



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS
DE FLUIDOS MODULADOS POR UNA
CADENA DE MARKOV

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

CLAUDIA IVONNE JUAREZ GALLEGOS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MANUEL DOMÍNGUEZ DE LA IGLESIA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Juarez
Gallegos
Claudia Ivonne
55 21 00 07 24
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
310138431

2. Datos del tutor

Dr.
Manuel
Domínguez
de la Iglesia

3. Datos del sinodal 1

Dr. Sergio Iván
López
Ortega

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Yuri
Salazar
Flores

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Gerónimo Francisco

Uribe

Bravo

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Eliane Regina

Rodrigues

7. Datos del trabajo escrito

Análisis espectral de procesos de fluidos modulados por una cadena de Markov

131 p.

2017

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México que se ha convertido en mi segunda casa. Por mi formación, conocimientos, momentos y porque gracias a ella he conocido a las personas mas importantes en mi vida.

Al Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia por todo su interés, dedicación, tiempo, paciencia, por enseñarme que una persona nunca deja de aprender cosas nuevas y por creer en mi. Sin él este trabajo no habría sido posible.

A papá y mamá por todo el apoyo, por hacer de mi una persona fuerte y responsable. Por siempre buscar lo mejor para mi y por ser un gran ejemplo de superación.

A Paola, Macarena, Andrés, Ángel y Rodrigo, por el aliento continuo y el apoyo en todo momento y en todo sentido.

A la innumerable familia y amigos que no he podido mencionar aquí, pero que han contribuido tanto en mi formación personal como profesional en distintas formas.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA100515 titulado Ortogonalidad y aproximación: teoría, aplicaciones y generalizaciones. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

A todos, gracias.

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Polinomios Ortogonales	1
1.1.1. Polinomios de Chebyshev	18
1.2. Procesos estocásticos	26
1.2.1. Cadenas de Markov a tiempo discreto	26
1.2.2. Cadenas de Markov a tiempo continuo	30
2. Procesos de Fluido Modulados por una cadena de Markov ($N < \infty$).	45
2.1. Trabajos previos	46
2.2. Modelo Matemático	52
2.3. Cadenas de nacimiento y muerte.	58
2.4. Espacio de estados finito	60
2.4.1. Ejemplo.	69
3. Procesos de Fluido Modulado por una cadena de Markov ($N = \infty$)	79
3.1. Espacio de estados infinito con $N_+ < \infty$	80
3.1.1. Ejemplo.	82
3.2. Espacio de estados infinito con $N_- < \infty$	91
3.2.1. Ejemplo.	108
Bibliografía	117

Introducción

La presente tesis tiene como propósito principal usar herramientas de la teoría de polinomios ortogonales para analizar espectralmente cierto tipo de proceso estocástico. En concreto, el objetivo particular es dar una expresión para la distribución estacionaria de un proceso modulado en términos de autovalores y autofunciones ortogonales asociados a los generadores del proceso.

Se dice que un proceso estocástico es un proceso cuyo comportamiento es no determinista. Un proceso modulado, es un proceso cuyo comportamiento depende del comportamiento de un proceso estocástico. En la presente tesis se utiliza como proceso modulador una cadena de nacimiento y muerte, que es una cadena de Markov a tiempo continuo en la que las únicas transiciones son entre estados adyacentes.

Las cadenas de nacimiento y muerte son importantes en teoría de colas en el sentido en que pueden ser vistas como un modelo que describe el número de clientes en un sistema de colas donde los nacimientos representan las llegadas y las muertes representan las salidas. Para describir y analizar su comportamiento, es posible asociarle una matriz cuyo tamaño depende del número de estados, y que contiene información sobre las intensidades de nacimiento y de muerte en cada estado. A esta matriz se le denomina *operador o generador infinitesimal* asociado al proceso.

Los procesos modulados por una cadena de Markov cobran importancia en el campo de las telecomunicaciones ya que se usan para modelar la dinámica de señales enviadas a servidores. En este contexto, se cuenta con un servidor que recibe señales a altas velocidades, por lo que su comportamiento se puede modelar con una cadena

de nacimiento y muerte. Dado que el servidor recibe y procesa grandes cantidades de información en tiempos cortos, su comportamiento puede ser tratado como el comportamiento de un fluido. En otras palabras, aunque la cantidad de información se pueda medir en unidades discretas, comparando su tamaño con el tráfico total puede ser modelado como si fuese continuo.

Por lo anterior, el objeto principal de estudio es un proceso de fluido modulado por una cadena de Markov, que consiste en un contenedor con fluido, el cual crece o decrece a cierta tasa constante (positiva o negativa) y estas tasas van cambiando dependiendo del estado en el que se encuentre la cadena de Markov.

Una de las principales herramientas utilizadas, además de la teoría para cadenas de nacimiento y muerte, es la teoría de polinomios ortogonales que es clave en el análisis espectral del proceso. Los polinomios ortogonales tienen propiedades que, en cierto sentido, son parecidas a las propiedades de las cadenas de nacimiento y muerte, por lo que usando resultados conocidos en la teoría de polinomios ortogonales se pueden encontrar resultados para el proceso modulado en cuestión.

Como se mencionó antes, se busca presentar una expresión para la distribución estacionaria, pues en este tipo de proceso es importante saber qué va a ocurrir con la cantidad de fluido cuando el tiempo sea grande. Podría suceder, por ejemplo, que el fluido sea infinito, en cuyo caso, habría problemas si se cuenta con un contenedor finito; si la cantidad de fluido se hace cero habría problemas si el fluido se usa para alimentar algún sistema. En general es preferible que la cantidad de fluido se estabilice, y es importante conocer las probabilidades de que el fluido no rebase cierta cantidad.

A lo largo del Capítulo 2 se presenta el modelo matemático y los supuestos sobre el proceso. Ciertos supuestos que involucran las tasas de crecimiento y las tasas de nacimiento y muerte del proceso modulador son necesarias para que exista la distribución estacionaria. Un supuesto importante en este Capítulo es que el espacio de estados de la cadena de nacimiento y muerte es finito, supuesto que simplifica la expresión de la distribución estacionaria pues se cuenta con un generador infinitesimal

de tamaño finito asociado al proceso.

Dicha hipótesis cambia en el Capítulo 3 y se sustituye por hipótesis más abiertas, en el sentido de que se permite que el espacio de estados sea infinito restringiendo solamente el número de estados asociados a tasas positivas o el número de estados asociados a tasas negativas.

Al hacer el análisis del proceso con espacio de estados infinito, cuando se tienen estados asociados a tasas de crecimiento negativas, es posible encontrar una expresión más o menos simple para la distribución estacionaria. Intuitivamente esto se debe a que al haber un número finito de estados asociados a tasas de crecimiento positivas, la cantidad de fluido en el contenedor no será infinita, pues hay infinitos estados en los que el fluido disminuye y finitos estados en los que el fluido crece. Esto, por supuesto, está sujeto a ciertas condiciones de estabilidad, que de no cumplirse, podrían causar que la tasa de crecimiento sea lo suficientemente grande como para crecer más de lo que disminuye.

El caso más complicado analizado en este trabajo, es el caso en el que se cuenta con una cantidad infinita de estados asociados a tasas de crecimiento positivas. Este caso resulta más complicado ya que hay que tratar con cuidado las condiciones de estabilidad, pues al haber infinitos estados con tasas de crecimiento positivas es muy fácil que la cantidad de fluido en el contenedor aumente rápidamente.

Finalmente, se ha tratado de ejemplificar el comportamiento de los procesos en los tres casos de la manera más simple (pero ilustrativa) utilizando el lenguaje de programación Julia para simular trayectorias de cada proceso. Se han utilizado los resultados de cada sección para encontrar las distribuciones estacionarias y se han comparado esos resultados con los obtenidos por medio de simulación. Es importante notar que, a pesar de su existencia, el cálculo de las distribuciones estacionarias para estos procesos modulados podría resultar bastante complicado. Sin embargo, y gracias al análisis espectral usando polinomios ortogonales, es posible en algunos casos obtener expresiones explícitas de las correspondientes distribuciones estacionarias.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan resultados importantes tanto en el área de procesos estocásticos como en la teoría de polinomios ortogonales con la finalidad de que faciliten, en capítulos posteriores, la presentación de teoremas y procesos más complejos.

1.1. Polinomios Ortogonales

Los polinomios ortogonales juegan un papel muy importante en este trabajo ya que aparecen en el análisis de ecuaciones diferenciales y en diferencias relacionadas con procesos estocásticos, en particular, con cadenas de nacimiento y muerte. En esta sección se enuncian algunas definiciones y teoremas importantes que serán de utilidad para el desarrollo de resultados en capítulos posteriores.

Definición 1.1. Sea ψ una medida positiva sobre \mathbb{R} . Se define el espacio de Lebesgue ponderado $L^2_\psi(\mathbb{R})$ como:

$$L^2_\psi(\mathbb{R}) = \{f : \langle f, f \rangle_\psi := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\psi(x) < \infty\}.$$

Este espacio, junto con $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ es un espacio de Hilbert.

En general una *sucesión de polinomios ortogonales* forma una base ortogonal para un espacio de Hilbert, por lo que se definen con respecto a una *medida o función*

de peso.

Definición 1.2. Sea ψ una medida positiva sobre \mathbb{R} tal que las integrales

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\psi(x), n \geq 0$$

(momentos de orden n) existen y son todas finitas. Un conjunto de polinomios $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ en x tal que $P_n(x)$ es de grado n y

$$\langle P_m, P_n \rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} P_m(x)P_n(x)d\psi(x) = k_n \delta_{mn}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases},$$

$k_n > 0$, $m, n \geq 0$, es un conjunto de polinomios ortogonales para la medida ψ . Se define $\langle P_n, P_n \rangle_{\psi} = \|P_n\|_{\psi}^2$ la norma de P_n .

Cuando el coeficiente principal de cada polinomio es igual a 1, se dice que es una sucesión de polinomios ortogonales *mónica*. Cuando la norma de cada polinomio es 1 se dice que es una sucesión de *polinomios ortonormales*.

Algunas propiedades importantes de los polinomios ortogonales son

- $P_n(x)$ tiene n ceros reales simples y están contenidos en el soporte de la medida ψ con respecto a la cual son ortogonales.
- $P_n(x), n \geq 0$ satisface la fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} xP_0(x) &= B_0P_0(x) + A_0P_1(x) \\ xP_n(x) &= C_nP_{n-1}(x) + B_nP_n(x) + A_nP_{n+1}(x), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

donde $A_n = \frac{\langle xP_n, P_{n+1} \rangle_{\psi}}{\|P_{n+1}\|_{\psi}^2}$, $B_n = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_{\psi}}{\|P_n\|_{\psi}^2}$, $C_n = \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle_{\psi}}{\|P_{n-1}\|_{\psi}^2}$, por lo que siempre se cumple que $B_n \in \mathbb{R}$ y $A_n, C_{n+1} \geq 0$.

Cuando la sucesión es ortonormal, se tiene que $C_n = \langle xP_n, P_{n-1} \rangle_\psi = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle_\psi = \langle xP_{n-1}, P_n \rangle_\psi = A_{n-1}$ y $A_n > 0$, por lo que la relación a tres términos es de la forma

$$xP_n(x) = A_{n-1}P_{n-1}(x) + B_nP_n(x) + A_nP_{n+1}(x), \quad (1.1)$$

donde $n \geq 0$, $A_n > 0$, $B_n \in \mathbb{R}$ y $P_{-1}(x) = 0$.

En forma matricial con $P = (P_0(x), P_1(x), \dots)^T$, donde T denota al vector transpuesto, se escribe como $xP = JP$ donde J es la matriz tridiagonal simétrica

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ A_0 & B_1 & A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & B_2 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

llamada *matriz de Jacobi*.

La matriz de Jacobi resulta ser muy similar al generador infinitesimal de una cadena de nacimiento y muerte que es una matriz tridiagonal con propiedades similares. Esto resulta conveniente ya que es posible estudiar las propiedades del proceso usando resultados conocidos para la matriz de Jacobi.

Tomando la ecuación (1.1) y multiplicando por $P_n(y)$, se tiene que

$$xP_n(x)P_n(y) = A_{n-1}P_{n-1}(x)P_n(y) + B_nP_n(x)P_n(y) + A_nP_{n+1}(x)P_n(y).$$

Tomando la misma ecuación evaluada en y y multiplicando por $P_n(x)$, se tiene que

$$yP_n(x)P_n(y) = A_{n-1}P_{n-1}(y)P_n(x) + B_nP_n(y)P_n(x) + A_nP_{n+1}(y)P_n(x).$$

Restando las dos ecuaciones anteriores

$$(x - y)P_n(x)P_n(y) = A_{n-1}[P_{n-1}(x)P_n(y) - P_{n-1}(y)P_n(x)] \\ + A_n[P_{n+1}(x)P_n(y) - A_nP_{n+1}(y)P_n(x)],$$

sumando todos los polinomios, del lado derecho se conserva sólo el último sumando

$$\sum_{j=0}^n (x - y)P_j(x)P_j(y) = A_n[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)],$$

dividiendo entre $x - y$ se tiene que

$$\sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(y) = \frac{A_n[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)]}{x - y} \quad (1.3)$$

conocida como la *fórmula de Christoffel-Darboux*. Tomando el límite cuando x tiende a y se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow y} \sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{A_n[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)]}{x - y},$$

entonces

$$\sum_{j=0}^n P_j^2(x) = A_n \lim_{x \rightarrow y} \frac{P_n(y)[P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)] - P_{n+1}(y)[P_n(x) - P_n(y)]}{x - y},$$

y finalmente

$$\sum_{j=0}^n P_j^2(x) = A_n[P_n(x)P'_{n+1}(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)] \quad (1.4)$$

conocida como la *fórmula confluyente de Christoffel-Darboux*.

Para una sucesión de polinomios ortogonales mónica $\{\hat{P}_n(x)\}_{n \geq 0}$ la relación de recurrencia está dada por

$$\hat{P}_0(x) = 1 \quad \hat{P}_1(x) = x - \alpha_0 \\ x\hat{P}_n(x) = \beta_n\hat{P}_{n-1}(x) + \alpha_n\hat{P}_n(x) + \hat{P}_{n+1}(x) \quad (1.5)$$

donde $\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\beta_n > 0$ para $n \geq 1$. Se denotará a la norma de los polinomios ortogonales mónicos como $\|\hat{P}_n\|_\psi^2 = \zeta_n$.

Definición 1.3. Se dice que un conjunto de $m \geq 1$ números reales $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_m$ está separado por un conjunto de $m + 1$ números reales distintos $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m+1}$ si

$$\xi_i \leq \eta_i \leq \xi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Teorema 1.4. Sea $\{P_n(x)\}$ una sucesión de polinomios ortonormales y $x_{n,k}$ el k -ésimo cero de $P_n(x)$, $k = 1, \dots, n$. Entonces los ceros de $P_n(x)$ y los de $P_{n+1}(x)$ se separan mutuamente, es decir

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Demostración. Obsérvese primero que como $\{P_n(x)\}$ es una sucesión de polinomios ortonormales, el polinomio $P_n(x)$ tiene coeficiente principal positivo. Entonces para todo $x > x_{n,n}$, $P_n(x) > 0$ y para todo $x < x_{n,1}$ $\text{signo}(P_n(x)) = (-1)^n$, entonces en cada intervalo $(x_{n,k-1}, x_{n,k})$, $P'_n(x)$ tiene un cero, por lo que $P'_n(x_{n,k})$ cambia de signo cada k con $k = 1, \dots, n$. Como $P'_n(x)$ también tiene coeficiente principal positivo, $P'_n(x_{n,n}) > 0$ y entonces $\text{signo}(P'_n(x_{n,k})) = (-1)^{n-k}$.

Recordando que la confluyente de Christoffel-Darboux (1.4) es una suma de cuadrados, debe ser positiva. Como se sabe que $A_n > 0$, entonces $P_n(x)P'_{n+1}(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x) > 0$.

Evaluando en el k -ésimo cero de $P_{n+1}(x)$, $x_{n+1,k}$ se tiene que

$$P_n(x_{n+1,k})P'_{n+1}(x_{n+1,k}) - P_{n+1}(x_{n+1,k})P'_n(x_{n+1,k}) = P_n(x_{n+1,k})P'_{n+1}(x_{n+1,k}) > 0 \quad (1.6)$$

y por el párrafo anterior $\text{signo}(P'_{n+1}(x_{n+1,k})) = (-1)^{n+1-k}$.

De igual manera, evaluando en $x_{n+1,k+1}$ se tiene que

$$P_n(x_{n+1,k+1})P'_{n+1}(x_{n+1,k+1}) > 0 \text{ y } \text{signo}(P'_{n+1}(x_{n+1,k+1})) = (-1)^{n-k+2} \quad (1.7)$$

Por lo que $P_n(x_{n+1,k})$ y $P_n(x_{n+1,k+1})$ tienen signos distintos, entonces P_n tiene un cero en el intervalo $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$. \square

Corolario 1.5. *Para toda $k \geq 1$, la sucesión $\{x_{n,k}\}_{n=k}^{\infty}$ es decreciente y la sucesión $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ es creciente. En particular los límites $\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i}$ y $\eta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-j+1}$, $i, j = 1, 2, \dots$ existen y son reales.*

Proposición 1.6. *Sea ξ_i como en el corolario anterior y se definen*

$$\sigma = \begin{cases} -\infty & \text{si } \xi_i = -\infty \text{ para toda } i \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i & \text{si } \xi_p > -\infty \text{ para alguna } p \end{cases}$$

y

$$\tau = \begin{cases} +\infty & \text{si } \eta_j = +\infty \text{ para toda } j \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \eta_j & \text{si } \eta_q < +\infty \text{ para alguna } q \end{cases}$$

de manera que si $\xi_0 = -\infty$ y $\eta_0 = +\infty$ se tiene que

$$-\infty = \xi_0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \sigma \leq \tau \leq \dots \leq \eta_2 \leq \eta_1 \leq \eta_0 = +\infty.$$

Si $\xi_p = \xi_{p+1}$ para alguna p , entonces $\xi_p = \sigma$. Nótese que esto implica que $\xi_p = \xi_{p+k}$, $k = 1, 2, \dots$

La demostración de la Proposición anterior se puede encontrar en el Capítulo IV de [4].

