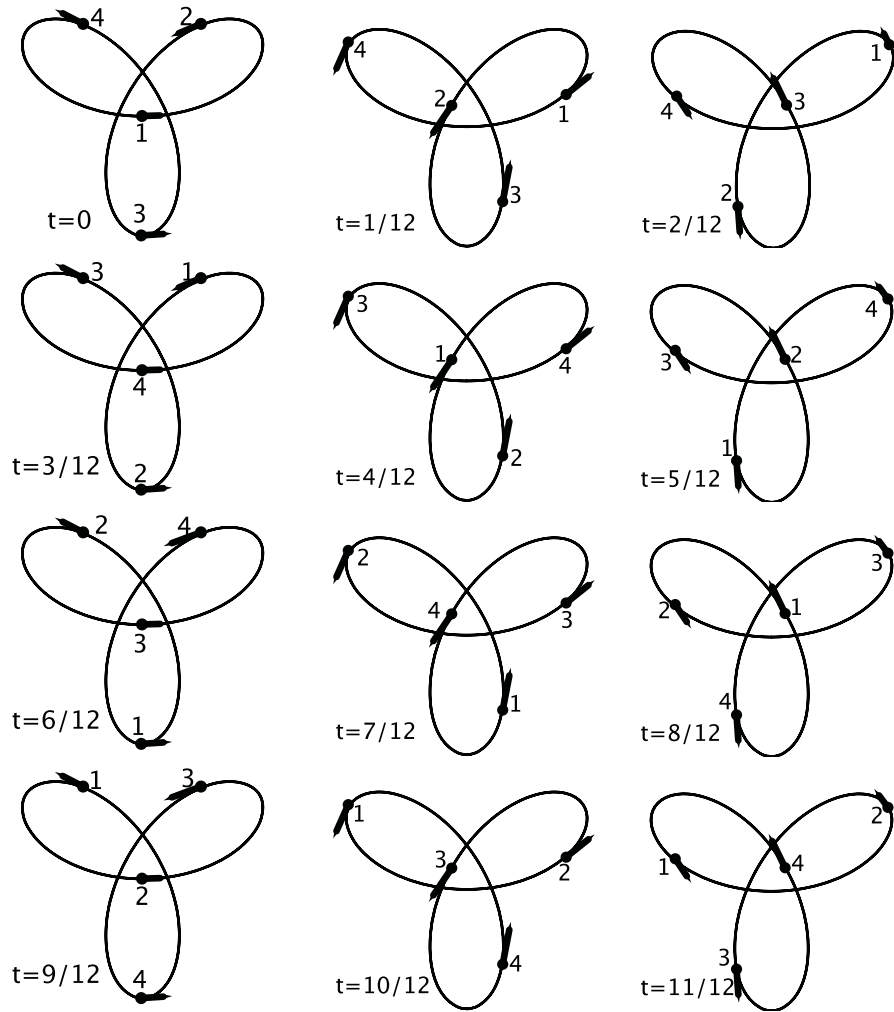


Figura 2-3: Configuración de los 4-cuerpos en el período $T = 1$.

Una vez hecha la elección del subespacio de configuraciones, $\Omega \subset H^1(S^1, \mathcal{X})$, aplicamos el método directo del cálculo de variaciones al funcional \mathcal{A}^1 sobre Ω para mostrar la existencia de soluciones no triviales en el problema de 4 cuerpos. Enunciamos esto en el siguiente resultado,

Teorema 2.0.2 (Teorema 1.1, [18]) *El mínimo global de \mathcal{A}^1 en $\bar{\Omega}$ es una solución co-reográfica sin colisión del problema de 4 cuerpos.*

Siguiendo el enfoque variacional, la demostración del Teorema 2.0.2 consta de los siguientes pasos:

P1. Probar que un mínimo de $\mathcal{A}^1|_{\bar{\Omega}}$ es un mínimo de \mathcal{A}^1 en $H^1(S^1, \mathcal{X})$.

P2. Probar la existencia de mínimos de \mathcal{A}^1 en $\bar{\Omega}$.

P3. Probar que los mínimos de \mathcal{A}^1 en $\bar{\Omega}$ no tienen colisión.

El paso P1 queda demostrado por el siguiente resultado y la construcción de Σ permite usar el Teorema 1.1.5.

Proposición 2.0.1 *Los puntos críticos del funcional de acción \mathcal{A}^1 restringido a $\tilde{\Omega}$ son también puntos críticos de \mathcal{A}^1 en Σ .*

Demostración. Observe que para $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_N) \in \tilde{\Omega}$, tenemos que $I(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j) = 2$. Entonces para todo $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_N) \in \tilde{\Omega}$ y $\epsilon \rightarrow 0$ la perturbación $\tilde{q} + \epsilon\tilde{w} \in \tilde{\Omega}$. De hecho por la propiedad de preservación del índice bajo pequeñas perturbaciones

$$I(\tilde{q}_i + \epsilon\tilde{w}_i - (\tilde{q}_j + \epsilon\tilde{w}_j)) = I(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j + \epsilon(\tilde{w}_i - \tilde{w}_j)) = I(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j) = 2, \quad \forall i \neq j,$$

y $\tilde{q} + \epsilon\tilde{w} \in \Sigma$. Entonces si $\tilde{q} \in \tilde{\Omega}$ es un punto crítico de \mathcal{A}^1 en $\tilde{\Omega}$ para toda dirección $\tilde{w} \in \tilde{\Omega}$ la G -derivada $\dot{\mathcal{A}}^1(\tilde{q})\tilde{w} = 0$. Así

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{A}^1(\tilde{q} + \epsilon\tilde{w}) \right|_{\epsilon=0} = \dot{\mathcal{A}}^1(\tilde{q})\tilde{w} = 0, \quad (2-4)$$

para todo $w \in \Sigma$. ■

La demostración de los pasos P2 y P3 requieren mayor cuidado por lo que se harán en las siguientes secciones.

2.1. Existencia de mínimos

En el capítulo anterior, la imposibilidad de establecer la existencia de mínimos de \mathcal{A}^1 en Λ es debido a la falta de coercitividad del funcional. Mediante restricciones de simetría sobre Λ obtuvimos Ω donde el funcional es coercitivo y por tanto en este espacio podemos establecer la existencia de mínimos como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1 *El funcional de acción \mathcal{A}^1 alcanza su ínfimo en $\bar{\Omega}$.*

Demostración. El conjunto $\bar{\Omega}$ es débilmente cerrado: sea $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión en $\bar{\Omega}$ que converge débilmente a \bar{q} , como convergencia débil en $H^1([0, 1], \mathcal{X})$ implica convergencia uniforme, si \bar{q} es libre de colisión con $I(\bar{q}_i - \bar{q}_j) = 2$, entonces $q_n \in \tilde{\Omega}$ para todo n suficientemente grande y por continuidad $\bar{q} \in \tilde{\Omega}$. Ahora si \bar{q} tiene colisión ó $I(\bar{q}_i - \bar{q}_j) \neq 2$ por definición de cerradura, $\bar{q} \in \bar{\Omega}$.

Por otro lado, para cualquier $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \tilde{\Omega}$ tenemos que $\sum_{i=1}^4 q_i(t) = 0$ y por la condición de coreografía $q_i(t) = q_1(t + \frac{i-1}{4}), i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_1(t)dt &= \int_0^{1/4} q_1(t)dt + \int_{1/4}^{2/4} q_1(t)dt + \int_{2/4}^{3/4} q_1(t)dt + \int_{3/4}^1 q_1(t)dt \\ &= \int_0^{1/4} \left[q_1(t) + q_1\left(t + \frac{1}{4}\right) + q_1\left(t + \frac{2}{4}\right) + q_1\left(t + \frac{3}{4}\right) \right] dt \\ &= \int_0^{1/4} \sum_{i=1}^4 q_i(t)dt = 0, \end{aligned}$$

además como $q_1(t+1) = q_1(t)$ entonces

$$\int_0^1 q_i(t)dt = \int_0^1 q_1\left(t + \frac{i-1}{4}\right)dt = \int_0^1 q_1(t)dt = 0, \quad i = 2, 3, 4.$$

Luego por la desigualdad de Poincare-Wirtinger:

$$(2\pi)^2 \int_0^1 |q_i(t)|^2 dt \leq \int_0^1 |\dot{q}_i(t)|^2 dt,$$

esto implica que \mathcal{A}^1 es coercitivo en $\bar{\Omega}$.

Por el Lema 1.3.1, \mathcal{A}^1 es débilmente inferiormente semicontinua. Así por el Lema 1.1.2 \mathcal{A}^1 alcanza su ínfimo en $\bar{\Omega}$. ■

El resultado anterior muestra que existe $q_0(t) \in \bar{\Omega}$ tal que $\mathcal{A}^1(q_0) = \inf\{\mathcal{A}^1(q) | q \in \bar{\Omega}\}$. Entonces por definición de Ω una curva límite en la frontera de Ω , $\partial\Omega$, puede ser de los siguientes dos tipos:

- i) Existe colisión entre dos cuerpos.

ii) El índice de la curva (*winding number*) entre dos cuerpos es distinta a 2.

El siguiente resultado ([18], Lema 3.2) asegura que la existencia de curvas en $\partial\Omega$ del tipo *ii*) se puede reducir a solo considerar curvas límite del tipo *i*), es decir que contengan colisión entre dos cuerpos, ya que si dos cuerpos $q_i(t)$ y $q_j(t)$ ($i \neq j$) no colisionan entonces $I(q_i(t) - q_j(t)) = 2$.

