Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# No localidad cuántica y relatividad especial

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

JUAN ALBERTO GUZMÁN GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ELÍAS OKÓN GURVICH

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

**Página en blanco**

**Hoja de Datos del Jurado**

1. **Datos del alumno**
Guzmán
García
Juan Alberto
5560618778
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
40808902-7

2. **Datos del tutor**
Dr.
Elías
Okón
Gurvich

3. **Datos del sinodal 1**
Dr.
Juan Carlos
Alonso
Huitrón

4. **Datos del sinodal 2**
Dr.
Alberto
Güijosa
Hidalgo

5. **Datos del sinodal 3**
Dr.
Héctor
Hernández
Coronado

6. **Datos del sinodal 4**
Dr.
Yuri
Bonder
Grimberg

7. **Datos del trabajo escrito**
No localidad cuántica y relatividad especial
60 p.
2017

# Índice general

# Introducción

En el año de 1935, A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen publicaron un artículo llamado "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"[1]. La problemática tratada es conocida con el nombre de "Paradoja EPR".

Muestran que dos cantidades físicas asociadas a operadores que no conmutan pueden ser simultáneamente reales y concluyen que la función de onda es incompleta al no ofrecer la descripción de ambas.

En este trabajo se discutirá con detenimiento la paradoja de EPR, pero es conveniente adelantar que los autores utilizan dos premisas para obtener su resultado: 1) realismo y 2) localidad. A grandes rasgos, entendamos el *realismo* como la tesis que afirma que el mundo existe por sí mismo, independiente del conocimiento de éste; por otro lado, entedamos a la *localidad* como la doctrina que afirma que un evento no puede influir en el estado físico del otro si tienen separación tipo espacio. Si se violara la localidad implicaría que la influencia tendría que haber 'viajado' más rápido que la velocidad de la luz y esto en primera instancia aparenta discrepar con la teoría de la Relatividad Especial, pues suele decirse que ésta impone que nada puede propagarse más rápido que la luz.

Asumiendo la premisa de realismo, si queremos afirmar que la Mecánica Cuántica es completa y no aceptar la conclusión de EPR, debemos negar la premisa de localidad. Con una concepción del mundo basada en las teorías físicas clásicas, esta idea parece inconcebible.

A raíz de esto, Bell se cuestiona si es posible tener una teoría que reproduzca las predicciones de la Mecánica Cuántica y que sea local, y de hecho, demuestra que no es posible. Este resultado se conoce como «Teorema de Bell» y el desarrollo de esta tesis se concentra en sus implicaciones, por lo que se efectuará un estudio detallado.

Para que el trabajo sea autocontenido, se introducen los elementos teóricos de la teoría de la Relatividad Especial y se construyen las bases de la Mecánica Cuántica para presentar su formulación estándar. Es importante señalar que en los principios básicos de ésta, aparece el término «medición», sin embargo, éste no es definido y además, es un concepto que no puede ser explicado por la teoría. A este conflicto se le conoce como el "*problema de la medición*".

[1] Ver [**12**]. Para referirnos a los autores, utilizaremos como abreviación la letra de sus apellidos, es decir, EPR.

Existen formulaciones de la Mecánica Cuántica que resuelven este problema, una de estas propuestas fue publicada en el año de 1986 por G.C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber ("teoría GRW"). Ellos proponen al colapso de la función de onda como un hecho de la naturaleza que ocurre de manera espontánea.

Retomando el tema de la no localidad, basándose en la propuesta de GRW, Bell se plantea la posibilidad de construir una teoría cuántica invariante de Lorentz que preserve la invariancia incluso en el colapso de la función de onda. Pero, ¿tiene sentido desarrollar este proyecto ante las aparentes incompatibilidades conceptuales entre el formalismo cuántico y la teoría relativista?

Para responder la pregunta anterior, será necesario discutir qué es lo que realmente restringe la Relatividad Especial. Se examinará si estas restricciones están relacionadas con: (i) la transmisión superlumínica de materia o energía, (ii) la transmisión de señales superlumínicas o con (iii) la causación superlumínica.

En esta tesis se pretende evidenciar que no hay discrepancia entre las restricciones de la Relatividad Especial y la teoría cuántica, por lo que la construcción de una teoría cuántica invariante de Lorentz (incluyendo la invariancia en los colapsos) es una propuesta viable para unificar ambas teorías.

# Parte 1

# Fundamentos Teóricos

Capítulo 1

# Relatividad Especial

En esta sección se presentan los postulados de la Relatividad Especial además de los resultados derivados de estos principios que serán útiles para estudiar los capítulos posteriores. Es conveniente mencionar, como se justificará en los apartados siguientes, que es en el espacio de Minkowski donde la teoría se construye y, analizando la geometría y la naturaleza de la luz, se introducen algunos conceptos. Por esta razón, se comienza haciendo un enfásis de la importancia de la geometría y su relación con la física.

## 1. El espacio absoluto y el tiempo absoluto

Newton construye su física considerando que el «movimiento» de los objetos físicos se desarrolla en lo que él llama «espacio absoluto», al cual le asocia la estructura del espacio euclidiano de tres dimensiones, denotado como $\mathbb{E}^3$. Más aún, según su planteamiento, el «espacio absoluto» existe y persiste inmutable a lo largo del tiempo, caracterizando al tiempo también como absoluto y con una estructura geométrica más simple: unidimensional y con una dirección (pasado a futuro). De manera textual, los concibe de la siguiente manera[1]:

*(Tiempo Absoluto). "El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí mismo y por su naturaleza, fluye uniformemente sin relación con nada externo, y se le llama, con otro nombre, duración."*

*(Espacio Absoluto). "El espacio absoluto, por su naturaleza, sin relación con nada externo, siempre permanece igual e inmóvil."*

La física y la geometría están conectadas: los objetos físicos y su movimiento poseen una estructura geométrica.

## 2. Coordenadas y medida

La metodología para usar las herramientas del álgebra con la finalidad de obtener soluciones a problemas geométricos fue propuesta por Descartes en su obra llamada «Géométrie». Como consecuencia de su tratado, mediante el uso de coordenadas[2] podemos relacionar la estructura de $\mathbb{R}^3$ con la estructura $\mathbb{E}^3$.

[1] Verifíquese [**28**], en particular páginas 127 y 128 para las nociones de espacio absoluto y tiempo absoluto presentadas en esta sección.

[2] Una discusión más detallada sobre la geometría y las coordenadas puede encontrarse en [**23**], páginas (53-67).

Un *sistema coordenado* en un espacio geométrico establece una correspondencia «uno a uno» entre sus elementos y objetos aritméticos.

La medición en física es fundamental. En el espacio euclidiano y el espacio temporal se pueden hacer 'medidas' al definir una *métrica*. A los espacios que poseen esta característica se les llaman «espacios métricos»[3].

DEFINICIÓN 1. *Sea $X$ un conjunto. Una* ***métrica*** *(o* ***distancia****) en $X$ es una función $d : X\times X\to\mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:*

1. *$d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, siendo $x, y \in X$;*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$, para cualesquiera $x, y \in X$;*
3. *$d(x, z)\leq d(x, y) + d(y, z)$, para cualesquiera $x, y, z \in X$ (expresión llamada «desigualdad del triángulo»).*

Utilizando sistemas coordenados, hoy en día las teorías físicas son presentadas algebraicamente, pero no siempre son las coordenadas las que tienen una importancia física directa. Esto puede notarse, por ejemplo, cuando se hace una transformación a coordenadas esféricas, habiendo en el origen una singularidad matemática y no física.

## 3. El espacio de Minkowski

La teoría de la Relatividad Especial de Einstein se construye a partir de los siguientes postulados[4]:

POSTULADO 1. *(Principio de Relatividad de Galileo). Las leyes de la física son equivalentes en todo sistema inercial.*

POSTULADO 2. *(Constancia de la Velocidad de la Luz). La velocidad de la luz es la misma en todo sistema inercial.*

Normalmente suele definirse a un ***sistema inercial*** como aquel en el que cualquier partícula puntual aislada se mueve en línea recta con velocidad constante.

Sea $S$ un sistema inercial en el cual un haz de luz viaja del punto $(x_1, y_1, z_1)$ al tiempo $t_1$ y llega al punto $(x_2, y_2, z_2)$ en el tiempo $t_2$, y sea $S'$ otro sistema inercial que describe el mismo fenómeno en su sistema coordenado, es decir, la luz viaja del punto $(x'_1, y'_1, z'_1)$ al tiempo $t'_1$ y llega al punto $(x'_2, y'_2, z'_2)$ en el tiempo $t'_2$. Entonces la velocidad del haz de luz $c$ en $S$ y $S'$, respectivamente, es:

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1} \text{ y} \tag{3.1}$$

$$c = \frac{\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}}{t'_2 - t'_1}. \tag{3.2}$$

Reescribiendo 3.1 y 3.2, tenemos (respectivamente):

---

[3]Consúltese [**9**] para verificar más detalles de los «espacios métricos» y para corroborar la definición proporcionada.

[4]Pueden consultarse, por ejemplo, los libros [**13**] y [**36**], en particular, el texto usado en esta sección fue [**17**].

$$s = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 \text{ y} \tag{3.3}$$

$$s' = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0. \tag{3.4}$$

Con lo anterior, por el momento podemos ver que la cantidad $s$ cuando vale cero, es invariante ante un cambio de coordenadas. Esta cantidad $s$ es conocida como «seudodistancia» o «intervalo».

En la teoría de la Relatividad suele darse a la velocidad de la luz el valor 1, siendo una magnitud adimensional, en función de esto, se redefinen las dimensiones de las demás unidades físicas. En adelante se adoptará esta convención.

El espacio vectorial de Minkowski en cuatro dimensiones se construye con el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y con la seudodistancia que definiremos aquí como[5]:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2}. \tag{3.5}$$

Proponer que la seudodistancia es invariante ante una transformación de coordenadas es compatible con el Postulado 2. Las transformaciones que dejan invariante la seudodistancia son conocidas como «Transformaciones de Lorentz» que se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\sqrt{(1-v^2)}} - \frac{vx}{\sqrt{(1-v^2)}}, \\ \tilde{x} &= \frac{-vt}{\sqrt{(1-v^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(1-v^2)}}, \\ \tilde{y} &= y, \\ \tilde{z} &= z, \end{aligned} \tag{3.6}$$

para un sistema inercial $\tilde{O}$ en función de las coordenadas del sistema inercial $O$, siendo $v$ la velocidad de $\tilde{O}$ con respecto a $O$, a lo largo del eje $x$ (sin pérdida de generalidad). A la cantidad $\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)}}$ se le conoce como *factor de Lorentz* y se denota como $\gamma$.

En el espacio de Minkowski se puede desarrollar una teoría física consistente con los postulados 1 y 2. Ahora es necesario no considerar al tiempo ajeno al «espacio físico», sino como parte de él para describir un fenómeno, presentando así la noción de «espacio-tiempo».

## 4. Geometría y coordenadas

**4.1. Propiedades de la luz.** En el Postulado 2 utilizamos el concepto de velocidad. No obstante, para hablar de velocidades es necesaria la introducción de coordenadas y, de hecho, la velocidad de un ente físico puede ser distinta según

[5] Es más habitual en textos de física definir la seudodistancia como el cuadrado de la expresión (3.5) y presentarla en su forma diferencial.

el sistema de coordenadas inerciales utilizado. Por esta razón, estudiar propiedades físicas en términos del concepto de velocidad, depende del marco de referencia utilizado. En ciertas situaciones, podemos estudiar propiedades físicas analizando sólo la geometría y la naturaleza de la luz, sin necesidad de introducir un sistema coordenado o hacer uso del concepto de velocidad.

Considerando que en el vacío sólo existe la estructura física del espacio-tiempo y que la trayectoria de la luz en éste no depende de la fuente, entonces, sólo la geometría del espacio-tiempo determinará la trayectoria. Dado un punto $p$ en el espacio-tiempo, la geometría de este espacio-tiempo indicará las posibles direcciones de un haz de luz emitido desde ese punto. Al conjunto de puntos subsecuentes de $p$ que la luz puede recorrer, se le llama *cono de luz futuro de $p$*, y al conjunto de puntos de un haz de luz que consiga llegar a $p$, se le llama[6] *cono de luz pasado de $p$* (véase Figura 1). Con lo anterior, podemos introducir la siguiente ley[7] que engloba los fenómenos anteriores:

LEY 1. *(De la Luz). La trayectoria de un rayo de luz en el vacío proveniente de un evento es una línea recta en su cono de luz futuro.*

El cono de luz divide el espacio en 5 secciones donde los sucesos pueden localizarse (veáse nuevamente la Figura 1): **1.** dentro del cono de luz pasado, **2.** dentro del cono de luz futuro, **3.** sobre el cono de luz pasado, **4.** sobre el cono de luz futuro y **5.** fuera del cono de luz. Si un suceso se localiza con respecto al punto $p$ en las regiones **1** ó **2** se dice que tiene *separación tipo tiempo* (el valor de $s$ es mayor a cero), si se localiza en las regiones **3** ó **4** se dice que tiene *separación tipo luz* (el valor de $s$ es cero) y si se localiza en la región **5** se dice que tiene *separación tipo espacio* (el valor de $s$ es imaginario[8]).

Regresando una vez más al uso de coordenadas, en distintos sistemas inerciales de referencia el intervalo de tiempo entre dos sucesos no es igual. De hecho, el concepto de simultaneidad estrictamente no tiene sentido. Más aún, el orden temporal entre dos eventos no siempre es el mismo.

Considérense dos sucesos con separación tipo espacio y un sistema de referencia tal que un suceso P precede en tiempo a otro suceso Q. El primero está localizado en el punto con coordenadas $(x, t)$ y el segundo está localizado en el punto con coordenadas $(x + \Delta x, t + \Delta t)$, siendo $\Delta x = u\Delta t$ con $u > 1$ (es decir, $u$ es la velocidad que se necesitaría para 'conectar' dos sucesos con separación tipo espacio). El intervalo de tiempo entre los sucesos desde un marco de referencia que se mueve con velocidad $v$ (siendo $v < 1$) es:

[6] Geométricamente, el cono puede ser visualizado sólo si se utilizan dos coordenadas espaciales y una coordenada temporal.

[7] El nombre utilizado para la ley es el mismo que Maudlin T. utiliza en [**23**], y el contenido de ésta es el que se presenta. La palabra evento o suceso (que se utilizará indistintamente) es un punto en el espacio-tiempo.

[8] Que «s» tenga un valor imaginario es consecuencia de no definir la seudositancia como el cuadrado de la expresión (3.5). Tiene una razón hacerlo de esta manera (se sugiere consultar p.121 de [**23**] para ver el argumento), pero al menos en este trabajo, es irrelevante discutirla pues sólo nos interesa hacer distinción entre las secciones del espacio que el cono de luz delimita.

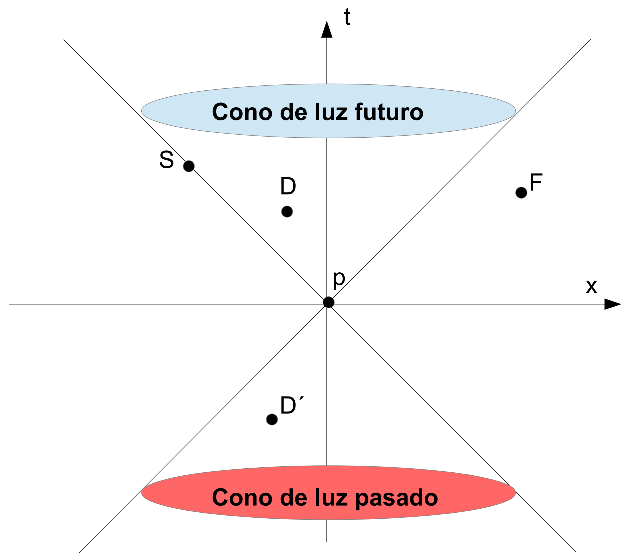


FIGURA 1. SE PRESENTA EL CONO DE LUZ DEL PUNTO $P$ Y SE DISTINGUEN DIVERSOS PUNTOS. LOS PUNTOS $D$ Y $D'$ SE ENCUENTRAN DENTRO DEL CONO DE LUZ FUTURO Y PASADO RESPECTIVAMENTE, EL PUNTO $F$ ESTÁ LOCALIZADO FUERA DEL CONO DE LUZ MIENTRAS QUE EL PUNTO $S$ ESTÁ SOBRE EL CONO DE LUZ FUTURO.