Proposición 1.7. *Sea $\{\hat{P}_n(x)\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónica que cumplen la relación de recurrencia (1.5) y ψ la medida con respecto a la cual son ortogonales, entonces $\|\hat{P}_n\|_{\psi}^2 = \beta_0 \cdots \beta_n$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \|\hat{P}_n\|_{\psi}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{P}_n(x) \hat{P}_n(x) d\psi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{P}_n(x) [(x - \alpha_{n-1}) \hat{P}_{n-1}(x) - \beta_{n-1} \hat{P}_{n-2}(x)] d\psi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(x \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n-1}(x) - \alpha_{n-1} \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n-1}(x) - \beta_{n-1} \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n-2}(x) \right) d\psi(x). \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} \alpha_{n-1} \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n-1}(x) d\psi(x) = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \beta_{n-1} \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n-2}(x) d\psi(x) = 0$, pues los polinomios son ortogonales, ocurre que

$$\begin{aligned}
\|\hat{P}_n\|_{\psi}^2 &= \int_{\mathbb{R}} x \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n-1}(x) d\psi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\hat{P}_{n+1}(x) + \beta_n \hat{P}_{n-1}(x) + \alpha_n \hat{P}_n(x)] \hat{P}_{n-1}(x) d\psi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \beta_n \hat{P}_{n-1}(x) \hat{P}_{n-1}(x) d\psi(x) \\
&= \beta_n \|\hat{P}_{n-1}\|_{\psi}^2 \\
&= \beta_n \beta_{n-1} \|\hat{P}_{n-2}\|_{\psi}^2 \\
&= \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_{n-k+1} \|\hat{P}_{n-k}\|_{\psi}^2 \\
&= \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_0.
\end{aligned}$$

□

Nótese que para que una sucesión de polinomios ortogonales sea ortonormal, debe tener norma uno. Para que un polinomio $\hat{P}_n(x)$ tenga norma uno, se tiene que dividir entre su norma, de manera que su coeficiente principal será $\frac{1}{\sqrt{\zeta_n}}$.

Por la relación (1.1), el coeficiente principal de los polinomios ortonormales $xP_n(x)$ debe ser igual al de $A_n P_{n+1}(x)$, es decir $\sqrt{\frac{1}{\zeta_n}} = A_n \sqrt{\frac{1}{\zeta_{n+1}}}$ por lo que para sucesiones de polinomios ortonormales se tiene que $A_n = \sqrt{\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n}}$.

Si en la sucesión de polinomios (1.5) se cambian las condiciones iniciales y se despeja el término de mayor grado de la ecuación de recurrencia se tiene que

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 0 \quad p_1(x) = \beta_0 \\
p_{n+1}(x) &= (x - \alpha_n) p_n - \beta_n p_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Para $n = 1$ es claro que $\beta_0^{-1} p_1$ es un polinomio mónico de grado cero. Supóngase que se cumple para $k < n$ que $\beta_0^{-1} p_k$ es un polinomio mónico de grado $k - 1$. Entonces para $k = n$

$$\beta_0^{-1} p_n = \beta_0^{-1} (x - \alpha_{n-1}) p_{n-1} - \beta_0^{-1} \beta_{n-1} p_{n-2}(x)$$

donde el término de mayor grado es el que se obtiene del producto $\beta_0^{-1}xp_{n-1}(x)$. Por hipótesis $\beta_0^{-1}p_{n-1}(x)$ es un polinomio mónico de grado $n-2$, entonces el coeficiente principal de $\beta_0^{-1}p_n$ es x^{n-1} por lo que es un polinomio mónico de grado $n-1$.

Definiendo $P_n^{(1)} = \beta_0^{-1}p_{n+1}$ cumple la recurrencia

$$\begin{aligned} P_{-1}^{(1)}(x) &= 0 & P_0^{(1)}(x) &= 1 \\ P_n^{(1)}(x) &= (x - \alpha_n)P_{n-1}^{(1)}(x) - \beta_n P_{n-2}^{(1)}(x) & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Los polinomios $\{P_n^{(1)}(x)\}_{n \geq 0}$ son llamados *polinomios numeradores mónicos o polinomios mónicos de segunda especie* asociados a $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$.

Como la relación entre los polinomios mónicos y los ortonormales está dada por $\hat{P}_n(x) = \sqrt{\zeta_n}P_n(x)$, tomando $n = N-1$ las ecuaciones (1.3) y (1.4) se pueden escribir para polinomios mónicos como

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\zeta_k} \hat{P}_k(x) \hat{P}_k(y) = \frac{A_{N-1}[\hat{P}_N(x) \hat{P}_{N-1}(y) - \hat{P}_N(y) \hat{P}_{N-1}(x)]}{(x-y) \sqrt{\zeta_N \zeta_{N-1}}},$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\zeta_k} \hat{P}_k^2(x) = \frac{A_{N-1}[\hat{P}_{N-1}(x) \hat{P}'_N(x) - \hat{P}_N(x) \hat{P}'_{N-1}(x)]}{\sqrt{\zeta_{N-1} \zeta_N}}. \quad (1.9)$$

Sea $\{\hat{P}_n(x)\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónica, entonces para N los ceros de \hat{P}_{N-1} separan a los ceros de \hat{P}_N . Sean $x_{N,j}$ con $j = 1, 2, \dots, N$ las raíces en orden decreciente. Como los polinomios son mónicos, $\hat{P}_N(x) > 0$ para $x > x_{N,j}$ se cumple que $(-1)^{j-1} \hat{P}'_N(x_{N,j}) > 0$ y usando (1.9) se tiene que $(-1)^{j-1} \hat{P}'_{N-1}(x_{N,j}) > 0$, entonces la sucesión

$$\rho(x_{N,j}) = \frac{\zeta_{N-1}}{\hat{P}'_N(x_{N,j}) \hat{P}_{N-1}(x_{N,j})}, \quad 1 \leq j \leq N$$

toma valores positivos. Evaluando las fórmulas de Christoffel-Darboux en $x_{N,s}$ y $x_{N,r}$

ceros de \hat{P}_N se obtiene que si $r \neq s$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\zeta_k} \hat{P}_k(x_{N,r}) \hat{P}_k(x_{N,s}) = \frac{A_{N-1} [\hat{P}_N(x_{N,r}) \hat{P}_{N-1}(x_{N,s}) - \hat{P}_N(x_{N,s}) \hat{P}_{N-1}(x_{N,r})]}{(x_{N,r} - x_{N,s}) \sqrt{\zeta_N \zeta_{N-1}}} = 0, \quad (1.10)$$

y si $r = s$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\zeta_k} \hat{P}_k^2(x_{N,r}) &= \frac{A_{N-1} [\hat{P}_{N-1}(x_{N,r}) \hat{P}'_N(x_{N,r}) - \hat{P}_N(x_{N,r}) \hat{P}'_{N-1}(x_{N,r})]}{\sqrt{\zeta_{N-1} \zeta_N}} \\ &= \frac{A_{N-1} [\hat{P}_{N-1}(x_{N,r}) \hat{P}'_N(x_{N,r})]}{\sqrt{\zeta_{N-1} \zeta_N}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\zeta_N}{\zeta_{N-1}}} [\hat{P}_{N-1}(x_{N,r}) \hat{P}'_N(x_{N,r})]}{\sqrt{\zeta_{N-1} \zeta_N}} \\ &= \frac{[\hat{P}_{N-1}(x_{N,r}) \hat{P}'_N(x_{N,r})]}{\zeta_{N-1}} \\ &= \rho^{-1}(x_{N,r}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Por lo que, de las dos ecuaciones anteriores

$$\rho(x_{N,r}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\zeta_k} \hat{P}_k(x_{N,r}) \hat{P}_k(x_{N,s}) = \delta_{r,s}.$$

Se define ahora la matriz U con entradas

$$(U)_{i,j} = \sqrt{\rho(x_{N,j})} \frac{\hat{P}_{i-1}(x_{N,j})}{\sqrt{\zeta_{i-1}}}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} (U^T U)_{i,j} &= \sum_{m=1}^N (U)_{m,i} (U)_{m,j} \\ &= \sum_{m=1}^N \sqrt{\rho(x_{N,i})} \frac{\hat{P}_{m-1}(x_{N,i})}{\sqrt{\zeta_{m-1}}} \sqrt{\rho(x_{N,j})} \frac{\hat{P}_{m-1}(x_{N,j})}{\sqrt{\zeta_{m-1}}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\rho(x_{N,i})\rho(x_{N,j})} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\hat{P}_{m-1}(x_{N,i})\hat{P}_{m-1}(x_{N,j})}{\zeta_{m-1}}.$$

Ahora, si $i = j$ usando (1.11)

$$(U^T U)_{i,i} = \rho(x_{N,i})(\rho(x_{N,i}))^{-1} = 1,$$

y si $i \neq j$ usando (1.10)

$$(U^T U)_{i,j} = 0.$$

Por lo que $U^T U = I$, y transponiendo se tiene que $U U^T = I$, es decir

$$\begin{aligned} (U U^T)_{i,j} &= \sum_{m=1}^N (U)_{i,m} (U)_{j,m} \\ &= \sum_{m=1}^N \sqrt{\rho(x_{N,m})} \frac{\hat{P}_{i-1}(x_{N,m})}{\sqrt{\zeta_{i-1}}} \sqrt{\rho(x_{N,m})} \frac{\hat{P}_{j-1}(x_{N,m})}{\sqrt{\zeta_{j-1}}} \\ &= \sum_{m=1}^N \rho(x_{N,m}) \frac{\hat{P}_{i-1}(x_{N,m}) \hat{P}_{j-1}(x_{N,m})}{\sqrt{\zeta_{i-1} \zeta_{j-1}}} \\ &= \delta_{j-1, i-1}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sum_{m=1}^N \rho(x_{N,m}) \hat{P}_{i-1}(x_{N,m}) \hat{P}_{j-1}(x_{N,m}) = \zeta_{i-1} \delta_{j-1, i-1} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

que es una relación de ortogonalidad discreta entre los polinomios $\hat{P}_N(x)$ restringiendo su soporte a los correspondientes ceros y $\rho(x_{N,j})$ es la correspondiente magnitud de los saltos en cada cero. Además si en la última relación se toma $i = j = 1$ se tiene que $\sum_{m=1}^N \rho(x_{N,m}) = 1$.

Teorema 1.8. Principio de selección de Helly. *Sea $\{\psi_n(x)\}$ una sucesión de funciones uniformemente acotadas. Entonces existe una subsucesión de funciones $\{\psi_{n_k}(x)\}$ que converge a una función acotada y no decreciente ψ . Además, si para cada n los momentos $\int_{\mathbb{R}} x^m d\psi_n(x)$ existen para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces los momentos de ψ existen y $\int_{\mathbb{R}} x^m d\psi_{n_k}(x)$ converge a $\int_{\mathbb{R}} x^m d\psi(x)$.*

Véase demostración en Sección 3 de la Introducción de [21].

Para enunciar el *Teorema de Favard* (Favard, 1935) o *Teorema espectral*, es necesario definir una sucesión de funciones escalera continuas por la derecha $\{\psi_N\}$ como sigue

$$\psi_N(-\infty) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_{N,j}^+} \psi_N(x) - \lim_{x \rightarrow x_{N,j}^-} \psi_N(x) = \rho(x_{N,j}). \quad (1.13)$$

Teorema 1.9. Teorema de Favard. *Dada una sucesión de polinomios $\{\hat{P}_n\}_{n \geq 0}$ generada por la relación de recurrencia a tres términos (1.5) con $\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $\beta_n > 0$ para toda $n \geq 1$, se tiene que existe una función de distribución ψ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{P}_n(x) \hat{P}_m(x) d\psi(x) = \zeta_n \delta_{nm}. \quad (1.14)$$

Demostración. Obsérvese que las funciones ψ_N son funciones escalonadas con saltos en $x_{N,j}$ de valor $\rho(x_{N,j})$, y además

$$1 = \zeta_0 = \|\hat{P}_0\|_{\psi}^2 = \int_{\mathbb{R}} d\psi_N(x) = \psi_N(\infty) - \psi_N(-\infty).$$

Por lo que las funciones ψ_N son uniformemente acotadas y $\sum_{r=1}^N \rho(x_{N,r}) = 1$. Por el principio de selección de Helly, existe una subsucesión $\{\psi_{N_k}\}$ de $\{\psi_N\}$ que converge a la distribución ψ . Como x^n se puede expresar como combinación lineal de $\hat{P}_j(x)$, $j = 0, \dots, n$, las integrales $\int_{\mathbb{R}} x^m d\psi_N$ existen, y de nuevo por el principio de selección de Helly, los momentos de ψ existen y $\int_{\mathbb{R}} x^m d\psi_{N_k}(x)$ converge a $\int_{\mathbb{R}} x^m d\psi(x)$. Finalmente, como los ceros $x_{N,m}$ definen una partición que se va refinando al aumentar N y $\rho(x_{N,m})$ es la longitud de los saltos, la expresión (1.12) es una suma de Riemann. Entonces al tomar el límite cuando N tiende a infinito se obtiene la integral requerida. \square

Teorema 1.10. *Si las sucesiones α_n y β_n están acotadas, entonces la medida de ortogonalidad ψ del Teorema 1.9 es única.*

El teorema espectral es mucho más general en la teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert dotados de un producto interno donde identifica una clase de operadores lineales que pueden ser modelados mediante operadores de multiplicación,

en particular los operadores autoadjuntos. En el contexto de polinomios ortogonales, dicho operador se identifica con la matriz de Jacobi tridiagonal simétrica J definida en (1.2), que es autoadjunto (simétrico) en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, donde $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$, es decir, todas las sucesiones de números naturales con norma 2 finita.

Para citar algunos resultados importantes y más generales sobre polinomios ortogonales que se encuentran en [6] son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 1.11. Sea $\{\hat{P}_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónica. Si en la relación (1.5) el coeficiente $\beta_n \neq 0$ para toda $n \geq 1$, se llama a ésta una sucesión de polinomios ortogonales generalizada (SPOG).

Definición 1.12. Sea $\{\hat{P}_n(x)\}$ una SPOG que satisface (1.5), se dice que $\{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$ si $\alpha_n \neq 0$ para toda $n \geq 1$ y la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_n = \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_n \alpha_{n+1}}$ constituye una sucesión de cadenas (en inglés, chain sequence), es decir, existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $g_0 = 0$, $0 < g_n < 1$ y $a_n = (1 - g_{n-1})g_n$ para $n \geq 1$. Los elementos de \mathcal{C} se llaman polinomios de la sucesión de cadenas (en inglés, chain-sequence polynomials).

Definición 1.13. Sea $\{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$, se define

$$\hat{P}_n^*(x) = x^{-1} \left(\hat{P}_{n+1}(x) - \frac{\hat{P}_{n+1}(0)\hat{P}_n(x)}{\hat{P}_n(0)} \right). \quad (1.15)$$

La sucesión $\{\hat{P}_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es llamada polinomios núcleo (en inglés, kernel polynomials) asociada a $\{\hat{P}_n(x)\}$.

En [6] se presentan y demuestran los siguientes resultados sobre SPOG relacionados con la medida con respecto la cual los polinomios son ortogonales y los ceros de dichos polinomios. Estos son de particular importancia pues ayudarán en capítulos posteriores al análisis de una sucesión de polinomios ortogonales.

Teorema 1.14. Sea $\{\hat{P}_n(x)\}$ una SPOG que satisface (1.5), entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$1) \{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$$

2) Existe una única sucesión de números reales $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para toda $n \geq 1$, $\gamma_1 = 0$, $\alpha_{n-1} = \gamma_{2n-1} + \gamma_{2n}$, $\beta_n = \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}$ y $\gamma_{2n-1}\gamma_{2n} > 0$.

3) Para toda $n \geq 1$ se tiene que $\gamma_{n+1}\alpha_n\alpha_{n+1} > 0$ y $(-1)^n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\hat{P}_n(0) > 0$.

Usando el Teorema 1.14, se puede reescribir la ecuación (1.5) como

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(x) &= 1 & \hat{P}_1(x) &= x - \gamma_2 \\ \hat{P}_n(x) &= (x - \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n})\hat{P}_{n-1}(x) - \gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2}(x), & n > 1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Proposición 1.15. $\hat{P}_n(0) = (-1)^n\gamma_2\gamma_4 \dots \gamma_{2n}$ para $n \geq 1$.

Demostración. Por inducción.

Para $n = 1$ se tiene que $\hat{P}_1(0) = -\gamma_2$.

Supóngase que se cumple para $k < n$.

Por demostrar que se cumple para n . Usando la fórmula de recurrencia de $\hat{P}_n(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(0) &= (-\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n})\hat{P}_{n-1}(0) - \gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2}(0) \\ &= (-\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n})((-1)^{n-1}\gamma_2 \dots \gamma_{2(n-1)}) - \gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}((-1)^{n-2}\gamma_2 \dots \gamma_{2(n-2)}) \\ &= (-1)^n\gamma_2 \dots \gamma_{2n-4}\gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1} + (-1)^n\gamma_2 \dots \gamma_{2n-2}\gamma_{2n} + (-1)^{n-1}\gamma_2 \dots \gamma_{2n-4}\gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1} \\ &= (-1)^n\gamma_2 \dots \gamma_{2n-2}\gamma_{2n}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.16. *Los polinomios núcleo asociados satisfacen la recurrencia*

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0^*(x) &= 1 \\
\hat{P}_1^*(x) &= x - \gamma_2 - \gamma_3 \\
\hat{P}_n^*(x) &= (x - \gamma_{2n} - \gamma_{2n+1})\hat{P}_{n-1}^*(x) - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\hat{P}_{n-2}^*(x), \quad n > 1
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Demostración. Usando la definición del n -ésimo polinomio núcleo, la Proposición 1.15 y (1.16) con $n > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{P}_n^*(x) &= x^{-1} \left(\hat{P}_{n+1}(x) - \frac{\hat{P}_{n+1}(0)\hat{P}_n(x)}{\hat{P}_n(0)} \right) \\
&= x^{-1} \left(\hat{P}_{n+1}(x) + \gamma_{2(n+1)}\hat{P}_n(x) \right) \\
&= x^{-1} \left[(x - \gamma_{2(n+1)-1} - \gamma_{2(n+1)})\hat{P}_n(x) - \gamma_{2(n+1)-2}\gamma_{2(n+1)-1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n+2}\hat{P}_n(x) \right] \\
&= x^{-1} \left[(x - \gamma_{2n+1})\hat{P}_n(x) - \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) \right] \\
&= x^{-1} \left\{ (x - \gamma_{2n+1}) \left[(x - \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n})\hat{P}_{n-1}(x) - \gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2}(x) \right] - \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) \right\} \\
&= x^{-1} \left\{ x^2\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2} - x\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n+1}\gamma_{2n-1}\gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x) \right\} \\
&= x^{-1} \left\{ x^2\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2} - x\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n+1}\gamma_{2n-1}\gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}(\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x)) - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}(\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x)) \right\} \\
&= x^{-1} \left\{ x^2\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2} \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x) \right. \\
&\quad \left. - x\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n+1}\gamma_{2n-1}\gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}(\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x)) \right\} \\
&= x^{-1} \left\{ x^2\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) - x\gamma_{2n-2}\gamma_{2n-1}\hat{P}_{n-2} \right. \\
&\quad \left. - x\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n}\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x) \right. \\
&\quad \left. - x\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n+1}\gamma_{2n-1}\gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x) \right. \\
&\quad \left. + x\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) - \gamma_{2n}\gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x) - \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}\hat{P}_{n-1}(x) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}(\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x)) \right\} \\
&= x^{-1} \left\{ (x - \gamma_{2n} - \gamma_{2n+1})(\hat{P}_n(x) + \gamma_{2n}\hat{P}_{n-1}(x)) - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}(\hat{P}_{n-1}(x) + \gamma_{2n-2}\hat{P}_{n-2}(x)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (x - \gamma_{2n} - \gamma_{2n+1})x^{-1} \left(\hat{P}_n(x) - \frac{\hat{P}_n(0)\hat{P}_{n-1}(x)}{\hat{P}_{n-1}(0)} \right) \\
& \quad - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}x^{-1} \left(\hat{P}_{n-1}(x) - \frac{\hat{P}_{n-1}(0)\hat{P}_{n-2}(x)}{\hat{P}_{n-2}(0)} \right) \\
& = (x - \gamma_{2n} - \gamma_{2n+1})\hat{P}_{n-1}^*(x) - \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\hat{P}_{n-2}^*.
\end{aligned}$$

Obsérvese que en la séptima y novena igualdad de la demostración, se agregó un cero para obtener el resultado requerido. \square

Dado que $\gamma_{2n-1}\gamma_{2n} > 0$, para toda $n > 0$, se sigue que $\{\hat{P}_n^*(x)\}$ constituye un sucesión de polinomios ortogonales, por lo que existe una medida positiva de ortogonalización ψ^* para $\{\hat{P}_n^*(x)\}$.