Proposición 2.1.2 *La curva límite $\tilde{q}(t) = (\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \tilde{q}_3(t), \tilde{q}_4(t)) \in \bar{\Omega}$ de una sucesión $q^m(t) = (q_1^m(t), q_2^m(t), q_3^m(t), q_4^m(t)) \in \tilde{\Omega}$ puede tener colisión entre dos cuerpos o tienen el mismo índice (i.e. $I(\tilde{q}_i(t) - \tilde{q}_j(t)) = 2, \forall i \neq j$).*

Demostración. Supongamos $q^k(t) \rightarrow q(t)$ en $\tilde{\Omega}$, por el teorema de inmersión de Sobolev (Corolario 1.1.2), tenemos que

$$q^k(t) \rightarrow q(t) \quad \text{uniformemente en } [0, 1]. \quad (2-5)$$

Definimos las curvas cerradas $q_i(t) - q_j(t)$ y $q_i^k(t) - q_j^k(t)$ mediante las expresiones

$$q_i(t) - q_j(t) = r_{i,j}(t) \exp(\sqrt{-1}\theta_{i,j}(t)), \quad q_i^k(t) - q_j^k(t) = r_{i,j}^k(t) \exp(\sqrt{-1}\theta_{i,j}^k(t)).$$

De la restricción topológica en la definición de $\tilde{\Omega}$, se tiene que

$$r_{i,j}^k(0) = r_{i,j}^k(1), \quad \theta_{i,j}^k(1) = \theta_{i,j}^k(0) + 4\pi,$$

además por (2-5)

$$r_{i,j}^k(t) \rightarrow r_{i,j}(t), \quad \theta_{i,j}^k(t) \rightarrow \theta_{i,j}(t) \quad \text{uniformemente en } [0, 1], \quad \forall i, j (i \neq j). \quad (2-6)$$

Así tenemos lo siguiente

- a. Si existe $t = t_0$ y $i_0, j_0 (i_0 \neq j_0)$ tal que $r_{i_0, j_0}(t_0) = 0$, entonces $q_{i_0}(t), q_{j_0}(t)$ colisionan al tiempo t_0 .

- b. Ahora supongamos que $r_{i,j}(t) \neq 0 \forall t$ y $\forall i, j (i \neq j)$ y que existen $q_{i_0}(t), q_{j_0}(t)$ con $i_0 \neq j_0$ tal que

$$I(q_{i_0}(t) - q_{j_0}(t)) = p \neq 2.$$

Entonces

$$r_{i_0, j_0}(0) = r_{i_0, j_0}(1), \quad \theta_{i_0, j_0}(1) = \theta_{i_0, j_0}(0) + 4\pi.$$

Por otro lado como

$$\theta_{i_0, j_0}^k(0) \longrightarrow \theta_{i_0, j_0}(0),$$

tenemos que

$$|\theta_{i_0, j_0}^k(1) - \theta_{i_0, j_0}(1)| \geq 2\pi,$$

lo cual contradice la segunda ecuación de (2-6). Con lo que terminamos la prueba.

■

2.2. Exclusión de curvas con colisiones

Una vez que se ha probado la existencia de $q_{min}(t)$ y debido a que estamos trabajando sobre el espacio de Sobolev $H^1(S^1, \mathcal{X})$, el hecho de que $\mathcal{A}^1(q_{min})$ es finito y que $U(q)$ es infinito sobre trayectorias con colisiones, implica que el conjunto de tiempos de colisión de $q_{min}(t)$ (denotado por $T_{col}(q_{min})$) es cerrado y con medida cero, por lo tanto el complemento de $T_{col}(q_{min})$ es la unión de un número finito o contable de intervalos abiertos (ver demostración del Lema 1.3.1, [24]). Más aún,

Proposición 2.2.1 *Si $q_{min}(t)$ es un mínimo de \mathcal{A}^1 con colisiones, y el intervalo (a, b) es una componente conexa de $\mathbb{R} \setminus T_{col}(q_{min})$, entonces $q_{min}|_{(a,b)}$ es una solución clásica de (1-17).*

Demostración. Como (a, b) es una componente conexa de $\mathbb{R} \setminus T_{col}(q_{min})$, la periodicidad implica que $b - a \leq 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $[a, b] \subset [0, 1]$. Sea

$h(t) \in \tilde{\Omega}$ tal que $\text{supp}(h|_{[0,1]}) \subset (a, b)$. Como h es cero en $T_{col}(q_{min})$, $s \mapsto \mathcal{A}^{-1}(q_{min} + sh)$ es diferenciable para $s = 0$ y $q_{min}(t)$ es un mínimo,

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{A}^{-1}(q_{min} + sh) = \int_a^b (\dot{q}_{min}(t) \cdot \dot{h}(t) + \nabla U(q_{min}(t)) \cdot h(t)) dt = 0, \quad (2-7)$$

lo cual implica por el Corolario 1.3.1 que $q_{min}(t)$ es una solución clásica para $t \in (a, b)$.

■

Estas piezas de “soluciones” son llamadas *soluciones generalizadas* ([22],[29]). De modo que si realmente queremos soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento de Newton debemos mostrar que los mínimos $q_{min}(t)$ son soluciones suficientemente regulares, es decir, tenemos que descartar la existencia de colisiones a lo largo de $q_{min}(t)$.

Para esto utilizaremos el siguiente resultado clásico,

Lema 2.2.1 (Teorema de Gordon,[24]) *Sea $x \in H^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^k)$ y $x(t_1) = x(t_2) = 0$. Entonces para cualquier $\alpha > 0$, tenemos*

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{\alpha}{|x|} \right) dt \geq \frac{3}{2} (2\pi)^{2/3} \alpha^{2/3} (t_1 - t_2)^{1/3}.$$

Adicionalmente se tiene la identidad de Lagrange

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

donde $a_k, b_k, k = 1, \dots, n$, son números reales o complejos.

Primero notemos que podemos reescribir la energía cinética como:

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} |\dot{q}_i - \dot{q}_j|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |\dot{q}_i - \dot{q}_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (|\dot{q}_i|^2 + |\dot{q}_j|^2 - 2\langle \dot{q}_i, \dot{q}_j \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i|^2 \sum_{j=1}^n 1 - \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{q}_i, \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \right\rangle = n \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i|^2, \end{aligned}$$

de manera que el funcional de acción para 4 cuerpos se puede expresar como

$$\mathcal{A}^1(q) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 |\dot{q}_i|^2 - V(q) \right) dt = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{q}_i - \dot{q}_j|^2 dt + \int_0^1 \frac{4}{|q_i - q_j|} dt \right). \quad (2-8)$$

Claramente de esta nueva desigualdad vemos que el funcional de acción $\mathcal{A}^1(q)$ para el problema de 4 cuerpos se puede escribir como la suma de 6 acciones, en la que cada una corresponde a la pareja (i, j) tal que $1 \leq i < j \leq 4$ y es equivalente a un problema de 2 cuerpos con masas iguales. La ventaja de la expresión (2-8) es que podemos calcular una cota inferior para el funcional de acción de soluciones generalizadas por medio del Lema 2.2.1. Obviamente para esto debemos conocer el conjunto de colisión. En efecto, para calcular el conjunto de colisión observemos que en el caso de 4 cuerpos sobre una curva que satisface la condición de coreografía simple tenemos el siguiente orden:

$$m_1 \longrightarrow m_2 \longrightarrow m_3 \longrightarrow m_4 \longrightarrow m_1,$$

y por tanto sólo existen dos formas de colisión entre dos partículas distintas:

c1) Colisión entre partículas $m_i, m_{i+1}, i = 1, 2, 3$, más la colisión entre m_1 con m_4 .

Llamamos a este tipo de colisión *consecutiva*.

c2) Colisión entre la partícula m_i y la partícula $m_{i+2}, i = 1, 2$. (Llamamos a estas colisiones *no consecutivas*).

A continuación estudiamos detalladamente cada una de estas formas de colisión.

c1). Sin pérdida de generalidad supongamos que q_1, q_2 colisionan al tiempo t_0 , esto es, $q_1(t_0) = q_2(t_0)$, entonces por la restricción $q_{i+1}(t) = q_i(t + \frac{1}{4}), i = 1, 2, 3$ tenemos que $q_1(t_0) = q_1(t_0 + \frac{1}{4})$. Luego por la condición $q_i(t + \frac{1}{3}) = R_{\frac{2\pi}{3}} q_i(t)$, resulta que $q_1(t) = q_1(t_0 + \frac{4}{12}) = q_1(t_0 + \frac{8}{12})$. De esta manera obtenemos que

$$q_1, q_2 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad t_0, t_0 + \frac{4}{12}, t_0 + \frac{8}{12}.$$

$$q_2, q_3 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad t_0 + \frac{1}{12}, t_0 + \frac{5}{12}, t_0 + \frac{9}{12}.$$

$$q_3, q_4 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad t_0 + \frac{2}{12}, t_0 + \frac{6}{12}, t_0 + \frac{10}{12}.$$

$$q_4, q_1 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad t_0 + \frac{3}{12}, t_0 + \frac{7}{12}, t_0 + \frac{11}{12}.$$

Así en este caso los tiempos donde hay colisión son de la forma $t_1 = t_0 + \frac{4s}{12} + \frac{i-1}{12}$, $s = 0, 1, 2$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, donde i significa que q_i colisiona con q_{i+1} .

