UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Las construcciones fundamentales de la Teoría de Módulos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

CARLOS GUADALUPE CORTÉS HUERTA

DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Cortés
Apellido materno	Huerta
Nombre(s)	Carlos Guadalupe
Teléfono	5576116863
Universidad	UNAM
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	302555440

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	Hugo Alberto
Apellido paterno	Rincón
Apellido materno	Mejía

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Alvarado
Apellido materno	García

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre(s)	Iván Fernando
Apellido paterno	Vilchis
Apellido materno	Montalvo

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dra.
Nombre(s)	Bertha María
Apellido paterno	Tomé
Apellido materno	Arreola

6. Datos del sinodal 4

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Cejudo
Apellido materno	Castilla

7. Datos del trabajo escrito.

Título	Las construcciones fundamentales de la Teoría de Módulos
Subtitulo	Teoría de Módulos
Número de páginas	137
Año	2017

Agradecimientos

Al esfuerzo de mis padres

A la pasión de mis maestros

A todas aquellas personas que me hicieron posible

LAS CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE MÓDULOS.

CARLOS CÓRTES

Contents

1. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo describe las construcciones más utilizadas en la teoría de Módulos, desde las mas elementales, hasta las construcciones categóricas. Se muestra en cierta medida la gran riqueza y variedad de temas que convergen en la teoría de módulos.

Se expone la gran diversidad de herramientas matemáticas que intervienen en su desarrollo como lo son: la Teoría de Conjuntos, la Teoría de Retículas y Conjuntos Ordenados y la Teoría de Categorías.

Juega un papel muy importante el *Lema de Zorn* y sus equivalencias, en particular el *Lema de Tukey* resulta muy adecuado para demostrar la existencia de familias independientes máximas de submódulos.

Se empieza haciendo las construcciones que no requieren de lenguaje categórico. A partir de cierto punto del desarrollo, el lenguaje categórico se hace imprescindible. Por ejemplo, muchas de las construcciones satisfacen alguna propiedad universal. Tal es el caso de los productos, coproductos, igualadores, núcleos y conúcleos. La construcción del producto tensorial es muy natural si se usa lenguaje categórico. Por ejemplo, se utiliza el concepto de grupo abeliano libre y el concepto de conúcleo .

Una de las propiedades importantes del funtor producto tensorial, es su relación con el funtor Hom . Esta relación se describe con precisión como un ejemplo de situación adjunta entre categorías.

Uno de los puntos relevantes en esta tesis es la construcción, usando técnicas de la teoría de conjuntos de la cápsula inyectiva de un módulo.

Este trabajo sería de utilidad a las personas que deseen especializarse en el tema, pues aquí se encuentran los fundamentos necesarios para hacer investigación.

Se hizo un especial esfuerzo por incluir las demostraciones de todos los teoremas presentados, tratando de hacer este trabajo autocontenido. Hubo resultados que se demuestran con rigor y que después se volvieron a ver a la luz del lenguaje categórico desarrollado.

2. ÓRDENES PARCIALES Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA.

.

Existen dos tipos de relaciones que son de suma importancia en las matemáticas, los órdenes parciales y las relaciones de equivalencia. Ambas son utilizadas de manera extensa en el Algebra Abstracta.

2.1. Órdenes Parciales. .

Definición. Si X es un conjunto, un orden parcial para X es una relación binaria ($\leqslant$) que satisface las siguientes propiedades:

1. $\leqslant$ es reflexiva, esto es, $\forall\, x \in X,\ x \leqslant x$.

2. $\leqslant$ es antisimétrica, esto es, $\forall\, x, y \in X$, si $y \leqslant x$ y $x \leqslant y$ entonces $x = y$.

3.$\leqslant$ es transitiva, esto es, $\forall x, y, z \in X$, si $x \leqslant y\ \ y \leqslant z$ entonces $x \leqslant z$.

Diremos que X es un *conjunto parcialmente ordenado* (COPO) si existe una relación de orden sobre X que lo haga un orden parcial.

2.2. Relaciones de Equivalencia. .

Definición. Si X es un conjunto, una relación de equivalencia es una relación binaria ($\sim$) que satisface las siguientes propiedades:

1. $\sim$ es reflexiva, esto es, $\forall\, x\ \in\ X\ \ x \sim x$.

2. $\sim$ es simétrica, esto es , $\forall\ x, y\ \in\ X$ si $x \sim y$ entonces $y \sim x$.

3. $\sim$ es transitiva, esto es, $\forall\ x,\ y,\ z\ \in\ X$ si $x \sim y\ \ y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Definición. Una partición de un conjunto X es una familia (indicada por algún conjunto I) de subconjuntos de X, $\{X_i\}_I$, que cumple las siguientes propiedades;

- $X_i \neq \varnothing,\ \forall\, i\ \in\ I$.
- $X_i\ \cap\ X_j = \varnothing$, si $i \neq j$.

• $\bigcup_I X_i = X$.

Afirmación. Una relación de equivalencia parte el conjunto en *clases de equivalencia* :

$$\overline{x} = \{ \ y \ \in X \mid y \sim x \ \}$$

Demostración.

• Sea $\overline{x}$ una clase de equivalencia, entonces por definición se tiene que $x \sim x$, esto es $x \in \overline{x}$, es decir $\overline{x} \neq \emptyset$.

• Supongamos que $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ y sea $x \in X_i \cap X_j$ ahora sea $y \in X_j$ entonces $x \sim y$ de donde $y \in X_i$ esto es $X_j \subset X_i$ análogamente se tiene que $X_i \subset X_j$, es decir, $X_i = X_j$, entonces, $X_i \cap X_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

• sea $x \in X$, entonces, $x \in \overline{x}$ de donde se tiene que $\bigcup_I X_i = X$ □.

Se dice que el elemento x es el representante de la clase de equivalencia $\overline{x}$.

Definición. Dado un Conjunto Parcialmente Ordenado X, un subconjunto C de $X, (C \subset X)$, es una *cadena* en X si $\forall\, x, y \in C$, $x \leqslant y$ ó $y \leqslant x$. Si X es un cadena entonces se dice que X es un *orden lineal* u *orden total.*

Definición. Si X es un COPO, entonces un elemento $m \in X$ es *elemento máximo (mínimo)* en X, si $\forall\, x \in X$ tal que $m \leqslant x$ $(x \leqslant m)$ se tiene que $m = x$.

Definición. Dada una familia de *indicada* de conjuntos $\{X_i\}_I$, se define el *producto cartesiano* de la siguiente manera:

$$\prod_I X_i \ := \ \{ \ f : I \longrightarrow \bigcup_I X_i \ \mid \ f(i) \ \in \ X_i \ \ \forall \ i \ \in \ I \ \}.$$

Utilizaremos la notación $f(i) = x_i \in X_i$, entonces se tiene que:

$$f := (x_i)_I.$$

Si $X_i = X \quad \forall\, i \in I$ utilizaremos la notación:

$$\prod_I X_i := X^I$$

Definición. Dada una familia de *indicada* de conjuntos $\{X_i\}_I$, se define la *unión disjunta* de la familia de la siguiente manera:

$$\coprod_I X_i := \bigcup_I (X_i \times \{i\}) = \{ (x_i, i) \mid i \in I, x_i \in X_i \}.$$

3. LEMA DE ZORN, AXIOMA DE ELECCIÓN Y PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN.

.

Definiremos ahora conceptos que son casi indispensables en las matemáticas, el Lema de Zorn, el axioma de elección y el principio de buen orden, los que sabemos hoy en día que son equivalentes.

El Axioma de Elección fue agregado a la lista de axiomas de Zermelo en 1904, cuando se dio cuenta que se utilizaba para demostrar que todo conjunto tiene al menos un buen orden , es un axioma *especial* pues afirma que existen ciertos conjuntos (funciones de elección) sin dar una descripción de ellos (Esquema de Comprensión.), por esto y por otras ideas *contraintuitivas* es difícil aceptar este axioma. Sin embargo, sus consecuencias son necesarias y muy poderosas (como que todo espacio vectorial tenga una base).

3.1. **Lema de Zorn.** Si X es un COPO y toda cadena en X tiene una cota superior, entonces X tiene por lo menos un elemento máximo.

Si un conjunto no vacío parcialmente ordenado X tiene la propiedad de que toda cadena tiene una cota superior en X, se dice entonces que X es *inductivo.* Por está razón el Lema de Zorn se postula también de la siguiente manera, " Todo COPO inductivo tiene por lo menos un elemento máximo en X. "

3.2. **Principio del Buen Orden.** Todo conjunto se puede bien ordenar.

Notemos que el conjunto vacío $\emptyset$ se puede bien ordenar por vacuidad esto es, cualquier relación $\sim$ sobre $\emptyset$ es un orden parcial, por ejemplo, $x \sim x \ \forall x \in X$, de lo contrario, existiría $x \in X$ tal que $x \nsim x$, una afirmación absurda, de la misma manera se puede argumentar que $\sim$ es antisimétrica y transitiva, de está manera se sigue que $\sim$ es un buen orden para $\emptyset$.

3.3. **Axioma de Elección.** Sea I un conjunto y $\{P_i\}_I$ una familia indicada de conjuntos no vacíos ($P_i \neq \emptyset$, $\forall\, i \in I$). Entonces existe una función $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} P_i$ tal que $f(i) \in P_i \ \forall\, i \in I$. está función es llamada *función de elección.*

Daremos dos equivalencias más del Lema de Zorn, estos son el *Lema de Tukey* y el *teorema de Tijonov.*

3.4. **Lema de Tukey.** Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos no vacíos es de *caracter finito* si cumple las siguientes dos propiedades:

1. $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}$, todo subconjunto finito de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

2. Si todo subconjunto finito de un conjunto dado $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

el Lema de Tukey estáblece que toda familia no vacía de caracter finito tiene elemento máximo respecto a la contención de conjuntos, esto es, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es de carácter finito y $\mathcal{X} \in \mathcal{F}$, entonces existe un elemento máximo $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{Y}$.

3.5. **Teorema de Tijonov.** El producto Cartesiano de una familia de espacios topológicos compactos es compacto respecto a la *topología producto.*

4. CONJUNTOS ORDINALES Y CARDINALES.

.

4.1. **Conjuntos Ordinales.** .

Definición. Un conjunto X es finito si existe un natural n y una función biyectiva $f : X \longrightarrow n$. Es decir, un conjunto es finito si es equipotente a algún número natural.

Observación. Debido a que $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, un conjunto X es infinito *sii* $|X| > \aleph_0$.

Definición. Un conjunto X es un *número ordinal* o simplemente un *ordinal* *sii* cumple con las siguientes condiciones:

•) X es un conjunto *transitivo*, esto es, $\forall\, x \in X \;\; \forall\, y \in x$ se tiene que $y \in X$.

•) La relación de pertenencia satisface:

1. $\in$ es antireflexiva , $\forall x \in X$ se tiene que $x \notin x$.

2. $\in$ es asimétrica , $\forall x, y \in X$, si $x \in y$ entonces $y \notin x$.

3. $\in$ es transitiva, $\forall\, x, y, z \in X$ tales que $x \in y \in z$ se tiene que $x \in z$ y por último, cada subconjunto no vacío $Y \subseteq X$ tiene elemento mínimo, esto es, $\exists\, y \in Y$ tal que $\forall z \in Y$ se tiene que $y \in z$.

Definición Dado un conjunto ordinal X, se define el sucesor de X como $S(X) = X \cup \{X\}$, no es difícil ver que si X es ordinal entonces $S(X)$ también es ordinal.

Observación. Debido a la construcción de $S(X)$ se tiene que, $X \in S(X)$

Definición. Un número ordinal X se llama *ordinal sucesor* si $\exists\; Y$ ordinal tal que $S(Y) = X$.

Definición Un ordinal X es llamado *ordinal límite sii* $X \neq \emptyset$ y $\nexists$ un ordinal Y tal que $S(Y) = X$.

Teorema de Enumeración. Todo buen orden es *isomorfo a un único ordinal.* Es decir, si $(X, \leqslant)$ es un buen orden, entonces existe un único ordinal γ tal que $(X, \leqslant) \cong (\gamma, \in)$.

Principio del mínimo Ordinal. Toda clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo. Es decir, si C es una clase no vacía de ordinales, entonces se cumple que $\exists\, \alpha \in C$ tal que $\forall\, \beta \in C$ se tiene que $\alpha \in \beta \,\vee\, \alpha = \beta$ $(\alpha = \cap C)$.

4.2. **Cardinalidad o Número Cardinal.** .

Se puede decir que un *número cardinal* es la propiedad común que tiene el conjunto y todos los conjuntos equivalentes a él, es decir, aquellos que tienen la misma *cantidad* de elementos, dado un conjunto X denotaremos su cardinalidad como $|X|$.

Definición. Dado un conjunto X, el cardinal de X es el mínimo ordinal biyectable con X.

Observación. En la definición anterior y en adelante debe entenderse que el orden entre los cardinales es el mismo que el de los ordinales. Entonces para encontrar el cardinal de un conjunto se escoge el *orden total menor* de entre todos los órdenes totales posibles de dicho conjunto, pues recordemos que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal y la clase de los ordinales tiene mínimo (principio del mínimo ordinal).

Definición. Dados dos conjuntos X y Y , $|X| \leqslant |Y|$ si existe una función inyectiva $f : X \rightarrowtail Y$.

Teorema de Cantor-Schroder-Bernstein. Dados dos conjuntos X y Y, si existen $f : X \rightarrowtail Y$ y $g : Y \rightarrowtail X$ funciones inyectivas, se tiene que $|X| = |Y|$.

Demostración. Observemos primero que dada una función inyectiva $f : X \rightarrowtail Y$, se tiene que, $|X| = |f(X)|$, ahora bien la función composición $g \circ f : X \longrightarrow X$ es una función inyectiva, de donde se tiene que, $|X| = |(g \circ f)(X)|$; además, $(g \circ f)(X) \subseteq g(Y) \subseteq X$. De donde se tiene que $|g(Y)| = |X|$, por otro lado, $|g(Y)| = |Y|$, entonces $|X| = |Y|$. □

Observación. La relación "=" define una relación de equivalencia sobre la clase de todos los conjuntos, es decir, la clase de todos los conjuntos puede partirse en *clases de cardinalidad* . estás clases son los *Números Cardinales*. La clase de X se denota por $Card(X)$:

$$Card\ (X) = \{\ Y \mid \exists\ \ f : X \longrightarrow Y\ biyeccion\ \}.$$

4.2.1. *Aritmética Cardinal.* .

Sean κ y λ cardinales cualesquiera. Se definen la suma, multiplicación y exponenciación, respectivamente, de κ con λ de la siguiente manera:

- $\kappa + \lambda = \ |(\kappa \times 0) \cup (\lambda \times 1)|$;
- $\kappa \cdot \lambda = \ |\kappa \times \lambda|$;
- $\kappa^{\lambda} = \ |^{\lambda}\kappa|$ donde $^{\lambda}\kappa = \{ \ f \mid f : \lambda \longrightarrow \kappa \ \}$

Si X y Y son conjuntos finitos estás operaciones concuerdan con las suma, multiplicación y exponenciación ordinaria. Más aun, estás operaciones satisfacen:

1) Si X es un conjunto infinito ($|X| \geqslant |\ \aleph_0|$) y Y cualquier conjunto, entonces;

$$|X| + |Y| = \ max \ \{ \ |X|, \ |Y| \ \}$$

2) Si X es un conjunto infinito ($|X| \geqslant |\ \aleph_0|$) y $Y \neq \varnothing$, entonces ;

$$|X| \cdot |Y| = \ max \ \{ \ |X|, \ |Y| \ \}$$

3) Si X,Y y Z son conjuntos, entonces;

$$(\, |X|^{\,|Y|} \,)^{\,|Z|} = |X|^{\,(\,|Y| \cdot |Z|\,)}$$

4) Si $|X| \geqslant 2$, entonces $|X|^{\,|Y|} > |X|$.

5. GRUPOS, ANILLOS Y MÓDULOS.

.

5.1. **Grupos.** .

En está sección introduciremos el concepto de grupo, un objeto algebraico que sirve como uno de los bloques de construcción fundamentales en el algebra abstracta, la idea esencial es la de *suma*, operar algebraicamente dos elementos del conjunto para obtener otro del mismo conjunto. El concepto abstracto de grupo tiene su origen en el conjunto de permutaciones de un conjunto sobre sí mismo.

Definición. Un grupo consta de una pareja ordenada $(G, +)$ donde G es un conjunto no vacío y " + " es una operación binaria del conjunto al conjunto ($+:\ G \times G\ \longrightarrow G$) que satisfacen las siguientes propiedades:

1. + es asociativa, esto es, $\forall\ a,\ b,\ c \in G$ se tiene que, $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. Existe un elemento e en G, llamado identidad, tal que $\forall\ a\ \in\ G$ se tiene que $a+e\ = e+a\ = a$

3. Cada elemento $a\ \in\ G$ tiene *inverso*, esto es, existe $-a\ \in\ G$ tal que $a+(-a) = -a+a = e$.

De ahora en adelante nos referiremos a un grupo $(G, +)$ únicamente por G, quedando entendido que la operación "+" es parte de dicho grupo.

Definición. Un grupo G es **abeliano** si satisface la siguiente condición;

$$a+b\ =\ b+a$$

$\forall\ a, b\ \in G$

Definición. Dado un grupo G un subconjunto H de G (H $\subseteq$ G) es un *subgrupo* de G $(H < G)$ si cumple que por sí mismo es un grupo con la restricción de operación de G.

Observación. Dado un grupo G, un subconjunto no vacío H de G (H $\subseteq$ G) es un subgrupo *sii* $\forall\ a,\ b\ \in H\ \ (a-b)\ \in\ H$.

Demostración. Claramente si H es un subgrupo y $a,\ b\ \in H$ entonces tanto $-b$ como $(a-b)\ \in H$. Ahora bien si $\forall\ a,\ b\ \in H\ \ (a-b)\ \in H$, entonces verifiquemos que $H < G$, la asociatividad se hereda de la estructura de grupo que tiene G, también se tiene que $(a-a) = e\ \in H$, esto es, H tiene elemento neutro, por último $(e-a) = -a\ \in H$, esto es, H tiene inversos, entonces $H < G$. □

Observaciones. Para todo grupo G se tiene que $\{e\} \leqslant G$ y $G \leqslant G$.

Definición. Dado un grupo G, un subgrupo $H < G$ es sumando directo de G, si existe $J < G$ tal que :

- $H + J := \{h + j \mid h\ \in\ H,\ j\ \in\ J\ \} = G.$
- $H \cap J := \{g\ \in\ G \mid g\ \in H\ ,\ g\ \in\ J\ \} = \{0\}.$

Utilizaremos la notación $G = H \oplus J$.

Dado un grupo abeliano G por cada subgrupo $H < G$ se puede construir un nuevo grupo, el *grupo cociente* de H sobre G (G/H) , para esto primero definamos una relación de equivalencia ($\sim$) sobre G.

Observación. Si G es un grupo abeliano y $H < G$ entonces la relación $\sim$, definida por $a \sim b$ *sii* $a - b\ \in\ H$, es una relación de equivalencia.

Demostración. $\sim$ es reflexiva, para ver esto sea $a\ \in\ G$ entonces $a - a = 0\ \in\ H$ de donde $\forall\ a\ G\ \ a \sim a$. Verifiquemos ahora que es simétrica, para esto sean a , b tales que $a \sim b$ esto es $a - b \in H$. Como G es abeliano se tiene que $b - a = a - b \in H$ de donde $b \sim a$. Por último verifiquemos que es transitiva, para esto sean $a, b, c\ \in\ G$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$ esto es $(a-b),\ (b-c)\ \in\ H$ ahora como H es un grupo se tiene que $(a-b)+(b-c) = a - c\ \in\ H$ esto es $a \sim c$ de donde se sigue que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre G. □

Se tiene entonces un nuevo conjunto definido por las clases de equivalencia :

$$G/H\ =\ \{\overline{a} \mid a \in G\}$$

Donde :

$$\overline{a} = a + H := \{a + h \mid h \in H\}$$

Notemos que $a + H = H + a$ pues G es abeliano.

Paremos darle estructura algebraica a este nuevo objeto primero definamos la suma de subconjuntos $H, F \subset G$ de la siguiente manera:

$$F \mp H := \{f + h \mid f \in F,\ h \in H\}.$$

Observemos que si $H < G$ entonces $H \mp H = H$, pues $H \mp H \subset H$, debido a que H es grupo, y trivialmente $H \subset H \mp H$.

Sean entonces G un grupo abeliano, $a,\ b \in G,\ H < G$, se tiene que:

$$\begin{aligned} a + H \mp b + H &= \{(a+h) + (b+h') \mid h,\ h' \in H\} \\ &= \{a + (h+b) + h' \mid h,\ h' \in H\} \\ &= \{a + (b+h) + h' \mid h,\ h' \in H\} \\ &= \{(a+b) + (h+h') \mid h,\ h' \in H\} \\ &= \{(a+b) + h \mid h \in H\} \\ &= (a+b) + H. \end{aligned}$$

Notemos que es indispensable que $a + H = H + a$ para que la suma de dos clases vuelva a ser otra clase, esto motiva la siguiente definición.

Definición. Dado un grupo G , un subgrupo $H < G$ se dice normal *sii* $\forall\, a \in G$ se tiene que $a + H = H + a$.

Corolario. Dado un grupo G , un subgrupo $H < G$ se es normal *sii* $\forall\, a \in G$ se tiene que $H = (-a) + H + a$.

Entonces dado un grupo G y un subgrupo normal $H < G$, se tiene definida una estructura de grupo sobre G/H de la siguiente manera:

$$\overline{a} \;\overline{+}\; \overline{b} := \overline{(a+b)}.$$

Verifiquemos ahora que esta operación no depende de la elección del representante de la clase, es decir, que está bien definida. Para esto sean $a \sim a$ ‘ y $b \sim b$‘ esto es $a = a‘ + h$ y $b = b‘ + h‘$ para algunos $h,\ h‘ \in H$ por último notemos que $\forall\ h‘ \in H\ \ a \in G\ \ \overline{a} = \overline{a + h‘}$ esto es :

$$\{a + h \mid h \in H\} = \{(a + h‘) + h \mid h \in H\}$$

entonces $\overline{a} \;\overline{+}\; \overline{b} = \overline{a‘ + h} \;\overline{+}\; \overline{b‘ + h‘} = \overline{a‘} \;\overline{+}\; \overline{b‘}$, entonces la operación $\overline{+}$ está bien definida.

Afirmación. Dado un grupo G y $H < G$ un subgrupo normal, la pareja ordenada ($G/H, \overline{+}$) es un grupo llamado *grupo cociente de H sobre G*.

Demostración.

- $(\overline{a} \,\overline{+}\, \overline{b}) \,\overline{+} \overline{c} = (\overline{a+b}) \overline{+} \overline{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a} \overline{+} \overline{(b+c)} = \overline{a} \,\overline{+}(\,\overline{b} \overline{+} \overline{c})$.
- $e_{\,G/H} = \overline{e}$, pues $\overline{a} \,\overline{+}\, \overline{e} = \overline{a+e} = \overline{a},\ \ \overline{e} \,\overline{+}\, \overline{a} = \overline{e+a} = \overline{a}$.
- $\forall\ a \in G\ \ -\overline{a} = \overline{-a}$ pues $\overline{a} \,\overline{+}\, \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{e}$. □

Observación. Si G es un grupo, entonces G/G es un grupo que consta de un solo elemento, y $G/\{e\}$ es un grupo *igual* (isomorfo, más adelante definiremos esto) a G .

Observación. Si G es un grupo finito y $H < G$ un subgrupo normal de G , entonces se tiene que:

$$|G| \ = \ |(G/H)| \cdot |H|$$

Demostración. Sea $g \ \in \ G$, entonces se afirma que $\overline{g} = |H|$, pues si $g+h = g+h`$ para algunas $h$ , $h` \ \in \ H$, entonces, $g+h = g+h` \ \ sii \ \ -g+(g+h) = -g+(g+h`) \ \ sii \ \ (-g+g)+h = (-g+g)+h` \ \ sii \ \ h = h`$, de donde se tiene que $\overline{g} = |H|$, entonces todas las particiones son equipotentes de cardinalidad $|H|$, de donde $|G| \ = \ |(G/H)| \cdot |H|$ donde $|(G/H)|$ es el número de clases.□

De ahora en adelante todo grupo considerado será un grupo abeliano, con lo que todo subgrupo será un subgrupo normal y siempre quedará definido el grupo cociente .

Definición. Dados dos grupos $(G,+)$ y $(H,*)$ un homomorfismo (morfismo) de grupos es una función $f : G \longrightarrow H$ que satisface las siguiente propiedad:

$$f(a+b) \ = \ f(a) * f(b)$$

$\forall \, a,b \ \in \ G.$

Observación. Si $f : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos, entonces, $f(e_G) = e_H$

Demostración. $f(e_G) \ = \ f(e_G + e_G) \ = \ f(e_G) + f(e_G)$, sumando el inverso de $f(e_G)$ por ambos lados se obtiene $f(e_G) = e_H$. □

De ahora en adelante escribiremos únicamente "e" quedando entendido la correspondiente pertenencia de dicho elemento, de igual manera con la operación binaria "+" correspondiente.

Definición. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo, si $A_0 \subset A$ se define la *restricción* de f a A_0 $f|_{A_0} : A_0 \longrightarrow B$ como :

$$f|_{A_0}(a_0) := f(a_0)$$

$\forall \, a_0 \ \in \ A_0.$

Si $A \subset A_1$ y se tienen dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : A_1 \longrightarrow B$ se dice que g es una *extensión* de f si se cumple que $g|_A = f$, esto es $g(a) = f(a)$ $\forall\, a \in A$.

Definición. Dada un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$, se define el **Kernel de f** (Ker(f)) como el conjunto de todos los elementos de G (Ker(f) $\subseteq$ G) tal que su imagen es el elemento identidad de H, esto es;

$$Ker(f) = \{\ a \in G \mid f(a) = e\ \}$$

Observación. Dado un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$ se tiene que $Ker(f) < G$.

Demostración. Sean $a, b \in G$. Notemos primero que, $f(b + (-b)) = f(b) + f(-b) = 0$ pero por otro lado $f(b) - f(b) = 0$ y debido a la unicidad del elemento inverso se tiene que $f(-b) = -f(b)$. Sean ahora $a, b \in Ker(f)$, entonces $f(a + (-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) = e_H - e_H = e_H$, de donde $a - b \in Ker(f)$, con lo que $Ker(f) < G$.□

Definición. Un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$ se dice *inyectivo* o *monomorfismo* (ésta última terminología es categórica y más adelante se definirá), si cumple la siguiente propiedad, si $f(a) = f(b)$ entonces, $a = b$, es decir, *elementos distintos van a dar a elementos distintos* .

Utilizaremos la notación monomorfismo y lo abreviaremos *mono.*

Observación. Un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$ es mono *sii* $Ker(f) = \{e\}$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $f : G \longrightarrow H$ mono, demostremos que $Ker(f) = e$, ya se observó que $e \in Ker(f)$ ($\{e\} \leqslant Ker(f)$), veamos ahora la contención restante. Para esto sean $a \in Ker(f)$, esto es $f(a) = 0$ pero también $f(e) = 0$ y debido a la inyectividad de f se tiene que $a = 0$, entonces $Ker(f) \leqslant \{e\}$, de donde se sigue $Ker(f) = \{e\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $Ker(f) = \{e\}$, y sean $a, b \in G$ tales que $f(a) = f(b)$

entonces, $0 = f(a) - f(b) = f(a-b)$, esto es, $a - b \in Ker(f)$ entonces por hipótesis se tiene que $a - b = 0$ esto es $a = b$ es decir f es monomorfismo. $\square$

Definición. Se dice que un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$ es *suprayectivo* o *epimorfismo* (ésta última terminología es categórica y más adelante se definirá), si cumple la siguiente propiedad, $\forall\ b \in H \ \ \exists\ a \in G$ tal que $f(a) = b$, es decir, $f(G) = \{f(a) \mid a \in G\}) = H$.

Utilizaremos la notación epimorfismo y lo abreviaremos *epi*.

Definición. Dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $h : B \longrightarrow A$ son inversas una de la otra *sii* $f \circ h = 1_B$ y $h \circ f = 1_A$.

Definición. Se dice que un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$ es un *isomorfismo* (iso) cuando tiene un morfismo inverso, es decir, f tiene un inverso como función, y este inverso es un morfismo. Escribiremos $G \simeq H$.

Observación. Sean los grupos $H < G$, entonces la función $\pi : G \longrightarrow G/H$ dada por $\pi(g) = g + H$ es un epimorfismo.

Demostración. Sean $g,\ g_1 \in G$, entonces;

$$\begin{aligned}\pi(g + g_1) &= (g + g_1) + H \\ &= (g + H) + (g_1 + H) \\ &= \pi(g) + \pi(g_1)\end{aligned}$$

además si $g + H \ \in G/H$, entonces $\pi(g) = g + H$, de donde se tiene que π es un epimorfismo. $\square$

Teorema de la correspondencia para grupos. Sea G un grupo y $H < G$, definamos :

$$L(G, H) \ := \ \{K \mid H < K < G\ \}$$

y $L(G/H)$ la familia de subgrupos de G/H entonces, hay una correspondencia biyectiva entre $L(G, H)$ y $L(G/H)$

Demostración. Consideremos la asignación $\varphi : L(G, H) \longrightarrow L(G/H)$ dada por:

$$\varphi(K) := K/H = \{ \overline{x} \mid x \in K \}$$

φ es una función inyectiva. Supóngase que $\varphi(K_1) = \varphi(K_2)$ entonces $K_1/H = K_2/H$. Sea $x \in K_1$ entonces $\overline{x} \in K_1/H$ entonces $\overline{x} \in K_2/H$ de donde $x - y \in K_2$ para algún $y \in H$ pero $H < K_2$ de donde $x = (x-y) + y \in K_2$ con lo que se tiene que $K_1 < K_2$. Análogamente $K_2 < K_1$, es decir $K_1 = K_2$. Esto es, φ es mono.