Existe una relación importante entre la medida de ortogonalización de $\{P_n(x)\}$ y la medida de ortogonalización de su correspondiente sucesión de polinomios núcleo $\{P_n^*(x)\}$ que se muestra en los siguientes teoremas.

Teorema 1.17. Sean μ_n los momentos de la sucesión $\{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$ y μ_n^* los momentos de la sucesión de polinomios núcleo $\{\hat{P}_n^*(x)\}$, entonces se cumple que $\mu_{n-1}^* = \mu_n \forall n > 0$.

La demostración de Teorema 1.17 se encuentra en la Sección 1.7 de [4].

Teorema 1.18. Sea ψ^* una medida positiva de ortogonalización con momento finito de orden -1 para los polinomios núcleo $\{\hat{P}_n^*(x)\}$ asociados a $\{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$ (en el sentido de que $\psi^*({0}) = 0$ y las integrales $\int_{(-\infty,0)} x^{-1}d\psi^*(x)$ y $\int_{(0,\infty)} x^{-1}d\psi^*(x)$ convergen), entonces $\{\hat{P}_n(x)\}$ es una SPOG con respecto a una medida signada ψ definida por

$$\begin{aligned}
d\psi(x) & = x^{-1}d\psi^*(x), \quad x \neq 0 \\
\psi({0}) & = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1}d\psi^*(x).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Demostración. Sean $\mu_n^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi^*(x)$ los momentos de la sucesión de polinomios núcleo $\{\hat{P}_n^*(x)\}$ asociada a $\{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$ con momentos μ_n , por el Teorema 1.17,

$\mu_{n-1}^* = \mu_n$, para toda $n > 0$.

Se define $\mu_n^\psi = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x)$. Entonces usando (1.18)

$$\mu_n^\psi = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n x^{-1} d\psi^*(x) = \mu_{n-1}^* = \mu_n \quad \forall n > 0.$$

Cuando $n = 0$ se tiene que

$$\mu_0^\psi = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 d\psi(x) = 1 = \mu_0.$$

Entonces $\mu_n^\psi = \mu_n$ para toda n .

Además en $x \neq 0$ y por la condición sobre el momento de orden -1 se tiene que

$$1 = \int_{\mathbb{R}} d\psi(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^{-1} d\psi^*(x) + \psi(\{0\}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} d\psi^*(x) + \psi(\{0\})$$

por lo que se tiene que

$$\psi(\{0\}) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} d\psi^*(x).$$

□

Teorema 1.19. Sean $\{\hat{P}_n(x)\} \in \mathcal{C}$ y $\{\hat{P}_n^*(x)\}$ los polinomios núcleo asociados, y sean $x_{n,k}$ y $x_{n,k}^*$ con $k = 1, 2, \dots, n$ los ceros reales de \hat{P}_n y \hat{P}_n^* respectivamente y asumiendo que están en orden creciente. Entonces el número de ceros positivos o negativos de $\hat{P}_n(x)$ es igual al número de elementos positivos o negativos respectivamente del conjunto $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ y se tiene que para $k = 1, 2, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} x_{n+1,k} < x_{n,k} < x_{n+1,k+1} & \quad \text{si} \quad x_{n+1,k} > 0 \quad \text{y} \\ x_{n+1,k-1} < x_{n,k} < x_{n+1,k} & \quad \text{si} \quad x_{n+1,k} < 0 \end{aligned}$$

Tomando $[a, b]^+ = \max\{a, b\}$ y $[a, b]^- = \min\{a, b\}$ se puede generalizar el resultado anterior como sigue.

Teorema 1.20. Para todo $n = 1, 2, \dots$ y $k = 1, 2, \dots, n - 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} [x_{n,k}, x_{n+1,k}]^+ < x_{n,k}^* < [x_{n,k+1}, x_{n+1,k+1}]^- & \text{ si } \alpha_n > 0 \quad \text{y} \\ [x_{n,k-1}, x_{n+1,k}]^+ < x_{n,k}^* < [x_{n,k}, x_{n+1,k+1}]^- & \text{ si } \alpha_n < 0. \end{aligned}$$

Demostración. Por la demostración de la Proposición 1.15 se tiene que

$$\gamma_{2n} = -\frac{\hat{P}_n(0)}{\hat{P}_{n-1}(0)}.$$

Sustituyendo este resultado en la definición de polinomios núcleo (1.15) se tiene que

$$x\hat{P}_n^*(x) = \hat{P}_{n+1}(x) + \gamma_{2n+2}\hat{P}_n(x). \quad (1.19)$$

Evaluando $x_{n,k}$ en la ecuación (1.19)

$$\hat{P}_{n+1}(x_{n,k}) = x_{n,k}\hat{P}_n^*(x_{n,k}), \quad k = 1, \dots, n.$$

y evaluando $x_{n,k+1}$

$$\hat{P}_{n+1}(x_{n,k+1}) = x_{n,k+1}\hat{P}_n^*(x_{n,k+1}).$$

Como los ceros de \hat{P}_{n+1} separan a los ceros de \hat{P}_n , se tiene que

$$\text{signo}(\hat{P}_{n+1}(x_{n,k})) \neq \text{signo}(\hat{P}_{n+1}(x_{n,k+1})),$$

por lo que

$$\text{signo}(x_{n,k}\hat{P}_n^*(x_{n,k})) \neq \text{signo}(x_{n,k+1}\hat{P}_n^*(x_{n,k+1})).$$

Por el Teorema 1.14 se sabe que $\alpha_{n-1} = \gamma_{2n-1} + \gamma_{2n}$ y $\gamma_{2n-1}\gamma_{2n} > 0$. Entonces si $\alpha_{n-1} > 0$ se tiene que $x_{n+1,k} > 0$ y por el Teorema 1.19 $x_{nk} > 0$, por lo que se debe cumplir que $x_{n,k+1} > 0$, entonces

$$\text{signo}(\hat{P}_n^*(x_{n,k})) \neq \text{signo}(\hat{P}_n^*(x_{n,k+1})).$$

Entonces $\hat{P}_n^*(x)$ debe tener una raíz ente $x_{n,k}$ y $x_{n,k+1}$, es decir

$$x_{n,k} < x_{n,k}^* < x_{n,k+1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.20)$$

De la misma forma si $\alpha_{n-1} < 0$ se tiene que $x_{n+1,k} < 0$. Por el Teorema 1.19 ocurre que $x_{n,k} < 0$, entonces $x_{n,k-1} < 0$ por lo que

$$\text{signo}(\hat{P}_n^*(x_{n,k-1})) \neq \text{signo}(\hat{P}_n^*(x_{n,k})).$$

Entonces $\hat{P}_n^*(x)$ debe tener una raíz ente $x_{n,k-1}$ y $x_{n,k}$, es decir

$$x_{n,k-1} < x_{n,k}^* < x_{n,k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

Ahora, evaluando $x_{n+1,k}$ en (1.19) se obtiene

$$x_{n+1,k} \hat{P}_n^*(x_{n+1,k}) = \gamma_{2n+2} \hat{P}_n(x_{n+1,k}), \quad (1.22)$$

y evaluando $x_{n+1,k+1}$

$$x_{n+1,k+1} \hat{P}_n^*(x_{n+1,k+1}) = \gamma_{2n+2} \hat{P}_n(x_{n+1,k+1}). \quad (1.23)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que se usó para llegar a la ecuación (1.21) pero partiendo de las ecuaciones (1.22) y (1.23), se obtiene que se cumple la siguiente desigualdad

$$x_{n+1,k} < x_{n,k}^* < x_{n+1,k+1}, \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (1.24)$$

Finalmente como (1.20), (1.21) y (1.24) se deben cumplir simultáneamente, tomando $[a, b]^+ = \max\{a, b\}$ y $[a, b]^- = \min\{a, b\}$ se tiene que si $\alpha_n > 0$

$$[x_{n,k}, x_{n+1,k}]^+ < x_{n,k}^* < [x_{n,k+1}, x_{n+1,k+1}]^-$$

y si $\alpha_n < 0$

$$[x_{n,k-1}, x_{n+1,k}]^+ < x_{n,k}^* < [x_{n,k}, x_{n+1,k+1}]^-.$$

□

1.1.1. Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev son un ejemplo clásico de familia de polinomios ortogonales que será muy útil para ejemplificar algunos casos particulares de procesos

de fluido modulados por una cadena de Markov en el Capítulo 3.

Usualmente se denota a los polinomios de Chebyshev de primer tipo como $T_n(x)$ y a los de segundo tipo como $U_n(x)$.

Definición 1.21. *El polinomio de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$ es un polinomio en x definido por la relación*

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad x = \cos(\theta).$$

Si el rango de la variable x es el intervalo $[-1, 1]$, el rango de θ es $[0, \pi]$. La relación fundamental que cumplen los polinomios de Chebyshev de primer tipo es

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots$$

Teorema 1.22. *Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son ortogonales con respecto a la medida $(1 - x^2)^{-1/2}$.*

Demostración. Sean $T_n(x)$ y $T_m(x)$ polinomios de Chebyshev de primer tipo, entonces haciendo el cambio de variable $x = \cos(\theta)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \text{sen}(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(\theta(n+m)) + \cos(\theta(n-m))}{2} d\theta. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene usando la identidad trigonométrica del producto de cosenos: $\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$.

Si $m = n = 0$ se tiene que

$$\int_{-1}^1 T_0(x)T_0(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{1+1}{2} d\theta = \pi.$$

Si $m = n \neq 0$

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta}{2} d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta(n+m))}{2} d\theta + \int_0^\pi \frac{\cos(\theta(n-m))}{2} d\theta = 0.$$

Por lo que la sucesión de polinomios $\{T_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a la medida $(1-x^2)^{-1/2}$.

□

Definición 1.23. El polinomio de Chebyshev de segundo tipo $U_n(x)$ es un polinomio en x de grado n definido por

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad x = \cos(\theta)$$

donde x y θ tienen el mismo rango que para los polinomios de primer tipo.

Los polinomios de Chebyshev de segundo tipo cumplen la relación de recurrencia

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots$$

Teorema 1.24. Los polinomios de Chebyshev de segundo tipo son ortogonales con respecto a la medida $(1-x^2)^{1/2}$.

Demostración. Sean $U_n(x)$ y $U_m(x)$ polinomios de Chebyshev de segundo tipo, ha-

ciendo el cambio de variable $x = \cos(\theta)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^\pi \frac{\text{sen}(\theta(n+1))\text{sen}(\theta(m+1))}{\text{sen}^2(\theta)}\sqrt{1-\cos^2(\theta)}\text{sen}\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \text{sen}(\theta(n+1))\text{sen}(\theta(m+1))d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(\theta(n-m))-\cos(\theta(n+m+2))}{2}d\theta. \end{aligned}$$

Si $m = n$, se tiene que

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}d\theta - \int_0^\pi \frac{\cos(2(n+1)\theta)}{2}d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si $m \neq n$ se tiene que

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta(n-m))}{2}d\theta - \int_0^\pi \frac{\cos(\theta(n+m+2))}{2}d\theta = 0.$$

Por lo que la sucesión $\{U_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a la medida $(1-x^2)^{1/2}$. \square

Perturbación de los polinomios de Chebyshev

En esta sección de estudiará una perturbación de los polinomios de Chebyshev y su medida de ortogonalización desarrollada por Chihara en [5]. El análisis resultará útil para el desarrollo de ejemplos en capítulos posteriores.

En [5], se define la sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x + b_1, \\ P_n(x) &= (x + b_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

y su correspondiente sucesión de polinomios *co-recursive* asociada $\{P_n^*(x)\}$ de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_0^*(x) &= 1, \\ P_1^*(x) &= P_1(x) - c, \\ P_n^*(x) &= (x + b_n)P_{n-1}^*(x) - \lambda_n P_{n-2}^*(x) \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

con c una constante real.

Su correspondiente sucesión de polinomios numeradores $\{Q_n^{(1)}(x)\}$ está dada por

$$\begin{aligned} Q_{-1}^{(1)}(x) &= 0, \\ Q_0^{(1)}(x) &= 1, \\ Q_n^{(1)}(x) &= (x + b_{n+1})Q_{n-1}^{(1)}(x) - \lambda_{n+1}Q_{n-2}^{(1)}(x) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

definida en (1.8).

Se encuentra que se cumple que

$$P_n^*(x) = P_n(x) - cQ_{n-1}^{(1)}(x) \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.25)$$

donde c es la constante que aparece en la definición de polinomios *co – recursivos*.

Además, si se definen $\psi(x)$, $\psi^*(x)$ y $\psi^{(1)}(x)$ las soluciones al problema de momentos (las respectivas medidas de ortogonalización de $P_n(x)$, $P_n^*(x)$ y $Q_n^{(1)}(x)$) asociadas a $F(z)$, $F^*(z)$ y $F^{(1)}(z)$ las respectivas transformadas de Stieltjes de la forma

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (z - u)^{-1} d\psi(u) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}),$$

se cumple que

$$F(z) = [z + b_1 - \lambda_2 F^{(1)}(z)]^{-1} \quad (1.26)$$

$$F^*(z) = [z + b_1 - c - \lambda_2 F^{(1)}(z)]^{-1}. \quad (1.27)$$

Despejando $F^{(1)}$ de (1.26) y sustituyéndola en (1.27) se tiene que

$$F^*(z) = F(z)/[1 - cF(z)]. \quad (1.28)$$

Un resultado importante y no trivial que se muestra en [5] es que si además, la extensión analítica de $F^*(z)$ es regular en $[x_0, x]$, entonces

$$\psi^*(x) - \psi^*(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_x^{x_0} \text{Im} \frac{F(u)}{1 - cF(u)} du, \quad (1.29)$$

y si $\psi(x)$ es constante en un intervalo (α, β) y $F(\xi) = \frac{1}{c}$, $\alpha < \xi < \beta$, entonces en general $\psi^*(x)$ tiene un salto en ξ que puede ser determinado (se puede demostrar usando el teorema del residuo) por

$$\psi^*(x) - \psi^*(x_0) = \text{Res}_{z=\xi} F^*(z). \quad (1.30)$$

Al igual que en el Teorema 1.4, en [5] se definen $x_{n,k}$ con $k = 1, \dots, n$ los ceros del polinomio $P_n(x)$ en orden ascendente y se muestra que si $[a, b]$ es el intervalo de ortogonalidad de $\{P_n(x)\}$, es decir, que si $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1}$ y $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n}$, entonces los ceros de $P_n^*(x)$ están todos en el interior del mismo intervalo si y sólo si

$$A \leq c \leq B, \quad (1.31)$$

donde

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(a)}{Q_{n-1}^{(1)}(a)} \text{ y } B := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(b)}{Q_{n-1}^{(1)}(b)}. \quad (1.32)$$

Es importante mencionar los resultados anteriores ya que los polinomios de Chebyshev de segundo tipo se pueden expresar en términos de $P_n(x)$ de la siguiente manera

$$P_n(x) = 2^{-n} U_n(x), \quad b_1 = b_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{1}{4},$$

y se cumple además que $P_n(x) = Q_n^{(1)}(x)$. Como $F(x) = F_1(x)$, usando (1.26) se tiene que

$$F(z) = [z - \frac{1}{4}F(z)]^{-1},$$

desarrollando

$$\frac{1}{4}F(z)^2 - zF(z) + 1 = 0$$

y despejando $F(z)$ se tiene que

$$F(z) = 2[z - \sqrt{z^2 - 1}].$$

Finalmente, multiplicando por $\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}$ el lado derecho de la igualdad anterior se obtiene que

$$F(z) = \frac{2}{z + \sqrt{z^2 - 1}}.$$

Además por (1.25), como $P_n(x) = Q_n^{(1)}(x)$

$$P_n^*(x) = P_n(x) - cP_{n-1}(x),$$

y como $P_n(x) = 2^{-n}U_n(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} P_n^*(x) &= 2^{-n}U_n(x) - 2^{-(n-1)}cU_{n-1}(x) \\ &= 2^{-n}[U_n(x) - 2cU_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Por (1.29), sustituyendo el valor encontrado para $F(z)$ se tiene que

$$\psi^*(x) - \psi^*(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_x^{x_0} \operatorname{Im} \left(\frac{2}{u + \sqrt{u^2 - 1} - 2c} \right) du.$$

Desarrollando la función dentro de la integral, y como $u \in (-1, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{2}{u + \sqrt{u^2 - 1} - 2c} \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{2}{u + i\sqrt{1 - u^2} - 2c} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{\frac{u-2c}{2} - i\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}}{\left(\frac{u-2c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}\right)^2} \right) \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}}{\left(\frac{u-2c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}\right)^2} = \frac{-2\sqrt{1-u^2}}{4c^2 + 1 - 4cu}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Por lo que finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}\psi^*(x) - \psi^*(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_x^{x_0} \frac{-2\sqrt{1-u^2}}{1+4c^2-4cu} du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+4c^2-4cu} du \quad -1 < x_0 < x < 1.\end{aligned}\tag{1.34}$$

En este caso se tiene que el intervalo de ortogonalización de $\{P_n(x)\}$ es $[-1, 1]$, por (1.32) se tiene que como $P_n(x) = Q_n^{(1)}(x)$ y $P_n(x) = 2^{-n}U_n(x)$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(-1)}{P_{n-1}(-1)} = \frac{2^{-n}U_n(-1)}{2^{-(n-1)}U_{n-1}(-1)}$$

$$\text{y } B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(1)}{P_{n-1}(1)} = \frac{2^{-n}U_n(1)}{2^{-(n-1)}U_{n-1}(1)}.$$

Sustituyendo ahora la definición de $U_n(x)$ con $x = \cos(\theta)$, se tiene que cuando $x = -1$ entonces $\theta = \pi$ y cuando $x = 1$ entonces $\theta = 0$, por lo que

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n} \operatorname{sen}((n+1)\pi)}{2^{-(n-1)} \operatorname{sen}(n\pi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos((n+1)\pi)}{2 \cos(n\pi)} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{y } B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-n} \operatorname{sen}(x)}{2^{-(n-1)} \operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2},$$

por lo que $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$. Según [5], se cumple que ψ^* es constante en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ excepto cuando $|c| > 1/2$, en cuyo caso tiene un salto en $\frac{4c^2+1}{4c} = c + \frac{1}{4c}$ cuya magnitud se puede determinar a partir de (1.30) y resulta ser $1 - \frac{1}{4c^2}$.

