UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PROPIEDADES ESTRELLA AN ESTRELLA EN Y ESTRELLA CCC

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALEJANDRO DARÍO ROJAS SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. JAVIER PAEZ CÁRDENAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS, INST. DE MAT., UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL DE 2017

Índice general

Introducción

El lenguaje de las estrellas respecto a cubiertas abiertas ha permitido caracterizar diversas propiedades topológicas importantes como la compacidad, la paracompacidad, la normalidad e incluso la conexidad. Muchas clases de espacios métricos generalizados están definidos a partir de las estrellas, como por ejemplo, los espacios de Moore, los M-espacios y los p-espacios.

El estudio de las propiedades estrella es relativamente reciente, se comenzó alrededor de los años 1980-1981 y tuvo su apogeo en la década de 1990 con los trabajos de E. van Douwen, G. Reed, A. Roscoe, I. Tree, M. Bonanzinga y M. Matveev por mencionar algunos.

Las propiedades estrella forman parte de la gran familia de las llamadas propiedades de cubierta. En sus inicios, estas propiedades buscaban generar herramientas que sirvieran para enriquecer y transparentar algunos resultados ya conocidos mediante el uso de caracterizaciones a través de las estrellas. Esto trajo como consecuencia el surgimiento de una nueva variedad de generalizaciones de espacios tipo Lindelöf o tipo compacto, entre ellos, los llamados espacios estrella P, en donde P representa una propiedad topológica de tipo Lindelöf o de tipo compacto.

Si bien el área de investigación tuvo un comienzo un poco lento, actualmente es posible encontrar numerosos artículos y una amplia literatura alrededor del tema, demostrando que se ha convertido en un área prolífica para la investigación. Y a su vez, mantiene mucho terreno fértil por explorar. El presente trabajo pretende contribuir un poco con el desarrollo de esta área. El material aquí plasmado consiste en la recopilación de los resultados obtenidos durante mi estancia doctoral, mismos que permitieron la elaboración de dos artículos.

El trabajo se enfoca en la presentación y desarrollo de las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella *ccc*. En el capítulo 1 se estudian estas tres propiedades, se analizan a qué tipo de subespacios se heredan, bajo qué imágenes y preimágenes se conservan y cuál es su comportamiento cuando se realizan productos finitos.

En el capítulo 2 se aborda el problema de determinar algunas clases de espacios en las cuales las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella *ccc* son equivalentes entre sí buscando incluso que estas propiedades alcancen a la separabilidad o a la propiedad de Lindelöf.

En el capítulo 3 se introducen dos versiones débiles de los espacios estrella P, los espacios n-estrella P y los casi-estrella P. El objetivo de este capítulo es únicamente el de presentar estas nuevas dos clases y analizar brevemente algunas relaciones que guardan con los espacios estrella P.

Finalmente en el capítulo 4 se analiza al hiperespacio Pixley-Roy de los subconjuntos finitos de un espacio arbitrario, tratando de buscar condiciones sobre el espacio bajo las cuáles se pueda asegurar que su hiperespacio Pixley-Roy tendrá alguna propiedad estrella.

A lo largo del trabajo se hace referencia a diversos artículos invitando al lector a ampliar la lectura sobre el tema. Para una mejor comprensión del contenido de la tesis, se han incluido las pruebas de algunos resultados que aparecen referenciados esperando, particularmente, que el lector no familiarizado con el manejo de las propiedades estrella logré una mejor adaptación a las técnicas propias del tema.

Capítulo 1

Propiedades estrella P

Comencemos con algunos resultados elementales de las propiedades estrella P.

1.1. Estrella AN estrella EN y estrella ccc

En este capítulo introducimos el concepto de estrella P, desarrollamos algunas propiedades generales e inmediatamente después nos concentraremos en propiedades estrella P particulares.

Si X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces la estrella de un conjunto $A \subset X$ con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto

$$st(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$$

Por comodidad, para un punto $x \in X$ denotamos por $st(x, \mathcal{U})$ al conjunto $st(\{x\}, \mathcal{U})$. Una observación útil es que para cualesquiera $p, q \in X$, se tiene que $p \in st(q, \mathcal{U})$ si y sólo si $q \in st(p, \mathcal{U})$.

Definición 1.1 *Sea P una propiedad topológica. Decimos que un espacio topológico X es estrella P, si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe un subespacio $A \subset X$ con la propiedad P, tal que $st(A, \mathcal{U}) = X$. Al conjunto A se le conoce como un núcleo estrella de la cubierta $\mathcal{U}$.*

El término *estrella P* fue acuñado por los autores en [19], sin embargo, ciertas propiedades estrella (bajo un nombre distinto) habían sido estudiadas previamente ([10], [13], [18]).

Nosotros nos vamos a enfocar en el desarrollo de las propiedades estrella amplitud numerable, estrella extensión numerable y estrella *ccc*. El objetivo es estudiar estos conceptos y las relaciones entre estas propiedades y otras propiedades estrellas, tales como, estrella numerable o estrella Lindelöf.

A lo largo de todo este trabajo los espacios serán considerados con al menos el axioma T_2 así como con al menos dos puntos. La notación y terminología típica será tomada de [11], en particular $cl_X A$ e $int_X A$ denotarán la cerradura e interior de un subconjunto A del espacio X. βX denotará la compactación de Stone-Čech de un espacio Tychonoff X. $|A|$ denotará la cardinalidad del conjunto A. Como es costumbre, ω y ω_1 denotarán al primer ordinal numerable y al primero no numerable respectivamente. A menos que se especifique lo contrario, cuando tomemos a un ordinal η como espacio topológico, éste será considerado con su topología de orden.

Proposición 1.2 *Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de un espacio X. Entonces para todo subconjunto $A \subset X$ se cumple que*

$$st\,(A,\mathcal{U}) = st\,(cl_X A,\mathcal{U})$$

Dem. Dado $x \in st\,(cl_X A,\mathcal{U})$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $U \cap cl_X A \neq \varnothing$. Al ser U abierto se sigue que $U \cap A \neq \varnothing$, es decir, $x \in st\,(A,\mathcal{U})$. La contención contraria es inmediata. ■

Una consecuencia de esta proposición es el siguiente resultado.

Proposición 1.3 *Sea P una propiedad topológica. Si un espacio X contiene un subespacio denso $D \subset X$ con la propiedad P, entonces X es estrella P.*

Otro resultado básico, tiene que ver con la unión de espacios estrella P.

Proposición 1.4 *Sea P una propiedad topológica que se preserva bajo uniones de tamaño κ. Si $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ y cada Y_α es estrella P, entonces X es estrella P.*

Una de las motivaciones por las que surge el estudio de las propiedades estrella P es el conocido resultado de que todo espacio topológico es estrella discreto. Más aún, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.5 *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de un espacio X, entonces existe un subespacio cerrado y discreto $A \subset X$ tal que $st\,(A,\mathcal{U}) = X$.*

Dem. Sea $A \subset X$ un subconjunto maximal con la propiedad de que para cualesquiera $p, q \in A$, con $p \neq q$, $p \notin st\,(q,\mathcal{U})$. La maximalidad de A implica que $st\,(A,\mathcal{U}) = X$. Ahora bien, por definición de A tenemos que para todo $p \in A$, $st\,(p,\mathcal{U}) \cap A = \{p\}$, es decir, A es subespacio discreto. Finalmente, dado $p \in X$, existe $x \in A$ tal que $p \in st\,(x,\mathcal{U})$, de manera que $st\,(x,\mathcal{U})$ es una vecindad de p que sólo intersecta a A en el punto x; como X es un espacio Hausdorff esto prueba que A debe ser cerrado. ■

En [2] y [3] los autores ofrecen un estudio profundo y exhaustivo de la propiedad estrella P cuando P se correponde con *numerable*, $\sigma-$*compacto* o *Lindelöf* (ver también [27], [28]) en estos artículos se trabajó también con el concepto de espacios *débilmente Lindelöf*. Para estas propiedades se tienen de manera muy clara las siguientes implicaciones:

$$\textit{estrella numerable} \Rightarrow \textit{estrella } \sigma - \textit{compacto} \Rightarrow \textit{estrella Lindelöf}$$

También es conocido que

$$\textit{estrella Lindelöf} \Rightarrow \textit{débilmente Lindelöf}$$

En ningún caso las implicaciones contrarias son siempre válidas (ver [2] y [3]).

Otras implicaciones conocidas e importantes son las siguientes:

$$\textit{separable} \Rightarrow \textit{estrella numerable}$$

$$\textit{Lindelöf} \Rightarrow \textit{extensión numerable} \Rightarrow \textit{estrella numerable}$$

$$\textit{estrella numerable} \Leftrightarrow \textit{estrella separable}$$

Desde luego, en el caso de las primeras dos, las implicaciones contrarias no necesariamente se cumplen. Note que la equivalencia entre estrella separable y estrella numerable es consecuencia de la Proposición 1.3, mientras que la implicación entre extensión numerable y estrella numerable se da gracias a la Proposición 1.5.

A continuación damos las definiciones de las funciones cardinales que motivan las propiedades estrella P que son objeto de nuestro estudio. Para una consulta adecuada de las funciones cardinales se recomienda [14].

Definición 1.6 *La amplitud de un espacio X se define como*

$$s(X) = \sup\{|A| : A \subset X \textit{ es discreto}\}$$

Definición 1.7 *La extensión de un espacio X se define como*

$$e(X) = \sup\{|E| : E \subset X \textit{ es cerrado y discreto}\}$$

Definición 1.8 *La celularidad de un espacio X se define como*

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \textit{ es familia celular}\}$$

en donde por familia celular nos referimos a una familia formada por conjuntos abiertos no vacíos y ajenos dos a dos. A un espacio X con $c(X) \leq \omega$ se le conoce como espacio ccc.

Para abreviar, escribiremos *estrella AN* en lugar de estrella amplitud numerable así como *estrella EN* en lugar de estrella extensión numerable. Nuestra primer labor es la de ubicar los conceptos de estrella AN, estrella EN y estrella *ccc* dentro de las cadenas de implicaciones antes mencionadas.

Dado que todo espacio Lindelöf tiene extensión numerable, queda claro que la propiedad estrella Lindelöf implica a la propiedad estrella EN. Veamos ahora que estrella EN implica a la propiedad débilmente Lindelöf.

Definición 1.9 *Un espacio topológico X es débilmente Lindelöf, si toda familia de subconjuntos abiertos, no vacíos y localmente finita en X es numerable.*

Proposición 1.10 *Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia localmente finita de abiertos en un espacio X. Para cada $\alpha < \kappa$ tomamos $x_\alpha \in U_\alpha$. Entonces, el subespacio $D = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es cerrado y discreto en X.*

Dem. Dado $x \in X$ arbitrario, existe un abierto $U \subset X$ tal que $|\{\alpha < \kappa : U_\alpha \cap U \neq \emptyset\}| < \omega$. Como el espacio X es T_2, es posible conseguir un abierto $V \subset U$ tal que $x \in V$ y $|V \cap D| \leq 1$, en donde la igualdad se cumple si y sólo si $x = x_\alpha$ para alguna $\alpha < \kappa$. Esto prueba que D debe ser cerrado y discreto. ■

Corolario 1.11 *Si un espacio tiene una familia localmente finita, celular y no numerable, entonces el espacio no es estrella EN.*

Dem. Supongamos que X es un espacio con una familia localmente finita y celular $\mathcal{U}$, donde $|\mathcal{U}| = \omega_1$; digamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$ tomemos $d_\alpha \in U_\alpha$ y llamemos $D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Por la proposición previa se sigue que D es cerrado. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus D\}$; $\mathcal{V}$ es cubierta abierta para X. Supongamos que existe un núcleo $M \subset X$ de $\mathcal{V}$ y con $e(M) \leq \omega$. Como cada d_α pertenece a un único $U_\alpha \in \mathcal{V}$, se tiene que M debe intersectar a todos los U_α. De manera que si tomamos $x_\alpha \in U_\alpha \cap M$, se sigue que el subespacio $L = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es cerrado y discreto en X y por tanto en M. Finalmente, dado que la familia $\mathcal{U}$ es celular, entonces $|L| = \omega_1$, lo que contradice que $e(M) \leq \omega$. ■

Este corolario junto con el hecho de que toda familia localmente finita de abiertos de tamaño ω_1 induce una familia localmente finita de abiertos y celular de tamaño ω_1, traen como consecuencia el siguiente resultado.

Corolario 1.12 *Si X es estrella EN, entonces X es débilmente Lindelöf.*

Lo anterior demuestra que el concepto de estrella EN vive entre estrella Lindelöf y débilmente Lindelöf. Ahora veremos ejemplos que muestran que las implicaciones recíprocas entre estos conceptos no son válidas.

El siguiente espacio es presentado en [2] como un ejemplo de un espacio débilmente Lindelöf que no es estrella Lindelöf. A continuación mostramos que este ejemplo sí es estrella EN.

Proposición 1.13 *Existe un espacio Tychonoff y estrella EN que no es estrella Lindelöf.*

Dem. Sean $S = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ es ordinal sucesor}\}$ y $X = (\omega_1 \times \omega) \cup (S \times \{\omega\})$ considerado como subespacio de $\omega_1 \times (\omega + 1)$. Llamemos $Z = \omega_1 \times \omega$, entonces Z es denso en X. Como Z es σ-(numerablemente compacto), se sigue que $e(Z) \leq \omega$. De acuerdo con la Proposición 1.3 se sigue que el espacio X es estrella EN.

Ahora verifiquemos que X no es estrella Lindelöf. Para ello consideremos la siguiente cubierta abierta de X,

$$\mathcal{U} = \{Z\} \cup \{\{\alpha\} \times (\omega + 1) : \alpha \in S\}.$$

Si $L \subset X$ es un subespacio Lindelöf, entonces su proyección sobre la primer coordenada es un subespacio Lindelöf de ω_1. De manera que el conjunto formado por la primer coordenada de los puntos en L debe estar acotado en ω_1; es decir, existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que si $(\alpha, n) \in L$ entonces $\alpha \leq \alpha_0$. En consecuencia $L \cap (\{\alpha_0 + 1\} \times (\omega + 1)) = \emptyset$, lo que implica que $(\alpha_0 + 1, \omega) \notin st(L, \mathcal{U})$; es decir, X no puede ser estrella Lindelöf. ■

La existencia de un subconjunto denso con extensión numerable en el espacio de la proposición anterior sugiere que los conceptos de estrella EN y estrella Lindelöf mantienen cierta distancia el uno del otro, sin embargo, como veremos más adelante, existen varias clases de espacios en donde estos conceptos son equivalentes.

Este ejemplo también nos permite argumentar que en la Proposición 1.3 no podemos cambiar la hipótesis de la existencia de un subespacio denso con la propiedad P por la existencia de un subespacio denso estrella P. Al menos en el caso en el que la propiedad P es Lindelöf, utilizando el espacio X de la proposición anterior, tenemos que X no es estrella Lindelöf; sin embargo, X contiene un subespacio denso con extensión numerable y todo espacio con extensión numerable es a su vez estrella Lindelöf.

En el capítulo 2 exhibiremos un ejemplo de un espacio débilmente Lindelöf que no es es estrella EN. Por la naturaleza del espacio, resulta conveniente esperar hasta más adelante para mostrarlo. Por el momento dejamos enunciada la proposición.

Proposición 1.14 *Existe un espacio Tychonoff y débilmente Lindelöf que no es estrella EN.*

Pasemos ahora a ubicar a la propiedad estrella *ccc*. Algunas implicaciones evidentes para los espacios estrella *ccc* son las siguientes:

$$\textit{separable} \Rightarrow \textit{ccc} \Rightarrow \textit{estrella ccc}$$

$$\textit{estrella numerable} \Rightarrow \textit{estrella ccc}$$

Una vez más, las implicaciones contrarias no son válidas.

Veamos que estrella *ccc* implica débilmente Lindelöf.

Proposición 1.15 *Si X es estrella ccc, entonces X es débilmente Lindelöf.*

Dem. Supongamos que existe una familia celular, localmente finita $\mathcal{C}$, con $|\mathcal{C}| = \omega_1$, digamos $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, fijamos $x_\alpha \in U_\alpha$ y llamemos $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como $\mathcal{C}$ es localmente finita, se sigue que D es cerrado y discreto en X. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{C} \cup \{X \setminus D\}$. La familia $\mathcal{V}$ es cubierta abierta para X. Si $M \subset X$ es un núcleo de $\mathcal{V}$, entonces para toda $\alpha < \omega_1$ se tiene que $M \cap U_\alpha \neq \varnothing$. De manera que $\mathcal{M} = \{M \cap U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es celular en M y además es no numerable. Esto demuestra que M no puede ser *ccc* y por lo tanto X no es estrella *ccc*. ■

Para el siguiente ejemplo utilizaremos un espacio de Mrówka. A lo largo del trabajo nos estaremos apoyando de manera frecuente en los espacios de Mrówka, por lo que esperamos que el lector tenga familiaridad con estos espacios y recomendamos [1] y [7] para una breve introducción acerca de los mismos. Por su importancia a lo largo de este trabajo, a continuación damos la definición de familia casi ajena así como de espacio de Mrówka asociado a la familia casi ajena.

Definición 1.16 *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de ω es llamada casi ajena si cada elemento de $\mathcal{A}$ es infinito y se cumple que, para cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{A}$ su intersección es un conjunto finito.*

Definición 1.17 *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en ω. Definimos el espacio de Mrówka asociado a $\mathcal{A}$ como el conjunto $\psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$ dotado de la siguiente topología: ω es un subespacio abierto de $\psi(\mathcal{A})$ y para un $A \in \mathcal{A}$ un abierto básico de A es de la forma*

$$\{A\} \cup A \setminus F$$

en donde $F \subset A$ es finito.

Un espacio de Mrówka siempre es un espacio Hausdorff y cero-dimensional. Si bien un espacio de Mrówka está definido para una familia casi ajena arbitraria de ω, por las propiedades especiales que posee, nosotros trabajaremos únicamente con espacios de Mrówka asociados a familias casi ajenas maximales de ω.

Proposición 1.18 *Existe un espacio Tychonoff y estrella σ-compacto que no es estrella ccc.*

Dem. Sea $\mathcal{A}$ una familia maximal casi ajena en ω, con $|\mathcal{A}| = 2^\omega$, y consideremos al correspondiente espacio de Mrówka $X = \omega \cup \mathcal{A}$. Sea $Y = \alpha D$ la compactación unipuntual de un espacio discreto D, con $|D| = 2^\omega$. Como X es separable, es en particular estrella σ-compacto. Es conocido que la propiedad estrella σ-compacto se preserva en producto con espacios compactos (ver [2]), por lo que podemos concluir que $X \times Y$ es estrella σ-compacto. Veamos que $X \times Y$ no es estrella *ccc*. Digamos que $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ y $D = \{d_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$. Sea

$$\mathcal{U} = \{X \times \{d_\alpha\} : \alpha < 2^\omega\} \cup \{(A_\alpha \cup \{A_\alpha\}) \times (Y \setminus \{d_\alpha\}) : \alpha < 2^\omega\} \cup \{\{n\} \times Y : n < \omega\}.$$

$\mathcal{U}$ es cubierta abierta para $X \times Y$ con la propiedad de que si M es un núcleo de $\mathcal{U}$, entonces para toda $\alpha < 2^\omega$, $M \cap (X \times \{d_\alpha\}) \neq \varnothing$. Esto ocurre ya que $X \times \{d_\alpha\}$ es el único miembro de la cubierta que contiene al punto (A_α, d_α). En consecuencia tenemos que $\mathcal{M} = \{M \cap (X \times \{d_\alpha\}) : \alpha < 2^\omega\}$ es celular en M y además es no numerable. Es decir $X \times Y$ no es estrella *ccc*. ■

La proposición anterior nos demuestra que en general la propiedad estrella σ-compacto (y por tanto estrella Lindelöf, estrella EN y débilmente Lindelöf) no implica a la propiedad estrella *ccc*.

En el capítulo 2 mostraremos un ejemplo de un espacio estrella *ccc* pero que no es estrella EN (y por tanto tampoco será estrella numerable, estrella σ-compacto o estrella Lindelöf).

Finalmente ubiquemos a la propiedad estrella AN. Para ésta tenemos las siguientes implicaciones:

amplitud numerable ⇒ estrella AN

estrella numerable ⇒ estrella AN

Es muy claro que todo espacio hereditariamente Lindelöf es un espacio con amplitud numerable, aunque desde luego, no todo espacio Lindelöf tiene amplitud numerable (por ejemplo, cualquier compactación de un espacio discreto no numerable). En general, conseguir espacios con amplitud numerable pero que no posean la propiedad de Lindelöf no es tarea sencilla. Y es que la línea que separa a los espacios con amplitud numerable de los espacios Lindelöf suele ser muy fina, como lo demuestra el siguiente teorema de Šapirovskii y cuya prueba se puede encontrar en [14].