φ es una función suprayectiva. Sea M un subgrupo de G/H , entonces consideremos el morfismo proyección $\pi : G \longrightarrow G/H$, y consideremos la imagen inversa de M, $\pi^{-1}(M)$, se afirma entonces que $\varphi(\pi^{-1}(M)) = M$. Pues claramente $H < \pi^{-1}(M)$, además, $\forall\, \overline{x} \in M \quad \varphi(\pi^{-1}(\overline{x})) = (x + h) + H$ para algún $h \in H$ pero $(x + h) + H = x + (h + H) = x + H$ de donde $\varphi(\pi^{-1}(M) = M$, con lo que se tiene que φ es suprayectiva. Con lo que se tiene que φ es una biyección. □

Propiedad Universal del Cociente. Dados los morfismos $f : G \longrightarrow H$, F un subgrupo de G $(F < G)$ y $\pi : G \longrightarrow G/F$ el morfismo proyección . Si f se anula en F ($f(F) = \{e\}$) , entonces, existe un único R-morfismo $\psi : G/F \longrightarrow H$ tal que $f = g \circ \pi$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/F \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos la función $\psi : G/F \longrightarrow H$ mediante $\psi(g+F) := f(g)$, sólo hace falta verificar que está bien definida pues claramente ψ es morfismo . Para esto, sean $g_1 + F = g_2 + F$, esto es $g_1 = g_2 + a$ para alguna $a \in F$, entonces;

$$\begin{aligned}\psi(g_1+F) &= \psi((g_2+a)+F)\\ &= f(g_2+a)\\ &= f(g_2)+f(a)\\ &= f(g_2)\\ &= \psi(g_2+F)\end{aligned}$$

Si $\varphi : G/F \longrightarrow H$ es un morfismo tal que $f = \varphi \circ \pi$, entonces $\psi(g+F) = f(g) = \varphi(\pi(g)) = \varphi(g+F)$, es decir, $\psi = \varphi$. □

Teorema . (Primer Teorema de Isomorfismos.) Dado un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$, se tiene que :

$$G/Ker(f) \simeq f(G)$$

Demostración. Consideremos la función $\psi : G/Ker(f) \longrightarrow f(G)$ dada por, $\psi(g + Ker(f)) = f(g)$, es inmediato ver que ψ es epimorfismo. Verifiquemos únicamente que es mono. Para esto, sea $g \in G$ tal que $\psi(g+Ker(f)) = 0 = f(g)$, esto es, $g \in Ker(f)$ es decir $g+Ker(f) = Ker(f) = \overline{0}$, de donde $G/F \simeq f(G)$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & f(G) \\ G/Ker(f) \arrow[ur, dashed, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

□

Dados dos grupos G y H se define el conjunto:

$$Hom(G,H) := \{ f : G \longrightarrow H \mid f \ es \ morfismo \ de \ grupos \}.$$

Daremos ahora estructura de grupo a este nuevo conjunto, definiendo una operación de la siguiente manera:

$$(f+h)(a) := f(a) + h(a).$$

$\forall$Claramente $f+h$ es un morfismo de grupos. Pues, $(f+h)(a+b) = f(a+b) + h(a+b) = f(a)+f(b)+h(a)+h(b) = f(a)+h(a)+f(b)+h(b) = (f+h)(a)+(f+h)(b)$ $\forall\ a,\ b\ \in\ G$. Notemos que es necesario que H sea abeliano para que $f+h$ sea morfismo.

Afirmación. $(Hom(G,H),+)$ es un grupo.

Demostración :

• Asociatividad: Sean $f,g,h \in Hom(G,H)$, entonces, $((f+g)+h)(a) = (f+g)(a)+h(a) = f(a)+g(a)+h(a) = f(a)+(g(a)+h(a))$ $\forall\ a \in G$. Esto es, $(f+g)+h = f+(g+h)$.

• Existencia de elemento neutro: Se define $\overline{e} : G \longrightarrow H$ como $\overline{e}(g) = e_H$ $\forall\ g \in G$. Verifiquemos que en efecto es elemento neutro, sea entonces $(f+e)(a) = f(g) + \overline{e}(a) = f(g) + e_H = f(g)$.

• Existencia de elemento inverso: Sea $f \in Hom(G,H)$ se define $-f : G \longrightarrow H$ como $(-f)(a) := -(f(a))$ $\forall\ a \in G$. Es directo verificar que $-f$ es inverso de f , pues $(f-f)(a) = f(a) - f(a) = e_H$. $\square$

5.2. **Anillos.** .

Definición. Un anillo es una terna ordenada $(R, +, *)$ tal que, $(R, +)$ es un grupo y $(R, *)$ es un semigrupo. Esto es, $*$ es una operación binaria del conjunto al conjunto ($* : R \times R \longrightarrow R$) con la propiedad de ser asociativa que además cumple las siguientes propiedades:

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

y

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$$

$\forall\ a, b, c\ \in R.$

Si además se cumple que $a * b = b * a \quad \forall\ a, b \ \in \ R$ se dice que R es un *Anillo Conmutativo* . Si se tiene la existencia de un neutro *multiplicativo*, esto es, $\exists\ 1\ \in\ R$ tal que $a * 1 = 1 * a = a\ \ \forall\ a\ \in\ R$ se dice que R es un *Anillo con uno.*

En el presente trabajo consideraremos *Anillos con uno* .

Nuevamente haremos un abuso de notación denotando únicamente por R a un anillo conmutativo con uno, quedando sobrentendidas las operaciones correspondientes.

Observación. Dado un Grupo abeliano G, hemos notado que $End(G) = Hom(G, G)$ tiene estructura de grupo, definiremos ahora una *multiplicación* sobre este conjunto para darle una nueva estructura algebraica.

Definamos:

$$(f * g)(a) := f(g(a))$$

$\forall\ f, g\ \in End(G),\ \forall\ a \in G.$

Afirmación. Dado un grupo G, se tiene que $(End(G), +, *)$ es un anillo con unidad.

Demostración. Sabemos que las funciones son asociativas, también es claro que $\forall\ f, g\ \in End(G)\ a \in G\ \ f(g(a) + h(a)) = f(g(a)) + f(g(a))$ pues f es morfismo y $(f + g)(h(a)) = f(h(a)) + f(h(a))$ por definición de la suma en End(G). Además, si definimos $1_{End}(a) := a\ ,\ \forall\, a \in G$, entonces se tiene que $(End(G), +, *)$ es un anillo con unidad. □

Definición. Dados dos anillos R y $R^{‘}$. Un homomorfismo de anillos es un morfismo de grupos $f : R \longrightarrow R^{‘}$ que cumple con las siguientes propiedad:es

$$f(a * b) = f(a) * f(b)$$

y

$$f(1_R) = 1_{R^{‘}}$$

$\forall\ f\ \in End(G)\ \ a, b\ \in G.$

5.3. **Módulos.** .

A continuación introduciremos nuestro principal bloque algebraico de construcción, los R-módulos . Este concepto es una generalización tanto de la idea de *espacio vectorial* así como de la de *grupo abeliano*.

Definición 1. Sea R un anillo. Un R-módulo M es un grupo abeliano junto con un morfismo de anillos:

$$f : R \longrightarrow End(M)$$

con la condición de que $f(1) = 1_{End}$.

Daremos una definición equivalente.

Definición 2. Sea R un anillo, un R-módulo (derecho) M es un grupo abeliano junto con una función $M \times R \longrightarrow M$ la cual denotaremos únicamente por:

$$(m, r) \mapsto mr$$

$\forall\, r \in R \;\; m \in M$, la cual satisface las siguientes propiedades:

1. $(m + m`)r = mr + m`r$

2. $m(r + r`) = mr + mr`$

3. $m(rr`) = (mr)r`$

4. $m1 = m$

$\forall \;\; r, r` \in R \;\; m, m` \in M$.

La notación que seguiremos será está última.

Análogamente se define un R-módulo izquierdo.

Definición. Dados dos anillos con uno , R y S , un grupo abeliano M es un R, S bimódulo ${}_RM_S$, si M es un R-módulo izquierdo y un S-módulo derecho y además se tiene que:

$$r(ms) = (rm)s$$

$\forall\, r \in R$, $\forall\, s \in S$, $\forall\, m \in M$.

Observación. Un espacio vectorial es un R-módulo donde R es un campo.

Observación. Un Grupo abeliano G es un $\mathbb{Z}$-módulo definiendo :

$$g\,n := g + g + ... + g \ \ (n \ \ veces \ )$$

.

Definición. Dado un R-módulo M, un *submódulo* N de M ($N < M$) es un subgrupo de M que cumple además $nr \ \in N \ \ \forall\, r \in R, \ \forall\, n \ \in \ N$.

Definición. Dado un R-módulo M y una familia de submódulos de M, $\{M_\alpha\}_\Delta$, se definen los siguientes submódulos:

$$\sum_\Delta M_\alpha := \{ \sum_\Delta m_\alpha \mid \ m_\alpha \in M_\alpha, \ m_\alpha = 0 \ \ para \ casi \ toda \ \alpha \in \Delta \ \}$$

$$\bigcap_\Delta M_\alpha := \{ \ m \ \in M \mid m \ \in M_\alpha \ , \ \forall\, \alpha \ \in \Delta \ \}$$

Definición. Dados dos R-módulos M y Q, un R-morfismo de módulos $f : M \longrightarrow Q$ es un morfismo de grupos que cumple la siguiente propiedad:

$$(f(m))r = f(mr)$$

$\forall\, m \in M, \ \forall\, r \in \ R.$

De igual manera, se extienden los conceptos de mono epi e isomorfismo de grupos a los morfismos de R-módulos. Así mismo el concepto de sumando directo.

Observación. Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow K$ son monomorfismos, entonces, $g \circ f$ es mono.

Demostración. Sea $m \ \in \ ker(g \circ f)$, entonces, $g(f(m)) = 0$ y como g es mono se tiene que $f(m) = 0$. Finalmente como f es mono se tiene que $a = 0$, esto es, $g \circ f$ es mono. $\square$

Por inducción, se tiene que la composición de una familia finita de monomorfismos es un monomorfismo.

Observación. Sean dos morfismos de módulos $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow K$ tales que $g \circ f$ es mono, entonces, f es mono también.

Demostración. Sean los morfismos $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow K$ tal que $g \circ f$ es mono, y sean $m \neq m' \in M$ tales que $f(m) = f(m')$, entonces se tiene que $g(f(m)) = g(f(m'))$ con $m \neq m'$, lo que es una contradicción pues $g \circ f$ es mono. Se sigue que $m = m'$, es decir f es mono .□

Observación. Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow K$ son epimorfismos, entonces, $g \circ f$ es epi.

Demostración. Sea $k \in K$, entonces como g es epi $\exists\ n \in N$ tal que $g(n) = k$, y como f es epi $\exists\ m \in M$ tal que $f(m) = n$, finalmente, $g(f(m)) = g(n) = k$ de donde $g \circ f$ es epi. □

Por inducción se tiene que la composición de una familia finita de epimorfismos es un epimorfismo.

Observación. Sean dos morfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow K$ tales que $g \circ f$ es epi, entonces g es epi también.

Demostración. Sean dos morfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow K$ tal que $g \circ f$ es epi y sea $k \in K$, entonces $\exists\ m \in M$ tal que $g(f(m)) = k$, entonces $f(m) \in N$ es tal que $g(f(m)) = k$, de donde se sigue que g es epi. □

Observación. Un R-morfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo *sii* f es una biyección (epi y mono) de R-módulos.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos primero que f es un isomorfismo, entonces $\exists\ g : N \longrightarrow M$

tal que $g \circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$, de la primera igualdad se tiene que f es mono y de la segunda que es epi, esto es f es una biyección de R-módulos. $\square$

$\Leftarrow$)Supongamos ahora que f es una biyección de R-módulos, entonces definamos $g : N \longrightarrow M$ de la siguiente manera $g(n) := m$ donde $f(m) = n$, observemos primero que la existencia de m está garantizada debido a que f es epi y que g está bien definida debido a que f es mono, finalmente es directo ver que $g(f(m)) = m$ y que $f(g(n)) = n$, esto es $g \circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$, de donde se tiene que f es iso. $\square$

Propiedad del Conúcleo . Dado un R-morfismo $f : M \longrightarrow N$ y un epimorfismo $p : M \longrightarrow Q$ tales que $Ker(p) \subset Ker(F)$, entonces existe un único R-morfismo $h : Q \longrightarrow N$ tal que $h \circ p = f$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\
Q \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos la función $h : Q \longrightarrow N$ dada por :

$$h(q) := f(m)$$

donde

$$p(m) = q$$

Observemos primero que está bien definida pues $\forall \ q \in Q \ \exists \ m \in M$ tal que $p(m) = q$ y si $p(m) = q = p(m')$ entonces $p(m - m') = 0$, esto es $m - m' \in Ker(p) \subset Ker(f)$. Esto es, $f(m - m') = 0 \ \ sii \ \ f(m) = f(m')$ de donde $h(m) = h(m')$.

Sean ahora $q, q' \in Q$, con $p(m) = q$ y $p(m') = q'$, entonces $h(q) + h(q') = f(m) + f(m') = f(m + m') = h(q + q')$ .Por último verifiquemos su unicidad, para esto sea $j : Q \longrightarrow N$ tal que $f = j \circ p$ y sea $q \in Q$, $m \in M$ tales que $p(m) = q$ entonces $h(q) = f(m) = j(p(m)) = j(q)$.$\square$

Hemos ya notado que dado un grupo abeliano M y un subgrupo $N < M$ se tiene el grupo cociente M/N. Si además M es un R-módulo, podemos dar estructura de R-módulo a M/N, definiendo una operación de la siguiente manera:

$$(m+N)r \;:=\; (mr)+N.$$

$\forall\ r \in R \ \ m \in M$, es fácil ver que está bien definida, pues si $m+N = m^{‘}+N$ entonces $m = (m^{‘}+n)$ para algúna $n \in N$ entonces $(m+N)r = ((m^{‘}+n)+N)r = ((m^{‘}r)+N)+((nr)+N) = (m^{‘}+N)r+(n+N)r = (m^{‘}+N)r$.

Afirmación. Dados un R-módulo M y un submódulo N ($N \lneq M$) el grupo cociente M/N es un R-módulo.

Demostración. Sean $r, r^{‘} \in R \ \ m, m^{‘} \in M$, entonces;

- $(m+N)(r+r^{‘}) = (m(r+r^{‘}))+N = (mr+mr^{‘})+N = (mr+N)+(mr^{‘}+N)$
- $((m+N)+(m^{‘}+N))r = ((m+m^{‘})+N)r = ((m+m^{‘})r)+N = (mr+m^{‘}r)+N = (mr+N)+(m^{‘}r+N) = (m+N)r+(m^{‘}+N)r$
- $(m+N)(rr^{‘}) = (m(rr^{‘}))+N = ((mr)r^{‘})+N = ((mr)+N)r^{‘} = ((m+N)r)r^{‘}$
- $(m+N)1 = (m1)+N = m+N$. $\square$

Observación. Dados un R-módulo M y un submódulo $N < M$, la función $\pi : M \longrightarrow M/N$ dada por :

$$\pi(m) := m+N$$

Es un R-epimorfismo.

Dado un R-módulo M y un submódulo N de M ($N \lneq M$, $N \neq \{0\}$), se tiene la sucesión de morfismos:

$$N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N.$$

Donde el primer morfismo es el monomorfismo inclusión de N en M y π es el epimorfismo proyección. Notemos que $\pi(i(n)) = \pi(n) = n + N = N = 0$, esto es $Ker(\pi) = Im(i)$. Generalizemos esto:

Definición. Dada una sucesión de R-morfismos:

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \;\ldots\; M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \ldots$$

Decimos que es una *sucesión exacta* si, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene que, $Im(f_n) = Ker(f_{n+1})$.

Notemos entonces que $\forall\ N < M$, se tiene la sucesión exacta corta :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

Observación. Dada la sucesión de morfismos:

$$0 \xrightarrow{\bar{0}} P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{\tilde{0}} 0.$$

Se tiene que, la sucesión es *exacta izquierda* *sii* f es monomorfismo, y es *exacta derecha* *sii* f es epimorfismo.

Demostración:

•) $\Rightarrow$ Supongamos primero que la sucesión es exacta izquierda, esto es, $Im(\overline{0}) = ker(f)$, esto es, $Ker(f) = 0$, de donde, f es mono.
$\Leftarrow$ Supongamos ahora que f es mono, entonces $ker(f) = 0 = Im(\overline{0})$, esto es, la sucesión es exacta izquierda.

•) $\Rightarrow$ Supongamos primero que la sucesión es exacta derecha, esto es $Im(f) = Ker(\tilde{0}) = Q$, de donde f es epimorfismo.
$\Leftarrow$ Supongamos ahora que f es epi, esto es, $Im(f) = Q = Ker(\tilde{0})$, de donde se tiene que la sucesión es exacta derecha. $\square$

Corolario. Un morfismo $f : P \longrightarrow Q$ es un isomorfismo *sii* la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0.$$

Demostración. La sucesión es exacta *sii* f es una biyección *sii* f es un isomorfismo. $\square$

Consideraremos ahora la sucesión exacta corta asociada a la descomposición de un R-módulo en sumandos directos.

Observación. Dado un R-módulo M , tal que $M = L \oplus N$, entonces se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i_L} M \xrightarrow{\pi_N} N \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} M \xrightarrow{\pi_L} L \longrightarrow 0$$

Donde i_N , i_P son las inclusiones correspondientes y π_N , π_P las proyecciones correspondientes. Tenemos dos sucesiones exactas cortas, una de *ida* y otra de *regreso*. Las sucesiones exactas de este tipo son llamadas escisiones. Notemos que:

$$\pi_L\, i_L = 1_L \quad , \quad \pi_N\, i_N = 1_N \quad , \quad \pi_L\, i_N = 0 \quad y \quad \pi_N\, i_L = 0.$$

Definición. Sea $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo de R-módulos, una *escisión* para f es un morfismo $g : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ f = 1_M$.

Observación. Dado un monomorfismo $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow M$ una escisión de f, entonces se tiene que g es epi, y:

$$N = Im(f) \oplus Ker(g)$$

Demostración. Notemos primero que $\forall\ n \in N,\ n - f(g(n)) \in \ker(g)$, pues $g(n - f(g(n))) = g(n) - g(f(g(n))) = g(n) - g(n) = 0$, de donde se tiene que $n = (n - f(g(n))) + f(g(n)) \in Ker(g) + Im(f)$.

Por otra parte, si $n \in Ker(g) \cap Im(f)$, como $n = f(m)$ para algún $m \in M$ tenemos que $0 = g(n) = g(f(m)) = m$ de donde $n = f(m) = f(0) = 0$ y finalmente $Ker(g) \cap Im(f) = \{0\}$, de donde $N = Im(f) \oplus Ker(g)$. □

Definición. Una sucesión exacta corta :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Se escinde si existe un isomorfismo $M \longrightarrow L \oplus N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \oplus N \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definición. Dados dos R-módulos M y N denotaremos al conjunto de todos los morfismos de M en N como:

$$Hom_R(M\ ,\ N)\ :=\ \{\ f : M \longrightarrow N\ \mid\ f\ \ es\ \ R - morfismo\ \}.$$

Una vez más daremos estructura de $R-$módulo a este grupo definiendo una operación de la siguiente manera:

$$(fr)(m) := (f(m))r$$

$\forall\ r\ \in R,\ \forall\ m\ \in M,\ \forall\ f\ \in Hom_R(M, N).$

Afirmación. $Hom_R(M, N)$ es un R-módulo.

Demostración. Sean $r,\ r^{‘}\ \in\ R\quad m\ ,\ m^{‘}\ \in\ M$ y $f\ \in\ Hom_R(M, N)$, entonces:

1. $((f + h)r)(m) = (f(m) + h(m))r = (f(m))r + (h(m))r = (fr)(m) + (hr)(m)$
2. $(f(r + r^{‘}))(m) = f(m)(r + r^{‘}) = f(m)r + f(m)r^{‘}$
3. $(f(rr^{‘}))(m) = f(m)(rr^{‘}) = (f(m)r^{‘})r = ((fr^{‘})(m))r$
4. $(f1)(m) = (f(m))1 = f(m).$ □

Observación. Notemos que es necesario que el anillo R sea *conmutativo*, pues $(fr)(ms) = f(ms)r = f(m)sr$, por otro lado se tiene que $(fr)(ms) = ((fr)s)(m) = ((fr)(m))s = f(m)rs$. En general se puede decir que $Hom_R(M, N)$ es un grupo abeliano cuando el anillo no es conmutativo.

Definición. Sean los R-módulos A y B tal que $A < B$, un seudocomplemento de A en B es un módulo $C < B$ tal que es máximo con la propiedad de $A \cap C = 0$.

Afirmación. Todo submódulo tiene un seudocomplemento .

Demostración. Sean $A < B$, consideremos la familia:

$$\Gamma = \{ C \mid C < B , C \cap A = 0 \}$$

notemos que $\Gamma \neq \varnothing$ pues $\{0\} \in \Gamma$. Tomemos ahora una cadena $\{C_i\}_I \in \Gamma$. Se afirma que $\cup C_i \in \Gamma$ pues, $\cup C_i < B$ y además $\cup C_i \cap A = 0$. Pues si $a \in \cup C_i \cap A$, entonces $\exists\, i \in I$ tal que $a \in C_i \in \Gamma$. Esto es , $a = 0$. Entonces $\cup C_i$ es una cota superior para la cadena, y por el Lema de Zorn existe un elemento máximo en Γ . Esto es un seudocomplemento para A. $\square$

6. CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES.

.

En esta sección introduciremos conceptos y construcciones fundamentales y omnipresentes en el Álgebra abstracta, tales como, los productos directos, las sumas directas, los módulos libres, los límites directos, los límites inversos y los productos tensoriales. Cada uno de estos objetos algebraicos posee una propiedad muy importante llamada *propiedad universal.*

6.1. **Productos Directos.** .

Sea R un anillo y Δ un conjunto, si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, podemos darle una estructura de R-módulo al producto cartesiano $\prod_\Delta M_\alpha$ (donde $\prod_\Delta M_\alpha = \{0\}$ si $\Delta = \emptyset$) definiendo las siguientes operaciones:

$$(x_\alpha)_\Delta + (y_\alpha)_\Delta = (x_\alpha + y_\alpha)_\Delta$$

y

$$(x_\alpha)_\Delta r = (x_\alpha r)_\Delta$$

$\forall\ (x_\alpha)_\Delta, (y_\alpha)_\Delta \in \prod_\Delta M_\alpha,\ \forall\ r \in R$, es decir, *sumamos* y *multiplicamos* por R coordenada a coordenada.

Definamos ahora para cada $\beta \in \Delta$ la función $\pi_\beta : \prod_\Delta M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ dada por:

$$\pi_\beta\left((m_\alpha)_\Delta\right) := m_\beta.$$

Afirmación. Para toda $\beta \in \Delta,\ \pi_\beta$ es un epimorfismo.

Demostración. Sean $(m_\alpha)_\Delta$ y $(n_\alpha)_\Delta \in \prod_\Delta M_\alpha$, $r \in R$, entonces;

$$\begin{aligned}
\pi_\beta\left((m_\alpha)_\Delta + (n_\alpha r)_\Delta\right) &= \pi_\beta\left((m_\alpha + n_\alpha r)_\Delta\right) \\
&= m_\beta + n_\beta r \\
&= \pi_\beta(m_\alpha)_\Delta + \pi_\beta(n_\alpha r)_\Delta \\
&= \pi_\beta\left((m_\alpha)_\Delta\right) + \pi_\beta\left((n_\alpha)_\Delta\right) r
\end{aligned}$$

.

Además, si definimos $(m_\alpha)_\Delta \in \prod_\Delta M_\alpha$ dada por $m_\alpha = m$ si $\alpha = \beta$ y $m_\alpha = 0$ en otro caso, $(m_\alpha)_\Delta$ es tal que $\pi_\beta\left((m_\alpha)_\Delta\right) = m$, de donde se sigue que π_β es un epimorfismo $\forall\ \beta \in \Delta$ $\square$.

El morfismo π_β es llamado la β-proyección canónica. Se tiene entonces una familia de R-epimorfismos $\{\pi_\alpha\}_\Delta$.

Definición. Dada $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos se dice que el par $(\prod_\Delta M_\alpha\,,\ \{\pi_\alpha\}_\Delta)$ es el producto directo de la familia de módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$. Denotaremos tal producto únicamente como $\prod_\Delta M_\alpha$, quedando entendido que la familia de epimorfismos forma parte del producto.

Observación. Si N es un R-módulo y se tiene un morfismo $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\exists\ f : N \longrightarrow \prod_\Delta M_\alpha$ dada por

$$f(n) := (f_\alpha(n))_\Delta.$$

el cual es un R-morfismo bien definido, llamado el producto de la familia de morfismos $\{f_\alpha\}_\Delta$ o simplemente el producto de $\{f_\alpha\}_\Delta$.

Demostración. Claramente f está bien definida pues las f_α lo están. Sean ahora $n\,, m \in N$, $r \in R$, entonces;

$$\begin{aligned} f(nr+mr) &= (f_\alpha(nr+mr))_\Delta \\ &= (f_\alpha(n)r + f_\alpha(m)r)_\Delta \\ &= (f_\alpha(n)r)_\Delta + f_\alpha(m)r)_\Delta \\ &= (f_\alpha(n))_\Delta r + f_\alpha(m))_\Delta r \\ &= (f(n))r + (f(m))r \ \square \end{aligned}$$

La siguiente proposición nos habla sobre una propiedad fundamental en este nuevo objeto, la llamada *propiedad universal* .

Proposición. Sean R un anillo, N un R-módulo y $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos, entonces el producto directo $\prod_\Delta M_\alpha$ tiene la propiedad de que, para cada familia $\{f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha\}_\Delta$ de R-morfismos, existe un único R-morfismo $f : N \longrightarrow \prod_\Delta M_\alpha$ tal que $\forall\, \alpha \in \Delta$ se tiene que $\pi_\alpha f = f_\alpha$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo ;

$$\begin{tikzcd} \prod_\Delta M_\alpha \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \\ & M_\alpha \\ N \arrow[uu, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea f el producto de la familia de morfismos $\{f_\alpha\}_\Delta$, $n \in N$, $\beta \in \Delta$, entonces $\pi_\beta(f(n)) = \pi_\beta(f_\alpha(n))_\Delta = f_\beta(n)$, de donde se tiene que $\pi_\alpha f = f_\alpha$ $\forall\ \alpha \in \Delta$. Y si g es un morfismo tal que $\pi_\alpha g = f_\alpha\ \forall\ \alpha \in \Delta$, observemos que dos morfismos con el mismo dominio y cuyo contradominio es un producto, son el mismo morfismo *sii entrada por entrada* son iguales, es decir, son iguales *sii* seguidos de las proyecciones son el mismo, lo cual sucede por construcción, pues $\forall \alpha \in \Delta$ se tiene que $\pi_\alpha f = f_\alpha = \pi_\alpha g$, de donde se tiene la unicidad de f. $\square$

Definición. Un R-módulo P junto con una familia $\{p_\alpha : P \longrightarrow M_\alpha\}_\Delta$ de R-morfismos se llama un *producto directo* de la familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$ si para todo módulo N y para toda familia $\{f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha\}_\Delta$ de R-morfismos, existe un único R-morfismo $f : N \longrightarrow P$ tal que, para toda $\alpha \in \Delta$, el siguiente diagrama conmuta ;

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "p_\alpha"] & \\
& M_\alpha \\
N \arrow[uu, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

El Producto Directo $(\prod_\Delta M_\alpha\,,\, \{\pi_\alpha\}_\Delta)$ de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ posee una *propiedad universal* en el sentido de que dada cualquier otra familia $\{f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha\}_\Delta$ de R-morfismos, esta se puede *factorizar* siempre de manera única a traves de un R-morfismo $f : N \longrightarrow \prod_\Delta M_\alpha$, es decir, $p_\alpha f = f_\alpha$ para toda $\alpha \in \Delta$.

Proposición. El producto directo de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos es único salvo isomorfismo.

Demostración. Sean $(P, \{p_\alpha\}_\Delta)$ y $(P', \{p'_\alpha\}_\Delta)$ productos directos de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces consideremos el siguiente diagrama;

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "p_\alpha"] & \\
P' \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p'_\alpha"] & M_\alpha \\
P \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "p_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

donde φ y ψ están dadas por la propiedad universal del producto. Como $p_\alpha = p'_\alpha\psi$ y $p'_\alpha = p_\alpha\varphi$ entonces se tiene que $p_\alpha = p_\alpha\varphi\psi$ para toda $\alpha \in \Delta$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "p_\alpha"] & \\ & M_\alpha \\ P \arrow[uu, "\varphi\psi"] \arrow[ur, "p_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

pero la identidad id_P también hace conmutar el diagrama, dado que este morfismo es único se tiene que $\varphi \circ \psi = id_P$. Análogamente $\psi \circ \varphi = id_{P'}$. De donde se sigue que $P \simeq P'$.$\square$

Observación. Si $(P, \{p_\alpha\}_\Delta)$ es un producto directo de la familia de módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$ todos los morfismos p_α son epimorfismos.

Demostración. Dado que $(\prod_\Delta M_\alpha, \{\pi_\alpha\}_\Delta)$ es un producto directo, se tiene que, $p_\alpha \circ \varphi = \pi_\alpha \ \forall \alpha \in \Delta$ donde $\varphi : \prod_\Delta M_\alpha \longrightarrow P$ es el R-morfismo dado por la propiedad universal del producto P, ahora bien π_α es epi de donde se sigue que p_α es epi también. $\square$

Proposición. Si $(P, \{p_\alpha\}_\Delta)$ es un producto directo de la familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces existe una única familia $\{u_\alpha : M_\alpha \longrightarrow P\}_\Delta$ de R-monomorfismos tal que $p_\alpha u_\alpha = id_{M_\alpha}$ para toda $\alpha \in \Delta$ y $p_\beta u_\alpha = 0$ si $\beta \neq \alpha$.

Demostración. Sea $(P, \{p_\alpha\}_\Delta)$ un producto directo de la familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces definamos para cada $\alpha \in \Delta$ una familia de R-morfismo $\{f^\alpha_\beta : M_\alpha \longrightarrow M_\beta\}_{\beta\in\Delta}$ dada por $f^\alpha_\beta = id_{M_\alpha}$ si $\beta = \alpha$ y $f^\alpha_\beta = 0_{M_\beta}$ en otro caso, entonces por la propiedad universal del producto existe un único R-morfismo $u_\alpha : M_\alpha \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "p_\beta"] & \\ & M_\beta \\ M_\alpha \arrow[uu, "u_\alpha"] \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

entonces para toda $\alpha \in \Delta$ se tiene que $p_\beta u_\alpha = f_\beta = id_{M_\beta}$ si $\alpha = \beta$ y $p_\beta u_\alpha = O$ si $\alpha \neq \beta$, dado que $p_\alpha u_\alpha = 1_{M_\alpha}$ se tiene que $\forall \alpha \in \Delta$, u_α es mono y p_α es epi. $\square$

6.2. **Sumas Directas Externas (Coproductos).** .

Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos y $\prod_\Delta M_\alpha$ el producto directo de éstos, se define $\forall$ $(m_\alpha)_\Delta \in \prod_\Delta M_\alpha$, $sop(m_\alpha)_\Delta = \{\alpha \in \Delta \mid m_\alpha \neq 0\}$, entonces se define ;

$$\bigoplus_\Delta M_\alpha = \left\{(m_\alpha)_\Delta \in \prod_\Delta M_\alpha \mid sop(m_\alpha)\ es\ finito\right\}$$

Si $\forall \alpha \in \Delta$ se tiene que $M_\alpha = M$ utilizaremos la notación:

$$\bigoplus_\Delta M_\alpha = M^{(\Delta)}$$

Afirmación $\bigoplus_\Delta M_\alpha < \prod_\Delta M_\alpha$

Demostración. Es directo ver que $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ es un grupo, pues $0 \in \bigoplus_\Delta M_\alpha$ y si (m_α) y $(n_\alpha) \in \bigoplus_\Delta M_\alpha$ entonces $(m_\alpha) - (n_\alpha) \in \bigoplus_\Delta M_\alpha$, por último también es directo ver que $\forall\ r \in R$ $r(m_\alpha) \in \bigoplus_\Delta M_\alpha$, de donde se tiene que $\bigoplus_\Delta M_\alpha < \prod_\Delta M_\alpha$. $\square$

Definición . Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos se define $\forall\ \alpha \in \Delta$ un monomorfismo $\iota_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_\Delta M_\alpha$ dado por :

$$\iota_\alpha(m_\alpha) := (m_\beta)_\Delta$$

$$donde$$

$$m_\beta = m_\alpha \quad si \quad \beta = \alpha$$

$$y$$

$$m_\beta = 0_\beta \quad si \quad \beta \neq \alpha$$

es claro que $\iota_\alpha(m_\alpha r + m`_\alpha) = \iota_\alpha(m_\alpha)r + \iota_\alpha(m`_\alpha)$, se dice entonces que el par $(\bigoplus_\Delta M_\alpha, \{\iota_\alpha\}_\Delta)$ es la *Suma Directa Externa* de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$, denotaremos a la Suma Directa Externa únicamente por $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ quedando entendido que la familia $\{\iota_\alpha\}_\Delta$ de monomorfismos forma parte de la Suma Directa Externa.