Lema 1.25. Sea $\{W_n(x)\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios tales que

$$\begin{aligned}W_0(x) &= 1 \\ W_1(x) &= 2x - b \\ W_n(x) &= 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{1.35}$$

entonces la función de peso con respecto a la cual la sucesión $\{W_n(x)\}_{n \geq 0}$ es ortogonal está dada por

$$\psi_W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^x \frac{(1-t^2)^{1/2}}{1+b^2-2bt} dt, \quad -1 \leq x \leq 1,\tag{1.36}$$

mientras $\psi_W(x)$ es constante en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$ excepto cuando $|b| > 1$ en cuyo caso la medida ψ_W tiene un único salto en el punto $\frac{b}{2} + \frac{1}{2b}$ de tamaño $1 - \frac{1}{b^2}$.

Demostración. Nótese que la sucesión $\{W_n(x)\}$ es una sucesión de polinomios que satisfacen la recurrencia de Chebyshev, es decir, se puede ver como los polinomios de Chebyshev perturbados, de hecho están relacionados con los polinomios $P_n^*(x)$. Cuando $c = \frac{b}{2}$ se cumple que $W_n(x) = 2^n P_n^*(x)$ por lo que usando la ecuación (1.34) y fijando $x_0 = -1$ se tiene que la medida de ortogonalización de la sucesión $\{W_n(x)\}$ es

$$\psi_W(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^x \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+4c^2-4ct} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^x \frac{(1-t^2)^{1/2}}{1+b^2-2bt} dt, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.37)$$

y que $\psi_W(x)$ es constante en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$ excepto cuando $|c| > \frac{1}{2}$, es decir, $|b| > 1$. En ese último caso la medida ψ_W tiene un único salto en el punto $c + \frac{1}{4c} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2b}$ de tamaño $1 - \frac{1}{4c^2} = 1 - \frac{1}{b^2}$.

□

1.2. Procesos estocásticos

Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $X = \{X_t : t \in T\}$. Usualmente se interpreta a t como el tiempo y se llama a X_t el estado del proceso a tiempo t , T es el espacio parametral y E el conjunto en el que toman valores las variables aleatorias llamado espacio de estados.

Si el espacio parametral es a lo más numerable, se dice que X es un proceso estocástico a tiempo discreto y usualmente se usa la letra n para indexar a las variables aleatorias. Si el espacio parametral es continuo, se dice que X es un proceso estocástico a tiempo continuo y se usa t para indexar a las variables aleatorias.

1.2.1. Cadenas de Markov a tiempo discreto

Sea $X = \{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ un proceso estocástico a tiempo discreto. Si $X_n = i$ se dice que el proceso está en el estado i a tiempo n . Suponiendo que existe la

probabilidad de que el proceso esté en el estado j a tiempo $n + 1$ y se cumple que

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (1.38)$$

para todos los estados $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ y para todo $n \geq 0$, entonces se dice que el proceso es una *cadena de Markov* si el conjunto de posibles estados es numerable, en caso contrario se dice que es un *proceso de Markov*. A la ecuación (1.38) se le conoce como *propiedad de Markov*. La interpretación de la propiedad de Markov es que la distribución condicional de cualquier estado futuro X_{n+1} , dado que se conocen estados pasados X_0, X_1, \dots, X_{n-1} y el estado presente X_n , es independiente de los estados pasados y depende únicamente del estado presente. Si además esta distribución no depende de n , se dice que es una cadena homogénea en el tiempo. Supondremos en adelante que tenemos una cadena homogénea y definimos

$$P_{i,j} := \mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}.$$

Cuando el espacio de estados es $E = \mathbb{N}$, se tiene que

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots$$

Sea P la matriz

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si $\sum_{j \in E} P_{i,j} = 1$ para cada i en E , entonces P es una matriz estocástica llamada matriz de probabilidades de transición a un paso.

De la misma forma se define $P_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de ir del estado i al estado j en n pasos, es decir

$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\{X_{n+m} = j | X_m = i\}, \quad n \geq 0, \quad i, j \geq 0$$

y se cumplen las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov*

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)}, \quad n > m \geq 0, \quad i, j \geq 0.$$

Si el espacio de estados es finito, en forma matricial las ecuaciones anteriores se pueden reescribir como $P^{(n)} = P^{(m)} P^{(n-m)}$, donde $P^{(n)}$ es la matriz de probabilidades de transición a n pasos con entradas $P_{ij}^{(n)}$.

Dada una matriz de transición P , si existe $\pi(i)$, $i \in E$ un vector de probabilidad, es decir

$$\pi(i) \geq 0, \quad i \in E, \quad \sum_{i \in E} \pi(i) = 1,$$

tal que

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{ij} = \pi(j), \quad j \in E,$$

entonces se dice que π es una distribución invariante para la cadena X_n (también se conoce como distribución estacionaria). En forma matricial $\pi P = \pi$. Usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se puede probar que se cumple que

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j).$$

Se dice que el estado j es *accesible* desde el estado i ($i \rightarrow j$) si $P_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna n . Dos estados se *comunican* si son accesibles entre sí ($i \leftrightarrow j$). La relación de comunicación es una relación de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Se consideran clases de equivalencia con respecto a la relación de comunicación, éstas son llamadas *clases de comunicación* y están formadas por estados que se comunican. Si todos los estados de una cadena se comunican entre sí, es decir, hay una sola clase de comunicación, se dice que la cadena es *irreducible*.

Sea $\tau_{ij} = \min\{n \geq 1 : X_n = j, X_h \neq j, h = 1, \dots, n-1 | X_0 = i\}$ el tiempo de pri-

mera visita al estado j partiendo del estado i . Se dice que un estado i es recurrente si la probabilidad de regresar a ese estado dado que se parte de él mismo, es uno, es decir

$$\mathbb{P}[\tau_{ii} < \infty] = 1.$$

Se dice que un estado es transitorio si no es recurrente, es decir, la probabilidad de regresar a él mismo es estrictamente menor a uno:

$$\mathbb{P}[\tau_{ii} < \infty] < 1.$$

Se dice que un estado es absorbente en el sentido usual si

$$\mathbb{P}[\tau_{ii} = 1] = 1.$$

Se define al tiempo medio de pasaje de un estado j partiendo de un estado i , como la esperanza $\mu_{ij} = E[\tau_{ij}]$. Si el estado de partida y llegada es el mismo estado recurrente i , μ_{ii} es el *tiempo medio de recurrencia* de i y se denota como μ_i .

Si para un estado recurrente i , ocurre que $\mu_i = \infty$ se dice que es un estado recurrente nulo. Si para un estado recurrente i , pasa que $\mu_i < \infty$ se dice que es un estado recurrente positivo. Si todos los estados de una cadena son recurrentes positivos, se dice que la cadena es recurrente positiva. Es posible demostrar que una cadena de Markov irreducible con número de estados finito es recurrente positiva.

Teorema 1.26. *Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva, entonces tiene una única distribución estacionaria dada por*

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}, \quad i \in E.$$

Corolario 1.27. *Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov irreducible, entonces es recurrente positiva si y sólo si tiene distribución estacionaria.*

Corolario 1.28. *Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov irreducible con espacio de estados finito, entonces tiene una única distribución estacionaria.*

Definición 1.29. Sea $i \in E$ con $P_{ii}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 1$, se define al período como el *m.c.d.* $\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$ donde *m.c.d.* denota al máximo común divisor del conjunto. Si el período es 1, se dice que la cadena es aperiódica.

Un estado recurrente positivo y aperiódico se llama estado *ergódico*. Si todos los estados de una cadena de Markov son ergódicos, ésta es una cadena *ergódica*. Una cadena irreducible con estados finitos y aperiódicos es ergódica.

Teorema 1.30. Sea P la matriz de transición de probabilidad de una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva con distribución estacionaria π , si la cadena es aperiódica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad i, j \in E,$$

si la cadena es periódica con período d , entonces para cada par i, j en E existe un entero r , con $0 \leq r < d$, tal que $P_{ij}^{(n)} = 0$ a menos que $n = md + r$ para algún entero no negativo m y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij}^{(md+r)} = d\pi_j.$$

La demostración del resultado anterior se puede encontrar en la sección 2.8 de [11]. Obsérvese que en el caso de una cadena aperiódica, si la cadena tiene estados finitos, entonces resulta ser una cadena ergódica y tiene una única distribución invariante.

1.2.2. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo, se dice que X es una cadena de Markov a tiempo continuo si para todo $t \geq 0$, $s \geq u \geq 0$,

$$\mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x_u] = P[X_{t+s} = j | X_s = i],$$

cuya interpretación es la misma que para las cadenas a tiempo discreto, es decir, la distribución condicional del estado del proceso al tiempo futuro $t+s$ dado el estado a tiempo presente s y los estados a tiempos pasados, depende sólo del estado presente y es independiente de los estados pasados.

En este caso se define a la función $P_{ij}(t) := \mathbb{P}[X_t = j | X_0 = i]$ como la *función de transición* del proceso. Si se cumple que $\mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i]$ es independiente de s se dice que la cadena es estacionaria u homogénea en el tiempo.

Dada una función de transición $P_{ij}(t)$, se puede probar que $P_{ii}(t)$ es diferenciable en $t = 0$ (puede ser $+\infty$) y que $P_{ij}(t)$ es diferenciable en $t = 0$ y finita para todo $j \in E$ y se define

$$q_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t}$$

$$q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t}.$$

Esto implica que $P'_{ii}(0) = -q_i$ y que $q_i = 0$ si $P_{ii}(t) = 1$.

El valor de q_i se puede interpretar como la tasa con la que el proceso permanece en el estado i y q_{ij} la tasa con la que el proceso cambia a j en tiempo infinitesimal, por lo que la probabilidad de transición del estado i al estado j se puede escribir como $P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$.

Sea τ_i la cantidad de tiempo que el proceso permanece en el estado i , entonces

$$\mathbb{P}[\tau_i > t + s | \tau_i > s] = P[\tau_i > t], \quad s, t \geq 0,$$

es decir, τ_i tiene pérdida de memoria por lo que debe tener distribución exponencial. Como q_i representa la tasa con la que el proceso permanece en el estado i , es justamente la media de la variable aleatoria τ_i . Si para algún estado ocurre que $q_i = \infty$, éste se llama estado instantáneo, y si por el contrario $q_i = 0$ es un estado absorbente. Para el estudio de este tipo de proceso se asume que $0 \leq q_i \leq \infty$ para toda i .

La matriz Q cuya entrada (i, j) es q_{ij} se llama Q -matriz asociada a la matriz de transición P o matriz del operador infinitesimal del proceso. Las entradas de la diagonal de Q son no positivas (pueden ser infinitas), las entradas fuera de la diagonal son finitas no negativas y la suma por renglones es menor o igual a cero. Si todas las entradas de la diagonal son finitas, se dice que Q es estable y si $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ se dice

que Q es conservativa.

Para el estudio de cadenas de Markov a tiempo continuo es importante la noción de distribución estacionaria. Se dice que una medida de probabilidad en E , que se denotará como $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$, es *estacionaria o invariante* para el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ si se cumple que

$$\pi Q = 0, \quad (1.39)$$

si se cumple que $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$, entonces se dice que es una *distribución estacionaria o invariante*. Definiendo $p_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in E} \pi_j}$, entonces (p_1, p_2, \dots) es una distribución estacionaria que resulta de normalizar a la medida estacionaria π .

A partir la propiedad de Markov se pueden derivar las siguientes ecuaciones:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t)$$

que es la versión continua de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. También se puede expresar como

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t).$$

Dividiendo entre h y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene que

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t) = \sum_{i \in E} q_{ik}P_{kj}(t),$$

que es la ecuación de retroceso de Kolmogorov. También se puede escribir como

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(h),$$

de donde se sigue que

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)]P_{ij}(t),$$

dividiendo entre h y tomando de nuevo el límite cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(t)q_{kj} - P_{ij}(t)q_j = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)q_{kj}$$

que es la ecuación de evolución de Kolmogorov.

Un tipo importante de cadenas de Markov a tiempo continuo son las **cadenas de nacimiento y muerte** donde el espacio de estados es $\{0, 1, \dots\}$ y $q_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$, esto quiere decir que en cada transición la cadena sólo puede cambiar a estados vecinos. Las cadenas de nacimiento y muerte son comúnmente utilizadas para modelar poblaciones. Cuando el estado incrementa se dice que hay un nacimiento y cuando disminuye se dice que hay una muerte.

Sean $\lambda_i = q_{i,i+1}$ y $\mu_i = q_{i,i-1}$, llamadas tasa de nacimiento y tasa de muerte respectivamente. Se dice que el proceso es de nacimiento puro si $\mu_i = 0$ para toda i . Por ejemplo el proceso Poisson en el que $\lambda_i = \lambda$ y $\mu_i = 0$ para toda i .

Para una cadena de nacimiento y muerte el generador infinitesimal, si es conservativo, está dado por

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

y la medida estacionaria que resuelve el sistema (1.39), definiendo $\pi_0 = 1$, está dada por

$$\pi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (1.41)$$

Obsérvese que para $n \geq 0$

$$\lambda_n \pi_n = \lambda_n \left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \right) = \left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1} \lambda_n}{\mu_1 \cdots \mu_n \mu_{n+1}} \right) \mu_{n+1} = \mu_{n+1} \pi_{n+1}, \quad (1.42)$$

que será de utilidad un poco más adelante.

Definición 1.31. Una función de transición $P_{ij}(t)$ se dice que es débilmente simétrica, si existe un conjunto $\{m_i, i \in E\}$ de números estrictamente positivos tales que

$$m_i P_{ij}(t) = m_j P_{ji}(t), \quad t \geq 0, \quad i, j \in E.$$

Teorema 1.32. Sea $P_{ij}(t)$ débilmente simétrica. Para cada $i, j \in E$ existe una medida signada finita $\gamma_{i,j}$ en $[0, \infty)$ tal que

$$P_{i,j}(t) = \left(\frac{m_j}{m_i} \right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-tx} d\gamma_{i,j}(x), \quad t \geq 0,$$

en particular, si $i = j$, $\gamma_{i,i}$ es una medida de probabilidad en $[0, \infty]$.

Véase Sección 1.6 de [1].

Defínase $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios por

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1, \\ -xQ_0(x) &= -\lambda_0 Q_0(x) + \lambda_0 Q_1(x), \\ -xQ_k(x) &= \mu_k Q_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) Q_k(x) + \lambda_k Q_{k+1}(x), \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (1.43)$$

que en forma matricial se puede escribir como $QQ(x) = -xQ(x)$. Donde Q es el generador infinitesimal definido en (1.40) y $Q(x) = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$.

Teorema 1.33. Sea Q el generador infinitesimal de una cadena de nacimiento y muerte irreducible dado en (1.40) y sea $P_{ij}(t)$ una función de transición débilmente simétrica que satisface la ecuación de retroceso y de evolución de Kolmogorov, entonces existe una función de distribución de probabilidad $\psi(x)$ con soporte en $[0, +\infty)$ tal que

$$P_{mn}(t) = \pi_n \int_0^\infty e^{-tx} Q_m(x) Q_n(x) d\psi(x), \quad n, m \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (1.44)$$

Demostración. Por el Teorema 1.32 se tiene que

$$P_{00}(t) = \left(\frac{m_0}{m_0}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-tx} d\psi(x) = \int_0^\infty e^{-tx} d\psi(x), \quad t \geq 0, \quad (1.45)$$

donde $\psi(x)$ es una medida de probabilidad en $[0, \infty]$.

Se verá primero que (1.44) se cumple cuando $n = 0$.

Por inducción sobre m , cuando $m = 0$ es simplemente (1.45).