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = \gamma \Delta t(1 - uv), \tag{4.1}$$

pudiendo encontrar valores para $v$ tales que $\Delta t'$ y $\Delta t$ tuvieran signo contrario[9], es decir, marcos de referencia en los que se invierte el orden temporal, o sea, se podría concluir que el suceso Q fue primero que el suceso P.

Cuando queremos hablar de «causas» la situación anterior se torna problemática. Por ejemplo, si decimos que el suceso Q fue causado por el suceso P, habrá sistemas

[9]Consúltese la página 135 de [**13**].

de referencia en el que es el suceso Q quien causa al suceso P. A raíz de esto se dice que se viola el Principio de Causalidad y más aún, se afirma que esto no tiene sentido en la naturaleza. Para evitar la violación, se impone que la velocidad $u$ que está en relación con este vínculo causal no debe ser mayor que 1. Con esto pareciera que el Principio de Causalidad dice que una vez establecida una causa y su efecto, nunca podrán invertirse los papeles. Esto es muy impreciso, discutiremos con más detenimiento el tema en el capítulo 6. Sin embargo, por el momento lo que podemos adelantar es que, si nosotros damos por cierto una aseveración así, estamos imponiendo un Postulado más que se basa en nuestra concepción de la naturaleza pero que realmente no se requiere para construir la teoría de la Relatividad Especial, pues para construirla son suficientes los Postulados 1 y 2.

Por otro lado, se dice que dos eventos P y Q están *conectados causalmente* si la velocidad relacionada con este vínculo causal es $u < 1$. Este término no es afortunado, porque como se estudiará, pueden haber conexiones causales en la naturaleza sin que necesariamente se satisfaga esa restricción en la velocidad.

**4.2. Velocidad y trayectorias de objetos físicos.** En el contexto de la relatividad especial, la energía de un objeto físico con masa $m$ se expresa como

$$E = m\gamma. \tag{4.2}$$

Nótese que el *factor de Lorentz* diverge cuando la velocidad del cuerpo se hace 1. Se necesitan grandes cantidades de energía para que un cuerpo se aproxime a la velocidad de la luz, y de hecho, se requiere energía infinita para que el cuerpo masivo alcance esa velocidad, siendo entonces la velocidad de la luz un límite natural (por eso suele decirse que nada viaja más rápido que la luz). Sin embargo, hablar de velocidades podría ser ambiguo, un fenómeno en el que un cuerpo se esté aproximando a la velocidad de la luz, al escoger un sistema inercial adecuado, puede estar distante de ese límite natural. Expresando la propiedad anterior en términos de la geometría[10] tenemos:

POSTULADO 3. *La trayectoria de cualquier objeto físico que pasa a través de un evento, no saldrá de su cono de luz.*

De manera que la luz y los objetos físicos que poseen masa preservan la "*conexión causal*"[11] definida en la sección anterior.

[10]Consúltese [**23**] pág. 126.
[11]Se considera que los objetos sin masa viajan a la misma velocidad que la luz.

Capítulo 2

# Mecánica Cuántica

Para el desarrollo de este trabajo, es necesario conocer la llamada *formulación estándar de la Mecánica Cuántica*. En este capítulo se introducen los principios que la construyen y el formalismo matemático necesario para abordar los temas siguientes. En particular, al finalizar esta sección, se presenta un resultado que está relacionado con los sistemas físicos y los operadores conmutativos. Esto será importante para el estudio de la paradoja EPR que es tratada en el capítulo 3.

## 1. Formalismo matemático

**1.1. Espacios Vectoriales.** Un ***espacio vectorial***[1] sobre un *campo* $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío $V$ con una operación binaria

$$+ : V \times V \to V,$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$

y una función

$$\mu : \mathbb{K} \times V \to V,$$
$$(\alpha, v) \mapsto \mu(\alpha, v) = \alpha v$$

que cumplen los siguientes axiomas:

***(i)*** $u + v = v + u$,

***(ii)*** $(u + v) + w = u + (v + w)$,

***(iii)*** existe $O \in V$ tal que $v + O = v$,

***(iv)*** para cada $v \in V$ existe un elemento, denotado como $-v$, tal que $v + (-v) = O$,

***(v)*** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

***(vi)*** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,

***(vii)*** $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$,

***(viii)*** Para $1 \in \mathbb{K}$, $1v = v$;

siendo $\alpha$, $\beta \in \mathbb{K}$ y $u$, $v$, $w \in V$.

---

[1]Para consultar los resultados (con las respectivas demostraciones) y definiciones matemáticas presentes en esta sección, consúltese [**9**], [**10**], [**19**] y [**22**].

A los elementos $u$, $v$, $w$... del espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ se le llaman *vectores*. Los elementos del campo $\mathbb{K}$ se llaman *escalares* y la función $\mu$ se llama multiplicación escalar.

**1.2. Espacios Normados.** Es necesario presentar la definición de *espacio normado* para construir una serie de conceptos que forman parte del formalismo matemático de la mecánica cuántica.

DEFINICIÓN 2. *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una **norma** en $V$ es una función $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:*

1. $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$, *siendo* $v \in V$;
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$, *para cualesquiera* $v \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para cualesquiera* $v$, $w \in V$.

*Un **espacio normado**, denotado por $(V, \|\cdot\|)$, es un espacio vectorial $V$ que tiene una norma $\|\cdot\|$.*

Es un resultado demostrable que todo espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico con la métrica

$$d(v, w) := \|v - w\|, \tag{1.1}$$

llamada *métrica inducida* por la norma $\|\cdot\|$.

**1.3. Espacios de Banach.** Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico, siendo «$d$» la distancia asociada. Definiremos una sucesión de Cauchy, un espacio completo y un espacio de Banach.

DEFINICIÓN 3. *En $X$, una sucesión $(x_k)$ es de **Cauchy** si, para $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_k, x_j) < \epsilon, \ \forall\ k,\ j \geq k_0.$$

DEFINICIÓN 4. *Se dice que un espacio métrico $X$ es **completo**, si toda sucesión de Cauchy en $X$ converge en $X$. Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo con la métrica inducida por su norma.*

**1.4. Espacios de Hilbert.** Al espacio de Hilbert se le puede considerar la generalización a dimensión infinita del espacio euclidiano. En él se satisface, por ejemplo, la ley del paralelogramo y la desigualdad del triángulo; es un espacio de Banach con la peculiaridad de que su norma está inducida por un producto escalar.

DEFINICIÓN 5. *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un **producto escalar** en $V$ es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:*

1. $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$, *para cualesquiera* $v_1$, $v_2$, $w \in V$ *y* $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$;
2. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$, *para cualesquiera* $v$, $w \in V$;
3. $\langle v, v \rangle > 0$, $\forall\ v \in V$, *siendo* $v \neq 0$.

*Se define*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \tag{1.2}$$

*llamada **norma inducida por el producto escalar** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Con lo anterior, presentamos lo siguiente:

DEFINICIÓN 6. *Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial $H$ con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que es completo respecto a la norma inducida (1.2).*

*1.4.1.* ***Bases****.* Si $S = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ es un conjunto de vectores (siendo $\mathcal{I}$ un conjunto finito o infinito de índices) en $H$, diremos que es *maximal* si no es subconjunto propio de ningún otro conjunto linealmente independiente de $H$.

Definición 7. *Llamamos* ***base ortonormal*** *en $H$ a un conjunto ortonormal de vectores $S = \{\hat{e}_\alpha\}$ en $H$ que es maximal.*

Teorema 1. *Todo espacio de Hilbert $\neq \emptyset$ posee alguna base ortonormal.*

La matriz de los productos escalares entre los elementos de $S$ la determina la delta de Kronecker:

$$\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Todo vector puede representarse como una combinación lineal (finita o infinita) si se da una base, es decir:

$$\vec{v} = \sum_{i\in\mathcal{I}} v_i \hat{e}_i, \tag{1.3}$$

obteniéndose las componentes de la siguiente manera:

$$v_\alpha = \langle \hat{e}_\alpha, \vec{v}\rangle$$

Para saber si una suma infinita de vectores converge, se tiene el siguiente lema:

Lema 1. *Si $S = \{\,|\hat{e}_\alpha\rangle\,\}_i^\infty$ es un conjunto ortonormal de vectores en $H$, entonces $\sum_1^\infty v_i\,|\hat{e}_i\rangle$ converge en $H$ si y sólo si $\sum_1^\infty |v_i|^2$ converge en $\mathbb{R}$.*

*1.4.2.* ***El Espacio Dual****.* Todo campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre sí mismo. Una transformación lineal de un espacio vectorial en el campo $\mathbb{K}$ recibe el nombre de *funcional lineal*, aquí será llamado *bra*. Si $V$ es un espacio vectorial, observamos la acción del bra de la siguiente manera:

$$\langle w| : V \to \mathbb{K}$$

$$\langle w| : |v\rangle \to \langle w|v\rangle \in \mathbb{K}.$$

El conjunto de todos los funcionales lineales genera un espacio vectorial $V^*$, que es llamado *espacio dual* de $V$. Un elemento $\vec{v}$ de $V$ también es llamado *ket* y se le está denotando como $|v\rangle$, que es la llamada *notación de Dirac*. La acción de un *bra* sobre un *ket* se le conoce como *braket*. Con esta nueva notación, la expresión (1.3) se escribe como:

$$|v\rangle = \sum_{i\in\mathcal{I}} v_i\,|\hat{e}_i\rangle. \tag{1.4}$$

Denominamos la asociación de un *ket* con un *bra*, *aplicación adjunta*:

$$^\dagger : V \to V^*$$

$$|v\rangle \to |v\rangle^\dagger \equiv \langle v|\,.$$

En el espacio de Hilbert tenemos que para cada $|u\rangle \in V$, el adjunto $|u\rangle^\dagger \in V^*$ es el único elemento que satisface

$$\langle u|v\rangle = \langle |u\rangle\,, |v\rangle\rangle$$

para todo $|v\rangle \in V$.

*1.4.3.* ***Producto Tensorial****.* Dados $n$ espacios de Hilbert $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$, se define el producto tensorial

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_n$$

como el conjunto ordenado de $n$ elementos $|h\rangle = |h_1\rangle \otimes |h_2\rangle \otimes ... |h_n\rangle$ y sus combinaciones lineales $\alpha(|u_1\rangle \otimes |u_2\rangle \otimes ... |u_n\rangle) + \beta(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes ... |v_n\rangle) + ...$, siendo $|h\rangle \in H$ y $|h_i\rangle$, $|u_i\rangle$, $|v_i\rangle \in H_i$, $i = 1, ..., n$ (aquí $H$ es llamado el *espacio producto*). El producto tensorial es lineal en cada argumento[2].

Resultado relevante es la obtención de la base del espacio producto $H$. Si $\{ \left|\hat{e}^1_\alpha\right\rangle \}|^{\alpha=n_1}_{\alpha=1}$, $\{ \left|\hat{e}^2_\beta\right\rangle \}|^{\beta=n_2}_{\beta=1}$,..., $\{ \left|\hat{e}^n_\gamma\right\rangle \}|^{\gamma=n_n}_{\gamma=1}$ son bases de $H_i$ ($i = 1, ..., n$ para $H_i$, y en el caso de los superíndices $n_i$, nos referimos a un número arbitrario fijo, siendo $i = 1, ..., n$ que corresponde a la etiqueta que también porta $\hat{e}$ como superíndice), respectivamente, su base estará formada por todos los elementos del conjunto

$$\{ |\hat{e}_{\alpha,\beta,...,\gamma}\rangle \} = \{ \left|\hat{e}^1_\alpha\right\rangle \otimes \left|\hat{e}^2_\beta\right\rangle \otimes ... \otimes \left|\hat{e}^n_\gamma\right\rangle \}.$$

Un vector en el espacio producto $H$ puede expresarse como

$$|h\rangle = \sum_{\alpha,\beta,...,\gamma} k_{\alpha\beta\cdots\gamma} \left|\hat{e}^1_\alpha\right\rangle \otimes \left|\hat{e}^2_\beta\right\rangle \otimes ... \otimes \left|\hat{e}^n_\gamma\right\rangle \tag{1.5}$$

y puede reducirse a un producto tensorial de vectores en $H_1$, $H_2$,..., $H_n$ solamente si (pues en general no es posible) los coeficientes $k_{\alpha\beta\cdots\gamma}$ pueden factorizarse como $a_\alpha b_\beta \cdots c_\gamma$, expresándolo de la siguiente manera:

$$|h\rangle = a_\alpha b_\beta \cdots c_\gamma \, |h_1\rangle \otimes |h_2\rangle \otimes ... |h_n\rangle \, . \tag{1.6}$$

Suele omitirse en ocasiones el símbolo $\otimes$.

**1.5. Operadores Lineales.** Si $V$ es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, a la aplicación lineal de $V$ en sí mismo $f : V \to V$ se le llama *operador lineal*. El conjunto $\mathcal{L}(V)$ de todos los operadores lineales en V tiene la estructura de un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Cuando un operador actúe sobre un elemento de $V$ lo denotaremos como $\mathcal{O}\,|v\rangle$ u $|\mathcal{O}v\rangle$. Dados dos vectores que pertenecen a $V$, es decir, $|u\rangle$ y $|v\rangle$, el elemento de matriz de un operador $\mathcal{O}$ se define como $\langle u|\,\mathcal{O}\,|v\rangle$.

*1.5.1.* ***Ecuación de Eigenvalores****.* Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\mathcal{O}$ un operador lineal. Si existe un vector $|\psi\rangle$ distinto de cero tal que para un valor $\alpha \in \mathbb{K}$ se satisfaga

$$\mathcal{O}\,|\psi\rangle = \alpha\,|\psi\rangle \, , \tag{1.7}$$

llamaremos a $\alpha$ *eigenvalor* (valor propio o valor característico), $|\psi\rangle$ *eigenvector* (vector propio o vector característico) y a (1.7) *ecuación de eigenvalores*.

[2]Para una definición formal del producto exterior, consúltese el Capítulo 4, p.121 de la referencia [**19**] de la bibliografía. Una explicación intuitiva de este objeto matemático es introducida en la sección 2.2 del presente capítulo.

*1.5.2.* ***Operador Adjunto y Autoadjunto***. Sea $\mathcal{O}$ un operador. Su operador adjunto se denota como $\mathcal{O}^\dagger$ y se define como aquel que satisface la siguiente igualdad para cualesquiera dos vectores $|u\rangle$ y $|v\rangle$:

$$\langle \mathcal{O}^\dagger u|v\rangle = \langle u|Ov\rangle$$

Si $\mathcal{O}$ es un operador en el espacio $H$ de Hilbert, se le llama *autoadjunto* (*hermitiano o hermítico*) si

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}^\dagger.$$

Para $|u\rangle$ y $|v\rangle$ arbitrarios y pertenecientes a $H$, el operador hermitiano satisface

$$\langle \mathcal{O}u|v\rangle = \langle u|\mathcal{O}v\rangle \text{ y}$$
$$\langle v|\mathcal{O}v\rangle^* = \langle \mathcal{O}v|v\rangle = \langle v|\mathcal{O}v\rangle \in \mathbb{R}.$$

Observamos también que si $\mathcal{O}$ es un operador hermitiano, siendo $|v\rangle$ y $\alpha$ un vector propio y valor propio respectivamente (sin pérdida de generalidad, se considera al vector normalizado), se tiene:

$$\alpha = \alpha \langle v|v\rangle = \langle v| \mathcal{O} |v\rangle = \langle v| \mathcal{O} |v\rangle^* = (\alpha \langle v|v\rangle)^* = \alpha^*,$$

por tanto $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, los valores propios de un operador hermitiano son reales.

Otra propiedad importante es la ortogonalidad de dos vectores propios (con valores característicos distintos) de un mismo operador hermitiano, veamos:

$$0 = \langle v_1| \mathcal{O} - \mathcal{O} |v_2\rangle = \langle v_1| \mathcal{O} |v_2\rangle - (\langle v_2| \mathcal{O} |v_1\rangle)^* = (\alpha_2 - \alpha_1) \langle v_1|v_2\rangle ,$$

entonces, para $\alpha_2 \neq \alpha_1$, se satisface la ortogonalidad entre $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$.