Teorema 1.19 *(Šapirovskii) Si $s(X) \leq \kappa$, entonces existe un subespacio denso $Y \subset X$ tal que $hl(Y) \leq \kappa$.*

El teorema de Šapirovskii nos dice en particular que todo espacio con amplitud numerable contiene un denso hereditariamente Lindelöf. A partir de esto tenemos el siguiente resultado que nos será de gran utilidad a lo largo del presente trabajo.

Proposición 1.20 *Un espacio X es estrella AN si y sólo si X es estrella hereditariamente Lindelöf.*

Dem. Ya habíamos mencionado que todo espacio hereditariamente Lindelöf tiene amplitud numerable, lo que implica que todo espacio estrella hereditariamente Lindelöf es estrella AN.

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta del espacio estrella AN X y M es un núcleo con amplitud numerable, entonces por el teorema de Šapirovskii podemos tomar un denso N de M con $hl\,(N) \leq \omega$. La densidad de N sobre M nos asegura que

$$X = st\,(M,\mathcal{U}) \subset st\,(cl_X N,\mathcal{U}) = st\,(N,\mathcal{U})\,,$$

y por tanto X es estrella hereditariamente Lindelöf. ■

La proposición anterior trae como consecuencia que todo espacio estrella AN es estrella Lindelöf. Dado que la amplitud numerable de un espacio implica celularidad numerable del mismo, se tiene que la propiedad estrella AN también implica a la propiedad estrella *ccc*. El espacio construido en la Proposición 1.18, al no ser estrella *ccc*, no puede ser estrella AN, lo que nos dice que la propiedad estrella Lindelöf no implica a la propiedad estrella AN. La existencia de un espacio estrella *ccc* pero que no es estrella EN (¡como veremos en el capítulo 2!) nos dice que la propiedad estrella *ccc* no implica a la propiedad estrella AN.

El siguiente diagrama resume las implicaciones establecidas hasta el momento:

$$\begin{tikzcd}
 & estrella\ numerable \arrow[d] & \\
 & estrella\ AN \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
estrella\ Lindel\ddot{o}f \arrow[d] & & \\
estrella\ EN \arrow[dr] & & estrella\ ccc \arrow[dl] \\
 & d\acute{e}bilmente\ Lindel\ddot{o}f &
\end{tikzcd}$$

Nos queda establecer si la propiedad estrella AN implica a la propiedad estrella numerable. Es de esperar que la respuesta sea negativa, sin embargo, vale la pena notar que la equivalencia de la Proposición 1.20 hace que la busqueda de un ejemplo no sea una tarea sencilla. De acuerdo con la Proposición 1.20 y recordando que las propiedades estrella numerable y estrella separable son equivalentes, si queremos construir un espacio estrella AN que no sea estrella numerable, deberemos encontrar un espacio estrella AN para el cual exista una cubierta abierta que tenga un núcleo hereditariamente Lindelöf pero que no tenga núcleos separables. Es decir, estamos buscando un espacio para el cual sea posible construir una cubierta abierta con un núcleo que sea un L-espacio. A continuación daremos un ejemplo de un espacio Hausdorff con dichas características y enseguida daremos un ejemplo de un espacio Tychonoff también con las mismas características, sólo que para este segundo ejemplo tendremos que ampliar ZFC pues supondremos válida la Hipótesis del Continuo. El autor desconoce la respuesta del siguiente problema:

Problema 1.21 *¿Existe en ZFC un ejemplo de un espacio Tychonoff, estrella AN pero no estrella numerable?*

Proposición 1.22 *Existe un espacio Hausdorff estrella AN que no es estrella numerable.*

Dem. Denotemos por τ_e a la topología usual de $\mathbb{R}$ y sea

$$\tau = \{U \setminus D \subset \mathbb{R} : U \in \tau_e, |D| \leq \omega\}.$$

$\mathbb{R}$ con la topología τ se convierte en un espacio Hausdorff hereditariamente Lindelöf. Sea (Y, σ) la extensión de Katětov de $(\mathbb{R}, \tau)$, es decir,

$$Y = \mathbb{R} \cup \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro abierto libre en } \mathbb{R}\}$$

y σ tiene por base al conjunto

$$\tau \cup \{\{\mathcal{U}\} \cup U : U \in \mathcal{U} \in Y \setminus \mathbb{R}\}.$$

$(\mathbb{R}, \tau)$ es un subespacio abierto denso de Y, por lo que Y es estrella AN.

Por otro lado, sabemos que $|Y \setminus \mathbb{R}| = 2^{2^{\omega}}$, por lo que podemos tomar una función $\varphi : Y \setminus \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ con la propiedad de que para todo $B \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$, $\varphi^{-1}[\{B\}]$ es no numerable y dado $y \in Y \setminus \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \varphi(y) \in \tau$. Más aún, como $\varphi(y)$ es numerable, $\mathbb{R} \setminus \varphi(y) \in y$. Llamemos $U_y = \{y\} \cup (\mathbb{R} \setminus \varphi(y))$ y sea

$$\mathcal{V} = \{U_y : y \in Y \setminus \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

Veamos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta sin núcleos numerables. Si $A \subset Y$ es numerable, entonces existe $y \in (Y \setminus \mathbb{R}) \setminus A$ tal que $\varphi(y) = A \cap \mathbb{R}$, esto ya que $\varphi^{-1}[\{A \cap \mathbb{R}\}]$ no es numerable. Por definición de U_y se tiene que $U_y \cap A = \varnothing$. Como U_y es el único elemento de $\mathcal{V}$ que contiene a y, $y \notin st(A, \mathcal{V})$. Lo que prueba que Y no es estrella numerable. ■

El espacio de la Proposición 1.22 fue tomado de [3]. Para una buena introducción a las extensiones de Katětov, dejamos como referencia [22].

Aunque para distintos propósitos, los autores en [3] también construyen un ejemplo, usando la Hipótesis del Continuo, de un espacio Tychonoff que no es estrella numerable a pesar de contener un denso hereditariamente Lindelöf. El ejemplo que presentaremos nosotros a continuación es de una naturaleza diferente al mostrado en [3]. Y para ello, utilizaremos la topología de densidad en $\mathbb{R}$. Aquí sólo nos encargaremos de definir la topología de densidad y enunciaremos (sin prueba) algunas propiedades de la misma. Recomendamos los artículos [25] y [30] para una mayor familiarización con la topología de densidad.

Definición 1.23 *Un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ tiene densidad d en el punto $x \in \mathbb{R}$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

existe y es igual a d, donde m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Para mayor precisión escribimos la densidad d como $d(x, E)$.

Para cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, denotamos por

$$\phi(E) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, E) = 1\}.$$

La familia $\mathcal{D} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ es medible y } E \subset \phi(E)\}$ forma una topología para $\mathbb{R}$ llamada la topología de densidad.

Teorema 1.24 [29] *$\mathcal{D}$ es una topología Tychonoff no normal para $\mathbb{R}$ que es más fina que la topología usual.*

Teorema 1.25 [30] *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado y discreto en $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ si y sólo si A es un conjunto de medida cero.*

Una consecuencia muy interesante del Teorema 1.25 es que todo conjunto numerable de $\mathbb{R}$ es cerrado y discreto en $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, lo que implica que ningún subespacio no numerable de $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ puede ser separable.

El hecho de que el conjunto de Cantor tiene medida cero, se traduce en que $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ contiene un conjunto cerrado, discreto y no numerable; por lo que $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ no es un espacio Lindelöf.

Definición 1.26 *Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Sierpinski si S intersecta a todo conjunto de medida cero en una cantidad numerable de puntos.*

Dado que todo conjunto de medida cero está contenido en un conjunto de Borel de medida cero, para mostrar que un conjunto es de Sierpinski bastará verificar su intersección con los conjuntos de Borel de medida cero.

Teorema 1.27 [30] *Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ es un subespacio hereditariamente Lindelöf de $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ si y sólo si S es un conjunto de Sierpinski.*

Gracias a los Teoremas 1.25 y 1.27, se sigue que todo subconjunto de Sierpinski no numerable de $\mathbb{R}$ es un L-espacio en $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$. A continuación demostraremos que $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ es un espacio estrella AN construyendo conjuntos de Sierpinski no numerables como núcleos de las cubiertas abiertas.

Proposición 1.28 $[CH]$ *$(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ es un espacio estrella AN.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para $\mathbb{R}$. Podemos suponer que

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Etiquetemos a todos los conjuntos de Borel de medida cero, digamos $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como B_0 tiene medida cero se sigue que $U_0 \setminus B_0 \neq \varnothing$; fijemos $x_0 \in U_0 \setminus B_0$. Sea $\alpha < \omega_1$ y supongamos que para cada $\beta < \alpha$ hemos elegido $x_\beta \in U_\beta$ de tal forma que

$$x_\beta \notin \{x_\delta : \delta < \beta\} \cup \bigcup_{\delta<\beta} B_\delta.$$

Dado que el conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ es numerable, se sigue que el conjunto

$$\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$$

también tiene medida cero y por lo tanto

$$U_\alpha \setminus \left(\{x_\delta : \delta < \alpha\} \cup \bigcup_{\delta<\alpha} B_\delta \right) \neq \varnothing$$

Sea $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \left(\{x_\delta : \delta < \alpha\} \cup \bigcup_{\delta<\alpha} B_\delta \right)$. Si $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, entonces D es núcleo de $\mathcal{U}$ puesto que cada $x_\alpha \in U_\alpha$. Además, por la elección de los x_α, para toda $\alpha < \omega_1$

$$D \cap B_\alpha \subset \{x_\beta : \beta < \alpha\},$$

lo que demuestra que D es un conjunto de Sierpinski y por tanto es hereditariamente Lindelöf en $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$. ■

Proposición 1.29 $[CH]$ $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ *no es estrella numerable.*

Dem. Sabemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ no es Lindelöf, por lo que podemos tomar una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ sin subcubiertas numerables. Etiquetemos a $\mathbb{R}$ como

$$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Sea $U_0 \in \mathcal{U}$ fijo tal que $x_0 \in U_0$. Sean $\alpha_0 = 0$ y

$$\alpha_1 = \min \{\alpha < \omega_1 : x_\alpha \notin U_0\}.$$

Nótese que α_1 está bien definido pues $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas numerables. Además $\alpha_0 < \alpha_1$ y $\{x_\alpha : \alpha < \alpha_1\} \subset U_0$. Ahora tomamos $U_1 \in \mathcal{U}$ fijo tal que $x_{\alpha_1} \in U_1$.

Siguiendo este procedimiento, de manera inductiva, podemos conseguir una sucesión creciente de ordinales $\{\alpha_\beta : \beta < \omega_1\}$ y una subcolección $\{U_\beta : \beta < \omega_1\} \subset \mathcal{U}$ de tal manera que

$$\{x_\alpha : \alpha < \alpha_\beta\} \subset \bigcup_{\delta<\beta} U_\delta$$

y

$$x_{\alpha_\beta} \in U_\beta \setminus \bigcup_{\delta<\beta} U_\delta.$$

Definamos $W_0 = U_0$ y para $\beta > 0$ $W_\beta = U_\beta \setminus \{x_\alpha : \alpha < \alpha_\beta\}$. Dado que cada conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \alpha_\beta\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, W_β es abierto. Notemos además que $x_{\alpha_\beta} \in W_\beta$.

Sea $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta < \omega_1\}$ y veamos que $\mathcal{W}$ es cubierta de $\mathbb{R}$. Sea $\eta < \omega_1$ y supongamos que $\eta \neq 0$ y $\eta \neq \alpha_\beta$ para toda $\beta < \omega_1$. Sea $\delta = \sup \{\gamma < \omega_1 : \alpha_\gamma < \eta\}$. El ordinal δ está bien definido pues $\alpha_0 = 0 < \eta$. Por la definición de δ se sigue que $\alpha_\delta < \eta < \alpha_{\delta+1}$. Entonces

$$x_\eta \in \{x_\alpha : \alpha < \alpha_{\delta+1}\} \subset \bigcup_{\gamma<\delta+1} U_\gamma;$$

es decir, existe $\gamma \leq \delta$ tal que $x_\eta \in U_\gamma$. Como $\alpha_\gamma \leq \alpha_\delta < \eta$, entonces $x_\eta \in W_\gamma$. Por lo tanto $\mathcal{W}$ es cubierta de $\mathbb{R}$.

Ahora bien, dado $N \subset \mathbb{R}$ numerable, existe $\beta < \omega_1$ tal que $N \subset \{x_\alpha : \alpha < \alpha_\beta\}$. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $N = \{x_\alpha : \alpha < \alpha_\beta\}$, se tiene que para toda $\eta \geq \beta$, $N \cap W_\eta = \varnothing$. Dado que $x_{\alpha_\beta} \notin \bigcup_{\delta<\beta} W_\delta$, se sigue que $x_{\alpha_\beta} \notin st(N, \mathcal{W})$. En consecuencia $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ no es estrella-numerable. ■

1.2. Subespacios de espacios estrella P

En esta sección estudiaremos a qué tipo de subespacios se heredan las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella *ccc*.

Ejemplo 1.30 *Si $X = \psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Mrówka para alguna familia maximal casi ajena $\mathcal{A}$ en ω, entonces X es separable y por lo tanto es estrella AN, estrella EN y estrella ccc. Sin embargo, el subespacio $\mathcal{A}$ es discreto y no numerable por lo que este subespacio no hereda ninguna de las tres propiedades. Con esto demostramos que las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc no necesariamente se heredan a cerrados, ni cerrados G_δ y ni siquiera a conjuntos nulos.*

Ejemplo 1.31 *Si X es la compactación por un punto de un espacio discreto D no numerable, entonces X es estrella AN, estrella EN y estrella ccc. Sin embargo, D no posee ninguna de estas tres propiedades. Esto prueba que las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc no necesariamente se heredan a abiertos, ni a densos, ni a abiertos densos.*

Una característica que tienen en común la amplitud numerable, la extensión numerable y la *ccc*, es que las tres se preservan bajo uniones numerables. Motivados en esto, podemos dar el siguiente resultado positivo.

Proposición 1.32 *Sea P una propiedad topológica que se preserva bajo uniones numerables. Si P se hereda a subespacios abiertos o a subespacios cerrados, entonces la propiedad estrella P se hereda a subespacios abiertos F_σ.*

Dem. Sean X un espacio estrella P y $Y \subset X$ un subespacio abierto F_σ; es decir, $Y = \bigcup_{n<\omega} F_n$, en donde cada F_n es cerrado en X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Al ser Y un abierto de X, se sigue que la familia $\mathcal{U}$ está formada por abiertos de X. Para cada $n < \omega$ consideremos a la familia $\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F_n\}$. $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de X, por lo que existe $M_n \subset X$ con la propiedad P que es núcleo estrella de $\mathcal{U}_n$. Como para toda $n < \omega$ se tiene que $F_n \subset st(M_n \cap Y, \mathcal{U})$, podemos concluir que $Y = st(M, \mathcal{U})$, en donde $M = \bigcup_{n<\omega} (M_n \cap Y)$.

Para finalizar la prueba resta ver que M tiene la propiedad P. Para ello basta ver que cada $M_n \cap Y$ tiene la propiedad P. Si estamos en el caso en el que P es una propiedad que se hereda a abiertos, entonces al ser $M_n \cap Y$ un subespacio abierto de M_n, podemos concluir que $M_n \cap Y$ tiene P. En el caso en el que P se herede a cerrados usamos que $M_n \cap Y = \bigcup_{m<\omega} (M_n \cap F_m)$. Como F_m es cerrado en X y M_n tiene P, entonces $M_n \cap F_m$ tiene P y por tanto $M_n \cap Y$ también satisface P. Con lo que concluimos que Y es un espacio estrella P. ■

Corolario 1.33 *Las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc se heredan a abiertos F_σ.*

Corolario 1.34 *Las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc se heredan a conjuntos abiertos-cerrados.*

Corolario 1.35 *Las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc se heredan a conjuntos conulos.*

Otra clase de subespacios a considerar son los subespacios cerrados regulares y los abiertos regulares. En ningún caso las propiedades que estamos estudiando se suelen heredar. Primero veamos el caso de los abiertos regulares.

Ejemplo 1.36 *Sean L la extensión Lindelöf por un punto de un espacio discreto no numerable y S una sucesión convergente junto con su punto límite. Sea X el espacio cociente obtenido de $L \bigoplus S$ al identificar los puntos no aislados de L y S. Siendo X una imagen continua de un espacio Lindelöf, tenemos que X es Lindelöf. Por otro lado, es sencillo verificar que los puntos aislados de L forman un subconjunto abierto regular de X y por tanto este subespacio no puede ser estrella AN, estrella EN o estrella ccc.*

Para el caso de los cerrados regulares también presentaremos un mismo ejemplo que nos permite concluir que ninguna de las tres propiedades se heredan a esta clase de subespacios.

Proposición 1.37 *Existe un espacio Tychonoff y estrella numerable que contiene un subespacio cerrado regular que no es estrella EN.*

Dem. Recursivamente vamos a construir una familia maximal casi ajena (MAD) de subconjuntos numerables de $\omega \cdot \omega_1$ de tamaño 2^ω.

Sea $\mathcal{A}_0$ una familia MAD fija en $\omega \cdot 1$, con $|\mathcal{A}_0| = 2^\omega$ y $\bigcup \mathcal{A}_0 = \omega \cdot 1$. Supongamos que para cada $\alpha < \beta$ hemos construido una familia MAD $\mathcal{A}_\alpha$ en $\omega \cdot \alpha$ tal que $\bigcup \mathcal{A}_\alpha = \omega \cdot \alpha$ y con la propiedad de que si $\delta < \alpha$, entonces $\mathcal{A}_\delta \subset \mathcal{A}_\alpha$. Como $\bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{A}_\alpha$ es casi ajena en $\omega \cdot \beta$, la podemos extender a una familia MAD $\mathcal{A}_\beta$ en $\omega \cdot \beta$ tal que $\bigcup \mathcal{A}_\beta = \omega \cdot \beta$. El hecho de que para cada $\alpha < \omega_1$, $\mathcal{A}_\alpha$ es una familia MAD en $\omega \cdot \alpha$ tal que $\bigcup \mathcal{A}_\alpha = \omega \cdot \alpha$, implica que $\mathcal{A}_\beta \setminus \mathcal{A}_\alpha$ es un conjunto no numerable siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$.

Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$. La familia $\mathcal{A}$ es casi ajena en $\omega \cdot \omega_1$ y afirmamos que $\mathcal{A}$ es también maximal. Sea $A \subset \omega \cdot \omega_1$, con $|A| = \omega$. Tomemos $\alpha < \omega_1$ tal que $A \subset \omega \cdot \alpha$. Como $\mathcal{A}_\alpha$ es maximal en $\omega \cdot \alpha$, existe $B \in \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$. Esto prueba que $\mathcal{A}$ es maximal. Notemos que $|\mathcal{A}| = 2^\omega$ ya que $|\mathcal{A}_0| = 2^\omega$.

Sea $X_1 = \mathcal{A} \cup (\omega \cdot \omega_1)$ el espacio de Mrówka determinado por $\mathcal{A}$, es decir, cada punto en $\omega \cdot \omega_1$ es aislado y una vecindad abierta para cada $A \in \mathcal{A}$ es de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$ donde $F \subset A$ es finito.

Mostraremos que X_1 no es estrella EN.

Primero notemos que si $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{A}_\alpha$, entonces $|A \cap \omega \cdot \alpha| < \omega$. En caso contrario, por la maximalidad de $\mathcal{A}_\alpha$, existiría $B \in \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_{\alpha+1}$ tal que $|A \cap B| = \omega$, pero esto no es posible ya que $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ es casi ajena. Esto nos permite concluir que el conjunto $\{A\} \cup (A \setminus \omega \cdot \alpha)$ es abierto en X_1.

Para cada $A \in \mathcal{A}$, definimos $U_A = \{A\} \cup (A \setminus \omega \cdot \alpha)$ si $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{A}_\alpha$ para alguna $\alpha < \omega_1$, y definimos $U_A = \{A\} \cup A$ en otro caso. Sea

$$\mathcal{U} = \{U_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\{\alpha\} : \alpha \in \omega \cdot \omega_1\}.$$

Sea $N \subset X_1$ un subespacio arbitraio con $e(N) \leq \omega$. Notemos que $N \cap \mathcal{A}$ es numerable. Además, como $N \setminus \bigcup_{A \in N \cap \mathcal{A}} U_A \subset \omega \cdot \omega_1$ es cerrado y discreto en N, tenemos que N es él mismo un conjunto numerable. Tomemos $\alpha < \omega_1$ tal que $N \cap (\omega \cdot \omega_1) \subset \omega \cdot \alpha$. Como $\mathcal{A}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{A}_\alpha$ es no numerable, podemos tomar $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1} \setminus (\mathcal{A}_\alpha \cup (N \cap \mathcal{A}))$. Por la elección de A se sigue que $U_A \cap N = \emptyset$, y por lo tanto $A \notin st(N, \mathcal{U})$. En consecuencia $\mathcal{U}$ no puede tener un núcleo estrella con extención numerable.