Supongamos que se cumple para toda $m \leq k$ que

$$P_{m0}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_m(x) Q_0(x) d\psi(x), \quad m \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Por demostrar que se cumple para $k + 1$. Por hipótesis de inducción se tiene que

$$P_{k0}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_k(x) Q_0(x) d\psi(x), \quad t \geq 0,$$

derivando con respecto de t se obtiene

$$P'_{k0}(t) = - \int_0^\infty x e^{-tx} Q_k(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Usando la ecuación de retroceso de Kolmogorov y sustituyendo la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \lambda_k P_{k+1,0}(t) &= P'_{k,0}(t) - \mu_k P_{k-1,0}(t) + (\lambda_k + \mu_k) P_{k,0}(t) \\ &= - \int_0^\infty x e^{-tx} Q_k(x) Q_0(x) d\psi(x) \\ &\quad - \mu_k \int_0^\infty e^{-tx} Q_{k-1}(x) Q_0(x) d\psi(x) \\ &\quad + (\lambda_k + \mu_k) \int_0^\infty e^{-tx} Q_k(x) Q_0(x) d\psi(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-tx} [-x Q_k(x) - \mu_k Q_{k-1}(x) + (\lambda_k + \mu_k) Q_k(x)] Q_0(x) d\psi(x). \end{aligned}$$

Usando (1.43) se obtiene que

$$\lambda_k P_{k+1,0}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} [\lambda_k Q_{k+1}(x)] Q_0(x) d\psi(x),$$

y finalmente dividiendo entre λ_k

$$P_{k+1,0}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_{k+1}(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Ahora, se sabe que (1.44) se cumple para $n = 0$, supóngase que se cumple para $n \leq k$. Por demostrar que se cumple para $n = k + 1$. Derivando (1.44) con respecto de t para $n \leq k$:

$$P'_{mk}(t) = -\pi_k \int_0^\infty x e^{-tx} Q_m(x) Q_k(x) d\psi(x).$$

Usando ahora la ecuación de evolución de Kolmogorov y sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} P_{m,k+1}(t) &= P'_{m,k}(t) + (\lambda_k + \mu_k) P_{m,k}(t) - \lambda_{k-1} P_{m,k-1}(t) \\ &= -\pi_k \int_0^\infty x e^{-tx} Q_m(x) Q_k(x) d\psi(x) \\ &\quad + (\lambda_k + \mu_k) \int_0^\infty e^{-tx} Q_m(x) Q_k(x) d\psi(x) \\ &\quad - \lambda_{k-1} \int_0^\infty e^{-tx} Q_m(x) Q_{k-1}(x) d\psi(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-tx} [-x\pi_k Q_k(x) + (\lambda_k + \mu_k)\pi_k Q_k(x) - \lambda_{k-1}\pi_{k-1} Q_{k-1}(x)] Q_m(x) d\psi(x). \end{aligned}$$

Usando (1.42)

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} P_{m,k+1}(t) &= \int_0^\infty e^{-tx} [-x\pi_k Q_k(x) + (\lambda_k + \mu_k)\pi_k Q_k(x) - \mu_k \pi_k Q_{k-1}(x)] Q_m(x) d\psi(x) \\ &= \pi_k \int_0^\infty e^{-tx} [-xQ_k(x) + (\lambda_k + \mu_k)Q_k(x) - \mu_k Q_{k-1}(x)] Q_m(x) d\psi(x). \end{aligned}$$

Usando ahora (1.43)

$$\mu_{k+1}P_{m,k+1}(t) = \pi_k \int_0^\infty e^{-tx} [\lambda_k Q_{k+1}(x)] Q_m(x) d\psi(x).$$

Usando de nuevo (1.42)

$$\mu_{k+1}P_{m,k+1}(t) = \pi_k \mu_{k+1} \int_0^\infty e^{-tx} Q_{k+1}(x) Q_m(x) d\psi(x),$$

y finalmente, dividiendo entre μ_{k+1} ,

$$P_{m,k+1}(t) = \pi_k \int_0^\infty e^{-tx} Q_m(x) Q_{k+1}(x) d\psi(x).$$

□

La medida de probabilidad ψ se llama *medida espectral* de $P_{mn}(t)$.

Dado que λ_m es estrictamente positivo, el polinomio $Q_n(x)$ es de grado n .

Sustituyendo $t = 0$ en (1.44) se obtiene que

$$\int_0^\infty Q_m(x) Q_n(x) d\psi(x) = \frac{\delta_{mn}}{\pi_n}, \quad m, n \geq 0,$$

por lo que los polinomios $Q_n(x)$, $n \geq 0$ son ortogonales con respecto a ψ .

Es importante notar que las cadenas de nacimiento y muerte tienen un generador infinitesimal que es una matriz tridiagonal, lo que resulta conveniente pues como se muestra a continuación, es semejante a una matriz simétrica, por lo que es posible aplicar diferentes resultados de Álgebra Lineal para matrices simétricas u operadores autoadjuntos.

Teorema 1.34. *Sea M una matriz tridiagonal*

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \delta_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \beta_{k-2} & \alpha_{k-1} & \delta_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Si $\delta_i \neq 0$ y $\delta_i \beta_i > 0$, entonces M es semejante a una matriz simétrica tridiagonal \tilde{M} , es decir, existe una matriz invertible D tal que $D^{-1}MD = \tilde{M}$.

Demostración. Sea D la matriz diagonal con entradas

$$D_{1,1} = 1 \text{ y } D_{i,i}^2 = \frac{\beta_{i-1} \cdots \beta_1}{\delta_{i-1} \cdots \delta_1} \quad i = 2, \dots, k.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} D^{-1}MD &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_1}{\beta_1}} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{\beta_1 \beta_1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{pmatrix} D \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\beta_1 \delta_1} & \frac{\alpha_2 \sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\beta_1}} & \frac{\delta_2 \sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\beta_1}} & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{\sqrt{\delta_1 \delta_2 \beta_2}}{\sqrt{\beta_1}} & \frac{\alpha_3 \sqrt{\delta_1 \delta_2}}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} & \frac{\delta_3 \sqrt{\delta_1 \delta_2}}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\delta_1 \cdots \delta_{k-1} \beta_{k-1}}}{\sqrt{\beta_1 \cdots \beta_{k-2}}} & \frac{\alpha_k \sqrt{\delta_1 \cdots \delta_{k-1}}}{\sqrt{\beta_1 \cdots \beta_{k-1}}} \end{pmatrix} D \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\beta_1 \delta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\beta_1 \delta_1} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_2 \delta_2} & 0 & \vdots \\ 0 & \sqrt{\beta_2 \delta_2} & \alpha_3 & \sqrt{\beta_3 \delta_3} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta_{k-1} \delta_{k-1}} & \alpha_k \end{pmatrix} = \tilde{M}. \end{aligned}$$

Por lo que M es similar a \tilde{M} que es tridiagonal y simétrica. \square

El Teorema 1.34 es importante en el análisis de cadenas de nacimiento y muerte, pues no sólo garantiza la existencia de una matriz semejante, sino que también da una forma fácil de encontrarla, lo que resulta útil pues dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. Así, si se buscan los valores propios de un generador infinitesimal que sea una matriz tridiagonal, el cálculo es más sencillo utilizando su matriz similar simétrica.

Teorema 1.35. *Sea A una matriz real simétrica, entonces los valores propios de A son reales.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los n valores propios de A . Para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ sea λ_i valor propio de A y v su correspondiente vector propio, entonces como A es real

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda_i v} = \overline{\lambda_i} \bar{v}.$$

Como A es real, se tiene que

$$\bar{v}^T A = \bar{v}^T A^T = (A\bar{v})^T = (\overline{\lambda_i v})^T = \overline{\lambda_i} \bar{v}^T,$$

entonces

$$\lambda_i(\bar{v}^T v) = \bar{v}^T(\lambda_i v) = \bar{v}^T A v = \overline{\lambda_i} \bar{v}^T v = \overline{\lambda_i}(\bar{v}^T v).$$

Ahora, como v es vector propio, $v \neq 0$, por lo que $\bar{v}^T v \neq 0$. Entonces se tiene que $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$, por lo tanto λ_i es real. \square

Un resultado de Álgebra Lineal que será importante es una especie de Teorema espectral para matrices simétricas y se enuncia a continuación.

Teorema 1.36. *Toda matriz real de $n \times n$ es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si es simétrica.*

Demostración. Primero, la condición necesaria se cumple pues si A es una matriz ortogonalmente diagonalizable, entonces existen D matriz diagonal y U matriz orto-

gonal tal que

$$A = UDU^{-1} = UDU^T.$$

Entonces

$$A^T = (UDU^T)^T = UD^T U^T = UDU^T = A,$$

por lo tanto, A es simétrica.

La suficiencia se demuestra por inducción.

Para matrices de 1×1 se tiene que, sea $A = [a]$, entonces $A = [1][a][1] = UAU^T$.

Suponiendo que se cumple que toda matriz simétrica de $(n-1) \times (n-1)$ es ortogonalmente diagonalizable, hay que demostrar que se cumple para toda matriz diagonal de $n \times n$.

Sea A una matriz simétrica de $n \times n$, con $n > 1$, v_1 un vector propio asociado al valor propio λ_1 que, por el Teorema 1.35, es real. Entonces v_1 se puede normalizar y se puede completar una base para \mathbb{R}^n . Usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se puede ortogonalizar dicha base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Sea P la matriz que tiene por columnas los vectores de β , entonces P es la matriz de cambio de base asociada a β . Como P es ortogonal, $P^{-1} = P^T$.

Nótese que $P^{-1}AP$ es simétrica, pues

$$(P^{-1}AP)^T = (P^T AP)^T = P^T A^T P = P^{-1}AP.$$

Además su primera columna es

$$P^{-1}APe_1 = P^{-1}Av_1 = P^{-1}\lambda_1 v_1 = \lambda_1 P^{-1}v_1 = \lambda_1 [v_1]_\beta = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donde el vector resultante tiene n coordenadas.

Por simetría, se tiene que $P^{-1}AP$ es una matriz que por bloques se ve como $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & B \end{pmatrix}$ donde $\mathbf{0}$ es un vector fila de tamaño $n - 1$ y B es una matriz simétrica de tamaño $(n - 1) \times (n - 1)$, que por la hipótesis de inducción es ortogonalmente diagonalizable.

Entonces, existe una matriz Q de $(n - 1) \times (n - 1)$ ortogonal tal que $B = QD'Q^{-1}$ con D' diagonal. Sea

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q \end{pmatrix} \text{ entonces } \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & I \end{pmatrix}$$

es decir, R es invertible y $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Sea $U = PR$ una matriz ortogonal, pues el producto de matrices ortogonales es ortogonal, entonces

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= R^{-1}P^{-1}APR = R^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & B \end{pmatrix} R \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & Q^{-1}BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & D' \end{pmatrix} \\ &= D. \end{aligned}$$

Entonces $A = UDU^{-1} = UDU^T$, por lo que A es ortogonalmente diagonalizable. \square

A continuación se presenta una proposición que relaciona los resultados anteriores con las cadenas de nacimiento y muerte y que será útil mas adelante.

Proposición 1.37. *Sea Q el generador infinitesimal de una cadena de nacimiento*

y muerte definido en (1.40), entonces todos los valores propios de Q son menores o iguales que cero.

Demostración. Como Q es un generador infinitesimal, la suma por renglones es igual a cero, entonces se tiene que

$$Qe = \mathbf{0}^T,$$

donde $e = (1, \dots, 1)^T$, i.e., e es el vector propio de Q asociado al valor propio 0.

Sea $c = \max_i \{\lambda_i + \mu_i\}$, entonces se tiene que $\frac{1}{c}Q$ tiene entradas en la diagonal entre -1 y 0 pero la suma por renglones sigue siendo igual a cero. Además las entradas fuera de la diagonal están entre 0 y 1 .

Sea $I + \frac{1}{c}Q$, que es una matriz que tiene entradas entre 0 y 1 , por lo que todas las entradas de la matriz son no negativas. Obsérvese además que la suma por renglones de $I + \frac{1}{c}Q$ es igual a uno, por lo que es una matriz estocástica.

Por el Teorema de Perron-Frobenius (véase Sección 15.4 de [15]), los valores propios de una matriz no negativa están en el círculo con radio igual al radio espectral de la matriz, que en este caso es uno, i.e., los valores propios están dentro del círculo unitario.

Como además $I + \frac{1}{c}Q$ es tridiagonal, por el Teorema 1.34 es semejante a una matriz simétrica, y por el Teorema 1.35 tiene valores propios reales. Por lo tanto, los valores propios de $I + \frac{1}{c}Q$ están en el intervalo $[-1, 1]$.

Sea v vector propio de $I + \frac{1}{c}Q$ asociado al valor propio λ , entonces

$$\left(I + \frac{1}{c}Q\right)v = \lambda v, \quad \lambda \in [-1, 1],$$

entonces

$$Iv + \frac{1}{c}Qv = \lambda v,$$

por lo que

$$\frac{1}{c}Qv = (\lambda - 1)v,$$

lo que implica que

$$Qv = c(\lambda - 1)v.$$

Entonces $c(\lambda - 1)$ es valor propio de Q . Pero $\lambda - 1 \leq 0$, entonces $c(\lambda - 1) \leq 0$. Por lo tanto los valores propios de Q son menores iguales que 0. \square

Finalmente, se presenta un teorema que resultará útil para demostraciones posteriores conocido como *Ley de Inercia de Sylvester* que habla sobre el signo de los valores propios de una matriz.

Teorema 1.38. (*Ley de inercia de Sylvester*). Sea $f : V \times V \rightarrow R$ una forma bilineal simétrica. Entonces V posee una base tal que la matriz asociada a f es diagonal y cualquier otra matriz diagonal asociada a f posee el mismo número de elementos positivos y el mismo número de elementos negativos.

La demostración del Teorema (1.38) se encuentra en [16].

Capítulo 2

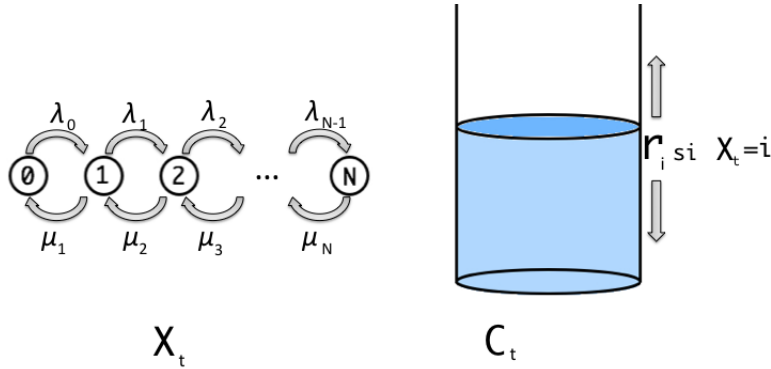
Procesos de Fluido Modulados por una cadena de Markov ($N < \infty$).

Un proceso de fluido modulado por una cadena de Markov involucra un depósito cuyo contenido es modulado por una cadena de Markov a tiempo continuo. Este tipo de proceso ha sido muy estudiado en el campo de las telecomunicaciones ya que se usa para modelar la dinámica de señales como voz, videos o imágenes enviadas a servidores que pueden ser tratados como fluidos (continuos) pues su tamaño es muy pequeño en comparación con el tráfico total.

Las ideas detrás de este tipo de proceso se remontan a trabajos de Hersh y Griego y otros autores como M. Pinsky, quienes los denominaron evoluciones aleatorias (*random evolution*).

Este proceso puede ser visto como un sistema de colas ya que cuenta con líneas de ingreso, espera, servicio, y salida y podemos describirlo usando la notación de Kendall [12] $A/B/s/m$ donde A es la distribución del tiempo de llegadas, B la distribución de los tiempos de servicio, s el número de servidores y m el máximo número de clientes que pueden ser acomodados en el sistema. Por convención la letra M se usa para procesos markovianos, y en ese caso se escribe $A = M$ o $B = M$, dependiendo del sistema que estemos analizando.

En este capítulo se analiza el modelo de fluidos modulado por una cadena de Markov en el que el proceso modulador es una cadena de nacimiento y muerte (X_t) y las tasas de crecimiento del fluido en el depósito (C_t) son constantes que dependen del estado de la cadena. Se estudia el proceso en el caso en que el espacio de estados de la cadena de Markov es finito.



2.1. Trabajos previos

En 1969 Hersh y Griego publicaron [9] en el que presentan un proceso llamado “evolución aleatoria” como una generalización de un sistema que ya se había estudiado antes: un proceso de Markov definido por el movimiento de una partícula en línea recta con velocidad aleatoria. En su artículo presentan teoremas de existencia, representación y fórmulas asintóticas. En 1974, Hersh publica [10] donde presenta un resumen de su trabajo sobre evoluciones aleatorias.

Hersh y Griego encuentran que en física, una evolución aleatoria es un sistema dinámico cuya ecuación de estado está sujeta a una variación aleatoria, mientras que en lenguaje matemático es un operador M que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dM}{ds}(s, t) = -V(x(s))M(s, t),$$

donde V es un operador que depende del parámetro x que es estocástico. Con su análisis del proceso encontraron relaciones entre conceptos de física y conceptos de probabilidad y comenzaron a desarrollar teoría sobre los procesos modulados por

cadenas de Markov.

Una referencia importante sobre los procesos de fluidos modulados por cadenas de Markov es [2] publicado por D. Anick, D. Mitra y M. M. Sondhi en 1982. Los autores analizan el modelo para un sistema manejador de datos que recibe mensajes de N fuentes de información independientes que pueden estar encendidas por periodos exponenciales por lo que las tasas que regulan el fluido r_i están moduladas por un proceso de nacimiento y muerte con espacio de estados $\{0, 1, \dots, N\}$.

Se supone que los periodos de encendido tienen distribución exponencial, se toma como unidad de tiempo el promedio de los periodos de encendido y bajo esa unidad de tiempo se denota al promedio de tiempos de apagado como $1/\lambda$. Así, a largo plazo la fracción de tiempo de encendido $t_{enc.}$ es tal que $t_{enc.} + \frac{1}{\lambda}t_{enc.} = 1$, por lo que la fracción de tiempo de encendido es $\lambda/(1 + \lambda)$.

Como unidad de información se toma la cantidad generada por una fuente en un periodo promedio. Bajo estos supuestos, si r fuentes están encendidas, la tasa instantánea de transmisión es r , además se considera c la tasa de salida del contenedor. Mientras el contenedor no esté vacío, la tasa instantánea de cambio del contenedor es $r - c$. Si el contenedor está vacío se mantendrá así mientras $r \leq c$.

Se asume que el contenedor es infinito y que la intensidad de tráfico es menor a uno (condición de estabilidad):

$$\frac{N\lambda}{c(1 + \lambda)} < 1.$$

En [2] se busca analizar los problemas relacionados con el tamaño del contenedor para cierto número de fuentes o el número máximo de fuentes que puede soportar un sistema con ciertas características. Para poder estudiar el efecto que causa el número de fuentes, se asume N finito. Se analiza también la intensidad de tráfico y su relación con la probabilidad de sobrepasar la capacidad del contenedor.

Un aspecto importante del problema es la estabilidad numérica. En el modelo

$$\begin{aligned}
F_i(\infty) &= \lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) = \binom{N}{i} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^{N-i} \\
&= \binom{N}{i} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^{N-i} \\
&= \binom{N}{i} \frac{1}{(1+\lambda)^N} \lambda^i \quad 0 \leq i \leq N.
\end{aligned}$$

Por lo que, usando el teorema del binomio se tiene que

$$\sum_{i=0}^N F_i(\infty) = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \frac{1}{(1+\lambda)^N} \lambda^i = \frac{1}{(1+\lambda)^N} \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \lambda^i = \frac{1}{(1+\lambda)^N} (1+\lambda)^N = 1,$$

lo que da una condición de acotamiento.

Para resolver el sistema se muestra un procedimiento para calcular los valores propios y sus correspondientes vectores propios, además se define la probabilidad de desbordamiento asumiendo un contenedor finito. Se encuentra su expresión asintótica y se dan algunos resultados numéricos sobre la calidad de dicha aproximación.

En [14], V.G. Kulkarni analiza el modelo con diferentes tipos de procesos moduladores. Considera un proceso C_t modulado por X_t que puede ser una cadena de Markov a tiempo continuo, una cadena de Markov a tiempo continuo con ruido blanco o un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Suponiendo un contenedor finito, Kulkarni obtiene una representación espectral de la distribución estacionaria en cada caso y analiza un modelo en el que la tasa de cambio del proceso depende de X_t y C_t simultáneamente.