Una vez más se tiene una *propiedad universal* sobre este nuevo objeto.

Proposición. Sea N un R-módulo y $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos , entonces para toda familia $\{f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N\}_\Delta$ de R-morfismos, existe un único R-morfismo $f : \bigoplus_\Delta M_\alpha \longrightarrow N$ tal que $\forall\ \alpha \in \Delta$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_\Delta M_\alpha \arrow[dd, dashed, "f"'] & \\
& M_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"'] \arrow[dl, "f_\alpha"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f : \bigoplus_\Delta M_\alpha \longrightarrow N$ definida por $f((m_\alpha)_\Delta) := \sum_\Delta f_\alpha(m_\alpha)$, notemos que está bien definida, pues dado que $sop(m_\alpha)$ es finito se tiene que $\sum_\Delta f_\alpha(m_\alpha) \in N$, veamos ahora que conmuta, sea $\beta \in \Delta$ y sea $m_\beta \in M_\beta$, entonces, $f\iota_\beta(m_\beta) = \sum_\Delta f_\alpha(\iota_\beta(m_\beta)) = f_\beta(m_\beta)$, pues $\iota_\beta(m_\beta)$ sólo tiene un término distinto de cero, a saber la entrada β-esima, entonces se tiene que $\forall\ \alpha \in \Delta\ \ f\iota_\alpha = f_\alpha$.

Si g es un morfismo tal que $\forall\ \alpha \in \Delta\ \ g\,\iota_\alpha = f_\alpha$, entonces, sea $(m_\alpha)_\Delta \in \bigoplus_\Delta M_\alpha$, se tiene que $f((m_\alpha)_\Delta) = \sum_\Delta f_\alpha(m_\alpha) = \sum_\Delta g(\iota_\alpha(m_\alpha)) = g\left(\sum_\Delta \iota_\alpha(m_\alpha)\right) = g((m_\alpha)_\Delta)$ de donde $f = g$. $\square$

Definición. Un R-módulo S junto con una familia $\{\ \iota_\alpha : M_\alpha \longrightarrow S\ \}_\Delta$ de R-morfismos se dice ser *Suma Directa* de la familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$ si para todo módulo N y para toda familia $\{\ f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N\ \}_\Delta$ existe un único morfismo $f : S \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dd, dashed, "f"'] & \\
& M_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"'] \arrow[dl, "f_\alpha"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

$\forall\ \alpha\ \in \Delta$.

Proposición. Si $(S, \{\iota`_\alpha\}_\Delta)$ es suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces se tiene que $\iota`_\alpha$ es mono $\forall\ \alpha\ \in \Delta$.

Demostración. Dado que $(\bigoplus_\Delta M_\alpha, \{\iota_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_\Delta M_\alpha\}_\Delta)$ es una suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$, se tiene entonces por la propiedad universal del coproducto S un morfismo $\psi : S \longrightarrow \bigoplus_\Delta M_\alpha$ tal que $\psi\iota`_\alpha = \iota_\alpha\ \forall\ \alpha\ \in\ \Delta$ ahora bien como $\iota_\alpha$ es mono se tiene entonces que $\iota`_\alpha$ es mono $\forall\ \alpha\ \in\ \Delta$. □

Proposición. La suma directa de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos es única salvo isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $(S, \{\iota_\alpha\}_\Delta)$ y $(S', \{\iota`_\alpha\}_\Delta)$ son una Suma Directa Externa de la familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces consideremos el siguiente diagrama;

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & \\
S` \arrow[d, dashed, "\psi"'] & M_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"'] \arrow[l, "\iota`_\alpha"] \arrow[dl, "\iota_\alpha"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

donde φ y ψ están dadas por la propiedad universal de la suma. Como $(\psi\varphi)\iota_\alpha = \psi(\varphi\iota_{\alpha)} = \psi\iota`_\alpha = \iota_\alpha$, para toda $\alpha \in \Delta$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dd, "\psi\varphi"'] & \\ & M_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"'] \arrow[dl, "\iota_\alpha"] \\ S & \end{tikzcd}$$

pero la identidad id_S también hace conmutar el diagrama y debido a la unicidad de tal morfismo se tiene que $\psi\varphi = id_S$. Análogamente se tiene que $\varphi\psi = id_{S^‘}$. De donde se sigue que $S \simeq S^‘$. $\square$

6.3. **Sumas Directas Internas.** .

Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de un módulo M tales que $\forall\ \beta\ \in \Delta$ se tiene que:

$$M_\beta\ \cap \sum_{\alpha\neq\beta} M_\alpha = 0$$

entonces se dice que el submódulo $\sum_\Delta M_\alpha$ es la *Suma Directa Interna* de la familia de submódulos $\{M_\alpha\}_\Delta$. Denotaremos por $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ al módulo $\sum_\Delta M_\alpha$ cuando la suma sea directa. Si $M = \bigoplus_\Delta M_\alpha$, se dice que $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ es una *descomposición en suma directa* de M.

Proposición. Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de módulos tal que, $M = \sum_\Delta M_\alpha$. Entonces la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es directa *sii* cada $m \in M$ se puede escribir de una única manera como una suma $m = \sum_\Delta m_\alpha$ donde $m_\alpha \in M_\alpha$ para toda $\alpha \in \Delta$ y $m_\alpha = 0$ para casi toda $\alpha \in \Delta$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ directa, y sea $m \in M$ tal que $\sum_\Delta m_\alpha = m = \sum_\Delta n_\alpha$, y sea $\beta \in \Delta$, observemos que $(m_\beta - n_\beta) = \sum_{\beta \neq \alpha} m_\beta - n_\beta \in \left(M_\beta \bigcap \sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta\right) = 0$. Entonces se tiene que $m_\alpha = n_\alpha \ \forall \ \alpha \in \Delta$ de donde se tiene que su expresión es única.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que todo $m \in M$ se puede *escribir* de una única manera, sea ahora $\beta \in \Delta$ y sea $m_\beta = \sum_{\alpha \neq \beta} m_\alpha \in \left(M_\beta \bigcap \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha\right)$, entonces $m_\beta - \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha = 0$ pero $0 = \sum_\Delta 0_\alpha$ y dado a la unicidad de su expresión se tiene que $m_\alpha = 0 \ \forall \ \alpha \in \Delta$, entonces $M_\beta \bigcap \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha = 0$ por lo que la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es directa. □

Observación. Sea M un R-módulo tal que $M = M_1 \bigoplus M_2$ entonces se tiene que:

$$M/M_1 \simeq M_2$$

Demostración. Dado que todo $m \in M$ se puede escribir de manera única como $m = m_1 + m_2$ con $m_1 \in M_1$ $m_2 \in M_2$ definamos primero un morfismo $\psi : M/M_1 \longrightarrow M_2$ dado por :

$$\psi(m + M_1) := m.$$

Verifiquemos primero que está bien definida. Para esto sean $m + M_1 = m^{‘} + M_1$ esto es $m = m^{‘} + m_1$ para algún $m_1 \in M_1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\psi(m + M_1) &= \psi((m^{‘} + m_1) + M_1) \\
&= \psi((m^{‘} + M_1) + (m_1 + M_1)) \\
&= \psi(m^{‘} + M_1) + \psi(m_1 + M_1) \\
&= \psi(m^{‘} + M_1).
\end{aligned}$$

Es directo verificar las propiedades de R-morfismo, también es directo verificar que es epi. Por último veamos que es mono, para esto sea $m \in M$ donde $m = m_1 + m_2$ con $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ tal que $\psi(m + M_1) = 0$ entonces $\psi(m + M_1) = \psi(\ (m_1 + M_1) + (m_2 + M_1)\ ) = \psi(m_2 + M_1) = m_2 = 0$ $(m + M_1 = m_2 + M_1)$, esto es $m + M_1 = m_2 + M_1 = \overline{0}$, de donde ψ es mono.

Con lo que se tiene que ψ es un isomorfismo, es decir, $M/M_1 \simeq M_2$. $\square$

6.4. **Módulos Libres.** .

Recordemos que si M es un R-módulo y N un subconjunto de M , se dice que N es un *conjunto generador* de M si $M = \sum_N nR$. Si N es finito se dice que M es *finitamente generado*. Observemos que todo módulo M tiene al menos un conjunto generador, a saber M.

Si X= $\{x_\alpha\}_\Delta$ es un subconjunto de M, se dice que S es *linealmente independiente* si la única manera en que una suma finita $\sum_\Delta x_\alpha r_\alpha$ sea igual a cero es cuando $r_\alpha = 0 \quad \forall\, \alpha \in \Delta$. Observemos que todo módulo M tiene al menos un conjunto linealmente independiente, a saber $\emptyset$.

Definición. Sea F un R-módulo, si F tiene un subconjunto linealmente independiente de generadores $\{x_\alpha\}_\Delta$, se dice que F es un *módulo libre* con base $\{x_\alpha\}_\Delta$.

Proposición. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un subconjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$ de un R-módulo M :

(1) $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base para M.

(2) $\{x_\alpha\}_\Delta$ es (a) un conjunto linealmente independiente máximo de M y (b) un conjunto mínimo de generadores.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\{x_\alpha\}_\Delta$ una base de M. Supongamos que existe $\{y_\beta\}_\Gamma$ un conjunto linealmente independiente de M tal que $\{x_\alpha\}_\Delta \subset \{y_\beta\}_\Gamma$, y sea $y \in (\{y_\beta\}_\Gamma \setminus \{x_\alpha\}_\Delta)$, entonces como $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base, en particular genera a y , de donde se tiene que $y = \sum_\Delta x_\alpha$ donde $x_\alpha = 0$ para casi toda $\alpha \in \Delta$ de donde $y - \sum_\Delta x_\alpha = 0$ y como esta es una suma con términos en $\{y_\beta\}_\Gamma$ se tiene que $y = 0$, de donde se tiene que $\{y_\beta\}_\Gamma \subset \{x_\alpha\}_\Delta$ esto es $\{x_\alpha\}_\Delta = \{y_\beta\}_\Gamma$, entonces $\{x_\alpha\}_\Delta$ es un conjunto linealmente independiente máximo de M. Supongamos ahora que existe $\{y_\beta\}_\Gamma \subsetneq \{x_\alpha\}_\Delta$ tal que $\{y_\beta\}_\Gamma$ genera a M, y sea $x \in (\{x_\alpha\}_\Delta \setminus \{y_\beta\}_\Gamma)$, como $\{y_\beta\}_\Gamma$ es generador se tiene

que $x = \sum_\Gamma y_\beta$ donde $y_\beta = 0$ para casi toda $\beta \in \Gamma$ entonces se tiene que $x - \sum_\Gamma y_\beta = 0$ de donde se sigue que $x = 0$ pues $x - \sum_\Gamma y_\beta$ es una suma en un conjunto linealmente independiente, entonces $\{y_\beta\}_\Gamma = \{x_\alpha\}_\Delta$, de donde $\{x_\alpha\}_\Delta$ es un conjunto mínimo de generadores.

(2) $\Rightarrow$ (1) . Sea $\{x_\alpha\}_\Delta$ un conjunto máximo linealmente independiente y un conjunto mínimo de generadores de M. Entonces por definición se tiene que $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base para M. $\square$

Proposición. Sea M es un R-módulo y $\{x_\alpha\}_\Delta$ un subconjunto de M, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes ;

(1) $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base de M.

(2) todo elemento $m \in M$ se puede escribir como una única combinación lineal finita de elementos de $\{x_\alpha\}_\Delta$.

(3) $M = \bigoplus_\Delta x_\alpha R$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Es claro que cualquier elemento de M se puede generar por $\{x_\alpha\}_\Delta$, veamos que su expresión es única. Sea $m \neq 0 \in M$ tal que $\sum_\Delta x_\alpha r_\alpha = m = \sum_\Delta x_\alpha r`_\alpha$ donde $r_\alpha$ y $r_\beta$ son cero para casi toda $\alpha, \beta \in \Delta$, entonces $\sum_\Delta x_\alpha(r_\alpha - r`_\alpha) = 0$ entonces $(r_\alpha - r`_\alpha) = 0$ por la independencia lineal del conjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$, lo cual implica que $r_\alpha = r`_\alpha$ para toda $\alpha \in \Delta$, entonces su expresión es única.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $m \in M$ tal que $m = \sum_\Delta x_\alpha r_\alpha$ es claro entonces que $m \in \sum_\Delta x_\alpha R$. Veamos ahora que la suma es directa, sea $\alpha \in \Delta$ y sea $x_\alpha r_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} m_\beta r_\beta$ donde $r_\beta = 0$ para casi toda $\beta \in \Delta$, entonces $x_\alpha r_\alpha - \sum_{\beta\neq\alpha} x_\beta r_\beta = 0$, pero $0 = \sum_\Delta x_\alpha 0$ y dado a la unicidad de su expresión se tiene que $r_\alpha = 0 \forall\ \alpha \in \Delta$, entonces $M_\alpha \bigcap \sum_{\alpha\neq\beta} M_\beta = 0$ de donde $M = \bigoplus_\Delta x_\alpha R$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es claro que $\{x_\alpha\}_\Delta$ es un conjunto generador de M. Veamos que es linealmente independiente, sea $\sum_\Delta x_\alpha r_\alpha = 0$, y sea $\beta \in \Delta$, observemos que $x_\beta r_\beta = -\sum_{\alpha\neq\beta} x_\alpha r_\alpha \in (M_\alpha \bigcap \sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta) = 0$ de donde $r_\beta = 0\ \forall\, \beta \in \Delta$, entonces el conjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$ forma una base de M. $\square$

Corolario. Un R-módulo M es libre *sii* existe un conjunto Δ tal que $M \simeq R^{(\Delta)}$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea M un módulo libre con base $\{m_\alpha\}_\Delta$, entonces $M = \bigoplus_\Delta m_\alpha R$, definamos el morfismo $\psi : \bigoplus_\Delta m_\alpha R \longrightarrow R^{(\Delta)}$ dado por $\psi\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) := (r_\alpha)_\Delta \in R^{(\Delta)}$,veamos que ψ es r-lineal, entonces;

$$\begin{aligned}
\psi\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha + \sum_\Delta m_\alpha s_\alpha\right) &= \psi\left(\sum_\Delta m_\alpha(r_\alpha + s_\alpha)\right) \\
&= (r_\alpha + s_\alpha)_\Delta \\
&= (r_\alpha)_\Delta + (s_\alpha)_\Delta \\
&= \psi\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) + \psi\left(\sum_\Delta m_\alpha s_\alpha\right) \ y \\
\psi\left((\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha)r\right) &= \psi\left(\sum_\Delta m_\alpha(r_\alpha r)\right) \\
&= (r_\alpha r)_\Delta \\
&= (r_\alpha)_\Delta r \\
&= \psi\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) r.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que ψ es monomorfismo, sea $\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha \in M$ tal que $\psi\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) = 0_{R^{(\Delta)}}$, entonces para toda $\alpha \in \Delta$ $r_\alpha = 0$, de donde $\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha = 0$, entonces ψ es monomorfismo. Veamos ahora que ψ es un epimorfismo, sea $(r_\alpha)_\Delta \in R^{(\Delta)}$ donde $r_\alpha = 0$ para casi toda $\alpha \in \Delta$ entonces se tiene que $\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha \in \bigoplus_\Delta m_\alpha R$ es tal que $\psi\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) = (r_\alpha)_\Delta$. Entonces ψ es un isomorfismo.

$\Leftarrow$) Sea ahora $M \simeq R^{(\Delta)}$ para algún conjunto Δ, si definimos para cada $\beta \in \Delta$ a $e_\beta = (m_\alpha)_\Delta$ donde $m_\alpha = 1$ si $\alpha = \beta$ y $m_\alpha = 0$ en otro caso, es fácil ver que $\{e_\alpha\}_\Delta$ es una base para $R^{(\Delta)}$, si $\psi : R^{(\Delta)} \longrightarrow M$ es un isomorfismo entonces veamos que $\{\psi(e_\alpha)\}_\Delta$ es una base para M. Veamos primero que es un conjunto generador, sea $m \in M$ entonces $\exists\ (r_\alpha)_\Delta \in R^{(\Delta)}$ tal que $\psi((r_\alpha)_\Delta) = m$, entonces $m = \psi(\sum_\Delta e_\alpha r_\alpha) = \sum_\Delta \psi(e_\alpha r_\alpha) = \sum_\Delta \psi(e_\alpha) r_\alpha$, entonces $\{\psi(e_\alpha)\}_\Delta$ genera M , veamos ahora que es un conjunto linealmente independiente, sea $\sum_\Delta \psi(e_\alpha) r_\alpha = 0$, entonces $0 = \psi^{-1}\left(\sum_\Delta \psi(e_\alpha) r_\alpha\right) = \sum_\Delta e_\alpha r_\alpha$ lo cual implica que $r_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in \Delta$, entonces el conjunto $\{\psi(e_\alpha)\}_\Delta$ es linealmente independiente, entonces M es libre. $\square$

Veamos ahora que todo morfismo que tiene por dominio un módulo libre, queda determinado de manera única por la base.

Proposición. Sea N un módulo y M un módulo libre con base $\{m_\alpha\}_\Delta$ entonces ;

(1) Si $f\ , g : M \longrightarrow N$ son R-morfismos tales que $f(m_\alpha) = g(m_\alpha)\quad \forall\ \alpha \in \Delta$, entonces $f = g$.

(2) Si $f : \{m_\alpha\}_\Delta \longrightarrow N$ es **cualquier** función, entonces existe un único R-morfismo $g : M \longrightarrow N$ tal que $f(m_\alpha) = g(m_\alpha)\quad \forall\ \alpha \in \Delta$.

Demostración.

(1) Sea $m \in M$, entonces $f(m) = f\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) = \sum_\Delta f(m_\alpha) r_\alpha = \sum_\Delta g(m_\alpha) r_\alpha = g\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) = g(m)$, entonces $f = g$.

(2) Sea $f : \{m_\alpha\}_\Delta \longrightarrow N$ una función, entonces definamos $g : M \longrightarrow N$ dada por $g(m) = g\left(\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha\right) := \sum_\Delta f(m_\alpha) r_\alpha$ donde $m = \sum_\Delta m_\alpha r_\alpha$, veamos que es un R-morfismo:

$$
\begin{aligned}
g\left(\sum_{\Delta} m_\alpha r_\alpha + \sum_{\Delta} m_\alpha s_\alpha\right) &= g\left(\sum_{\Delta} m_\alpha (r_\alpha + s_\alpha)\right) \\
&= \sum_{\Delta} f(m_\alpha)(r_\alpha + s_\alpha) \\
&= \sum_{\Delta} f(m_\alpha) r_\alpha + f(m_\alpha) s_\alpha \\
&= \sum_{\Delta} f(m_\alpha) r_\alpha + \sum_{\Delta} f(m_\alpha) s_\alpha \\
&= g\left(\sum_{\Delta} m_\alpha r_\alpha\right) + g\left(\sum_{\Delta} m_\alpha s_\alpha\right) \quad ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\left((\sum_{\Delta} m_\alpha r_\alpha) r\right) &= g\left(\sum_{\Delta} (m_\alpha r_\alpha) r\right) \\
&= \sum_{\Delta} m_\alpha (r_\alpha r) \\
&= \sum_{\Delta} f(m_\alpha)(r_\alpha r) \\
&= \sum_{\Delta} (f(m_\alpha) r_\alpha) r \\
&= g\left(\sum_{\Delta} m_\alpha r_\alpha\right) r
\end{aligned}
$$

$\forall\ m = (\sum_\Delta m_\alpha r_\alpha),\ \forall\ n = (\sum_\Delta m_\alpha s_\alpha) \in M, \forall\ r \in R$, la unicidad de este morfismo se tiene por el inciso (1) .$\square$

Observemos que para cada conjunto X se tiene un R-módulo libre $R^{(X)}$, identificaremos al conjunto $\{x\}_X$ con una base de $R^{(X)}$ de la siguiente manera, $x = (\delta^x_y)_\Delta \in R^{(X)}$, donde $\delta^x_y : X \longrightarrow R$ está definida por :

$$
\begin{aligned}
\delta^x_y = 1 \quad & si \quad y = x \\
& y \\
\delta^y_x = 0 \quad & si \quad x \neq y.
\end{aligned}
$$

Es decir, x es el elemento x-canónico de $R^{(X)}$. Notemos que si $X = \varnothing$, $R^{(X)} = \{0\}$ el cual es libre con base $\emptyset$.

Proposición. El módulo libre junto con la base $(R^{(X)}, X)$ tienen la *propiedad universal* de que para cualquier R-módulo M y para cualquier función $f : X \longrightarrow M$ existe un único R-morfismo $g : R^{(X)} \longrightarrow M$ tal que $g(x) = g((\delta_y^x)_\Delta) = f(x)$ $\forall x \in X$. Debido a que este nuevo objeto resuelve un problema de tipo universal, se tiene que para todo conjunto X el R-módulo libre $R^{(X)}$ es único salvo isomorfismo.

Proposición. Para todo módulo M existe un módulo Libre F y un epimorfismo $f : F \longrightarrow M$, es decir, todo módulo es la imagen epimorfa de un módulo libre.

Demostración. Sea M un R-módulo, y sea X un conjunto generador de M, observemos que X siempre existe pues M es un conjunto generador de él mismo. Sea ahora el R-módulo $F = R^{(X)}$ y él morfismo. $f : R^{(X)} \longrightarrow M$. Dado por $f((r_x)_X) := \sum_X xr_x$ donde $r_x = 0$ para casi toda $x \in X$. Claramente f está bien definida pues xr_x es un único elemento de M y la suma en M está bien definida cuando es finito el número de términos distintos de cero. Veamos ahora que f es un epimorfismo, sea $m \in M$ entonces como X es un conjunto generador se tiene que $m = \sum_X xr_x$ donde r_x es igual a cero para casi toda $x \in X$ entonces se tiene que $(r_x)_X \in R^{(X)}$ es tal que $f((r_x)_X) = \sum_X xr_x = m$, entonces f es un epimorfismo. □

Una observación importante es que todo R-módulo libre distinto del R-módulo trivial 0_R debe tener cardinalidad al menos la de R, pues recordemos que un módulo F es libre si existe un conjunto Δ tal que $F \simeq R^{(\Delta)}$.

Proposición. Todo epimorfismo que tenga como codominio un módulo libre se escinde.

Demostración. Sea el epimorfismo $g : M \longrightarrow F$, donde F es libre con base X entonces por la propiedad universal de la base X y debido a que g es epi, $\exists$ un morfismo $f : F \longrightarrow M$ tal que $f(x) = m$ donde $g(m) = x$ $\forall\, x \in X$, entonces se tiene que $g(f(x)) = g(m) = x$, esto es $g \circ f = 1_F$, entonces f se escinde □.

Esta última observación nos dice que $M = Im(f) \bigoplus Ker(g)$, y dado que

f es mono ($Im(f) \simeq F$)se tiene que el módulo libre *es* sumando directo del dominio.

6.5. **Límites Directos.** .

Definición. Sea $(I, \leqslant)$ un conjunto dirigido superiormente, esto es, I un conjunto parcialmente ordenado (COPO) que satisface la siguiente condición:

$$\forall\ i, j\ \in\ I\ \exists\ k \in I \quad tal\ \ que \quad i \leqslant k \quad y \quad j \leqslant k.$$

Sea $\{M_i\}_I$ una familia de R-Módulos y $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i \leqslant j})$ un sistema dirigido (superiormente) de R-Módulos, esto es, $\forall\ i,\ j\ \in\ I$ tales que $i \leqslant j$ $\exists$ $\varphi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ R-morfismo, donde $\varphi_{ii} = 1_{M_i}$ $\forall\ i\ \in\ I$, y $\forall\ e\ \in\ I$ tal que $i \leqslant e \leqslant j$ se tiene que $\varphi_{ij} = \varphi_{ej} \circ \varphi_{ie}$. Entonces el *Límite Directo* del sistema dirigido $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i \leqslant j})$ es un R-módulo $\varinjlim M_i$ junto con una familia de R-morfismos $\{\alpha_i : M_i \longrightarrow \varinjlim M_i\}_I$ que cumplen las siguientes condiciones :

1. $\forall\, i, j\, \in\, I$ tales que $i \leqslant j$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ \varphi_{ij}$

2. Si M es un R-módulo y $\{\beta_i : M_i \longrightarrow M\}_I$ una familia de R-morfismos compatibles con el sistema dirigido, esto es, $\beta_i = \beta_j \circ \varphi_{ij}$ $\forall$ $i \leqslant j$, entonces existe un único R-morfismo $f : \varinjlim M_i \longrightarrow M$ tal que $\beta_i = f\alpha_i$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim M_i \arrow[rr, dashed, "f"] & & M \\
& M_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & \\
& M_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall i \in I$.

Proposición. El Límite Directo de un sistema dirigido $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i \leqslant j}))$ de R-módulos existe.

Demostración. Si $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i \leqslant j})$ es un sistema dirigido de R-módulos sea S el submódulo de $\bigoplus_I M_i$ generado por los siguientes elementos;

$$S := < \iota_i(m_i) - \iota_j \varphi_{ij}(m_i) >$$

donde $\iota_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_I M_i$ es la i-canónica inyección, sea $\pi_S : \bigoplus M_i \longrightarrow (\bigoplus M_i)/S$ el morfismos de proyección sobre el cociente $\bigoplus M_i/S$, y sea $\pi_S \circ \iota_i = \alpha_i$ entonces se afirma que $((\bigoplus_I M_i)/S, \ \{\alpha_i\}_I)$ es Límite Directo del sistema dirigido, pues;

1. $\forall \ m_i \in M_i \ \ i,j \in I$ tales que $i \leqslant j$ se tiene que, $\alpha_i(m_i) = \alpha_j(\varphi_{ij}(m_i))$ *sii* $\iota_i(m_i) + S = \iota_j((\varphi_{ij}(m_i)) + S$ *sii* $(\iota_i(m_i) - \iota_j(\varphi_{ij}(m_i))) + S = 0$ *sii* $\iota_i(m_i) - \iota_j(\varphi_{ij}(m_i)) \in S$ lo cual es cierto por construcción, de donde $\alpha_i = \alpha_j \varphi_{ij}$.

2. Sea M un R-módulos y $\{\beta_i : M_i \longrightarrow M\}_I$ una familia de R-morfismos tales que $\forall \ i \leqslant j$ se tiene que $\beta_i = \beta_j \varphi_{ij}$ entonces definamos el siguiente morfismo $f : (\bigoplus M_i)/S \longrightarrow M$ dado por $f((m_i)_I + S) := \sum_I \beta_i(m_i)$. Observemos que aunque estemos haciendo una suma sobre un conjunto posiblemente infinito, el morfismo f está bien definido pues $(m_i) \in \bigoplus M_i$ de donde $sop((m_i))$ es finito, es decir, sólo para una cantidad finita de $j \in I \ \ m_j \neq 0$, entonces se tiene que ;

$$\begin{aligned} f(\alpha_i(m_i)) &= f(\iota_i(m_i) + S) \\ &= \sum \beta_j(\iota_i(m_i)) \\ &= \beta_i(m_i) \end{aligned}$$

de donde $\beta_i = f\,\alpha_i \ \ \forall \ i \in \ I$, y si $g : (\bigoplus M_i)/S \longrightarrow M$ es un R-morfismo tal que $\forall \ i \in I$ se tiene que $g\alpha_i = \beta_i$ entonces se tiene que $f((m_i) + S) = f(\sum \alpha_i(m_i)) = \sum f(\alpha_i(m_i)) = \sum \beta_i(m_i) = \sum g(\alpha_i(m_i)) = g((m_i) + S)$ de donde

$f = g$.□

Proposición. El Límite Directo de un sistema dirigido $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i\leqslant j})$ de R-módulos es único salvo isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $(X, \{\alpha_{ij}\})$ y $(Y, \{\beta_{ij}\})$ son límite directo de $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i\leqslant j})$, entonces sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ los R-morfismos dados por la propiedad universal de los límites directos X y Y respectivamente, es decir, se tiene los siguientes diagramas conmutativos;

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "f"] & & Y \\
& M_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & \\
& M_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, dashed, "g"] & & X \\
& M_i \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & \\
& M_j \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall\ i \in I$ entonces se tiene que $\beta_i = f\alpha_i = fg\beta_i$, es decir, $\forall i \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, dashed, "fg"] & & Y \\ & M_i \arrow[ul, "\beta_i"'] \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & \\ & M_j \arrow[uul, "\beta_j"] \arrow[uur, "\beta_j"'] & \end{tikzcd}$$

pero la identidad 1_Y también hace conmutativo el diagrama y dada la unicidad de dicho morfismo se tiene que $1_Y \simeq fg$, análogamente se tiene que $1_X \simeq gf$, de donde, $X \simeq Y$.$\square$

6.6. **Límites Inversos.** .

Definición. Sea $(I, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado (COPO), $\{M_i\}_I$ una familia de R-módulos y $(\{M_i\}_I, \{\psi_{ji}\}_{i\leqslant j})$ un sistema inverso de R-módulos, esto es, $\forall\ i, j \ \in\ I$ tales que $i \leqslant j$ existe $\psi_{ji} : M_j \longrightarrow M_i$ R-morfismo, donde $\psi_{ii} = 1_{M_1}\ \forall\ i\ \in\ I$ y $\forall\ e\ \in\ I$ tal que $i \leqslant e \leqslant j$ se tiene que $\psi_{ji} = \psi_{ei} \circ \psi_{je}$, entonces el *Límite Inverso* del sistema inverso es un R-módulo $\varprojlim M_i$ junto con una familia de R-morfismos $\{\tau_i : \varprojlim M_i \longrightarrow M_i\}_I$ tales que;

1. $\forall\, i, j\ \in\ I$ tales que $i \leqslant j$ se tiene que $\tau_i = \psi_{ji} \circ \tau_j$.

2. Si M es un R-módulo y $\{\beta_i : M \longrightarrow M_i\}_I$ es una familia de R-morfismos tales que $\beta_i = \psi_{ji} \circ \beta_j \quad \forall \quad i \leqslant j$, entonces existe un único R-morfismo $g : M \longrightarrow \varprojlim M_i$ tal que $\beta_i = \tau_i g$, es decir, $\forall\, i \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim M_i \arrow[dr, "\tau_i"] \arrow[ddr, "\tau_j"'] & & M \arrow[ll, dashed, "g"'] \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[ddl, "\beta_j"] \\
& M_i & \\
& M_j \arrow[u, "\psi_{ji}"] &
\end{tikzcd}
$$

Proposición. El Límite Inverso de un sistema inverso de R-módulos $(\{M_i\}_I, \{\psi_{ji}\}_{i\leqslant j})$ existe.