Ahora tomemos $\mathcal{A}'$ una familia MAD en ω, con $|\mathcal{A}'| = 2^\omega$, y sea $X_2 = \mathcal{A}' \cup \omega$ el espacio de Mrówka asociado a $\mathcal{A}'$. Sea $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una biyección y sea X el espacio cociente obtenido de $X_1 \bigoplus X_2$ al identificar cada $A \in \mathcal{A}$ con $\varphi(A) \in \mathcal{A}'$, digamos

$$X = (\omega \cdot \omega_1) \cup \{(A, \varphi(A)) : A \in \mathcal{A}\} \cup \omega.$$

Sea $q : X_1 \bigoplus X_2 \to X$ la proyección natural y llamemos $Z = q[X_1]$. Afirmamos que X es un espacio estrella numerable y Z es un subconjunto cerrado regular de X homeomorfo a X_1.

Es sencillo verificar que $Z = cl_X(\omega \cdot \omega_1)$, es decir, Z es en efecto un subconjunto cerrado regular de X.

Por otro lado, ya tenemos que $q \restriction_{X_1} : X_1 \to Z$ es una biyección continua. Para ver que $q \restriction_{X_1}$ es abierta sobre su imagen, tomemos $A \in \mathcal{A}$ y $F \subset A$ finito, y definamos

$$W = \{(A, \varphi(A))\} \cup (A \setminus F) \cup \varphi(A).$$

Entonces W es abierto en X y $q[\{A\} \cup (A \setminus F)] = W \cap Z$. Esto demuestra que Z es homeomorfo a X_1.

Finalmente demostraremos que X es estrella numerable. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como $q[X_2]$ es separable, existe un subconjunto numerable $M \subset q[X_2]$ tal que $q[X_2] \subset st(M, \mathcal{U})$; en particular $\{(A, \varphi(A)) : A \in \mathcal{A}\} \subset st(M, \mathcal{U})$. Llamemos $N = Z \setminus st(M, \mathcal{U})$ y probemos que N debe ser finito. Supongamos que esto no es así, entonces podemos tomar $B \subset Z \setminus st(M, \mathcal{U}) \subset \omega \cdot \omega_1$ con $|B| = \omega$. Por la maximalidad de $\mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$. Como $(A, \varphi(A)) \in st(M, \mathcal{U})$, existe $F \subset A$ finito tal que $A \setminus F \subset st(M, \mathcal{U})$, lo que implica que $B \cap st(M, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ y esto no es posible. De manera que $M \cup N$ es un núcleo numerable de $\mathcal{U}$. Y por lo tanto X es estrella numerable. ■

Proposición 1.38 *Existe un espacio Tychonoff y estrella numerable que contiene un subespacio cerrado regular que no es estrella ccc.*

Dem. Consideremos el espacio $X_1 = \mathcal{A} \cup (\omega \cdot \omega_1)$ construido en la Proposición 1.37. Veremos que X_1 no es un espacio estrella *ccc*. La cubierta abierta que nos atestigua que X_1 no es estrella *ccc* es la misma cubierta abierta dada en la Proposición 1.37 que nos permitió concluir que X_1 no es estrella EN. De manera concreta, para cada $A \in \mathcal{A}$, definimos $U_A = \{A\} \cup (A \setminus \omega \cdot \alpha)$ si $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{A}_\alpha$ para alguna $\alpha < \omega_1$, y definimos $U_A = \{A\} \cup A$ en otro caso. Sea

$$\mathcal{U} = \{U_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\{\alpha\} : \alpha \in \omega \cdot \omega_1\}.$$

Sea $N \subset X_1$ un subespacio *ccc* arbitrario. Afirmamos que existe $\delta < \omega_1$ tal que $N \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\delta$. De otra forma podemos elegir una sucesión creciente de ordinales $\{\alpha_\beta < \omega_1 : \beta < \omega_1\}$ y un subconjunto

$$\left\{A_{\alpha_\beta} : \beta < \omega_1\right\} \subset N \cap \mathcal{A}$$

tal que $A_{\alpha_\beta} \in \mathcal{A}_{\alpha_\beta+1} \setminus \mathcal{A}_{\alpha_\beta}$. La colección

$$\left\{\left(\{A_{\alpha_\beta}\} \cup \left(A_{\alpha_\beta} \setminus \omega \cdot \alpha_\beta\right)\right) \cap N : \beta < \omega_1\right\}$$

es una familia celular y no numerable en N, lo que no es posible. Por lo tanto, en efecto existe $\delta < \omega_1$ tal que $N \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\delta$.
Ahora, como $N \cap (\omega \cdot \omega_1)$ es abierto y discreto en N, debe ser numerable. De manera que podemos tomar $\delta < \alpha < \omega_1$ tal que $N \cap (\omega \cdot \omega_1) \subset \omega \cdot \alpha$. Recordando que las familias $\mathcal{A}_\beta$ formaban una sucesión creciente, notamos que $N \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha$. Además sabemos, por la construcción de los $\mathcal{A}_\beta$, que los conjuntos $\mathcal{A}_{\beta+1} \setminus \mathcal{A}_\beta$ son no numerables, por lo que podemos tomar $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{A}_\alpha$. Por la elección de A y la definición de U_A se sigue que $U_A \cap N = \emptyset$, y por lo tanto $A \notin st\,(N,\mathcal{U})$. Lo que demuestra que $\mathcal{U}$ no puede tener un núcleo *ccc*.
Si ahora consideramos el espacio cociente X construido en la Proposición 1.37, entonces tenemos un espacio Tychonoff estrella numerable y que contiene una copia homeomorfa de X_1 como subespacio cerrado regular. Es decir, X contiene un subespacio cerrado regular que no es estrella *ccc*. ■

Como el espacio construido en la Proposición 1.37 es estrella numerable, en particular es estrella AN, con lo que se exhibe que la propiedad estrella AN tampoco se hereda a cerrados regulares.

1.3. Imágenes y preimágenes de espacios estrella P

Acontinuación veremos bajo qué tipo de imágenes y preimágenes son preservadas las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella *ccc*. Comenzamos con un resultado muy general respecto a las imágenes directas que aparace enunciado en [2] y cuya prueba es de fácil verificación.

Proposición 1.39 *Si P es una propiedad topológica que se preserva bajo funciones continuas, entonces la propiedad estrella P se preserva bajo funciones continuas.*

Dado que la amplitud numerable, la extensión numerable y la *ccc* son propiedades que se preservan bajo continuidad, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.40 *Las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc se preservan bajo funciones continuas.*

El Corolario 1.40 nos resuelve de manera muy positiva lo que ocurre con las imágenes directas. En el caso de las preimágenes la situación es un poco complicada, ya que es muy difícil lograr que las propiedades estrella se preserven, aún cuando la función sea *casi* un homeomorfismo.
Recordemos que una función cerrada y de fibras compactas es llamada perfecta.

Ejemplo 1.41 *Sean $X = \omega \cup \mathcal{A}$ y $Y = \alpha D$ los espacios considerados en la Proposición 1.18. De acuerdo con esta proposición, $X \times Y$ no es estrella ccc (y por tanto tampoco es estrella AN) a pesar de que X es separable y de que Y es compacto. Como la proyección $\Pi_X : X \times Y \to X$ es continua, abierta y perfecta, concluimos que la preimagen de un espacio estrella ccc o la de un espacio estrella AN no mantiene la correspondiente propiedad (¡aún en la presencia de funciones continuas, abiertas y perfectas!).*

Para el caso de los espacios estrella EN ya no ocurre el mismo fenómeno como veremos acontinuación.

Lema 1.42 *Sea $f : X \to Y$ perfecta y sobre. Si $e(Y) \leq \omega$ entonces $e(X) \leq \omega$.*

Dem. Sea $M \subset X$ cerrado y discreto. Primero verifiquemos que $f[M]$ es discreto en Y. Dado $p \in f[M]$, el conjunto $A = M \setminus f^{-1}[\{p\}]$ es cerrado en X ya que M es cerrado y discreto. Por lo tanto $Y \setminus f[A]$ es un abierto en Y tal que $(Y \setminus f[A]) \cap f[M] = \{p\}$. Con esto probamos que $f[M]$ es discreto en Y. Dado que M es cerrado, entonces $f[M]$ también es cerrado en Y. Se sigue entonces que $f[M]$ es un conjunto numerable pues $e(Y) \leq \omega$ por hipótesis. Ahora bien, como f es perfecta y M es cerrado, entonces $f|_M : M \to f[M]$ es perfecta; de modo que para toda $p \in f[M]$, $(f|_M)^{-1}[\{p\}]$ es compacto en M y por tanto finito. Como $M = \bigcup \left\{(f|_M)^{-1}[\{p\}] : p \in f[M]\right\}$, concluimos que $|M| \leq \omega$. Por lo tanto $e(X) \leq \omega$. ■

Proposición 1.43 *Si $f : X \to Y$ es perfecta, abierta, sobre y Y es un espacio estrella EN, entonces X es un espacio estrella EN.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $y \in Y$ existe $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}$ finito tal que $f^{-1}[\{y\}] \subset \bigcup \mathcal{U}_y$, esto por la compacidad de las fibras de f. Vamos a pedir además que para toda $U \in \mathcal{U}_y$, $U \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Definimos

$$V_y = \left(Y \setminus f\left[X \setminus \bigcup \mathcal{U}_y\right]\right) \cap \bigcap \{f[U] : U \in \mathcal{U}_y\}.$$

V_y es abierto ya que $\mathcal{U}_y$ es finito y f es abierta y cerrada. La condición $U \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$ junto con el hecho de que $f^{-1}[\{y\}] \subset \bigcup \mathcal{U}_y$, implican que $y \in V_y$. Lo anterior nos da que la familia $\mathcal{V} = \{V_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta para Y. Tomemos $N \subset Y$ núcleo estrella de $\mathcal{V}$, con $e(N) \leq \omega$. Llamemos $M = f^{-1}[N]$. Por el lema 1.42 se tiene $e(M) \leq \omega$; el lema previo es aplicable ya que $f|_M : M \to N$ es perfecta y sobre. Para finalizar veamos que M es núcleo estrella de $\mathcal{U}$. Sea $x \in X$, entonces existe $y \in Y$ tal que $f(x) \in V_y$ y $V_y \cap N \neq \emptyset$. Como $V_y \subset Y \setminus f[X \setminus \bigcup \mathcal{U}_y]$, se sigue que $f^{-1}[V_y] \subset \bigcup \mathcal{U}_y$, por lo que $x \in U$ para algún $U \in \mathcal{U}_y$. Finalmente, dado que $V_y \subset f[U]$ y $V_y \cap N \neq \emptyset$, concluimos que $U \cap M \neq \emptyset$ y con esto obtenemos que $x \in st(M, \mathcal{U})$. Por lo tanto X es estrella EN. ■

Cabe destacar que en la Proposición 1.43 no es necesario hablar de continuidad de la función, a pesar de ello las condiciones de perfecta y abierta parecen ser demasiadas. Veamos un ejemplo que muestra que no podemos prescindir de la condición de función abierta. Para construirlo usaremos el duplicado de Alexandroff de un espacio. Recordemos que dado un espacio topológico X, se define el duplicado de Alexandroff de X como el conjunto $A(X) = X \times \{0,1\}$ dotado de la siguiente topología: los puntos $(x, 1)$ son aislados, mientras que una vecindad abierta para $(x, 0)$ es de la forma $(U \times \{0,1\}) \setminus \{(x, 1)\}$, en donde $U \subset X$ es un abierto del espacio X tal que $x \in U$.

El siguiente es un resultaldo conocido.

Lema 1.44 *Sea X espacio topológico y $A(X) = X \times \{0,1\}$ el duplicado de Alexandroff. Entonces la función $f : A(X) \to X$ dada por $f(x,i) = x$, para $i = 0,1$, es continua, perfecta y sobre.*

El ejemplo que daremos a continuación fue propuesto en [13] para exhibir que la propiedad estrella Lindelöf no se preserva bajo preimágenes perfectas. Ahora veremos que este mismo espacio nos permite mostrar que no podemos quitar la hipótesis de función abierta en la Proposición 1.43.

Ejemplo 1.45 *Consideremos a S^2, el cuadrado de la recta de Sorgenfrey. Dado que S^2 es separable entonces es estrella EN. La función $f : A(S^2) \to S^2$ dada por $f(p,i) = p$, $i = 0,1$, es continua, perfecta y sobre. Veamos que $A(S^2)$ no es estrella EN. Sea*

$$L = \left\{(x,-x) \in S^2 : x \in S\right\};$$

ya se sabe que L es cerrado y discreto en S^2. Para $p \in S^2 \setminus L$ definimos $U(p) = U \times \{0,1\}$, en donde $U \subset S^2$ es un abierto tal que $p \in U$ y $U \cap L = \emptyset$. Y para $p \in L$ definimos $U(p) = (U \times \{0,1\}) \setminus \{(p,1)\}$, en donde $U \subset S^2$ es un abierto tal que $p \in U$ y $U \cap L = \{p\}$. En ambos casos se tiene que $U(p) \cap (L \times \{1\}) = \emptyset$. Esto implica que $L \times \{1\}$ es cerrado en $A(S^2)$. Ahora bien, $L \times \{1\}$ es abierto y discreto por ser un subconjunto formado únicamente por puntos aislados de $A(S^2)$. Al ser $L \times \{1\}$ un discreto no numerable, no puede ser estrella EN, sin embargo, esta propiedad se hereda a conjuntos que son tanto abiertos como cerrados lo que nos dice que $A(S^2)$ no es estrella EN.

El argumento clave para mostrar que $A(S^2)$ no es estrella EN se puede abstraer para concluir el siguiente resultado.

Proposición 1.46 *Si $A(X)$ es estrella EN, entonces $e(X) \leq \omega$.*

Desde luego que es natural preguntar si la implicación contraria es válida. La respuesta es afirmativa, de hecho se puede conseguir un resultado más fuerte.

Proposición 1.47 *Si $e(X) \leq \omega$ entonces $e(A(X)) \leq \omega$.*

Dem. Ya se dijo que $A(X)$ es preimagen perfecta de X y dado que la extensión numerable se preserva bajo preimágenes perfectas entonces $e(A(X)) \leq \omega$. ■

Juntando los dos resultados anteriores se tiene que en la clase de aquellos espacios que son el duplicado de Alexandroff de algún espacio topológico, los conceptos de estrella EN y extensión numerable coinciden (y en consecuencia también coinciden con cualquier concepto intermedio).

Corolario 1.48 *Sea X espacio topológico. $e(A(X)) \leq \omega$ si y sólo si $A(X)$ es estrella EN.*

1.4. Productos finitos

En esta sección veremos el comportamiento de las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella *ccc* cuando se consideran productos finitos. En las secciones anteriores hemos visto que las propiedades estrellas han resultado ser un poco frágiles, ya sea al buscar heredarlas a subespacios o al tomar preimágenes. De manera que es de esperar que sigan siendo frágiles a la hora de tomar productos finitos. Y en efecto, veremos que las propiedades estrella se pierden fácilmente aún cuando tomamos productos entre espacios que posean una propiedad de cubierta más fuerte que la correspondiente estrella P.

Comencemos por analizar los productos de espacios estrella EN. Como resultado positivo tenemos, a partir de la Proposición 1.43, el siguiente enunciado.

Proposición 1.49 *El producto de un espacio estrella EN y un espacio compacto, es un espacio estrella EN.*

Con esta proposición incluso podemos dar un resultado un poco más refinado del mismo.

Corolario 1.50 *El producto de un espacio estrella EN y un espacio σ-compacto es un espacio estrella EN.*

Dem. Sean X un espacio estrella EN y $Y = \bigcup_{n<\omega} K_n$ y un espacio σ-compacto, en donde cada K_n es compacto. Se sigue entonces que $X \times Y = \bigcup_{n<\omega} (X \times K_n)$ y cada $X \times K_n$ es estrella EN por la Proposición 1.49. Como lo propiedad estrella EN se preserva bajo uniones numerables, se sigue que $X \times Y$ es estrella EN. ■

A continuación damos un ejemplo que muestra que en la proposición anterior no podemos cambiar σ-compacto por Lindelöf; más aún, el mismo ejemplo muestra que tampoco es válido el cambio por numerablemente compacto.

Proposición 1.51 *Existen un espacio numerablemente compacto y un espacio Lindelöf cuyo producto no es estrella EN.*

Dem. Sea $X = \omega_1 \times L$ donde L es la extensión Lindelöf por un punto de ω_1. Sea

$$\mathcal{U} = \{(\alpha, \omega_1) \times \{\alpha\} : \alpha < \omega_1\}.$$

Es sencillo verificar que el conjunto $U = \{(\alpha, \beta) \in Z : \beta \geq \alpha\}$ es un subconjunto abierto de X. Como $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{U\}$ es una partición de X en subconjuntos abiertos, entonces resulta ser una partición en subconjuntos abiertos-cerrados. En consecuencia $\mathcal{V}$ es una familia discreta de abiertos y no numerable. Por lo que el espacio X no es débilmente Lindelöf y por tanto no es estrella EN. ■

Es importante destacar que el espacio de la Proposición 1.51 no es débilmente Lindelöf, ya que esto nos permite concluir que el espacio tampoco es estrella *ccc* (y mucho menos estrella AN).

Ahora damos un ejemplo de dos espacios numerablemente compactos cuyo producto no es estrella EN. Su construcción es totalmente análoga a aquella en donde se construyen dos espacios numerablemente compactos cuyo producto no es pseudocompacto (ver [12]).

Proposición 1.52 *Existen dos espacios numerablemente compactos cuyo producto no es estrella EN.*

Dem. Sea D un espacio discreto con $|D| = 2^\omega$. Sea $f : [\beta D]^\omega \to \beta D$ tal que para todo $A \in [\beta D]^\omega$, $f(A) \in der(A)$.

Sea $X_0 = D$ y para cada $0 < \alpha < \omega_1$ sea

$$X_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \right) \cup f\left[\left[\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \right]^\omega \right].$$

Definimos $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ y $Y = D \cup (\beta D \setminus X)$. La elección de f y la definición de cada X_α, implican que X es numerablemente compacto. Mientras que el hecho de que todo cerrado e infinito $F \subset \beta D$ tiene tamaño mayor o igual a 2^{2^ω} junto con el hecho de que $|X| \leq 2^\omega$, implican que Y es numerablemente compacto.

Por otro lado, el subespacio $N = \{(x, x) : x \in D\}$ es discreto y es un subconjunto abierto-cerrado de $X \times Y$. Como D es no numerable concluimos que N no puede ser estrella EN y por tanto $X \times Y$ no es estrella EN. ■

El espacio construido en la Proposición 1.52 tampoco puede ser estrella *ccc* ya que esta propiedad también se herada a conjuntos abiertos-cerrados.

El siguiente ejemplo nos mostrará que la propiedad estrella EN no es preservada bajo el producto de dos espacios Lindelöf. Para construirlo usaremos el concepto de conjunto *totalmente imperfecto* [16].

Definición 1.53 *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es totalmente imperfecto si A no contiene una copia del conjunto de Cantor.*

Una observación importante es que si $A \subset \mathbb{R}$ es totalmente imperfecto y $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado no numerable, entonces $F \nsubseteq A$. El siguiente teorema es debido a Bernstein, una prueba puede ser encontrada en [16].

Teorema 1.54 *(Bernstein) Existe $A \subset \mathbb{R}$ tal que $|A| = |\mathbb{R} \setminus A| = 2^\omega$ y tanto A como $\mathbb{R} \setminus A$ son conjuntos totalmente imperfectos.*

Proposición 1.55 *Existen dos espacios Lindelöf cuyo producto no es estrella EN.*

Dem. Sea $A \subset \mathbb{R}$ como en el teorema de Bernstein. Tomemos $A(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ el duplicado de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Sean

$$X_1 = (A \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \text{ y } X_2 = ((\mathbb{R} \setminus A) \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$$

considerados como subespacios de $A(\mathbb{R})$.

Sea $\mathcal{B}$ la colección de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{B}_x = \{A \in \mathcal{B} : x \in A\}$. La colección $\mathcal{A}_1 = \{U_x \times \{0, 1\} \setminus \{(x, 1)\} : x \in A \text{ y } U_x \in \mathcal{B}_x\} \cup \{\{(x, 1)\} : x \in \mathbb{R}\}$ es una base para X_1; y $\mathcal{A}_2 = \{U_x \times \{0, 1\} \setminus \{(x, 1)\} : x \in \mathbb{R} \setminus A \text{ y } U_x \in \mathcal{B}_x\} \cup \{\{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$ es una base para X_2.