Por otro lado, de la restricción $q_1(t) = Mq_1(-t)$, $q_3(t) = Mq_3(-t)$ y $q_2(t) = Mq_4(-t)$

$$q_4, q_1 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad 1 - t_0, 1 - t_0 + \frac{4}{12}, 1 - t_0 + \frac{8}{12}.$$

$$q_1, q_2 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad 1 - t_0 + \frac{1}{12}, 1 - t_0 + \frac{5}{12}, 1 - t_0 + \frac{9}{12}.$$

$$q_2, q_3 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad 1 - t_0 + \frac{2}{12}, 1 - t_0 + \frac{6}{12}, 1 - t_0 + \frac{10}{12}.$$

$$q_3, q_4 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad 1 - t_0 + \frac{3}{12}, 1 - t_0 + \frac{7}{12}, 1 - t_0 + \frac{11}{12}.$$

Aquí los tiempos donde hay colisión son de la forma $t_2 = 1 - t_0 + \frac{4r+1}{12} + \frac{i-1}{12}$, $r = 0, 1, 2$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Como podemos ver, cada restricción da tiempos donde hay colisión representados por t_1 y t_2 , los cuales pueden coincidir o no. Estas dos posibilidades son: $t_1 \neq t_2$, esto es, cuando $t_0 \neq \frac{4k+1}{24}$, $k = 0, 1, \dots, 5$, q_i y q_{i+1} colisionan 6 veces en $[0, 1]$.

Ahora si $t_1 = t_2$, entonces q_i y q_{i+1} sólo colisionan 3 veces en $[0, 1]$.

c2). Consideramos sólo cuando q_1 y q_3 colisionan al tiempo t_0 . Procedemos de manera similar al caso anterior y obtenemos:

$$q_1, q_3 \quad \text{colisionan en los tiempos:} \quad t_0, t_0 + \frac{2}{12}, t_0 + \frac{4}{12}, t_0 + \frac{6}{12}, t_0 + \frac{8}{12}, t_0 + \frac{10}{12},$$

$$1 - t_0, 1 - t_0 + \frac{2}{12}, 1 - t_0 + \frac{4}{12}, 1 - t_0 + \frac{6}{12}, 1 - t_0 + \frac{8}{12}, 1 - t_0 + \frac{10}{12}.$$

q_2, q_4 colisionan en los tiempos: $t_0 + \frac{1}{12}, t_0 + \frac{3}{12}, t_0 + \frac{5}{12}, t_0 + \frac{7}{12}, t_0 + \frac{9}{12}, t_0 + \frac{11}{12},$

$$1 - t_0 + \frac{1}{12}, 1 - t_0 + \frac{3}{12}, 1 - t_0 + \frac{5}{12}, 1 - t_0 + \frac{7}{12}, 1 - t_0 + \frac{9}{12}, 1 - t_0 + \frac{11}{12}.$$

Por lo tanto hemos obtenido que si $t_0 \neq \frac{j}{12}, j = 0, \dots, 11$, entonces q_i y $q_{i+2}, i = 1, 2$ colisionan 12 veces en $[0,1]$.

Ahora si $t_0 = \frac{j}{12}, j = 0, \dots, 11$, entonces q_i y $q_{i+2}, i = 1, 2$, colisiona 12 veces en $[0,1]$.

Observe que en el análisis anterior sólo estudiamos los tiempos de colisión para una pareja de cada caso, pero esto es suficiente ya que cualquier pareja del mismo tipo (consecutivo o no consecutivo) dará los mismos tiempos de colisión mediante un análisis similar. Con esta información es posible encontrar estimaciones de las cotas inferiores para soluciones generalizadas como lo detallamos en la siguiente sección.

2.2.1. Cotras inferiores para soluciones generalizadas de 4 cuerpos.

De la nueva representación de la acción (2-8) y del Lema 2.2.1 (ver [18])

- (i) Si $t_0 = \frac{4k+1}{24}, k = 0, 1, \dots, 5$, tenemos 4 parejas consecutivas que colisionan 3 veces y 2 parejas no consecutivas que no colisionan en $[0,1]$, así obtenemos

$$\mathcal{A}^1(q) \geq \frac{3}{2}(2\pi)^{2/3}4^{-1/3} \left[4 \times 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} + 2 \right] \approx 33.2061. \quad (2-9)$$

- (ii) Si $t_0 \neq \frac{4k+1}{24}, k = 0, 1, \dots, 5$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{1}{24} < t_0 < \frac{5}{24}$ (para los otros casos se tiene la misma estimación) tenemos 4 parejas consecutivas que colisionan 6 veces y 2 parejas no consecutivas que no colisionan

en $[0,1]$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^1(q) &\geq \frac{3}{2}(2\pi)^{2/3}4^{-1/3}\left\{4 \times 3\left[\left(\frac{1}{12} - 2t_0\right)^{1/3} + \left(2t_0 - \frac{5}{12}\right)^{1/3}\right] + 2\right\} \\ &\geq \frac{3}{2}(2\pi)^{2/3}4^{-1/3}\left[24\left(\frac{2}{12}\right)^{1/3} + 2\right] \approx 48.9315.\end{aligned}\tag{2-10}$$

(iii) Si $t_0 = \frac{k}{12}$, $k = 0, \dots, 11$, tenemos 2 parejas que colisionan 6 veces y 4 parejas que no colisionan en $[0,1]$, luego se tiene que

$$\mathcal{A}^1(q) \geq \frac{3}{2}(2\pi)^{2/3}4^{-1/3}\left[2 \times 6\left(\frac{2}{12}\right)^{1/3} + 4\right] \approx 34.1184.\tag{2-11}$$

(iv) Si $t_0 \neq \frac{k}{12}$, $k = 0, 1, \dots, 11$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{1}{12} < t_0 < \frac{2}{12}$ (para los otros casos se tiene la misma estimación) tenemos 2 parejas que colisionan 12 veces y 4 parejas que no colisionan en $[0,1]$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^1(q) &\geq \frac{3}{2}(2\pi)^{2/3}4^{-1/3}\left\{2 \times 6\left[(1 - 2t_0)^{1/3} + \left(2t_0 - \frac{2}{12}\right)^{1/3}\right] + 4\right\} \\ &\geq \frac{3}{2}(2\pi)^{2/3}4^{-1/3}\left[24\left(\frac{1}{12}\right)^{1/3} + 4\right] \approx 46.5996.\end{aligned}\tag{2-12}$$

De las estimaciones en (i) – (iv), se concluye que el ínfimo del funcional de acción sobre el conjunto de colisión es mayor o igual que 33.2061.

2.2.2. Exclusión de curvas con colisiones mediante curvas de prueba.

En la sección anterior obtuvimos una cota inferior para soluciones generalizadas, entonces es natural preguntarse si es posible encontrar una curva de prueba, $q(t)$, en el espacio de configuraciones sin colisión $\tilde{\Omega}$, tal que

$$\mathcal{A}^1(q(t)) < 33.2061.$$

Si esto es posible es claro que el mínimo de \mathcal{A}^1 sobre $\bar{\Omega}$ es libre de colisión y por el Lema 2.2.1 es una solución periódica del problema de 4 cuerpos.

Curva de prueba tipo-flor. Consideremos la curva definida por $f(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t))$, donde

$$\begin{cases} q_1(t) = 0.324(\sin 3\pi t \cos \pi t, \sin 3\pi t \sin \pi t) \\ q_2(t) = q_1(t + \frac{1}{4}) \\ q_3(t) = q_1(t + \frac{2}{4}) \\ q_4(t) = q_1(t + \frac{3}{4}). \end{cases} \quad (2-13)$$

Es fácil ver que $f(t)$ está en $\tilde{\Omega}$ y además,

$$\mathcal{A}^1(f(t)) \approx 31.1057 < 33.2061.$$

Curva de prueba tipo-trifolio. Ahora consideremos la curva definida por $\tilde{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t))$, donde

$$\begin{cases} q_1(t) = 0.324(\sin 3\pi t \cos \pi t, \sin 3\pi t \sin \pi t) - 0.021(\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \\ q_2(t) = q_1(t + \frac{1}{4}) \\ q_3(t) = q_1(t + \frac{2}{4}) \\ q_4(t) = q_1(t + \frac{3}{4}). \end{cases} \quad (2-14)$$

También se tiene que $\tilde{q}(t) \in \Omega$ y

$$\mathcal{A}^1(\tilde{q}(t)) \approx 30.8074 < 33.2061.$$

Las funciones de prueba anteriores muestran que el mínimo de la acción no tiene colisión. Los cálculos de las acciones para las funciones de prueba fueron hechos directamente con el paquete *Mathematica 8.0.4* con una precisión de 0.0001.

En los cálculos obtenidos vemos que la curva tipo trébol tiene acción menor que la curva

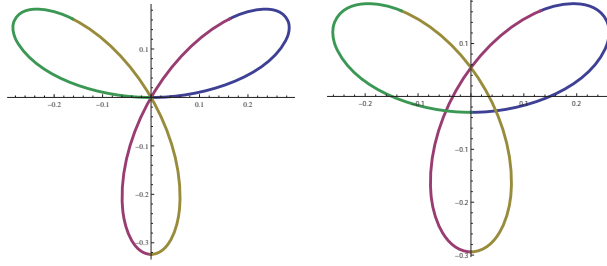


Figura 2-4: Curvas de prueba tipo flor y trifolio, respectivamente.

tipo flor para este caso particular. Sin embargo no se puede concluir que el infimo en general es una curva tipo trébol ya que no podemos hacer esta variación para cualquier curva del tipo flor. De hecho, en la siguiente sección probamos que las variaciones locales en curvas del tipo flor fallan dada la restricción del índice.