Demostración. Definamos

$$L := \{\ (m_i)_I \in \prod M_i\ \mid\ \forall\ \ i \leqslant j\ \ \psi_{ji}(m_j) = m_i\ \}$$

notemos que $L \neq \varnothing$ pues $(0_i)_I \in L$. Se afirma entonces que $L < \prod M_i$.
Demostración. Sean $r \in R$, $(m_i)_I\ (n_i)_I \in L$, $i \leqslant j$ entonces;

$$
\begin{aligned}
\psi(m_j - r(n_j)) &= \psi(m_j) - r\psi(n_j) \\
&= m_i - rn_i
\end{aligned}
$$

esto es $(m_j)_I - r(n_j)_I \in L$, de donde $L < \prod M_i$.

Si $\pi_i : \prod M_i \longrightarrow M_i$ es la proyección del producto a M_i, definamos $\tau_i = \pi_i|_L$ la proyección restringida al submódulo L, entonces se afirma que $(\ L,\ \{\tau_i\}_I\ )$ es Límite Directo del sistema inverso pues;

1. $\forall\ i \leqslant j$ se tiene que $\psi_{ji}(\tau_j((m_i))) = \tau_i((m_i))$ *sii* $\psi_{ji}(m_j) = m_i$ lo cual sucede por construcción .

2. Si M es un R-módulo y $\{\ \beta_i : M \longrightarrow M_i\ \}_I$ es una familia de R-morfismos, tales que, $\forall\ i \leqslant j$ se tiene que $\beta_i = \psi_{ji} \circ \beta_j$, definamos entonces un morfismo

$g : M \longrightarrow L$ dado por ;

$$g(m) := (\beta_i(m))_I$$

claramente está bien definida, además $g(\beta_i(m)) \in L$ pues $\forall\, i \leqslant j$ se tiene que $\beta_i(m) = \psi_{ji}(\beta_j(m))$, además $\tau_i(g(m)) = \tau_i(\beta_j(m)) = \beta_i(m)$ de donde se tiene que $\forall\, i \in I$ $\beta_i = \tau_i \circ g$. Por último veamos la unicidad de g, para esto sea $h : M \longrightarrow L$ un R-morfismo tal que $\forall\, i \in I$ se tiene que $\beta_i = \tau_i \circ h$, entonces ;

$$\begin{aligned} g(m) &= (\beta_i(m))_I \\ &= \sum_I \iota_i(\beta_i(m)) \\ &= \sum_I \iota_i(\tau_i(h(m))) \\ &= h(m) \end{aligned}$$

Donde $\iota_i : M_i \longrightarrow \prod M_i$ es la i-canónica inyección. Esto es $g = h$. Entonces $(L,\ \{\tau_i\}_I)$ es Límite Directo. $\square$

Como todo módulo obtenido en respuesta a un problema de *propiedad universal*, el Límite Inverso de un sistema inverso es único salvo isomorfismo.

Proposición. El Límite Inverso de un sistema dirigido de R-módulos es único salvo isomorfismo.

Demostración. Sea $(\{M_i\}_I,\ \{\psi_{ji}\}_{i\leqslant j})$ un sistema inverso de R-módulos y $(X\ ,\ \{\alpha_i\}_I)$, $(Y\ ,\ \{\beta_i\}_I)$ límites inversos del sistema, sean $f : Y \longrightarrow X$ y $g : Y \longrightarrow X$ los R-morfismos dados por la propiedad universal de los límites directos X y Y respectivamente. Es decir $\forall\, i \in I$ se tiene que $\beta_i = \alpha_i \circ f$ y $\alpha_i = \beta_i \circ g$, entonces se tiene que $\beta_i = \alpha_i f = (\beta_i g) f = \beta_i(gf)$ es decir, se tienen los siguientes diagramas conmutativos :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & Y \arrow[ll, dashed, "f"'] \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[ddl, "\beta_j"] \\
& M_i & \\
& M_j \arrow[u, "\psi_{ji}"] &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[ddr, "\beta_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "g"'] \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[ddl, "\alpha_j"] \\
& M_i & \\
& M_j \arrow[u, "\psi_{ji}"] &
\end{tikzcd}$$

$\forall\, i \in I$, entonces se tiene que $\beta_i = \alpha_i f = (\beta_i g) f = \beta_i (gf)$ es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[ddr, "\beta_j"'] & & Y \arrow[ll, "gf"'] \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[ddl, "\beta_j"] \\
& M_i & \\
& M_j \arrow[u, "\psi_{ji}"] &
\end{tikzcd}$$

pero la identidad 1_Y también hace conmutativo el diagrama y debido a la unicidad de dicho morfismo se tiene que $fg = 1_Y$. Análogamente se tiene que $gf = 1_X$ de donde $X \simeq Y$. $\square$

6.7. **Producto Tensorial.** .

Introduciremos ahora el producto tensorial de dos módulos como una *linealización* del producto.

Definición. Sean M un R-módulo derecho (M_R) y N un R-módulo izquierdo $({}_RN)$ y G un $\mathbb{Z}$ -módulo, entonces se dice que una función $\rho : M \times N \longrightarrow G$ es *R-balanceada* si ;

$$\rho((m_1 + m_2,\ n_1)) = \rho((m_1,\ n_1)) + \rho((m_2,\ n_1))$$

$$\rho((m_1,\ n_1 + n_2)) = \rho((m_1, n_1)) + \rho((m_1, n_2))$$

$$\rho((m_1 r,\ n_1)) = \rho((m_1,\ r n_1))$$

$\forall\ m_1, m_2 \in M\ n_1, n_2 \in N\ r \in R$. ρ es llamada una función *bilineal*.

Definición. Si M es un R-módulo derecho (M_R) y N un R-módulo izquierdo $({}_RN)$, entonces un grupo abeliano T junto con una función R-balanceada $\rho : M \times N \longrightarrow T$ es un *Producto Tensorial de M y N* $(T,\ \rho)$ si para todo R-módulo abeliano G y para toda función R-balanceada $\psi : M \times N \longrightarrow G$, existe un único morfismo de grupos $f : T \longrightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, dashed, "f"] \\ M \times N \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

La función ρ es llamada la *función R-balanceada canónica* de $M \times N$ a T. Denotaremos al producto tensorial de M y N por $M \otimes N$ quedando entendido que el morfismo R-balanceado correspondiente es parte del producto.

Proposición. El producto tensorial de cualesquier dos R-módulos M_R y $_RN$ $(M \otimes N)$ existe.

Demostración. Consideremos el módulo abeliano libre $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ con base $\{\delta(m,n)\}_{M\times N}$ y sea $H =< A \cup B \cup C >$ donde :

$$A := \{\delta(m_1 + m_2, n_1) - \delta(m_1, n) - \delta(m_2, n) \mid \forall\, n \in N \ \forall\, m_1, m_2 \in M \}$$

$$B := \{\delta(m, n_1 + n_2) - \delta(m, n_1) - \delta(m_1, n_2) \mid \forall\, n_1, n_2 \in N \ \forall\, m \in M \}$$

$$C := \{\delta(mr, n) - \delta(m, rn) \mid \forall\, n \in N \ \forall\, m \in M \ \forall\, r \in R \}.$$

Donde $\delta(m_1, n_1) \in \mathbb{Z}^{M\times N}$ es el elemento básico canónico en la coordenada (m_1, n_1) de $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$, es decir :

$\delta(m_1, n_1) = 1_{\mathbb{Z}}$ si $(m, n) = (m_1, n_1)$

$\delta(m_1, n_1) = 0_{\mathbb{Z}}$ si $(m, n) \neq (m_1, n_1)$.

Si $\rho : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}^{(M\times N)}/\, H$ es la proyección en el grupo cociente dada por $\rho((m, n)) = \delta(m, n) + H$ entonces se afirma que $(\mathbb{Z}^{(M\times N)}/\, H \ , \rho\ )$ es el producto tensorial de M_R y $_RN$ pues ;

$\bullet$) ρ es R-balanceada, sean $m_1, m_2, m \in M$ $n_1, n_2, n \in N$ y $r \in R$ entonces

$$\begin{gathered}\rho\left((m_1+m_2,n)\right)=\rho((m_1,n))+\rho((m_2,n))\\ sii\\ \delta(m_1+m_2,n)+H=(\delta(m_1,n)+H)+(\delta(m_2,n)+H)\\ sii\\ \delta(m_1+m_2,n)-\delta(m_1,n)-\delta(m_2,n)\in H\end{gathered}$$

lo cual es cierto por construcción. Análogamente se tiene que;

$$\begin{gathered}\rho((m,n_1+n_2))=\rho(m,n_1)+\rho(m,n_2)\\ sii\\ \delta(m,n_1+n_2)+H=(\delta(m,n_1)+H)+(\delta(m,n_2)+H)\\ sii\\ \delta(m,n_1+n_2)-\delta(m,n_1)-\delta(m,n_2)\in H\end{gathered}$$

y finalmente :

$$\begin{gathered}\rho((mr,n))=\rho((m,rn))\\ sii\\ \delta(mr,n)+H=\delta(m,rn)+H\\ sii\\ \delta(mr,n)-\delta(m,rn))\in H\end{gathered}$$

lo cual sucede por construcción de H.

$\bullet$) ρ *factoriza* cualquier función R-balanceada. Para esto sea $G \in \mathbb{Z}-Mod$ y sea $\psi : M \times N \longrightarrow G$ una función R-balanceada, como $M \times N$ forma una base de $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ (con la definición dada anteriormente), ψ se puede extender de manera única a un $\mathbb{Z}$-morfismo $g : \mathbb{Z}^{(M\times N)} \longrightarrow G$ tal que $g((m,n)) = \psi((m,n))$, $\forall\ (m,n) \in M \times N$. Observemos ahora que como ψ es R-balanceada se tiene que $\psi(H) = 0$, entonces por la propiedad universal del cociente se tiene un morfismo $f : \mathbb{Z}^{(M\times N)}/H \longrightarrow G$ que es único tal que $f\rho = \psi$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}^{(M\times N)}/H \arrow[dd, dashed, "f"] \\
M\times N \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
& G.
\end{tikzcd}$$

De donde se tiene que $(\mathbb{Z}^{(M\times N)}/H, \rho)$ es el producto tensorial de M_R y ${}_RN$.$\square$

Denotaremos de ahora en adelante a $\mathbb{Z}^{(M\times N)}/H$ por $M\otimes_R N$ y a $\rho((m,n)) = \delta(m,n)+H$ como $m\otimes n$ observando que no cualquier elemento de $M\otimes_R N$ se puede escribir de está manera, aunque si como una combinación lineal de éstos, es decir, $\forall\ x\in M\otimes_R N$ se tiene que $x=\sum\ z_{(m,n)}(m\otimes n)$ donde $z_{(m,n)}\ \in\ \mathbb{Z}$ $\forall\ (m,n)\in M\times N$ y $z_{(m,n)}=0$ para casi toda $(m,n)\in M\times N$.

Proposición. El producto tensorial de dos R-módulos M_R y ${}_RN$ es único salvo isomorfismo.

Demostración. Sean (T,ρ) y (T',ρ') dos productos tensoriales de M_R y ${}_RN$: Entonces por la propiedad universal del producto tensorial existen morfismos de grupo $f:T\longrightarrow T'$ y $f':T'\longrightarrow T$ tal que el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, "f"] \\
M\times N \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "\rho'"] \arrow[dr, "\rho"'] & T' \arrow[d, "f'"] \\
& T.
\end{tikzcd}$$

De donde se tiene que $(f'\circ f)\circ\rho = f'\circ(f\circ\rho) = \rho'\circ f' = \rho$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, "f`f"] \\
M \times N \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & \\
 & T.
\end{tikzcd}$$

Pero la identidad 1_T también hace conmutar el diagrama y debido a la unicidad de dicho morfismo (por propiedades del producto tensorial), se tiene que $1_T = f` \circ f$. Análogamente se tiene que $1_{T`} = f \circ f`$, de donde $T \simeq T`$. □

Proposición. Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : M_1 \longrightarrow N_1$ son R-morfismos entonces existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo

$$f \otimes g : M \otimes_R M_1 \longrightarrow N \otimes_R N_1$$

tal que $(f \otimes g)(m \otimes m_1) = f(m) \otimes g(m_1) \ \ \forall \ \ m \otimes m_1 \in M \otimes_R M_1$.

Demostración. Sea $h : (M \times M_1) \longrightarrow N \otimes N_1$ dada por :

$$h((m, m_1)) := \rho`((f \times g)((m, m_1))),$$

donde $(f \times g)$ es el morfismo producto de la familia de R-morfismos $\{f \, , g\}$ y $\rho`$ es la función R-balanceada canónica de $N \times N_1$ en $N \otimes_R N_1$ entonces se afirma que h es R-balanceada, pues ;

$$\begin{aligned}
h(((m+m\prime),m_1)) &= \rho\prime(((f(m+m\prime),g(m_1))) \\
&= \rho\prime((((f(m)+f(m\prime)),g(m_1))) \\
&= ((f(m)+f(m\prime))\otimes g(m_1)) \\
&= (f(m)\otimes g(m_1)) + (f(m\prime)\otimes g(m_1)) \\
&= (\rho\prime(f(m),g(m_1))) + (\rho\prime(f(m\prime),g(m_1))) \\
&= (\rho\prime((f\times g)(m,m_1))) + (\rho\prime((f\times g)(m\prime,m_1))) \\
&= h((m,m_1)) + h((m\prime,m_1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h((m,(m_1+m_1\prime))) &= \rho\prime(((f(m),g((m_1+m_1\prime)))) \\
&= \rho\prime(((f(m),g(m_1)+g(m_1\prime))) \\
&= f(m)\otimes(g(m_1)+g(m_1\prime)) \\
&= (f(m)\otimes g(m_1)) + (f(m)\otimes g(m_1\prime)) \\
&= (\rho\prime(f(m),g(m_1))) + (\rho\prime(f(m),g(m_1\prime))) \\
&= (\rho\prime((f\times g)(m,m_1))) + (\rho\prime((f\times g)(m,m_1\prime))) \\
&= h(m,m_1) + h(m,m_1\prime)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(mr,m_1) &= \rho\prime(f(mr),g(m_1)) \\
&= \rho\prime(f(m)r,g(m_1)) \\
&= f(m)r\otimes g(m_1) \\
&= f(m)\otimes rg(m_1) \\
&= f(m)\otimes g(rm_1) \\
&= \rho\prime(f(m),g(rm_1)) \\
&= h(m,rm_1).
\end{aligned}$$

Entonces por la propiedad universal del producto tensorial existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo $f\otimes g : M\otimes_R M_1 \longrightarrow N\otimes N_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{tikzcd}
M \times M_1 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dr, "h"] & M \otimes_R M_1 \arrow[d, dashed, "f\otimes g"] \\
N \times N_1 \arrow[r, "\rho\prime"] & N \otimes N_1
\end{tikzcd}$$

y $\forall\ (m \otimes m_1)\ \in M \otimes_R M_1$ se tiene que $(f \otimes g)(m \otimes m_1) = f(m) \otimes g(m_1)$.□

Proposición. Si M es un R-módulo entonces $M \otimes_R R \simeq M$ como R-módulos.

Demostración. Veamos primero que $M \otimes_R R$ es un R-módulo definiendo:

$$(m \otimes r)r_1 := m \otimes rr_1$$

$\forall\ m \otimes r \in M \otimes R$. Así pues, se tiene que $\forall\ x = \sum z_{(m,r)}\ (m \otimes r) \in M \otimes_R R$, $xr_1 = \left(\sum z_{(m,r)}\ (m \otimes r)\right) r_1 = \sum z_{(m,r)}\ (m \otimes rr_1)$. Sean ahora $x, y \in M \otimes_R R,\ s,\ p \in R$ entonces :

$$\begin{aligned}
(x+y)s &= \left(\sum z_{(m,r)}(m \otimes r) + \sum z`_{(m,r)}(m \otimes r)\right) s \\
&= \left(\sum \left(z_{(m,r)} + z`_{(m,n)}\right)(m \otimes r)\right) s \\
&= \sum \left(z_{(m,r)} + z`_{(m,n)}\right)(m \otimes rs) \\
&= \sum z_{(m,n)}(m \otimes rs) + \sum z`_{(m,n)}(m \otimes rs) \\
&= xs + ys
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(s+p) &= \sum z_{(m,n)}(m \otimes r(s+p)) \\
&= \sum z_{(m,n)}(m \otimes (rs+rp)) \\
&= \sum z_{(m,n)}\left((m \otimes rs) + (m \otimes rp)\right) \\
&= \sum z_{(m,n)}(m \otimes rs) + \sum z_{(m,n)}(m \otimes rp) \\
&= xs + xp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(\,s\,p\,) &= \sum z_{(m,n)}(m \otimes r(sp)) \\
&= \sum z_{(m,n)}(m \otimes (rs)p) \\
&= \left(\sum z_{(m,n)}(m \otimes rs)\right) p \\
&= (xs)p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x1 &= \sum z_{(m,n)}(m \otimes r1) \\
&= \sum z_{(m,n)}(m \otimes r) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Construyamos ahora el isomorfismo de la siguiente manera, sea $\psi : M \times R \longrightarrow M$ definida por $\psi((m,r)) = mr$, se afirma entonces que ψ es bilineal pues :

$$\begin{aligned}
\psi((m_1+m_2,r)) &= (m_1+m_2)r \\
&= m_1r + m_2r \\
&= \psi((m_1,r)) + \psi((m_2,r))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(m, r_1+r_2) &= m(r_1+r_2) \\
&= mr_1 + mr_2 \\
&= \psi((m,r_1)) + \psi((m,r_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(mr, r_1) &= (mr)r_1 \\
&= m(rr_1) \\
&= \psi((m, rr_1)).
\end{aligned}$$

$\forall\ m, m_1, m_2 \ \in\ M \quad r, r_1, r_2 \ \in\ R$. Entonces existe $\ f : M \otimes_R N \longrightarrow M$

tal que $f\rho = \psi$ donde ρ es la función bilineal canónica. Entonces se tiene que $f(m \otimes r) = mr$ para cada $m \otimes r$ en el conjunto de generadores, observemos entonces que $\forall\, s \in R$:

$$\begin{aligned} f((m \otimes r)s) &= f((m \otimes rs)) \\ &= m(rs) \\ &= (mr)s \\ &= f((m \otimes r))s. \end{aligned}$$

Entonces f es un R-morfismo. Definamos ahora $g : M \longrightarrow M \otimes R$ por $g(m) := m \otimes 1$. Se tiene que g está bien definida y además $\forall\, m, n \in M,\ s \in R$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f(m+n) &= (m+n) \otimes 1 \\ &= (m \otimes 1) + (n \otimes 1) \\ &= f(m) + f(n) \\ f(ms) &= ms \otimes 1 \\ &= m \otimes s1 \\ &= m \otimes 1s \\ &= (m \otimes 1)s. \\ &= f(m)s. \end{aligned}$$

ç

Esto es, g es un R-morfismo. Veamos por último que f y g son inversas, pues $f(g(m \otimes r)) = f(mr) = mr \otimes 1 = m \otimes r1 = m \otimes r$ entonces $fg = 1_{M \otimes R}$ y $g(f(m)) = g(m \otimes 1) = m1 = m$ es decir $gf = 1_M$ de donde $M \otimes_R R$.$\square$

También tenemos que para todo R-módulo izquierdo ${}_RN$, $R \otimes_R N \simeq N$.

Las siguientes proposiciones nos muestran una especial relación que más adelante definiremos (adjunción) entre las construcciones previamente realizadas: el producto tensorial, el límite inverso, límite directo y la suma directa.

Proposición. Si M es un R-módulo derecho y $\{N_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos izquierdos, entonces;

$$M \otimes_R (\bigoplus_\Delta N_\alpha) \simeq \bigoplus_\Delta (M \otimes N_\alpha)$$

Demostración. Veamos entonces que $(M \otimes_R (\bigoplus_\Delta N_\alpha), \{\iota`_\alpha\}_\Delta)$ tiene la propiedad universal de la suma directa sobre la familia $\{M \otimes_R N_\alpha\}_\Delta$, con lo que se tendría que $M \otimes_R (\bigoplus_\Delta N_\alpha) \simeq \bigoplus_\Delta (M \otimes N_\alpha)$ (unicidad de la suma directa) . Para esto sea G un $\mathbb{Z}$ -módulo y $\{f_\alpha : M \otimes_R N_\alpha \longrightarrow G\}_\Delta$ una familia de $\mathbb{Z}$-morfismos, definamos entonces $f : M \otimes_R (\bigoplus N_\alpha) \longrightarrow G$ dada por :

$$f(m \otimes (n_\alpha)_\Delta) := \sum f_\alpha(\ m \otimes \pi_\alpha((n_\alpha))\ ).$$

Donde $\pi_\alpha : \bigoplus N_\alpha \longrightarrow N_\alpha$ es la correspondiente proyección, entonces $\forall\ x = \sum z_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta) \in M \otimes_R (\bigoplus N_\alpha)$, $z_{(m,(n_\alpha))} \in \mathbb{Z}$ $\forall$ $(m,(n_\alpha)) \in M \times (\bigoplus N_\alpha)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sum z_{(m,(n_\alpha))} (m \otimes (n_\alpha)_\Delta)) \\ &= \sum f_\alpha(z_{(m,(n_\alpha))} (m \otimes n_\alpha)) \\ &= \sum z_{(m,(n_\alpha))} f_\alpha((m \otimes n_\alpha)). \end{aligned}$$

Se afirma entonces que f es $\mathbb{Z}$-morfismo. Veamos primero que está bien definida (se tiene una suma indicada por un conjunto posiblemente infinito) pues $(n_\alpha) \in \bigoplus N_\alpha$ esto es $\pi_\alpha = 0$ para casi toda $\alpha \in \Delta$, y debido a que $m \otimes 0 = m \otimes (0+0) = (m \otimes 0) + (m \otimes\ 0) = 0$ se tiene que $m \otimes \pi_\alpha((n_\alpha)) = 0$ para casi toda $\alpha \in \Delta$, y si $x = \sum z_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta)$, $y = \sum z`_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta) \in$

$M \otimes_R (\bigoplus N_\alpha)$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f\left(\sum\ z_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta) + \sum z`_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta)\right)\\
&= f\left(\sum (z_{(m,(n_\alpha))} + z`_{(m,(n_\alpha))})(m \otimes (n_\alpha)_\Delta)\right)\\
&= \sum \left(f_\alpha(z_{(m,(n_\alpha))} + z`_{(m,(n_\alpha))}))(m \otimes (n_\alpha)_\Delta)\right)\\
&= \sum (z_{(m,(n_\alpha))} + z`_{(m,(n_\alpha))})\,(f_\alpha(m \otimes (n_\alpha)_\Delta)))\\
&= \sum \left(z_{(m,(n_\alpha))} f_\alpha((m \otimes (n_\alpha)_\Delta))\right) + \sum \left(z`_{(m,(n_\alpha))} f_\alpha((m \otimes (n_\alpha)_\Delta)\right)\\
&= \sum \left(f_\alpha(z_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta))\right) + \sum \left(f_\alpha(z`_{(m,(n_\alpha))}(m \otimes (n_\alpha)_\Delta)\right)\\
&= f(x) + f(y).
\end{aligned}$$

Definimos ahora para cada $\alpha \in \Delta$ $\ i_\alpha : M \times N_\alpha \longrightarrow M \otimes_R (\bigoplus_\Delta N_\alpha)$ dada por $i_\alpha((m, n_\alpha)) := m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha))$ donde $\iota_\alpha : N_\alpha \longrightarrow \bigoplus N_\alpha$ es la i -canónica inyección, se afirma que i_α es bilineal pues;

$$\begin{aligned}
i_\alpha((m + m\prime, n_\alpha)) &= (m + m\prime) \otimes \iota_\alpha(n_\alpha)\\
&= (m \otimes \iota_\alpha(n_\alpha)) + (m\prime \otimes \iota_\alpha(n_\alpha))\\
&= i_\alpha((m, n_\alpha)) + i_\alpha((m\prime, n_\alpha))\\
i_\alpha((m, n_\alpha + n\prime_\alpha)) &= m \otimes \iota_\alpha(n_\alpha + n\prime_\alpha)\\
&= m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha) + \iota_\alpha(n\prime_\alpha))\\
&= (m \otimes \iota_\alpha(n_\alpha) + (m \otimes \iota_\alpha(n_\alpha)\\
&= i_\alpha((m, n_\alpha)) + i_\alpha(m, n\prime_\alpha)\\
i_\alpha((m, rn_\alpha)) &= m \otimes \iota_\alpha(rn_\alpha)\\
&= m \otimes r(\iota_\alpha(n_\alpha))\\
&= mr \otimes \iota_\alpha(n_\alpha)\\
&= i_\alpha((mr, n_\alpha)).
\end{aligned}$$

$\forall\ m, m\prime \in M \ \ n_\alpha, n\prime_\alpha \in N_\alpha \ \ r \in R$, sea entonces $\iota`_\alpha : M \otimes N_\alpha \longrightarrow M \otimes_R (\bigoplus_\Delta N_\alpha)$ el $\mathbb{Z}$ -morfismo inducido por dicha función bilineal tal que $\iota`_\alpha(m \otimes n_\alpha) = m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha))$. Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N_\alpha \arrow[r, "\iota`_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & M \otimes_R (\bigoplus N_\alpha) \arrow[d, dashed, "f"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$\forall\, \alpha \in \Delta$, pues $f(\iota`_\alpha(m \otimes n_\alpha)) = f(m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha))) = \sum f_\beta\,(m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha))$ por último observemos que $f_\beta\,(m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha)\,) = 0$ si $\beta \neq \alpha$ de donde $\sum f_\beta(\, m \otimes (\iota_\alpha(n_\alpha)) = f_\alpha(m \otimes n_\alpha)$. Finalmente verifiquemos la unicidad de f para esto sea $g : M \otimes (\bigoplus N_\alpha) \longrightarrow G$ es un $\mathbb{Z}$-morfismo que factoriza a la familia $\{f_\alpha\}_\Delta$, es decir, $g \circ \iota`_\alpha = f_\alpha$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(m \otimes (n_\alpha)) &= f(m \otimes \sum \iota_\alpha(\pi_\alpha((n_\alpha)))) \\
&= \sum (f_\alpha(m \otimes \pi_\alpha(\sum \iota_\alpha(\pi_\alpha((n_\alpha)))))) \\
&= \sum (f_\alpha(m \otimes (\sum \pi_\alpha(\iota_\alpha(\pi_\alpha((n_\alpha))))))) \\
&= \sum (f_\alpha(m \otimes (\sum \pi_\alpha((n_\alpha)))))) \\
&= \sum f_\alpha(m \otimes n_\alpha) \\
&= \sum g(\iota`_\alpha(m \otimes n_\alpha)) \\
&= \sum g(m \otimes \iota_\alpha(n_\alpha)) \\
&= g(\sum m \otimes \iota_\alpha(n_\alpha)) \\
&= g(m \otimes (\sum \iota_\alpha(n_\alpha))) \\
&= g(m \otimes (n_\alpha)).
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que $((M \otimes_R (\bigoplus N_\alpha)), \{\iota`_\alpha\}_\Delta)$ es el producto directo de la familia $\{M \otimes_R N_\alpha\}_\Delta$, y finalmente debido a la unicidad de dicho *objeto* se tiene que $M \otimes_R (\,\bigoplus_\Delta N_\alpha) \simeq \bigoplus_\Delta (M \otimes N_\alpha)$. $\square$

De manera analoga se demuestra que si M es un R-módulo izquierdo y $\{N_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos entonces $(\,\bigoplus_\Delta N_\alpha) \otimes_R M \simeq \bigoplus_\Delta (N_\alpha \otimes M)$

Proposición. Si M es un R-módulo derecho y $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i\leqslant j})$ un sistema dirigido de R-módulos izquierdos entonces:

$$M \otimes_R (\varinjlim M_i) \simeq \varinjlim (M \otimes_R M_i)$$

Demostración. Observemos que si $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i\leqslant j})$ es un sistema dirigido de R-módulos entonces $(\{M \otimes M_i\}_I,\ \{\ 1_M \otimes \varphi_{ij}\ \}_{i\leqslant j})$ es también un sistema dirigido de R-módulos pues $1_M \otimes \varphi_{ii} = 1_M \otimes 1_{M_1} = 1_{M\otimes M_i}$ y $\forall\ i \leqslant j\ \exists\ \ 1_M \otimes \varphi_{ij} : M \otimes M_i \longrightarrow M \otimes M_j$ $\mathbb{Z}$-morfismo y si $k \in I$ es tal que $i \leqslant k \leqslant j$ entonces se tiene que $1_M \otimes \varphi_{ij} = (1_M \otimes \varphi_{kj}) \circ (1_M \otimes \varphi_{ik})$, sean entonces $(\varinjlim M_i, \{\alpha_i\}_I)$ y $(\varinjlim (M \otimes_R M_i), \{\alpha`_i\}_I)$ los límites directos de dichos sistemas respectivamente . Donde :

$$\varinjlim M_i = \bigoplus M_i/S$$

y

$$\varinjlim (M \otimes_R M_i) = \bigoplus (M \otimes_R M_i)/S\prime$$

con:

$$S\ = < i_i(m_i) - i_j(\varphi_{ij}(m_i)) >$$

$$S\prime\ := <\ i`_i(m \otimes m_i) - i`_j((1_M \otimes \varphi_{ij})(m \otimes m_i))\ > .$$

Definamos ahora la función $\beta : M \times (\varinjlim M_i) \longrightarrow \varinjlim (M \otimes_R M_i)$ dada por:

$$\beta(\ (m, (m_i)\ +\ S)\ ) :=\ (m \otimes m_i)_I\ +\ S\prime.$$

Con $i`_i : M \otimes M_i \longrightarrow \bigoplus (M \otimes M_i)$ la i-canónoca inyección. Veamos que β está bien definida. Para esto sea $(m_i) + S = (m_i\prime) + S$ entonces $(m_i - m\prime_i)_I\ \in\ S$ de donde $(m_i - m\prime_i) = r(\iota_k(m_k) - \iota_l(\varphi_{kl}(m_k)))$ para alguna $r\ \in\ R$ y $k \leqslant l$, entonces ;

$$\begin{aligned}(m\otimes m_i)-(m\otimes m\prime_i) &= m\otimes(m_i-m\prime_i)\\ &= m\otimes r(\iota_k(m_k)-\iota_l(\varphi_{kl}(m_k)))\\ &= mr\otimes(\iota_k(m_k)-\iota_l(\varphi_{kl}(m_k)))\\ &= (mr\otimes\iota_k(m_k))-(mr\otimes\iota_l(\varphi_{kl}(m_k)))\\ &= \iota`_k(mr\otimes m_k)-\iota`_l((1_M\otimes\varphi_{kl})(mr\otimes m_k))\ \in S\prime.\end{aligned}$$