Veamos que X_1 y X_2 son Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de X_1 formada por abiertos pertenecientes a la base $\mathcal{A}_1$. Digamos

$$\mathcal{U} = \{(U_x \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\} : x \in F\} \cup \{\{(x,1)\} : x \in B\}$$

para algunos $F, B \subset \mathbb{R}$. Notemos que $\{U_x : x \in F\}$ es una cubierta abierta para A. Al ser A subespacio de $\mathbb{R}$, se sigue que existe $F_0 \subset F$ numerable tal que $A \subset \bigcup_{x \in F_0} U_x$. Llamemos $U = \bigcup_{x \in F_0} U_x$. El que $\mathbb{R} \setminus U$ sea un cerrado contenido en $\mathbb{R} \setminus A$ junto con el hecho de que $\mathbb{R} \setminus A$ es totalmente imperfecto, implican que $\mathbb{R} \setminus U$ es numerable. Para cada $x \in F_0 \cup (\mathbb{R} \setminus U)$ tomamos $W_x \in \mathcal{U}$ tal que $(x,1) \in W_x$. Sea

$$\mathcal{U}_0 = \{(U_x \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\} : x \in F_0\} \cup \{W_x : x \in F_0 \cup (\mathbb{R} \setminus U)\}.$$

$\mathcal{U}_0$ es una subcolección numerable de $\mathcal{U}$, veamos que además es cubierta. Por la elección de F_0 sólo hay que mostrar que $\mathbb{R} \times \{1\}$ es cubierto por $\mathcal{U}_0$. Sea $(t,1) \in \mathbb{R} \times \{1\}$ y supongamos que $t \notin F_0 \cup (\mathbb{R} \setminus U)$. Entonces $t \in U = \bigcup_{x \in F_0} U_x$, es decir, existe $x \in F_0$ tal que $t \in U_x$. Como $t \notin F_0$, se sigue que $t \neq x$ y por lo tanto $(t,1) \in (U_x \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\} \in \mathcal{U}_0$. Esto prueba que X_1 es Lindelöf. De manera totalmente análoga se tiene que X_2 Lindelöf.

Ahora demostremos que el producto $X_1 \times X_2$ no es estrella EN. Consideremos la diagonal de $A(\mathbb{R}) \times A(\mathbb{R})$

$$\Delta = \{(p,p) : p \in A(\mathbb{R})\}.$$

Sabemos que éste es un conjunto cerrado en $A(\mathbb{R}) \times A(\mathbb{R})$ y por lo tanto el conjunto $D = \Delta \cap (X_1 \times X_2)$ es cerrado en $X_1 \times X_2$. De manera explícita se tiene que $D = \{(p,p) : p \in \mathbb{R} \times \{1\}\}$. Como cada elemento de $\mathbb{R} \times \{1\}$ es aislado, obtenemos que D es abierto y discreto. Al ser D un espacio discreto y no numerable se sigue que D no es estrella EN. Recordando que la propiedad estrella EN se hereda a conjuntos abiertos-cerrados, concluimos que $X_1 \times X_2$ no puede ser estrella EN. ■

Una vez más vale la pena destacar que el espacio construido en la Proposición 1.55 tampoco es estrella *ccc*. Ahora bien, para el caso de la propiedad estrella *ccc*, es posible encontrar un espacio segundo numerable y un espacio Lindelöf cuyo producto no es estrella *ccc*. Para ello echaremos mano nuevamente de los conjuntos totalmente imperfectos. Este espacio será de gran relevancia en el siguiente capítulo.

Proposición 1.56 *Existen un espacio segundo numerable y un espacio Lindelöf cuyo producto no es estrella ccc.*

Dem. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto como en el teorema de Bernstein. Sea $Y = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$ con la topología que tiene como una base a la siguiente colección

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus A\} \cup \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : x \in A \text{ y } \varepsilon > 0\}.$$

El espacio Y con esta topología resulta ser Lindelöf. En efecto, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y formada por abiertos básicos, entonces existe una subcolección $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ numerable y formada sólamente de abiertos euclidianos, tal que $A \subset \bigcup \mathcal{V}$. Entonces $Y \setminus \bigcup \mathcal{V}$ es un cerrado euclidiano ajeno a A, lo que por definición de A implica que $|Y \setminus \bigcup \mathcal{V}| \leq \omega$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ tiene una

subcubierta numerable.
Sea $X = \mathbb{R} \setminus A$ con la topología euclidiana y llamemos M al producto topológico $X \times Y$.

Consideremos $D = \{(x, x) : x \in \mathbb{R} \setminus A\}$. Notemos que D es cerrado y discreto en M. Para toda $x \in \mathbb{R} \setminus A$ se tiene que

$$D \cap (X \times \{x\}) = \{(x, x)\}.$$

Por lo tanto D es discreto. Por otro lado, si $(x, t) \in M \setminus D$, entonces $x \neq t$. Tomando $r = \frac{1}{2} |x - t|$ se sigue que

$$((B(x, r) \cap X) \times B(t, r)) \cap D = \emptyset$$

y por lo tanto D también es cerrado.

Sea $\mathcal{U} = \{M \setminus D\} \cup \{X \times \{y\} : y \in Y \setminus A\}$. Afirmamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de M que no puede tener núcleo *ccc*. Si L es un núcleo estrella de $\mathcal{U}$, entonces L, debe ser tal que para toda $y \in Y \setminus A$, $L \cap (X \times \{y\}) \neq \emptyset$, ya que $X \times \{y\}$ es el único elemento de la cubierta que contiene al punto (y, y). Dado que $\{X \times \{y\} : y \in Y \setminus A\}$ es una familia celular, se sigue que $|L| = 2^\omega$ y que por tanto L contiene una familia celular no numerable. Lo que prueba que M no es estrella *ccc*. ■

Es natural preguntarnos si el espacio M de la proposición 1.56 es estrella EN, la respuesta es sí. Por conveniencia nos encargaremos de demostrarlo en el capítulo 2. Resulta entonces interesante el siguiente problema:

Problema 1.57 *¿El producto de un espacio estrella EN y un espacio segundo numerable, es un espacio estrella EN?*

Esta pregunta permanece abierta para el autor.

Para continuar con el análisis de los productos finitos de espacios estrella *ccc* retomemos el espacio construido en la Proposición 1.18, éste era un producto $X \times Y$ en donde $X = \omega \cup \mathcal{A}$ y $Y = \alpha D$. De acuerdo con la Proposición 1.18, $X \times Y$ no es estrella *ccc*, lo que nos demuestra la siguiente proposición.

Proposición 1.58 *Existe un espacio separable y un espacio compacto, cuyo producto no es estrella ccc.*

Es decir, que a diferencia de la propiedad estrella EN, las propiedades estrella AN y estrella *ccc* ya no son compáctamente productivas. Sin embargo, si agregamos separabilidad al espacio compacto, entonces el espacio resultante sí preserva la propiedad estrella. En [2] se prueba el resultado análogo para la propiedad estrella numerable, nosotros lo enunciaremos de manera un poco más general.

Proposición 1.59 *Sea P una propiedad topológica que se preserva bajo uniones numerables. Si X es estrella P y Y es un espacio compacto y separable, entonces $X \times Y$ es estrella P.*

Dem. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una cubierta de $X \times Y$ formada por abiertos básicos. Dado $x \in X$, existe $F_x \subset \kappa$ finito tal que

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{\alpha \in F_x} (U_\alpha \times V_\alpha).$$

Sea $W_x = \bigcap_{\alpha \in F_x} U_\alpha$. Entonces $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Tomemos $M \subset X$ núcleo de $\mathcal{W}$ con la propiedad P. Sea $D \subset Y$ denso numerable. Entonces $M \times D$ tiene la propiedad P pues $M \times D$ es una unión numerable de copias de M.

Dado $(p, q) \in X \times Y$, existe $a \in M$ y existe $x \in X$ tales que $p, a \in W_x$. Como $W_x \times Y \subset \bigcup_{\alpha \in F_x} (U_\alpha \times V_\alpha)$, entonces existe $\alpha \in F_x$ tal que $(p, q) \in U_\alpha \times V_\alpha$. Como D es denso en Y, podemos tomar $d \in D \cap V_\alpha$. Por lo tanto $(a, d) \in (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (M \times D)$. Lo que prueba que $(p, q) \in st\,(M \times D, \mathcal{U})$. Es decir, $X \times Y$ es estrella P. ■

Corolario 1.60 *Si X es estrella AN y Y es un espacio compacto y separable, entonces $X \times Y$ es estrella AN.*

Corolario 1.61 *Si X es estrella ccc y Y es un espacio compacto y separable, entonces $X \times Y$ es estrella ccc.*

Recordemos que un espacio en el que todo conjunto G_δ es abierto, es llamado P-espacio. Una de las bondades de los P-espacios, es que permiten dar versiones numerables de algunas propiedades en donde lo finito juega un papel importante. Para dar un ejemplo concreto, si quisieramos prescindir de lo compacto en la Proposición 1.59, podemos hacerlo sustituyendo la compacidad por Lindelöf pero ahora supondremos al primer factor P-espacio. Queda claro que la prueba de la siguiente proposición es similar a la Proposición 1.59 cambiando lo finito por numerable.

Proposición 1.62 *Sea Q una propiedad topológica que se preserva bajo uniones numerables. Si X es estrella Q y P-espacio y Y es un espacio Lindelöf y separable, entonces $X \times Y$ es estrella Q.*

Un problema interesante ahora, es buscar si podemos debilitar la separabilidad en la Proposición 1.59. Un candidato natural es cambiar la separabilidad por la *ccc*. La siguiente proposición nos da un acercamiento a este problema.

Proposición 1.63 *Si X y Y son espacios topológicos tales que $e\,(X) > \omega$ y $c\,(Y) > \omega$, entonces $X \times Y$ no es estrella ccc.*

Dem. Sean $D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un cerrado discreto de X y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia celular en Y. Para cada $\alpha < \omega_1$ tomamos $y_\alpha \in U_\alpha$ fijo y $N_\alpha \subset X$ un abierto tal que $N_\alpha \cap D = \{d_\alpha\}$. Sea

$$\mathcal{V} = \{X \times U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{N_\alpha \times (Y \setminus \{y_\alpha\}) : \alpha < \omega_1\} \cup \{(X \setminus D) \times Y\}.$$

La colección $\mathcal{V}$ es cubierta abierta de $X \times Y$. Notemos que $X \times U_\alpha$ es el único abierto que contiene al punto (d_α, y_α). De manera que si M es un núcleo de $\mathcal{V}$, entonces la familia

$$\{(X \times U_\alpha) \cap M : \alpha < \omega_1\}$$

es celular en M y por tanto M no es *ccc*. Lo que implica que $X \times Y$ no es estrella *ccc*. ■

Dado que en la clase de los espacios estrella *ccc* se encuentran muchos espacios cuya extensión es no numerable, la Proposición 1.63 nos dice que si queremos que el producto de cualquier espacio estrella *ccc* con un compacto sea un espacio estrella *ccc*, entonces debemos quedarnos en la clase de los compactos *ccc*. Con esto queda bien motivado el siguiente problema:

Problema 1.64 *¿El producto de un espacio estrella ccc y un espacio compacto ccc, es un espacio estrella ccc?*

Para el autor, la pregunta permanece abierta.

Otro problema relacionado con el producto de un espacio estrella *ccc* con un compacto es, ¿qué condiciones debe cumplir un espacio estrella *ccc* para que su producto con cualquier compacto siga siendo un espacio estrella *ccc*? En otras palabras, ¿qué le hace falta a la propiedad estrella *ccc* para ser compáctamente productiva? La siguiente proposición resuelve este problema.

Proposición 1.65 *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1) Para todo espacio compacto Y, $X \times Y$ es estrella numerable.
2) Para todo espacio compacto Y, $X \times Y$ es estrella AN.
3) Para todo espacio compacto Y, $X \times Y$ es estrella ccc.
4) $X \times (\omega_1 + 1)$ es estrella ccc.
5) $e(X) \leq \omega$.

Dem. Las implicaciones 1) $\to$ 2) $\to$ 3) $\to$ 4) son claras.

Si suponemos 4), entonces 5) se sigue de la Proposición 1.63 y del hecho de que el espacio $\omega_1 + 1$ no es *ccc*.

La implicación 5) $\to$ 1) se da porque para cualquier espacio compacto Y, se cumple que $e(X \times Y) = e(X)$. Y todo espacio de extensión numerable es estrella numerable. ■

Recordemos que un espacio es ω_1-Lindelöf si toda cubierta abierta de tamaño ω_1 tiene una subcubierta numerable. En [15] Ikenaga demuestra el siguiente resultado.

Proposición 1.66 *Si X es un espacio ω_1-Lindelöf, entonces para todo P-espacio Lindelöf Y con $\chi(Y) \leq \omega_1$, se tiene que $X \times Y$ es estrella numerable.*

Motivados en este resultado, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.67 *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1) Si Y es un P-espacio, Lindelöf, con $\chi(Y) \leq \omega_1$, entonces $X \times Y$ es estrella ccc.
2) $X \times L(\omega_1)$ es estrella ccc, en donde $L(\omega_1)$ es la extensión Lindelöf por un punto de ω_1.
3) X es ω_1-Lindelöf.

Dem. Las implicaciones 1) $\to$ 2) y 3) $\to$ 1) son claras.

Resta probar 2) $\to$ 3). Supongamos que no ocurre 3). Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de X, sin subcubiertas numerables. Sea

$$\mathcal{W} = \{U_\alpha \times (\alpha, \omega_1] : \alpha < \omega_1\} \cup \{X \times \{\alpha\} : \alpha < \omega_1\}.$$

Sea $M \subset X \times L(\omega_1)$ un núcleo de $\mathcal{W}$. Supongamos que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $M \cap (X \times \{\alpha\}) = \varnothing$. Para cada $x \in X$, se tiene que $(x, \alpha) \in st(M, \mathcal{W})$. De acuerdo con nuestra suposición, debe existir $\beta < \alpha$ tal que $(x, \alpha) \in U_\beta \times (\beta, \omega_1]$; es decir, $X \subset \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ y esto no es posible. Por lo tanto tenemos que para toda $\alpha < \omega_1$, $M \cap (X \times \{\alpha\}) \neq \varnothing$. De manera que $\{(X \times \{\alpha\}) \cap M : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular en M. En consecuencia $X \times L(\omega_1)$ no es estrella *ccc*. ■

Capítulo 2

Relaciones entre espacios estrella P

El objetivo de este capítulo es abordar el siguiente problema: Dadas dos propiedades estrella, P y Q, tales que $P \Rightarrow Q$, ¿en qué clases de espacios se tiene que $Q \Rightarrow P$? En la medida de lo posible, buscaremos condiciones bajo las cuales las propiedades estrella AN, estrella EN y estrella *ccc* sean equivalentes ya sea a la separabilidad, a Lindelöf o a tener extensión numerable (recordando que cada una de éstas implican a las propiedades estrella en cuestión).

En el Corolario 1.48 ya dimos un primer resultado en este tenor, pues ahí se demuestra que el duplicado de Alexandroff de un espacio tiene extensión numerable si y sólo si éste es estrella EN.

Comencemos por analizar la clase de los espacios colectivamente normales. Recordemos su definición.

Definición 2.1 *Un espacio X es llamado colectivamente normal si para toda familia discreta de cerrados $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$, existe una familia discreta de abiertos $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que $A_\alpha \subset U_\alpha$.*

Proposición 2.2 *Sea X un espacio colectivamente normal. El espacio X es débilmente Lindelöf si y sólo si $e(X) \leq \omega$.*

Dem. Supongamos que X es débilmente Lindelöf. Si $D \subset X$ es un subconjunto cerrado y discreto, entonces la colección $\{\{d\} : d \in D\}$ es una familia discreta de cerrados. Por hipótesis existe una familia discreta de abiertos $\{U_d : d \in D\}$ tal que $d \in U_d$. Como X es débilmente Lindelöf, se sigue que $\{U_d : d \in D\}$ es numerable y por tanto D es numerable. En consecuencia $e(X) \leq \omega$.

La implicación contraria ya la conocemos. ■

Corolario 2.3 *Si X es un GO-espacio, entonces X es débilmente Lindelöf si y sólo si $e(X) \leq \omega$.*

El siguiente paso natural es preguntarnos qué ocurre si debilitamos lo colectivamente normal por sólamente normalidad. Aquí la situación ya se complica. En [2] lo autores muestran que suponiendo $2^\omega < 2^{\omega_1}$, todo espacio normal, débilmente Lindelöf y de carácter menor a

2^ω, tiene extensión numerable. Apoyados en un ejemplo construido por Y. K. Song en [29], veremos que, bajo $2^\omega = 2^{\omega_1}$, existe un espacio normal, estrella EN que no es estrella AN (y por tanto no puede tener extensión numerable).

Presentemos primero el resultado propuesto en [2].

Teorema 2.4 $[2^\omega < 2^{\omega_1}]$ *Si X es normal, débilmente Lindelöf y $\chi(X) \leq 2^\omega$, entonces $e(X) \leq \omega$.*

Dem. Supongamos que X contiene un cerrado discreto F, con $|F| = \omega_1$. Para cada $x \in X$ fijemos $\mathcal{B}_x$ base local de x, con $|\mathcal{B}_x| \leq 2^\omega$. Por la normalidad de X, para cada $G \subset F$, existe un abierto $U_G \subset X$ tal que $cl_X(U_G) \cap (F \setminus G) = \varnothing$. Para cada $G \subset F$, tomemos una familia maximal de elementos dos a dos ajenos $\mathcal{A}_G \subset \bigcup_{x \in G} \mathcal{B}_x$ tal que para toda $U \in \mathcal{A}_G$, $U \subset U_G$. Por la maximalidad de $\mathcal{A}_G$ se sigue que $G \subset cl_X(\bigcup \mathcal{A}_G)$.

Ahora veamos que la asociación $G \mapsto \mathcal{A}_G$ es inyectiva. Si $G \neq H$, entonces podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $p \in H \setminus G \subset F \setminus G$. Entonces $p \notin cl_X(U_G)$ y en consecuencia $p \notin cl_X(\bigcup \mathcal{A}_G)$. Como $p \in H \subset cl_X(\bigcup \mathcal{A}_H)$, concluimos que $\mathcal{A}_G \neq \mathcal{A}_H$.

Afirmamos que debe existir $G \subset F$ tal que $\mathcal{A}_G$ no es numerable. Supongamos por el contrario que para todo $G \subset F$, $\mathcal{A}_G$ es numerable. Como $|F| = \omega_1$ y $|\mathcal{B}_x| \leq 2^\omega$, se tiene que $|\bigcup \{\mathcal{B}_x : x \in F\}| \leq 2^\omega$, de donde

$$|\{\mathcal{A}_G : G \subset F\}| \leq \left| \left[\bigcup \{\mathcal{B}_x : x \in F\} \right]^{\leq \omega} \right| \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega.$$

Ahora bien, como la asociación $G \mapsto \mathcal{A}_G$ es inyectiva, se sigue que $|\{\mathcal{A}_G : G \subset F\}| = 2^{\omega_1}$ y esto no es posible pues estamos bajo el supuesto de que $2^\omega < 2^{\omega_1}$. Por lo tanto, en efecto existe $G \subset F$ tal que $\mathcal{A}_G$ es no numerable.

Recordemos que $\mathcal{A}_G \subset \bigcup_{x \in G} \mathcal{B}_x$ es una familia formada por conjuntos ajenos dos a dos, por lo que podemos tomar un subconjunto no numerable $A \subset G$ y para cada $x \in A$ un $V_x \in \mathcal{B}_x$ de tal manera que $\mathcal{A}_G = \{V_x : x \in A\}$. Como A es cerrado en X, por ser subconjunto de F y además $A \subset \bigcup \mathcal{A}_G$, se sigue de la normalidad de X que existen $U, V \subset X$ abiertos ajenos tales que $A \subset V$ y $X \setminus \bigcup \mathcal{A}_G \subset U$. Entonces $\{V \cap V_x : x \in A\}$ es una familia no numerable de abiertos no vacíos y localmente finita, lo que contradice el hecho de que X es débilmente Lindelöf. Por lo tanto $e(X) \leq \omega$. ■

A continuación construiremos, bajo $2^\omega = 2^{\omega_1}$, un espacio normal, estrella EN que no es estrella AN. Para aligerar su lectura, iremos desarrollándolo en proposiciones separadas.