2.3. Falla de perturbación local dado la restricción topológica

En la Observación 2.0.2 mencionamos que la imposición de la restricción topológica $I(q_i - q_j) = 2$ en lugar de simplemente tomar $I(q_i) = 2$ surge precisamente al no poder descartar la curva tipo flor como mínimo del funcional de acción. También en el capítulo anterior mencionamos que una forma de descartar curvas con propiedades no deseadas en el método de minimización es mediante variaciones locales. En esta sección mostramos que el método de perturbación local en curvas del tipo flor falla dada la restricción topológica del índice.

Dado que el problema de la curva tipo flor es que pasa por el origen (por lo que no está definido el índice de la curva), entonces la idea es hacer una variación local alrededor del origen de manera que la acción decrezca. Sin embargo, veremos que la variación local donde la acción decrece produce curvas de índice 1 las cuales no están en nuestro espacio de configuraciones.

Suponemos que cualquier curva del tipo flor en general se puede escribir de la forma

$$q(t) = f(\theta(t)) \sin 3\theta(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad (2-15)$$

donde

$$\begin{cases} \theta(t + 1/3) = \theta(t) + \pi/3 \\ \theta(-t) = -\theta(t) \end{cases} \quad (2-16)$$

y

$$\begin{cases} f(\theta + \pi/3) = f(\theta) \\ f(-\theta) = f(\theta). \end{cases} \quad (2-17)$$

Para una curva arbitraria $q(t)$ de la forma (2-15) tal que

$$q_i(t) = q(t + (i - 1)/4), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2-18)$$

y $q(0) = 0$, se cumple que alrededor del cero $\theta(t) \approx \pi t$. Es decir, para t muy pequeños se tiene

$$q_1(t) \approx a3\pi t(1, \pi t) = 3\pi a(t, \pi t^2). \quad (2-19)$$

Por otro lado para $r = 1, 2$, consideramos la variación

$$\tilde{q}(t) := q(t) + \epsilon \varphi(t) \tilde{h}^r(t), \quad (2-20)$$

donde $\epsilon > 0$ pequeño y fijo, $\tilde{h}^r(t) = ((-1)^r \sin(2\pi t), (-1)^r \cos(2\pi t))$ y $\varphi : S^1 \rightarrow [0, 1]$ definida para un δ fijo suficientemente pequeño por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in \cup_{k=1}^3 [(k-1)/3 - \delta, (k-1)/3 + \delta]. \\ 0 \leq \varphi(t) \leq 1, & t \in \cup_{k=1}^3 [(k-1)/3 - 2\delta, (k-1)/3 - \delta]. \\ 0 \leq \varphi(t) \leq 1, & t \in \cup_{k=1}^3 [(k-1)/3 + \delta, (k-1)/3 + 2\delta], \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2-21)$$

tal que $\varphi(-t) = \varphi(t)$ y

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} > 0, & t \in \cup_{k=1}^3 [(k-1)/3 - 2\delta, (k-1)/3 - \delta], \\ < 0, & t \in \cup_{k=1}^3 [(k-1)/3 + \delta, (k-1)/3 + 2\delta]. \end{cases} \quad (2-22)$$

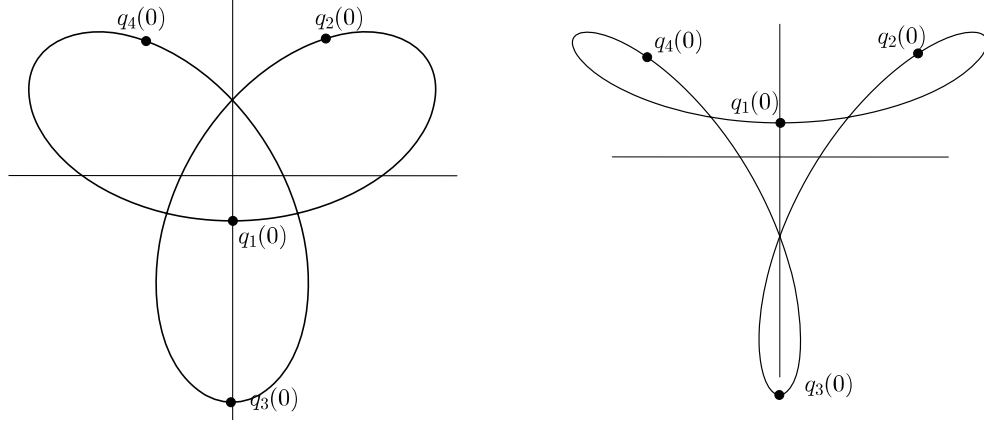


Figura 2-5: Las variaciones $r = 1$ y $r = 2$ producen curvas de este tipo respectivamente.

Observe que como $\tilde{q}_i(t) = \tilde{q}^r(t + (i-1)/4)$, $i = 1, 2, 3, 4$, y $\dot{\tilde{q}}^r(t) = \dot{q}(t) + \epsilon \dot{h}^r(t)$ con $h^r(t) := \varphi(t)\tilde{h}^r(t)$, entonces

$$|\dot{\tilde{q}}_i^r(t)|^2 = |\dot{q}_i(t)|^2 + 2\epsilon \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle + \frac{\epsilon^2}{2} |\dot{h}_i^r(t)|^2. \quad (2-23)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1(\tilde{q}^r(t)) - \mathcal{A}^1(q(t)) &= \epsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle dt + O(\epsilon^2) \\ &+ \int_0^1 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \left[\frac{1}{(|q_{ij}(t)|^2 + 2\langle q_{ij}(t), h_{ij}^r(t) \rangle + \epsilon^2 |h_{ij}^r(t)|^2)^{1/2}} - \frac{1}{|q_{ij}(t)|} \right] dt, \end{aligned} \quad (2-24)$$

donde $q_{ij}(t) = q_i(t) - q_j(t)$ y $h_{ij}^r(t) = h_i^r(t) - h_j^r(t)$. Además como

$$\frac{1}{(|q_{ij}(t)|^2 + 2\langle q_{ij}(t), h_{ij}^r(t) \rangle + \epsilon^2 |h_{ij}^r(t)|^2)^{1/2}} = \frac{1}{|q_{ij}(t)|} - \epsilon \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} + O(\epsilon^2),$$

la ecuación (2-24) se puede escribir como

$$\mathcal{A}^1(\tilde{q}^r(t)) - \mathcal{A}^1(q(t)) = \epsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle dt - \epsilon \int_0^1 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} dt + O(\epsilon^2). \quad (2-25)$$

Notemos que por la definición de $h^r(t) = \varphi(t)\tilde{h}^r(t)$ los términos de la derecha de la expresión (2-25) pueden ser distintos de cero sólo donde $\varphi(t)$ lo es. Por esta razón a continuación haremos el análisis en intervalos donde $\varphi(t) \neq 0$.

1) $t \in [-\delta, \delta]$.

Por definición en este intervalo $\varphi(t) = 1$. Entonces

$$h^r(t) = \varphi(t)\tilde{h}^r(t) = ((-1)^r \sin(2\pi t), (-1)^r \cos(2\pi t)), \quad (2-26)$$

y

$$q(t) \approx 3a\pi \left(t + O(t^2), \pi t^2 + O(t^3) \right). \quad (2-27)$$

De aquí tenemos los siguientes datos,

$$\begin{aligned} \langle \dot{q}_1(t), \dot{h}_1^r(t) \rangle &= \langle (3a\pi + O(t), 6a\pi^2 t + O(t^2)), ((-1)^r 2\pi \cos(2\pi t), (-1)^{r+1} 2\pi \sin(2\pi t)) \rangle \\ &= (-1)^r 6a\pi^2 \cos(2\pi t) + O(t) \\ &\approx (-1)^r 6a\pi^2 + O(t), \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\langle \dot{q}_i^r(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle = \langle \dot{q}_1(t + (i-1)/4), \dot{h}_1^r(t + (i-1)/4) \rangle = 0, \quad i = 2, 3, 4., \quad (2-29)$$

$$h_{23}^r(t) = h_{24}^r(t) = h_{34}^r(t) = 0. \quad h_{1j}^r(t) = h_1^r(t), \quad j = 2, 3, 4. \quad (2-30)$$

Existen $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ tal que $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2$ y

$$q_1(0) = (0, 0), \quad q_2(0) = (\alpha, \beta), \quad q_3(0) = (0, -\gamma), \quad q_4(0) = (-\alpha, \beta), \quad (2-31)$$

además como

$$\sum_{i=1}^4 q_i(0) = 0, \quad \text{entonces} \quad \gamma = 2\beta. \quad (2-32)$$

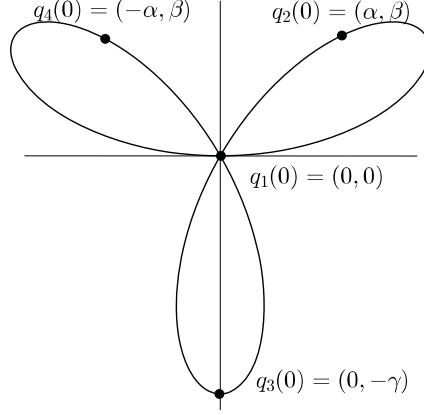


Figura 2-6: Posiciones de los 4 cuerpos al tiempo $t=0$.

Así

$$\frac{\langle q_{12}, h_{12}^r \rangle}{|q_{12}|^3} = \frac{\langle q_{14}, h_{14}^r \rangle}{|q_{14}|^3} = \frac{\langle (\alpha, -\beta), (0, (-1)^r) \rangle}{|(\alpha, -\beta)|^3} = \frac{(-1)^{r+1}\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}, \quad (2-33)$$

$$\frac{\langle q_{13}, h_{13}^r \rangle}{|q_{13}|^3} = \frac{\langle (0, \gamma), (0, -1) \rangle}{\gamma^3} = \frac{(-1)^r}{\gamma^2}, \quad (2-34)$$

de donde obtenemos

$$-\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} = (-1)^{r+1} \left[-\frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} + \frac{1}{\gamma^2} \right]. \quad (2-35)$$

Observe que como $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2$ la ecuación (2-35) es menor que cero para $r = 1$ y mayor que cero para $r = 2$.