*1.5.3.* ***Conmutatividad.*** Dados dos operadores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, en general no se satisface que

$$\mathcal{AB} = \mathcal{BA},$$

es decir, los operadores no siempre conmutan. Se tiene el resultado de que *el producto de dos operadores hermitianos es hermitiano si y sólo si estos conmutan*[3].

Para el manejo de la propiedad de conmutación entre operadores, se define el conmutador (cuyo valor es cero para operadores conmutativos) de la siguiente manera:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}.$$

**1.6. Espacio de Hilbert Bidimensional.** En el espacio de Hilbert bidimensional, podemos utilizar los vectores base $|+\rangle$ y $|-\rangle$, que en forma matricial se expresan como

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el estado más general tiene la siguiente representación:

$$|\psi\rangle = \alpha \,|+\rangle + \beta \,|-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Cualquier matriz de $2 \times 2$ puede escribirse como combinación lineal de los siguientes operadores hermitianos:

[3] Véase p. 214 de [**10**].

$$
\begin{aligned}
2\left|+\right\rangle\left\langle+\right| + \left|-\right\rangle\left\langle-\right| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{I}, \\
\left|+\right\rangle\left\langle-\right| + \left|-\right\rangle\left\langle+\right| &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_1, \\
-i(\left|+\right\rangle\left\langle-\right| - \left|-\right\rangle\left\langle+\right|) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_2, \\
\left|+\right\rangle\left\langle+\right| - \left|-\right\rangle\left\langle-\right| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_3,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

es decir

$$\mathcal{F} = a_0\mathbb{I} + \sum a_k\hat{\sigma}_k = a_0\mathbb{I} + \vec{a}\cdot\hat{\sigma}, \tag{1.9}$$

siendo $\hat{\sigma}_i$ (i=1, 2, 3) las componentes de $\hat{\sigma}$, denominadas *matrices de Pauli*, cuya regla de conmutación es:

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{i,j,k}\hat{\sigma}_k. \tag{1.10}$$

## 2. Formulación Estándar de la Mecánica Cuántica

**2.1. La ecuación de Schrödinger.** Para describir el comportamiento de los electrones, Erwin Schrödinger propuso, como sustitución de las ecuaciones de la mecánica newtoniana, asociarles una ecuación de onda basándose en el ***postulado de de Broglie***:

$$\lambda = h/p, \tag{2.1}$$

siendo $\lambda$ la llamada longitud de onda de de Broglie, $h$ la constante de Planck y $p$ el momento de la partícula (de Broglie, inspirado en la teoría corpuscular de la luz de Einstein, fue quien planteó adjudicar al electrón propiedades ondulatorias por medio de una longitud de onda, y después generalizar la idea a los corpúsculos). Esta ecuación, conocida como *ecuación de Schrödinger*, tiene la siguiente forma:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi, \tag{2.2}$$

siendo $m$ la masa, $\hbar$ la constante de Planck $h$ dividida entre $2\pi$, V el potencial y $\psi$ la función de onda.

La función de onda[4] $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ caracteriza a las partículas, contiene información sobre su ubicación espacial a un tiempo $t$. Por ejemplo, en el caso de una partícula, generalmente se interpreta que la función de onda se relaciona con la probabilidad $dP(\mathbf{r}, t)$ de que ésta se encuentre al tiempo $t$ en un elemento de volumen $dV$ localizado alrededor del punto $\mathbf{r}$, es decir[5]:

$$dP(\mathbf{r}, t) = C|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV, \tag{2.3}$$

[4]La función de onda es una función compleja.

[5]Puede consultarse [**33**].

donde $C$ es una constante de normalización. La probabilidad de que una partícula se encuentre en alguna parte del espacio al tiempo $t$ es:

$$\int dP(\mathbf{r},t) = 1. \tag{2.4}$$

De acuerdo a (2.3) y (2.4) se puede concluir que

***(a)*** La función de onda $\psi(\mathbf{r},t)$ es de cuadrado integrable, es decir

$$\int |\psi|^2 dV < \infty.$$

***(b)*** La constante de normalización se determina por la siguiente relación

$$\frac{1}{C} = \int |\psi|^2 dV.$$

Al espacio vectorial compuesto por las funciones $\psi_n$ de cuadrado integrable[6] se le denota como $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$.

Si se define como producto interno

$$\langle \psi_n^*, \psi_m \rangle = \int \psi_n^* \psi_m dV,$$

el espacio vectorial de la mecánica cuántica tiene la estructura de un espacio de Hilbert.

**2.2. Principios Básicos.** La mecánica cuántica, en su formulación estándar se construye a partir de los siguientes principios.

PRINCIPIO 1. *A cada* ***sistema físico*** *se le asocia un espacio de Hilbert. Dado un tiempo fijo $t_0$, a la descripción completa del sistema, llamado* ***estado del sistema*** *en el instante $t_0$, se le asigna un vector de longitud uno.*

Un sistema físico también puede ser representado por un vector que pertenece al espacio producto, por ejemplo, si tenemos un sistema cuántico en el cual una partícula puede estar en cualquiera de los estados $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$,...,$|u_n\rangle$ pertenecientes a un espacio de Hilbert $H_1$, y además tenemos otro sistema cuántico en el cual una partícula puede estar en los estados $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$,...,$|v_m\rangle$ pertenecientes a un espacio de Hilbert $H_2$, la descripción del sistema completo estará dada por algún vector perteneciente al espacio producto $H = H_1 \otimes H_2$. Se le llama *estado separable* al que se le puede describir mediante la expresión (1.6), en caso de que un vector arbitrario no satisfaga esta condición, lo llamaremos estado entrelazado.

PRINCIPIO 2. *Las propiedades de un sistema que pueden ser medidas se representan por operadores lineales hermitianos, llamados frecuentemente* ***observables*** *(también* ***variables dinámicas****). La relación entre los operadores, que representan propiedades, y los valores de dichas propiedades en los posibles estados del sistema, está dada por lo que se conoce como la* ***regla eigenvalor-eigenvector*** *(E/E) que enuncia lo siguiente: "un estado posee el valor $\alpha$ de una propiedad representada por el operador $\mathcal{O}$ si y sólo si ese estado es un eigenvector de $\mathcal{O}$ con eigenvalor $\alpha$".*

[6]Refiriéndonos al caso continuo, pero bien se puede estudiar el caso discreto.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, es importante hacer uso de los operadores hermitianos, pues cuando satisfacen la ecuación de eigenvalores (1.7), el eigenvalor siempre es real. Los operadores elementales (hermitianos) lineales, en el espacio de configuración, se muestran en la siguiente tabla:

| Observable | Operador |
|---|---|
| **Posición** | $\mathcal{Q} = x$ |
| **Momento** | $\mathcal{P} = -i\hbar\partial/\partial x$ |
| **Energía** | $\mathcal{E} = i\hbar\partial/\partial t$ |
| **Energía Potencial** | $\mathcal{V} = V(x)$ |
| **Energía Cinética** | $\mathcal{T} = (-\hbar^2/2m)\partial^2/\partial x^2$ |
| **Hamiltoniano** | $\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$ |

CUADRO 1. Operadores elementales asociados a variables dinámicas (caso unidimensional).

El momento angular total $\hat{\mathcal{J}}$ es la suma de las contribuciones del momento angular orbital $\hat{\mathcal{L}}$ y el momento angular intrínseco de las partículas $\hat{\mathcal{S}}$, es decir $\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{S}}$. En el caso del espacio de Hilbert bidimensional, para estudiar el momento angular el electrón para espín 1/2 (considerando $l = 0$) y sus respectivas componentes, se utiliza el operador espinorial

$$\hat{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}. \tag{2.5}$$

PRINCIPIO 3. *La evolución del estado de un sistema viene descrita por la ecuación de Schrödinger:*

$$i\hbar\frac{d\left|\psi\right\rangle}{dt} = \mathcal{H}\left|\psi\right\rangle, \tag{2.6}$$

siendo $\mathcal{H}$ el operador Hamiltoniano (véase Cuadro 1). Esta ecuación es lineal y determinista. Decimos que es determinista porque dado el estado del sistema en un tiempo determinado, podemos calcular el estado del sistema para algún tiempo posterior o anterior.

La expresión de la ecuación de Schrödinger aquí introducida es más general que la expresion (2.2) de la sección anterior. De hecho, existe una equivalencia pues

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle\,.$$

PRINCIPIO 4. *Sea $|\psi\rangle$ el vector que representa el estado de un sistema y $\mathcal{F}$ el operador que representa la variable dinámica que se desea medir, supongamos que $|\psi\rangle$ no es eigenestado de $\mathcal{F}$. Para determinar (1) la 'lista' de los posibles resultados de una medición y (2) la probabilidad de que al medir obtengamos uno u otro de estos posibles resultados, se utiliza* ***la regla de Born****. Ésta indica que la 'lista' de esos posibles valores está compuesta por los eigenvalores del operador $\mathcal{F}$ y las probabilidades de que al medir se obtenga uno u otro de esos posibles resultados están dadas por la expresión*

$$P(f_i) = |\,\langle\psi|f_i\rangle\,|^2,$$

*siendo* $\mathcal{F}\,|f_i\rangle = f_i\,|f_i\rangle$.

PRINCIPIO 5. *(Postulado del Colapso). Sea una vez más* $|\psi\rangle$ *el vector que representa el estado de un sistema y* $\mathcal{F}$ *el operador asociado a la variable dinámica que se desea medir. Si el resultado tras la medición arroja el valor* $f_i$*, el sistema cambia instantáneamente al eigenestado asociado a dicho eigenvalor, esquemáticamente:*

$$|\psi\rangle \to |f_i\rangle\,.$$

**2.3. Sistemas físicos y operadores conmutativos.** A continuación se demostrará que *dos variables dinámicas pueden tener valores bien definidos simultáneamente en un sistema físico si y sólo si los operadores que los representan conmutan*[7].

«⇒» Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ los operadores que representan a distintas variables dinámicas, como simultáneamente sus valores se encuentran bien definidos, entonces

$$(1)\ \mathcal{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle,$$
$$(2)\ \mathcal{B}|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle.$$

Evaluando el operador $\mathcal{B}$ en (1) y el operador $\mathcal{A}$ en (2), resulta (respectivamente):

$$(3)\ \mathcal{B}\mathcal{A}|\psi_n\rangle = \mathcal{B}a_n|\psi_n\rangle = a_n\mathcal{B}|\psi_n\rangle = a_n b_n|\psi_n\rangle,$$
$$(4)\ \mathcal{A}\mathcal{B}|\psi_n\rangle = \mathcal{A}b_n|\psi_n\rangle = b_n\mathcal{A}|\psi_n\rangle = b_n a_n|\psi_n\rangle.$$

Ya que el conmutador es cero, se concluye que

$$(5)\ \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

«⇐» Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ conmutan y al menos uno de ellos tiene el valor bien definido (en nuestro caso, $\mathcal{A}$) son válidas las expresiones (1) y (5).

Tenemos que

$$(6)\ \ \langle\psi_m|\,\mathcal{B}\mathcal{A}\,|\psi_n\rangle = a_n\,\langle\psi_m|\,\mathcal{B}\,|\psi_n\rangle\,.$$

Pot otro lado, vemos que el producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ es hermitiano ya que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son hermitianos y conmutan. Entonces:

$$(7)\ \ \langle\psi_m|\,\mathcal{B}\mathcal{A}\,|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\,(\mathcal{B}\mathcal{A})^*\,|\psi_m\rangle = \langle\psi_n|\,\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*\,|\psi_m\rangle = a_m\,\langle\psi_n|\,\mathcal{B}^*\,|\psi_m\rangle = a_m\,\langle\psi_m|\,\mathcal{B}\,|\psi_n\rangle\,.$$

Restando (6) y (7) resulta

$$(a_n - a_m)\,\langle\psi_m|\,\mathcal{B}\,|\psi_n\rangle = 0,$$

por lo que

$$(8)\ \ \langle\psi_m|\,\mathcal{B}\,|\psi_n\rangle = b_n\delta_{nm}.$$

Notamos que el operador $\mathcal{B}$ es diagonal, siendo $|\psi_n\rangle$ las eigenfunciones, se tiene entonces que:

$$(9)\ \ \langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{nm},$$

de (8) y (9) se obtiene:

$$\langle\psi_m|\,\mathcal{B}\,|\psi_n\rangle = b_n\,\langle\psi_m|\psi_n\rangle\,,$$

es decir

$$(10)\ \ \langle\psi_m|\,\mathcal{B} - b_n\,|\psi_n\rangle = 0.$$

Como $|\psi_m\rangle$ es arbitrario, se concluye que

$$(11)\ \mathcal{B}|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle.$$

[7] La demostración presentada puede consultarse en [**10**].

# Parte 2

# No Localidad Cuántica

Capítulo 3

# Completez de la Mecánica Cuántica

Cimentada la 'herramienta teórica' en la Parte 1 de este trabajo, comenzaremos el estudio de la «No localidad Cuántica». Fundamental es discutir primero el artículo de EPR[1] como se había adelantado en la introducción. En este capítulo también abordaremos algunas cuestiones filosóficas y presentaremos el problema de la medición. Los temas aquí tratados y también los temas del capítulo siguiente serán indispensables para entender la relevancia de lo que se discutirá en la Parte 3 de esta tesis.

## 1. Paradoja de EPR

En el artículo de EPR se considera a una teoría satisfactoria si es correcta y completa. Se menciona que la teoría es correcta si sus predicciones se comprueban experimentalmente. El artículo se centra en analizar la completez[2] de la mecánica cuántica; para evaluarla proporcionan un criterio (necesario, según ellos):

*(Criterio de Completez). Cada elemento de la realidad física debe tener su contraparte en la teoría física.*

No se define *realidad* ni los *elementos de la realidad física*, pero se brinda una condición suficiente para manifestar que una cantidad física es real:

CONDICIÓN 1. *(De Realidad). Si se puede predecir con certeza (probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física sin perturbar el sistema, existe un elemento de la realidad física que le corresponde.*

Esta condición nos dice que el valor de la propiedad física que podemos predecir, debe existir de manera objetiva e independiente del observador.

El criterio de completez y la condición de realidad representan su concepción de "realismo". Denotaremos a esta concepción como $R_E$.

En el artículo de EPR se muestra que dos cantidades físicas asociadas a operadores que no conmutan pueden ser simultáneamente reales (en términos de su concepción $R_E$) y concluyen que la función de onda es incompleta al no ofrecer la descripción de ambas. Además de la premisa de «*realismo*» $R_E$, para llegar a esta conclusión,

[1] Las letras EPR corresponden a las iniciales de los apellidos Einstein, Podolsky y Rosen. El tema tratado en el artículo de EPR es conocido como «la Paradoja de EPR», para consultarlo véase [**12**].

[2] *Completitud* y *completez* son términos igualmente utilizados y, correctos según el diccionario de la Real Academia Española; *compleción* es válido pero poco usado (véase [**34**]).

se asume otra premisa que se asocia con el principio de «*localidad*» que se precisará en la sección 3 pero se identificará como «$Loc_{epr}$» en la siguiente sección.

## 2. Argumento de EPR

Si se satisface la ecuación de eigenvalores, diremos que la propiedad física asociada al operador $\mathcal{O}$ es un elemento de la realidad ya que puede ser medida sin perturbar al sistema, siendo $\alpha$ su valor.

Consideremos un sistema de dos partículas que sólo han interactuado del tiempo $t_1 = 0$ al tiempo $t_2 = T$ y que posteriormente, una de la otra están lo suficientemente separadas. Con la ayuda de la ecuación de Schrödinger se describe la evolución del estado del sistema después de la interacción.

Tras la evolución, podemos representar este estado como:

$$|\Psi\rangle = \sum_n |a_n\rangle_1 \otimes |b_n\rangle_2 \,, \tag{2.1}$$

siendo $\{|a_n\rangle_1\}$ el conjunto de eigenestados del operador $\hat{A}_1$ para la partícula 1 y $\{|b_n\rangle_2\}$ un conjunto de estados para la partícula 2 (nótese que $\{|b_n\rangle_2\}$ no necesariamente es el conjunto de eigenestados de un operador de la partícula 2).