Kosten en [13] generaliza el modelo analizando el caso en el que el tiempo y el número de fuentes N tiende a infinito. Mientras que en [3] se aproxima un modelo de tráfico para cajeros automáticos con una cadena de nacimiento y muerte que regula

un fluido de un depósito.

Una referencia importante para este trabajo es [7] donde se analiza un sistema en el que la tasa de crecimiento del fluido depende únicamente del estado de una cadena de nacimiento y muerte. Se asume un contenedor infinito y una tasa de crecimiento constante r_i en el intervalo de tiempo que la cadena de nacimiento y muerte se encuentre en el estado i . De igual forma, se asume que la cantidad de fluido no puede ser negativa.

Se asume que hay un estado k tal que $r_i < 0$ para $i \leq k$ y $r_i > 0$ para $k < i \leq N$ y para asegurar que la distribución límite de la cantidad de fluido en el contenedor C_t existe, se asume que la suma de las tasas de crecimiento ponderada por las probabilidades por estado debe ser negativa. Usando teoría de polinomios ortogonales se encuentran los vectores propios y sus correspondientes valores propios con los cuales se escribe de manera explícita la distribución estacionaria de C_t .

El análisis espectral del sistema $M/M/1$ se puede encontrar en la referencia principal de este trabajo [22], donde se encuentra la distribución estacionaria del sistema con diferentes condiciones utilizando teoría de polinomios ortogonales y se introduce la idea de retroalimentación en colas de fluidos, la cual es muy diferente a la idea tradicional de retroalimentación en sistemas de colas.

En los modelos de fluidos con retroalimentación que se estudian en [22], se tiene que la velocidad de cambio en el depósito depende del estado actual del proceso X_t , pero este proceso ya no es autónomo pues depende del estado actual del contenido en el depósito de manera que ahora la dependencia entre los procesos C_t y X_t se da en ambos sentidos. Este nuevo proceso tiene características en común con los modelos de fluidos modulados por una cadena de Markov y también es posible encontrar una expresión para su distribución estacionaria usando teoría de polinomios ortogonales.

En cuanto a las principales aplicaciones en sistemas de telecomunicaciones, en [8] se usa el modelo con flujo continuo para aproximar el flujo de paquetes de datos y de

voz que es discreto, asumiendo que el tráfico tiene distribución Poisson. Se estudia el ancho de banda que se debe reservar para el uso exclusivo de datos y el que se puede compartir con paquetes de voz.

En [8] se aborda ese problema ya que el sistema que se analiza permite reservar espacio para paquetes de voz mientras los datos pueden usar el espacio restante incluyendo espacios vacíos reservados para paquetes de voz. Por su parte, los paquetes de voz no pueden ocupar espacios vacíos reservados para paquetes de datos, de manera que si llega un paquete de voz y no hay espacio reservado específicamente para paquetes de voz, éste se perderá.

En el sistema, los paquetes de voz tiene prioridad pues se pierden si no hay espacio en el sistema mientras que los paquetes de datos pueden esperar en una cola, por lo que se analizan principalmente dos factores: la tasa de pérdida del tráfico de paquetes de voz y el tiempo medio de espera en la cola de paquetes de datos.

Con el objetivo de modelar la dinámica de servidores que reciben diferentes tipos de paquetes de cada fuente se generalizó la idea incorporando más de un proceso para modular el contenido del depósito. Estos procesos cumplen con ser independientes entre sí pero cada uno cuenta con diferente número de estados y pueden no ser idénticamente distribuidos. En [17] se hace el análisis de un sistema de colas donde cada fuente es un proceso modulado por una cadena de Markov *MMFP* (en inglés *Markov Modulated Fluid Process*), el sistema es equivalente a un *MMFP/MMFP/1*, se aproxima con un sistema más sencillo y se prueba la eficiencia del método usando resultados numéricos.

Dado que en la realidad, aún con un número pequeño de fuentes, el número de estados totales del proceso modulado crece de manera exponencial, se estudiaron aproximaciones. En [18] se presenta un método de aproximación para resolver numéricamente el modelo general de fluidos modulados por una cadena de Markov. Se muestra como la superposición de un grupo heterogéneo de fuentes se puede aproximar con un modelo de Markov de una dimensión que modula la cantidad de fluido.

2.2. Modelo Matemático

Para este modelo, se supone un contenedor con cierto fluido. El fluido en el contenedor puede crecer o decrecer dependiendo del estado en que se encuentre una cadena de Markov a tiempo continuo e independiente del contenedor.

Se denotará la cantidad de fluido a tiempo t con C_t , el proceso de Markov a tiempo continuo X_t con espacio de estados finito $E = \{0, \dots, N\}$, de manera que la tasa de crecimiento del fluido es $r_i \in \mathbb{R}$ si X_t está en el estado i . Para este modelo, se supone también que la tasa de crecimiento es constante, es decir, la tasa r_i se mantiene constante mientras la cadena de Markov permanece en el estado i .

Es importante notar que el fluido puede decrecer tanto como sea físicamente posible, es decir, hasta que el contenedor está vacío. Si en algún tiempo t el contenedor está vacío, se mantendrá vacío mientras la tasa siga siendo negativa. Para descartar el caso en el que el contenedor está siempre vacío se supone que existe al menos una i para la cual $r_i > 0$.

Dado que el proceso C_t está modulado por el proceso X_t , se estudia el proceso bidimensional (X_t, C_t) en el que el estado en tiempo $t+h$, con h infinitesimal, depende únicamente del estado a tiempo t , por lo que resulta ser una cadena de Markov a tiempo continuo.

Teorema 2.1. *Sea $(Q)_{ij} = q_{ij}$ el generador infinitesimal del proceso X_t y $E = \{0, 1, \dots, N\}$ el espacio de estados, $R = \text{diag}[r_0, r_1, \dots, r_N]$ la matriz diagonal de tasas y*

$$F(t, y, i; x, j) = P[X_t = i, C_t \leq y | X_0 = j, C_0 = x],$$

la probabilidad de que a tiempo t , el proceso se encuentre en el estado i con una cantidad de fluido en el contenedor menor que y , dado que se sabe que la cantidad de fluido a tiempo cero era x y el proceso modulador estaba en el estado j .

Entonces si se denota

$$F(t, y; x) = [F(t, y, i; x, j)]_{j, i \in E},$$

se cumple que

$$\frac{\partial F(t, y; x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, y; x)}{\partial y} R = F(t, y; x) Q.$$

Demostración. Bajo las condiciones del teorema se tiene que, dado que a tiempo cero el proceso estaba en el estado j y la cantidad de fluido era igual a x , si a tiempo t el proceso modulador está en el estado i y la cantidad de fluido es menor a y , entonces al transcurrir un periodo infinitesimal h puede ocurrir que

- En $t + h$ el proceso X_{t+h} se encuentra en $i + k$, $k \in \mathbb{N}$, con probabilidad $q_{i, i+k}h + o(h)$.
- En $t + h$ el proceso X_{t+h} se encuentra en $i - k$ con probabilidad $q_{i, i-k}h + o(h)$.
- En $t + h$ el proceso X_{t+h} se encuentra en i con probabilidad $1 + q_{ii}h + o(h)$,

donde $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ y $o(h)$ la probabilidad de que ocurra más de un cambio de estado en el intervalo h , y es tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, de forma que:

$$\begin{aligned} F(t, y, i; x, j) &= \sum_{k=1}^i F(t, y - hr_i, i - k; x, j)(q_{i-k, i}h + o(h)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-i} F(t, y - hr_i, i + k; x, j)(q_{i+k, i}h + o(h)) \\ &\quad + F(t, y - hr_i, i; x, j)[1 + q_{ii}h + o(h)]. \end{aligned}$$

El último término de la suma anterior puede ser interpretado como la probabilidad de que no haya cambios de estado. Como el fluido crece a tasa r_i en el estado i , si en el periodo h no hay cambio de estado, entonces la cantidad de fluido a tiempo $t + h$ es $C_{t+h} = C_t + hr_i$, por lo que la probabilidad de que $C_{t+h} \leq y$ es igual a la probabilidad de que $C_t \leq y - hr_i$. En otras palabras, sin cambios de estado lo único que puede pasar entre t y $t + h$ es que el fluido crezca en cantidad hr_i .

Los primeros dos términos son las probabilidades de ir a un estado más pequeño o más grande respectivamente e incluyen las probabilidades de hacer más de un cambio de estado durante el periodo h pero terminar en $i - k$ o $i + k$ respectivamente.

Tomando la derivada parcial con respecto del tiempo,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F(t, y, i; x, j)}{\partial t} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t + h, y, i; x, j) - F(t, y, i; x, j)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^i F(t, y - hr_i, i - k; x, j)(q_{i-k,i}h + o(h))}{h} \\
 &\quad + \frac{\sum_{k=1}^{N-i} F(t, y - hr_i, i + k; x, j)(q_{i+k,i}h + o(h))}{h} \\
 &\quad + \frac{F(t, y - hr_i, i; x, j)[1 + q_{i,i}h + o(h)] - F(t, y, i; x, j)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F(t, y - hr_i, i - k; x, j) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^i F(t, y - hr_i, i - k; x, j) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F(t, y - hr_i, i + k; x, j) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-i} F(t, y - hr_i, i + k; x, j) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} \\
 &\quad + q_{i,i} \lim_{h \rightarrow 0} F(t, y - hr_i, i; x, j) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t, y - hr_i, i; x, j)(o(h))}{h} \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t, y - hr_i, i; x, j) - F(t, y, i; x, j)}{h} \\
 &= \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F(t, y, i - k; x, j) + \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F(t, y, i + k; x, j) \\
 &\quad + q_{i,i} F(t, y, i; x, j) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(t, y + s, i; x, j) - F(t, y, i; x, j)}{\frac{s}{-r_i}} \\
 &= \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F(t, y, i - k; x, j) + \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F(t, y, i + k; x, j) \\
 &\quad + q_{i,i} F(t, y, i; x, j) - r_i \frac{\partial F(t, y, i; x, j)}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Notando que las sumas se pueden expresar como una sola se tiene que

$$\frac{\partial F(t, y, i; x, j)}{\partial t} = \sum_{k=0}^N q_{k,i} F(t, y, k; x, j) - r_i \frac{\partial F(t, y, i; x, j)}{\partial y},$$

por lo que para $i = \{0, \dots, N\}$ ocurre que

$$\frac{\partial F(t, y, i; x, j)}{\partial t} + r_i \frac{\partial F(t, y, i; x, j)}{\partial y} = \sum_{k=0}^N q_{k,i} F(t, y, k; x, j),$$

que en forma matricial se puede escribir como

$$\frac{\partial F(t, y; x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, y; x)}{\partial y} R = F(t, y; x) Q.$$

□

Como la solución a la ecuación diferencial del teorema anterior resulta ser muy complicada de encontrar, es usual que se busque la distribución estacionaria, de manera que la ecuación no dependa de el estado inicial del proceso.

Se supone que el contenedor es infinito, por lo que el fluido podría crecer hasta infinito. Para que exista la distribución estacionaria de la cantidad de fluido es necesario que se cumpla una condición de estabilidad. Y para que exista la distribución invariante de X_t se asume que es una cadena ergódica.

Sea π la medida estacionaria del proceso X_t , entonces la probabilidad estacionaria para el estado $i \in E$ es la probabilidad de estar en el estado i entre la probabilidad de estar en cualquiera de los otros estados (casos favorables entre casos totales), es decir,

$$p_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in E} \pi_j},$$

de manera que el vector $p = (p_1, p_2, \dots)$ es la distribución estacionaria del proceso X_t .

Lo que se busca, es una expresión para la distribución estacionaria del proceso C_t , y para que exista es necesaria una condición de regularidad. En este caso se asume

que la suma de las tasas de crecimiento del fluido ponderada por las probabilidades estacionarias por estado es negativa,

$$\sum_{i \in E} p_i r_i < 0, \quad (2.1)$$

pues de no cumplirse, cuando $t \rightarrow \infty$ la cantidad de fluido sería infinita.

Se denotará como

$$F_i(t, y) = P[X_t = i, C_t \leq y], \quad i \in E \quad y \geq 0$$

a la distribución conjunta o la probabilidad de que a tiempo t la cadena de Markov esté en el estado i y la cantidad de fluido sea menor a y .

Analizando las probabilidades de transición en tiempo infinitesimal, al igual que cuando la probabilidad depende del estado inicial, se observa que si el proceso se encuentra en el estado i a tiempo t , al transcurrir un periodo infinitesimal h pueden ocurrir tres cosas:

- En $t + h$ el proceso X_{t+h} se encuentra en $i + k$, $k \in \mathbb{N}$, con probabilidad $q_{i,i+k}h + o(h)$,
- En $t + h$ el proceso X_{t+h} se encuentra en $i - k$ con probabilidad $q_{i,i-k}h + o(h)$,
- En $t + h$ el proceso X_{t+h} se encuentra en i con probabilidad $1 + q_{ii}h + o(h)$,

donde $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ y $o(h)$ la probabilidad de que ocurra más de un cambio de estado en el intervalo h , y es tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, de forma que la distribución conjunta en $t + h$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_i(t + h, y) &= P[X_{t+h} = i, C_{t+h} \leq y] \\ &= \sum_{k=1}^i F_{i-k}(t, y - hr_i)(q_{i-k,i}h + o(h)) + \sum_{k=1}^{N-i} F_{i+k}(t, y - hr_i)(q_{i+k,i}h + o(h)) \\ &\quad + F_i(t, y - hr_i)[1 + q_{ii}h + o(h)]. \end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial con respecto del tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_i(t, y)}{\partial t} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_i(t+h, y) - F_i(t, y)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^i F_{i-k}(t, y - hr_i)(q_{i-k,i}h + o(h))}{h} \\
&\quad + \frac{\sum_{k=1}^{N-i} F_{i+k}(t, y - hr_i)(q_{i+k,i}h + o(h))}{h} \\
&\quad + \frac{F_i(t, y - hr_i)[1 + q_{i,i}h + o(h)] - F_i(t, y)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F_{i-k}(t, y - hr_i) + \sum_{k=1}^i F_{i-k}(t, y - hr_i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F_{i+k}(t, y - hr_i) + \sum_{k=1}^{N-i} F_{i+k}(t, y - hr_i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} \\
&\quad + q_{i,i} \lim_{h \rightarrow 0} F_i(t, y - hr_i) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_i(t, y - hr_i)(o(h))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_i(t, y - hr_i) - F_i(t, y)}{h} \\
&= \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F_{i-k}(t, y) + \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F_{i+k}(t, y) + q_{i,i} F_i(t, y) \\
&\quad + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F_i(t, y + s) - F_i(t, y)}{\frac{s}{-r_i}} \\
&= \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F_{i-k}(t, y) + \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F_{i+k}(t, y) + q_{i,i} F_i(t, y) - r_i \frac{\partial F_i(t, y)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Como se asume que el sistema está en equilibrio cuando t es muy grande, se puede tomar a la distribución conjunta estacionaria $F_i(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_i(t, y)$ y $\frac{\partial F_i(t, y)}{\partial t} = 0$, entonces haciendo $t \rightarrow \infty$ en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión

$$r_i F'_i(y) = \sum_{k=1}^i q_{i-k,i} F_{i-k}(y) + q_{ii} F_i(y) + \sum_{k=1}^{N-i} q_{i+k,i} F_{i+k}(y), \quad (2.2)$$

que es una ecuación diferencial en y de primer orden y en diferencias en i de segundo orden.

En forma matricial se puede escribir $RF'(y) = Q^T F(y)$ donde $R = \text{diag}[r_0, r_1, r_2, \dots]$

y T indica la matriz transpuesta. Asumiendo que R es no singular ($r_i \neq 0$ para toda $i \in E$) se puede escribir

$$F'(y) = R^{-1}Q^T F(y), \quad (2.3)$$

que es la ecuación de evolución de Kolmogorov o de Fokker-Plank para el proceso (X_t, C_t) .

El problema reside ahora en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales anterior. Es claro que la complejidad de la solución dependerá de la forma y tamaño de la matriz $R^{-1}Q^T$, pues para encontrar la solución es necesario encontrar los vectores propios y sus correspondientes valores propios.

En [22] se muestra el procedimiento para resolver el sistema en el caso en que X_t es una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados finito y con espacio de estados infinito. En ambos casos se hace uso de teoría de polinomios ortogonales para encontrar los vectores propios asociados a la matriz $R^{-1}Q^T$. En el caso de espacio de estados infinito, se consideran dos casos, uno en el que los estados asociados a tasas de crecimiento positivas son finitos y otro en el que los estados asociados a tasas de crecimiento negativas son finitos.

2.3. Cadenas de nacimiento y muerte.

Estudiaremos un proceso de fluido modulado por una cadena de Markov en el que el número de fuentes encendidas X_t es una cadena de nacimiento y muerte a tiempo continuo con espacio de estados finito. Sean λ_i y μ_i las tasas de nacimiento y muerte en el estado i respectivamente, entonces el generador infinitesimal del proceso se ve de la siguiente forma

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & \mu_{N-1} & -(\mu_{N-1} + \lambda_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Es importante notar que de esta manera, la ecuación (2.2) se simplifica en el sentido de que desaparecen todas las probabilidades de ir a un estado con $k > 1$ pues la cadena de nacimiento y muerte permite dar un sólo salto en cada paso, es decir, si a tiempo t el proceso estaba en i , a tiempo $t + h$ el proceso puede estar sólomente en $i + 1$, en $i - 1$ o en i . Para resolver el sistema (2.3) se trabaja con la matriz

$$R^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_0}{r_0} & \frac{\mu_1}{r_0} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\lambda_0}{r_1} & \frac{-(\mu_1 + \lambda_1)}{r_1} & \frac{\mu_2}{r_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & 0 & \frac{\lambda_{N-2}}{r_{N-1}} & \frac{-(\mu_{N-1} + \lambda_{N-1})}{r_{N-1}} & \frac{\mu_N}{r_{N-1}} \\ \cdots & \cdots & 0 & \frac{\lambda_{N-1}}{r_N} & \frac{-\mu_N}{r_N} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

que es una matriz tridiagonal de dimensión $(N + 1) \times (N + 1)$, por los Teoremas 1.34 y 1.35, es equivalente a una matriz simétrica que se puede diagonalizar y que tiene valores propios reales.

Sustituyendo los valores de las tasas de nacimiento y muerte del proceso X_t , (2.2) se reduce a

$$r_i F'_i(y) = \lambda_{i-1} F_{i-1}(y) - (\lambda_i + \mu_i) F_i(y) + \mu_{i+1} F_{i+1}(y). \quad (2.6)$$

Como se busca resolver un sistema de $N + 1$ ecuaciones diferenciales en y de primer orden donde la matriz tiene valores propios reales; la solución es una combinación lineal de exponenciales que puede escribirse como

$$F(y) = \sum_{i=0}^N c_i e^{\xi_i y} v^{(i)}, \quad (2.7)$$

donde ξ_i es el valor propio asociado al vector propio $v^{(i)}$ y c_i constantes que pueden ser determinadas a partir de condiciones iniciales. En [3] se aborda el problema del cálculo de las constantes c_i que puede no ser sencillo dependiendo de las condiciones iniciales del sistema.