Entonces β está bien definida. Veamos ahora que es bilineal;

$$\begin{aligned}\beta((m+m\prime),(m_i)+S) &= ((m+m\prime)\otimes m_i)+S\prime\\ &= ((m\otimes m_i)+(m\prime\otimes m_i))+S\prime\\ &= ((m\otimes m_i)+S\prime)+((m\prime\otimes m_i)+S\prime)\\ &= \beta((m,(m_i)+S))\ +\ \beta((m\prime,(m_i)+S))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta((m,(m_i+m\prime_i)+S)) &= (m\otimes(m_i+m\prime_i))+S\prime\\ &= ((m\otimes m_i)+(m\otimes m\prime_i))+S\prime\\ &= ((m\otimes m_i)+S\prime)+((m\otimes m\prime_i))+S\prime)\\ &= \beta((m,(m_i)+S))+\beta((m,(m\prime_i)+S))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta((mr,(m_i)+S)) &= (mr\otimes m_i)+S\prime\\ &= (m\otimes rm_i)+S\prime\\ &= \beta((m,(rm_i)+S))\\ &= \beta((m,r((m_i)+S))).\end{aligned}$$

Entonces existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo $f : M\otimes_R(\varinjlim M_i)\longrightarrow \varinjlim(M\otimes_R M_i)$ tal que $f(m\otimes(m_i)+S)=(m\otimes m_i)+S\prime$ para todo generador $m\otimes(m_i)+S$. Por otro lado, la familia compatible de morfismos $\{\alpha_i\}_I$ nos proporciona otra familia compatible $\{\ \beta_i : M\otimes_R M_i\longrightarrow M\otimes(\varinjlim M_i)\}_I$ dada por :

$$\beta_i(m\otimes m_i):=m\otimes\alpha_i(m_i)$$

pues ;

$$
\begin{aligned}
\beta_i(m\otimes m_i) = \beta_j((1_M\otimes\varphi_{ij})(m\otimes m_1)) &\quad sii\\
m\otimes\alpha_i(m_i) = m\otimes\alpha_j(\varphi_{ij}(m_i)) &\quad sii\\
m\otimes(\iota_i(m_i)+S) = m\otimes(\iota_j(\varphi_{ij}(m_i))+S) &\quad sii\\
\iota`_i(m\otimes m_i) = \iota`_j(m\otimes(\varphi_{ij}(m_i))) &\quad sii\\
\iota`_i(m\otimes m_i) = \iota`_j((1_M\otimes\varphi_{ij})(m\otimes m_i)) &\quad sii\\
\iota`_i(m\otimes m_i) - \iota`_j((1_M\otimes\varphi_{ij})(m\otimes m_i)) = 0 &\quad sii\\
\iota`_i(m\otimes m_i) - \iota`_j((1_M\otimes\varphi_{ij})(m\otimes m_i)) \in S\prime.&
\end{aligned}
$$

Entonces por la propiedad universal del límite $(\ \varinjlim(M\otimes_R M_i), \{\alpha`_i\}_I\ )$ $\exists$ $g : \varinjlim(M\otimes_R M_i) \longrightarrow M\otimes(\varinjlim M_i\ )$ tal que $\forall\ i\ \in I$ se tiene que $g\circ\alpha`_i = \beta_i$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & \varinjlim(M\otimes_R M_i) \arrow[d, dashed, "g"] & \\
 & M\otimes(\varinjlim M_i) & \\
M\otimes M_i \arrow[uur, "\alpha`_i"] \arrow[ur, "\beta_i"'] \arrow[rr, "1_M\otimes\varphi_{ij}"'] & & M\otimes M_j \arrow[uul, "\alpha`_j"'] \arrow[ul, "\beta_j"]
\end{tikzcd}
$$

Entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos;

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes (\varinjlim M_i) \arrow[rr, dashed, "f"] & & \varinjlim (M \otimes_R M_i) \\
& M \times \varinjlim M_i \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim (M \otimes_R M_i) \arrow[rr, dashed, "g"] & & M \otimes (\varinjlim M_i) \\
& M \otimes M_i \arrow[ul, "\alpha`_i"] \arrow[ur, "\beta_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Veamos por último que f y g son inversas. Para esto sea $\pi_i : \varinjlim (M \otimes_R M_i) \longrightarrow M \otimes_R M_i$ el morfismo proyección, esto es, $\pi_i((m \otimes m_i) + S`) = m \otimes m_i$, entonces;

$$
\begin{aligned}
f(g((m \otimes m_i) + S`)) &= f(g(\sum \alpha`_i(\pi_i)(m \otimes m_i) + S`))) \\
&= f(\sum g(\alpha`_i(\pi_i)(m \otimes m_i) + S`)) \\
&= f(\sum m \otimes (m_i + S)) \\
&= \sum (f(m \otimes (m_i + S))) \\
&= \sum (m \otimes \iota_i(m_i)) + S` \\
&= (m \otimes m_i) + S` \\
g(f(m \otimes (m_i + S))) &= g((m \otimes m_i) + S`) \\
&= m \otimes (m_i + S)
\end{aligned}
$$

de donde $M \otimes_R (\varinjlim M_i) \simeq \varinjlim (M \otimes_R M_i)$. $\square$

De manera análoga se demuestra que si M es un R-módulo y $(\{M_i\}_I, \{\varphi_{ij}\}_{i\leqslant j})$ un sistema dirigido de R-módulos izquierdos entonces:

$$(\varinjlim M_i) \otimes_R M \simeq \varinjlim (M_i \otimes_R M)$$

Corolario. Si M es un R-módulo izquierdo y F es un R-módulo libre tal que $F \simeq R^{(\Delta)}$, entonces $F \otimes M \simeq M^{(\Delta)}$

Demostración. $F\otimes M \simeq R^{(\Delta)}\otimes M = (\bigoplus R)\otimes M \simeq \bigoplus_\Delta (R\otimes M) = \bigoplus_\Delta M = M^{(\Delta)}$.□

6.8. **Cápsulas Inyectivas.** .

Definición. Un R-módulo Q es *Inyectivo* si $\forall\ i : B \longrightarrow A$ monomorfismo y $\forall\ f : B \longrightarrow Q$ R-morfismo $\exists$ un R-morfismo $g : A \longrightarrow Q$ tal que $gi = f$, es decir, el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dashed, "g"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Se define entonces el dominio de inyectividad de A :

$$Iny^{-1}(A) := \{\ B \mid \forall\ \ i : C \longrightarrow B\ \ mono\ \forall\ f : C \longrightarrow A\ \ \exists\ \ g : B \longrightarrow A\ \ tal\ \ que\ \ gi = f\ \}.$$

Es claro que un R-módulo Q es inyectivo *sii* $Iny^{-1}(Q)$ es la clase de todos los R-módulos.

También decimos que Q es A inyectivo (A hace inyectivo a Q) si $\forall\, i : A' \longrightarrow A$ monomorfismo y $\forall\, f : A' \longrightarrow Q \quad \exists\ \psi : A \longrightarrow Q$ tal que $f = \psi \circ i$.

Definición. Se dice que un R-Módulos A *esencial* en B *sii* $A < B$ y $\forall\ C < B$ con $C \neq 0$ se tiene que $C \cap A \neq 0$. Escribiremos $A <_{es} B$ si A es esencial en B, diremos que A es *esencialmente cerrado* en B si A no tiene extensiones esenciales propias en B esto es, si se tiene que $A <_{es} C < B$ entonces $A = C$.

Observación 1. $A <_{es} B$ *sii* $\forall\ b \in B$ con $b \neq 0 \quad \exists\ r \in R$ tal que $br \in A$ con $br \neq 0$.

Demostración. Claramente si $A <_{es} B$ y $0 \neq b \in B$ se tiene que $A \cap < b > \neq \emptyset$ de donde se tiene que $\exists\ r \in R$ tal que $rb\ \in A$, ahora si $\forall\ b \in B\ \exists\ r \in R$ tal que $rb \in A$ y $B' < B$ con $B' \neq 0$ veamos que $A \cap B' \neq 0$ pues como $B' \neq \{0\}$ $\exists\, b'\ \in\ B'\ (b \neq 0)$ ahora por hipótesis $\forall\ b' \in B\ \exists\ r \in R$ tal que $rb' \in A$ pero $rb'\ \in B'$ de donde $A\ \cap\ B' \neq 0$. □

Observación 2. Sean A, B y C R-módulos, si $A <_{es} B <_{es} C$ entonces $A <_{es} C$.

Demostración. Sea $c \in C$ entonces como $B <_{es} C \quad \exists\ r \in R$ tal que $rc \in B$ $(rc \neq 0)$ pero como $A <_{es} B\ \exists\ r'\ \in R\ (r' \neq 0)$ tal que $r'(rc) \in A$ pero $r'(rc) = (r'r)c \in A$ de donde se tiene que $A <_{es} C$. □

Definición. Un monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ se dice mono esencial *sii* $Im(f) <_{es} B$.

Afirmación. Un monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es mono esencial *sii* $\forall\, g : B \longrightarrow C$ morfismo tal que gf es mono se tiene que g es mono.

Demostración:

$\Rightarrow$ Sea $f : A \longrightarrow B$ mono esencial, y sea $g : B \longrightarrow C$ tal que gf es mono, veamos que g es mono. Para esto sea $b\ \in\ \ker(g)$, si $b \neq 0$ como $f(A) <_{es} B$ $\exists\, r\ \in\ R$ tal que $rb\ \in\ Im(f)$ con $rb \neq 0$ $(f(A) \cap < b > \neq 0$), sea $a\ \in\ A$ tal que $f(a) = rb$, entonces $gf(a) = g(rb) = rg(b) = r0 = 0$ entonces por hipótesis se tiene que $a = 0$ $(gf\ mono)$ de donde $f(0) = f(a) = rb = 0$ lo cual es una contradicción debido a que por hipótesis se tiene que $rb \neq 0$, entonces $b = 0$. De donde se tiene que g es mono.

$\Leftarrow$ Sea $f : A \longrightarrow B$ mono tal que $\forall\ g : B \longrightarrow C$ con gf mono se tiene que g es mono. Si f no es esencial, sea $C \neq \{0\}$ un seudocomplemento de $f(A)$ en B y sea $g :\longrightarrow B/C$ el epimorfismo proyección. Veamos que gf es mono, para esto sea $a\ A$ tal que $(gf)(a) = 0$ esto es $f(a) \in C$ pero por hipótesis se tiene que $f(A) \cap C = \{0\}$ de donde $f(a) = 0$ y como f es mono tenemos que $a = 0$, entonces, gf es mono entonces por hipótesis se tiene que g es mono lo cual es una contradicción pues g no puede ser un isomorfismo debido a que $C \neq \{0\}$. Entonces f es esencial. $\square$

Definición. Dado un R-módulo A la *cápsula inyectiva* de A es un R-Módulo inyectivo Q tal que $A <_{es} Q$.

Proposiciones:

a) Si A es un R-módulo y $B < A, C < A$, $f : B \longrightarrow D$ y $g : C \longrightarrow D$ dos morfismos tales que $f|_{B\cap C} = g|_{B\cap C}$ entonces $\exists\ h : (B+C) \longrightarrow D$ extensión común de f y g esto es $h|_B = f$ y $h|_C = g$.

b) Todo R-módulo A es la imagen epimorfa de un R-módulo libre.

c) El dominio de inyectividad de un R-módulo A $Iny^{-1}(A)$ es cerrada bajo *cocientes, isomorfismos, sumas directas y sumandos directos.*

d) Sea Q un R-módulo inyectivo y A un sumando directo de Q, entonces A es inyectivo.

e) Si A es un R-módulo inyectivo y $A < B$, entonces A es sumando directo de B.

Demostración.

a) Sea A un R-módulo, $B, C < A$, $g : B \longrightarrow D$ y $f : C \longrightarrow D$ dos morfismos tales que $f(B \cap C) = g(B \cap C)$ entonces definamos $h : (B + C) \longrightarrow D$ por:

$$h(b+c) := f(b) + g(c)$$

claramente h es una extensión común de f y g , veamos que está bien definida, para esto sea $b+c = b_1 + c_1$ para algunos $b, b_1 \in B$ $c, c_1 \in C$, observemos primero que $b - b_1 = c_1 - c \in B \cap C$, entonces;

$$\begin{gathered} h(b+c) = h(b_1 + c_1) \\ sii \\ f(b) + g(c) = f(b_1) - g(c_1) \\ sii \\ f(b) - f(b_1) = g(c_1) - g(c) \\ sii \\ f(b - b_1) = g(c_1 - c) \end{gathered}$$

lo cual es cierto pues $b - b_1 = c_1 - c \in B \cap C$ $\square$.

b) Sea A un R-módulo, M un conjunto generador de A , entonces definamos un morfismo $f : R^{(M)} \longrightarrow A$ dado por :

$$f((r_m)_M) := \sum r\, m$$

entonces f está bien definida y además si $m \in M$ se tiene que $m = \sum r_{m'} m'$ de donde se tiene que $f((r_{m'})) = r_{m'} m' = m$. es decir f es un epimorfismo y A es la imagen epimorfa del módulo libre $R^{(M)}$.

c)

•) Sea A un R-módulo, $B \in Iny^{-1}(A)$ y $p : B \longrightarrow C$ un epimorfismo. Veamos que $C \in Iny^{-1}(A)$, para esto sea $h : C' \longrightarrow C$ un monomorfismo y $f : C' \longrightarrow A$ cualquier morfismo, entonces $p^{-1}(h(C')) < B$ y sea $g : p^{-1}(h(C')) \longrightarrow C'$ el morfismo inducido de manera natural , es decir $g(b) = c'$ donde $h(c') = p(b)$ observemos que g está bien definida pues $\forall\, b \in B$ $p(b)$ es único y debido a que

h es mono se tiene que $g(b)$ es único, entonces se tienes el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(h(C^{`})) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "p"] \\ C^{`} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \\ A & \end{tikzcd}$$

entonces se tiene un morfismo $f \circ g : p^{-1}(h(C^{`})) \longrightarrow A$ y como $B \in Iny^{-1}(A)$ entonces existe $q : B \longrightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(h(C^{`})) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "p"'] \arrow[ddr, dashed, "q"] & \\ C^{`} \arrow[r, "h"] \arrow[drr, "f"'] & C & \\ & & A \end{tikzcd}$$

para encontrar un morfismo $q^{`} : C \longrightarrow A$ tal que $q^{`} \circ p = q$ sólo se necesita verifica que $ker(p) \subset ker(q)$ (propiedad del conúcleo), para esto sea $x \in ker(p)$ entonces $x \in p^{-1}(h(C^{`}))$ pues $p(x) = 0 \in f(C^{`})$ entonces $f(g(x)) = i(q(x)) = q(x)$, por otro lado $h(g(x)) = p(x) = 0$ y como h es mono se tiene que $g(x) = 0$ de donde $q(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ entonces $ker(p) \subset ker(q)$ de donde $\exists\ q^{`} : C \longrightarrow A$ tal que $q^{`} \circ p = q$ es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(h(C^{`})) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "p"'] \arrow[ddr, "q"] & \\ C^{`} \arrow[r, "h"] \arrow[drr, "f"'] & C \arrow[dr, dashed, "q^{`}"'] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Finalmente sea $c^{`} \in C^{`}$, $b \in p^{-1}(h(C^{`}))$ tal que $g(b) = c^{`}$ entonces $f(c^{`}) = f(g(b)) = i(q(b)) = q(b) = q^{`}(p(b)) = q^{`}(p(i(b))) = q^{`}(h(g(b))) = q^{`}(h(c^{`}))$ de donde $C \in Iny^{-1}(A)$.

•) Dado que un isomorfismo es una clase particular de cociente, se tiene que $Iny^{-1}(A)$ es cerrada bajo isomorfismos.

•) Para está demostración haremos una identificación de $i(B)$ con B (donde i es monomorfismo dado para demostrar la inyectividad), de está manera necesitaremos encontrar extensiones para submódulos únicamente. Sea entonces $\{B_i\}_I$ una familia de R-módulos tal que $B_i \in Iny^{-1}(A)\ \forall\, i \in I$, $C < \bigoplus B_i$, $f : C \longrightarrow A$ cualquier morfismo, entonces consideremos la siguiente familia:

$$\Gamma = \{ \, (D, f_D : D \longrightarrow A) \ | \ C \leq D < \bigoplus B_i \ , \ f_D|_C = f \ \}$$

notemos que $\Gamma \neq \varnothing$ pues $(C, f) \in \Gamma$, ahora definamos un orden sobre Γ de la siguiente manera, $(D, f_D) \leqslant (E, f_E)$ si $D \leqslant E$ y , $f_E|_D = f_D$ es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f_D"'] & & E \arrow[dl, "f_E"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Se afirma ahora que $(\Gamma, \leqslant)$ satisface los axiomas del *Lema de Zorn* pues si $\Omega = \{(C_i, f_{C_i})\}$ es una cadena en Γ entonces consideremos la pareja $(\bigcup C_i, \cup f_i)$ donde $\cup f(c_i) = f_{C_i}(c_i)$ con $c_i \in C_i$, entonces claramente $(\bigcup C_i < \bigoplus B_i, \cup f)$ es cota superior pues, $\bigcup C_i$ es un submódulo de $\bigoplus B_i$ debido a que estamos tomando una union anidada de submódulos, esto es, dados dos elementos $c_n, c_m \in \bigcup C_i \ \exists\, j \in I$ tal que $c_n, c_m \in C_j$, finalmente, $\cup f_i$ extiende cualquier f_i por construcción, entonces $\forall\, i \in I \ C_i < \bigcup C_i$ y además $\cup f_i|_{C_i} = f_{C_i}$, de donde $(\bigcup C_i < \bigoplus B_i, \cup f)$ es elemento cota superior de Ω . Entonces por el Lema de Zorn, Γ tiene cota superior (B, ψ) . Veamos por último que $B = \bigoplus B_i$, para esto sea $i \in I$, si $B_i \nleq B$ entonces $B \lneq B + B_i$. Construyamos ahora un morfismo de $B + B_i$ en A . Consideremos primero el submódulo $B \cap B_i < B_i$ y el morfismo $\psi|_{B \cap B_i} : B \cap i(B_i) \longrightarrow A$ ahora consideremos la inclusion $i : B \cap B_i \longrightarrow B_i$ y dado que $B_i \in Iny^{-1}(A)$ entonces $\exists\ g : B_i \longrightarrow A$ tal que g y ψ coinciden en $B \cap B_i$. Entonces por la proposición A) se tiene definido un morfismo $h : B + i(B_i) \longrightarrow A$ dada por :

$$f(b+b_i) := \psi(b) + g(b_i).$$

Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & B+B_i \arrow[d, dashed, "f"] & \\
B \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "\psi"] & A & B_i \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[l, dashed, "g"'] \\
 & B\cap B_i \arrow[ul, "i_3"] \arrow[u, "\psi|"'] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces hemos encontrado una extension para (B, ψ) lo cual es una contradicción pues es cota superior. Entonces $B_i < B \;\; \forall\, i \in I$ de donde $B = \bigoplus B_i$. Entonces $Iny^{-1}(A)$ es cerrado bajo Sumas Directas.

$\bullet$) Sea A un R-módulo $B \in Iny^{-1}(A)$, C sumando directo de B, veamos que $C \in Iny^{-1}(A)$, para esto sea $i : D \longrightarrow C$ cualquier monomorfismo $f : D \longrightarrow A$ cualquier morfismo, $\iota_C : C \longrightarrow B$ la correspondiente inclusión, entonces debido a que $\iota_C\, \iota : D \longrightarrow B$ es un monomorfismo $\exists\; f^* : B \longrightarrow A$ tal que $f = f^* \circ (\iota_D \circ \iota) = (f^* \circ \iota_D) \circ \iota$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "\iota_C"] & B \arrow[dll, dashed, "f^*"] \\
A & &
\end{tikzcd}$$

de donde $C \in Iny^{-1}(A)$ $\square$.

d) Sea E un R-módulo inyectivo y A un sumando directo de E, y sea $i : B \longrightarrow C$ un monomorfismo de R-módulos y $f : B \longrightarrow A$ cualquier morfismo, consideremos ahora los morfismo inclusión $\iota_A : A \longrightarrow E$ entonces existe un morfismo $f^* : C \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[ddl, dashed, "f^*"] \\ A \arrow[d, "\iota_A"'] & \\ E & \end{tikzcd}$$

esto es $\iota_A \circ f = f^* \circ \iota$ por último consideremos el morfismo proyección $\rho_A : E \longrightarrow A$, entonces, $\rho_A \circ (\iota_A \circ f) = \rho_A \circ (f^* \circ \iota)$ esto es $(\rho_A \circ \iota_A) \circ f = (\rho_A \circ f^*) \circ \iota$ es decir $f = (\rho_A \circ f^*) \circ \iota$, de donde se tiene que A es inyectivo. $\square$.

e) Sea A inyectivo y $A < B$, entonces consideremos el morfismo identidad $1_A : A \longrightarrow A$ y el monomorfismo inclusion $\iota : A \longrightarrow B$ entonces existe $\psi : B \longrightarrow A$ (A es inyectivo) tal que $1_A = \psi \circ \iota$, es decir, ψ escinde a ι , de donde, $B = Im(\iota) \bigoplus Ker(\psi) = A \bigoplus Ker(\psi)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

$\square$

Nuestro Objetivo sera ahora el encontrar la *Cápsula Inyectiva* de un R-módulo dado A. Para esto utilizaremos el Lema de *Baer.*

Lema de Baer. Un R-módulo Q es inyectivo *sii* $R \in Iny^{-1}(Q)$ como R-módulo.

Demostración. Claramente si Q es inyectivo se tiene que R como R-módulo está en $Iny^{-1}(Q)$, y si $R \in Iny^{-1}(Q)$ entonces sea A un R-módulo, M un conjunto generador de A y sea $f : R^{(M)} \longrightarrow A$ el epimorfismo construido en las proposiciones anteriores. Entonces se tiene que $A \simeq R^{(M)}/ker\, f$ y como la clase inyectiva de un módulo es cerrada bajo cocientes, sumas directas e isomorfismos se tiene que $A \in Iny(Q)$, es decir, $Iny^{-1}(Q) = R - Mod$ $\square$.

Dada un monomorfismo $i : P \longrightarrow R$ haremos una vez más una identificación de $i(P)$ con $I < R$ submódulo de R (ideal de R) con lo que ahora tendremos que encontrar extensiones para ideales únicamente . Continuando con la búsqueda de la cápsula inyectiva para un R-módulo A, si A no es inyectivo entonces existe un ideal $I < R$ y una morfismo $f : I \longrightarrow A$ que no puede extenderse a todo el anillo R, haremos uso una vez más de una construcción de suma directa bajo una relación de equivalencia para resolver esto.

Proposición. Si A es un R-módulo $I < R$ y $f : I \longrightarrow A$ un morfismo, entonces existe un monomorfismo $i_A : A \longrightarrow B$ y un morfismo $h : R \longrightarrow B$ tal que $h \circ i_I = i_A \circ f$ donde $i_I : I \longrightarrow R$ es la correspondiente inclusion. Es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i_I"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea A un R-módulo, $I < R$ y $f : I \longrightarrow A$ cualquier morfismo, entonces se tiene el R-módulo $R \oplus A$, tomando ahora como referencia el morfismo dado definamos un submódulo de la siguiente manera;

$$gr(f)_R = \langle \{ (i, f(i)) \in R \oplus A \mid i \in I\} \rangle$$

Veamos que $gr(f) < R \oplus A$ pues si $(i, f(i)), (j, f(j)) \in gr(f)$ entonces $(i, f(i)) - (j, f(j)) = (i - j, f(i) - f(j)) = (i - j, f(i - j)) \in gr(f)$ y si $r \in R$ entonces $(i, f(i))r = (ir, f(i)r) = (ir, f(ir)) \in gr(f)$, entonces se tiene definido el R-módulo $(R \oplus A)/gr(f)$, definamos ahora $i_A : A \longrightarrow (R \oplus A)/gr(f)$ dada por $i_A(a) := (0, a) + gr(f)$ y $h : R \longrightarrow (R \oplus A)/gr(f)$ dada por $h(r) := (-r, 0) + gr(f)$. Veamos que son morfismos, para esto sean $a, b \in A$ y $r, r‘ \in R$ entonces:

$$\begin{aligned}
i_A(a+b) &= (0, a+b) + gr(f) \\
&= (0,a) + gr(f) + (0,b) + gr(f) \\
&= i_A(a) + i_A(b) \\
i_A(ar) &= (0, ar) + gr(f) \\
&= (0,a)r + gr(f) \\
&= i_A(a)r \\
h(r+r`) &= (-(r+r`), 0) + gr(f) \\
&= (-r, 0) + gr(f) + (-r`, 0) + gr(f) \\
&= h(r) + h(r`) \\
h(r`r) &= ((-r`)r, 0) + gr(f) \\
&= (-r`, 0)r + gr(f) \\
&= (h(r`))r.
\end{aligned}$$

Entonces, si $i \in I$ se tiene que :

$$\begin{gathered}
i_A(f(i)) = h(i_I(i)) \\
sii \\
(0, f(i)) + gr(f) = (-i, 0) + gr(f) \\
sii \\
(i, f(i)) \in gr(f).
\end{gathered}$$

Notemos ahora que i_A es un monomorfismo, pues si $i_A(a) = \bar{0}$, entonces $(o,a) \in gr(f)$ esto es $(0,a) = (i, f(i))$ para alguna $i \in I$ de donde $0 = i$, $a = f(i) = f(0) = 0$. Esto es, i_A es mono.

Entonces se tiene que el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i_I"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & (R \oplus A)/gr(f). \end{tikzcd}$$

□

Proposición. Dado un R-módulo A existe un R-monomorfismo $i_A : A \longrightarrow A_0$ con la siguiente propiedad; $\forall\ I < R\ \ \forall\ f : I \longrightarrow A$ morfismo $\exists\ h_f : R \longrightarrow A_0$ extensión de f, esto es $h_f|_I = i_A f$.

Demostración. Sea A un R-módulo, definamos;

$$H := \{\ h : I \longrightarrow A\ \mid\ I < R,\ h \in Hom\,(I, A)\ \}.$$

Se tiene entonces que H es un conjunto pues $\forall\ I < R$ tenemos que $Hom(I, A)$ es un conjunto. Además la colección de los ideales $\mathbb{I}$ de R es un conjunto pues $\mathbb{I} \subset P(R)$ (conjunto potencia de R) y $H = \bigcup_{\mathbb{I}} Hom(I, A)$, de esta manera se tiene definido el R-módulo $R^{(H)} \oplus A$, definamos ahora para cada morfismo $g : I \longrightarrow A$ un submódulo de $R^{(H)} \oplus A$ de la siguiente manera;

$$gr(g)_R = \left\langle \{\ (\ \delta^i_g\,,\ g(i))\ \in R^{(H)} \oplus A\ \mid\ i\ \in\ I\ \} \right\rangle$$

donde $\delta^i_g\ \in R^{(H)}$ está definida por $\delta^i_g(h) = i$ si $h = g$ y $\delta^i_g(h) = o_R$ si $h \neq g$, consideremos ahora el módulo :

$$gr(H) := \left\langle \bigcup_H gr(h) \right\rangle.$$

Finalmente definamos :

$$A_0 := (R^{(H)} \oplus A) \ / \ gr(H).$$

Observemos que si $i_A : A \longrightarrow A_0$ está dada por $i_A(a) := (\bar{o}, a) + gr(H)$ se tiene entonces que i_A es monomorfismo pues si $a, b \in A$ y $r \in R$ entonces;

$$\begin{aligned}
i_A(a+b) &= (\bar{0}, a+b) + gr(H) \\
&= (\bar{0}, a) + gr(H) + (\bar{0}, b) + gr(H) \\
&= i_A(a) + i_A(b) \\
i_A(ar) &= (\bar{0}, ar) + gr(H) \\
&= rr((\bar{0}, a)r + gr(H)) \\
&= (i_A(a))r.
\end{aligned}$$

Además si $a \in ker(i_A)$ entonces $(\bar{0}, a) \in gr(H)$ esto es $(\bar{0}, a) = \sum_H (\delta_h^i, h(i))$, de donde $\bar{0} = \delta_h^i$ es decir $\delta_h^i = 0 \; \forall \, h \in H$ entonces se tiene que $a = \sum h(i) = \sum h(0) = 0$ de donde se sigue que i_A es un monomorfismo. Veamos por último que extiende cualquier morfismo, para esto se $I < R$ y $h : I \longrightarrow A$ cualquier morfismo, entonces definamos $f_h : R \longrightarrow (R^{(H)} \oplus A)/gr(H)$ dada por :

$$f_h(r) := (\, \delta_h^{-r}, 0 \,) + gr(H).$$

Entonces f_h es morfismo pues si $r, r` \in R$ entonces

$$\begin{aligned}
f_h(r + r`) &= (\delta_h^{-(r+r`)}, 0) + gr(H) \\
&= ((\delta_h^{-r}, 0) + gr(H)) + ((\delta_h^{-r`}, 0) + gr(H)) \\
&= f_h(r) + f_h(r`) \\
f_h(r`r) &= (\delta_h^{-r`r}, 0) + gr(H) \\
&= (\delta_h^{-r`}, 0)r + gr(H)) \\
&= (f_h(r`))r.
\end{aligned}$$

Veamos por último que conmutan. Para esto sea $i \in I$, entonces:

$$\begin{aligned} i_A(h(i)) &= f_h(i) \\ &sii \\ (\bar{0}, h(i)) + gr(H) &= (\delta_h^{-i}, 0) + gr(H) \\ &sii \\ (\bar{0}, h(i)) + gr(H) - (\delta_h^{-i}, 0) + gr(H) &= \bar{o} \\ &sii \\ (\bar{0}, h(i)) + gr(H) + (-\delta_h^{-i}, 0) + gr(H) &= \bar{o} \\ &sii \\ (-\delta_h^{-i}, h(i)) &\in gr(H) \\ &sii \\ (\delta_h^{i}, h(i)) &\in gr(H). \end{aligned}$$

($\delta_h^{-i} = -\delta_h^i$) de donde se sigue que $f_h|_I = h$. Es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i_l"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[d, "f_h"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & (R^{(H)} \oplus A)/gr(H) \end{tikzcd}$$

. $\square$

Notemos que el nuevo R-módulo $(R^{(H)} \oplus A)/gr(H)$ no tiene necesariamente que ser inyectivo, pues podría existir un morfismo $f : I \longrightarrow (R^{(H)} \oplus A)/gr(H)$ que no se puede extender a todo R, sólo logramos encontrar extensiones para $A < (R^{(H)} \oplus A)/gr(H)$, sin embargo si R es un anillo *Noetheriano* (todo $I < R$ es finitamente generado como R-módulo), iterando el proceso anterior y haciendo uso de nuestras construcciones resolveremos este problema.