Ejemplo 2.5 $[2^\omega = 2^{\omega_1}]$ *Sea L un conjunto, con $|L| = \omega_1$, ajeno a ω. Sea $\{F_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ una familia independiente en ω y llamemos*

$$\mathcal{A} = \{F_\alpha : \alpha < 2^\omega\} \cup \{\omega \setminus F_\alpha : \alpha < 2^\omega\}.$$

Sea $\varphi : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{A}$ una biyección que preserva complementos, es decir, $\varphi(M) = F_\alpha$ si y sólo si $\varphi(L \setminus M) = \omega \setminus F_\alpha$. Sea $X = L \cup \omega$ el espacio topológico dotado de la topología que tiene como una subbase a una colección β caracterizada por las siguientes condiciones:

i) Si $M \subset L$, entonces $M \cup \varphi(M) \in \beta$.

ii) Para toda $n \in \omega$, $\{n\} \in \beta$.

iii) Para toda $p \in X$, $X \setminus \{p\} \in \beta$.
Nótese que la condición iii) asegura que X es un espacio T_1, mientras que las condiciones i) y ii) implican que L es un subespacio cerrado y discreto de X.

Proposición 2.6 $[2^\omega = 2^{\omega_1}]$ *El espacio X del Ejemplo 2.5 es normal.*

Dem. Sean $A, B \subset X$ cerrados ajenos. Supongamos primero que $A, B \subset L$. Sean $U = A \cup \varphi(A)$ y $V = (L \setminus B) \cup \varphi(L \setminus B)$. Como A y B son ajenos, se sigue que $A \subset U$ y $B \subset V$. La condición de que $L \cap \omega = \varnothing$ junto con el hecho de que $\varphi(L \setminus A) = \omega \setminus \varphi(A)$ implican que U y V son ajenos.

Para el caso general, es decir, si $A, B \subset X$ son cerrados ajenos arbitrarios, tenemos que $A \cap L$ y $B \cap L$ son cerrados ajenos ya que L es un subespacio cerrado y discreto de X. Tomemos U_0 y V_0 abiertos ajenos que separan a $A \cap L$ y $B \cap L$ y consideremos los siguientes abiertos

$$U = (U_0 \setminus B) \cup (A \cap \omega)$$

y

$$V = (V_0 \setminus A) \cup (B \cap \omega)$$

U y V son los abiertos ajenos que separan a A y B. ■

Ejemplo 2.7 $[2^\omega = 2^{\omega_1}]$ *Sean L y X como en el Ejemplo 2.5. Sea $Z = L \cup (\omega_1 \times \omega)$ el espacio dotado de la siguiente topología: declaramos a $\omega_1 \times \omega$ como subespacio abierto de Z y para cada $p \in L$ un abierto básico de p es de la forma*

$$O_{U,\alpha}(p) = (U \cap L) \cup ((\alpha, \omega_1) \times (U \cap \omega))$$

en donde $\alpha < \omega_1$ y $U \subset X$ es un abierto en X tal que $p \in U$. El espacio Z es nuevamente un espacio T_1 para el cual L es un subespacio cerrado y discreto.

Proposición 2.8 $[2^\omega = 2^{\omega_1}]$ *El espacio Z del Ejemplo 2.7 es normal.*

Dem. Sean $E, F \subset Z$ cerrados ajenos y denotemos por $E_L = E \cap L$ y $F_L = F \cap L$. Para cada $n \in \omega$ sean $E_n = E \cap (\omega_1 \times \{n\})$ y $F_n = F \cap (\omega_1 \times \{n\})$. Nótese que E_n y F_n son cerrados ajenos en el subespacio $\omega_1 \times \{n\}$, de manera que no es posible que ambos sean cofinales en $\omega_1 \times \{n\}$.

Afirmamos que para cada $n \in \omega$, existen conjuntos abiertos-cerrados $E'_n, F'_n \subset \omega_1 \times \{n\}$ de $\omega_1 \times \{n\}$, ajenos, tales que $E_n \subset E'_n$, $F_n \subset F'_n$ y con la condición de que E'_n es cofinal en $\omega_1 \times \{n\}$ si y sólo si E_n lo es, y lo análogo para F'_n. Sabemos que E_n y F_n no son ambos cofinales en $\omega_1 \times \{n\}$, así que supongamos sin pérdida de generalidad que $E_n \subset [0, \beta] \times \{n\}$ para alguna $\beta < \omega_1$. Como E_n y $F_n \cap ([0, \beta] \times \{n\})$ son subconjuntos cerrados del compacto $[0, \beta] \times \{n\}$, se separan por conjuntos abiertos-cerrados de $[0, \beta] \times \{n\}$ (y por tanto de $\omega_1 \times \{n\}$), digamos $U, V \subset [0, \beta] \times \{n\}$, con $E_n \subset U$ y $F_n \cap ([0, \beta] \times \{n\}) \subset V$. Entonces U y $V \cup (\beta, \omega_1)$ son los conjuntos abiertos-cerrados buscados. En caso de que F_n no sea cofinal en $\omega_1 \times \{n\}$, tomamos únicamente a V y no a $V \cup (\beta, \omega_1)$, en donde ahora β es tal que $E_n, F_n \subset [0, \beta] \times \{n\}$.

Sean $E' = E_L \cup \bigcup_{n<\omega} E'_n$ y $F' = F_L \cup \bigcup_{n<\omega} F'_n$. Veamos que E' y F' son cerrados en Z. Dado $p \in Z \setminus E'$, ocurren dos casos. El primero es que $p \in (\omega_1 \times \omega)$. En tal situación se sigue que $p \notin \bigcup_{n<\omega} E'_n$ y como $\bigcup_{n<\omega} E'_n$ es cerrado en $\omega_1 \times \omega$, entonces $W = (\omega_1 \times \omega) \setminus \bigcup_{n<\omega} E'_n$ es un abierto en Z tal que $p \in W$ y $W \cap E' = \varnothing$. El segundo caso es cuando $p \in L$. Como $p \notin E$ podemos tomar un abierto básico $O_{U,\alpha}(p)$ tal que $O_{U,\alpha}(p) \cap E = \varnothing$. La definición de $O_{U,\alpha}(p)$ implica que para toda $n \in U \cap \omega$, E'_n no es cofinal en $\omega_1 \times \{n\}$. De ser necesario podemos tomar $\alpha \leq \delta < \omega_1$ suficientemente grande y así asegurar que $O_{U,\delta}(p) \cap E' = \varnothing$. De manera análoga concluimos que F' es cerrado en Z.

Ahora bien, como $E_L, F_L \subset L \subset X$, entonces E_L y F_L son cerrados ajenos en X. Como X es normal, existen $U_E, U_F \subset X$ abiertos de X y ajenos tales que $E_L \subset U_E$ y $F_L \subset U_F$. Definamos

$$V_E = (U_E \cap L) \cup (\omega_1 \times (U_E \cap \omega))$$

y

$$V_F = (U_F \cap L) \cup (\omega_1 \times (U_F \cap \omega)).$$

Los conjuntos V_E y V_F son abiertos de Z y ajenos. Nos gustaría que $E \subset V_E$ y lo análogo para F, sin embargo, es posible que esto no ocurra, más aún, existe el riesgo de que $F \cap V_E \neq \varnothing$ y lo mismo para $E \cap V_F$. Así que vamos a definir finalmente

$$W_E = \left(V_E \cup \bigcup_{n<\omega} E'_n \right) \setminus F'$$

y

$$W_F = \left(V_F \cup \bigcup_{n<\omega} F'_n \right) \setminus E'$$

Como $E \setminus V_E \subset \bigcup_{n<\omega} E'_n$, entonces $E \subset W_E$ y similarmente $F \subset W_F$. Al ser $\bigcup_{n<\omega} E'_n$ abierto en $\omega_1 \times \omega$ y F' un cerrado de Z, podemos concluir que W_E es abierto en Z, y del mismo modo W_F es abierto en Z. El hecho de que $W_E \cap F' = \varnothing = W_F \cap E'$ implica que W_E y W_F son ajenos. Con esto concluimos que Z es normal. ■

Proposición 2.9 $[2^\omega = 2^{\omega_1}]$ *Existe un espacio normal, estrella EN pero que no es estrella AN.*

Dem. Consideremos al espacio normal Z del Ejemplo 2.7. Como $e(\omega_1 \times \omega) \leq \omega$ y $\omega_1 \times \omega$ es un subespacio denso de Z, se sigue que Z es estrella EN.

Para ver que Z no es estrella AN, primero veamos que Z no puede ser estrella numerable. Enumeremos a L, $L = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Recordemos que L es subespacio discreto de X, así que para cada $\alpha < \omega_1$, sea $V_\alpha \subset X$ un abierto de X tal que $V_\alpha \cap L = \{p_\alpha\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, llamemos $O_\alpha = O_{V_\alpha,\alpha}(p_\alpha)$. Sea

$$\mathcal{U} = \{O_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{\omega_1 \times \omega\}.$$

Si $B \subset Z$ es un subconjunto numerable, entonces existe $\beta < \omega_1$ tal que

$$B \cap \{p_\alpha : \beta < \alpha\} = \varnothing$$

y $B \cap ((\beta, \omega_1) \times \omega) = \varnothing$. De manera que tomando cualquier $\alpha > \beta$ se sigue que $B \cap O_\alpha = \varnothing$, lo que implica que $p_\alpha \notin st(B, \mathcal{U})$. Es decir, Z no es estrella numerable.

Finalmente, recordemos que la propiedad estrella AN es equivalente a la propiedad estrella hereditariamente Lindelöf. Dado un subespacio hereditariamente Lindelöf $M \subset Z$, $M \cap L$ es numerable pues L es discreto. Y como todo subespacio Lindelöf de $\omega_1 \times \omega$ debe ser numerable, se sigue que $M \cap (\omega_1 \times \omega)$ es numerable y por tanto M es numerable. En consecuencia, todo núcleo hereditariamente Lindelöf de cualquier cubierta abierta de Z es necesariamente un núcleo numerable. Por lo tanto Z no es estrellla AN. ■

Como veremos en el capítulo 4, bajo $MA+\neg CH$, existe un espacio normal, *ccc* pero no estrella Lindelöf (y por tanto no estrella AN). El problema de los espacios estrella P normales deja abiertas preguntas muy interesantes. Para el autor es desconocida la respuesta al siguiente problema:

Problema 2.10 *¿Existen espacios normales, estrella AN pero no estrella numerables o espacios normales, estrella EN pero no estrella Lindelöf?*

Ahora pasemos a analizar la clase de los P-espacios. Nuestro punto de partida es el siguiente resultado presentado en [3].

Proposición 2.11 *Si X es un P-espacio regular y estrella numerable, entonces $e(X) \leq \omega$.*

Dem. Supongamos que existe un cerrado discreto $D \subset X$, con $|D| = \omega_1$, digamos $D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Tomemos $U_0 \subset X$ abierto tal que $cl_X(U_0) \cap D = \{d_0\}$. Supongamos que para toda $\beta < \alpha$ hemos tomado $U_\beta \subset X$ abierto tal que $cl_X(U_\beta) \cap D = \{d_\beta\}$ y si $\beta < \gamma < \alpha$, entonces $cl_X(U_\beta) \cap cl_X(U_\gamma) = \varnothing$. Como X es un P-espacio, entonces $\bigcap_{\beta<\alpha} X \setminus cl_X(U_\beta)$ es abierto en X. Dado que $d_\alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} X \setminus cl_X(U_\beta)$ y X es regular, existe un abierto $U_\alpha \subset X$ tal que

$$d_\alpha \in U_\alpha \subset cl_X(U_\alpha) \subset \bigcap_{\beta<\alpha} X \setminus cl_X(U_\beta)$$

y $cl_X(U_\alpha) \cap D = \{d_\alpha\}$.

Consideremos la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{X \setminus D\}.$$

Por construcción, la cubierta $\mathcal{U}$ no admite subcubiertas numerables. Ahora bien, como la familia $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es celular, $\mathcal{U}$ es punto-numerable. De manera que si M es núcleo numerable de $\mathcal{U}$, entonces la colección

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap M \neq \varnothing\}$$

es una subcubierta numerable, lo que dijimos que no es posible. Por lo tanto $e(X) \leq \omega$. ■

Ahora veamos que en la clase de los P-espacios, los conceptos de estrella AN y estrella numerable son equivalentes.

Proposición 2.12 *Sea X un P-espacio. El espacio X es estrella AN si y sólo si X es estrella numerable.*

Dem. Usando que estrella AN es equivalente a estrella hereditariamente Lindelöf, la prueba es inmediata del hecho de que todo P-espacio, hereditariamente Lindelöf es numerable. ■

En [3] es demostrada la siguiente proposición.

Proposición 2.13 *Si X es un espacio normal y P-espacio, entonces $e(X) \leq \omega$ si y sólo si X es débilmente Lindelöf.*

Una pregunta natural que surge es, si se puede debilitar lo normal por Tychonoff. En el mismo artículo [3] se exhibe un ejemplo consistente de un P-espacio, Tychonoff y débilmente Lindelöf que no es estrella Lindelöf. Veremos que este espacio tampoco resulta ser estrella EN.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos en ω_1 es casi ajena si todo elemento de $\mathcal{A}$ es no numerable y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $|A \cap B| \leq \omega$. De manera análoga a los espacios de Mrówka en ω, podemos definir una topología en el conjunto $\mathcal{A} \cup \omega_1$; es decir, declaramos que cada elemento en ω_1 es aislado y una vecindad abierta para $A \in \mathcal{A}$ es de la forma $\{A\} \cup (A \setminus C)$ en donde $C \subset A$ es numerable, este espacio resulta ser Hausdorff y cero-dimensional. A este espacio le llamaremos espacio de Mrówka en ω_1 (asociado a $\mathcal{A}$).

Lema 2.14 *Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena en ω_1, entonces el espacio de Mrówka $X = \mathcal{A} \cup \omega_1$ es P-espacio. Si además $\mathcal{A}$ es maximal entonces X es débilmente Lindelöf*

Dem. Sea $U \subset X$ un subconjunto G_δ. Es decir, $U = \bigcap_{n<\omega} U_n$ con $U_n \subset X$ abierto. Sea $A \in \mathcal{A} \cap U$. Para cada $n < \omega$, existe $A_n \subset A$ numerable tal que $\{A\} \cup (A \setminus A_n) \subset U_n$. Entonces $B = \bigcup_{n<\omega} A_n$ es numerable y $\{A\} \cup (A \setminus B) \subset U$. Por lo tanto U es abierto, lo que prueba que X es P-espacio.

Ahora supongamos que $\mathcal{A}$ es maximal. Supongamos también que existe una familia $\mathcal{C}$, localmente finita de abiertos en X con $|\mathcal{C}| = \omega_1$, de la forma

$$\mathcal{C} = \{\{A_\alpha\} \cup (A_\alpha \setminus B_\alpha) : \alpha < \omega_1\}.$$

Para cada $\alpha < \omega_1$ tomamos $x_\alpha \in A_\alpha \setminus B_\alpha$ y llamamos $B = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Podemos suponer además que la elección de los x_α fue inyectiva, esto ya que $|A_\alpha \setminus B_\alpha| = \omega_1$; de modo que $|B| = \omega_1$. La maximalidad de la familia $\mathcal{A}$ implica que $B \in \mathcal{A}$ o existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega_1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $B \in \mathcal{A}$. Para cada subconjunto numerable $C \subset B$ se tiene que $|B \setminus C| = \omega_1$, por lo que la vecindad $\{B\} \cup (B \setminus C)$ intersecta a una infinidad de elementos de $\mathcal{C}$, lo que no es posible. Por lo tanto X es débilmente Lindelöf. ■

Es conocido que la existencia de una familia maximal casi ajena $\mathcal{A}$ en ω_1 que cumpla que $|\mathcal{A}|^\omega = |\mathcal{A}|$ es independiente de ZFC.

Proposición 2.15 *Si existe una familia maximal casi ajena $\mathcal{A}$ en ω_1 tal que $|\mathcal{A}|^\omega = |\mathcal{A}|$, entonces existe un P-espacio Tychonoff y débilmente Lindelöf que no es estrella EN.*

Dem. Sea $X = \mathcal{A} \cup \omega_1$ el espacio de Mrówka asociado a $\mathcal{A}$. Por el Lema 2.14 ya sabemos que X es P-espacio y débilmente Lindelöf. Es demostrado en [3] que este espacio no es estrella Lindelöf. Para ver que X no es estrella EN basta que demostremos que todo subespacio $M \subset X$, tal que $e(M) \leq \omega$, es Lindelöf. Sea $M \subset X$, con $e(M) \leq \omega$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de M. Para cada $F \in \mathcal{A} \cap M$, fijamos $U_F \in \mathcal{U}$ tal que $F \in U_F$ y tomamos $A_F \subset F$ numerable tal que $\{F\} \cup (F \setminus A_F) \subset U_F$.

Sea $L = \bigcup \{\{F\} \cup (F \setminus A_F) : F \in \mathcal{A} \cap M\}$. El conjunto $M \setminus L$ resulta ser cerrado y discreto en M. Lo discreto se cumple ya que $M \setminus L \subset \omega_1$; mientras que lo cerrado se da porque para cada $F \in \mathcal{A} \cap M$, $(\{F\} \cup (F \setminus A_F)) \cap (M \setminus L) = \emptyset$. Por lo tanto $M \setminus L$ es numerable. Sea $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ numerable tal que $M \setminus L \subset \bigcup \mathcal{U}_0$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado y discreto en X, entonces $\mathcal{A} \cap M$ es numerable y por tanto la colección $\mathcal{U}_1 = \{U_F : F \in \mathcal{A} \cap M\}$ es numerable. De manera que $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ es la subcubierta numerable buscada. En consecuencia X no es estrella EN. ■

El espacio construido en la Proposición 2.15 demuestra al menos de manera consistente que la normalidad no se puede cambiar por Tychonoff en la proposición 2.13; quedando abierta la pregunta:

Problema 2.16 *¿Es posible encontrar en ZFC un espacio Tychonoff, P-espacio y débilmente Lindelöf que no sea estrella EN?*

Como ya hemos mencionado, los P-espacios permiten dar versiones numerables de algunas propiedades en donde lo finito juega un papel importante. De manera similar a cómo concluimos que todo espacio estrella EN es débilmente Lindelöf, ahora utilizando P-espacios podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 2.17 *Si X es un P-espacio y estrella EN, entonces toda familia localmente numerable de subconjuntos abiertos no vacíos de X es numerable.*

Las familias localmente numerables o punto numerables están ligadas a los conceptos de espacios paralindelöf y metalindelöf.

Definición 2.18 *Un espacio X es paralindelöf (respectivamente metalindelöf) si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente numerable (punto numerable).*

Definición 2.19 *Un espacio X es σ-paralindelöf si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-(localmente numerable).*

Es importante hacer énfasis en que la definición de espacio σ-paralindelöf no hace referencia a la unión numerable de espacios paralindelöf, aunque cuando decimos refinamiento σ-(localmente numerable) sí nos referimos a la unión numerable de familias localmente numerables.

En [13] Hiremath demuestra que todo P-espacio, σ-paralindelöf que contiene un subconjunto denso estrella Lindelöf debe ser Lindelöf. Hemos enunciado la Proposición 2.17 con la intención de poder cambiar la condición estrella Lindelöf por estrella EN en el resulado propuesto por Hiremath.

Introduzcamos la siguiente notacion: Dados una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio X y un subconjunto $D \subset X$, denotamos por $D \wedge \mathcal{U}$ al conjunto $\{D \cap U : U \in \mathcal{U}\}$.

Proposición 2.20 *Sea X un P-espacio y σ-paralindelöf. Entonces X es Lindelöf si y sólo si X contiene un subespacio denso estrella EN.*

Dem. Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$ una cubierta abierta σ-(localmente numerable) de X. Vamos a demostrar que cada $\mathcal{U}_n$ debe ser numerable. Sea $M \subset X$ un subconjunto denso y estrella EN. Por la Proposición 2.17, para toda $n < \omega$, $M \wedge \mathcal{U}_n$ es numerable. Consideremos la asignación $\varphi : \mathcal{U}_n \to M \wedge \mathcal{U}_n$ dada por $\varphi(U) = M \cap U$. Como $\mathcal{U}_n$ es localmente numerable, se sigue que para toda $W \in M \wedge \mathcal{U}_n$, $\varphi^{-1}[\{W\}]$ es numerable. Dado que

$$\mathcal{U}_n = \bigcup \left\{\varphi^{-1}[\{W\}] : W \in M \wedge \mathcal{U}_n\right\},$$

obtenemos que $\mathcal{U}_n$ es numerable y por lo tanto $\mathcal{U}$ es numerable. Como X es σ-paralindelöf, concluimos que toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento numerable; es decir, X es Lindelöf. ■

Una consecuencia interesante de la Proposición 2.20 la tenemos en el siguiente corolario.

Corolario 2.21 *Si X es un P-espacio y σ-paralindelöf, entonces X es Lindelöf si y sólo si X es separable.*

Como se puede ver, el argumento clave en la prueba de la Proposición 2.20 es el resultado de la Proposición 2.17. Dado que en un espacio Lindelöf toda familia localmente numerable de abiertos es numerable, se tiene el siguiente resultado cuya prueba es similar a la Proposición 2.17 (ver [13]).