2.4. Espacio de estados finito

En la Sección 2.3 se introdujo el caso en que el proceso modulador es una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados finito $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Para encontrar la distribución estacionaria se debe hallar la solución a (2.3) que es de la forma (2.7), donde ξ_i es el valor propio asociado al vector propio $v^{(i)}$ y c_i constantes que pueden ser determinadas a partir de condiciones iniciales.

Para encontrar los valores y vectores propios, primero se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned} N^+ &= \{i \in E | r_i > 0\}, & N_+ &= |N^+|, \\ N^- &= \{i \in E | r_i < 0\}, & N_- &= |N^-|, \end{aligned} \tag{2.8}$$

de esta forma, el número total de estados es $N + 1 = N_+ + N_-$.

Obsérvese que para los estados en los que la tasa de crecimiento del fluido es positiva, la probabilidad de que el contenido sea menor igual a cero es cero, pues mientras X_t se encuentre en ese estado, la cantidad de fluido estará siempre aumentando, lo que arroja una primera condición inicial

$$F_i(0) = 0, \quad i \in N^+. \tag{2.9}$$

Además, si y es muy grande, la probabilidad de que X_t se encuentre en el estado $i \in E$ y el contenido C_t sea menor que y es simplemente la probabilidad de que X_t esté en el estado i , lo que arroja la segunda condición del problema

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_i(y) = p_i, \tag{2.10}$$

donde $p_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in E} \pi_j}$ es la probabilidad estacionaria por estado para la cadena de nacimiento y muerte y para este caso, como en (1.41), se tiene que

$$\pi_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}. \quad (2.11)$$

La condición de regularidad (2.1) para este caso es

$$\sum_{i=0}^N p_i r_i < 0$$

que, como $p_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j=0}^N \pi_j}$, es equivalente a

$$\sum_{i=0}^N \pi_i r_i < 0. \quad (2.12)$$

El problema es cada vez más particular, pues ahora se busca resolver el sistema (2.3) que es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneo sujeto a las condiciones iniciales (2.9) y (2.10). Dichas condiciones iniciales ayudarán a simplificar la solución del sistema y a encontrar las constantes correspondientes. Primero se debe hallar los valores y vectores propios, tomando $v(x) = [v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x)]^T$ y desarrollando $R^{-1}Q^T v(x) = x v(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 1, \\ \frac{\mu_1}{r_0} v_1(x) &= x + \frac{\lambda_0}{r_0}, \\ \frac{\mu_i}{r_{i-1}} v_i(x) &= \left(x + \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{r_{i-1}} \right) v_{i-1}(x) - \frac{\lambda_{i-2}}{r_{i-1}} v_{i-2}(x) \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ \left(x + \frac{\mu_N}{r_N} \right) v_N(x) &- \frac{\lambda_{N-1}}{r_N} v_{N-1}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nótese que $\{v_i(x)\}_{i=0}^N$ son las entradas del vector propio asociado al valor propio x de dimensión $N+1$.

Se busca hacer estos polinomios mónicos para poder aplicar resultados conocidos.

Para que los polinomios sean mónicos hay que hacer que el coeficiente principal sea 1, por lo que sólo hay que multiplicarlos por una constante conveniente.

Se define

$$\Delta_i(x) = \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{r_0 \cdots r_{i-1}} v_i(x),$$

ya que entonces se tiene que los polinomios $\Delta_i(x)$ son mónicos y cumplen con la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= 1, \\ \Delta_1(x) &= x + \frac{\lambda_0}{r_0}, \\ \Delta_i(x) &= \left(x + \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{r_{i-1}} \right) \Delta_{i-1}(x) - \frac{\lambda_{i-2} \mu_{i-1}}{r_{i-2} r_{i-1}} \Delta_{i-2}(x) \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ \left(x + \frac{\mu_N}{r_N} \right) \Delta_N(x) - \frac{\lambda_{N-1} \mu_N}{r_{N-1} r_N} \Delta_{N-1}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otra parte, se sabe que dada una matriz tridiagonal, su determinante puede ser calculado de forma recurrente como se muestra a continuación

$$f_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & 0 & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n f_{n-1} - c_{n-1} b_{n-1} f_{n-2}.$$

Si se toma la submatriz de $i \times i$ de $xI - R^{-1}Q^T$, que es una matriz tridiagonal, y se calcula su determinante para cada i se obtiene

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1, \\ f_1(x) &= x + \frac{\lambda_0}{r_0}, \\ f_i(x) &= \left(x + \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{r_{i-1}} \right) f_{i-1}(x) - \frac{\lambda_{i-2} \mu_{i-1}}{r_{i-2} r_{i-1}} f_{i-2}(x) \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ f_N &= \left(x + \frac{\mu_N}{r_N} \right) f_{N-1}(x) - \frac{\lambda_{N-1} \mu_N}{r_{N-1} r_N} f_{N-2}(x), \end{aligned}$$

que es la misma relación de recurrencia que (2.14), por lo que Δ_i puede ser visto como el determinante de la submatriz de $i \times i$ de $xI - R^{-1}Q^T$.

Además, como la sucesión $\{\Delta_i(x)\}_{i=0}^N$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónica, se puede definir $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^N$ a los polinomios núcleo asociados, que por la Definición (1.13) son

$$\Delta_i^*(x) = x^{-1} \left(\Delta_{i+1}(x) - \frac{\Delta_{i+1}(0)\Delta_i(x)}{\Delta_i(0)} \right).$$

Por el segundo inciso del Teorema 1.14, existe una sucesión de números reales $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ tales que para toda $i \geq 1$ $\gamma_1 = 0$

$$-\frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{r_{i-1}} = \gamma_{2i-1} + \gamma_{2i} \quad y \quad \frac{\lambda_{i-1}\mu_i}{r_{i-1}r_i} = \gamma_{2i}\gamma_{2i+1}$$

con $\gamma_{2i+1}\gamma_{2i+2} > 0$.

De esta forma se cumple que

$$\gamma_{2i} = -\frac{\lambda_{i-1}}{r_{i-1}} \quad y \quad \gamma_{2i+1} = -\frac{\mu_i}{r_i}.$$

Usando este resultado y la Proposición 1.16 se obtiene que los polinomios de la sucesión $\{\Delta_i^*\}_{i=0}^N$ cumplen la relación de recurrencia siguiente

$$\begin{aligned} \Delta_0^*(x) &= 1 \\ \Delta_1^*(x) &= x + \frac{\lambda_0}{r_0} + \frac{\mu_1}{r_1} \\ \Delta_i^*(x) &= \left(x + \frac{\lambda_{i-1}}{r_{i-1}} + \frac{\mu_i}{r_i} \right) \Delta_{i-1}^*(x) - \frac{\lambda_{i-1}\mu_{i-1}}{r_{i-1}^2} \Delta_{i-2}^*(x) \quad 2 \leq i \leq N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Usando la fórmula de recurrencia (2.15) en el polinomio $i = N$, y sustituyendo la definición de polinomio núcleo, es posible ver que

$$x\Delta_N^*(x) = \left(x + \frac{\mu_N}{r_N} \right) \Delta_N(x) - \frac{\lambda_{N-1}\mu_N}{r_{N-1}r_N} \Delta_{N-1}(x),$$

que es el polinomio característico de la matriz $R^{-1}Q^T$, es decir

$$\det[xI - R^{-1}Q^T] = \left(x + \frac{\mu_N}{r_N}\right) \Delta_N(x) - \frac{\lambda_{N-1}\mu_N}{r_{N-1}r_N} \Delta_{N-1}(x).$$

Por el Teorema 1.9, como la sucesión $\{\Delta_i^*\}_{n=0}^N$ cumple con la ecuación de recurrencia a tres pasos, entonces representa los primeros $N + 1$ polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales, en particular tienen raíces reales y simples.

D. Mitra en [19] mostró un resultado sobre el número de valores propios y sus signos. Para $R^{-1}Q^T$ definida en (2.5), se puede demostrar que tiene exactamente N_+ valores propios negativos, $N_- - 1$ positivos y el cero como sigue.

Teorema 2.2. *Sea Q el generador infinitesimal de una cadena de nacimiento y muerte y R una matriz diagonal de tasas, N_+ y N_- como en (2.8). Entonces $R^{-1}Q^T$ tiene N_+ valores propios negativos, $N_- - 1$ positivos y el cero.*

Demostración. Se buscan vectores v tal que $R^{-1}Q^T v = xv$ donde $v = (v_0, \dots, v_N)^T$. Como R es diagonal con entradas en la diagonal distintas de cero, existe R^{-1} , por lo que se busca resolver el sistema

$$Q^T v = R x v,$$

que es equivalente a

$$v^T Q = x v^T R.$$

Como Q es tridiagonal, por el Teorema 1.34, es semejante a una matriz tridiagonal simétrica \tilde{Q} , y como las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, se puede trabajar con

$$v^T \tilde{Q} = x v^T R. \tag{2.16}$$

De hecho, el Teorema 1.34 dice que

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \sqrt{\lambda_0\mu_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\lambda_0\mu_1} & -(\lambda_1 + \mu_1) & \sqrt{\lambda_1\mu_2} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \sqrt{\lambda_1\mu_2} & -(\lambda_2 + \mu_2) & \sqrt{\lambda_2\mu_3} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \sqrt{\lambda_{N-2}\mu_{N-1}} & -(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) & \sqrt{\lambda_{N-1}\mu_N} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_{N-1}\mu_N} & -(\lambda_N + \mu_N) \end{pmatrix},$$

de esta manera, $x = 0$ y $v^* = (\sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \dots, \sqrt{\pi_N})$ es solución del sistema. Entonces, por la Proposición 1.37, existe una matriz K no singular, tal que

$$K\tilde{Q}K^T = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -I \end{pmatrix}.$$

Sea

$$A = K R K^T = \begin{pmatrix} e & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^T & M \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde $e = A_{(1,1)}$, \mathbf{w} un vector fila de tamaño N y M la matriz que resulta de quitar la primera fila y la primera columna de A .

Nótese que, como $K\tilde{Q}K^T$ tiene al 0 en la esquina superior izquierda, el primer renglón de K y, por lo tanto, la primera columna de K^T es v^* . Entonces

$$e = (\sqrt{\pi_0}r_0, \sqrt{\pi_1}r_1, \dots, \sqrt{\pi_N}r_N) * (\sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \dots, \sqrt{\pi_N})^T = \sum_{i=0}^N \pi_i r_i,$$

que es la condición de regularidad (2.12), entonces se tiene que cumplir que $e < 0$.

Multiplicando $I = K^{-1}K$ y K^T en (2.16), se tiene que

$$v^T K^{-1} K Q K^T = x v^T K^{-1} K R K^T. \quad (2.18)$$

Sea $\varphi = v^T K^{-1}$, entonces, sustituyendo en la ecuación (2.18)

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -I \end{pmatrix} = x\varphi \begin{pmatrix} e & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^T & M \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Sea $\varphi^{(0)}$ la primera entrada de φ y $\varphi^{(1)}$ el resto de las entradas, es decir, $\varphi = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$, desarrollando el producto de la ecuación (2.19) se tiene que

$$(\mathbf{0}, -\varphi^{(1)}) = (x\varphi^{(0)}e + x\varphi^{(1)}\mathbf{w}^T, x\varphi^{(0)}\mathbf{w} + x\varphi^{(1)}M),$$

por lo que

$$x\varphi^{(0)}e + x\varphi^{(1)}\mathbf{w}^T = 0,$$

entonces

$$\varphi^{(0)} = -\frac{1}{e}\varphi^{(1)}\mathbf{w}^T, \quad (2.20)$$

y

$$-\varphi^{(1)} = x\varphi^{(0)}\mathbf{w} + x\varphi^{(1)}M. \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.21) se tiene que

$$\varphi^{(1)} = -x\varphi^{(1)} \left(M - \frac{1}{e}\mathbf{w}^T\mathbf{w} \right). \quad (2.22)$$

Ahora se tiene que los recíprocos negativos de los valores propios de $M - \frac{1}{e}\mathbf{w}^T\mathbf{w}$ serán las soluciones a x de la ecuación (2.22).

Considérese la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{e}\mathbf{w}^T & I \end{pmatrix},$$

y sea

$$B = LAL^T,$$

donde A es la matriz definida en (2.17), por lo que

$$B = \begin{pmatrix} e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & M - \frac{1}{e}\mathbf{w}^T\mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Como A y B resultan de cambiar la magnitud de los valores propios diferentes

de cero de la matriz R que es no singular, entonces los valores propios de estas dos matrices tienen los mismos signos que los de R , que son N_+ positivos y N_- negativos (Véase Teorema 1.38).

Entonces, como B tiene N_+ valores propios positivos y N_- negativos, si e es menor a 0, por la forma de B se tiene que $M - \frac{1}{e}\mathbf{w}^T\mathbf{w}$ tiene N_+ valores propios positivos y $N_- - 1$ negativos. Es importante notar que el cero ya se excluyó de los valores propios de esta matriz.

Finalmente, tomando el recíproco negativo de los valores propios de $M - \frac{1}{e}\mathbf{w}^T\mathbf{w}$, se tiene que la solución a (2.22) consta de N_+ elementos negativos y $N_- - 1$ positivos, por lo que $R^{-1}Q^T$ tiene N_+ valores propios positivos y $N_- - 1$ negativos.

□

Definiendo ξ_i , $i \in E$, los valores propios de $R^{-1}Q^T$, en orden creciente se tiene que $\xi_i < 0$ para $i = 0, 1, \dots, N_+ - 1$, $\xi_{N_+} = 0$ y $\xi_i > 0$ para $i = N_+ + 1, \dots, N$.

Retomando ahora la ecuación (2.13), se denotará como $v^{(j)}$ al vector propio asociado al j -ésimo valor propio, es decir $v^{(j)} = v(\xi_j)$, con $v_i^{(j)}$ a la i -ésima entrada de dicho vector, $i, j = 0, \dots, N$. Entonces según (2.13) se tiene la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} v_0^{(j)} &= 1, \\ \mu_1 v_1^{(j)} &= r_0 \xi_j + \lambda_0, \\ \mu_i v_i^{(j)} &= (r_{i-1} \xi_j + \lambda_{i-1} + \mu_{i-1}) v_{i-1}^{(j)} - \lambda_{i-2} v_{i-2}^{(j)} \quad i = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Sabiendo ahora que el polinomio característico de $R^{-1}Q^T$ tiene N raíces reales y simples de las cuales N_+ son negativas, $N_- - 1$ son positivas y una es cero, se puede decir que la solución es de la forma (2.7).

Considerando la forma de la solución al sistema y la condición inicial (2.10) se

tiene que

$$p_i = \lim_{y \rightarrow \infty} F_i(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N c_j e^{\xi_j y} v_i^{(j)}.$$

Si pasara que $c_j > 0$ para algún $\xi_j > 0$ el límite anterior sería infinito, pero como $p_i \in [0, 1]$ pues es una probabilidad, eso no puede pasar, por lo que las constantes asociadas a los valores propios positivos deben ser cero, es decir

$$c_j = 0 \quad \text{para todo } \xi_j > 0.$$

Con lo anterior, se pueden eliminar de la solución los términos con valores propios positivos, por lo que la solución ahora se ve como

$$F(y) = \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j e^{\xi_j y} v^{(j)} + c_{N_+} e^{\xi_{N_+} y} v^{(N_+)}, \quad y \geq 0, \quad (2.24)$$

donde se conservan los términos asociados a valores propios negativos y al cero. En (2.24), ξ_{N_+} representa al valor propio cero, considerando de nuevo la condición inicial (2.10) aplicando el límite a cada entrada de la solución

$$\begin{aligned} p_i &= \lim_{y \rightarrow \infty} F_i(y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j e^{\xi_j y} v_i^{(j)} + c_{N_+} e^{\xi_{N_+} y} v_i^{(N_+)} \\ &= c_{N_+} e^{\xi_{N_+} y} v_i^{(N_+)} \\ &= c_{N_+} v_i^{(N_+)}, \end{aligned}$$

por lo que finalmente, la solución por estado puede expresarse como

$$F_i(y) = p_i + \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j e^{\xi_j y} v_i^{(j)}, \quad y \geq 0, \quad (2.25)$$

o en forma matricial

$$F(y) = P + \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j e^{\xi_j y} v^{(j)}, \quad y \geq 0.$$

Donde $P = (p_0, p_1, \dots, p_N)^T$, c_j constantes que pueden ser determinadas a partir de la condición inicial (2.9) que por estado se puede expresar como

$$p_i + \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j v_i^{(j)} = 0 \quad \text{para toda } i \in N^+, \quad (2.26)$$

ξ_j los valores propios de la matriz $R^{-1}Q^T$ que también se pueden determinar a través de los ceros del polinomio $\Delta_N^*(x)$ y $v^{(j)}$ sus correspondientes vectores propios que también se pueden determinar a partir de la fórmula (2.23).

2.4.1. Ejemplo.

El objetivo ahora es observar un ejemplo práctico del comportamiento de la distribución estacionaria $P[X_t = i, C_t \leq y]$. Para ello se tomará una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados finito y una matriz de tasas que cumplan las condiciones necesarias. Se calculará la distribución estacionaria utilizando el método descrito en el principio de esta sección.

Para ver si los resultados se ajustan al comportamiento del proceso, se utilizará el lenguaje de programación Julia para realizar una simulación del proceso y se hará una estimación de la distribución estacionaria para i y y fijas y se comparará con los resultados obtenidos antes.

Con fines prácticos se tomará una cadena de nacimiento y muerte cuyo espacio de estados sea lo mas pequeño que se pueda conservando las propiedades necesarias para el cálculo de la distribución estacionaria. La razón es que la complejidad de los cálculos utilizando el método descrito antes podría causar problemas, además de que el método utilizado para estimar la distribución estacionaria por medio de simulación resulta no ser muy eficaz en tiempo al aumentar tanto el número de estados como el número de simulaciones.

Se considera una cadena de nacimiento y muerte con 4 estados, cuyo generador infinitesimal Q es una matriz de 4×4 y la matriz de tasas R como sigue

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que para este caso el conjunto de estados $E = \{0, 1, 2, 3\}$ está formado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N^+ &= \{1, 3\}, & N_+ &= |N^+| = 2, \\ N^- &= \{0, 2\}, & N_- &= |N^-| = 2, \\ E &= N^+ \cup N^- & \text{ y } & |E| = N_+ + N_-. \end{aligned}$$

Lo que significa que hay dos estados (0 y 2) que tienen asociadas tasas de crecimiento negativas (decrecimiento) y dos estados (1 y 3) que tienen asociadas tasas de crecimiento positivas (crecimiento).