2) $t \in [-2\delta, -\delta] \cup [\delta, 2\delta]$.

En este caso, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$, $\varphi(t) = \varphi(-t)$, $\dot{\varphi}(t) = -\dot{\varphi}(-t)$ y $q(t)$ como en (2-27).

Entonces

$$\begin{aligned}
\dot{h}^r(t) &= \dot{\varphi}(t)\tilde{h}^r(t) + \varphi(t)\dot{\tilde{h}}^r(t) \\
&= ((-1)^r\dot{\varphi}(t)\sin(2\pi t) + (-1)^r2\pi\varphi(t)\cos(2\pi t), \\
&\quad (-1)^r\dot{\varphi}(t)\cos(2\pi t) + (-1)^{r+1}2\pi\varphi(t)\sin(2\pi t)), \tag{2-36}
\end{aligned}$$

$$\dot{q}(t) = (3a\pi + O(t), 6a\pi t + O(t^2)). \tag{2-37}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle \dot{h}_1(t), \dot{q}_1(t) \rangle &= (-1)^r3a\pi\dot{\varphi}(t)\sin 2\pi t + (-1)^r6a\pi t\dot{\varphi}(t)\cos 2\pi t + (-1)^r6a\pi^2\varphi(t)\cos 2\pi t + O(t) \\
&\approx (-1)^rt\dot{\varphi}(t)(6a\pi^2 + 6a\pi) + (-1)^r6a\pi^2\varphi(t) + O(t), \tag{2-38}
\end{aligned}$$

$$\langle \dot{h}_i(t), \dot{q}_i(t) \rangle = 0, \quad i = 2, 3, 4., \tag{2-39}$$

$$h_{23}^r(t) = h_{24}^r(t) = h_{34}^r(t) = 0, \tag{2-40}$$

$$h_{1j}^r(t) = h_1^r(t) \approx \varphi(t)((-1)^r\pi t, (-1)^r), \quad j = 2, 3, 4. \tag{2-41}$$

Luego de manera similar al caso anterior se obtiene

$$q_1 = (t, t^2), \quad q_2(t) = (\alpha, \beta), \quad q_3(t) = (t, \gamma), \quad q_4(t) = (-\alpha \pm \epsilon_1, \beta \pm \epsilon_2), \tag{2-42}$$

y

$$\frac{\langle q_{12}, h_{12}^r \rangle}{|q_{12}|^3} \approx \frac{\langle q_{14}, h_{14}^r \rangle}{|q_{14}|^3} \approx (-1)^{r+1} \frac{\beta\varphi(t) + O(t)}{(\alpha^2 + \beta^2 + O(t))^{3/2}}, \tag{2-43}$$

$$\frac{\langle q_{13}, h_{13}^r \rangle}{|q_{13}|^3} \approx (-1)^r \frac{\gamma\varphi(t) + O(t)}{(\gamma^2 + O(t))^{3/2}}, \tag{2-44}$$

de donde obtenemos que

$$- \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij} \rangle}{|q_{ij}|^3}, \tag{2-45}$$

es $< O(t)$, si $r = 1$ y $> O(t)$, si $r = 2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^1(\tilde{q}^r(t)) - \mathcal{A}^1(q(t)) &= \epsilon \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} \right\} dt + O(\epsilon^2) \\
&= 3\epsilon \int_{-2\delta}^{-\delta} \left\{ \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} \right\} dt + O(\epsilon^2) \\
&= 3\epsilon \int_{-2\delta}^{-\delta} \left\{ \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} \right\} dt \\
&+ 3\epsilon \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} \right\} dt \\
&+ 3\epsilon \int_{\delta}^{2\delta} \left\{ \sum_{i=1}^4 \langle \dot{q}_i(t), \dot{h}_i^r(t) \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\langle q_{ij}, h_{ij}^r \rangle}{|q_{ij}|^3} \right\} dt + O(t),
\end{aligned}$$

Luego de las ecuaciones (2-28), (2-35), (2-38), (2-45)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^1(\tilde{q}(t)) - \mathcal{A}^1(q(t)) &\approx 3\epsilon \int_{-2\delta}^{-\delta} \left((-1)^r t \dot{\varphi}(t) (6a\pi^2 + 6a\pi) + (-1)^r 6a\pi^2 \varphi(t) + O(t) \right) dt \\
&+ 3\epsilon \int_{-\delta}^{\delta} \left((-1)^r 6a\pi^2 + O(t) \right) dt \tag{2-46} \\
&+ 3\epsilon \int_{-\delta}^{-2\delta} \left((-1)^r t \dot{\varphi}(t) (6a\pi^2 + 6a\pi) + (-1)^r 6a\pi^2 \varphi(t) + O(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

Observe que si $-2\delta \leq t \leq -\delta$, entonces $\delta \dot{\varphi}(t) \leq -t \dot{\varphi}(t) \leq 2\delta \dot{\varphi}(t)$ ya que $\dot{\varphi}(t) > 0$. Más aún, como $\delta \ll 1$ tenemos que $\dot{\varphi}(t) = 1/\delta$, así

$$1 \leq -t \dot{\varphi}(t) \leq 2 \quad \text{o equivalentemente} \quad -2 \leq t \dot{\varphi}(t) \leq -1. \tag{2-47}$$

Ahora sí $\delta \leq t \leq 2\delta$, entonces $-\delta \dot{\varphi}(t) \leq -t \dot{\varphi}(t) \leq -2\delta \dot{\varphi}(t)$ pues $\dot{\varphi}(t) < 0$. En este caso $\dot{\varphi}(t) = -1/\delta$, así

$$1 \leq -t \dot{\varphi}(t) \leq 2 \quad \text{o equivalentemente} \quad -2 \leq t \dot{\varphi}(t) \leq -1. \tag{2-48}$$

Finalmente de las ecuaciones (2-47), (2-48) y (2-46) obtenemos

I) si $r = 1$,

$$\mathcal{A}^1(\tilde{q}^r(t)) - \mathcal{A}^1(q(t)) > 36\pi\epsilon\delta > 0. \quad (2-49)$$

II) si $r = 2$,

$$\mathcal{A}^1(\tilde{q}^r(t)) - \mathcal{A}^1(q(t)) < -36\pi\epsilon\delta < 0. \quad (2-50)$$

Los casos I) y II) muestran que el funcional de acción crece en donde la variación local produce una curva del tipo trébol de grado 2 y decrece en donde se obtiene una curva de grado 1 respectivamente.

Capítulo 3

Coreografías continuas

En el capítulo 1 mencionamos que el N -ágono ($N \geq 3$) es una configuración central del problema de N -cuerpos newtoniano con masas iguales [36, 42]. Una configuración central plana puede generar soluciones homográficas. En particular, si las velocidades de las partículas son de las magnitudes correctas y tangentes al círculo que contiene al N -ágono, entonces obtenemos una solución de equilibrio relativo (llamado *N -ágono rotante*), donde las masas viajan a lo largo del círculo con velocidad uniforme. En este movimiento de rotación rígido la fuerza centrífuga balancea la fuerza de atracción de la “gravedad” de manera que se preserva el tamaño de la configuración. Observe también que el N -ágono rotante (el círculo) es una coreografía simple para cualquier $N \geq 3$. En este contexto la pregunta natural es ¿qué pasa cuando el número de masas crece sin límite?, es decir, cuando $N \rightarrow +\infty$: ¿Existe un sistema ecuaciones (sistema continuo) que rija el movimiento?, si lo hay, ¿será la configuración límite (en este caso el círculo) solución de este sistema continuo? ¿cómo se implementa el enfoque variacional?. Este capítulo es destinado a dar respuesta a estas preguntas.

El contenido del capítulo es el siguiente: en la primer sección obtenemos la ecuación límite del problema de N -cuerpos (1-17) con masas iguales ($N \rightarrow +\infty$, $0 < \alpha < 1$), cuando consideramos una distribución continua de masas en una curva del tipo onda viajera. Esta ecuación límite es una ecuación integro-diferencial que queda representada por medio

del valor principal de Cauchy. A las curvas solución de la ecuación límite les llamamos *coreografías continuas*. Posteriormente, en la sección dos asociamos un funcional de acción al sistema límite en un espacio de configuraciones adecuado, donde las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al funcional es precisamente la ecuación límite. Finalmente, en la sección tres probamos que el círculo es una coreografía continua para $0 < \alpha < 1$ (resultado equivalente al presentado en [36, 42] en el caso $N < +\infty$) y entonces probamos nuestro resultado principal el cual asegura que de hecho el círculo es el mínimo absoluto del funcional de acción (continuo) entre todos los lazos en H^1 de promedio cero y período 1. Esta distribución continua de masas es el equivalente del Teorema 1 en [3] donde, bajo la restricción de coreografía simple, la acción alcanza su mínimo absoluto en el equilibrio relativo asociado al N -ágono regular. Es importante señalar que sin la restricción de coreografía en el espacio de configuraciones, el equilibrio relativo asociado al N -ágono no es el mínimo del funcional de acción para $N \geq 6$, N par (ver [39]). En el caso continuo, veremos que la condición de coreografía está considerada implícitamente en nuestro espacio de configuraciones al tomar las trayectorias de las masas de tipo onda viajera.