Proposición 2.22 *Si X es σ-paralindelöf, entonces X es Lindelöf si y sólo si X es estrella Lindelöf.*

La diferencia entre la Proposición 2.22 y la Proposición 2.20 es que se pudo quitar la hipótesis de P-espacio (la cual es muy fuerte) pero se tuvo que fortalecer la existencia de un subespacio denso estrella EN con la condición de que todo el espacio sea estrella Lindelöf. Parece natural pensar que la Proposición 2.22 es válida si ponemos estrella EN en lugar de estrella Lindelöf, pero la situación no es tan sencilla. De entrada, el argumento de que toda familia localmente numerable es numerable ya no es válido en espacios con extensión numerable (por ejemplo el espacio ω_1). Para el autor, la siguiente pregunta permanece abierta:

Problema 2.23 *¿Todo espacio σ-paralindelöf y estrella EN, es Lindelöf?*

Pensando en que la respuesta es afirmativa, suena razonable tratar de resolver primero una versión del problema con hipótesis más fuertes:

Problema 2.24 *¿Todo espacio σ-paralindelöf X que contiene un denso $D \subset X$ de extensión numerable, es Lindelöf?*

La importancia de esta versión es, que si se lograra resolver de manera afirmativa, entonces tendríamos resuelta de manera afirmativa el Problema 2.23. En efecto, si X es un espacio σ-paralindelöf y estrella EN y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces al tomar un núcleo $M \subset X$ de $\mathcal{U}$, con $e(M) \leq \omega$, se tiene que $cl_X M$ es un espacio que satisface las hipótesis del Problema 2.24. De manera que $cl_X M$ debería ser Lindelöf, es decir, $\mathcal{U}$ tendría un núcleo Lindelöf. Lo que probaría que X es en realidad estrella Lindelöf y por la Proposición 2.22 tendríamos que X es Lindelöf. Hasta donde el autor conoce, el Problema 2.24 también permanece abierto.

Pasando a los espacios estrella *ccc*, en espacios σ-paralindelöf la situación es positiva.

Definición 2.25 *Un espacio X es casi-Lindelöf si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ contiene una subcolección numerable $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X.*

Es conocido que todo espacio *ccc* es un espacio casi-Lindelöf. También es conocido que en un espacio casi-Lindelöf, toda familia localmente numerable de abiertos es numerable. Esto nos permite dar el siguiente resultado.

Proposición 2.26 *Si X es σ-paralindelöf, entonces X es Lindelöf si y sólo si X es estrella ccc.*

Dem. Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$ una cubierta abierta σ-(localmente numerable) de X. Si $C \subset X$ es un núcleo *ccc* de $\mathcal{U}$, entonces, para toda $n < \omega$, $C \wedge \mathcal{U}_n$ es numerable. De manera que la familia $\{U \in \mathcal{U} : C \cap U \neq \varnothing\}$ es la subcubierta numerable deseada. Por lo tanto X es Lindelöf. ■

Una de las motivaciones de haber trabajado con los espacios σ-paralindelöf es la caracterización ya lograda por Blair en [5]. En [5] el autor logra demostrar, mediante el uso de ciertas funciones cardinales, que todo espacio paralindelöf y débilmente Lindelöf es Lindelöf, y dejó la pregunta sobre qué ocurre con los espacios σ-paralindelöf.

Otra clase importante de espacios a considerar son los espacios de Moore.

Definición 2.27 *Un desarrollo para un espacio X, es una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n : n < \omega\}$ tal que para cada $x \in X$, la familia $\{st(x, \mathcal{U}_n) : n < \omega\}$ es una base local para x. Un un espacio regular con un desarrollo es llamado espacio de Moore.*

En [3] se demuestra lo siguiente.

Proposición 2.28 *Si X es un espacio de Moore, entonces X es separable si y sólo si X es estrella Lindelöf.*

Es sabido que en todo espacio de Moore el grado de Lindelöf y la extensión del espacio coinciden (ver [8]). En consecuencia obtenemos la siguiente extensión de la proposición previa.

Corolario 2.29 *Si X es un espacio de Moore, entonces X es separable si y sólo si X es estrella EN.*

Al igual que hicimos con las clases anteriores, nos podemos preguntar si en los espacios de Moore se dan algunas de las siguientes implicaciones

$$\textit{estrella EN} \Rightarrow \textit{extensión numerable}$$

$$\textit{débilmente Lindelöf} \Rightarrow \textit{estrella EN}$$

La respuesta en ambos casos es negativa. El plano de Niemytzki es un espacio de Moore separable (y por tanto estrella EN) que no tiene extensión numerable.

Para ver que la segunda implicación tampoco se da, vamos a apoyarnos de la topología Pixley-Roy en el hiperespacio de los conjuntos finitos de $\mathbb{R}$ (ver [20] y [10]). Este espacio es de hecho *ccc*, lo que nos demostraría que en el Corolario 2.29 no podemos cambiar estrella-EN por estrella *ccc*. Más aún, nos dice que un espacio de Moore estrella *ccc* no necesariamente es un espacio estrella AN.

Proposición 2.30 *Existe un espacio de Moore, ccc que no es estrella EN.*

Dem. Sea $X = \mathcal{F}[\mathbb{R}] = [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ dotado de la topología Pixley-Roy; es decir, para cada $F \in X$ una vecindad abierta básica es de la forma

$$[F, U] = \{A \in X : F \subset A \subset U\}$$

en donde $U \subset \mathbb{R}$ es un abierto euclidiano tal que $F \subset U$. Se sabe que la topología Pixley-Roy hace de X un espacio de Moore [20].

Veamos que X es *ccc*. Sean $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathbb{R}$ y

$$\mathcal{B}_0 = \left\{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\right\}.$$

Notemos que para cualquier básico $[F, U]$, existe $B \in \mathcal{B}_0$ tal que $[F, B] \subset [F, U]$. Esto es ya que, si para cada $x \in F$ tomamos $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subset U$, entonces $[F, B] \subset [F, U]$, en donde $B = \bigcup \{V_x : x \in F\}$.

De lo anterior ya es muy sencillo deducir que X debe ser *ccc*. Si $\mathcal{C} = \{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular de abiertos básicos, entonces para cada $\alpha < \kappa$ tomamos $B_\alpha \in \mathcal{B}_0$ tal que $[F_\alpha, B_\alpha] \subset [F_\alpha, U_\alpha]$; la numerabilidad de $\mathcal{B}_0$ implica la numerabililad de $\mathcal{C}$.

Finalmente mostremos que X no es estrella EN. De acuerdo con el Corolario 2.29 será suficiente ver que X no es estrella numerable. Sea $\mathcal{U} = \{[\{t\}, \mathbb{R}] : t \in \mathbb{R}\}$. Tomemos $Y = \{F_n \in X : n < \omega\} \subset X$ un subconjunto numerable arbitrario. Entonces $A = \bigcup Y \subset \mathbb{R}$ es numerable y por lo tanto existe $s \in \mathbb{R} \setminus A$. Ahora bien, el único elemento de $\mathcal{U}$ que contiene al punto $\{s\} \in X$ es $[\{s\}, \mathbb{R}]$, pero si $F_n \in [\{s\}, \mathbb{R}]$ entonces $s \in F_n \subset A$ contradiciendo la elección de s. Por lo tanto $\{s\} \notin st(Y, \mathcal{U})$, con lo que X no puede ser estrella numerable. ■

Recalcamos que el espacio de la Proposición 2.30, al ser *ccc*, es débilmente Lindelöf. Éste es el espacio al que hacíamos mención en el Capítulo 1 en la Proposición 1.14.

Vale la pena comentar que en [3] es presentado un espacio primero numerable y débilmente Lindelöf pero no estrella Lindelöf. El ejemplo aquí mostrado, al ser un espacio de Moore, representa una pequeña mejora a la condición de primero numerable. El ejemplo presentado en [3] se debe a Shakhmatov, quien en [26] construye un espacio pseudocompacto con una base punto numerable y con extensión mayor a 2^ω; en [3] los autores se encargan de demostrar que este espacio no puede ser estrella Lindelöf. El resultado clave para lograrlo es el siguiente:

Proposición 2.31 *Si X es un espacio regular, estrella Lindelöf y con una base punto numerable, entonces $l(X) \leq 2^{\omega}$.*

Este resultado así como el espacio de Shakhmatov motivan varias preguntas:
i) ¿Un espacio pseudocompacto y Tychonoff es estrella EN?
ii) ¿La cota $l(X) \leq 2^{\omega}$ en la Proposición 2.31 se alcanza?
iii) En la clase de los espacios con una base punto numerable, ¿todo espacio estrella Lindelöf es estrella numerable?

A continuación veremos que las respuestas a i) y iii) son negativas mientras que ii) es afirmativa.

Para ver que la respuesta a i) es negativa, demostraremos que el mismo espacio de Shakmatov no puede ser estrella EN. Para ello, veremos que en la clase de los espacios con una base punto numerable los conceptos de estrella Lindelöf y estrella EN son equivalentes.

Una asignación de vecindades en un espacio (X, τ) es una función $\varphi : X \to \tau$ tal que $x \in \varphi(x)$.

Definición 2.32 *Un espacio (X, τ) es un D-espacio si para toda asignación $\varphi : X \to \tau$ existe un subespacio cerrado y discreto $D \subset X$ tal que la familia $\{\varphi(d) : d \in D\}$ cubre a X.*

Una de las características principales de los D-espacios es que en éstos el grado de Lindelöf y la extensión coinciden. Se sabe que todos los espacios de Moore son ejemplos de D-espacios. En [4] los autores demuestran que todo espacio con una base punto numerable es un D-espacio. Por lo tanto obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.33 *Si X tiene una base punto numerable, entonces X es estrella Lindelöf si y sólo si X es estrella EN.*

Corolario 2.34 *Existe un espacio Tychonoff y pseudocompacto que no es estrella EN.*

Dem. El espacio de Shakhmatov [26] es pseudocompacto, Tychonoff, con una base punto numerable que no es estrella Lindelöf. Por la Proposición 2.33 este espacio tampoco es estrella EN. ■

El siguiente ejemplo que presentaremos demuestra de manera simultánea que las preguntas ii) y iii) tienen respuesta positiva y negativa respectivamente. Cabe destacar que al responder negativamente a iii), resolvemos (de manera más contundente) la siguiente pregunta planteada en [2]: ¿Si X es primero numerable y estrella Lindelöf, entonces X es estrella numerable? El ejemplo que vamos a considerar no sólo no es estrella numerable sino que ni siquiera alcanza a ser estrella *ccc*. El espacio del que echaremos mano es el espacio M construido en la Proposición 1.56.

Proposición 2.35 *El espacio M de la la Proposición 1.56 tiene una base punto numerable.*

Dem. Recordemos que el espacio M está construido a partir de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ como en el teorema de Bernstein. $M = X \times Y$, en donde $X = \mathbb{R} \setminus A$ tiene la topología euclidiana y $Y = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$ tiene la topología generada por la colección

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus A\} \cup \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : x \in A \text{ y } \varepsilon > 0\}.$$

Como X y A están considerados con la topología euclidiana, entonces ambos son separables. Tomemos $D_1 \subset X$ y $D_2 \subset A$ densos numerables. Para $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, sea $B(x,r) = \{t \in \mathbb{R} : |x-t| < r\}$. Para $x \in X$, denotemos por $B_X(x,r) = B(x,r) \cap X$. Sean

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ B_X\left(x, \frac{1}{n}\right) \times B\left(a, \frac{1}{n}\right) : x \in D_1, a \in D_2, n \in \mathbb{N} \right\}$$

y

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ B_X\left(x, \frac{1}{n}\right) \times \{y\} : x \in D_1, y \in Y \setminus A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base para M, veamos que es punto numerable. Sea $(x,t) \in M$. Si $t \in A$, entonces (x,t) no pertenece a ningún elemento de $\mathcal{B}_2$. Como $\mathcal{B}_1$ es un conjunto numerable, entonces $\mathcal{B}$ es punto numerable en (x,t). Por otro lado, si $t \in Y \setminus A$, entonces (x,t) sólo pertenece a los elementos de $\mathcal{B}_2$ que son de la forma $B_X\left(a, \frac{1}{n}\right) \times \{t\}$ (siempre y cuando $x \in B_X\left(a, \frac{1}{n}\right)$) y usando nuevamente que $\mathcal{B}_1$ es numerable concluimos que $\mathcal{B}$ es punto numerable en (x,t). ∎

En la Proposición 1.56 ya demostramos que M no es estrella *ccc*. La cubierta que atestigua que M no es estrella *ccc* permite concluir también que el grado de Lindelöf de M es precisamente 2^ω. Una vez que demostremos que M es un espacio estrella Lindelöf habremos demostrado que en efecto la pregunta ii) tiene respuesta positiva.

Proposición 2.36 *El espacio M es estrella Lindelöf.*

Dem. Primero notemos que para cada $p \in X$, el espacio $\{p\} \times Y$ es Lindelöf, ya que este subespacio de M es homeomorfo a Y. De manera que si D es un subconjunto numerable y denso de X, entonces $D \times Y$ es un subespacio denso de M y Lindelöf. Por lo tanto M es estrella Lindelöf. ∎

Corolario 2.37 *Existe un espacio Tychonoff X, con una base punto numerable, estrella Lindelöf y $l(X) = 2^\omega$ que no es estrella ccc.*

Una clase muy cercana a los espacios de Moore y a los D-espacios es la clase de los espacios semiestratificables.

Definición 2.38 *Un espacio X es semiestratificable si para cada abierto $U \subset X$ podemos conseguir una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos cerrados de X tal que*
a) $\bigcup_{n<\omega} U_n = U$; y
b) si $U \subset V$, entonces para toda $n < \omega$, $U_n \subset V_n$.

Se sabe que todo espacio de Moore es semiestratificable y todo espacio semiestratificable es un D-espacio. Nos gustaría verificar si la Proposición 2.28 también es válida en los espacios semiestratificables. Sabiendo que todo espacio con una base punto numerable es un D-espacio, el espacio M de la Proposición 1.56 nos muestra que la Proposición 2.28 ya no es válida para los D-espacios en general. Para la clase de los semiestratificables, queda abierto el problema:

Problema 2.39 *¿Todo espacio semiestratificable y estrella numerable es separable?*

Al menos podemos decir que en la clase de los espacios semiestratificables los conceptos de estrella EN y estrella numerable sí son equivalentes. La clave para este hecho recae en el siguiente teorema (demostrado en [8]).

Teorema 2.40 *Sea X un espacio semiestratificable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) X es Lindelöf.
b) X es hereditariamente separable.
c) X tiene extensión numerable.

Corolario 2.41 *Si X es un espacio semiestratificable, entonces X es estrella numerable si y sólo si X es estrella EN.*

Dem. Dada $\mathcal{U}$ cubierta abierta de X, existe $M \subset X$ núcleo estrella de $\mathcal{U}$ con extensión numerable. Como lo semiestratificable es hereditario, se sigue del Teorema 2.40 que M es separable, lo que prueba que X es en realidad estrella separable. Y como la estrella separabilidad es equivalente a la estrella numerabilidad, concluimos que X es estrella numerable. $\blacksquare$

Capítulo 3

Espacios n-estrella P y espacios casi-estrella P

El objetivo de este capítulo es presentar versiones débiles de los espacios estrella P. De manera concreta, definiremos los espacios *n-estrella P* y los espacios *casi-estrella P*. La intención es únicamente la de ubicarlos dentro de la retícula de las propiedades de cubierta estrella y mostrar algunas relaciones que guardan con los espacios estrella P específicos que han sido objeto de nuestro estudio en este trabajo.

3.1. Espacios n-estrella P

Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de X y $A \subset X$, definimos recursivamente la n-estrella de A respecto a la famlia $\mathcal{U}$ como sigue, $st^1(A,\mathcal{U}) = st(A,\mathcal{U})$ y $st^{n+1}(A,\mathcal{U}) = st(st^n(A,\mathcal{U}),\mathcal{U})$.

Definición 3.1 *Sean P una propiedad topológica y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que un espacio topológico X es n-estrella P, si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe un subespacio $A \subset X$ con la propiedad P, tal que $st^n(A,\mathcal{U}) = X$. Al conjunto A lo llamaremos un n-núcleo de $\mathcal{U}$.*

Definición 3.2 *Sea P una propiedad topológica. Decimos que un espacio topológico X es ω-estrella P, si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existen un subespacio $A \subset X$ con la propiedad P y $n \in \mathbb{N}$ tal que $st^n(A,\mathcal{U}) = X$.*

Evidentemente tenemos que

$$n - estrella\ P \Rightarrow (n+1) - estrella\ P \Rightarrow \omega - estrella\ P$$

en donde las implicaciones recíprocas no siempre son válidas. También es claro que si P y Q son dos propiedades topológicas tales que $P \Rightarrow Q$, entonces la correspondiente propiedad n-estrella P implica n-estrella Q.

Definición 3.3 *Decimos que un espacio X satisface la condición de cadena discreta numerable (o que X es DCCC), si toda familia discreta de abiertos no vacíos de X es numerable.*

Como toda familia discreta de abiertos es una familia localmente finita, todo espacio débilmente Lindelöf es $DCCC$.

Proposición 3.4 *Si X es regular y $DCCC$, entonces X es débilmente Lindelöf.*

Dem. Supongamos que X contiene una familia $\mathcal{U}$, localmente finita celular y no numerable. Para cada $U \in \mathcal{U}$, podemos tomar $V_U \subset X$ abierto no vacío tal que $cl_X(V_U) \subset U$. Entonces la familia $\{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia discreta no numerable, por lo que X no es $DCCC$. ■

En el Capítulo 1 vimos que débilmente Lindelöf es una propiedad más débil que todas las propiedades estrella que hemos considerado. Ahora los espacios n-estrella P, (para $P =$ numerable, amplitud numerable, Lindelöf, extensión numerable o *ccc*) en general no son espacios débilmente Lindelöf, de hecho no siempre son $DCCC$. Más aún, en [10] los autores demuestran que todo espacio $DCCC$ es un espacio 3-estrella numerable, lo que trae como consecuencia que la propiedad débilmente Lindelöf sea más fuerte que todas las propiedades n-estrella P a partir de $n = 3$.

En la siguiente proposición, mostramos el citado resultado propuesto en [10]. Para simplificar un poco, volveremos a utilizar la siguiente notación introducida en el capítulo 2, dados un subconjunto $A \subset X$ y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X, denotamos por $A \wedge \mathcal{U}$ al conjunto $\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \varnothing\}$.

Proposición 3.5 [10] *Si X es $DCCC$, entonces X es 3-estrella numerable.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Vamos a demostrar que existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ numerable tal que $st^2\left(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}\right) = X$. Supongamos que esto no sucede. Comencemos por fijar $U_0 \in \mathcal{U}$ y llamemos $\mathcal{V}_0 = \{U_0\}$.

Sea $\alpha < \omega_1$ y supongamos que para toda $\beta < \alpha$ se ha conseguido una familia discreta y numerable $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{U}$ así como una sucesión de puntos $\{x_\beta\}_{\beta<\alpha} \subset X$ con las siguientes propiedades:

1) Si $\gamma < \beta < \alpha$ entonces $\mathcal{V}_\gamma \subset \mathcal{V}_\beta$;

2) Para toda $\beta < \alpha$, $\left|\mathcal{V}_\beta \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{V}_\gamma\right| = 1$; y

3) $x_\beta \in U_\beta \setminus st^2\left(\bigcup\left(\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{V}_\gamma\right), \mathcal{U}\right)$, en donde $U_\beta \in \mathcal{V}_\beta$.

Notemos que $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta$ es una familia discreta y numerable. Dado $x \in X$, tomamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Supongamos que $U \wedge \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta \neq \varnothing$; es decir, existe $\beta_0 < \alpha$ tal que $U \wedge \mathcal{V}_{\beta_0} \neq \varnothing$. Como $\mathcal{V}_{\beta_0}$ es una familia discreta, entonces existe $W \subset U$ abierto tal que $x \in W$ y $\left|W \wedge \mathcal{V}_{\beta_0}\right| \leq 1$. Si probamos que para toda $\gamma > \beta_0$, $W \wedge \left(\mathcal{V}_\gamma \setminus \mathcal{V}_{\beta_0}\right) = \varnothing$, habremos terminado. Supongamos por el contrario que existe $\gamma > \beta_0$ tal que $W \wedge \left(\mathcal{V}_\gamma \setminus \mathcal{V}_{\beta_0}\right) \neq \varnothing$ y digamos que $\gamma > \beta_0$ es el menor ordinal con esta propiedad. Sean $V \in \mathcal{V}_{\beta_0}$ y $\tilde{V} \in \mathcal{V}_\gamma \setminus \mathcal{V}_{\beta_0}$ tales que $U \cap V \neq \varnothing$ y $W \cap \tilde{V} \neq \varnothing$. La minimalidad de γ implica que $\tilde{V} \in \mathcal{V}_\gamma \setminus \bigcup_{\delta<\gamma} \mathcal{V}_\delta$, por lo que las condiciones 2) y 3) nos dicen que $x_\gamma \in \tilde{V}$. Pero dado que $U \cap V \neq \varnothing$ y $\varnothing \neq W \cap \tilde{V} \subset U \cap \tilde{V}$, entonces se cumple la definición de que $x_\gamma \in st^2\left(\bigcup\left(\bigcup_{\delta<\gamma} \mathcal{V}_\delta\right), \mathcal{U}\right)$ lo que no es posible por la condición 3). Por lo tanto $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta$ es en efecto una familia discreta.