Si estamos interesados en alguna otra propiedad física del mismo sistema, podemos reescribir (2.1) de la siguiente manera:

$$|\Psi\rangle = \sum_m |c_m\rangle_1 \otimes |d_m\rangle_2 \,, \tag{2.2}$$

siendo $\{|c_m\rangle_1\}$ el conjunto de eigenestados del operador $\hat{C}_1$ para la partícula 1 y $\{|d_m\rangle_2\}$ un conjunto de estados para la partícula 2 (nuevamente, el conjunto $\{|d_m\rangle_2\}$ no necesariamente representa al conjunto de eigenestados de un operador de la partícula 2).

Si realizamos una medición de la propiedad $\hat{A}_1$ y encontramos el valor $a_k$, diremos que la partícula 1 está en el estado $|a_k\rangle_1$ y también diremos que la partícula 2 tendrá por estado $|b_k\rangle_2$ (pues el sistema colapsa). De manera análoga, si realizamos una medición de la propiedad $\hat{C}_1$ y encontramos el valor $c_j$, diremos que la partícula 1 está en el estado $|c_j\rangle_1$ y que la partícula 2 tendrá por estado $|d_j\rangle_2$.

Es decir, según la terminología de la mecánica cuántica estándar, se predice que los estados representados por (2.1) y (2.2) «colapsarán» al ser medidos a los estados

$$|\Psi\rangle = |a_k\rangle_1 \, |b_k\rangle_2 \quad \text{y} \tag{2.3}$$

$$|\Psi\rangle = |c_j\rangle_1 \, |d_j\rangle_2 \,, \tag{2.4}$$

respectivamente.

En particular podría suceder que el conjunto de estados $\{|b_n\rangle_2\}$ y $\{|d_n\rangle_2\}$ fueran un conjunto de eigenestados para operadores $\hat{B}_2$ y $\hat{D}_2$ respectivamente, y además estos operadores podrían no conmutar. Las suposiciones anteriores son importantes para mostrar la incompletez de la mecánica cuántica como veremos más adelante. Entonces, consideremos que éste es el caso e introduzcamos, en palabras de los autores del artículo[3] la premisa principal que llamamos $Loc_{epr}$ que a su vez asume $R_E$:

> "...ya que al momento de la medida los dos sistemas no interactúan, ningún cambio real puede ocurrir en el segundo sistema a causa de alguna cosa efectuada sobre el primero."

Como la segunda partícula no debe ser afectada por lo que le ocurre a la primera, la existencia de las propiedades reales de la partícula 2 debe ser independiente de la partícula 1 (es decir, de sus propiedades o procesos de medición): a la partícula 2 le podemos asociar dos propiedades físicas reales diferentes relacionadas con los operadores $\hat{B}_2$ y $\hat{D}_2$, definidas inmediatamente al medir las propiedades de la partícula 1 relacionadas con los operadores $\hat{A}_1$ y $\hat{C}_1$, respectivamente. Pero, como el formalismo cuántico no ofrece la descripción de los operadores $\hat{B}_2$ y $\hat{D}_2$ precisamente porque no conmutan, se concluye que la teoría cuántica es incompleta.

## 3. Casos Particulares

**3.1. Posición y Momento.** En el artículo de EPR se escoge un estado entrelazado muy especial, en el cual, si se decide medir el momento de la partícula 1 y se obtiene el valor $p$, la partícula 2 tendrá el valor $-p$; y si se decide medir la posición de la partícula 1 y se encuentra en $x_1$, la partícula 2 estará en la posición $x_1 + x_0$.

El estado se expresa como:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_1 + x_0)} dp.$$

Según el *argumento EPR*[4], a la partícula 2 le podemos asociar dos cantidades físicas reales, que por la formulación de la mecánica cuántica no pueden ser medidas simultáneamente sin perturbar al sistema, pues

$$\mathcal{PQ} - \mathcal{QP} = h/\pi i,$$

es decir, no conmutan.

En la parte final del artículo terminan los autores con una aseveración muy fuerte[5], que está relacionado con la violación de «$Loc_{epr}$»:

> "La realidad[6] de P y Q del segundo sistema dependen del proceso de medición efectuado en el primer sistema. Ninguna definición razonable de realidad debería permitir esto."

[3]Traducción personal extraída de [**12**].

[4]Cuando se menciona «*argumento EPR*», nos referimos al razonamiento de Einstein, Podolsky y Rosen presentado en la sección anterior, es decir, la sección 2 de este capítulo.

[5]Paráfrasis.

[6]En esta cita, P y Q son los operadores de momento y posición respectivamente.

**3.2. Componentes de Espín.** David Bohm[7] extrae la esencia de la paradoja de EPR al proponer un experimento hipotético en el que se relacionan las componentes del espín de dos partículas de espín 1/2, reduciendo la complejidad del problema al trabajar en un espacio de Hilbert de dos dimensiones. A este experimento le llamararemos EPRB.

Se considera una partícula en reposo con espín total cero que repentinamente se desintegra en dos partículas viajando en direcciones opuestas. Este estado, llamado singulete, se describe de la siguiente forma:

$$|\Psi\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle\,|-\rangle - |-\rangle\,|+\rangle). \tag{3.1}$$

Si se desea medir la proyección del momento angular sobre la dirección $z$ para la partícula 1 (estando lejana de la partícula 2), se tiene la misma probabilidad de encontrar el valor de $+1/2$ y $-1/2$. Imaginemos que encontramos el valor $+1/2$. La ecuación (3.1) «colapsa» y se representa como

$$|\Psi\rangle_z = |+\rangle\,|-\rangle\,. \tag{3.2}$$

Sin la interacción entre ambas partículas, de manera inmediata podemos predecir que $-1/2$ será el valor de la componente $z$ del espín de la partícula 2, que corresponderá al resultado obtenido por la medición (cuyo proceso no altera el sistema asumiendo «$Loc_{epr}$»), hablando así de una cantidad real para la partícula 2.

Supongamos ahora que medimos en la partícula 1 la componente $x$ y arroja el valor de $+1/2$, análogo al caso anterior, podemos predecir el valor de la componente $x$ de espín de la partícula 2, la cual representará una cantidad real si asumimos «$Loc_{epr}$».

Tenemos dos cantidades reales asociadas a la partícula 2 que según la mecánica cuántica no pueden ser conocidas de manera simultánea sin perturbar al sistema pues los operadores $\hat{\sigma}_z$ y $\hat{\sigma}_x$ no conmutan (al medir la componente $x$ ya no podemos asegurar que la componente $z$ del espín de la partícula 1 es +1/2 y -1/2 en la partícula 2), por tanto, considerando válidas las premisas de EPR, la descripción que ofrece la función de onda es incompleta.

## 4. Premisas

Bell[8] tenía muy clara la premisa que estaba de fondo en el argumento de EPR:

> "Lo que se supone sagrado es el principio de «causalidad local» -o «no acción a distancia»-."

De esto nacen las siguientes preguntas: ¿es correcto asociar un *principio de localidad* como premisa en el argumento de EPR?, ¿a qué exactamente se refiere Bell con *causalidad local*? Para responder estas interrogantes es necesario introducir el *principio de localidad* y no sólo eso, también será necesario introducir el *principio de separabilidad*; en la literatura a ambos principios se les suele confundir y en

[7]Para más detalles del desarrollo de David Bohm sobre la paradoja de EPR, véase [**3**].

[8]En este apartado, todas las citas son tomadas de [**2**] **16** (197-220), a menos que se señale lo contrario.

ocasiones los toman como un solo principio, sin embargo, aquí se hará distinción entre ellos. Consideremos la siguiente cita[9]:

> "La visión del mundo de Einstein sostenía que cada región del espacio-tiempo tiene su propio estado físico intrínseco y que el estado físico total y completo del universo es especificado una vez que se haya determinado el estado intrínseco de cada pequeña región. Esta doctrina ontológica puede llamarse ***separabilidad***[10]. Einstein también creía que los eventos con separación tipo espacio de una región no podrían influir en el estado físico asignado a esa región. Llamemos a esa doctrina ***localidad***."

Si comparamos estas nociones con lo que denominamos «$Loc_{epr}$», la relación es con el *principio de localidad*, de manera que es correcto que Bell asocie la premisa del argumento EPR con este principio (se especificará con detalle su concepción de «causalidad local» en el siguiente capítulo).

Si bien es cierto que la cita anterior refleja el pensamiento de Einstein, no era del todo claro que él tuviera en mente la distinción entre el principio de *localidad* y *separabilidad*; esa 'visión del mundo' no la formula de manera precisa. Consideremos una de sus citas posterior al artículo original[11]:

> "Si se pregunta qué es, prescindiendo de la mecánica cuántica, característico del mundo de las ideas de la física, lo que primero llega de golpe es lo siguiente: los conceptos de la física se relacionan con el mundo real exterior... Una característica ulterior de estos objetos físicos es que se consideran dispuestos en un continuo espacio-temporal. *Un aspecto esencial de esta dispoción de las cosas en física es que ellas presentan , en un cierto momento, una existencia* ***independiente*** *una de otra, siempre que estos objetos «estén situados en partes diferentes del espacio»*[12].
> La idea siguiente caracteriza la ***independencia*** relativa de objetos bien separados en el espacio (A y B): una influencia directa en A no tiene influencia alguna directa sobre B..."

La parte del texto resaltada en cursiva de la reciente cita, se asocia con la noción de *separabilidad* introducida, pero el párrafo siguiente no, éste se relaciona con el principio de *localidad*. Sin embargo, como la «independencia»[13] que se señala en lo que identificamos como «noción de separabilidad» está directamente caracterizada con el «principio de localidad» asociado al siguiente párrafo, pareciera que Einstein no distingue ambos principios, además, para ser más precisos cuando se requiere hablar de *localidad*, es conveniente especificar el tipo de separación, como se realiza

---

[9]Consúltese [**24**] página 193. Aquí se presenta una traducción personal.

[10]En la cita original, la palabras *separabilidad* y *localidad* son resaltadas mediante un entrecomillado, aquí también se le resaltan pero se utiliza la tipografía 'negrita' y la cursiva.

[11]Con 'artículo original' nos referimos al artículo de EPR.

[12]En la cita original no se utiliza la letra cursiva. Se pone esa tipografía en una parte del contenido del párrafo para resaltar y asociarla con el principio de *separabilidad* y distinguirla del párrafo siguiente que manifiesta una relación con el principio de *localidad*.

[13]Nos referimos a la «independencia» señalada con tipografía 'negrita'. Una vez más se da énfasis en que en la cita original no se resalta esta palabra.

en la primer cita de esta sección, es decir, añadir que la separación es de tipo-espacio. El no distinguir entre un principio y otro (o no formular de manera precisa un principio) puede llevar a confusiones, por ejemplo, Born comenta:

> "La raíz de la diferencia entre Einstein y yo era el axioma que los sucesos que ocurren en lugares diferentes A y B son independientes entre sí, en el sentido de que una observación del estado de los asuntos en B no puede enseñarnos nada sobre el estado de los asuntos en A."

Pero para Bell esto es inadmisible, con respecto a lo anterior dice:

> "Difícilmente podría hallarse incomprensión más completa. Einstein no tenía ninguna dificultad en aceptar que asuntos en diferentes lugares pudieran estar correlacionados. Lo que él no podía aceptar era que una intervención en un lugar pudiera, inmediatamente, *influir*[14] sobre asuntos en el otro."

Al menos, dentro del pensamiento de Einstein, la siguiente cita es una de las más claras para comprender el reciente comentario de Bell[15]:

> "No puedo creer seriamente en [la teoría cuántica] porque no puede reconciliarse con la idea de que la física debe representar una realidad en el tiempo y en el espacio, libre de la fantasmal[16] acción a distancia."

En resumen tenemos lo siguiente: si asumimos $R_E$ e insistimos en dar por válido la premisa de localidad (abreviado como $L$), entonces la Mecánica Cuántica es una teoría incompleta (abreviado como «$MC_I$»). Esto puede expresarse de la siguiente manera:

si $R_E$,

$$L \Rightarrow MC_I,$$

o bien, asumiendo $R_E$, si queremos negar que la Mecánica Cuántica es incompleta, debemos negar la premisa de localidad. Esto puede ser expresado como sigue:

al asumir $R_E$,

$$\neg MC_I \Rightarrow \neg L,$$

decimos entonces que EPR muestra que el mundo es no local si la mecánica cuántica es completa.

## 5. Realismo

Abunda el término «realismo» en la literatura filosófica y es utilizado para diferentes conceptos. En este caso, compete hablar y diferenciar las nociones de *realismo ontológico* y *realismo epistemológico*[17], y se hará de manera muy general, porque incluso en la vasta bibliografía se presentan de variadas formas.

[14] Las cursivas no han sido agregadas, aparecen de la fuente tomada.
[15] Véase [**25**].
[16] Einsten fue quien propuso el término «spooky» que es traducido como «fantasmal».
[17] Los conceptos y la distinción entre estos realismos son tomados de [**8**].

*Realismo Ontológico («$R_o$»).* Es la tesis que afirma que el mundo existe por sí mismo (en el contexto de la física nos referimos a las propiedades de los sistemas, como la posición, momento, energía, etc.), independiente del conocimiento o conciencia de éste (independiente de observadores o de cualquier actividad mental), opuesto al *idealismo*, tesis que argumenta lo contrario.

*Realismo Epistemológico («$R_e$»).* Es la tesis que sostiene la posibilidad de *conocer* al mundo tal como es en sí mismo (nuestro conocimiento lo describe y lo explica, y este conocimiento puede venir de nuestras teorías científicas). Se da por hecho la aceptación del realismo ontológico y por eso la verdad o falsedad de una teoría depende de esta noción de realismo y no de sujetos del conocimiento (si una teoría es verdadera debe hacer referencia a entidades preexistentes, no necesariamente a todas, aunque *por principio* se admita la construcción de alguna que lo haga). En el contexto de una teoría física, es posible conocer las propiedades de un sistema en sí mismas. Este realismo se opone al *fenomenismo* y al *instrumentalismo*. El *fenomenismo* es la tesis que afirma que conocemos las cosas tal como se nos aparecen (como fenómenos y no como son en sí mismas) y el modo en que se nos aparecen depende de nuestra mente, por ejemplo, de nuestro sistema cognoscitivo, percepción, lenguaje o de teorías. El *instrumentalismo* argumenta que las teorías no ofrecen una descripción verdadera de la realidad, sólo brindan un método para explicar y predecir fenómenos.

Ahora, analizando la concepción de realidad ($R_E$), notamos que presupone $R_o$ al referirse a la «realidad física» y, al permitir la correspondencia entre elementos de la realidad física con variables teóricas, asume un $R_e$ pero restringido por la Condición 1. Con esta condición no se imponen requisitos sobre lo que debe satisfacer la «realidad física», sino mas bien, se imponen requisitos sobre la teoría para que podamos decir que representa a esta realidad; estos requisitos están sujetos a la definición de sistema y al concepto de perturbación. No perturbar al sistema trae implícito que al poner en contraste la predicción con la «realidad física», las propiedades del sistema no cambian.

La aparente relación entre la realidad y la medición es lo que aqueja a EPR. Podría especularse que es la interacción física entre el aparato de medición (que a fin de cuentas se compone de sistemas microscópicos) y el sistema de estudio lo que provoca que se manifiesten propiedades físicas que no existían antes, y no realmente el observador o nuestra mente, pero sea cual sea la explicación, el formalismo cuántico no la ofrece (véase la siguiente sección).

Regresando al experimento de EPRB, si damos por hecho que la proyección del espín en alguna dirección arbitraria es un elemento de la realidad, tendrá un operador asociado y se satisfará la ecuación de eigenvalores, pero la situación se complica cuando nos preguntamos si a la propia función de onda se le puede asociar un 'realismo'. El debate se ha concentrado en las siguientes alternativas[18]:

($a$) *Realismo de la función de onda.* Se le asume como un objeto físico. La postura se centra en explicar el mundo macroscópico (al que se le asocia un espacio

[18]Véase, por ejemplo [**27**].

de 3 dimensiones espaciales) partiendo de este ente (que vive en un espacio 3N-dimensional).