Del contenido de este capítulo surgio el artículo *Continuous Choreographies as Limiting Solutions of N -body Type Problems with Weak Interaction*, *SIGMA 12 (2016), 104*, en colaboración con Pablo Padilla Longoria y Héctor F. Sánchez Morgado.

3.1. La ecuación de movimiento

Considere el problema de N -cuerpos (1-17) con masas iguales ($m_1 = \dots = m_N = 1/N$) en \mathbb{R}^d y $0 < \alpha < 1$

$$\ddot{q}_i(t) = - \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ j \neq i}} \frac{\alpha}{N} \frac{q_i(t) - q_j(t)}{\|q_i(t) - q_j(t)\|^{2+\alpha}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3-1)$$

También considere $q : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, periódica en la primer variable y dos veces diferenciable en la segunda. Sea $\Delta s = 1/N$ y suponga que la posición de la i -ésima masa al tiempo t está dada por

$$q_i(t) = q((i-1)\Delta s, t), \quad (3-2)$$

entonces la ecuación (3-1) se convierte en

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = - \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ j \neq i}} \alpha \frac{q((i-1)\Delta s, t) - q((j-1)\Delta s, t)}{\|q((i-1)\Delta s, t) - q((j-1)\Delta s, t)\|^{2+\alpha}} \Delta s, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3-3)$$

Así cuando $N \rightarrow +\infty$, $\Delta s \rightarrow 0$, el límite del lado derecho de la ecuación (3-3) puede ser escrito como el valor principal de Cauchy

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(s, t) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \alpha \frac{q(s, t) - q(r, t)}{\|q(s, t) - q(r, t)\|^{2+\alpha}} dr, \quad (CS)$$

donde s es el parámetro de masa.

Una manera natural de hacer que las posiciones $q_i(t)$ satisfagan las condición de coreografía es tomar $q(s, t)$ de tipo onda viajera, esto es

$$q(s, t) = y(s - vt), \quad (3-4)$$

donde y es una función 1-periódica en $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$.

Usando la expresión (3-4) en la ecuación (CS), obtenemos que y debe satisfacer

$$v^2 \ddot{y}(s) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \alpha \frac{y(s) - y(r)}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} dr, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (CC)$$

Denotamos por $C_1^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ el conjunto de funciones 1-periódicas en $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ y por $H_1^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ el conjunto de funciones 1-periódicas cuya restricción a $[0, 1]$ está en $H^1([0, 1], \mathbb{R}^d)$.

Definición 3.1.1 Una curva parametrizada diferenciable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ se dice que es

regular si $y'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Proposición 3.1.1 *Suponga que $y \in C_1^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ define una curva regular cerrada simple $\{y(t) : t \in [0, 1]\}$. Entonces el lado derecho de (CC) está bien definido.*

Demostración. Para $\epsilon > 0$, existe una función continua $g : \mathbb{R} \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$y(s+t) = y(s) + \dot{y}(s)t + g(s, t)t^2.$$

Como y es regular, para s fijo, la función

$$F(t) = \frac{(y(s+t) - y(s))|t|^{2+\alpha}}{t\|y(s+t) - y(s)\|^{2+\alpha}} = \frac{\dot{y}(s) + tg(s, t)}{\|\dot{y}(s) + tg(s, t)\|^{2+\alpha}}$$

puede ser considerada como una función continua en $[-\epsilon, \epsilon]$ con $F(0) = \dot{y}(s)\|\dot{y}(s)\|^{-2-\alpha}$ y diferenciable en 0. Así

$$G(t) = \left(\frac{y(s+t) - y(s)}{\|y(s+t) - y(s)\|^{2+\alpha}} - \frac{\dot{y}(s)t}{\|\dot{y}(s)t\|^{2+\alpha}} \right) |t|^\alpha = \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

es acotada en $[-\epsilon, \epsilon] - \{0\}$ y entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{-\delta} \frac{G(t)dt}{|t|^\alpha} + \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{G(t)dt}{|t|^\alpha}$$

existe. Ahora como $t \mapsto |t|^{-2-\alpha}$ es una función impar tenemos que

$$\int_{-\epsilon}^{-\delta} \frac{tdt}{|t|^{2+\alpha}} + \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{tdt}{|t|^{2+\alpha}} = 0,$$

y entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{s-\epsilon}^{s-\delta} + \int_{s+\delta}^{s+\epsilon} \right) \frac{(y(r) - y(s))dr}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{-\delta} \frac{G(t)dt}{|t|^\alpha} + \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{G(t)dt}{|t|^\alpha},$$

lo que implica que el lado derecho de (CC) está bien definido. ■

3.2. Enfoque variacional de las coreografías continuas

Considere el funcional de acción

$$\mathcal{A}_c^\alpha : \Lambda_c \rightarrow [0, +\infty]$$

dado por

$$\mathcal{A}_c^\alpha(y) = \int_0^1 \frac{v^2}{2} \|\dot{y}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dr ds}{\|y(s) - y(r)\|^\alpha}, \quad (3-5)$$

donde

$$\Lambda_c := \left\{ y \in H_1^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid \int_0^1 y(s) ds = 0 \right\}.$$

Note que para $y \in \Lambda_c$, tenemos que $\|y\|_{L^2[0,1]} \leq \|\dot{y}\|_{L^2[0,1]}$ y por lo tanto $\|y\|_{H^1[0,1]}$ es equivalente a $\|\dot{y}\|_{L^2[0,1]}$.

Proposición 3.2.1 *Suponga que $y \in C_1^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ define una curva regular cerrada simple $\{y(t) : t \in [0, 1]\}$. Entonces y es un extremal del funcional (3-5) si y sólo si satisface (CC).*

Demostración. Para $y \in C_1^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ y cualquier $z \in C_1^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}_c^\alpha(y + \varepsilon z)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \frac{v^2}{2} \|\dot{y}(s) + \varepsilon \dot{z}(s)\|^2 ds \right\}_{\varepsilon=0} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{dr ds}{\|y(s) - y(r) + \varepsilon(z(s) - z(r))\|^\alpha} \right\}_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (3-6)$$

Derivando y después integrando por partes el primer término del lado derecho de (CC) obtenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \frac{v^2}{2} \|\dot{y}(s) + \varepsilon \dot{z}(s)\|^2 ds \right\}_{\varepsilon=0} = \int_0^1 -v^2 \ddot{y}(s) \cdot z(s) ds. \quad (3-7)$$

Ahora consideremos el segundo término del lado derecho de (3-6). Observe que para $\delta > 0$ pequeño se cumple

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \frac{dr ds}{\|y(s) - y(r) + \varepsilon(z(s) - z(r))\|^\alpha} \\ &= \int_0^1 \int_{s-\delta}^{1+s-\delta} \frac{dr ds}{\|y(s) - y(r) + \varepsilon(z(s) - z(r))\|^\alpha} \\ &= \int_0^1 \left(\int_{s+\delta}^{1+s-\delta} + \int_{s-\delta}^{s+\delta} \right) \frac{dr ds}{\|y(s) - y(r) + \varepsilon(z(s) - z(r))\|^\alpha}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{dr ds}{\|y(r) - y(s) + \varepsilon(z(r) - z(s))\|^\alpha} \right\}_{\varepsilon=0} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{\alpha(y(s) - y(r)) \cdot (z(s) - z(r))}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} dr ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{1-\delta} \int_{s+\delta}^{1-\max(0, \delta-s)} \frac{\alpha(y(s) - y(r)) \cdot (z(s) - z(r))}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} dr ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{1-\delta} \int_{r+\delta}^{1-\max(0, \delta-r)} \frac{\alpha(y(s) - y(r)) \cdot (z(s) - z(r))}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} ds dr \\ &= -\int_0^1 \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{\alpha(y(s) - y(r)) \cdot z(s)}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} dr ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, hay funciones continuas $g, h : \mathbb{R} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$y(t+s) = y(s) + \dot{y}(s)t + g(s, t)t^2, \quad z(t+s) = z(s) + \dot{z}(s)t + h(s, r)t^2,$$

y dado que y es regular ($|\dot{y}(s)| \geq \beta > 0$ para algún $\beta > 0$) para $\delta, \varepsilon > 0$ pequeños tenemos que

$$|t| \leq \delta, |u| \leq \varepsilon \Rightarrow |\dot{y}(s) + u\dot{z}(s) + (g(s, r) + uh(s, r))t| \geq \frac{\beta}{2}.$$

El teorema fundamental del cálculo nos da

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{s-\delta}^{s+\delta} \frac{dr}{\|y(s) - y(r) + \varepsilon(z(s) - z(r))\|^\alpha} - \frac{dr}{\|y(s) - y(r)\|^\alpha} \right| \\
&= \left| \int_{s-\delta}^{s+\delta} \int_0^\varepsilon \alpha \frac{(y(s) - y(r) + u(z(s) - z(r))) \cdot (z(s) - z(r))}{\|y(s) - y(r) + u(z(s) - z(r))\|^{2+\alpha}} du dr \right| \\
&= \left| \int_{-\delta}^\delta \int_0^\varepsilon \alpha \frac{(\dot{y}(s) + u\dot{z}(s) + (g(s, t) + uh(s, t))t) \cdot (\dot{z}(s) + h(s, t)t)}{\|\dot{y}(s) + u\dot{z}(s) + (g(s, t) + uh(s, t))t\|^{2+\alpha} |t|^\alpha} du dt \right| \\
&\leq C \int_{-\delta}^\delta \int_0^\varepsilon |t|^{-\alpha} du dt = \frac{2C}{1-\alpha} \varepsilon \delta^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

con C constante. Así, para $\delta > 0$ pequeño tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}_c^\alpha(y + \varepsilon z)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^1 -v^2 \ddot{y}(s) \cdot z(s) ds + O(\delta^{1-\alpha}) \\
&\quad - \int_0^1 \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{\alpha(y(s) - y(r)) \cdot z(s)}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} dr ds, \tag{3-8}
\end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{d\mathcal{A}_c^\alpha(y + \varepsilon z)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_0^1 \left[v^2 \ddot{y}(s) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{\alpha(y(s) - y(r))}{\|y(s) - y(r)\|^{2+\alpha}} dr \right] \cdot z(s) ds$$

Por lo tanto, y satisface la condición

$$\frac{d\mathcal{A}_c^\alpha(y + \varepsilon z)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3-9}$$

para cualquier variación z , si y sólo si satisface (CC). ■

3.3. Coreografía circular

En esta sección consideramos curvas cerradas en el plano como soluciones de la ecuación (CC), de hecho como mínimos del funcional de acción. Los resultados presentados aquí son motivados por los artículos [36, 42, 3], los cuales prueban que el equilibrio relativo asociado al N -ágono es solución del problema de N -cuerpos, principalmente por el

Teorema 1 en [3]. Naturalmente seguimos las ideas de este trabajo para las pruebas de nuestros resultados.