De acuerdo con nuestra suposición inicial, existe $x_\alpha \in X \setminus st^2\left(\bigcup\left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta\right), \mathcal{U}\right)$. Sea $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $x_\alpha \in U_\alpha$ y llamemos $\mathcal{V}_\alpha = \{U_\alpha\} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta$.

Veamos que $\mathcal{V}_\alpha$ es una familia discreta. Dado $x \in X$, tomamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Distingamos dos casos. Primero supongamos que $U \cap U_\alpha = \varnothing$. Como $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta$ es una familia discreta, existe $W \subset U$ abierto tal que $x \in W$ y $\left| W \wedge \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta \right| \leq 1$ y por tanto $|W \wedge \mathcal{V}_\alpha| \leq 1$. Si $U \cap U_\alpha \neq \varnothing$, entonces una supuesta existencia de un $V \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta$ tal que $U \cap V \neq \varnothing$ implicaría que $x_\alpha \in st^2 \left(\bigcup \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta \right), \mathcal{U} \right)$, lo que no es posible. Es decir, en este caso $U \wedge \mathcal{V}_\alpha = \{U_\alpha\}$. Con esto probamos que $\mathcal{V}_\alpha$ es discreta.

Definamos finalmente $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{V}_\alpha$. De manera similar a lo ya argumentado podemos concluir que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ es una familia discreta y además no numerable, pero esto no es posible porque X es $DCCC$.

Así concluimos que sí existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ numerable tal que $st^2 \left(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U} \right) = X$. Ahora para cada $U \in \mathcal{V}$ tomamos un punto $x_U \in U$ y llamamos $N = \{x_U : U \in \mathcal{V}\}$. Se sigue que N es numerable y

$$X = st^2 \left(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U} \right) \subset st^3 \left(N, \mathcal{U} \right).$$

Por lo tanto X es 3-estrella numerable. ■

Es de nuestro interés mantener a la propiedad débilmente Lindelöf como la propiedad más débil dentro de la retícula de propiedades estrella que estamos trabajando. La Proposición 3.5 parece representar un obstáculo en este sentido, por lo que un problema interesante es determinar que tan alejados están los espacios n-estrella numerables de los espacios débilmente Lindelöf.

Intuitivamente, conforme n es muy grande, la n-estrella de un conjunto respecto a una cubierta abierta se convierte rápidamente en un conjunto muy grande. Esto sugiere que conforme n es muy grande, la línea que distingue a un espacio n-estrella P de un espacio $(n+1)$-estrella P es bastante delgada. Por lo que incluso cabe preguntarnos si la sucesión de propiedades

$$estrella\ P \Rightarrow 2 - estrella\ P \Rightarrow \cdots \Rightarrow n - estrella\ P \Rightarrow \cdots \Rightarrow \omega - estrella\ P$$

eventualmente se estanca en alguna $n \in \mathbb{N}$. Para el caso $P = numerable$, los autores en [10] demuestran que la diferencia entre un espacio n-estrella P y un espacio $(n+1)$-estrella P es el axioma de separación que poseen. Concretamente, resulta que para $n \geq 3$, todo espacio regular y $(n+1)$-estrella numerable es un espacio n-estrella numerable.

Proposición 3.6 [10] *Si X es regular y ω-estrella-numerable, entonces X es $DCCC$.*

De acuerdo con las Proposiciones 3.5 y 3.6, tenemos que, en la clase de los espacios regulares, la sucesión

$$estrella\ numerable \Rightarrow \cdots \Rightarrow n - estrella\ numerable \Rightarrow \cdots \Rightarrow \omega - estrella\ numerable$$

se estanca en $n = 3$, quedando de la siguiente manera

$$estrella\ numerable \Rightarrow 2 - estrella\ numerable \Rightarrow 3 - estrella\ numerable = DCCC$$

A continuación veremos que este mismo hecho ocurre para los espacios n-estrella P cuando P es extensión numerable o *ccc*.

Proposición 3.7 *Si X es n-estrella EN, entonces X es $(n+1)$-estrella numerable.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Sea M un n-núcleo de $\mathcal{U}$ con extensión numerable. Como todo espacio con extensión numerable es estrella numerable, se sigue que existe $N \subset M$ numerable tal que $M \subset st\,(N,\mathcal{U})$. Por lo tanto $X = st^n\,(M,\mathcal{U}) \subset st^{n+1}\,(N,\mathcal{U})$. Lo que prueba que X es $(n+1)$-estrella numerable. ■

Proposición 3.8 *Si X es n-estrella ccc, entonces X es $(n+1)$-estrella numerable.*

Dem. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y C un n-núcleo *ccc* de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ numerable tal que $C \subset cl_X\left(\bigcup \mathcal{U}_0\right)$. Notemos que

$$st\,(C,\mathcal{U}) \subset st\left(cl_X\left(\bigcup \mathcal{U}_0\right),\mathcal{U}\right) = st\left(\bigcup \mathcal{U}_0,\mathcal{U}\right).$$

De manera que si para cada $U \in \mathcal{U}_0$ tomamos un punto $x_U \in U$ y llamamos N al conjunto $\{x_U : U \in \mathcal{U}_0\}$, se sigue que N es numerable y

$$X = st^n\,(C,\mathcal{U}) \subset st^n\left(\bigcup \mathcal{U}_0,\mathcal{U}\right) \subset st^{n+1}\,(N,\mathcal{U}).$$

Por lo tanto X es $(n+1)$-estrella numerable. ■

Corolario 3.9 *Las propiedades ω-estrella numerable, ω-estrella EN y ω-estrella ccc son equivalentes.*

Corolario 3.10 *Si X es regular y ω-estrella numerable, entonces X es 3-estrella EN y 3-estrella ccc.*

Gracias al Corolario 3.10, tenemos que al igual que las propiedades n-estrella numerable, en la clase de los espacios regulares, las propiedades n-estrella EN y n-estrella *ccc* se estancan para $n = 3$. Por lo tanto nos quedan las siguientes sucesiones:

$$estrella\ EN \Rightarrow 2 - estrella\ EN \Rightarrow 3 - estrella\ EN = débilmente\ Lindelöf$$

$$estrella\ ccc \Rightarrow 2 - estrella\ ccc \Rightarrow 3 - estrella\ ccc = débilmente\ Lindelöf$$

El siguiente diagrama nos muestra cómo quedan relacionadas las propiedades n-estrella numerable, n-estrella EN y n-estrella *ccc*.

$$\begin{tikzcd}
 & estrella\ numerable \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
estrella\ EN \arrow[dr] \arrow[dd] & & estrella\ ccc \arrow[dl] \arrow[dd] \\
 & 2 - estrella\ numerable \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
2 - estrella\ EN \arrow[dr] & & 2 - estrella\ ccc \arrow[dl] \\
 & 3 - estrella\ numerable \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, shift left, "T_3"] & \\
3 - estrella\ EN \arrow[dr, "T_3"] & & 3 - estrella\ ccc \arrow[dl, "T_3"'] \\
 & débilmente\ Lindelöf \arrow[uu, shift left] &
\end{tikzcd}$$

3.2. Espacios casi-estrella P

El concepto de espacio *casi-estrella* P está motivado en el concepto análogo de espacio *casi-Lindelöf.*

Definición 3.11 *Sea P una propiedad topológica. Decimos que un espacio topológico X es casi-estrella P, si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe un subespacio $A \subset X$ con la propiedad P, tal que la estrella $st(A,\mathcal{U})$ es un conjunto denso en X. Al conjunto A lo llamaremos un casi-núcleo de $\mathcal{U}$.*

Una vez más, cabe recalcar que todo espacio estrella P es un espacio casi-estrella P pero el recíproco no siempre es cierto. De hecho, basta que un espacio contenga un subespacio denso y estrella P para asegurar que el espacio es casi-estrella P.

Proposición 3.12 *Si X contiene un subespacio denso y estrella P, entonces X es casi-estrella P.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta. Tomando $D \subset X$ un denso estrella P, existe $N \subset D$ con la propiedad P tal que $D \subset st(N,\mathcal{U})$. Se sigue entonces que $st(N,\mathcal{U})$ es denso en X y por tanto N es el casi-núcleo de $\mathcal{U}$ buscado. ■

Desde luego, también sigue siendo válido que si P y Q son dos propiedades topológicas tales que $P \Rightarrow Q$, entonces la correspondiente propiedad casi-estrella P implica casi-estrella Q.

Siendo que hemos motivado la definición de espacio casi-estrella P a partir de espacio casi-Lindelöf, es de destacar que todo espacio casi-Lindelöf es un espacio casi-estrella numerable.

Proposición 3.13 *Si X es casi-Lindelöf, entonces X es casi-estrella numerable.*

Dem. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta y $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ numerable tal que $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X. Para cada $U \in \mathcal{U}_0$, tomamos $x_U \in U$ y llamamos N al conjunto $\{x_U : U \in \mathcal{U}_0\}$. Resulta que N es numerable y además $\bigcup \mathcal{U}_0 \subset st(N,\mathcal{U})$. Por lo tanto $st(N,\mathcal{U})$ es denso en X. ■

Corolario 3.14 *Si X es ccc, entonces X es casi-estrella numerable.*

El recíproco de la Proposición 3.13 no es válido en general. Sin embargo, una condición suficiente para que esto sí suceda es que el espacio sea metalindelöf.

Proposición 3.15 *Si X es casi-estrella numerable y metalindelöf, entonces X es casi-Lindelöf.*

Dem. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta punto numerable. Tomando $N \subset X$ un casi-núcleo numerable, $\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} : U \cap N \neq \varnothing\}$ es una subcolección numerable de $\mathcal{U}$ cuya unión es densa en X. Por lo tanto X casi-Lindelöf. ■

Con la observación hecha de que todo espacio estrella P es un espacio casi-estrella P, surge la pregunta de ¿cuál es la $n \in \mathbb{N}$ más grande para la cual se cumpla que todo espacio n-estrella P es un espacio casi-estrella P? El autor desconoce la respuesta al siguiente problema:

Problema 3.16 *¿Todo espacio 2-estrella numerable es un espacio casi-estrella numerable?*

De manera recíproca, podemos preguntarnos si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todo espacio casi-estrella P es un espacio n-estrella P.

Proposición 3.17 *Si X es casi-estrella P, entonces X es 2-estrella P.*

Dem. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta y $N \subset X$ un casi-núcleo con la propiedad P. Ahora notemos que

$$X = cl_X st(N,\mathcal{U}) \subset st(cl_X st(N,\mathcal{U}),\mathcal{U}) = st(st(N,\mathcal{U}),\mathcal{U}) = st^2(N,\mathcal{U}).$$

Por lo tanto N es un 2-núcleo de $\mathcal{U}$. En consecuencia X es 2-estrella P. ■

Por supuesto que $n = 2$ es el menor natural para el cual la Proposición 3.17 es válida pues, como ya fue mencionado, no todo espacio casi-estrella P es estrella P. A continuación vamos a mostrar dos ejemplos que muestran que la propiedad casi-estrella numerable no implica ni estrella EN ni estrella *ccc*.

Ejemplo 3.18 *De acuerdo con la Proposición 2.30, el hiperspacio $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ con la topología Pixley-Roy es un espacio ccc pero no estrella EN. Como todo espacio ccc es casi-estrella numerable, concluimos que la propiedad casi-estrella numerable no implica estrella EN.*

Ejemplo 3.19 *El espacio $X = \psi(A) \times \alpha D$ de la Proposición 1.18 es un espacio que no es estrella ccc, sin embargo, sí es casi-estrella numerable. En efecto, el subespacio $\omega \times \alpha D \subset X$ es denso y σ-compacto, lo que por la Proposición 3.12 implica que X es casi-estrella numerable.*

Para el autor el siguiente problema permanece abierto:

Problema 3.20 *¿Todo espacio estrella EN o estrella ccc es casi-estrella numerable? Más aún, ¿todo espacio estrella AN es casi-estrella numerable?*

Las Proposiciones 3.7 y 3.8 nos dicen en particular que todo espacio 2-estrella EN o 2-estrella *ccc* es un espacio 3-estrella numerable. Por la Proposición 3.17 podemos concluir los siguientes corolarios.

Corolario 3.21 *Todo espacio casi-estrella EN es 3-estrella numerable.*

Corolario 3.22 *Todo espacio casi-estrella ccc es 3-estrella numerable.*

Estos dos corolarios motivan las preguntas:

Problema 3.23 *¿Todo espacio casi-estrella EN es 2-estrella numerable?*

Problema 3.24 *¿todo espacio casi-estrella EN es 2-estrella numerable?*

Ambas preguntas permacen abiertas para el autor.

El siguiente diagrama nos muestra las relaciones obtenidas entre los espacios casi-estrella P y n-estrella P (para $P =$ numerable, extensión numerable o *ccc*).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & estrella\ numerable & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
estrella\ EN & & \downarrow & & estrella\ ccc \\
 & & casi-estrella\ numerable & & \\
\downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
casi-estrella\ EN & & \downarrow & & casi-estrella\ ccc \\
\downarrow & & 2-estrella\ numerable & & \downarrow \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
2-estrella\ EN & & & & 2-estrella\ ccc \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & 3-estrella\ numerable & &
\end{array}
$$

Cerramos este capítulo con un resultado postulado en [10] que está muy relacionado con las Proposiciones 3.5 y 3.6.

Proposición 3.25 [10] *Si X es normal y $DCCC$, entonces X es casi-estrella numerable.*

Dem. Supongamos que existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ sin casi-núcleos numerables. Inductivamente podemos conseguir un conjunto de puntos $H = \{x_\alpha \in X : \alpha < \omega_1\}$ tal que para toda $0 < \alpha < \omega_1$,

$$x_\alpha \in X \setminus cl_X\left(st\left(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U}\right)\right).$$

Para $\alpha < \omega_1$ tomamos el conjunto abierto

$$V_\alpha = st\left(x_\alpha, \mathcal{U}\right) \setminus cl_X\left(st\left(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U}\right)\right).$$

Nótese que la familia $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ está formada por conjuntos ajenos dos a dos y además $x_\alpha \in V_\alpha$. Dado que cada elemento de la cubierta $\mathcal{U}$ intersecta a H en a lo más un punto, se sigue que H es cerrado. Por la normalidad de X, podemos encontrar $V \subset X$ abierto tal que

$$H \subset V \subset cl_X V \subset \bigcup_{\alpha<\omega_1} V_\alpha$$

Finalmente, notemos que la familia $\mathcal{V} = \{V \cap V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es discreta y no numerable. Dado $x \in X$, si $x \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} V_\alpha$, entonces x pertenece a un único V_α y $|V_\alpha \wedge \mathcal{V}| \leq 1$. Si $x \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} V_\alpha$, entonces $x \in X \setminus cl_X V$ y $(X \setminus cl_X V) \wedge \mathcal{V} = \varnothing$. Con esto concluimos que X no es $DCCC$. ■

Juntando lo obtenido en las Proposiciones 3.5, 3.6 y 3.25 conseguimos las siguientes cadenas de implicaciones cuando nos restringimos a la clase de los espacios normales:

$$estrella\ numerable \Rightarrow casi-estrella\ numerable \Rightarrow 2-estrella\ numerable = DCCC;$$

$$estrella\ EN \Rightarrow casi-estrella\ EN \Rightarrow 2-estrella\ numerable = DCCC;$$

$$estrella\ ccc \Rightarrow casi-estrella\ ccc \Rightarrow 2-estrella\ numerable = DCCC.$$

Capítulo 4

Propiedades estrella P y el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$

4.1. El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$

En los capítulos anteriores hemos trabajado con el hiperespacio $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ dotado de la topología Pixley-Roy. En concreto, sabemos que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es un espacio de Moore *ccc* pero que no es estrella EN. El hecho de que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no sea estrella EN a pesar de todas las propiedades que posee $\mathbb{R}$, motiva la siguiente pregunta: ¿bajo qué condiciones en X, $\mathcal{F}[X]$ es estrella EN? El objetivo de este capítulo es dar respuesta a este problema.

Vamos a comenzar por recordar la definición del hiperespacio $\mathcal{F}[X]$.

Definición 4.1 *Sea X un espacio topológico. El conjunto $\mathcal{F}[X]$ denota al hiperespacio de todos los subconjuntos finitos y no vacíos de X. Dotamos a $\mathcal{F}[X]$ con la topología Pixley-Roy la cual está definida de la siguiente manera: para cada $F \in X$ una vecindad abierta básica para F es de la forma*

$$[F, U] = \{A \in X : F \subset A \subset U\}$$

en donde $U \subset X$ es un abierto de X tal que $F \subset U$.

Únicamente con el objetivo de ilustrar el comportamiento del hiperespacio $\mathcal{F}[X]$, a continuación mostraremos que tanto $\mathcal{F}[\omega_1]$ como $\mathcal{F}[S]$ son espacios que no poseen la propiedad 2-estrella numerable.

Proposición 4.2 *Sea S la recta de Sorgenfrey, entonces $\mathcal{F}[S]$ no es 2-estrella numerable.*

Dem. Para cada $F \in \mathcal{F}[S]$, sea $U_F = \bigcup_{x \in F}[x, x+1)$. Consideremos la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{[F, U_F] : F \in \mathcal{F}[S]\}.$$

Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}[S]$ un subconjunto numerable arbitrario. Tomemos $p \in S \setminus \bigcup \mathcal{A}$ y veamos que

$$[\{p\}, [p, p+1)] \cap st(\mathcal{A}, \mathcal{U}) = \varnothing.$$

Sea $F \in \mathcal{F}[S]$ y tal que $[F, U_F] \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$ y supongamos que existe $B \in [\{p\}, [p, p+1)] \cap [F, U_F]$. El hecho de que $[F, U_F] \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$ implica que $F \subset \bigcup \mathcal{A}$ y por lo tanto $p \notin F$.

Ahora bien, como $F \subset B \subset [p, p+1)$, se sigue que $p < \min F$ y en consecuencia $p \notin \bigcup_{x \in F} [x, x+1) = U_F$. Pero esto último no es posible ya que $p \in B \subset U_F$.

Por definición de la cubierta $\mathcal{U}$, $U_{\{p\}} = [\{p\}, [p, p+1)]$ es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene al punto $\{p\}$, de manera que $\{p\} \notin st^2(\mathcal{A}, \mathcal{U})$. Por lo tanto $\mathcal{F}[S]$ no es 2-estrella numerable. ■

Proposición 4.3 *El espacio $\mathcal{F}[\omega_1]$ no es 2-estrella numerable.*

Dem. Para cada $F \in \mathcal{F}[\omega_1]$, sea $U_F = [0, \alpha_F + 1)$, en donde $\alpha_F = \max F$. Consideremos la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{[F, U_F] : F \in \mathcal{F}[\omega_1]\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, el subconjunto $\mathcal{F}[[0, \alpha)] \subset \mathcal{F}[\omega_1]$ es numerable. Primero demostraremos que

$$st^2(\mathcal{F}[[0, \alpha)], \mathcal{U}) \neq \mathcal{F}[\omega_1].$$

Como para cada $F \in \mathcal{F}[[0, \alpha)]$, $U_F \subset [0, \alpha)$, se sigue que

$$\left[\{\alpha + 1\}, U_{\{\alpha+1\}}\right] \cap [F, U_F] = \varnothing.$$

Dado que $\left[\{\alpha + 1\}, U_{\{\alpha+1\}}\right]$ es el único elemento de la cubierta que contiene al punto $\{\alpha + 1\}$, obtenemos que

$$\{\alpha + 1\} \notin st^2(\mathcal{F}[[0, \alpha)], \mathcal{U}).$$

Ahora bien, de manera general, si tomamos un subconjunto numerable arbitrario $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}[\omega_1]$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}[[0, \alpha)]$ en donde $\alpha < \omega_1$ es cualquier ordinal tal que $\alpha > \sup(\bigcup \mathcal{A})$. De modo que

$$st^2(\mathcal{A}, \mathcal{U}) \subset st^2(\mathcal{F}[[0, \alpha)], \mathcal{U})$$

y por lo tanto

$$st^2(\mathcal{A}, \mathcal{U}) \neq \mathcal{F}[\omega_1].$$

Lo que prueba que $\mathcal{F}[\omega_1]$ no es 2-estrella numerable. ■

Los ejemplos $\mathcal{F}[S]$ y $\mathcal{F}[\omega_1]$ nos muestran que aún cuando un espacio X sea Lindelöf o numerablemente compacto, esto no alcanza para poder asegurar siquiera que el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es 2-estrella numerable.