($b$) *Ontología Primitiva.* La ontología de la teoría es lo que hay en el espacio de 3 dimensiones espaciales, se postula de lo que se ve del mundo y no puede ser inferida del formalismo cuántico.

Sin poder llegar a una conclusión de los distintos debates que originan las preguntas generadas, al menos sí se puede concluir que uno puede asumir una noción 'realista' ($R_o$, $R_e$) aunque se viole la localidad. También podría uno preguntarse si negando $R_E$ puede 'rescatarse' el principio de localidad. Pero el problema radica en que la definición de este principio se construye con una noción 'realista', pues la localidad nos habla de 'existencias' independientes de objetos físicos con separaciones tipo espacio. Es decir, sus respectivas propiedades existen y un objeto físico no depende de la existencia del otro, de algún observador o de algún proceso mental.

La palabra «realismo» no aparece con frecuencia en textos de física. Uno podría asumir que estudiar este concepto es tarea del filósofo, pero desde mi opinión, el estudio de todo concepto que ayude a dar claridad a descripciones físicas del mundo, es tarea también del físico.

> "Estoy convencido de que la física teórica es, realmente, filosofía."
> M. Born.

## 6. El problema de la medición

La no localidad cuántica se manifiesta desde el postulado del colapso (Principio 5). Esta ley de evolución es contraria a la brindada por la ecuación de Schrödinger (Principio 3) que es determinista, continua y lineal. El formalismo estándar propone las circunstancias en las que cada ley dinámica deberá intervenir[19]:

($i$) Si no se efectúa una medición, el estado del sistema evoluciona acorde a la ecuación de Schrödinger.

($ii$) El estado de un sistema cambia, tras la medición, acorde al postulado del colapso.

El problema radica en que este formalismo no precisa ni da elementos para precisar el concepto de medición. Se podría especular al respecto de la existencia de una teoría más fundamental y local que resuelva el problema de la medición. Pero antes de llegar tan lejos, habría que preguntar si es posible construir una teoría local que reproduzca los resultados de la mecánica cuántica, y esto, es de hecho, lo que Bell se cuestiona.

[19] Para una perspectiva general e introductoria, léase [**29**].

Capítulo 4

# Teorema de Bell

Con lo anterior, ahora sí estamos listos para abordar de manera explícita y más formal el concepto de la «no localidad cuántica». En este apartado enunciaremos el teorema de Bell y los conceptos previos para llevar a cabo su demostración. De igual forma, haremos una breve mención de lo que se ha efectuado en el campo experimental para evidenciar que la «no localidad» no sólo es un hecho teórico, sino de la naturaleza misma.

## 1. Teoría de Existenciables Locales

Según la formulación estándar de la mecánica cuántica, la esencia de una propiedad física no es independiente del proceso de medida. Lo ideal sería construir la teoría de tal modo que estas propiedades existieran por sí, emancipadas del concepto de 'observador'. Bell nombra «beables» a los entes que satisfacen lo anterior; a estos se les pueden asignar valores objetivos, y de hecho, los observables se deben construir por medio de ellos. Aquellos «beables» que se puedan asignar a una región limitada del espacio-tiempo se les llama *beables locales*, y una teoría construida por entes de este tipo es llamada «*teoría de beables locales*». De acuerdo con la discusión del capítulo anterior respecto al *realismo*, postulando la existencia de los «beables» estamos asumiendo «$R_o$». En este trabajo renombraremos a los beables y los llamaremos «existenciables»[1].

## 2. Determinismo Local y Causalidad Local

Es de interés elaborar el concepto de *causalidad local* que aplique incluso a teorías indeterministas, pero antes presentaremos la noción de «determinismo local» (obsérvese la Figura 1 de este capítulo).

Definición 8. *Sea $\Omega$ una región arbitraria del espacio-tiempo, si la teoría indica que todos los existenciables en ella quedan determinados por los de cualquier región $V$ que se encuentra contenida en el cono de luz y además obstruye por completo el cono de luz pasado, decimos que la teoría es* ***determinista local.***

Considérese alguna teoría en la que el valor de un existenciable A queda fijo y determinado cuando se le asignan valores concretos a un conjunto de existenciables

[1] La palabra «beable» no está traducida, pero intenta expresar la propiedad que tiene un objeto de *ser*, en contraposición de «observable»; puede verse la nota del traductor del capítulo 5 de [**2**]. De hecho, tampoco es una palabra que exista propiamente en el idioma inglés, por eso no hay una traducción literal. Es difícil proponer un sustituto en español, y aquí se sugiere hacer el uso de la palabra «existenciable», que tampoco 'existe' (pese a su nombre) en la lengua castellana, pero se hace un esfuerzo por introducir una palabra más familiar a nuestra lengua. Esta propiedad de «ser» refleja la propiedad «realista» de la variable, esa propiedad que manifiesta que «existe» independiente de un observador.

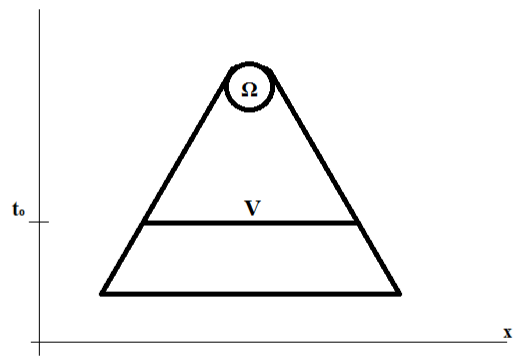


FIGURA 1. IMAGEN REPRESENTATIVA DE LA DEFINICIÓN 8.

$\Lambda$. El concepto de *causalidad local* para una teoría no determinista debe considerar que el valor de ese existenciable A no esté necesariamente fijo, sino que ahora esos valores concretos del conjunto de existenciables $\Lambda$ impliquen una distribución de probabilidad para los valores del existenciable[2] A.

La probabilidad de que un existenciable A tome un valor particular[3] $A$, especificando valores concretos al conjunto de existenciables $\Lambda$, será representada por la siguiente notación[4]:

$$P(A|\Lambda).$$

Ahora, la probabilidad de que un existenciable A tome un valor particular $A$, considerando varios conjuntos de existenciables, $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n$, y especificando valores concretos a los existenciables de cada conjunto, será representada por:

$$P(A|\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n).$$

Bell comenta lo siguiente[5]:

> "Supongamos que A [un existenciable][6] está localizado en una región 1 del espacio-tiempo, y sea B otro existenciable localizado en cierta región 2 separada de la 1 por un intervalo del género espacio[7]. Mi idea intuitiva de ***causalidad local***[8] es que sucesos en 2

[2]A este tipo de variables se les llama «variables aleatorias». Cuando uno utiliza el término «*distribución de probabilidad*» se hace referencia a la «*función de probabilidad o de densidad*». En la sección *Elementos de probabilidad* del Apéndice, se define de manera formal una «variable aleatoria» y se introduce el concepto de «*función de probabilidad*» y «*función de densidad*» al igual que se mencionan algunas de sus propiedades. Véanse las definiciones 15 a 19 del apéndice.

[3]Tanto para el existenciable como para el valor particular del existenciable, se usa la misma letra, para diferenciar se utiliza cursiva en el caso del valor particular del existenciable.

[4]Véase la definición 14 del apéndice.

[5]Véase capítulo 7 (pág. 92) de [**2**]

[6]Se agrega la oración entre corchetes que no aparece explícitamente en la cita, pero que por el contexto previo a ese párrafo en el artículo original, se sobreentiende que A es un existenciable.

[7]En nuestra terminología, género espacio es equivalente a separación tipo espacio.

[8]Se le da el estilo de cursiva y negrita a las palabras «causalidad local» para dar énfasis, pero en la cita original no es realizado esto.

> no habrían de ser causas de sucesos en 1, y viceversa. Pero esto no quiere decir que ambos conjuntos de sucesos no estén correlacionados de ninguna manera pues podrían tener causas comunes en el traslape de sus conos de luz pasados."

Por ello podría esperarse que:

$$P(A|\Lambda, B) \neq P(A|\Lambda), \tag{2.1}$$

siendo $\Lambda$ el conjunto de existenciables contenido en una región del cono de luz de A que obstruye por completo el cono de luz pasado.

Con esto, él introduce el concepto de una teoría localmente causal de la siguiente manera (véase figura[9] 2):

Definición 9. *(Teoría Localmente Causal «$T_L$»). En una teoría localmente causal, las probabilidades ligadas a valores de existenciables locales en una región espacio-temporal* 1*, cuando se especifican los valores de todos los existenciables locales en una segunda región* 2 *que obstruye completamente el cono de luz pasado de la primera, no se alteran por la especificación de valores de existenciables locales en una tercera región* 3 *con separación tipo espacio de las otras dos.*

Lo anterior implica que

$$P(A|\Lambda, B) = P(A|\Lambda). \tag{2.2}$$

Entonces, si A es un existenciable localizado en una región 1 del espacio tiempo con $\Lambda$ como conjunto de existenciables contenidos en una región de su cono de luz que obstruye el cono de luz pasado, y B es otro existenciable localizado en una región 2 del espacio tiempo con separación tipo espacio, siendo $\Phi$ un conjunto de existenciables contenidos en una región de su respectivo cono de luz que también obstruye el cono de luz pasado, la probabilidad conjunta se expresa como[10]:

$$P(A, B|\Lambda, \Phi) = P(A|\Lambda, \Phi, B)P(B|\Phi). \tag{2.3}$$

De la expresión (2.2), por la definición de teorías $T_L$, la igualdad anterior se reescribe como:

$$P(A, B|\Lambda, \Phi) = P(A|\Lambda)P(B|\Phi). \tag{2.4}$$

[9]La estructura de las imágenes 2 y 3 ha sido tomada de [**30**].
[10]Véase la Definición 14 del apéndice.

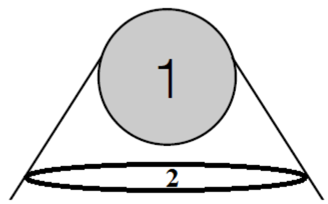


FIGURA 2. IMAGEN REPRESENTATIVA DE LA DEFINICIÓN 9.

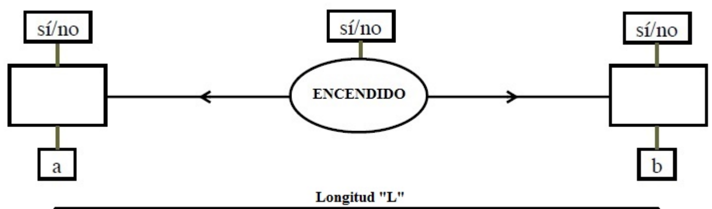


FIGURA 3. DISPOSITIVO DE UN EXPERIMENTO TIPO EPRB.

## 3. Desigualdad CHHS y Teorema de Bell

Ahora una pregunta interesante es: ¿existe una teoría que satisface $T_L$ y es empíricamente equivalente a la Mecánica Cuántica? Bell plantea un experimento, y con base en éste, establece una desigualdad para responder la cuestión. En el planteamiento teórico del experimento no se hace referencia a ningún sistema cuántico, de hecho, a ninguna imagen asociada al mundo microscópico. Por ejemplo, no se utiliza la noción de partículas y mucho menos la de espín. La finalidad es librarse de detalles y terminología innecesaria para proporcionar una respuesta que manifieste generalidad. Con detalle en las siguientes secciones se irá desglosando lo mencionado. Es importante adelantar que el experimento de EPRB es un caso particular del propuesto a continuación, como se indicará.

**3.1. Argumento General.** El montaje experimental de Bell es el que se muestra en la Figura 3. En esta figura hay una fuente y dos cajas, a cada uno de estos objetos le corresponde una de las tres notificaciones que llamaremos de «salida». A la fuente además, le corresponde una notificación que llamaremos de «entrada». También existen dos señales $a$ y $b$ que son parte determinante del mensaje que proporcionarán las notificaciones de las cajas. Explicaremos con más detalle.

Cuando la notificación central de entrada marca «encendido», el experimento inicia en el instante $t_1$. No se dan detalles sobre qué es lo que está sucediendo, sólo sabemos que si la notificación central de salida marca «sí», la fuente que ya está encendida funciona correctamente. Posteriormente, en el instante $t_1 + T$ aparecen las notificaciones de las otras señales de salida, que individualmente pueden ser «sí» o «no»; el resultado de cada una de estas notificaciones, como se había mencionado con anterioridad, también depende de las señales $a$ y $b$ que se insertan en los extremos, que de igual forma se desconoce su naturaleza, pero que repercuten en el resultado final. Con esto se da fin al experimento y el dispositivo podría utilizarse nuevamente.

Es importante evidenciar que es en el instante $(t_1 + T) - \delta$ cuando se insertan las señales $a$ y $b$ en los extremos, siendo $\delta$ tan pequeño como uno quiera. En particular podría ser su valor tal que $c\delta \ll L$ ($L$ representa la longitud de extremo a extremo del dispositivo). Habíamos comentado que una de las cosas que inquieta en los experimetos EPRB es la *acción a distancia*, la condición anterior 'al parecer' garantizaría la ausencia de influencias entre las notificaciones de «salida» situadas en los extremos, cualesquiera conexiones ocultas existentes. Es decir, uno esperaría que la señal $a$ sólo afectaría al resultado de una de las notificaciones de «salida», y la señal $b$, al resultado de la otra. Este ejemplo es pertinente pues, como se había adelantado, un experimento del tipo EPRB es un caso especial de este planteamiento general; en este contexto, las señales $a$ y $b$ podrían ser los ángulos de la dirección de espín que se decide medir (véase la sección 3.3 para más detalles).

Con las repeticiones del experimento podría determinarse el comportamiento de la distribución de probabilidad conjunta

$$P(A, B|a, b)$$

para un resultado A en un extremo y un resultado B en el otro, dadas las señales $a$ y $b$ (a esta probabilidad también se le suele llamar *probabilidad de correlación*).

En particular, en el contexto mecanico-cuántico resulta que

$$P(A, B|a, b) \neq P_1(A|a)P_2(B|b), \tag{3.1}$$

es decir, se viola $T_L$.

Podría pensarse que las correlaciones entre A y B dadas por la expresión (3.1), se presentan porque el formalismo cuántico no es completo. Supongamos entonces que existen variables $\lambda$ que completan el formalismo y nos ayudan a dar una explicación local a las correlaciones, es decir, nos permiten el desacoplo de las probabilidades:

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P_1(A|a, \lambda)P_2(B|b, \lambda). \tag{3.2}$$

Entonces, para las predicciones cuánticas, es decir, para la probabilidad $P(A, B|a, b)$, con la introducción de estas variables, debería satisfacerse la siguiente igualdad:

$$P(A, B|a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) P(A, B|a, b, \lambda), \tag{3.3}$$

siendo $\rho(\lambda)$ la distribución de probabilidad de las variables complementarias $\lambda$ que se supone independiente de las "señales $a$" y de las "señales $b$". Es decir, no cambia cualesquiera sean los valores escogidos para $a$ o $b$ (nótese que no se habla de la naturaleza del conjunto de variables $\lambda$, por ejemplo, no se especifica si corresponden a variables aleatorias o deterministas, éstas en principio podrían ser de cualquier naturaleza).

Pero cualquier tipo de función $P(A,B|a,b)$ que satisface (3.2) y (3.3), necesariamente debe cumplir la desigualdad de Clauser-Holt-Horne-Shimony (desigualdad CHHS). Estudiemos ahora esta desigualdad para después corroborar si la predicción cuántica la satisface.