Empezaremos con una nueva notación para facilitar las cosas. Para esto sea A_0 cualquier R-módulo, $\lambda_0 : A_0 \rightarrowtail A_1$ el monomorfismo que extiende cualquier morfismo $f : I \longrightarrow A_0$ con $I < R$, $\lambda_1 : A_1 \longrightarrow A_2$ el morfismo que extiende cualquier morfismo $g : I \longrightarrow A_1$ y así sucesivamente $\lambda_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ el monomorfismo que extiende cualquier morfismo $h : I \longrightarrow A_i$ con $I < R$. Observemos $\forall\ n < m \ \in\ \mathbb{N}$ se tiene definido un monomorfismo $\lambda_n^m : A_n \longrightarrow A_m$ utilizando las correspondientes composiciones de monomorfismos. Ahora consideremos la union disjunta de la familia $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$, $\coprod_{\mathbb{N}} A_n$. Notemos primero que le podemos dar estructura de R-módulo definiendo la siguiente operación. Dados dos elementos (x_n, n) y $(y_m, m) \in \coprod_{\mathbb{N}} A_n$, donde $n < m$, se define:

$$(x_n,\ n) + (y_m,\ m) := (\ \lambda_n^m(x_n) + y_m,\ m)$$

y

$$(x_n,\ n)r := (x_n r,\ n).$$

Sea $\delta_m : A_m \longrightarrow \coprod A_n$ la correspondiente inclusion de A_m en la union disjunta. Consideremos ahora el siguiente submódulo:

$$G = \langle \{\ \delta_n(a_n) - \delta_m\,(\lambda_n^m(a_n))\ \mid\ a_n \in A_n\,,\ \ n < m \ \in\ \mathbb{N}\ \}\rangle\,.$$

Consideremos ahora el módulo $(\ \coprod_{\mathbb{N}} A_n)/G$ y el morfismo $\lambda_m^* : A_m \longrightarrow (\coprod A_n)/G$ el morfismo dado por $\lambda_m^*(a_m) = (a_m,\ m) + G$, veamos que λ_m^* es monomorfismo, para esto sea $a_m \in A_m$ tal que $\lambda_m^*(a_m) = (a_m, m) + G = \bar{0}$ esto es $(a_m, m) \in G$ esto es :

$$\begin{aligned}
(a_m, m) &= \sum\ (\delta_n(a_n) - \delta_m(\lambda_n^m(a_n))) \\
&= \sum((a_n, n) - (\lambda_n^m(a_n), m)) \\
&:= \sum(\ \lambda_n^m(a_n) - \lambda_n^m(a_n), m) \\
&= \sum(0, m) \\
&= \bar{0}.
\end{aligned}$$

Proposición. Sea R un anillo Noetheriano y A un R-módulo, entonces $(\coprod_{\mathbb{N}} A_n)/G$ es un R-módulo inyectivo que tiene como submódulo a A (identificando a A con $\lambda^*(A)$).

Demostración. Sea R un anillo Noetheriano, y sea $f : I \longrightarrow (\coprod A_n)/G$ con

$I < R$. Como I es finitamente generado, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $I =< r_1 > + \ldots + < r_n >$, donde $\forall\, i \in I$ $r_i \,\imath\, nR$, entonces se tiene que $f(r_i) = a_{ji} + G$ con $a_{ji} \in A_j$. Sea entonces $m = max\{ji\,|i \leqslant n\}$, entonces se tiene que $a_{jk} \in A_m$ (identificando una vez más a_{jk} con $\lambda^m_{jk}(a_{jk})$ mediante $\lambda^m_{jk} : A_{jk} \rightarrowtail A_m)$. Entonces se tiene que $Imagen(f) < \lambda^*(A_m) \simeq A_m$ y debido a la construcción de A_{m+1}, $\exists\ f^* : R \longrightarrow A_{m+1}$ extension de f. Como $A_{m+1} \simeq \lambda^*(A_{m+1}) < (\coprod A_i)/G$ entonces existe $f^* : R \longrightarrow (\coprod A_i)/G$ extension de f. $\square$

Si R **no** es un anillo Noetheriano entonces la construcción anterior nos proporciona una idea de como tenemos que *atacar* el problema, ésta es utilizando el *cardinal* del anillo R. Consideremos ahora una nueva notación para facilitar las cosas, entonces dado un R-módulo A_0 $\exists$ $\lambda_1 : A_0 \rightarrowtail A_1$ tal que $\forall\ f : I \longrightarrow A_0$ $\exists\, f_1 : R \longrightarrow A_1$ extensión de f ($\lambda_1 f = f_1 i$). Es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "f_1"] \\
A_0 \arrow[r, "\lambda_1"'] & A_1
\end{tikzcd}$$

Entonces para un R-módulo dado A_0, y un ordinal α definimos por recursion A_α de la siguiente manera; si α no es ordinal límite donde $(sucesor(\alpha - 1) = \alpha)$ se define A_α como en el diagrama anterior haciendo $A_{\alpha-1} = A_0$ y $A_\alpha = A_1$ (A_α es un módulo que contiene a $A_{\alpha-1}$ y extiende cualquier morfismo de I en $A_{\alpha-1}$) , si α es un ordinal límite observemos primero que se tiene definido un sistema dirigido de ($\{A_\alpha\}_{ORD}$, $\{\lambda^\beta_\alpha\}_{\alpha<\beta}$) , se define entonces $A_\alpha = \varinjlim \{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$, se tiene definido entonces la siguiente colección:

$$\{\ A_\alpha \,|\, \alpha\ es\ ordinal\ \}.$$

Mostraremos ahora que existe un ordinal κ para el cual A_κ es un R-módulo Inyectivo, examinando el caso Noetheriano notamos que necesitamos un *ordinal límite* mayor que el cardinal de R, notemos primero que $card(R) \geqslant \aleph_0$ pues en el caso finito se tiene que R es neotheriano, sea entonces, $car(R) = \lambda$ consideremos el siguiente conjunto;

$$\Lambda = \{\ \alpha \mid \alpha\ \ es\ \ ordinal\,,\ \aleph_0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda\ \ \}.$$

Ahora bien $\Lambda \neq \varnothing$ pues $\lambda \in \Lambda$, y debido a que los ordinales son un conjunto bien ordenado, por el Lema de Zorn existe un ordinal menor $\kappa \in \Lambda$, notemos que debido a la elección de κ se tiene que κ es ordinal límite (pues κ es mínimo), se tiene entonces $A_\kappa = \varinjlim \{A_\mu\}_{\mu<\kappa}$. Observemos que $\forall\ \alpha < \beta$ podemos suponer que $A_\alpha < A_\beta$. Identificando A_α con $\lambda^\alpha_\beta(A_\alpha)$ ($\lambda^\alpha_\beta : A_\alpha \rightarrowtail A_\beta$), además $\forall\ \mu < \kappa$ el cardinal de μ no puede exceder a λ .

Afirmación. A_κ es un R-módulo inyectivo.

Demostración: Sea $I < R$, $f : I \longrightarrow A_\kappa$ un morfismo, entonces $\forall\, i \in I$ $\exists\ \alpha_i$ ordinal tal que $f(i) \in A_{\alpha_i}$ con $\alpha_i < \kappa$, sea ahora $\gamma = sup\,\{\ \alpha_i\ \mid\ i \in I\ \}$, notemos que $\gamma < \gamma + 1 < \kappa$ (κ es límite), finalmente observemos que $Im(f) \subseteq \cup_I A_{\alpha_i} \subseteq A_\gamma \subseteq\ A_{\gamma+1} \subseteq A_\kappa$, y una vez más debido a la construcción de $A_{\gamma+1}$ $\exists\ f^* : R \longrightarrow A_{\gamma+1}$ extension de f , y como $A_{\gamma+1} < A_\kappa$ existe $f^{**} : R \longrightarrow A_\kappa$ extension de f , es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\iota_I"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, dashed, "f^*"'] \arrow[dr, "f^{**}"] & \\
A_\kappa \arrow[r, "\lambda_{\kappa+1}"'] & A_{\lambda+1} \arrow[r, "\iota"'] & A_\kappa
\end{tikzcd}$$

□

Dado un R-módulo A hemos encontrado un R-monomorfismo $i : A \rightarrowtail Q$ con Q inyectivo, recordemos que nuestro objetivo es encontrar la *cápsula inyectiva* de A, para lo cual se requiere que $A <_{es} Q$. Una vez más identificaremos a A con $i(A)$, entonces consideremos la siguiente familia:

$$\Gamma = \{ B \mid A <_{es} B,\, B < Q \}.$$

Notemos primero que $\Gamma \neq \emptyset$ pues $A \in \Gamma$. Ahora consideremos una cadena $\{B_i\}_I$ en Γ , se afirma que $\cup B_i$ es una cota para dicha cadena. Veamos primero que $\cup B_i < Q$. Para esto sea $b_i, b_j \in \cup B_i$ $r \in R$, entonces sin pérdida de generalidad, sea $B_i < B_j$. Entonces $b_i - b_j r \in B_j \subseteq \cup B_i$ además si $b \in \cup B_i$ entonces $\exists\, i \in I$ tal que $b \in B_i$ y como en particular $A <_{es} B_i$ se tiene que existe $r \in R$ tal que $rb \in A$. Pero $rb \in \cup B_i$ de donde se tiene que $A <_{es} \cup B_i$. Entonces por el Lema de Zorn existe un elemento máximo $C \in \Gamma$. Observemos ahora que si $C <_{es} D < Q$ se tendría que $A <_{es} C <_{es} D$, de donde $A <_{es} D < Q$ pero como C es máximo en Γ se tiene que $C = D$ es decir, C **es esencialmente cerrado en** Q. Ahora bien hemos logrado *sumergir* A_0 dentro de un submódulo esencialmente cerrado de un módulo inyectivo. Finalmente veamos que **son equivalentes ser esencialmente cerrado y ser sumando directo** de un R-módulo inyectivo, con lo que se tendra que C es la cápsula inyectiva de A_0.

Afirmación. Dado un R-módulo Inyectivo E , y $A < E$ son equivalentes:

1)A es un sumando directo de E.
2)A es esencialmente cerrado en E.

1) $\Rightarrow$ 2)

Sea $E = A \oplus C$ y sea $A <_{es} B < E$, entonces, $B = B \cap E = B \cap (A \oplus C) = (B \cap A) \oplus (B \cap C) = A \oplus (B \cap C)$. Finalmente notemos que como $A \cap (B \cap C) = 0$ se tiene que $B \cap C = 0$ pues $A <_{es} B$ esto es $A = B$ de donde se tiene que A es esencialmente cerrado en E.

2) $\Rightarrow$ 1)

Sea A esencialmente cerrado en E y sea B un seudocomplemento de A en E ($A \oplus B < E$) , entonces se afirma que $(A \oplus B)/B <_{es} E/B$:

Demostración. Sea $C < E/B$ tal que $C \cap (A \oplus B)/B = 0$, si $C \neq 0$ sea $B < C' < E$ ($C' \neq 0$) tal que $C'/B \simeq C$, entonces se tiene que $C' \cap A = 0$ de lo contrario $C \cap (A \oplus B)/B \neq 0$, de donde C' es máximo, es decir, C es seudocomplemento de A lo cual es una contradicción , entonces $C = 0$. Esto es $(A \oplus B)/B <_{es} E/B$.

Ahora dado que $A \simeq (A \oplus B)/B$, consideremos los morfismos $i_1 : A \longrightarrow E$ $i_2 : (A \oplus B)/B \longrightarrow E/B$ y f el ismorfismo de A en $(A \oplus B)/B$, y sea $\psi = i_2 \circ f$. Entonces como E es inyectivo $\exists$ $\psi^* : E/B \longrightarrow E$ extensión de i_1, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & (A \oplus B)/B \arrow[r, "i_2"] & E/B \arrow[dll, dashed, "\psi^*"] \\ E & & \end{tikzcd}$$

Ahora consideremos $\varphi : E/B \longrightarrow \psi^*(E/B)$ la co restricción de ψ^* a su imagen, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i_1"'] & E/B \arrow[dl, "\varphi"] \\ \psi^*(E/B) & \end{tikzcd}$$

Observemos primero que como ψ es mono esencial , pues $\psi = i_2 \circ f$ con i_2 y f monos y además $(A \oplus B)/B <_{es} E/B$, también se tiene que $\varphi\ \psi$ es mono, pues $i_1 = \varphi\ \psi$, entonces se tiene que φ es mono, entonces φ es isomorfismo, con lo que se tiene que φ escinde ψ , entonces $\psi(A) = (A \oplus B)/B$ es sumando directo esencial de E/B , entonces, $(A \oplus B)/B = E/B$, finalmente por el teorema de correspondencia se tiene que $A \oplus B = E$, esto es, A es sumando directo de E. $\square$

Afirmación. En $R - mod$, todo módulo posee cápsula inyectiva.

Demostración. Sea A un R-módulo. Por la proposición anterior existe Q R-módulo inyectivo y un sumando directo I de Q tal que $A < I$ y $A <_{es} I$. Notemos finalmente que como I es sumando directo de un módulo inyectivo se tiene que I es inyectivo. Esto es I es la cápsula inyectiva de A $\square$

7. CATEGORÍAS.

7.1. **Categoría.** .

Definición. Una *categoría* $\mathcal{C}$ está formada por una *clase de objetos* $\mathcal{C}_0$ y una *clase de morfismos* $\mathcal{C}_1$ con las siguientes propiedades;

- Cada morfismo f tiene un único dominio y un único codominio los cuales son objetos. Escribiremos $f : A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$ si A es el dominio de f y B el codominio de f, también usaremos la notación $dom(f) = A$ y $cod(f) = B$ .Y para cada par ordenado (A, B) de objetos se tiene que la colección de los morfismos con dominio A y codominio B, $Hom(A, B)$ es un conjunto.

- Dados dos morfismos f y g tales que $cod(f) = dom(g)$, la *composición*, denotada por gf , es el morfismo con $dom(gf) = dom(f)$ y $cod(gf) = cod(g)$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

- Para todo objeto A $\exists$ $1_A \in Hom(A, A)$ tal que para todo f morfismo con $dom(f) = A$ y g con $cod(g) = A$ se tiene que;

$$f \circ 1_A = f$$

$$1_A \circ g = g$$

- La composición es asociativa, dados los morfismos;

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

se tiene que $(h\, g)\, f = h\, (g\, f)$.

Ejemplos.

R-mod. Dado un anillo con uno R, se tiene definida la categoría de los R-módulos derechos (izquierdos). Donde :

$$R - mod_0 := \{ \ M \mid M \ es \ R - modulo \ \}$$

y

$$R - mod_1 := \{ \ f : M \longrightarrow N \mid f \ es \ R - morfismo \ \}.$$

Top. Categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas.

Grph. Categoría de las gráficas y los morfismos de gráficas.

Pos. Categoría de los conjuntos parcialmente ordenados y las funciones monótonas.

Conjuntos dirigidos Un conjunto dirigido (superiormente) $(I, \leqslant)$ se puede pensar como una categoría $\mathcal{D}$ donde :

$$\mathcal{D}_0 = I.$$

Y cada vez que $i \leqslant j$ se tiene una única flecha $<_i^j : i \longrightarrow j$, pues:

1. Cada flecha tiene definido un único dominio y codominio que son objetos.

2. Si $i \leqslant j \leqslant k$ entonces $<_i^k = <_i^j <_j^k$ $(\ i \leqslant k \ )$.

3. si $i \leqslant j \leqslant k \leqslant l$, entonces $<_i^j \ (<_j^l) = <_i^k <_k^l$ $(\ i \leqslant k, \ j \leqslant l, \ i \leqslant l)$.

4. Dado que $\forall \ i \ \in \ I$ se tiene que $i \leqslant i$ se tiene definida $<_i^i := 1_i$ la cual satisface que $1_i <_i^j = <_i^j$ y $<_h^i 1_i = <_h^j$ cada vez que $h \leqslant i \leqslant j$.

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ se llama categoría *pequeña* si tanto $\mathcal{C}_0$ como $\mathcal{C}_1$ son conjuntos.

En el presente trabajo consideraremos únicamente categorías pequeñas.

Morfismos especiales.

Diremos que un par de morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son morfismos paralelos si $dom(f) = dom(g)$ y $cod(f) = cod(g)$. Usaremos la notación:

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Definición. Un morfismo $f : B \longrightarrow C \in \mathcal{C}_1$ se llama *monomorfismo* (cancelable por la izquierda) si para todo par de *flechas paralelas* $g, h : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ tales que $fg = fh$ se tiene que $g = h$.

Observación. En $R-mod$ un morfismo es inyectivo sii es monomorfismo.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $f : A \longrightarrow B$ inyectivo, y sean $h, g : C \longrightarrow B$ un par de morfismos paralelos tales que $fh = fg$, esto es $f(h(c)) = f(g(c)) \ \forall \ c \in C$. Como f es inyectiva (elementos distintos van a elementos distintos) se tiene que $h(c) = g(c) \ \forall \ c \in C$, esto es $h = g$, de donde f es mono.

$\Leftarrow$) Sea ahora $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo, consideremos entonces el par de morfismos paralelos $i : Ker(f) \longrightarrow B$ la inclusión y $\overline{0} : Ker(f) \longrightarrow B$ el morfismo cero. Entonces se tiene que $f(i(a)) = f(a) = 0 = f(\overline{0}(a))$ esto es $fi = f\overline{0}$ ahora bien como f es mono se tiene que $i = \overline{0}$, finalmente notemos que debido a que la inclusión es inyectiva se tiene que $Ker(f) = \{0\}$, esto es f es inyectivo. $\square$

De manera dual se define.

Definición. Un morfismo $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ se llama *epimorfismo* (cancelable por la derecha) si para toda par de *flechas paralelas* $g, h : B \longrightarrow C \in \mathcal{C}_1$ tales que $gf = hf$ se tiene que $g = h$.

Observación. En $R-mod$ un morfismo es suprayectivo sii es epimorfismo.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $f : A \longrightarrow B$ suprayectivo y sean $h, g : B \longrightarrow C$ un par de morfismos paralelos tales que $hf = gf$, entonces $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A$ tal que $f(a) = b$ ahora bien por hipótesis se tiene que $h(f(a)) = g(f(a))$ esto es $h(b) = g(b)$ de donde finalmente se tiene que $h = g$ esto es f es epimorfismo.

$\Leftarrow$) Sea ahora $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo. Entonces consideremos los siguientes morfismos paralelos $p : B \longrightarrow B/Im(f)$ el morfismo proyección, y $\overline{0} : B \longrightarrow B/Im(f)$ el morfismo cero. Entonces se tiene que $\forall\ a \in A$, $p(f(a)) = f(a) + Im(f) = 0 = \overline{0}(f(a))$, esto es $pf = \overline{0}f$ entonces como f es epi se tiene que $p = \overline{0}$. Esto quiere decir que $p(b) = b + Im(f) = 0$ esto es $b \in Im(f)$, de donde se tiene que $B = Im(f)$. Entonces f es suprayectiva. $\square$

Definición. Un morfismo $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ se llama *isomorfismo* si $\exists\ g : B \longrightarrow A \in \mathcal{C}_1$ tal que $g\,f = 1_A$ y $f\,g = 1_B$.

FUNTORES.

Definición. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un funtor F (covariante) consiste en dos operadores $F_0 : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_0$ y $F_1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_1$ que cumplen las siguientes condiciones :

1. Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, entonces $F_1(f) : F_0(C) \longrightarrow F_0(B)$ es un morfismo de $\mathcal{D}$.

2. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son morfismos de $\mathcal{C}$ entonces $F_1(gf) = F_1(f)F_1(g)$, es decir se tiene que el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[rr, "F_1(gf)"] \arrow[dr, "F_1(f)"'] & & F_0(C) \\ & F_0(B) \arrow[ur, "F_1(g)"'] & \end{tikzcd}$$

3. $\forall\ C \in \mathcal{C}_0$ se tiene que $1_{F_0(C)} = F_1(1_C)$.

Se dice que un funtor $F = (F_0\,,\, F_1)$ es *contravariante* si *invierte* la dirección de los morfismos, esto es, si $f : A \longrightarrow B$, entonces, $F_1(f) : F_0(B) \longrightarrow F_0(A)$, con la condición de que $\forall\, g : B \longrightarrow C$ se tiene que $F_1(gf) = F_1(f)F_1(g)$.

Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ está definida la composición $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, además, $\forall\, \mathcal{C}$ categoría $\exists\, 1_F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtor, con esto queda definida una nueva categoría $\mathcal{CAT}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{CAT}_0 \;:=\; \{\; \mathcal{C} \mid \mathcal{C}\; es\; categoria \;\}$$

$$\mathcal{CAT}_1 \;:=\; \{\; F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \mid F\; es\; funtor \;\}$$

Denotaremos al funtor por F únicamente, quedando entendido que en realidad son dos asignaciones.

Observación. Dado un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, se tiene definida una función:

$$Hom_{\mathcal{C}}(C,\; C`) \;\longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F_0(C),\; F_0(C`))$$

Definición. Se dice que un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *fiel* si la función inducida anteriormente mencionada es un monomorfismo. Y se dice que es *completo* si la función es epimorfismo.

Ejemplos:

- Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y un objeto $D \in \mathcal{D}_0$ se define el funtor constante $\Delta_D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ de la siguiente manera:

$$(\Delta_D)_0(C) \;\;:= D$$

$\forall\ C\ \in\ \mathcal{C}_0$, y

$$(\Delta_D)_1(f)\ \ := 1_D$$

$\forall\ \ f\ \ \in\ \ \mathcal{C}_1$. Verifiquemos que en efecto Δ_D es funtor, claramente se tiene que $\forall\ \ f : A \longrightarrow B\ \in\ \mathcal{C}_1$:

$$\Delta_D(f) : (\Delta_D)_0(A) \longrightarrow (\Delta_D)_0(B)$$

ahora bien, si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, entonces:

$$(\Delta_D)_1(gf) = 1_D = 1_D \circ 1_D = (\Delta_D)_1(g)\,(\Delta_D)_1(f)$$

y si $C\ \in\ \mathcal{C}_0$, entonces:

$$(\Delta_D)_1(1_C) = 1_D = 1_{(\Delta_D(C))}$$

con lo que se tiene que Δ_D es funtor.

- Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $C\ \in\ \mathcal{C}_0$ se define el funtor $Hom_R(\ C\ ,\ \_\ ) : \mathcal{C} \longrightarrow Set$ (categoría de los conjuntos) de la siguiente manera:

$$Hom_R(\ C\ ,\ \_\ )_0\,(D)\ :=\ Hom_R(\ C\ ,\ D)$$

$\forall\ D \in\ \mathcal{C}_0$ y :

$$Hom_R(\ C\ ,\ \_\ )_1\,(f)\ \ :=\ fg : Hom_R(\ C\ ,\ B) \longrightarrow Hom_R(\ C\ ,\ D\ )$$

$\forall\ f\ :\ B \longrightarrow D\ \in\ \mathcal{C}_1\ ,\ g\ \in\ Hom_R(C\ ,\ B)$. Ahora bien claramente $\forall\ f\ :\ B \longrightarrow D\ \in\ \mathcal{C}_1$ se tiene que :

$$Hom_R(\ C\ ,\ \_\ )_1\ (f) : Hom_R(\ C\ ,\ \_\ ,)_0\ (B) \longrightarrow Hom_R(\ C\ ,\ \_\ ,)_0\ (D)$$

además si $f : A \longrightarrow B\ \ ,\ \ g : B \longrightarrow D$ y $h\ \in\ Hom(\ C\ ,\ A\ )$, entonces:

$$\begin{aligned} Hom_R(\ C,\ \_)_1(g\,f) = (g\,f)h = g(f\,h) = g(Hom_R(C\ ,\ \_)_1\,(f)) \\ = (Hom_R(C\ ,\ \_)_1(g)) \circ (Hom_R(C\ ,\ \_)_1(f)) \end{aligned}$$

y finalmente, sea $A\ \in\ \mathcal{C}_0$, entonces:

$$Hom(\ C\ ,\ \_\ )_1(1_A) = 1_A \circ h = h \quad (h\ \in\ Hom(C\ ,\ A))$$

esto es $Hom(\ C\ ,\_\ )_1(1_A)\ =\ Hom(\ C, A)\ =\ Hom(\ C\ ,\ \ \_\ )_0(A)$, con lo que se tiene que $Hom_R(\ C\ ,\ \_\ )$ es funtor $\square$.

• Dado un $R,\ S$-bimódulo ${}_RM_S$ se puede definir el funtor $Hom_S(M\ ,\ \_) : Mod - S \longrightarrow Mod - R$ de la siguiente manera :

$$Hom_S(M\ ,\ \_)_0(N_S) := (Hom_S(M,\ N\ ))_R$$

y

$$Hom_S(M\ ,\ \_)_1(f) :=\ f\,g : Hom(M,\ N) \longrightarrow Hom(M\ ,\ P).$$

$\forall\ N\ \in Mod - S_0\ \ ,\ \forall\ g\ \in\ Hom(M,\ N)\ ,\ \forall\ f\ \in\ Mod - S_1,\ \ f : N \longrightarrow P$. Es directo verificar que $Hom_S(M\ ,\ N)$ es un R-modulo izquierdo definiendo la

$$(fr+g)(m) := fr(m) + g(m) := f(rm) + g(m)$$

$\forall\, f, g \;\in\; Hom_S(M,\, N\,),\;\; \forall\, r \;\in\; R.$

De una manera análoga dado un R-módulo M, se tiene definido el funtor $Hom_R(\_\,,\, M)$: $R - Mod \longrightarrow R - Mod$.

• Dado un $R,\ S$-bimódulo ${}_R M_S$ se puede definir el funtor tensor de la categoría de los R-módulos derechos $Mod{-}R$ a $Mod{-}S$, $\_\otimes_R M$: $Mod{-}R \longrightarrow Mod{-}S$ de la siguiente manera:

$$\_\otimes M\;_0\,(N_R) \;:=\; (N \otimes_R M)_S$$

$$\_\otimes M\;_1\,(f) \;:=\;\; f \otimes 1_M : N \otimes_R M \longrightarrow P \otimes M$$

$\forall\; f \,:\, N \,\longrightarrow\, P \;\;\in Mod - R_1$. Notemos primero que en efecto $N \otimes_R M$ es un S-módulo derecho definiendo la operación $(n \otimes m)s := n \otimes (ms)$, es directo verificar los axiomas de S-módulo. Verifiquemos ahora que en efecto es funtor, claramente $\forall\; f : N \longrightarrow P$ se tiene que :

$$\_\;\otimes M\;_1(f) : \_\;\otimes M\;_0(N) \longrightarrow \_\;\otimes M\;_0(P)$$

además, si $f : N \longrightarrow P$ y $g : P \longrightarrow Q \;\in\; Mod - R_1$, entonces, $\_\;\otimes M_{R\,1}(g\,f) = (g\,f) \otimes 1_M$, ahora bien dado $m \;\in M$, $n \;\in\; N$ se tiene que :

$$(g\,f) \otimes 1_M(n,\, m) = (g\,f)(n) \otimes 1_M(m) = (g \otimes 1_M)(f(n) \otimes 1_M(m))$$

esto es $(g\,f) \otimes M_R = (g \otimes M_R) \circ (f \otimes M_R)$, y finalmente:

$$\_\;\otimes M_{R\;\;1}\,(1_N) = 1_N \otimes 1_M = 1_{N\otimes M} = 1_{\_\otimes M\;0(N))}$$

con lo que se tiene que $\_ \otimes M_R : Mod - R \longrightarrow Mod - S$ es un funtor $\square$.

• Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $C \in \mathcal{C}_0$ se define el funtor (producto) $C\times\_ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ de la siguiente manera:

$$(C \times \_)_0(A) \;\; := C \times A$$

$$(C \times \_)_1(f) \;\; := \; 1_C \times f : C \times A \longrightarrow C \times B$$

$\forall\, A \in \mathcal{C}_0\,,\;\; f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$. Claramente se tiene que :

$$C \times \_{}_1(f) : (C \times \_)_0(A) \longrightarrow (C \times \_)_0(B)$$

además si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow D$, entonces:

$$(C \times \_)_1(gf) = 1_C \times (gf) = (1_C \times (g))(1_C \times (f)) = (C \times \_)_1(g)(C \times \_)_1(f)$$

y finalmente sea $A \in \mathcal{C}_0$, entonces :

$$C \times \_{}_1(1_A) = 1_C \times 1_A = 1_{(C\times\_)_0(A)}$$

con lo que se tiene que $C \times \_$ es un funtor $\square$.

Dados los objetos C_1 y $C_2 \in \mathcal{C}_0$ se tiene el funtor $((C_1 \times C_2) \times \_)$. De manera similar se tiene definido para una familia de objetos $\{C_i\}_I$ el funtor $(\Pi_I\, C_i) \times \_ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

• Dado un conjunto dirigido I (categoría), un *sistema dirigido* de R-módulos $(\{M_i\}_I\,,\ \{f_{ij}\}_{i\leqslant j})$, se puede ver como un funtor $F : I \longrightarrow R\text{-}mod$ de la siguiente manera:

$$F_0(i) := M_i$$

$$F_1(<_i^j) := \ f_{i,j} : \ M_i \longrightarrow M_j$$

Pues, si $i \leqslant j \leqslant k$, entonces, $f_{j,k}\ f_{i,j} = f_{i,k}$, esto es, $F_1(<_i^k) = F_1(<_i^j)\ F_1(<_j^k)$. Y si $i \ \in \ I$, entonces $1_{M_i} = f_{i,i}$, esto es, $1_{F_o(<_i^i)} = F_1(<_i^i)$.

Definición. Dados dos anillos R y S . Un funtor $F : R - Mod \longrightarrow S - Mod$ se dice exacto, si $\forall$ sucesión exacta corta en $R - Mod$:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

Se tiene que la sucesión en $S - Mod$:

$$0 \longrightarrow F_0(M_1) \longrightarrow F_0(M_2) \longrightarrow F_0(M_3) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ejemplo.

•). Dado un R-módulo Q, consideremos el funtor contravariante $F = Hom_R(\llcorner\!\lrcorner\,, Q)$: $R - Mod \longrightarrow R - Mod$. Sea ahora la sucesión exacta corta:

$$0 \xrightarrow{0_1} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{0_2} 0$$

Entonces se afirma que la sucesión :

$$Hom(0,\, Q) \xrightarrow{F(0_2)} Hom(M_3\,,\, Q) \xrightarrow{F(g)} Hom(M_2\,,\, Q) \xrightarrow{F(f)} Hom(M_1\,,\, Q) \xrightarrow{F(0_1)} Hom(0\,, Q)$$

Es exacta izquierda. Verifiquemos entonces que $F(g)$ es mono, para esto sea $h \in Ker(F(g))$, esto es, $hg = \overline{0}$, esto es, $\forall\ m_2 \in M_2$, $h(g(m_2)) = 0$, es directo ver que h es el morfismo cero, de lo contrario $\exists\ m_3 \in M_3$ tal que $h(m_3) \neq 0$, por otro lado como g es epi (hipótesis) $\exists\, m_2 \in M_2$ tal que $g(m_2) = m_3$, finalmente observemos que $h(g(m_2)) = h(m_3) = 0$ lo cual es una contradicción, entonces h es el morfismo cero, es decir, $F(f)$ es mono.

Veamos ahora que $Ker(F(f)) = Im(F(g))$, donde :

$$Ker(F(g)) = \{\ h : M_2 \longrightarrow Q \mid hf = 0\ \}$$

Verifiquemos primero la contención $Ker(F(f)) \subseteq Im(F(g))$, para esto sea $h \in Ker(F(g))$. Para encontrar un morfismo $\psi : M_3 :\longrightarrow Q$ tal que $h = \psi g$ es necesario que $Ker(g) \subset Ker(h)$, esto es, $Im(f) \subset Ker(h)$ lo cual es verdadero pues $hf = 0$, entonces, $\exists\ \psi : M_3 \longrightarrow Q$ tal que $\psi g = h$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_1"] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M_3 \arrow[r, "0_2"] \arrow[dl, dashed, "\psi"] & 0 \\
& & Q & &
\end{tikzcd}$$

Entonces $h = \psi g \in Im(F(g))$, esto es, $Ker(F(f)) \subseteq Im(F(g))$. Veamos ahora que $Im(F(g)) \subseteq Ker(F(f))$. Para esto sea $j : M_3 :\longrightarrow Q$, entonces $F(g)(j) = jg$, finalmente $F(f)(jg) = (jg)f = j(gf) = j0 = 0$, entonces $Ker(F(f)) \subseteq Im(F(g))$. De donde se tiene que $Ker(F(f)) = Im(F(g))$. $\square$

Notemos que $F(f)$ no necesariamente es un epimorfismo, pues esto implicaría que $\forall\ h : M_1 \longrightarrow Q\ \exists\ \psi : M_2 \longrightarrow Q$ tal que $\psi f = h$. Lo cual no siempre es posible.