Para comprender un poco mejor la naturaleza de $\mathcal{F}[X]$, vale la pena que enunciemos algunas de sus propiedades más importantes. Referimos al lector a [9] y a [24] para una revisión de sus pruebas. [17] es una buena referencia para un estudio un poco más exhaustivo de la topología Pixley-Roy.

Proposición 4.4 [9] *Para un espacio X, $\mathcal{F}[X]$ tiene las siguientes propiedades:*
i) $\mathcal{F}[X]$ es cero-dimensional, Hausdorff y hereditariamente metacompacto.
ii) Para todo $A \subset X$, el subespacio $\mathcal{F}[A] \subset \mathcal{F}[X]$ es cerrado. Si $U \subset X$ es abierto, entonces $\mathcal{F}[U]$ también es abierto en $\mathcal{F}[X]$.
iii) $\mathcal{F}[X]$ es de Moore si y sólo si X es primero numerable.
iv) $\mathcal{F}[X]$ es semiestratificable si y sólo si $\psi(X) \leq \omega$.

Proposición 4.5 [24] *Para cualquier espacio topológico se cumple que*
i) $d(\mathcal{F}[X]) = l(\mathcal{F}[X]) = e(\mathcal{F}[X]) = |X|$.
ii) $hd(\mathcal{F}[X])\, hl(\mathcal{F}[X]) \leq c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$.

El hecho de que $\mathcal{F}[X]$ siempre resulte un espacio hereditariamente metacompacto y dado que todo espacio metacompacto de extensión numerable es Lindelöf, nos permite concluir la siguiente proposición.

Proposición 4.6 *Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella EN, entonces $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf.*

De acuerdo con la Proposición 4.6, si buscamos caracterizar cuándo $\mathcal{F}[X]$ es estrella EN, nos basta encontrar condiciones para X partiendo del supuesto de que $\mathcal{F}[X]$ sea estrella Lindelöf. A continuación damos una caracterización muy importante de cuándo $\mathcal{F}[X]$ es estrella numerable derivada de la metacompacidad de $\mathcal{F}[X]$.

Proposición 4.7 *$\mathcal{F}[X]$ es estrella numerable si y sólo si $|X| \leq \omega$.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta punto finita. Si $N \subset \mathcal{F}[X]$ es un núcleo numerable de $\mathcal{U}$, entonces el conjunto $\{U \in \mathcal{U} : N \cap U \neq \varnothing\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Lo que prueba que $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf. Como $l(\mathcal{F}[X]) = |X|$, concluimos que $|X| \leq \omega$.

La implicación contraria es clara. ■

En el Corolario 2.41 vimos que todo espacio semiestratificable y estrella Lindelöf es un espacio estrella numerable. Este resultado junto con la Proposición 4.7 nos permite concluir lo siguiente.

Corolario 4.8 *Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf y $\psi(X) \leq \omega$, entonces $|X| \leq \omega$.*

Dem. Como $\psi(X) \leq \omega$, se sigue de la Proposición 4.4 que $\mathcal{F}[X]$ es semiestratificable y por tanto estrella numerable. Por la Proposición 4.7 concluimos que $|X| \leq \omega$. ■

En vista del Corolario 4.8, podemos preguntarnos si siempre que $\mathcal{F}[X]$ sea un espacio estrella Lindelöf, resultará que X es numerable. Sorprendentemente (al menos para el autor) la respuesta es positiva. Antes de aterrizar en este resultado, primero veremos un par de lemas, interesantes por sí sólos.

Lema 4.9 *Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf, entonces X es Lindelöf.*

Dem. Supongamos que existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X sin subcubiertas numerables. Para cada $x \in X$, fijamos $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Para cada $F \in \mathcal{F}[X]$ definimos $U_F = \bigcup_{x \in F} U_x$. Consideremos la cubierta $\mathcal{V} = \{[F, U_F] : F \in \mathcal{F}[X]\}$ de $\mathcal{F}[X]$ y tomemos $M \subset \mathcal{F}[X]$ un núcleo Lindelöf para $\mathcal{V}$. Como M es Lindelöf, existe $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ numerable tal que $M \subset \bigcup \mathcal{V}_0$, digamos que $\mathcal{V}_0 = \{[F_m, U_{F_m}] : m < \omega\}$.

Como $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas numerables, existe $p \in X \setminus \bigcup_{m<\omega} U_{F_m}$. Dado que M es núcleo de $\mathcal{V}$, debe existir $[F, U_F] \in \mathcal{V}$ tal que $\{p\} \in [F, U_F]$ y $[F, U_F] \cap M \neq \varnothing$. Fijemos $A \in [F, U_F] \cap M$. La condición $\{p\} \in [F, U_F]$ implica que $F = \{p\}$ y como $F \subset A$, entonces $p \in A$. Ahora bien, como $A \in M \subset \bigcup \mathcal{V}_0$, existe $m < \omega$ tal que $A \in [F_m, U_{F_m}]$, es decir, $A \subset U_{F_m}$. De manera que $p \in A \subset U_{F_m}$, pero esto contradice la elección de p. Por lo tanto X debe ser Lindelöf. ■

Lema 4.10 *Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf, entonces X es hereditariamente Lindelöf.*

Dem. Recordemos que un espacio es hereditariamente Lindelöf si y sólo si cada subespacio abierto es Lindelöf. Tomemos $U \subset X$ abierto. Por la proposición 4.4 sabemos que $\mathcal{F}[U]$ es un subespacio abierto y cerrado de $\mathcal{F}[X]$. Como la propiedad estrella Lindelöf se hereda a subespacios que son abiertos y cerrados, obtenemos que $\mathcal{F}[U]$ es estrella Lindelöf. Por el Lema 4.9 concluimos que U es Lindelöf. Y por lo tanto X es hereditariamente Lindelöf. ■

Proposición 4.11 *$\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf si y sólo si $|X| \leq \omega$.*

Dem. Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf, entonces X es hereditariamente Lindelöf y por tanto $\psi(X) \leq \omega$. Por el Corolario 4.8 concluimos que $|X| \leq \omega$.

La implicación contraria es clara. ■

Corolario 4.12 *$\mathcal{F}[X]$ es estrella EN si y sólo si $|X| \leq \omega$.*

Una aplicación muy interesante de la Proposición 4.11 es el resultado citado en el capítulo 2 acerca de la existencia de un espacio normal *ccc* pero no estrella Lindelöf bajo $MA+\neg CH$. Dicho espacio es construido en [23] apoyado del siguiente teorema de Przymusiński y Tall.

Teorema 4.13 [21] $[MA+\neg CH]$ *Si X es un subespacio de $\mathbb{R}$, con $|X| = \omega_1$, entonces $\mathcal{F}[X]$ es normal.*

Proposición 4.14 [23] $[MA+\neg CH]$ *Existe un espacio normal ccc pero no estrella Lindelöf.*

Dem. Tomando $X \subset \mathbb{R}$, con $|X| = \omega_1$, se tiene que $\mathcal{F}[X]$ es normal. Dado que $nw(X) \leq \omega$, se sigue de la Proposición 4.5 que $\mathcal{F}[X]$ es *ccc*. Finalmente, como X no es numerable, concluimos de la Proposición 4.11 que $\mathcal{F}[X]$ no es estrella Lindelöf. ■

Es importante mencionar que en [23] el autor ofrece una prueba de la Proposición 4.11 pero de una naturaleza distinta a la aquí presentada. Como se puede apreciar en la prueba de la Proposición 4.11, el Lema 4.10 juega un papel de suma importancia. El autor en [23] logra concluir lo obtenido en el Lema 4.10 de manera más general. A continuación presentamos el resultado y referimos al lector a [23] para su prueba.

Teorema 4.15 [23] *Si $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$ entonces X es hereditariamente Lindelöf.*

El espacio $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ muestra que la Proposición 4.11 no es válida si suponemos que $\mathcal{F}[X]$ es 2-estrella numerable en lugar de estrella Lindelöf (de hecho no es válida aún para el supuesto de $\mathcal{F}[X]$ casi-estrella numerable). En el capítulo 3 se vio que todo espacio estrella EN es 2-estrella numerable, por lo que podemos preguntarnos si existe una propiedad topológica estrella P, intermedia entre estrella EN y 2-estrella numerable, de tal manera que siempre que el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ sea estrella P se tenga que X es numerable. Un posible candidato es por ejemplo $P =$ estrella numerable. Dado que todo espacio con extensión numerable es estrella numerable, se tiene que todo espacio estrella EN es estrella (estrella numerable).

Proposición 4.16 *Si X es estrella (estrella numerable) entonces X es 2-estrella numerable.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Sea M un núcleo estrella numerable de $\mathcal{U}$. Entonces existe $N \subset M$ numerable tal que $M \subset st(N,\mathcal{U})$. Por lo tanto $X = st(M,\mathcal{U}) \subset st^2(N,\mathcal{U})$. Lo que prueba que X es 2-estrella numerable. ■

En el siguiente resultado damos una pequeña extensión del Corolario 2.29.

Proposición 4.17 *Si X es un espacio de Moore, entonces X es estrella (estrella numerable) si y sólo si X es separable.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Sea M un núcleo estrella numerable de $\mathcal{U}$. Como la propiedad de Moore es hereditaria, entonces M es un espacio de Moore y estrella numerable, por lo que M es separable. Lo anterior prueba que X es estrella separable y por tanto estrella numerable. En consecuencia X es separable. ■

Dado que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore siempre que X sea primero numerable, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.18 *Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable) y X es primero numerable, entonces $|X| \leq \omega$.*

Ejemplo 4.19 *$\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es un espacio 2-estrella numerable pero que no es numerable. El Corolario 4.18 nos asegura que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no puede ser estrella (estrella numerable). Es decir, la propiedad 2-estrella numerable no implica a la propiedad estrella (estrella numerable).*

El resultado obtenido en el Corolario 4.18, nos motiva a pensar en la posibilidad de que si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable), entonces X debe ser numerable. Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable), entonces $\mathcal{F}[X]$ debe ser $DCCC$ (pues todo espacio regular y 2-estrella numerable es $DCCC$ de acuerdo con la Proposición 3.6). De manera que el Teorema 4.15 nos permite concluir que si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable), entonces $\psi(X) \leq \omega$, en cuyo caso $\mathcal{F}[X]$ es de hecho semiestratificable.

En el Problema 2.39 se dejó la siguiente pregunta abierta: ¿Si X es semiestratificable y estrella numerable, entonces X es separable?

Ahora postulemos la siguiente pregunta:

Problema 4.20 *¿Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable), entonces $\mathcal{F}[X]$ es estrella numerable?*

Una respuesta afirmativa al Problema 4.20 nos permitiría concluir que la conjetura inicial es cierta: "Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable), entonces $|X| \leq \omega$". En cambio, una respuesta negativa nos daría al mismo tiempo una respuesta negativa al Problema 2.39. La razón es la siguiente, si $\mathcal{F}[X]$ es estrella (estrella numerable) pero no estrella numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es un espacio semiestratificable con una cubierta abierta sin núcleos separables. Dicha cubierta debe tener un núcleo estrella numerable y este núcleo no podrá ser separable. Es decir, el núcleo será un espacio semiestratificable (pues $\mathcal{F}[X]$ lo es) estrella numerable pero no separable. Para el autor, el Problema 4.20 también permanece abierto.

La desigualdad $hl(X)\,hd(X) \leq c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$, enunciada en la Proposición 4.5, nos dice que en la Proposición 4.11 no es posible cambiar la condición de estrella Lindelöf sobre $\mathcal{F}[X]$ por estrella *ccc*. Sin embargo, la desigualdad permite preguntarnos si un espacio X debe ser hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable bajo el supuesto de que $\mathcal{F}[X]$ sea estrella *ccc*. Siendo $\mathcal{F}[X]$ un espacio estrella *ccc*, $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$, lo que implicaría que X debe ser hereditariamente Lindelöf. La condición de la separabilidad hereditaria no parece ser tan sencilla de aterrizar; para el autor es desconocido si esto en efecto se puede lograr.

Problema 4.21 *¿Si $\mathcal{F}[X]$ es un espacio estrella ccc, entonces X es hereditariamente separable?*

Masami Sakai aborda este problema en [23] para el caso en el que $\mathcal{F}[X]$ es casi-Lindelöf. En concreto logra el siguiente resultado.

Proposición 4.22 [23] *Si $\mathcal{F}[X]$ es casi-Lindelöf, entonces todo subespacio cerrado de X es separable.*

Dem. Sea $Y \subset X$ un subespacio cerrado. Consideremos la siguiente cubierta abierta para $\mathcal{F}[X]$

$$\mathcal{U} = \{[\{y\}, X] : y \in Y\} \cup \{[F, X \setminus Y] : F \in \mathcal{F}[X], F \cap Y = \varnothing\}.$$

Como X es casi-Lindelöf, podemos tomar subconjuntos numerables $\{y_n : n < \omega\} \subset Y$ y $\{F_n : n < \omega\} \subset \mathcal{F}[X]$, con $F_n \cap Y = \varnothing$, tales que la familia

$$\mathcal{U}_0 = \{[\{y_n\}, X], [F_n, X \setminus Y] : n < \omega\}$$

tenga unión densa en $\mathcal{F}[X]$. Sea $D = \{y_n : n < \omega\}$ y veamos que D es denso en Y. Supongamos por el contrario que existe $y \in Y \setminus cl_X D$. Sea $V = X \setminus cl_x D$. Para toda $n < \omega$ se tiene que

$$[\{y\}, V] \cap [F_n, X \setminus Y] = \varnothing.$$

Como $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en $\mathcal{F}[X]$, existe $n < \omega$ tal que $[\{y\}, V] \cap [\{y_n\}, X] \neq \varnothing$. Pero esto implica que $y_n \in V = Y \setminus cl_X D$ lo que no es posible. Por lo tanto D es denso Y, es decir, Y es separable. ■

A partir de la estrechez, $t(X)$, de un espacio X, es posible dar condiciones suficientes bajo las cuales X sea hereditariamente separable siempre que $\mathcal{F}[X]$ sea casi-Lindelöf.

Lema 4.23 *Si $t(X) \leq \omega$ y todo subespacio cerrado de X es separable, entonces X es hereditariamente separable.*

Dem. Sea $Y \subset X$ un subespacio arbitrario. Por hipótesis $cl_X Y$ es separable, es decir, existe $D \subset cl_X Y$ numerable tal que $cl_X D = cl_X Y$. Como $t(X) \leq \omega$, para cada $d \in D$ existe $Y_d \subset Y$ numerable tal que $d \in cl_X(Y_d)$. Se sigue que $N = \bigcup_{d \in D} Y_d$ es un subconjunto numerable y denso en Y. Por tanto Y es separable. ■

Juntando la Proposición 4.22 y el Lema 4.23 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.24 [23] *Si $\mathcal{F}[X]$ es casi-Lindelöf y $t(X) \leq \omega$, entonces X es hereditariamente separable.*

Regresando al problema de determinar si X es hereditariamente separable cuando $\mathcal{F}[X]$ es estrella *ccc*, la Proposición 4.22 puede ser una buena aproximación. Recordando que todo espacio *ccc* es casi-Lindelöf, podemos preguntarnos si el hecho de que $\mathcal{F}[X]$ sea estrella *ccc* implica que $\mathcal{F}[X]$ es casi-Lindelöf. Ahora bien, la Proposición 3.15 nos asegura que todo espacio casi-estrella numerable y metalindelöf debe ser casi-Lindelöf, por lo que si $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ debe ser casi-Lindelöf. A continuación demostraremos que, si $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella EN, entonces $\mathcal{F}[X]$ es de hecho casi Lindelöf. Y con esto dejamos la siguiente pregunta abierta:

Problema 4.25 *¿Si $\mathcal{F}[X]$ es estrella ccc, entonces $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella EN?*

Proposición 4.26 *Si $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella EN, entonces $\mathcal{F}[X]$ es casi-Lindelöf.*

Dem. Si $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella EN, entonces $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$ y por tanto $\mathcal{F}[X]$ es semi-estratificable. De manera que, por el Teorema 2.40, todo subespacio de $\mathcal{F}[X]$ con extensión numerable es separable. En particular, todo casi núcleo con extensión numerable de una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$, debe ser un casi-núcleo separable. Lo que prueba que $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella numerable y por tanto casi-Lindelöf. ■

Para finalizar este capítulo, aprovecharemos la Proposición 4.26 para dar una extensión de la Proposición 4.22.

Corolario 4.27 *Si $\mathcal{F}[X]$ es casi-estrella EN, entonces todo subespacio cerrado de X es separable. Si además $t(X) \leq \omega$, entonces X es hereditariamente separable.*

Bibliografía

[1] Ámano Patiño, N.G., Algunas propiedades de los espacios de Mrówka, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[2] Alas, O.T., Junqueira, L.R., Wilson, R.G., Countability and star covering properties, Topology Appl., 158 (4), 2011, 620-626.

[3] Alas, O.T., Junqueira, L.R., van Mill, J., Tkachuk, V.V., Wilson, R.G., On the extent of star countable spaces, Cent. Eur J. Math., 9 (3), 2011, 603-6015.

[4] Arhangel'skii, A.V., Buzyakova, R.Z., Additions theorems and D-spaces, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 43 (4), 2002, 653-663.

[5] Blair, R.L. Chain conditions in Para-Lindelöf and related spaces, Topology Proceedings, Volume 11, 1986, 247-266.

[6] Bonanzinga, M., Matveev, M.V., Products of star-Lindelöf and related spaces, Houston Jornual of Mathematics, Volume 27 (1), 2001, 45-57.

[7] Casarrubias Segura, F., Tamariz Mascarúa, Á., Elementos de Topología General, Aportaciones Matemáticas, 37, 2012.

[8] Creede, G., Concerning semistratifiable spaces, Pacific J. Math. 32, 1970, 47-54.

[9] van Douwen, E., The Pixley-Roy topology on spaces of subsets, Set Theoretic Topology, Academic Press, 1977, 111-134.

[10] van Douwen, E., Reed, G.M., Roscoe, A.W., Tree I. J., Star covering properties, Topology Appl., 39, 1991, 71-103.

[11] Engelking, R., General Topology, Monografie Matematyczne, 60, PWN, Warszawa, 1977.

[12] Frolík, Z., Generalizations of compactness and the Lindelöf property, Czech Math. J. 9, 1959, 172-217.

[13] Hiremath, G.R., On star with Lindelöf center property, J. Indian Math. Soc., 59, 1993, 227-242.

[14] Hodel, R., Cardinal functions I, Handbook of Set-Theoretic Topology, editores Kunen K., Vaughan J. E., Elsevier Science Publishers B. V., 1984.

[15] Ikenaga, S., A class which contains Lindelöf spaces, separable spaces and countably compact spaces, Memories of Numazu College of Technology, 18, 1983, 105-108.

[16] Kuratowski, K., Topology Vol I, New York, 1966.

[17] Lutzer, D.J., Pixley-Roy Topology, Topology Proceedings, Volume 3, 1978, 139-158.

[18] Matveev, M.V., A survey on star covering properties,Topology Atlas, 1998, Preprint No. 330.

[19] van Mill, J., Tkachuk, V.V., Wilson, R.G., Classes defined by stars and neighbourhood assignments, Topology Appl., 2007, 154 (10), 2127-2134.

[20] Pixley, C., Roy, P., Uncompletable Moore spaces, Proc. Auburn Univ. Conf. (Auburn, Alabama, 1969).

[21] Przymusiński, T., Tall, F.D., The undecidability of existence of a nonseparable Moore space satisfying the countable chain condition, Fund. Math., 85, 1974, 291-297.

[22] Porter, J., Woods, R.G., Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces, Springer Verlag, 1988.

[23] Sakai, M., Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces, Topology Appl., 159, 2012, 3080-3088.

[24] Sakai, S., Cardinal functions on Pixley-Roy hyperspaces, Proceedings of The American Mathematical Society, 89 (2), 1983, 336-340.

[25] Scheinberg, S., Topologies which Generate a Complete Measure Algebra, Advances in Mathematics, 7, 1971, 231-239.

[26] Shakhmatov D. B., On pseudocompact spaces with point-countable base, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1984, 30 (3), 747-751.

[27] Song, Y.K., On L-starcompact spaces, Czechoslovak Math. J., 56 (2), 2006, 781-788.

[28] Song, Y.K., On relative star-Lindelöf spaces, New Zealand Journal of Math., 34, 2005, 159-163.

[29] Song, Y.K., Remarks on centered-Lindelöf spaces, Commun Korean Math. Soc., 21 (3), 2006, 527-532.

[30] Tall, F.D., The Density Topolgy, Pacific J. Math., 62 (1), 1976, 275-284.