**3.2. Desigualdad CHHS.** Introduzcamos la siguiente combinación[11]:

$$E(a,b) = P(\text{sí,sí}|a,b) + P(\text{no,no}|a,b) - P(\text{sí,no}|a,b) - P(\text{no,sí}|a,b). \tag{3.4}$$

Asumiendo (3.3), la expresión anterior se reescribe como:

$$\begin{aligned} E(a,b) = &\int d\lambda\rho(\lambda)P(\text{sí,sí}|a,b,\lambda) + \int d\lambda\rho(\lambda)P(\text{no,no}|a,b,\lambda) + \\ &- \int d\lambda\rho(\lambda)P(\text{sí,no}|a,b,\lambda) - \int d\lambda\rho(\lambda)P(\text{no,sí}|a,b,\lambda), \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} E(a,b) = \int d\lambda\rho(\lambda)[&P(\text{sí,sí}|a,b,\lambda) + P(\text{no,no}|a,b,\lambda) + \\ &-P(\text{sí,no}|a,b,\lambda) - P(\text{no,sí}|a,b,\lambda)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por (3.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} P_1(\text{sí}|a,\lambda)P_2(\text{sí}|b,\lambda) &= P(\text{sí,sí}|a,b,\lambda), \\ P_1(\text{sí}|a,\lambda)P_2(\text{no}|b,\lambda) &= P(\text{sí,no}|a,b,\lambda), \\ P_1(\text{no}|a,\lambda)P_2(\text{sí}|b,\lambda) &= P(\text{no,sí}|a,b,\lambda), \\ P_1(\text{no}|a,\lambda)P_2(\text{no}|b,\lambda) &= P(\text{no,no}|a,b,\lambda). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Llamemos $S$ a la cantidad entre corchetes de la expresión (3.5), utilizando (3.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} S &= P_1(\text{sí}|a,\lambda)P_2(\text{sí}|b,\lambda) + P_1(\text{no}|a,\lambda)P_2(\text{no}|b,\lambda) + \\ &\quad -P_1(\text{sí}|a,\lambda)P_2(\text{no}|b,\lambda) - P_1(\text{no}|a,\lambda)P_2(\text{sí}|b,\lambda) \\ &= [P_1(\text{sí}|a,\lambda) - P_1(\text{no}|a,\lambda)][P_2(\text{sí}|b,\lambda) - P_2(\text{no}|b,\lambda)]. \end{aligned}$$

Por lo que estamos en posición de reescribir una vez más (3.5):

$$E(a,b) = \int d\lambda\rho(\lambda)[P_1(\text{sí}|a,\lambda) - P_1(\text{no}|a,\lambda)][P_2(\text{sí}|b,\lambda) - P_2(\text{no}|b,\lambda)] \tag{3.7}$$

[11]Véase el Apéndice 2 del artículo presentado en el capítulo **16** de [**2**]: la metodología para la obtención de la desigualdad ahí presentada es sencilla, pero por la notación y los errores tipográficos podría dificultarse la comprensión de los detalles, por eso en esta sección se intenta realizar paso a paso el procedimiento.

$$= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a,\lambda) \bar{B}(b,\lambda),$$

siendo

$$\begin{aligned} \bar{A}(a,\lambda) &= [P_1(\text{sí}|a,\lambda) - P_1(\text{no}|a,\lambda)] \text{ y} \\ \bar{B}(b,\lambda) &= [P_2(\text{sí}|b,\lambda) - P_2(\text{no}|b,\lambda)]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como

$$0 \leq P_i \leq 1$$

para $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned} |\bar{A}(a,\lambda)| &\leq 1, \\ |\bar{B}(b,\lambda)| &\leq 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Utilizando (3.9), notemos que la suma de las combinaciones $E(a,b) \pm E(a,b')$ satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(a,b) \pm E(a,b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a,\lambda) \bar{B}(b,\lambda) \pm \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a,\lambda) \bar{B}(b',\lambda) \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a,\lambda) \bar{B}(b,\lambda) \pm \bar{A}(a,\lambda) \bar{B}(b',\lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a,\lambda) [\bar{B}(b,\lambda) \pm \bar{B}(b',\lambda)] \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |\bar{A}(a,\lambda)| |\bar{B}(b,\lambda) \pm \bar{B}(b',\lambda)| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |\bar{B}(b,\lambda) \pm \bar{B}(b',\lambda)|. \end{aligned}$$

De la misma forma para las combinaciones $E(a',b) \mp E(a',b')$, es decir:

$$\begin{aligned} E(a',b) \mp E(a',b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a',\lambda) \bar{B}(b,\lambda) \mp \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a',\lambda) \bar{B}(b',\lambda) \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a',\lambda) \bar{B}(b,\lambda) \mp \bar{A}(a',\lambda) \bar{B}(b',\lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a',\lambda) [\bar{B}(b,\lambda) \mp \bar{B}(b',\lambda)] \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |\bar{A}(a',\lambda)| |\bar{B}(b,\lambda) \mp \bar{B}(b',\lambda)| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |\bar{B}(b,\lambda) \mp \bar{B}(b',\lambda)|. \end{aligned}$$

De la expresión (3.8), notamos que $\bar{B} \in [-1, 1]$. Entonces,

$$|\bar{B}(b,\lambda) \pm \bar{B}(b',\lambda)| + |\bar{B}(b,\lambda) \mp \bar{B}(b',\lambda)| \leq 2$$

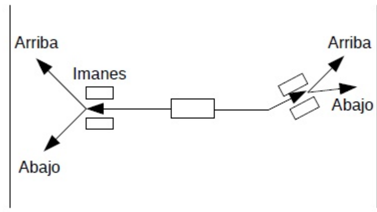


FIGURA 4. EXPERIMENTO EPRB.

y como[12]

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

resulta la llamada «desigualdad CHHS»:

$$|E(a,b) \pm E(a,b')| + |E(a',b) \mp E(a',b')| \leq 2. \tag{3.10}$$

**3.3. Desigualdad CHHS en EPRB.** Consideremos un experimento EPRB en el que desde una fuente común, dos partículas en el estado singulete se dirigen hacia pantallas detectoras ubicadas en lados opuestos, atravesando antes dos imanes distanciados 'ampliamente' uno del otro, ver Figura 4. Después de que cada partícula cruce estos imanes, su desviación puede ser hacia arriba o hacia abajo (para denotar estas desviaciones utilizaremos los símbolos $\uparrow$ y $\downarrow$ respectivamente). En particular, si la orientación de los imanes es en la misma dirección que la trayectoria de los electrones, si de un lado la partícula se desvía hacia arriba, del otro lado se desviará hacia abajo. Esto no necesariamente ocurre cuando el ángulo de orientación $a$ y $b$ de los imanes cambia, sin embargo, la probabilidad de que de un lado ocurra un resultado determinado, está relacionada con la probabilidad del resultado del lado opuesto.

La Mecánica Cuántica predice que:

$$P(\uparrow,\uparrow|a,b) = P(\downarrow,\downarrow|a,b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\frac{a-b}{2})^2, \tag{3.11}$$

$$P(\uparrow,\downarrow|a,b) = P(\downarrow,\uparrow|a,b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\frac{a-b}{2})^2.$$

Introduciendo la combinación

$$E(a,b) = (\operatorname{sen}\frac{a-b}{2})^2 - (\cos\frac{a-b}{2})^2 = -\cos(a-b), \tag{3.12}$$

resulta que se viola la desigualdad CHHS, en particular para los valores $a = 0°$, $a' = 90°$, $b = 45°$ y $b' = -45°$ se obtiene:

$$E(a,b) + E(a,b') + E(a',b) - E(a',b') = -2\sqrt{2}. \tag{3.13}$$

[12]Véase Definición 20 del Apéndice.

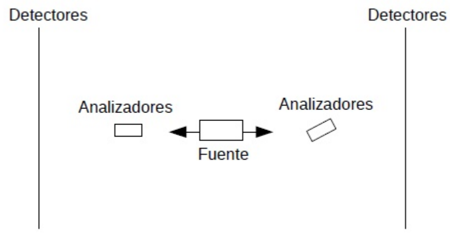


Figura 5. montaje del experimento de aspect.

Por tanto, enunciamos lo siguiente:

Teorema 1. *(De Bell). Ninguna teoría localmente causal es compatible con los resultados de la mecánica cuántica.*

**3.4. Experimentos de Aspect.** Hemos referido sólo aspectos teóricos, y aunque los resultados que se pretenden evidenciar en este trabajo son de esa índole, es conveniente al menos mencionar lo que se ha hecho en el campo experimental.

En la década de los 80's Alain Aspect[13] junto con colaboradores del Instituto de Óptica Teórica y Aplicada de la Universidad de París-Sur en Orsay, mediante las medidas de la polarización de fotones evidenciaron que no se satisfacía la desigualdad de Bell. A grandes rasgos, en el experimento se tiene una fuente que emite una pareja de fotones en direcciones opuestas. En cada una de las direcciones hay un detector, la separación entre ambos es tipo espacio. A su vez, existen analizadores de polarización entre la fuente y los detectores, también la separación entre los analizadores es de tipo espacio. El experimento se hace con orientaciones distintas de los analizadores. Los fotones deben ser emitidos de tal manera que se encuentren en un estado entrelazado de polarización. Puede establecerse una analogía de este experimento con el presentado en la sección anterior. La figura 5 muestra el montaje experimental.

A pesar de que se exhibe la violación de la desigualdad de Bell, los defensores de la localidad muchas veces se valen de las deficiencias experimentales para argumentar que los resultados no pueden dar una conclusión definitiva. En la literatura, a este tipo de argumentos se les conoce como *loopholes*, que traducido es «escapatoria». Un ejemplo de *escapatoria* es el caso de la eficiencia de los detectores, pues sólo una pequeña fracción de los pares emitidos es detectada. Al respecto de esto Bell opina[14]:

> "Es verdad que los experimentos prácticos se encuentran lejos de lo ideal debido a ineficiencias de los contadores o de los analizadores, o a imperfecciones geométricas, etc. Es sólo con suposiciones

[13] Para más detalles de los experimentos que se han realizado para corroborar la violación de las desigualdades de Bell, además de los que se llevaron a cabo por Aspect y sus colaboradores, véase [**1**].

[14] Consúltese la cita en la página 15 de [**2**].

añadidas, o mediante tratamiento convencional de dichas ineficiencias y extrapolación de lo real a lo ideal, como se puede decir que se viola la desigualdad. Aunque aquí hay una vía de escape, me resulta difícil de creer que la mecánica cuántica funcione tan bien para montajes ineficientes y, no obstante, vaya a fallar malamente cuando se llevan a cabo los refinamientos suficientes.”

# Parte 3

# Relatividad Especial y No Localidad Cuántica

Capítulo 5

# Teoría Cuántica Invariante de Lorentz

## 1. Colapso Objetivo: GRW

A pesar del resultado presentado al final del capítulo anterior y de la aparente contradicción con la Relatividad Especial, Bell se plantea la posibilidad de construir una teoría cuántica invariante de Lorentz que manifieste incluso la invariancia en los colapsos de la función de onda. Analiza un modelo que hoy es clasificado dentro de un grupo de teorías llamadas "Colapso Objetivo"[1], propuesto por G.C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber (en adelante, para referirnos a esta teoría, se utilizará la abreviación de sus apellidos, es decir, GRW). En la teoría cuántica de campos, el análogo de la ecuación de Schrödinger es invariante relativista, ¿pero por qué con esta teoría no se evidencia por completo la compatibilidad entre la relatividad y la mecánica cuántica? La cuestión radica en que no se resuelve el problema de la no invariancia de los colapsos de la función de onda frente a transformaciones de Lorentz. Con la propuesta GRW se puede analizar esta situación, además, resuelve el problema de la medición.

Este modelo considera que la evolución del estado de un sistema no siempre está descrita por la ecuación de Schrödinger (*Principio 3*), sino que de forma aleatoria y espontánea, el sistema colapsa. Bajo la formulación estándar, como el *Principio 5* lo expresa, el colapso se manifiesta tras la medición (sea lo que esto signifique), pero en el contexto GRW es un hecho de la naturaleza que ocurre de manera espontánea y nada tiene que ver con procesos de medida. Por esto, la evolución de un sistema ahora se rige por una sola dinámica.

Las preguntas imprescindibles son las siguientes: ¿qué hechos de la naturaleza podrían propiciar un colapso? y ¿qué modificación tendría la ecuación de Schrödinger? Primero es necesario señalar que la propuesta se construye a partir de la observación de que a nivel macroscópico no se manifiestan las superposiciones y además, que los objetos físicos tienen posiciones definidas. Por eso, cuando ocurren los colapsos, se debe hacer uso de una *base* que garantice lo anterior. Como el colapso es no lineal, la modificación de la ecuación de Schrödinger deberá también ser no lineal, y además se deberá agregar un elemento estocástico (por la característica aleatoria y espontánea del fenómeno), siendo éste el elemento que termina por suprimir la dependencia al 'proceso de medición' que se tenía en la formulación estándar.

En resumen, en esta formulación no está presente el problema de la medición, y también renuncia al determinismo y la linealidad. Sin embargo, con todo lo mencionado, aún no se ha especificado con detalle la primer pregunta. Para responderla, se

[1] Para consultar el modelo, véase el artículo original [**15**], o bien, consúltese [**14**].

estudiará el modelo teórico propuesto por GRW, también llamado QMSL (Quantum Mechanics with Spontaneous Localizations). Aquí se usará la abreviación y el nombre en español[2].

**1.1. Mecánica Cuántica con localización espontánea (MCLE).** La suposición clave en MCLE es que «cada constituyente elemental de cualquier sistema físico, en tiempos aleatorios, 'sufre' procesos de localización aleatoria y espontánea (que aquí serán llamados también *saltos*) alrededor de posiciones apropiadas».

Consideremos un sistema de N partículas distinguibles y sea

$$\psi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_N) \tag{1.1}$$

la función de onda que evoluciona normalmente según la ecuación de Schrödinger.

Cuando una de las partículas colapsa en el punto $\mathbf{x}$, por ejemplo, la partícula $i$-ésima, la función de onda cambia, da un salto, que matemáticamente se expresa como[3]:

$$\psi \to \psi' = \frac{j(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)\psi(t, ...)}{R_i(\mathbf{x})}, \tag{1.2}$$

siendo $j$ un factor normalizado y $R$ un factor que normaliza a $\psi'$:

$$|R_i(\mathbf{x})|^2 = \int d^3\mathbf{r}_1 ... d^3\mathbf{r}_N |j\psi|^2, \tag{1.3}$$

$$\int d^3\mathbf{x} |j(\mathbf{x})|^2 = 1, \tag{1.4}$$

definiendo a $j$, el factor de salto, como

$$j(\mathbf{x}) = Ke^{(-\mathbf{x}^2/2a^2)}, \tag{1.5}$$

en la que $a$ es una nueva constante de la naturaleza. La probabilidad por unidad de tiempo de un salto en esta propuesta es

$$\frac{N}{\tau}, \tag{1.6}$$

siendo $N$ el número de argumentos $\mathbf{r}$ en la función de onda y $f = \tau^{-1}$ otra nueva constante de la naturaleza, llamada frecuencia media de localización. El centro del colapso $\mathbf{x}$ se escoge al azar con una distribución de probabilidad

$$d^3\mathbf{x} |R_i(\mathbf{x})|^2. \tag{1.7}$$

[2]El desarrollo del capítulo 5 es basado en [**14**] (sección **5**) y de [**2**] (capítulo **22**), al igual que de [**32**].

[3]Tanto en la ecuación (1.1) como en la (1.2), la función de onda puede suponerse portadora de índices de espín suprimidos.

*1.1.1.* ***Determinación de las nuevas constantes de la naturaleza e implicaciones.*** En términos generales, los nuevos parámetros $f$ y $a$ deben recuperar, para tiempos muy largos, (1) las predicciones cuánticas para objetos microscópicos y (2) la coincidencia entre la dinámica de objetos macroscópicos y su prediccion clásica; además de considerar que la interacción entre un sistema microscópico y un aparato de medición origine un colapso.

En particular, en el caso del parámetro $f$, éste debe ser escogido de tal manera que sea lo suficientemente pequeño para que se recuperen las predicciones cuánticas microscópicas, pero lo suficientemente grande para evitar las superposiciones macroscópicas. Y en el caso del parámetro $a$, éste debe ser grande con respecto al tamaño de los átomos, pero lo suficientemente chico para evitar que los objetos macroscópicos tengan posiciones dispersas.

Para las nuevas constantes de la naturaleza[4], GRW propone que los órdenes de magnitud deben ser:

$$f \approx 10^{-15} s^{-1}, \tag{1.8}$$

$$a \approx 10^{-5} cm. \tag{1.9}$$

Con esto podemos ver que el tiempo medio para que el colapso ocurra en una partícula es de un orden de magnitud de

$$10^{15} s = 10^{8} años, \tag{1.10}$$

pero, si tenemos un sistema de $10^{25}$ partículas, el tiempo medio previo a un salto es del orden de

$$\frac{10^{15}}{10^{25}} = 10^{-10} s. \tag{1.11}$$

Si bien el colapso es fortuito, que un sistema colapse depende también de la cantidad de partículas que lo componen: puede ignorarse este fenómeno para sistemas compuestos de pocas partículas[5].