Corolario. Un R-módulo Q es *inyectivo* *sii* el funtor $Hom(\_, Q)$ es exacto.

Demostración. Por la observación anterior solo se necesita demostrar que Q es inyectivo *sii* el funtor $Hom(\_, Q)$ es exacto derecho. Esto es, $\forall \ i : N \longrightarrow P$ monomorfismo, $\forall f : N \longrightarrow Q$ morfismo $\exists \ \psi : P \longrightarrow Q$ tal que $f = \psi i$. La cual es la definición de que un R-módulo sea inyectivo.$\square$

7.2. **Transformaciones Naturales.** .

Definición. Dadas dos funtores F *y* G una *transformación natural* del funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ al funtor $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ consiste en una familia de morfismos $\{\mu_C : F_0(C) \longrightarrow G_0(C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ la cual satisface la siguiente condición, para todo morfismo $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ se tiene que el siguiente diagrama;

$$\begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & G_0(A) \arrow[d, "G_1(f)"] \\ F_0(B) \arrow[r, "\mu_B"] & G_0(B) \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$, el diagrama anterior es llamada el *cuadrado natural*, escribiremos $\mu = \{\mu_C\}_{\mathcal{C}} : F \Rightarrow G$.

Ahora dadas dos transformaciones naturales $\mu : F \longrightarrow G$ y $\omega : G \longrightarrow H$ está definida la transformación natural $\omega\mu : F \longrightarrow H$ y para todo funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ existe una transformación natural $1_{\mathcal{F}} : F \longrightarrow F$, con esto queda defina una nueva categoría, $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}{}_0 := \{ \ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \ | \ F \ \ es \ \ funtor \ \}$$

$$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}{}_1 := \{ \ \{\mu_C\}_{\mathcal{C}} \ | \ \mu \ \ es \ \ transformacion\, natural \ \}$$

Dado un conjunto dirigido (superiormente), hemos notado que un sistema dirigido (superiormente) de R-módulos es un funtor. Entonces se tiene definida la categoría $R-mod^{\,(I,\leqslant)}$ de la siguiente manera:

$$R-mod_{\,0}^{\,(I,\leqslant)} := \{\, F : I \longrightarrow R-mod \mid F \;\; es \;\; funtor \,\}$$

y

$$R-mod_{\,1}^{\,(I,\leqslant)} := \{\, \tau : F \Rightarrow G \mid \tau \; es \;\; transformacion \;\; natural \,\}.$$

Consideremos la categoría $R-mod^{\,(I,\leqslant)}$, dados los funtores (sistemas dirigidos) $(\{M_i\}_I,\, \{f_{i,j}\}_{i\leqslant j})$, $(\{N_i\}_I,\, \{g_{i,j}\}_{i\leqslant j})$ y $(\{L_i\}_I,\, \{h_{i,j}\}_{i\leqslant j})$, y las transformaciones naturales $\tau : \{M\}_I \Rightarrow \{N\}_I$ y $\sigma : \{N\}_I \Rightarrow \{L\}_I$, se tiene la siguiente sucesión:

$$0 \Longrightarrow \{M\}_I \overset{\tau}{\Longrightarrow} \{N\}_I \overset{\sigma}{\Longrightarrow} \{L\}_I \Longrightarrow 0$$

Se dice entonces que la sucesión es exacta si $\forall \; i \;\in\; I$ se tiene que la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow M_i \xrightarrow{\tau_i} N_i \xrightarrow{\sigma_i} L_i \longrightarrow 0$$

es exacta.

Objeto inicial, terminal y cero.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$, un objeto I es *objeto inicial sii* $\forall A \in \mathcal{C}_0$ se tiene que $\mid Hom\,(I,\; A\,) \mid = 1$.

Observación. El objeto inicial es único salvo isomorfismo.

Demostración. Sean A, B objetos iniciales de $\mathcal{C}$ y sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ los únicos morfismo cuya existencia está garantizada por ser objetos iniciales, entonces se tiene el morfismo $g\,f : A \longrightarrow A$ pero como $1_A : A \longrightarrow A$ se tiene que $g\,f = 1_A$, de una manera análoga se comprueba que $f\,g = 1_B$ de donde se tiene que el objeto inicial es único salvo isomorfismo. $\square$

Dualmente se tiene la siguiente definición.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$, un objeto T es *objeto terminal* *sii* $\forall A \in \mathcal{C}_0$ se tiene que $\mid Hom\,(A,\, T\,) \mid = 1$.

Observación. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, W objeto terminal, entonces W es único salvo isomorfismo.

Demostración. Sean W, Z objetos terminales de $\mathcal{C}$ y sean $f : Z \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow Z$ los únicos morfismos cuya existencia está garantizada por ser objetos terminales respectivamente, entonces consideremos el morfismo $f\,g : W \longrightarrow W$ por último observemos que como $1_W : W \longrightarrow W$ se tiene que $f\,g = 1_W$ análogamente se tiene que $g\,f = 1_Z$ de donde se sigue que W es único salvo isomorfismos. $\square$

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$, un objeto C es *objeto cero* *sii* C es un objeto inicial y terminal.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero 0 y dados dos objetos $A, B \in \mathcal{C}_0$, se define el morfismo *cero* de A a B como cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ que satisfaga $f = 0^B \circ 0_A$, donde $0_A,\ 0^B$ son morfismos únicos cuya existencia está garantizada por ser 0 objeto cero, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo ;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "0_A"'] & & B \\ & 0 \arrow[ur, "0^B"'] & \end{tikzcd}$$

Utilizaremos la notación 0_A^B para denotar al morfismo cero de A en B.

Es fácil ver que dicho morfismo f es independiente de la elección del objeto cero.

Definición. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se dice *morfismo cero a izquierda* si para cada par de morfismos paralelos con codominio X , $h, g : W \longrightarrow X$, se tiene que $f \circ h = f \circ g$.

De manera dual se define un *morfismo cero a derecha* como cualquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ que satisface $h \circ f = g \circ f$ donde g, h son morfismos paralelos con dominio Y .

Definición. Un morfismo $0 : X \longrightarrow Y$ se dice *morfismo cero sii* es un morfismo cero a derecha e izquierda.

Observación. Dada una categoría $\mathcal{C}$. El morfismo *cero* de A a B $0_{AB} : A \longrightarrow B$ es un morfismo cero a izquierda y derecha.

Demostración. Sean $g, h : B \longrightarrow C$ un par de morfismos paralelos con domino B , entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "0_{AB}"] \arrow[dr, "0_A"'] & & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \\
& 0 \arrow[ur, "O^B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, $g \circ 0^B = h \circ 0^B$ debido a que 0 es objeto inicial, de donde $g \circ 0^B \circ 0_A = h \circ 0^B \circ 0_A$, y finalmente $g \circ 0_{AB} = h \circ 0_{AB}$, esto es, 0_{AB} es morfismo cero a derecha. De manera muy similar se demuestra que $0_{AB} \circ g = 0_{AB} \circ h$ para todo par de morfismos paralelos con codominio. A □

Observación. Si I es un objeto inicial, entonces cualquier morfismo $f : I \longrightarrow X$ es un morfismo cero a derecha. Dualmente si T es un objeto final, cualquier morfismo con codominio T es un morfismo cero a izquierda.

Igualadores y Coigualadores.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un par de morfismos *paralelos* $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ un *igualador* consiste en un morfismo $h : X \longrightarrow A$ que cumple las siguientes condiciones;

1. $fh = gh$, es decir se tiene que el siguiente diagrama;

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & A \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Si $j : C \longrightarrow A$ es un morfismo tal que $fj = gj$ entonces $\exists$ un único morfismo $k : C \longrightarrow X$ tal que $hk = j$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "h"] & \\ & A \\ C \arrow[uu, dashed, "k"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Observación. Todo par de morfismo paralelos en $R - mod$ tiene igualador .

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ un par de morfismos paralelos en $R - mod$, entonces consideremos el conjunto :

$$X \; = \; \{ \; a \; \in \; A \mid f(a) = g(a) \; \}$$

notemos primero que $X \neq \emptyset$ pues $0 \in X$, veamos que es un R-módulo, para esto sean a , $a' \in X$ y $r \in R$, entonces, $f(ar - a') = f(ar) - f(a') = f(a)r - f(a')$ por ser f morfismo, pero por hipótesis $f(a) = g(a)$ y $f(a') = g(a')$ de donde $f(a)r - f(a') = g(a)r - g(a') = g(ar - a')$, esto es $ar - a' \in X$, es decir, $X < A$, por último consideremos el morfismo inclusión $i : X \longrightarrow A$ entonces se afirma que i es el igualador de f y g , pues:

1. Claramente por construcción se tiene que $fi = gi$.

2. Si $h : C \longrightarrow A$ es un morfismo tal que $fh = gh$, entonces consideremos la asignación $k : C \longrightarrow X$ dada por :

$$k(c) := h(c)$$

veamos que está bien definida pues $f(k(c)) = f(h(c)) = g(h(c)) = g(k(c))$, esto es $k(c) \in X$, veamos ahora que conmuta, esto es $i(k(c)) = i(h(c)) = h(c)$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Finalmente si $k` : C \longrightarrow X$ es un morfismo tal que $ik` = h$ entonces sea $c \in C$, $i(k(c)) = h(c) = i(k`(c))$ esto es $k(c) = k`(c)$, es decir el morfismo k es único. Con lo que se tiene que i es el igualador de f y g. $\square$

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un par de morfismos *paralelos* $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ un *coigualador* consiste en un morfismo $h : B \longrightarrow X$ que cumple las siguientes condiciones;

1. $hf = hg$, es decir se tiene que el siguiente diagrama;

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta

2. Si $j : B \longrightarrow C$ es un morfismo tal que $jf = jg$ entonces $\exists$ un único

morfismo $k : X \longrightarrow C$ tal que $kh = j$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dd, dashed, "k"] \\ B \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

Observación. Todo par de morfismos paralelos en $R-mod$ tiene coigualador.

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ un par de morfismos paralelos en $R - mod$, entonces consideremos el conjunto :

$$C = \{ \ f(a) - g(a) \mid a \ \in \ A \ \}.$$

Sea ahora $D =< C >$, finalmente consideremos el módulo B/D y el epimorfismo natural $p : B \longrightarrow B/D$, entonces se afirma que p es el coigualador de f y g . Veamos primero que conmuta, esto es:

$$\begin{aligned} p(f(a)) = p(g(a)) \quad & sii \\ f(a) + D = g(a) + D \quad & sii \\ f(a) - g(a) = 0 \quad & sii \\ f(a) - g(a) \ \in \ D. & \end{aligned}$$

Y si $j : B \longrightarrow C$ es un morfismo tal que $jf = jg$, entonces definamos el morfismo $k : B/D \longrightarrow C$ dado por:

$$k(\bar{b}) \ := \ j(b).$$

Por construcción se tiene que, $k(p(b)) = k(\bar{b}) = j(b)$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "j"'] & B/D \arrow[d, "k"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Y si $l : B/D \longrightarrow C$ es un morfismo tal que $lp = j$, entonces $lp = j = kp$, sea $\overline{b} \in B/D$, entonces, $l(p(b)) = k(p(b))$, esto es, $l(\overline{b}) = k(\overline{b})$, es decir, k es única. Con lo que se tiene que p es el coigualador de f y g. □

Núcleos y Conúcleos.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ con elemento cero se define para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ el *Núcleo* de f como el igualador de f y el morfismo $0_{AB} : A \longrightarrow B$.

Dualmente el *Conúcleo* de f se define como el coigualador de f y el morfismo $0_{AB} : A \longrightarrow B$.

Una categoría con elemento cero, se dice que posee *núcleos* (*conúcleos*) si todo morfismo tiene *núcleo* (*conúcleo*.)

Observación. Dado un anillo R , la categoría $R - mod$ posee núcleos y conúcleos.

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N \in R - mod_1$, entonces el núcleo de f esta dado por, $nuc(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0 \}$, junto con la inclusión $i : nuc(f) \longrightarrow M$. El conúcleo de f es $conuc(f) = N/Im(f)$ junto con el morfismo proyección $\pi : N \longrightarrow N/Im(f)$.□

Categorías Normales y Conormales.

Definición. Se dice que el monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es *normal* si f es el núcleo de algún morfismo. La categoría se dice normal si cada monomorfismo es normal. De manera dual se definen los epimorfismos *conormales* y las categorías conormales.

Observación. Dado un anillo R , la categoría $R - mod$ es normal y conormal.

Demostración. Sea el monomorfismo $f : A \longrightarrow B \in R - mod_1$. Entonces se afirma que f es el núcleo (igualador) de los morfismos paralelos $p : B \longrightarrow B/Im(f)$ y $\tilde{0} : B \longrightarrow B/Im(f)$ (morfismo cero de B en $B/Im(f)$). Pues $\forall\ a \in A,\ p(f(a)) = f(a) + Im(f) = \overline{0} = \tilde{0}(f(a))$, esto es $pf = \tilde{0}f$. Y si $h : C \longrightarrow B$ es un morfismo tal que $ph = \tilde{0}h$ entonces observemos que $\forall\ c \in C,\ \ p(h(c)) = \tilde{0}(h(c)) = \overline{0}$, esto es $h(c) \in Im(f)$, notemos ahora que como f es mono existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = h(c)$, esto nos define un morfismo $\psi : C \longrightarrow A$ dado por $\psi(c) = a$ donde $f(a) = h(c)$. Finalmente notemos que si $\varphi : C \longrightarrow A$ es un morfismo tal que $f\psi = f\varphi$ entonces debido a que f es mono (cancelable por la izquierda) set tiene que $\psi = \varphi$. De donde se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "\tilde{0}"'] & B/Im(f) \\ C \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Entonces f es núcleo. Esto es $R - mod$ es una categoría normal.

Sea ahora el epimorfismo $f : A \longrightarrow B$. Se afirma que f es el conúcleo (coigualador) de los morfismos paralelos $i : Ker(f) \longrightarrow B$ (morfismo inclusión) y $\tilde{0} : Ker(f) :\longrightarrow A$. (morfismo cero de $Ker(f)$ en A). Dada entonces $a \in Ker(f)$ se tiene que $f(i(a)) = 0 = f(0) = f(\tilde{0}(a))$, esto es $fi = f\tilde{0}$. Y si $h : A \longrightarrow C$ es un morfismo tal que $hi = h\tilde{0}$ entonces notemos que $\forall\ a \in Ker(f)$ se tiene que $h(i(a)) = h(\tilde{0}(0)(a)) = 0$, esto es $Ker(f) < Ker(h)$, entonces debido a la propiedad universal del cociente $\exists$ un único morfismo $\psi : B \longrightarrow C$ tal que $\psi f = h$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "\tilde{0}"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Entonces el epimorfismo f es conúcleo. Esto es $R - mod$ es una categoría conormal. $\square$

Categoría exacta.

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice exacta si $\mathcal{C}$ tiene núcleos, conúcleos es normal y conormal.

Observación. $R - mod$ es una categoría exacta.

Productos y Coproductos.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y una familia de objetos $\{C_i\}_I$ indicada por un conjunto I , el *producto* de la familia $\{C_i\}_{i\in I}$ es un objeto $P \in \mathcal{C}_0$ junto con una familia de morfismos $\{\pi_i : P \longrightarrow C_i\}_I$ que cumplen la siguiente propiedad, si $\{f_i : B \longrightarrow C_i\}_I$ es una familia de morfismo entonces $\exists$ un único morfismo $f : B \longrightarrow P$ tal que $\forall\, i \in I$ se tiene que $\pi_i f = f_i \quad \forall\ i \in\ I$, es decir se tiene que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "f_i"'] & & C_i \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall\, i \in I$.

Observación. Toda familia de objeto en $R - mod$ tiene producto.

Demostración. El Producto Directo construido en el capitulo anterior es el producto. $\square$

Dualmente se define el *coproducto.*

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y una familia de objetos $\{C_i\}_I$ indicada por un conjunto I , el *coproducto* de la familia $\{C_i\}_{i \in I}$ es un objeto $P \in \mathcal{C}_0$ junto con una familia de morfismos $\{\iota_i : C_i \longrightarrow P\}_I$ que cumplen la siguiente propiedad, si $\{f_i : C_i \longrightarrow B\}_I$ es una familia de morfismo entonces $\exists$ un único morfismo $f : P \longrightarrow B$ tal que $\forall\, i \in I$ se tiene que $f\iota_i = f_i \ \forall\, i \in I$, es decir se tiene que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "f"'] & \\
B & & C_i \arrow[ul, "\iota_i"'] \arrow[ll, "f_i"]
\end{tikzcd}$$

conmuta $\forall\, i \in I$.

Observación. Toda familia de objetos en $R - mod$ tiene coproducto.

Demostración. La suma directa externa construida en el capitulo anterior es el coproducto$\square$.

Productos Fibrados y Coproductos Fibrados.

Definición. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un par de morfismos con el mismo codominio $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$, el *producto fibrado* de f y g es un par de morfismo $h : X \longrightarrow A$ y $j : X \longrightarrow B$ los cuales cumplen las siguientes condiciones;

1. $fh = gj$, es decir el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "j"'] & & C \\
 & B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Para cada par de morfismos $k : D \longrightarrow A$ y $l : D \longrightarrow B$ tales que $fk = gl$ $\exists$ un único morfismo $t : D \longrightarrow X$ tal que $ht = k$ y $jt = l$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[urr, "h"] \arrow[drr, "j"'] & D \arrow[l, "t"'] \arrow[ur, "k"'] \arrow[dr, "l"] & & C \\
 & & B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Dualmente se define el *coproducto fibrado.*

Definición. Dada una Categoría $\mathcal{C}$ y un par de morfismos con el mismo dominio $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$, el *coproducto fibrado* de f y g es un par de morfismos $h : A \longrightarrow X$ y $j : B \longrightarrow X$ los cuales cumplen las siguientes condiciones;

1. $hf = jg$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "h"] & \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\
 & B \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Para cada par de morfismos $k : A \longrightarrow D$ y $l : B \longrightarrow D$ tales que $kf = lg$

$\exists$ un único morfismo $t : X \longrightarrow D$ tal que $th = k$ y $tj = l$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "h"] & & \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & D & X \arrow[l, "t"'] \\
& B \arrow[ur, "l"] \arrow[urr, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

7.3. **Límites (límite proyectivo) y Colímites (límite inductivo).** .

Definición. Sea $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor , un *cono* para el funtor F es un objeto $D \in \mathcal{D}_0$ junto con una transformación natural $\mu : \Delta_D \longrightarrow F$ (Δ_D es el funtor constante con valor D) , esto es, $\forall\ f \in \mathcal{C}_1$, $f : C \longrightarrow C'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "\mu_C"'] \arrow[dr, "\mu_{C‘}"] & \\
F_0(C) \arrow[rr, "F_1(f)"'] & & F_0(C') \\
C \arrow[u, "F_0"] \arrow[rr, "f"'] & & C' \arrow[u, "F_0"']
\end{tikzcd}$$

Llamaremos a D el vertice del cono (D, μ) . Ahora dados dos conos $(D,\ \mu\,)$ y $(D*,\ \mu^*\,)$, un morfismo de conos es un morfismo $f : D \longrightarrow D*$ en $\mathcal{D}_1$ tal que $\forall\ C \in \mathcal{C}_0$ se tiene que $\mu^*_C\, f = \mu_C$ .Dados dos morfismos de conos $f : D \longrightarrow D*$ y $g : D* \longrightarrow D‘$, el morfismo $gf : D \longrightarrow D‘$ es nuevamente un morfismo de conos de D en $D‘$. Claramente dado un cono (D, μ) el morfismo $1_D \in \mathcal{D}_1$ es el morfismo de conos identidad para el cono (D, μ). Con esto se tiene definida una nueva categoria *Con(F)* de la siguiente manera :

$$Con(F)_0 = \{ \, (D, \{\mu_C\}_{\mathcal{C}} \,) \mid D \, es \ cono \ para \ el \ \ funtor \ F \, \}$$

$$Con(F)_1 = \{ \, f : D \longrightarrow D^* \mid f \in \mathcal{D}_1 \ \ es \ morfismo \ de \ conos \, \}$$

Un *Cono límite* o simplemente *límite* para el funtor F $(\underrightarrow{\lim} F, \ \{f_C\} \,)$ es un objeto terminal en la categoría Con(F), esto es dado otro cono $(D, \{ \, d_C\} \,)$ $\exists$ un único morfismo $\psi : D \longrightarrow \underrightarrow{\lim} F$ tal que $\forall \ C \ \in \ \mathcal{C}_0 \ \ f_C \, \psi = d_C$ como ya hemos observado los objetos terminales son únicos salvo isomorfismos esto quiere decir que en particular los vertices de dos límites son isomorfos.

Diagrama de límite para el funtor F :

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[ddl, "d_C"'] \arrow[ddr, "d_{C'}"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \\
& \underrightarrow{\lim} F \arrow[dl, "f_C"] \arrow[dr, "f_{C'}"'] & \\
F_0(C) \arrow[rr, "F_1(g)"'] & & F_0(C')
\end{tikzcd}$$

para toda $g : C \longrightarrow C' \ \in \mathcal{C}_1$.

De manera dual queda definido un *Cocono* para un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ como un objeto $D \ \in \mathcal{D}$ junto con una transformación natural $\psi : F \longrightarrow \Delta_D$,esto es, $\forall \ f \ \in \ \mathcal{C}_1$, $f : C \longrightarrow C'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
& D & \\
F_0(C) \arrow[ur, "\psi_C"] \arrow[rr, "F_1(f)"'] & & F_0(C') \arrow[ul, "\psi_{C'}"'] \\
C \arrow[u, "F_0"] \arrow[rr, "f"'] & & C' \arrow[u, "F_0"']
\end{tikzcd}
$$

De nuevo se tiene definida la categoría *Cocon(F)* , llamaremos un *Cocono límite* o *Colímite* a un objeto inicial en la categoría *Cocon(F).*

Daremos ahora algunos ejemplos de límites. En R-Mod hemos demostrado su existencia así como alguna de sus propiedades más fundamentales de dichos objetos.

7.4. **Ejemplos de Límites.** .

• *Objeto final.*

Sea 0 la categoría vacía $! : 0 \longrightarrow \mathcal{D}$ el único funtor que va de 0 a $\mathcal{D}$, entonces observemos primero cada objeto $D \in \mathcal{D}$ junto con una familia de morfismo vacía determina un cono para ! y un mapa de conos no es más que un morfismo en $\mathcal{D}$ y debido a la condición de unicidad de morfismo que cumple el límite se tiene que un cono límite es un objeto final en $\mathcal{D}$.

• *Productos.*

Sea 2 la categoría discreta con dos elementos x, y (2 sólo tiene dos elementos y dos morfismos identidad respectivamente)). Un funtor $F : 2 \longrightarrow \mathcal{C}$ está formado por un par de objetos $< A, B >$ de $\mathcal{C}_0$ y un cono para este funtor consiste de un objeto $C \in \mathcal{C}_0$ junto con dos morfismos $\mu_A : C \longrightarrow A$, $\mu_B : C \longrightarrow B$ (2 sólo tiene dos flechas triviales). Ahora ($C, (\mu_A, \mu_B)$) es un cono límite para F *sii* $\forall\ D\ \in\ \mathcal{C}_0$ y para cada par de flechas $f : D \longrightarrow A$, $g : D \longrightarrow B$ $\exists$ un único morfismo $\psi : D \longrightarrow C$ tal que $f = \mu_A \psi$ y $g = \mu_B \psi$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & C \arrow[dl, "\mu_A"'] \arrow[ddl, "\mu_B"] \\ & A & \\ & B & \end{tikzcd}$$

Entonces hay una correspondencia 1-1 entre morfismos $D \longrightarrow C$ y un par de morfismos $D \longrightarrow A$ y $D \longrightarrow B$. Está es la propiedad universal del producto, es por está razón que un cono límite para $< A,\ B >$ es llamado producto, usualmente denotado:

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Diremos que la categoría $\mathcal{C}$ tiene productos binarios *sii* todo funtor $F : 2 \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene cono límite.

• *Igualadores.*

Sea $\hat{2}$ la categoría con dos elementos y únicamente dos flechas paralelas no triviales, es decir:

$$\hat{2}_0 = \ \{\ x\ ,\ y\ \}$$

$$\hat{2}_1 = \ \{\ 1 : x \longrightarrow y\ ,\ 2 : x \longrightarrow y\ ,\ 1_x\ ,\ 1_y\ \}$$

Entonces un funtor $F\ :\ \hat{2}\ \longrightarrow \mathcal{C}$ está formado por un par de morfismos paralelos $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ $(F_0(x) = A,\ F_0(y) = B)$, denotaremos a este funtor por $(f,\ g)$, entonces un cono para este funtor es un objeto $C \in \mathcal{C}_0$ junto con dos morfimos $\mu_A : C \longrightarrow A$, $\mu_B : C \longrightarrow B$ tales que $f\mu_A = \mu_B$ y $g\mu_A = \mu_B$, esto es $f\mu_A = g\mu_A$ es decir, dar un cono para $(f,\ g)$ es lo mismo que dar un morfismo $\mu_A : C \longrightarrow A$ tal que $f\mu_A = g\mu_A$. Este cono es límite *sii* dado cualquier otro morfismo $h : D \longrightarrow A$ tal que $fh = gh$ $\exists$ un único morfismo $\psi : D \longrightarrow C$ tal que $h = \mu_A\psi$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mu_A"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
D \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si μ_A es límite lo llamaremos el *igualador* de f y g .

Diremos que la categoría $\mathcal{C}$ tiene igualadores si todo funtor $F : \hat{2} \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene cono límite.

• *Producto Fibrado.*

Sea la categoria $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}_0 = \{x,\, y,\, z\}$ y $a : x \longrightarrow z$, $b : y \longrightarrow z$ los únicos morfismo no triviales de $\mathcal{C}_1$. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ está determinado por dos morfismos en $\mathcal{D}_1$ con el mismo codominio $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$. Un cono para este funtor es un objeto $D \in \mathcal{D}_0$ junto con dos morfismo $P_X : D \longrightarrow X$, $P_Y : D \longrightarrow Y$ tales que $fP_x = gP_y$. Este cono es límite si dado otro cono $V \in \mathcal{D}_0,\ r : V \longrightarrow Y$ y $s : V \longrightarrow X$ sus respectivos morfismos, $\exists$ un único morfismo $\psi : V \longrightarrow D \in \mathcal{D}_1$ tal que $r = P_Y \circ \psi$ y $s = P_X \circ \psi$ es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[drr, bend left, "r"] \arrow[dr, dashed, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& D \arrow[r, "P_Y"'] \arrow[d, "P_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

Cuando el cono es límite los morfismos P_X y P_Y son el Producto Fibrado de g y h .

Diremos que una categoría $\mathcal{D}$ tiene productos fibrados *sii* todo funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tiene cono límite, donde $\mathcal{C}$ tiene la *estructura* antes mencionada.

• *Límites de Sistemas Dirigidos.*

Dada un sistema dirigido de R-módulos $(\{M_i\}_I, \ \{f_{i,j}\}_{i \leqslant j})$ (funtor F) se define un cono para F como un objeto $M \in R - mod_0$ junto con una transformación natural $\mu : \Delta_M \longrightarrow F$, es decir para cada $<_i^j \in I_1$ se tiene que el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\
M_i \arrow[rr, "f_{i,j}"'] & & M_j
\end{tikzcd}$$

Ahora bien dados dos conos $(M, \{\mu_i\}_I$, $(N, \{\nu_i\}_I)$ para el funtor F (sistema dirigido) un morfismo de conos es un morfismo $\psi : M \longrightarrow N$ tal que $\nu_i \psi = \mu_i \ \forall \ i \ \in \ I$, con esto se tiene definida la categoría $Con(F)$ donde $Con(F)_0$ es el conjunto de los conos para F y $Con(F)_1$ son los morfismo de conos. Finalmente se tiene que el límite $\varinjlim \{M_i\}$, para el sistema dirigido

$(\{M_i\}_I,\ \{f_{i,j}\}_{i\leqslant j})$ es un *límite* en la categoría $Con(F)$, esto es, un objeto terminal en dicha categoría.

Observación. Consideremos las categorías $R-mod$ y $R-mod^{(I,\leqslant)}$, entonces se tiene definido el funtor $\varinjlim : R-mod^{(I,\leqslant)} \longrightarrow R-mod$. Notemos primero que dado un morfismo (transformación natural) $\tau \in R-mod^{(I,\leqslant)}{}_1$:

$$\tau : (\{M_i\}_I,\ \{f_{i,j}\}_{i\leqslant j}) \Rightarrow (\{N_i\}_I,\ \{g_{i,j}\}_{i\leqslant j})$$

Se tiene entonces que la familia de morfismos $\{\beta_i\,\tau_i\}_I$ forman un cono para $\varinjlim\{M_i\}_I$ pues:

$$\begin{aligned}\beta_i\tau_i &= (\beta_j g_{i,j})\tau_i\\ &= \beta_j(g_{i,j}\tau_i)\\ &= \beta_j(\tau_j f_{i,j})\\ &= (\beta_j\tau_j)f_{i,j}\end{aligned}$$

Entonces debido a la propiedad universal del límite existe un único morfismo $\psi : \varinjlim\{M_i\}_I \longrightarrow \varinjlim\{N_i\}_I$, tal que $\psi\,\alpha_i = \beta_i\,\tau_i\ \forall\ i \in I$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "f_{i,j}"'] & N_i \arrow[d, "g_{i,j}"] & \\
 & M_j \arrow[r, "\tau_j"'] & N_j & \\
\varinjlim\{M_i\}_I \arrow[uur, "\alpha_i"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] \arrow[rrr, dashed, "\psi"'] & & & \varinjlim\{N_i\}_I \arrow[uul, "\beta_i"'] \arrow[ul, "\beta_j"]
\end{tikzcd}$$

Con esto se tiene definido el funtor $\varinjlim : R-mod^{(I,\leqslant)} \longrightarrow R-mod$ de la siguiente manera:

$$\varinjlim{}_{.0}((\{M_i\}_I, \{f_{i,j}\}_{i\leqslant j})) := (\varinjlim\{M_i\}_I,\ \{\alpha_i : \varinjlim\{M_i\} \longrightarrow M_i\}I)$$

y

$$\varinjlim{}_{.1}(\tau) := \psi$$

Donde ψ es el morfismo considerado anteriormente. Verifiquemos que en efecto es funtor, para esto sean los morfismos:

$$\tau : (\{M_i\}_I,\ \{f_{i,j}\}_{i\leqslant j}) \Rightarrow (\{N_i\}_I,\ \{g_{i,j}\}_{i\leqslant j})$$

y

$$\nu : (\{N_i\}_I,\ \{g_{i,j}\}_{i\leqslant j}) \Rightarrow (\{P_i\}_I,\ \{h_{i,j}\}_{i\leqslant j}).$$

Entonces sea $\varinjlim{}_{.1}(\nu) = \varphi : \varinjlim\{N_i\}_I \longrightarrow \varinjlim\{P_i\}_I$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "f_{i,j}"'] & N_i \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d, "g_{i,j}"'] & P_i \arrow[d, "h_{i,j}"] \\
M_j \arrow[r, "\tau_j"] & N_j \arrow[r, "\nu_j"] & P_j \\
\varinjlim\{M_i\}_I \arrow[u, "\alpha_j"] \arrow[r, dashed, "\psi"'] & \varinjlim\{N_i\}_I \arrow[u, "\beta_j"'] \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & \varinjlim\{P_i\}_I \arrow[u, "\gamma_j"']
\end{tikzcd}$$

Finalmente observemos que si $\varinjlim{}_{.1}(\nu\,\tau) = \phi : \varinjlim\{M_i\}_I \longrightarrow \varinjlim\{P_i\}_I$, esto es $\nu_j\tau_j\alpha_j = \gamma_j\,\phi\ \ \forall\ j\ \in\ I$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\nu_j\tau_j\alpha_j &= \nu_j(\tau_j\alpha_j) \\
&= \nu_j(\beta_j\psi) \\
&= (\nu_j\beta_j)\psi \\
&= \gamma_j\varphi\psi
\end{aligned}$$

$\forall\ j \in\ I$ pero también $\nu_j\tau_j\alpha_j = \gamma_j\phi$ y debido a la unicidad de ϕ se tiene que $\varphi\psi = \phi$, esto es, $\varinjlim ._1(\nu\tau) = \varinjlim ._1(\nu) \varinjlim ._1(\tau)$.