Proposición 3.3.1 *La función dada por $x(s) := e^{2\pi is}$ es una solución de (CC) en el plano $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ si y sólo si*

$$v^2 = \frac{\alpha}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1 - e^{2\pi it}}{|1 - e^{2\pi it}|^{2+\alpha}} dt = \frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{dt}{(2 \sin(\pi t))^\alpha} \quad (3-10)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{e^{2\pi is} - e^{2\pi ir}}{|e^{2\pi is} - e^{2\pi ir}|^{2+\alpha}} dr &= e^{2\pi is} \int_{s+\delta}^{1+s-\delta} \frac{1 - e^{2\pi i(r-s)}}{|1 - e^{2\pi i(r-s)}|^{2+\alpha}} dr \\ &= e^{2\pi is} \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1 - e^{2\pi it}}{|1 - e^{2\pi it}|^{2+\alpha}} dt, \end{aligned}$$

y

$$\ddot{x}(s) = -4\pi^2 e^{2\pi is}.$$

Así, (CC) es equivalente a (3-10) ■

Proposición 3.3.2 *Para $\beta > 0$ sea $\mu \in C((0, 1), \mathbb{R}^+) \cap L^{\beta/\beta+1}(0, 1)$. Entonces para cualquier $\xi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tenemos que*

$$\left(\int_0^1 \mu^{\beta/\beta+1} \right)^{\beta+1} \leq \left(\int_0^1 \mu \xi \right)^\beta \int_0^1 \xi^{-\beta}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $\mu \xi^{\beta+1}$ es constante.

Demostración. Por la desigualdad de Hölder

$$\int_0^1 \mu^{\beta/\beta+1} = \int_0^1 (\mu \xi)^{\beta/\beta+1} \xi^{-\beta/\beta+1} \leq \left(\int_0^1 \mu \xi \right)^{\beta/\beta+1} \left(\int_0^1 \xi^{-\beta} \right)^{1/\beta+1}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $\mu \xi^{\beta+1}$ es constante. ■

Proposición 3.3.3 Para cualquier $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (0, 2\pi)$ se cumple la siguiente desigualdad

$$1 - \cos(kx) < k^2(1 - \cos x). \quad (3-11)$$

Demostración. Sean $f(x) = 1 - \cos(kx)$ y $g(x) = k^2(1 - \cos x)$ funciones reales en $(0, 2\pi)$. Observe que la función $\varphi := g - f$ es tal que $\varphi(\pi - x) = \varphi(\pi + x)$, así sólo tenemos que probar (3-11) en $(0, \pi)$. Más aún, la función $g(x)$ es creciente en $(0, \pi)$, $f(x)$ es creciente en $(0, \pi/k]$, decrece en $[\pi/2, 2\pi/k]$ y es $(2\pi/k)$ -periódica. Entonces es suficiente mostrar (3-11) en el intervalo $(0, \pi/k]$. Para esto observe que la función φ es positiva en el intervalo $(0, \pi/k]$. De hecho

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0,$$

y si $x \in (0, \pi/k]$

$$\varphi'' = k^2(\cos x - \cos(kx)) > 0,$$

para $k \geq 2$. ■

De aquí en adelante suponemos que v está dada por (3-10). Definimos

$$\begin{aligned} \xi_y(t) &= \int_0^1 \|y(s+t) - y(s)\|^2 ds, \quad \hat{\xi}(t) = |1 - e^{2\pi it}|^2, \\ c &= \int_0^1 \hat{\xi}^{-\alpha/2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{(2 \sin(\pi t))^\alpha} = \frac{8\pi^2 v^2}{\alpha}, \quad \mu = \frac{\hat{\xi}^{-\alpha/2-1}}{c}. \end{aligned}$$

Sí y es dos veces diferenciable, entonces

$$\Delta^\mu y(t) = \int_0^1 \mu(s)(2y(t) - y(t+s) - y(t-s)) ds = \int_0^1 \frac{2y(t) - y(t+s) - y(t-s)}{c(2 \sin(\pi s))^{2+\alpha}} ds$$

está bien definido.

Note que Δ^μ es lineal y para $f_k(t) = ae^{2k\pi it}$ tenemos que $\Delta^\mu f_k = d_k f_k$ donde

$$d_k = \int_0^1 \frac{4 \sin^2(k\pi s)}{c(2 \sin(\pi s))^{2+\alpha}} ds.$$

Por Proposición 3.3.3, para $k \geq 2$, $u \in (0, \pi)$ se tiene que $\sin^2(ku) < k^2 \sin^2 u$ y también $d_k < k^2 d_1$.

Observación 3.3.1 *Escribimos $a \in \mathbb{C}^d$ como $a = \Re a + i\Im a$ y $\bar{a} = \Re a - i\Im a$.*

Proposición 3.3.4 *Para cualquier $y \in \Lambda_c$*

$$\int_0^1 \|\dot{y}\|^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 \mu \xi_y \quad (3-12)$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $y(t) = ae^{2\pi it} + \bar{a}e^{-2\pi it}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Delta^\mu y \cdot y &= \int_0^1 \mu(s) \int_0^1 (2\|y(t)\|^2 - y(t) \cdot y(t+s) - y(t) \cdot y(t-s)) dt ds \\ &= \int_0^1 \mu(s) \int_0^1 (2\|y(t)\|^2 - 2y(t) \cdot y(t+s)) dt ds \\ &= \int_0^1 \mu(s) \int_0^1 \|y(t) - y(t+s)\|^2 dt ds = \int_0^1 \mu \xi_y. \end{aligned}$$

Observe que la igualdad en la ecuación (3-12) se cumple para y constante. Entonces podemos asumir que ξ_y nunca se anula. El objetivo es probar que el funcional

$$J(y) := \frac{\int_0^1 \|\dot{y}\|^2}{\int_0^1 \Delta^\mu y \cdot y} \quad (3-13)$$

definido en Λ_c alcanza su ínfimo y su valor mínimo es $4\pi^2$. Como el funcional J es homogéneo de grado cero, minimizar J es equivalente a minimizar el funcional coercitivo $\tilde{J}(y) = \int_0^1 \|\dot{y}(t)\|^2 dt$ sobre el espacio restringido

$$M = \left\{ y \in \Lambda_c \mid \int_0^1 \Delta^\mu y \cdot y dt = 1 \right\}$$

el cual es cerrado con respecto a la topología débil H_1^1 . Sea $(y_n)_n$ una sucesión minimizadora, entonces $\int_0^1 \|\dot{y}_n\|^2 dt = \|\dot{y}_n\|_{L^2}$ es acotada. Por la semicontinuidad inferior de la

norma podemos seleccionar una subsucesión $(y_{n_k})_k$, débilmente convergente a $y \in M$ y obtener

$$\tilde{J}(y) \leq \liminf_{n_k} \tilde{J}(y_{n_k}). \quad (3-14)$$

Así podemos asumir que el mínimo de \tilde{J} existe. El valor mínimo de \tilde{J} corresponde al primer eigenvalor λ_{\min} para el problema

$$\begin{cases} -\ddot{y} = \lambda \Delta^\mu y \\ y \in H_1^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \quad \int_0^1 y = 0. \end{cases} \quad (3-15)$$

Para estudiar el problema (3-15) escribimos una solución como

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2k\pi it}, \quad a_0 = 0, a_{-k} = \bar{a}_k$$

con lo que se obtiene

$$\ddot{y}(t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4\pi k^2 a_k e^{2k\pi it}, \quad \Delta^\mu y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k d_k e^{2k\pi it},$$

también los eigenvalores del problema son $\lambda_k = 4\pi^2 k^2 / d_k$, $k \in \mathbb{N}$. Así $\lambda_{\min} = \lambda_1 = 4\pi^2$ y el mínimo se alcanza si y sólo si $y(t) = a e^{2\pi it} + \bar{a} e^{-2\pi it}$ ■

Teorema 3.3.1 *El mínimo absoluto de \mathcal{A}_c^α en Λ_c , con $0 < \sigma < 1$ y v dado por (3-10), se alcanza en y sólo en el círculo unitario*

$$y(t) = a e^{2\pi it} + \bar{a} e^{-2\pi it}, \quad \|\Re a\| = \|\Im a\| = 1/2, \quad \Re a \cdot \Im a = 0. \quad (3-16)$$