Por ejemplo, sea

$$\phi(\mathbf{s}_1 ... \mathbf{s}_M)\psi(\mathbf{r}_1 ... \mathbf{r}_N) \tag{1.12}$$

la función de onda en el que el primer factor representa a un sistema pequeño (como un átomo o una molécula) que se encuentra temporalmente aislado del resto del mundo o de algún sistema macroscópico, representado por el segundo factor (M es un número pequeño mientras que N es un número muy grande). El primer factor colapsará en un tiempo medio dado por (1.10) y el segundo factor colapsará en un

[4]Para consultar el argumento presentado de esta sección, véase [**2**] (capítulo **22**), fuente ya citada al inicio del capítulo.

[5]Se ha utilizado el termino partícula en analogía a la formulación estándar, pero no es necesario. Que un sistema sea “grande” o “pequeño” depende del número de argumentos N de la función de onda, pudiendo N no referir a partículas.

tiempo medio dado por (1.11).

El proceso GRW en una medida cuántica, se describe de la siguiente manera. Considérese la función de onda

$$\phi_1(\mathbf{s}_1...\mathbf{s}_M)\psi_1(\mathbf{r}_1...\mathbf{r}_N) + \phi_2(\mathbf{s}_1...\mathbf{s}_M)\psi_2(\mathbf{r}_1...\mathbf{r}_N), \tag{1.13}$$

que representa la interacción entre el sistema pequeño y el sistema grande. Si una propiedad se 'mide'[6] sobre el sistema 'pequeño' que interactuó con un instrumento 'grande', el sistema se proyecta al estado $\psi_1$ o $\psi_2$. En el contexto GRW, para una gran cantidad de valores para $\mathbf{r}$, la multiplicación de la función de onda por $j(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{r})$ reduce a cero alguno de los términos de la expresión (1.13), y la probabilidad de que sobreviva uno u otro término es proporcional, acorde a la teoría cuántica estándar, a la fracción de la norma total que lo representa.

Bajo este argumento, el gato de Schrödinger está «vivo y muerto» por una fracción diminuta de un segundo, es decir, los estados de superposición en un sistema existen, pero debido a su mínima duración, son imperceptibles. En la propuesta GRW, el colapso es un proceso de la naturaleza, a diferencia de la teoría cuántica estándar en la que es una operación realizada por el teórico en algún instante conveniente, como recalca Bell[7].

### 1.2. Existenciables y MCLE.

Bell también comenta lo siguiente[8]:

> "No existe nada en esta teoría salvo la función de onda. Es en ésta donde debemos encontrar una imagen del mundo físico y, en particular, de la disposición de las cosas en el espacio tridimensional ordinario. Pero la función de onda reside en un espacio mucho mayor, de 3N dimensiones."

Retomando la discusión sobre el realismo presentada en la sección 5 del capítulo 3, en la cita se asume una *ontología primitiva* en el sentido de que es en el espacio de tres dimensiones en donde se encuentra la ontología de la teoría, y no en la función de onda por sí misma. Por esto, Bell postula a los «saltos GRW» como los «existenciables locales» de la teoría, que son parte de la función de onda y están localizados en el espacio ordinario, cada uno centrado en un punto $(\mathbf{x},t)$.

## 2. Invariancia de Lorentz bajo traslaciones temporales relativas

La propuesta MCLE presentada es una teoría no relativista y no se puede discutir la invariancia de Lorentz en su totalidad. El proyecto es construir una versión que sí lo sea, pero antes de pretender emprenderlo, Bell se cuestiona si al menos el modelo no relativista estudiado satisface la invariancia de Lorentz en el límite cuando la velocidad $v$ de un sistema de referencia respecto a otro es no relativista, es decir, cuando $v \ll c$, además de suponer que estos sistemas están ampliamente separados uno del otro. Si no se satisface la invariancia de Lorentz en este límite, hay menos razones para pensar en que se podría llegar al objetivo. Analicemos con

[6] En este párrafo se utiliza el entrecomillado para recalcar la aparente ambigüedad de las palabras.

[7] Véase página 278 de [**2**].

[8] Véase el comienzo de la sección 3 del capítulo 22 de [**2**].

detenimiento esta cuestión.

Consideremos un sistema a una distancia $d$ grande del origen (sólo se utilizará una coordenada espacial $x$ y la coordenada temporal $t$). Para este sistema introduciremos un nuevo origen dado por la siguiente transformación:

$$x \to x + d. \tag{2.1}$$

Utilizando las transformaciones de Lorentz representadas por la ecuación (3.6) del capítulo 1 se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \gamma(t - v(x+d)), \\ \tilde{x} &= -d + \gamma(x + d - vt). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Considerando a $d$ muy grande y a $v$ muy pequeña de tal manera que

$$vd = k, \tag{2.3}$$

la expresión (2.2) se aproxima a:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t - k, \\ \tilde{x} &= x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Analizando la expresión anterior, puede observarse que en este límite la invariancia de Lorentz se manifiesta como una invariancia respecto a traslaciones temporales para un sistema, y para dos sistemas desplazados del origen en direcciones opuestas (es decir, distintos signos para $k$), se manifiesta como una invariancia respecto a traslaciones en el tiempo relativo.

Ahora veamos si lo anterior ocurre en la propuesta MCLE. Utilicemos *el formalismo del tiempo múltiple*[9] para dos sistemas que no interactúan. En este caso el hamiltoniano es:

$$H = H_1 + H_2, \tag{2.5}$$

siendo $H_i$ el Hamiltoniano que representa al sistema $i$ para $i = 1, 2$.

Tomando la función de onda ordinaria, que en este contexto es llamada *función de onda monotemporal*, definimos la *función de onda bitemporal* como[10]:

$$\psi(t', t'', ...) = e^{-i(t'-t)H_1/\hbar} e^{-i(t''-t)H_2/\hbar} \psi(t, ...). \tag{2.6}$$

[9]Este formalismo ha sido utilizado en la llamada *teoría cuántica relativista para N partículas*; se utilizan tiempos independientes para partículas diferentes o para puntos distintos del espacio.

[10]Por simplicidad y para los fines de esta tesis, que es sólo evidenciar cómo el modelo MCLE satisface la invariancia de Lorentz en el límite descrito, se está considerando que el Hamiltoniano para cada una de las partículas no depende del tiempo ($H_1$ y $H_2$ conmutan). Sin embargo, puede manifestarse también la invariancia referida en el caso en el que sí dependan. Se sugiere consultar el *Apéndice* del capítulo **22** de [**2**] en donde se toma a consideración lo anterior.

Puede verse que la función de onda bitemporal satisface las siguientes ecuaciones de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi(t',t'',...) = H_1\psi(t',t'',...), \tag{2.7}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t''}\psi(t',t'',...) = H_2\psi(t',t'',...), \tag{2.8}$$

Como estas ecuaciones son invariantes frente a desplazamientos independientes de los orígenes de las dos variables temporales, decimos entonces que se satisface la invariancia temporal relativa[11]. Más aún, ésta también se satisface con la introducción de los saltos GRW. A continuación, esbozaremos la prueba[12].

Con la función de onda monotemporal para un tiempo $t_1$, se construye una función de onda bitemporal que implícito considera los saltos para el sistema 1 entre un tiempo $t_1$ y $t_2$ y para el sistema 2 entre un tiempo $t_1$ y $t'_2$. En términos de esta función, se encuentra una función de probabilidad para los saltos subsecuentes, previos a los instantes $t_1^*$ y $t_2^*$ para el sistema 1 y 2 respectivamente. Al no haber dependencia en $t'$ o en $t''$ más que la que tiene la función de onda bitemporal $\psi$, queda demostrado que se manifiesta la invariancia temporal relativa.

Lo anterior es un buen indicio para pretender comenzar el proyecto de una versión de la teoría cuántica relativista, y como Bell expresa[13]:

> "...me siento particularmente impresionado por el hecho de que el modelo [MCLE] es tan invariante de Lorentz como podría ser en la versión relativista. Esto aleja el fundamento de mi temor de que cualquier formulación exacta de la mecánica cuántica debe estar en conflicto con la invariancia de Lorentz fundamental."

---

[11] Las ecuaciones, independiente de los orígenes de las variables temporales, son invariantes frente a lo desplazamientos.

[12] Bajo el argumento de la nota 10, sólo se presenta el bosquejo de este resultado, para el detalle del cálculo explícito, consúltese nuevamente el *Apéndice* referido en la misma nota.

[13] Cita tomada de la página 284 de [**2**]. La expresión entre corchetes en la cita proporcionada no es parte del texto original, se introduce para contextualizar.

Capítulo 6

# ¿Incompatibilidad?

Como se ha venido mencionando, se suele decir que la teoría de la Relatividad Especial prohibe que se pueda viajar más rápido que la luz, no obstante, en experimentos EPRB visualizamos la *fantasmal* acción a distancia. ¿Podemos decir entonces que las predicciones cuánticas están en contra de las predicciones de la relatividad especial o manifiestan alguna incompatibilidad conceptual? Se presentaron sugerencias para intentar construir una teoría cuántica invariante de Lorentz que incluyan los colapsos de la función de onda (como se estudió en la sección anterior), pero, ¿tiene sentido continuar trabajando en esta dirección ante la aparente discrepancia?

Es necesario analizar con cuidado qué es lo que realmente la Relatividad Especial prohibe o restringe. Discutiremos si estas prohibiciones o restricciones están relacionadas con: (i) la transmisión superlumínica de materia o energía, (ii) la transmisión de señales superlumínicas o con (iii) la causación superlumínica[1]. Aclarando esto, estaremos en posición de decir si realmente la teoría relativista es incompatible con la teoría cuántica.

No se suele hacer distinción entre los puntos recién mencionados y de hecho, no son equivalentes. Por ejemplo, una señal podría enviarse sin transmisión de materia o energía, o un proceso causal incontrolable no podría usarse para enviar una señal. Es necesario estudiar cada una de estas situaciones con detalle, y también es importante preguntarse qué relación existe entre la invarianica de Lorentz y estos puntos. Abordaremos el estudio en las secciones subsecuentes.

## 1. Transmisión superlimínica de materia o energía

El *Postulado 2* manifiesta la única propiedad fundamental que le demandamos a la luz con referencia a su velocidad para construir la teoría de la Relatividad Especial. Esta propiedad fundamental es un hecho de la naturaleza y es lo que denominamos «*la constancia*». Decir que la Relatividad Especial prohibe que nada puede viajar más rápido que la luz, en sentido riguroso, es incorrecto. Lo que sí se puede decir, como se había discutido en la sección 4.2 del capítulo 1, es que la trayectoria de un objeto con masa $m$ no puede salir de su cono de luz[2] porque se necesitaría energía infinita, y esto fue expresado en el Postulado 3. O sea, un cuerpo masivo viajando a una velocidad $v < c$ nunca podrá superar o igualar la velocidad de la luz. La mecánica cuántica no está en contradicción con este hecho. La evolución temporal de un sistema está regida por el Hamiltoniano, que a su

[1]Esta sección es basada en la discusión que se tiene en la referencia [**24**]. Para un estudio más profundo se sugiere efectuar la consulta.

[2]Se está aplicando el término superlumínico cuando 'algo' tenga una velocidad mayor que la de la luz.

vez, está relacionado con la energía del sistema. Por ejemplo, en el experimento de Aspect, después de la separación de los fotones entrelazados (cada fotón representa un subsistema), el Hamiltoniano de interacción decae a cero. Esto implica que algún cambio en el Hamiltoniano de uno de los subsistemas no podrá alterar la energía del otro subsistema. En consecuencia, si las partículas tienen energía definida después de separarse (es decir, están en estados propios de sus respectivos Hamiltonianos), nada hecho en alguna de las partículas, alterará la energía de la otra. Por esto es que se dice que en experimentos tipo EPRB, a pesar de la acción a distancia, no hay transferencia de masa ni de energía.

## 2. Transmisión de señales superlumínicas

Otra aseveración frecuente es que la Relatividad Especial prohibe la transmisión de señales superlumínicas. Sin embargo, la teoría no define lo que es una señal.

De alguna forma, el concepto de *señal* está asociado a un ser humano (o a un ser pensante). Éste es quien la crea para que llegue a un objetivo determinado. Aquí no se pretende dar una definición, no obstante, una señal al menos debe tener un aspecto controlable de parte del emisor que esté correlacionado con un aspecto observable de parte del receptor.

Retomando el experimento EPRB, si bien es cierto que el resultado de la proyección del momento angular (en una dirección particular) de la partícula 2 queda determinado al medir la proyección del momento angular (en la dirección escogida) en la partícula 1, no se tiene un control sobre el valor obtenido en la partícula 1. Propiamente, una señal no puede ser transmitida mediante el entrelazamiento cuántico, considerando, como se dijo en un principio, que las señales deben tener un aspecto controlable.

Es conveniente en este punto hacer una distinción entre la no localidad y la imposibilidad para enviar señales. Por eso, para clarificar con mayor exactitud a qué nos referimos con tal imposibilidad, introduciremos lo que se denominará «no señalización (NS)»:

*No señalización (NS). Si las regiones A y B tienen separación tipo espacio, entonces es imposible transmitir un mensaje, libremente escogido por un agente en A, a otro agente en B.*

Para reafirmar la idea de que no podemos explotar la no localidad cuántica para enviar señales superlumínicas (es decir, violar NS) tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Para todo estado de un sistema cuántico $S$ que consta de dos subsistemas $s_1$ y $s_2$, y para todo par de observables $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ (correspondientes al subsistema $s_1$ y $s_2$ respectivamente), la probabilidad de los diferentes resultados de mediciones de $\boldsymbol{A}$, no depende de si se efectuó antes alguna medición en $\boldsymbol{B}$.*

El teorema implica que no podemos transmitir una señal libremente del subsistema $s_1$ al subsistema $s_2$ porque se carece del aspecto controlable de parte del emisor pues la probabilidad del resultado de la medición en $\boldsymbol{B}$ no depende de si se efectuó alguna medición en $\boldsymbol{A}$.

En consecuencia, aun si la Relatividad Especial demandara prohibir la transmisión de señales superlumínicas, no hay una discrepancia con la no localidad de la Mecánica Cuántica, pues la violación de las desigualdades de Bell no implica el envío de señales.

## 3. Causalidad

A lo largo de los temas desarrollados se han hecho uso de términos como *conexión causal* y *causalidad local*; en la literatura frecuentemente son encontrados y convendría preguntarse la raíz del significado de *causalidad*[3] y sus implicaciones. Este concepto[4] suele asociarse a (i) una *categoría*[5] nombrada también *causación*, que corresponde a un vínculo causal (es decir, un vínculo general entre una causa y un efecto); (ii) a un *principio*, llamado *ley general de la causación*, *principio causal* o *principio de causalidad*; (iii) y a una *doctrina*, conocida como *determinismo causal* o *causalismo*, que afirma la validez universal del principio anterior. Enfoquémonos en (ii) e intentemos hacer una discusión somera sobre la construcción del *principio de causalidad.*

Considérese a $C$ y $E$ como características de objetos concretos que difieren entre sí en al menos un aspecto y que pertenecen a *clases*[6] definidas (a $C$ se le llama *causa* y a $E$, efecto). Podemos introducir un *Principio de Causalidad* de la siguiente manera:

Principio 6. *(De Causalidad) Si C, E.*

La «temporalidad» queda excluida del enunciado anterior y el término «si» sólo representa el concepto de *condicionalidad.* Es decir, que $E$ resulte por las condiciones de $C$, no implica que $C$ lo preceda en tiempo, sólo que la causa debe estar presente para que se produzca el efecto, algo bien podría ser *instantáneo* y no violar el principio.

Esta es una formulación muy general, de hecho, existen varias y continuos debates entre los filósofos, sin embargo, presentado así, podemos distinguir otro principio más:

Principio 7. *(De acción retardada). Existe una demora temporal entre la causa y el efecto, siendo la causa primero (C y E no pueden estar distantes en el espacio y ser simultáneos).*

En ocasiones, el *principio de causalidad* y el *principio de acción retardada* suelen considerárseles como uno mismo, pero pueden enunciarse de manera que no lo sean. Más adelante retomaremos el *principio de acción retardada.*

---

[3]Los elementos para construir este concepto son tomados de [**7**].