Y si $\{1_{M_i}\} : \{M_i\}_I \Rightarrow \{M_i\}_I$ es la identidad entonces, $\varinjlim ._1(\{1_{M_i}\}) = 1_{\varinjlim\{M_i\}_I} = 1_{\varinjlim ._0(\{M_i\}_I)}$. Con lo que se tiene que $\varinjlim : R - mod^{(I,\leqslant)} \longrightarrow R - mod$ es funtor $\square$.

7.5. **Límites mediante productos e igualadores.** .

Observación. Cualquier funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow SET$ tiene límite.

Demostración. Consideremos el objeto:

$$L = \{ (x_C)_{C_0} \in \prod_{C_0} F_0(C) \mid \forall\ f : C \longrightarrow C` \in \mathcal{C}_1,\ \ F_1(f)(x_C) = x_{C`}\ \ \forall\ x_C \in\ C\}$$

notemos primero que $L \neq \varnothing$ pues $\overline{0} \in L$, entonces, L junto con la familia de proyecciones $\{ \pi_{F(C)} : L \longrightarrow F(C)\}_{\mathcal{C}_0}$ forman un cono límite, pues sea $f : C \longrightarrow D \in \mathcal{C}_1$, entonces:

$$\begin{aligned}
F_1(f)\left(\pi_{F(C)}\left((x_C)_{C_0}\right)\right) &= F_1(f)(x_C) \\
&= x_{C`} \\
&= \pi_{F(C`)}((x_C)_{C_0})
\end{aligned}$$

y si se tiene otro cono $(P , \{ h_C : P \longrightarrow F_0(C) \})$, definamos $\psi : P \longrightarrow L$ por:

$$\psi := \prod h_C : P \longrightarrow L$$

la cual está claramente bien definida y además $\psi\pi_{F(C)} = h_C$ por construcción y si $\phi : P \longrightarrow L$ es tal que $\pi_{F(C)}\phi = h_C \ \forall\ C \in \mathcal{C}_0$, entonces, $\pi_{F(C)}\phi = h_C = \pi_{F(C)}\psi$ y finalmente notemos que dos morfismos que salen de un producto son el mismo si son el mismo seguidos de cualquier proyección lo cual sucede, entonces $\phi = \psi$ es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[ddl, "h_C"'] \arrow[ddr, "h_D"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \\
& L \arrow[dl, "\rho_{F(C)}"] \arrow[dr, "\rho_{F(D)}"'] & \\
F_0(C) \arrow[rr, "F_1(f)"'] & & F_0(D)
\end{tikzcd}
$$

De donde se tiene que $(L\, ,\ \{\ \pi_{F(C)}\}_{\mathcal{C}_0}\ )$ es límite para el funtor F. $\square$

De manera análoga se puede demostrar que un funtor sobre un categoría pequeña C (C_0 y C_1 son conjuntos) siempre tiene límite :

Proposición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría que contiene a todos sus *productos pequeños* (incluyendo al producto vacío, es decir un objeto final) y todos sus igualadores, entonces $\mathcal{C}$ tiene a todos sus *límites pequeños.*

Demostración. Observemos primero que dado un conjunto I y una familia indicada por el conjunto I $\{C_i\}_I$ de elementos de $\mathcal{C}_0$, una flecha $f : X \longrightarrow \prod_I C_i$ queda determinada por las composiciones $f_i = \Pi_i f : X \longrightarrow C_i$, es por esto que a f también se le denota como $f = (f_i \mid i \in I) = \prod f_i$.

Ahora dado el funtor $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ categoría pequeña, consideremos el producto $\prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E)$ y $\prod_{\mathcal{E}_1} F_0(cod(g))$ en $\mathcal{C}_0$, ahora para construir un par de flechas paralelas f y h con dominio $\prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E)$ y condominio $\prod_{\mathcal{E}_1} F_0(cod(g))$ consideremos las siguientes familias de flechas indicadas por el conjunto $\mathcal{E}_1$ de la siguiente manera :

$$\{f_g = \pi_{cod(g)} : \prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E) \longrightarrow cod(g)\}_{\mathcal{E}_1}$$

y

$$\{h_g = F_1(g)\pi_{dom(g)} : \prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E) \longrightarrow cod(g)\}_{\mathcal{E}_1}.$$

Entonces se tienen definidas las flechas paralelas :

$$f = \prod_{\mathcal{E}_1} f_g : \prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E) \longrightarrow \prod_{\mathcal{E}_1} F_0(cod(g))$$

y

$$h = \prod_{\mathcal{E}_1} h_g : \prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E) \longrightarrow \prod_{\mathcal{E}_1} F_0(cod(g))$$

Consideremos ahora el igualador de f y h, $e : I \longrightarrow \prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E)$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "e"] & \prod_{\mathcal{E}_0} F_0(E) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \prod_{\mathcal{E}_1} F_0(cod(g)) \end{tikzcd}$$

Por último consideremos los morfismos proyección y su composición con e $\pi_E e : I \longrightarrow F_0(E)$, entonces se afirma que la pareja $(I, \{\pi_E e\}_{\mathcal{E}_0})$ es un límite para el funtor F. Pues si $g : E \longrightarrow E'$ está en $\mathcal{E}_1$, entonces, $F_1(g)\pi_E e = F_1(g)\pi_{dom(g)}e = \pi_{cod(g)}e = \pi_{E'}e$ y si existe otra familia compatible de flechas $l_E : L \longrightarrow F_0(E)$ entonces por la propiedad del igualador existe $\psi : L \longrightarrow E$ tal que $\pi_E\psi = l_E$ $\forall$ $E \in \mathcal{E}_0$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[ddl, "l_E"'] \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[ddr, "l_{E'}"] & \\ & E \arrow[dl, "\pi_E e"] \arrow[dr, "\pi_{E'} e"'] & \\ F_0(E) \arrow[rr, "F_1(g)"'] & & F_0(E') \end{tikzcd}$$

entonces $(I, \{\pi_E e\}_{\mathcal{E}_0})$ es un límite para el funtor F, de donde se tiene que $\mathcal{C}$ tiene a todos sus límites pequeños $\square$.

Dualmente se tiene el siguiente resultado.

Proposición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría que contiene a todos sus *coproductos pequeños* y todos sus coigualadores, entonces $\mathcal{C}$ tiene a todos sus *colímites pequeños.*

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ es *completa si* para todo funtor $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ con $\mathcal{I}$ categoría pequeña, el límite existe.

Observación. $R - mod$ es una categoría completa.

Demostración. Dado que $R - mod$ tiene a todos sus productos e igualadores se tiene que $R - mod$ tiene a todos sus límites pequeños, esto es, $R - mod$ es completa. □

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ es *cocompleta si* para todo funtor $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ con $\mathcal{I}$ categoría pequeña, el colímite existe.

Observación. $R - mod$ es una categoría cocompleta.

Demostración. Dado que $R - mod$ tiene a todos sus coproductos y coigualadores se tiene que $R - mod$ tiene a todos sus colímites pequeños, es decir $R - mod$ es cocompleta. □

Adjunciones.

Definición. Sean $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores. Decimos que F es un *adjunto izquierdo* de G , o que G es *adjunto derecho* de F , si existe un biyección natural:

$$m_{D,C} \, : \mathcal{C}_1(F_0(D)\,,\; C\;) \Longrightarrow \mathcal{D}_1(D\,, G_0(C)\;)$$

$\forall\ C \in \mathcal{C}_0$, $\forall\ D \in \mathcal{D}_0$. Dos morfismos $f : F_0(D) \longrightarrow C \in \mathcal{C}_1$ y $g : D \longrightarrow G_0(C) \in \mathcal{D}_1$ que se corresponden bajo está asignación son llamados *transpuestos*.

La naturalidad significa que, dados $f : D \longrightarrow D‘ \in \mathcal{D}_1$, $g : C‘ \longrightarrow C \in \mathcal{C}_1$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1(F_0(D)\,,\ C) \arrow[r, "m_{D,C}"] & \mathcal{D}_1(D\,,\ G_0(C)) \\
\mathcal{C}_1(F_0(D‘)\,,\ C‘) \arrow[u, "\mathcal{C}(F(f)\,,g)"] \arrow[r, "m_{D‘,C‘}"'] & \mathcal{D}_1(D‘\,,\ G_0(C‘)) \arrow[u, "\mathcal{D}(f,G(g))"']
\end{tikzcd}$$

donde dado $\alpha : F_0(D‘) \longrightarrow C‘$, $\mathcal{C}(F(f)\,,\ g)(\alpha) : F_0(D) \longrightarrow C$ es la composición

$$F_0(D) \xrightarrow{F_1(f)} F_0(D‘) \xrightarrow{\alpha} C‘ \xrightarrow{g} C$$

Ejemplos.

• Dado un R, S-bimódulo ${}_RM_S$ se tiene que el funtor tensor $\_\otimes_R M : Mod-R \longrightarrow Mod-S$ es adjunto izquierdo del funtor $Hom_S(M\,,\ \_) : Mod-S \longrightarrow Mod-R$. Definiendo la relación :

$$\psi : Hom_S(\_\otimes_R M\,_0(N_R), P) \longrightarrow Hom_R(N\,,\ Hom_S(M\,,\ \_)(P)\ ).$$

esto eso :

$$\psi : Hom_S\,(N \otimes_R M\,,\ P) \longrightarrow Hom_R\,(N\,,\ Hom_S(M\,,\ P)\ )$$

$\forall\ N_R \in Mod-R$, $\forall\ P_S \in Mod-S$, de la siguiente manera. $\forall\ f$:

$N \otimes_R M \longrightarrow P$ definimos, $\psi(f)(n) := f(n \otimes \text{␣}) : M \longrightarrow P \in Hom_S(M\,, P)$. Este función claramente es un S-morfismo, pues:

$$\begin{aligned}\psi(f)(n)\,s\,(m+m`) &= f(n \otimes (m+m`)s)\\ &= f(n \otimes (ms + m`s))\\ &f((n \otimes ms) + (n \otimes m`s))\\ &f(n \otimes ms) + f(n \otimes m`s)\\ &= f(n \otimes m)s + f(n \otimes m`)s\\ &= \psi(f)(n)\,s\,(m) + \psi(f)(n)\,s\,(m`).\end{aligned}$$

Por otro lado también se tiene la relación :

$$\varphi : Hom_R(N\,,\ Hom_S(M\,,\ \text{␣})(P)\ ). \longrightarrow Hom_S(\text{␣} \otimes_R M_0(N_R), P)$$

esto es:

$$\varphi : Hom_R\,(N\,,\ Hom_S(M\,,\ P)\ ) \longrightarrow Hom_S\,(N \otimes_R M\,,\ P)$$

$\forall\ N_R \in Mod - R\,,\ \forall\ P_S \in Mod - S$, de la siguiente manera. Observemos primero que $\forall\ g : N_R \longrightarrow (Hom_S(M\,,\,P))_R \in Mod - R_1$ se tiene una función bilineal $\hat{g} : (N \times M) \longrightarrow P$ definida de la siguiente manera:

$$\hat{g}(n\,,\,m) := g(n)(m)$$

$\forall\, n \in N\,, \forall\, m \in M$. Verifiquemos que es bilineal :

$$\begin{aligned}\hat{g}((n+n^{`})\,,\,m) &= g(n+n^{`})(m)\\ &= g(n)(m)+g(n^{`})(m)\\ &= \hat{g}(n\,,\,m)+\hat{g}(n^{`}\,,\,m).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(n\,,\,(m+m^{`})) &= g(n)(m+m^{`})\\ &= g(n)(m)+g(n)(m^{`})\\ &= \hat{g}(n\,,\,m)+\hat{g}(n\,,\,m^{`}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(nr\,,\,m) &= g(nr)(m)\\ &= g(n)r(m)\\ &= g(n)(rm)\\ &= \hat{g}(n\,,\,rm).\end{aligned}$$

Entonces $\exists\ g^* : N\otimes_R M \longrightarrow P$ tal que $\hat{g}(n\,,\,m) = g^*(n\otimes m)$.

Notemos ahora que $\psi(\varphi(g)) = g$, para esto sean $n\in N\,,m\in M$, entonces $\psi(\varphi(g(n)(m))) = \psi(\varphi(g)(n\otimes m)) = \psi(g^*(n\otimes m)) = g(n)(m)$.

Veamos ahora que $\varphi(\psi(f)) = f$, para esto sean $n\in N\,,m\in M$, entonces $\varphi(\psi(f(n\otimes m))) = \varphi(f(n\otimes \llcorner\!\lrcorner)(m)) = f^*(n\otimes m) = f(n\otimes m)$. Finalmete veamos que la biyección es natural. Para esto sean $f : N\longrightarrow N^{`}$ y $g : P^{`}\longrightarrow P$, entonces se tiene el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
Hom_S(N\otimes_R M\,,\,P) \arrow[r, "\psi_{N,P}"] & Hom_R(N\,,\,Hom_S(M\,,P)) \\
Hom_S(N^{`}\otimes M\,,\,P^{`}) \arrow[u, "{(F(f)\,,g)}"] \arrow[r, "\psi_{N^{`},P^{`}}"'] & Hom_R(N^{`}\,,\,Hom_S(M\,,\,P^{`})) \arrow[u, "{(f\,,G(g))}"']
\end{tikzcd}$$

Sea ahora $\alpha \in Hom_S(N^{`}\otimes M\,,\,P^{`})$, entonces, $\psi_{(N\,,\,P)}(F(f)\,,\,g)(\alpha) = \psi_{(N\,,\,P)}\circ g\circ\alpha\circ(f\otimes 1_M) = \hat{\alpha} : N\longrightarrow Hom_S(N\,,\,P)$, donde :

$$\hat{\alpha}(n)(m) = g(\alpha(f(n)\otimes\,m)).$$

$\forall\ n \in\ N,\ m\ \in M$. Por otro lado, $(f,\, G(g))\, \psi_{(N^{‘},\, P^{‘})}(\alpha) = (f,\, G(g))(\alpha^*)$ donde $\alpha^* : N^{‘} \longrightarrow Hom_S(M,\, P^{‘})$ está dada por $\alpha^*(n^{‘}) = \alpha(n^{‘} \otimes \llcorner\!\lrcorner)$, finalmente $(f,\, G(g))\alpha^* = g\alpha^* f$, donde :

$$g\alpha^* f(n)(m) = g(\alpha(f(n), \llcorner\!\lrcorner)(m) = g(\alpha(f(n) \otimes m))$$

Entonces $\psi_{(N,P)}(F(f)\,,\, g) = (f\,,\, G(g))\psi_{N^{‘},P^{‘}}$, es decir la biyección es natural. De donde se tiene que el funtor tensor $\llcorner\!\lrcorner \otimes_R M\ : Mod - R \longrightarrow Mod - S$ es adjunto izquierdo del funtor $Hom_S(M\,,\, \llcorner\!\lrcorner) : Mod - S \longrightarrow Mod - R$. $\square$

Equivalencias de Categorías.

Definición. Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *isomorfas sii* $\exists\ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores tal que $FG = 1_{\mathcal{D}}$ y $GF = 1_{\mathcal{C}}$, es decir $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfos en la categoría $\mathcal{CAT}$ (categoría donde los objetos son las categorías y los morfismos son los funtores entre ellas).

Definición. Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes *sii* $\exists\ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores tales que $\psi : GF \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\mu : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ son transformaciones naturales, es decir se tienen los siguientes diagramas conmutativos;

$$\begin{tikzcd}
F_0G_0(D) \arrow[r, "\mu_D"] \arrow[d, "F_1G_1(f)"'] & D \arrow[d, "f"] \\
F_0G_0(D^{‘}) \arrow[r, "\mu_{D^{‘}}"'] & D^{‘}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G_0F_0(C) \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[d, "G_1F_1(h)"'] & C \arrow[d, "h"] \\
G_0F_0(C^{‘}) \arrow[r, "\psi_{C^{‘}}"'] & C^{‘}
\end{tikzcd}$$

$\forall\ f\ \in \mathcal{D}_1$ y $h\ \in \mathcal{C}_1$.

7.6. **Categorías aditivas, abelianas y de Grothendieck.** .

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ es *preaditiva* (A1) si cumple las siguientes propiedades:

•) $\mathcal{C}$ tiene elemento *cero.*

•) $\forall\ \ A, B\ \in \mathcal{C}_0$, $Hom(A, B)$ pose una estructura de *grupo abeliano*, es decir, $(Hom(A, B), +, 0_{AB})$ es un grupo abeliano.

•) La composición de morfismos $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$ es bilineal, esto es, $\forall\ \alpha, \beta, \gamma\ \in\ \mathcal{C}_1$ se tiene que $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$ y $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, cada vez que las composiciones anteriores esten definidas.

Observación. $R - mod$ es una categoría preaditiva.

Demostración. Se afirma que el R-módulo trivial $\{0\}$ es el elemento cero, pues si M es un R-módulo entonces, $|Hom(\{0\},\ M)| = 1$ debido a que el elemento identidad siempre va al elemento identidad, y $|Hom(M,\ \{0\})| = 1$ claramente.

Hemos ya notado que $\forall\ M,\ N$ R-módulos, $Hom(M, N)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Finalmente notemos que $\forall\ j : P \longrightarrow M\ \ \forall\ f, g : M \longrightarrow N\ \ \forall\ \ h : N \longrightarrow P$ se tiene que $h((f + g)(m)) = h(f(m) + g(m)) = h(f(m)) + h(g(m))\ \forall\ m\ \in\ M$ y $(f + g)(j(p)) = f(j(p)) + g(j(p))\ \forall\ p \in\ P$. Esto es $h(f + g) = hf + hg$ y $(f + g)j = fj + gj$. Entonces $R - mod$ es una categoría preaditiva. □

Definición. Una categoría preaditiva $\mathcal{C}$ (A1) es *aditiva* (A2) si para cada par de objetos $A, B\ \in\ \mathcal{C}_0$ existe un *producto* $A \times B\ \in \mathcal{C}_0$.

Observación. $R - mod$ es una categoría aditiva.

Demostración. Dados dos R-módulos, el producto directo es el producto en el sentido categórico (debido a su propiedad universal) .□

Definición 1. Una categoría $\mathcal{C}$ es *abeliana* si;

$A1$. $\mathcal{C}$ es preaditiva

$A2$. $\mathcal{C}$ es aditiva

$A3$. Todo morfismo tiene un *kernel* y un *cokernel* .

$A4$. Para todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ el morfismo inducido $\alpha` : Coker(ker\alpha) \longrightarrow Ker(coker\alpha)$ es un isomorfismo.

La condición $A4$ puede ser reemplazada por el siguiente axioma;

$A4`$. Todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}_1$ puede ser "factorizado" como $\alpha : \beta\gamma$ donde γ es un *cokernel* y β es un *kernel*.

Definición. Dadas dos categorías aditivas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un *funtor aditivo* si F_1 es un homomorfismo de grupos, esto es, para todo $Hom_{\mathcal{C}}(C, C\prime)$ para todas f, g elementos de $Hom_{\mathcal{C}}(C, C\prime)$ se tiene que $F_1(f + g) = F_1(f) + F_1(g)$. Es decir si la función inducida por el funtor F :

$$Hom_{\mathcal{C}}(C,\ C`) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F_0(C),\ F_0(C`))$$

es un morfismo de grupos.

Definición 2. Una categoría $\mathcal{C}$ es *abeliana* si $\mathcal{C}$ es *aditiva* y *exacta*.

Observación. $R - mod$ es una categoría abeliana.

Demostración. Hemos ya visto que $R - mod$ es una categoría aditiva y exacta, esto es $R - mod$ es una categoría aditiva. □

Categorías de Grothendieck

Definición 1. Una categoría $\mathcal{C}$ aditiva cocompleta es una *categoría de Grothendieck* si cumple la siguiente condición:

AB5. Para todo objeto $C \in \mathcal{C}_0$, para toda familia dirigida de subobjetos $(C_i)_I$ y para todo subobjeto B de C se cumple que;

$$\left(\sum_I C_i\right) \cap B = \sum_I (C_i \cap B)$$

Esta propiedad implica que la retícula $L(C)$ de subobjetos de C es continua superiormente. Esto implica en particular que los límites directos son *exactos.*

Definición 2. Una categoría $\mathcal{C}$ aditiva cocompleta es una *categoría de Grothendieck* si el funtor $\varinjlim : R - Mod^I \longrightarrow R - Mod$ es un funtor exacto.

La exactitud de los límites directos implica que las *uniones directas* preservan intersecciones finitas (AB5).

Observación. Las siguientes proposiciones son equivalentes para una categoría abeliana cocompleta $\mathcal{C}$;

a) Los límites directos son exactos en $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}$ satisface AB5

c)Para cada morfismo $\alpha : B \longrightarrow C$ y para cada familia dirigia $(C_i)_I$ de subobjetos de C , se tiene que:

$$\alpha^{-1} \sum C_i = \sum \alpha^{-1}(C_i)$$

Observación. $R - mod$ es una categoría de Grothendieck .

Demostración. Hemos ya notado que $R - mod$ es una categoría aditiva co-completa. Consideremos ahora un conjunto dirigido superiormente I el cual hemos ya notado es una categorìa. Entonces dado un funtor $F : I \longrightarrow R - Mod$, construyamos *puntualmente* el límite directo de F de la siguiente manera. Consideremos el $R-$ módulo $\bigoplus_{I_0} F_0(i)$, ahora consideremos el siguiente submódulo ;

$$H := < \{ \, i_i(x) - i_j(F_1(\lambda)(x)) \mid \lambda : i \longrightarrow j \ \in I_1 \, (i \leqslant j) \, , \ x \ \in \ F_0(i) \ \} > .$$

Donde $i_j : F_0(j) \longrightarrow \bigoplus_{I_0} F_0(i)$ y $\rho : \bigoplus_{I_0} F_0(i) \longrightarrow \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H$ son el morfismo inclusión y proyección respectivamente. Entonces se afirma que ;

$$(\bigoplus_{I_0} F_0(i)/H \, , \ \{\alpha_i = \rho \ i_i\}_{I_0} \ )$$

Es el límite directo del funtor F . Veamos primero que la familia $\{\alpha_i\}$ es compatible. Para esto sea $\lambda : i \longrightarrow j \ \in \ I_1$. Sea entonces $x \ \in \ F_0(i)$ se tiene que $\alpha_i(x) = \alpha_j(F_1(\lambda)(x))$ *sii* $i_i(x) + H = i_j(F_1(\lambda)(x)) + H$ *sii* $i_i(x) - i_j(F_1(\lambda)(x)) \in H$ lo cual sucede por construcción de H .

Y si $\{\beta_i : F_0(i) \longrightarrow X\}$ es una familia compatible de morfismos, entonces por la propiedad universal de la suma directa existe un único morfismo $\psi : \bigoplus_{I_0} F_0(i) \longrightarrow X$ tal que $\beta_i = \psi \ i_i$. Finalmente notemos que $\forall \ h = \sum(i_i(x) - i_j(F_1(\lambda)(x))) \in H$ se tiene que; $\psi(\sum(i_i(x) - i_j(F_1(\lambda)(x)) = \sum(\psi(i_i(x) - i_j(F_1(\lambda)(x)))) = \sum(\psi(i_i(x)) - \psi(i_j(F_1(\lambda)(x))) = \sum(\beta_i(x) - \beta_j(F_1(\lambda)(x))) = \sum 0 = 0$, entonces por la propiedad universal del cociente existe un único morfismo $\overline{\psi} : \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H \longrightarrow X$ tal que $\overline{\psi}\rho = \psi$ entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos;

$$\begin{tikzcd}
 & F_0(i) \arrow[dl, "\alpha_i=\rho i_i"'] \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[dd, "F_1(\lambda)"] & \\
\bigoplus_{I_0} F_0(i)/H \arrow[rr, dashed, "\overline{\psi}"] & & X \\
 & F_0(j) \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Hemos también ya notado que dados dos funtores $F : I \longrightarrow R - Mod$ y $G : I \longrightarrow R - Mod$, una transformación natural $\sigma : F \Rightarrow G$ nos induce un morfismo $\tilde{\sigma} : \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H \longrightarrow \bigoplus_{I_0} G_0(i)/H`$. Esto nos induce el funtor *límite directo* $\varinjlim : R - mod^{(I\,,\,\leqslant)} :\longrightarrow R - mod$ dado por:

$$\varinjlim{}_{\cdot 0}(F) := \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H$$

y

$$\varinjlim{}_{\cdot 1}(\sigma) := \tilde{\sigma}$$

Donde H y $\tilde{\sigma}$ son los objetos previamente construidos. Veamos ahora que el funtor limite directo es exacto utilizando la siguiente equivalencia .Un funtor F es exacto *sii manda* sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas .

Consideremos entonces una sucesión exacta corta y su respectiva sucesión inducida por el funtor $\varinjlim$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{0} \arrow[r, Rightarrow, "0_1"] \arrow[d, "\varinjlim"] & (\{F_0(i)\}_{I_0}, \{F_1(\lambda)\}_{I_1}) \arrow[r, Rightarrow, "\sigma"] \arrow[d, "\varinjlim"] & (\{G_0(i)\}_{I_0}\,, \{G_1(\lambda)\}_{I_1}) \arrow[r, Rightarrow, "\nu"] \arrow[d, "\varinjlim"] & (\{H_0(i)\}_{I_0}, \{H_1(\lambda)\}_{I_1}) \arrow[r, Rightarrow, "0_2"] \arrow[d, "\varinjlim"] & \overline{0} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, "\tilde{0}"] & \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & \bigoplus_{I_0} G_0(i)/H` \arrow[r, "\tilde{\nu}"] & \bigoplus_{I_0} H_0(i)/H^* \arrow[r, "\tilde{0_2}"] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Entonces $\forall\, i \in I_0$ se tienen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{0} \arrow[r, "0_{1\ i}"] \arrow[d, "0_i"] & F_0(i) \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & G_0(i) \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & H_0(i) \arrow[r, "0_{2\ i}"] \arrow[d, "\gamma_i"] & \overline{0} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, "\tilde{0}"] & \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & \bigoplus_{I_0} G_0(i)/H^{\text{‘}} \arrow[r, "\tilde{\nu}"] & \bigoplus_{I_0} H_0(i)/H^{*} \arrow[r, "\tilde{0_2}"] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Verifiquemos ahora la exactitud de la sucesión inducida; Observemos primero que $\tilde{\sigma}$ es mono. Notemos antes que si $x_i \in F_0(i)$ entonces $\alpha_i(x_i) = 0$ sii $\exists$ $j \leqslant i$ tal que $F_1(\lambda_i^j)(x_i) = 0$. Sea ahora $x = (x_i) + H \in Ker(\tilde{\sigma})$ entonces $G_1(\lambda_i^j)(\sigma_i(x_i)) = 0$ para alguna $j \leqslant i \in I$ entonces se tiene que $\sigma_j(F_1(\lambda_i^j)(x_i)) = G_1(\lambda_i^j)(\sigma_i(x_i)) = 0$ ahora bien debido a que σ_j es mono se tiene que $F_1(\lambda_i^j)(x_i) = 0$ entonces x_i se va a cero en su respectivo límite, de donde se sigue $x = 0$ entonces $\tilde{\sigma}$ es mono.

Veamos ahora que $Im(\tilde{\sigma}) = Ker(\tilde{\nu})$, es claro que si $(x_i) + H \in \bigoplus_{I_0} F_0(i)/H$ entonces $\tilde{\nu}(\tilde{\sigma}((x_i)+H)) = \tilde{\nu}(\sum \sigma_i(x_i)+H^{\text{‘}}) = \sum(\nu_i(\sigma_i)(x_i)+H*) = \sum 0 = 0$ esto es $Im(\tilde{\sigma}) < Ker(\tilde{\nu})$. Sea ahora $(y_i) + H^{\text{‘}} \in Ker(\tilde{\nu})$ entonces $\forall\, i \in I$ existe $j \leqslant i$ tal que $H_1(\lambda_i^j)(\nu_i(y_i)) = 0$ de donde $\nu_j(G_1(\lambda_i^j)(y_i)) = H_1(\lambda_i^j)(\nu_i(y_i)) = 0$ esto es $\nu_j(y_j) = 0$ pero como $Im(\sigma_j) = Ker(\nu_j)$ entonces $\sigma_j(x_j) = y_j$ para algún $x_j \in F_0(j)$ entonces se tiene que $\tilde{\sigma}((x_i) + H) = (y_i) + H^{\text{‘}}$, de donde se tiene que $Im(\tilde{\sigma}) > Ker(\tilde{\nu})$, entonces se tiene que $Im(\tilde{\sigma}) = Ker(\tilde{\nu})$.

Finalmente veamos que $\tilde{\sigma}$ es un epimorfismo, sea entonces $(z_i) + H^* \in \bigoplus_{I_0} H_0(i)/H^*$ ahora $\forall z_i \in H_i$ $\exists$ $y_i \in G_0(i)$ tal que $\nu_i(y_i) = z_i$ entonces se tiene que $\tilde{\nu}((y_i) + H^{\text{‘}}) = \sum \nu_i(y_i) + H^* = (z_i) + H^*$ entonces $\tilde{\nu}$ es epi. De donde se tiene que $R - mod$ es una categoría de Grothendieck. $\square$

8. BIBLIOGRAFÍA

.

Bo Stenström, Rings of Quotients, Springer-Verlag. 1975

Fernando Hernández Hernández, Teoría de Conjuntos. Sociedad Matemática Mexicana, 2003

Frank W. Anderson Kent R. Fuller, Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, 1992

F. Kasch, Modules and Rings. Academic Press, 1982

Jaap van Oosten, Basic Category Theory. BRICS, 1995

José A. Amor Montaño, Gabriela Campero Arena, Favio Ezequiel Miranda Perea, Teoría de Conjuntos. La prensa de Ciencias, 2011

Paul E. Bland, Rings and their modules. De Gruyter, 2011

Tom Head, Modules a primer of structure theorems. Brooks/Cole Publishing Company, 1974