Demostración. Por la desigualdad de Jensen

$$\xi_y(t)^{-\alpha/2} = \left(\int_0^1 \|y(s+t) - y(s)\|^2 ds \right)^{-\alpha/2} \leq \int_0^1 \frac{ds}{\|y(s+t) - y(s)\|^\alpha},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $\xi_y(t) = \|y(t) - y(0)\| = \|y(s+t) - y(s)\|$ para cualquier s . Así

$$\mathcal{A}_c^\alpha(y) \geq \int_0^1 \frac{v^2}{2} \|\dot{y}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \xi_y^{-\alpha/2} \quad (3-17)$$

Defina

$$\tilde{\mathcal{A}}_c^\alpha(y) := \int_0^1 \frac{v^2}{2} \|\dot{y}\|^2 + \frac{4\pi^2 v^2}{\alpha} \left(\int_0^1 \mu \xi_y \right)^{-\alpha/2}. \quad (3-18)$$

Por Proposición 3.3.2, el mínimo del funcional

$$\Phi(\xi) = \left(\int_0^1 \mu \xi \right)^{\alpha/2} \int_0^1 \xi^{-\alpha/2}$$

es alcanzado en ξ si y sólo si ξ es proporcional a $\hat{\xi}$ y su valor es $c = 8\pi^2 v^2 / \alpha$, el cual junto con (3-17) da

$$\mathcal{A}_c^\alpha(y) \geq \tilde{\mathcal{A}}_c^\alpha(y), \quad (3-19)$$

y la igualdad en (3-19) se da en el círculo

$$y(t) = ae^{2\pi it} + \bar{a}e^{-2\pi it}, \quad \|\Re a\| = \|\Im a\|, \quad \Re a \cdot \Im a = 0.$$

Defina

$$\bar{\mathcal{A}}_c^\alpha(y) := 2\pi^2 v^2 \left(\int_0^1 \mu \xi_y + \frac{2}{\alpha} \left(\int_0^1 \mu \xi_y \right)^{-\alpha/2} \right).$$

Por Proposition 3.3.4 tenemos

$$\tilde{\mathcal{A}}_c^\alpha(y) \geq \bar{\mathcal{A}}_c^\alpha(y), \quad (3-20)$$

y la igualdad en (3-20) se satisface si y sólo si $y(t) = ae^{2\pi it} + \bar{a}e^{-2\pi it}$.

La función $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(u) = u + \frac{2}{\alpha} u^{-\alpha/2}$ tiene un único mínimo en $u = 1$, por lo tanto $\bar{\mathcal{A}}_c^\alpha$ alcanza su mínimo absoluto $2\pi^2 v^2 (1 + 2/\alpha)$ en funciones $y \in \Lambda_c$ con $\int_0^1 \mu \xi_y = 1$, entre otras en el círculo unitario (3-16), y en un círculo unitario todos los funcionales $\mathcal{A}_c^\alpha, \tilde{\mathcal{A}}_c^\alpha, \bar{\mathcal{A}}_c^\alpha$ coinciden. Recíprocamente, si \mathcal{A}_c^α alcanza su mínimo en $y \in \Lambda_c$ entonces $\int_0^1 \mu \xi_y = 1$ y (3-19), (3-20) deben ser igualdades. Así $\xi_y(t) = \|y(t) - y(0)\| = \hat{\xi}(t)$ y

$y(t) = ae^{2\pi it} + \bar{a}e^{-2\pi it}$. No es difícil ver que entonces

$$\|\Re a\| = \|\Im a\| = 1/2, \Re a \cdot \Im a = 0.$$

■

Bibliografía

- [1] ARNOL'D, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York (1989)
- [2] ARNOL'D, V.I., KOSLOV, V.V., Y NEISHTADT, A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Springer-Verlag Berlin, Berlin (2006)
- [3] BARUTELLO, V. Y TERRACINI, S. Action minimizing orbits in the n-body problem with simple choreography constraint. *Nonlinearity* **17** (2004)
- [4] BESSI, U. Y ZELATI, V.C. Symmetries and noncollision closed orbits for planar N-body-type problems. *Nonlinear Anal.* **16**:587–98 (1991)
- [5] BRÉZIS, H. *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones* (1984)
- [6] BUCK, G. Most smooth closed space curves contain approximate solutions of the n-body problem. *Nature* págs. 51–53 (Sep. 1998)
- [7] CASTANEIRA, R., P.P. Y H., S.M. Continuous Choreographies as Limiting Solutions of N-body Type Problems with Weak Interaction. *SIGMA* **12(104)** (2016)
- [8] CHANG, K.C. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer (2003)
- [9] CHEN, K.C. Action minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **158**:293–318 (2001)
- [10] CHEN, K.C. Binary decompositions for planar N-body problem and symmetric periodic solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **170**:247–276 (2003)

- [11] CHENCINER, A. Action minimizing periodic orbits in the Newtonian n-body problem. *Comtemp. Math.* **292**:71–90 (2002)
- [12] CHENCINER, A. Action minimizing solutions of the Newtonian n-body problem. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* págs. 279–294 (2002)
- [13] CHENCINER, A. Simple non-planar periodic solutions of the n-body problem. *Proceedings of the NDDS conference* (2002)
- [14] CHENCINER, A. Y DESOLNEUX, N. Minima de l' intégrale d' action et équilibre relatifs de n corps. *C. R. Acad. Sci. Paris I* **326**:1209–12 (1998)
- [15] CHENCINER, A. Y MONTGOMERY, R. A remarkable periodic orbit in the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math.* **2**:881–901 (2000)
- [16] CHENCINER, A. Y VENTURELLI, A. Minima de l' integrale d' action du problème Newtonien de 4 corps de masses égales dans \mathbb{R}^3 : orbites “hip-hop”. *Celest. Mech. Dynam. Astrom* **77**:139–152 (2001)
- [17] CHENCINER, A., GERBER, J., MONTGOMERY, R., Y SIMÓ, C. Simple choreographies of the N bodies: a preliminary study. *Geometry, Mechanics and Dynamics* págs. 287–308 (2001)
- [18] CHUNHUA, D., S.Z. Y Q., Z. Rose solutions with three petals for planar 4-body problems. *Science china: Mathematics* **53**(12):3085–3094 (2010)
- [19] CLAPP, M. *Análisis matemático* (2015)
- [20] DEGIOVANNI, M., F.G. Y A., M. Dynamical systems with newtonian type potentials. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV* **69**:467–94 (1987)
- [21] EULER, L. De motu rectilineo trium corpörum so mutuo attrahentium. *Novi. Comm. Acad. Sci. Imp. Petropll* págs. 332–342 (1767)

- [22] FERRARIO, D. Y TERRACINI, S. On the existence of collisionless equivariant minimizer for the classical n-body problem in three-dimensional space. *Invent. Math.* **155**:305–362 (2004)
- [23] FUSCO, G., G.F.G. Y P., N. Platonic polyhedra, topological constraints and periodic solutions of the classical N-body problem. *Invent. Math.* **185**:283–332 (2011)
- [24] GORDON, W.B. A minimizing property of Keplerian orbits. *Amer. J. of Math.* **99**:961–971 (1977)
- [25] LAGRANGE, J. Essai sur le problème des trois corps. *Ouvres* **3**:229–331 (1772)
- [26] MARCHAL, C. How the method of minimizing of action avoids singularities. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **83**:325–353 (2002)
- [27] MOECKEL, R. On central configurations. *Math Z.* **205**:499–517 (1990)
- [28] MONTALDI, J. Y STECKLES, K. Classification of symmetry groups for planar n-body choreographies. *Forum of Mathematics* **1** (2013)
- [29] MONTGOMERY, R. Actions spectrum and collision in the planar three-body problem. *Comtemp. Math. 292, Amer. Math. Soc., Providence, RI* págs. 173–184 (????)
- [30] MONTGOMERY, R. The three-body problem and the shape sphere. *arXiv:1402.0841v1* (2014)
- [31] MOORE, C. Braids in classical dynamics. *Phys. Rev. Lett.* **70**:3675–3679 (1993)
- [32] MOULTON, F.R. The Straight Line Solutions of the Problem of N Bodies. *Ann. of Math.* **12**:1–17 (1910)
- [33] PALAIS, R. The principle of symmetric critically. *Comm. Math. Phys.* **69**:19–30 (1979)
- [34] PALAIS, R.S. Morse Theory on Hilbert Manifolds. *Topology* **2**:299–340 (1963)

- [35] PALMORE, J. Measure of degenerate relative equilibria. *Ann. Math.* **104**:421–9 (1976)
- [36] PERKO, L.M. Y WALTER, E.L. Regular polygon solutions of the N-body problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **94**:301–309 (1985)
- [37] POINCARÉ, H. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **123**:915–918 (1896)
- [38] SIMÓ, C. New families of solutions in N-body problems. *Progress Math. Phys.* **201**:101–115 (2001)
- [39] SLAMINKA, E. Y K., W. Central configurations and a theorem of Palmore. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **48**:347–55 (1990)
- [40] STRUWE, M. *Variational Methods, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* 2^a edición. Berlin (1996)
- [41] TERRACINI, S. Y VENTURELLI, A. Symmetric Trajectories for the 2N-Body Problem with Equal Masses. *Arch. Rational Mech. Anal.* **184**:465–493 (2007)
- [42] XIE, Z. Y ZHANG, S. A simple proof of the regular polygon solution of the N-body problem. *Physics Letter A* **277**:156–158 (2000)
- [43] YU, G. Simple choreography solutions of the Newtonian N-body problem (arXiv:1509.04999)
- [44] ZHANG, S.Q. Y ZHOU, Q. Variational methods for the choreography solution to the three-body problem. *Sci. China Ser. A.* **45**:594–597 (2002)