[4]Como se señala en [**7**].

[5]El término de categoría utilizado corresponde al lenguaje filosófico, a grandes rasgos, un término abstracto y fundamental que refleja, por ejemplo, alguna propiedad de la realidad o del conocimiento, véase [**11**], páginas 61-62.

[6]Entiéndase por *clase* a un conjunto finito o infinito, tomado como un todo, de objetos que se caracterizan por un rasgo determinado (véase [**11**] página 67).

**3.1. Causación Superlumínica.** Maudlin T.[7] diserta al respecto del término *causación* pero lo contextualiza en la teoría cuántica. De hecho, se pregunta si las desigualdades de Bell[8] implican algún tipo de conexión causal en experimentos del tipo EPRB. Propone utilizar una noción más débil de causación y sugiere una *condición suficiente* para determinar si entre un evento y otro existe una conexión causal superlumínica:

CONDICIÓN 2. *(De suficiencia). Dados dos eventos con separación tipo-espacio A y B, si A no hubiera ocurrido si B no hubiera ocurrido, a pesar de que todo en el cono pasado de luz de A no cambie, entonces debe haber* ***influencias causales superlumínicas****.*

Cuando nos referimos a que el cono pasado de luz de A no cambia quiere decir que se mantienen todas las influencias causales que se podrían tener con la descripción de una teoría localmente causal.

En experimentos del tipo EPRB, un evento puede ser la dirección de la desviación de los electrones, y hay una correlación entre las direcciones de desviación de éstos. Lo que ocurre es que un electrón no se hubiera desviado hacia una dirección determinada, por ejemplo desviado hacia abajo (llamémosle evento A), si el otro electrón no se hubiera desviado también en alguna dirección determinada, por ejemplo desviado hacia arriba[9] (llamémosle evento B). Como las causas comunes de los eventos A y B no están en el traslape de sus conos de luz pasados (por la separación tipo espacio) y además el cono pasado de luz de A no cambia, la Condición 2 se satisface y podemos decir que las desigualdades de Bell sí implican causación superlumínica.

**3.2. Observaciones finales.** Si la Relatividad Especial demandara el principio de acción retardada, habría una aparente discrepancia con la Mecánica Cuántica pues ésta tiene un marco de referencia inercial privilegiado. En el ejemplo de la sección anterior, si identificamos al evento B como la causa y al evento A como el efecto, tanto la causa como el efecto quedan definidos en el mismo momento. En la teoría relativista podríamos construir marcos de referencia en los que los eventos A y B ocurrieran en tiempos distintos. Es decir, donde el evento B llamado causa ocurriera primero que el evento A llamado efecto, e incluso, donde se invirtiera el orden temporal entre causa y efecto, o sea, donde el efecto fuera antes que la causa (evento A antes que el evento B).

No obstante, lo único que demanda la teoría relativista es la invariancia de Lorentz referida en los Postulados 1 y 2. Por tanto, con los puntos abordados en esta sección, no hay contradicción entre la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial. Por lo que para intentar unir ambas teorías, construir una teoría cuántica invariante de Lorentz que incluyan los colapsos es una buena alternativa (es compatible con las

[7] Véase [**24**], Capítulo 5.

[8] Para demostrar lo que se denominó *Teorema de Bell*, se utilizó la desigualdad CHHS. Bell hace uso de ésta en el capítulo 16 de [**2**], pero cuando él comenzó a analizar la problemática de la no localidad cuántica introdujo otra desigualdad menos general (véase también el capítulo 2 de la referencia comentada). Cuando nos referimos a la desigualdad de Bell, estamos hablando de la desigualdad de CHHS utilizada para demostrar el teorema de Bell.

[9] Como se vio en la sección 3.3 del capítulo 4, las desviaciones pueden ser en la misma dirección.

implicaciones de las secciones 1 y 2 y con la causación superlumínica), aunque es un problema no trivial. Lo que sí es importante resaltar es nuestra problemática con la concepción de «causa» y «efecto». Es necesario quedarse con un concepto más débil y no tan restrictivo como el generado con el principio de acción retardada. Es decir, quedarnos simplemente con enunciaciones como la de Maudlin que sólo resaltan la existencia de un 'vínculo causal' pero que nada dicen sobre la condición temporal entre causa y efecto. Hay que recalcar que la *causación superlumínica* cuántica va acompañada de los hechos discutidos en las secciones precedentes. Es decir, cuando se produce, no hay transferencia de materia y energía y no son útiles para el envío de señales, por lo que si se quiere construir alguna paradoja que ocurra en el mundo físico, hay que considerar estos hechos.

# Conclusión

Del teorema de Bell sabemos que la Mecánica Cuántica no es una teoría localmente causal, y no puede construírsele de tal forma que lo sea. La violación de las desigualdades de Bell no implican transmisión superlumínica de materia o energía ni transmisión de señales superlumínicas, pero sí causación superlumínica. A pesar de esto, no hay contradicción con la teoría de la Relatividad Especial, pues ésta sólo demanda la invariancia de la velocidad de la luz y de las leyes de la física ante transformaciones de Lorentz.

En vista de lo anterior, es factible plantearse la pregunta acerca de la posibilidad de contruir una formulación cuántica invariante de Lorentz que incluya la invariancia en los colapsos de la función de onda. Bell sugiere un camino basado en la propuesta GRW. Una de las ventajas de este modelo es que resuelve el problema de la medición, siendo los existenciables propuestos los «saltos GRW». Existen trabajos en esta dirección como el de Tumulka R.[10], que propone una versión relativista del modelo GRW precisamente basado en las nociones de Bell que se introducen en este trabajo. Tanto en el estudio que realiza Bell como en la propuesta de Tumulka, se conserva el problema de suponer que los sistemas no interactúan y lo que interesaría sería desarrollar una teoría libre de esta restricción.

[10] Consúltese [**37**].

Apéndice A

# Elementos de Probabilidad

Se introducirán los elementos de la teoría de probabilidad utilizados a lo largo del trabajo[1] que no fueron mencionados en las notas al pie o definidos en los capítulos.

Para nuestros fines (pues existen más definiciones), la probabilidad de que ocurra un evento A es un número real que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$. Se denota por $P(A)$; representa una medida de la frecuencia con la que se observa la ocurrencia de este evento cuando se efectúa un experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio es aquel que cuando se le repite bajo las mismas condiciones, el resultado que se observa no siempre es el mismo y tampoco es predecible. El *espacio muestral* de un experimento aleatorio, es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento (suele denotársele como $\Omega$, y como $\omega$ a un resultado particular del experimento).

**Axiomas de la Probabilidad (de Kolmogorov)**

**1.** $P(A) \geq 0$.

**2.** $P(\Omega) = 1$.

**3.** $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \Sigma_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

DEFINICIÓN 10. *A cualquier función P definida sobre una colección de eventos que satisfaga los tres axiomas de Kolmogorov, se le llama medida de la probabilidad o simplemente probabilidad.*

DEFINICIÓN 11. *Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio muestral $\Omega$ es una $\sigma$-álgebra si cumple las tres condiciones siguientes:*
*(i)* $\Omega \in \mathcal{F}$,
*(ii) Si* $A \in \mathcal{F}$ *entonces su complemento también, es decir,* $A^c \in \mathcal{F}$,
*(iii) Si* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

DEFINICIÓN 12. *Un espacio de probabilidad es una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *donde* $\Omega$ *es un conjunto arbitrario (usualmente el espacio muestral),* $\mathcal{F}$ *es una* $\sigma$*-álgebra de subconjuntos de* $\Omega$ *y* $P$ *es una medida de probabilidad definida sobre* $\mathcal{F}$.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de $\Omega$, la ***intersección*** se define como

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}.$$

[1]La teoría es tomada de [**35**].

Definición 13. *Sean A y B dos eventos. La probabilidad condicional del evento A dado el evento B se denota por el símbolo $P(A|B)$ (también leída como la probabilidad de A dado B) y se define como el cociente*

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Definición 14. *A la probabilidad $P(A \cap B)$ se le llama probabilidad conjunta. La denotatemos como $P(A, B)$ cambiando el símbolo de la intersección por una coma. De la definición anterior, y con la nueva notación, tenemos que:*

$$P(A, B) = P(B)P(A|B). \tag{0.1}$$

**Variables aleatorias**

Considérese un experimento aleatorio con un espacio de probabilidad asociado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definición 15. *Una variable aleatoria es una transformacion X del espacio de resultados $\Omega$ al conjunto de números reales, esto es,*

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

*tal que para cualquier número real x,*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

***Caso Discreto***

Definición 16. *Sea X una variable aleatoria discreta con valores $x_0$, $x_1$, ... La **función de probabilidad** de X, denotada por $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define como:*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x = x_0, x_1, ... \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{0.2}$$

Es decir, la función de probabilidad es aquella función que indica la probabilidad en los distintos valores que toma la variable aleatoria. Considerando lo anterior, para el caso de variables aleatorias discretas, la probabilidad de un evento se reduce a la suma. Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x),$$

realizándose la suma sobre los valores en los que $x$ pertenecen al conjunto $A$, siendo $f(x)$ estrictamente positiva.

La función de probabilidad satisface las siguientes propiedades:

***(i)*** $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$,

***(ii)*** $\sum_x f(x) = 1$.

De manera recíproca, podemos definir una *función de probabilidad*:

Definición 17. *A toda función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea cero, salvo en ciertos puntos $x_0$, $x_1$,... en donde la función toma valores positivos, si cumple las dos propiedades anteriores, se le llama **función de probabilidad**, aunque no haya de por medio una variable aleatoria que la defina.*

***Caso Continuo***

DEFINICIÓN 18. *Sea $X$ una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la* ***función de densidad***[2] *de $X$ si para cualquier intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad*

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Esto quiere decir que la probabilidad de que la variable tome un valor dentro del intervalo $[a, b]$ se expresa como el área bajo la curva de la función $f(x)$ en ese intervalo. Análogo al caso discreto se satisfacen las siguientes propiedades:

***(i)*** $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$,

***(ii)*** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

De manera recíproca, podemos definir la *función de densidad* de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 19. *A toda función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga las dos propiedades anteriores, se le llama* ***función de densidad****, aunque no haya de por medio una variable aleatoria que la defina.*

[2]También llamada «*función de densidad de probabilidad*» o simplemente «*densidad de probabilidad*».

# Bibliografía


[1] Abal G., *Paradoja EPR y desigualdades de Bell: pruebas experimentales, estado actual del conocimiento*, Instituto de Física - Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, febrero 2007.

[2] Bell J., *Lo decible y lo indecible en mecánica cuántica (Recopilación de artículos sobre filosofía cuántica)*, Alianza Editorial, S. A., Madrid 1990 , Capítulos **5** (74-49), **7** (89-103), **16** (197-220).

[3] Bohm D., *Quantum Mechanics*, Dover Publications, inc. New York, 1989.

[4] Bohr N. (et. al), *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Physical Review, Volume **48**, 1935.

[5] Born M., *The Born-Einstein Letters*, M. Born Editor, página 168, 176.

[6] Bracho J., *Introducción Analítica a las Geometrías*, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, agosto 2005.

[7] Bunge M., *Causalidad. El Principio de Causalidad en la Ciencia Moderna*, Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA), 3a. Edición, 1972.

[8] Cassini A., *Realismo epistemológico, referencia y verosimilitud*, Crítica (Revista Hispanoamericana de Filosofía), Vol. XXIV **71**, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México, México 1992.

[9] Clapp M., *Análisis Matemático*, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, enero 2013.

[10] De la Peña L., *Introducción a la Mecánica Cuántica*, FCE Ediciones Científicas-Texto Científico Universitario, 3a. Edición, México, 2006.

[11] *Diccionario Soviético de Filosofía*, Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo 1965. Fecha de Consulta 19 de febrero de 2016, disponible en *http://www.filosofia.org/enc/ros/cate.htm*.

[12] Einstein A. (et. al), *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Physical Review, Description of Physical Reality, Volume **47**, 1935.

[13] French A., *Relatividad Especial*, Physics Course, Massachusetts Institute of Technology, Editorial Reverté S.A, España, junio de 2002.

[14] Ghirardi G., *Collapse Theories*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Fecha de Consulta 8 de febrero de 2016, disponible en *http://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/qm-collapse/*.

[15] Ghirardi G., (et.al). *Unified Dynamics for Microscopic and Macroscopic Systems*, Physical review D: Particles and fields, August 1986.

[16] Guzmán J., *Informe Final de Actividades de la prestación de Servicio Social en el Instituto de Investigaciones Filosóficas*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Cd. Universitaria, D.F., 9 de junio de 2016.

[17] Hacyan S., *Relatividad para estudiantes de física*, FCE Ediciones Científicas Universitarias, 2a. Edición, México, 2013.

[18] Janssen B., *Teoría de la Relatividad General*, Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, Granada España, septiembre 2013.

[19] Lluis E., *Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica*, Universidad Nacional Autónoma de México, Sociedad Matemática Mexicana, 2a. Edición, 2008.

[20] Lang S., *Álgebra Lineal*, Fondo Educativo Interamericano, S.A, versión en español de la segunda edición de la obra inglesa *Linear Algebra* (1971), impreso en E.U.A, 1974.

[21] Martínez S., *El Azar de la Mecánica Cuántica: de Bohr a Bell*, Crítica (Revista Hispanoamericana de Filosofía), Vol. XXIII **69**, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México, México 1991.

[22] Mas J., *Física Matemática*, Universidad de Santiago de Compostela, febrero, 2011.

[23] Maudlin T., *Filosofía de la Física I: El espacio y el tiempo*, Fondo de Cultura Económica (Breviarios), Primera edición en español, México, 2014.

[24] Maudlin T., *Quantum Non-Locality and Relativity*, Metaphysical Intimations of Modern Physics. Wiley-Blackwell, Third edition, 2011.

[25] Mermin D., *Is the moon there when nobody looks? Reality and the Quantum theory.*, Physics Today, pag. 38-47, April 1985.

[26] Montes de Oca L., (et. al), *Los Postulados de Euclides en Espacios Métricos*, Abstraction & Application **9**, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México 2013.

[27] Morales P., *El realismo estructural óntico en el contexto del problema de la medición en la mecánica cuántica*. Tesis de maestría en Filosofía de la Ciencia, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional Autónoma de México, México 2015.

[28] Newton I., *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, Editorial Alianza, Madrid.

[29] Okon E., *El problema de la medición en Mecánica Cuántica*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.

[30] Okon E., *El teorema de Bell*, Notas del curso de Fundamentos de Mecánica Cuántica, Posgrado en Ciencias Físicas semestre 2016-2, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.

[31] Okon E., *¿Es completa la mecánica cuántica? Replanteando el argumento de Einstein, Podolsky y Rosen*, Divulgación Científica **4**, CIIDET Tecnológico Nacional de México, México, Enero-Abril 2016.

[32] Okon E., *Notas del curso de Fundamentos de Mecánica Cuántica*, Posgrado en Ciencias Físicas semestre 2016-2, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.

[33] Peleg Y., (et. al), *Theory and problems of Quantum Mechanics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, USA, 1998.

[34] Real Academia Española, *Diccionario de la Lengua Española*, Fecha de Consulta 7 de noviembre de 2015, disponible en *http://www.rae.es/*.

[35] Rincón L., *Introducción a la Probabilidad*, Editorial Las Prensas de Ciencias, versión en línea, 2016. Disponible en *http://lya.fciencias.unam.mx/lars/indexL.html*.

[36] Schutz B., *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Second Edition, USA, 2009.

[37] Tumulka R., *A Relativistic Version of the Ghirardi–Rimini–Weber Model* , Journal of Statistical Physics, Vol. 125, No. 4, November 2006.

[38] Walls D. (et.al), *Quantum Optics*, 1994 Springer-Verlag Berlin, 2th edition, 2008.

[39] Werner V. (et.al), *Quantum Optics*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co., KGaA Weinheim, Third, revised and extended edition, 2006.

[40] Yépez E. (et. al), *Mecánica Analítica*, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Segunda Edición, México 2012.