Para la validez del ejemplo, es importante notar que estas matrices cumplen con la condición de regularidad (2.1). Analizando primero el generador del proceso X_t se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 & \pi_1 &= \frac{1}{2} & \pi_2 &= \frac{1}{8} & \pi_3 &= \frac{1}{24}, \\ p_0 &= \frac{3}{5} & p_1 &= \frac{3}{10} & p_2 &= \frac{3}{40} & p_3 &= \frac{1}{40}, \end{aligned}$$

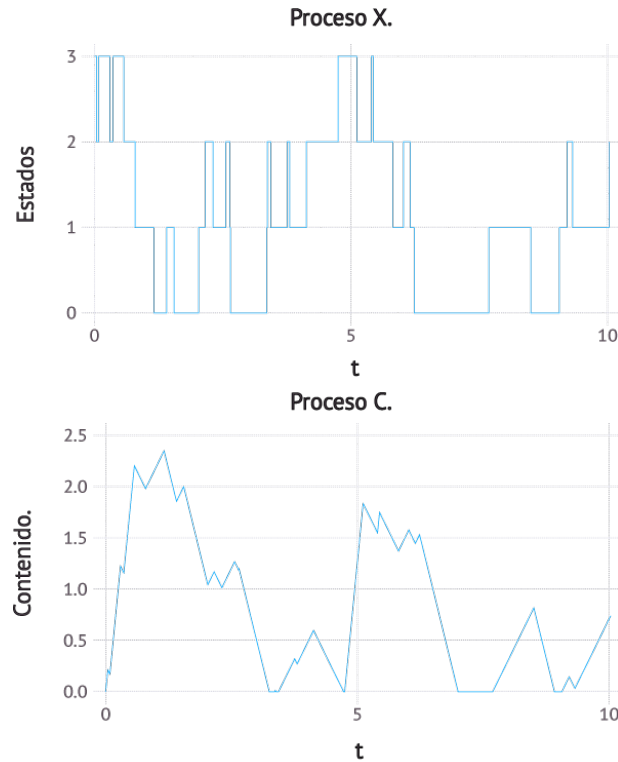
que son las distribuciones estacionarias de la cadena de nacimiento y muerte, de manera que al multiplicarlas por las respectivas tasas r_i se tiene que

$$\sum_{i=0}^3 p_i r_i = \left(\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{3}{10}\right)(1) + \left(\frac{3}{40}\right)(-1) + \left(\frac{1}{40}\right)(5) = -\frac{17}{20} < 0.$$

Esto asegura que la cantidad de fluido del contenedor no es infinita al aumentar el tiempo.

Haciendo una simulación del proceso usando estas matrices, en un periodo corto,

digase $t = 10$, gráficamente el proceso se ve de la siguiente forma:



Obsérvese que, efectivamente, mientras el proceso X_t se mantiene en algún estado con tasa positiva (1 y 3), la cantidad de fluido en el contenedor C aumenta, y durante los periodos que el proceso X_t se encuentra en algún estado con tasa negativa (0 y 2) la cantidad de fluido disminuye. Además, si la cantidad de fluido es cero y el proceso X_t se mantiene en un estado con tasa negativa, la cantidad de fluido también se mantiene en cero.

Ahora, se calculan los valores propios de la matriz a partir de los ceros del polinomio $x\Delta_3^*(x)$, para el cual se necesita calcular los primeros polinomios de la sucesión $\{\Delta_n^*(x)\}$ definida en (2.15) que se ven de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\Delta_0^*(x) &= 1 \\ \Delta_1^*(x) &= x + \frac{3}{2} \\ \Delta_2^*(x) &= x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} \\ \Delta_3^*(x) &= x^3 - \frac{23}{10}x^2 - \frac{133}{10}x - \frac{34}{5}.\end{aligned}$$

Según los resultados descritos en esta sección, el polinomio característico de la matriz $R^{-1}Q^T$ puede verse como $x\Delta_3^*(x)$, por lo que los valores propios de la matriz son los ceros de dicho polinomio, es decir

$$\det[xI - R^{-1}Q^T] = x\Delta_3^*(x).$$

Claramente una de las raíces del polinomio característico es cero, las demás raíces serán calculadas con ayuda de Julia. Se obtiene que los ceros del polinomio característico en este caso, ya en orden creciente y agregando el cero, son

$$\begin{aligned}\xi_0 &\approx -2,257365, \\ \xi_1 &\approx -0,585711, \\ \xi_2 &= 0, \\ \xi_3 &\approx 5,143077.\end{aligned}$$

Obsérvese que esto concuerda con uno de los resultados principales que dice que los valores propios de la matriz $R^{-1}Q^T$ son reales y simples, más aún, hay exactamente N_+ valores propios negativos, $N_- - 1$ valores propios positivos y el cero.

Siguiendo con el procedimiento, para tener la expresión de la distribución estacionaria del proceso conjunto, se necesita tener los vectores propios y ciertas constantes que hagan que se cumplan las condiciones iniciales como se muestra a continuación.

Como la suma de la ecuación (2.25), en este caso, va de cero a 1, basta con calcular los vectores propios asociados a los valores propios negativos ξ_0 y ξ_1 . Para

este fin, se utiliza la fórmula de recurrencia (2.23), obteniendo para ξ_0

$$\begin{aligned} v_0^{(0)} &= 1, \\ v_1^{(0)} &= -\xi_0 + \frac{1}{2} \approx 2,757365, \\ v_2^{(0)} &= \frac{(\xi_0 + 1 + 2)v_1^{(0)} - v_0^{(0)}}{4} \approx 0,2619289392, \\ v_3^{(0)} &= \frac{(-\xi_0 + 2 + 4)v_2^{(0)} - v_1^{(0)}}{6} \approx -0,09908702416, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$v^{(0)} = (1, 2,757365, 0,2619289392, -0,09908702416).$$

Para ξ_1

$$\begin{aligned} v_0^{(1)} &= 1, \\ v_1^{(1)} &= -\xi_1 + \frac{1}{2} \approx 1,085711, \\ v_2^{(1)} &= \frac{(\xi_1 + 1 + 2)v_1^{(1)} - v_0^{(1)}}{4} \approx 0,40530503112, \\ v_3^{(1)} &= \frac{(-\xi_1 + 2 + 4)v_2^{(1)} - v_1^{(1)}}{6} \approx 0,2639184669, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$v^{(1)} = (1, 1,085711, 0,40530503112, 0,2639184669).$$

El siguiente paso es calcular las constantes c_0 y c_1 a partir de la ecuación (2.26) obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} p_1 + c_0 v_1^{(0)} + c_1 v_1^{(1)} &= 0, \\ p_3 + c_0 v_3^{(0)} + c_1 v_3^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} c_0 &\approx -0,06229235184, \\ c_1 &\approx -0,1181136134. \end{aligned}$$

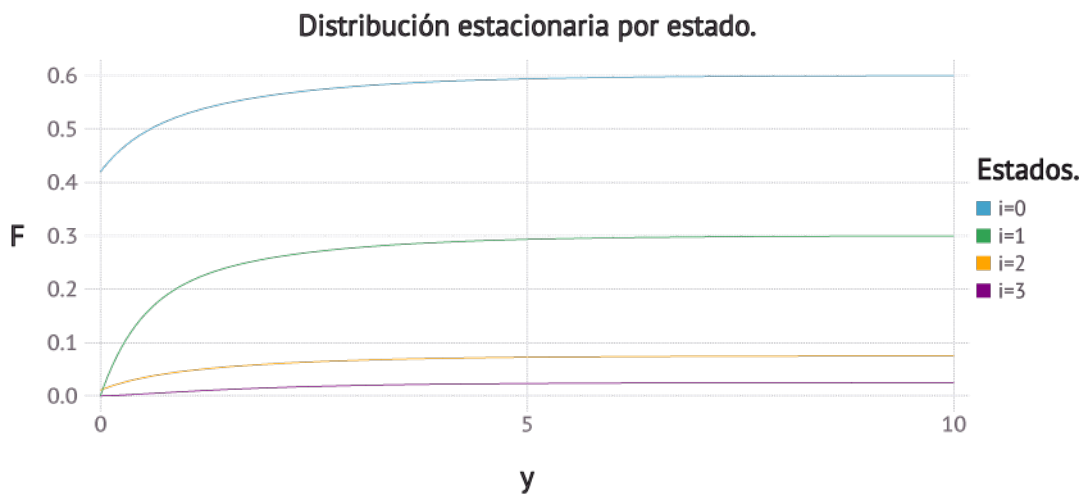
Con lo que finalmente, para i y y fijas, es posible calcular la distribución estacionaria

$$F_i(y) = p_i + c_0 e^{y\xi_0} v_i^{(0)} + c_1 e^{y\xi_1} v_i^{(1)}.$$

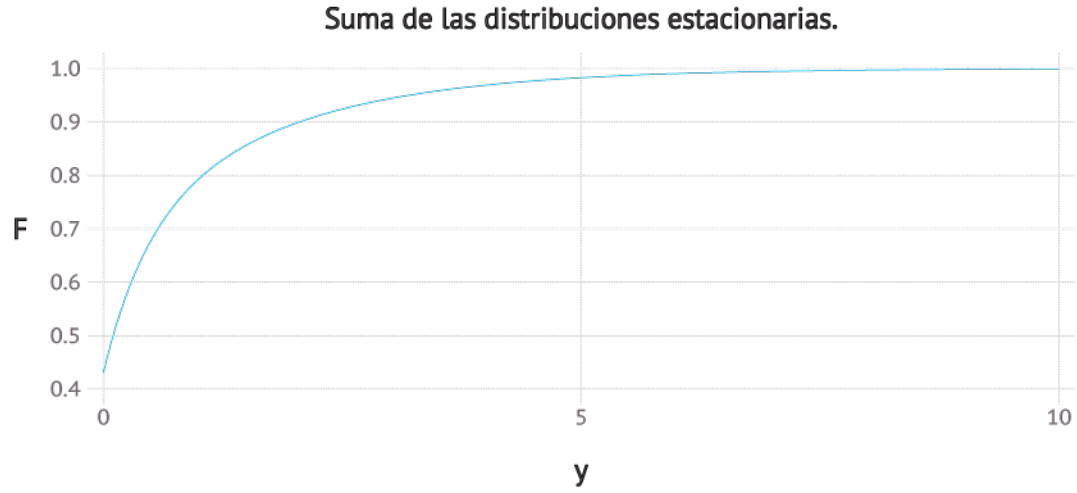
Sustituyendo los valores de p_i , c_i y $v_i^{(j)}$ encontrados antes se encuentra que las distribuciones estacionarias por estado son:

$$\begin{aligned} F_0(y) &= \frac{3}{5} - 0,06229235184e^{-2,257365y} - 0,1181136134e^{-0,585711y} \\ F_1(y) &= \frac{3}{10} - 0,1717627507e^{-2,257365y} - 0,1282372493e^{-0,585711y} \\ F_2(y) &= \frac{3}{40} - 0,01631616964e^{-2,257365y} - 0,04787204175e^{-0,585711y} \\ F_3(y) &= \frac{1}{40} + 0,00617236377e^{-2,257365y} - 0,03117236377e^{-0,585711y}. \end{aligned}$$

La gráfica de estas funciones de distribución es la siguiente:



La gráfica de la suma de estas distribuciones es:



que representa la $P[C_t \leq y]$.

Es claro que al hacer crecer la cantidad de fluido y , las distribuciones estacionarias por estado convergen a su correspondiente probabilidad, es decir

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_i(y) = p_i \quad \forall i \in N.$$

Analizando un poco las gráficas de las distribuciones se puede observar que la probabilidad de que en un tiempo grande con y fija, la probabilidad de estar en el estado cero es siempre mayor que la probabilidad de estar en cualquier otro estado, de hecho, la probabilidad decrece conforme aumenta el estado.

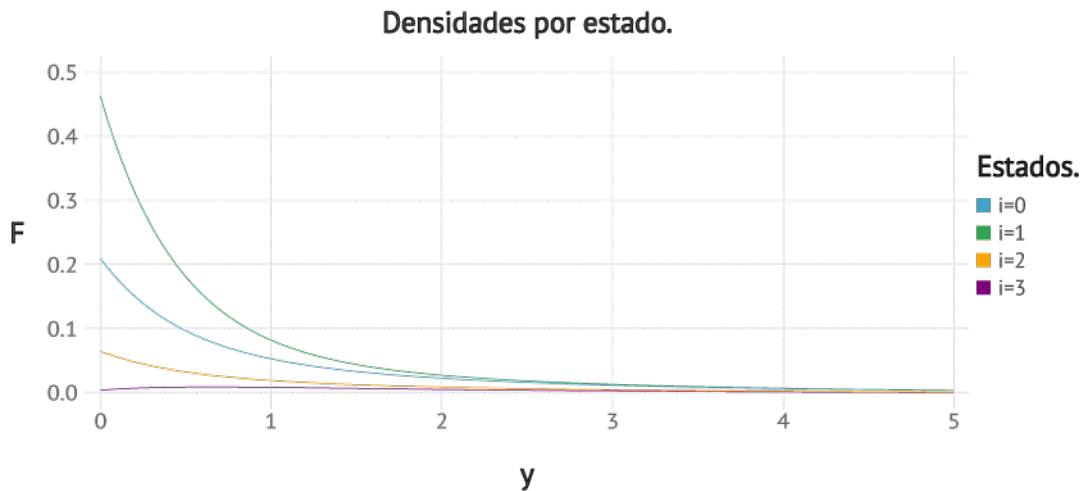
Este hecho se puede ver analizando en un principio el generador infinitesimal Q del proceso X_t y la matriz de tasas R . El generador infinitesimal siempre tiene tasas de nacimiento menores a las tasas de muerte, y de hecho las tasas de muerte son el doble de las tasas de nacimiento. Esto provoca que la cadena de nacimiento y muerte permanezca más tiempo en los primeros estados, más aún, al ir a los estados mayores el proceso regresará al estado cero rápidamente.

Aunado a esto, considerando el hecho de que el estado 0 tiene la menor tasa, es decir, la tasa con la que el contenido decrece más rápidamente, mientras que el estado 3 tiene la tasa de crecimiento más alta, se puede deducir que la cantidad de

fluido no se alejará mucho del cero pues el proceso permanecerá más tiempo en el estado con la tasa de decrecimiento más alta y menos tiempo en el estado con la tasa de crecimiento más alta.

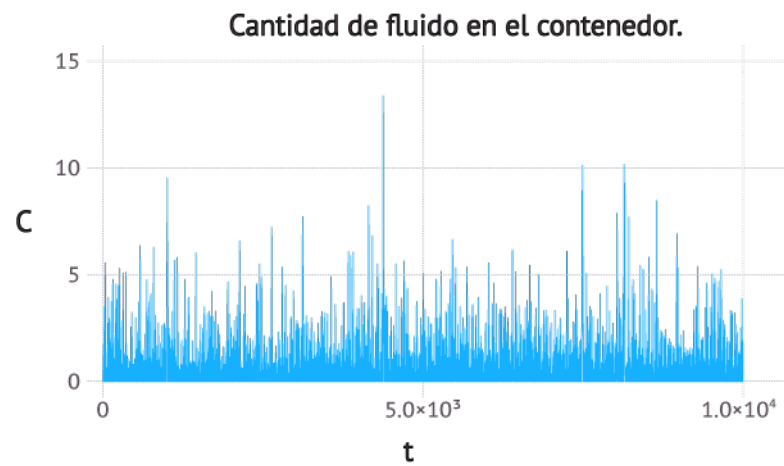
Además, al sumar las cuatro distribuciones se obtiene una función que se puede interpretar como la probabilidad de que la cantidad de fluido sea menor a y , que a partir de 10 ya es muy cercana a uno.

Derivando la expresión para las distribuciones estacionarias, es posible calcular las respectivas densidades por estado. La gráfica es la siguiente:



Tomando en cuenta que las expresiones para las distribuciones estacionarias son combinaciones de exponenciales, tiene sentido que las respectivas densidades tengan la forma de densidades exponenciales y se puede observar que decrecen rápidamente.

Una trayectoria del proceso con $t = 10,000$ se ve como sigue



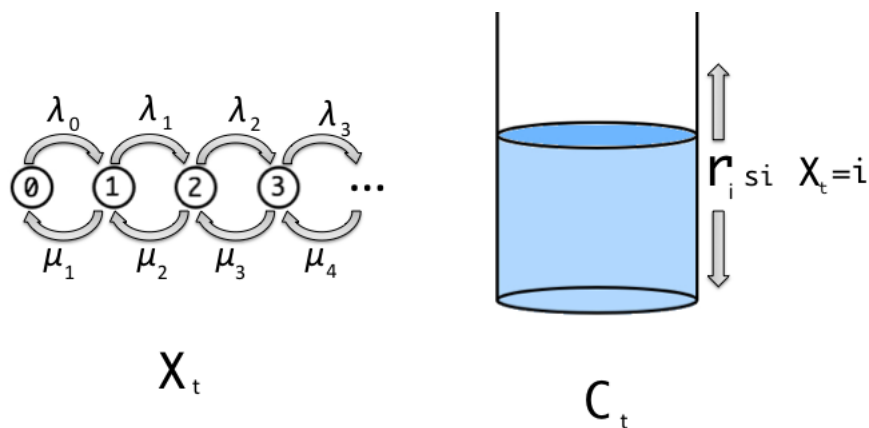
En la gráfica podemos observar que efectivamente el proceso sólo rebasa la cantidad de 10 unidades tres veces y por un periodo de tiempo muy corto. Además de que el contenido siempre se queda cerca de cero y cuando crece, regresa rápidamente a cantidades bajas.

Capítulo 3

Procesos de Fluido Modulado por una cadena de Markov ($N = \infty$)

En este capítulo se analiza el modelo de fluido modulado por una cadena de Markov en el que el proceso modulador X_t es una cadena de nacimiento y muerte con espacio de estados infinito y las tasas de crecimiento del fluido en el depósito C_t son constantes que dependen del estado de la cadena.

Se divide el estudio de este proceso en dos casos generales, el primero en el que el número de estados asociados a una tasa de crecimiento positiva es finito y después el caso en el que el número de estados asociados a una tasa de crecimiento negativa es finito.



3.1. Espacio de estados infinito con $N_+ < \infty$

En esta sección se analizará el caso en el que el espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ es infinito con $N_+ < \infty$, es decir, el número de estados asociados a tasas de crecimiento positivas es finito. De igual forma que en la sección anterior, se busca resolver el sistema (2.3) sujeto a las condiciones iniciales (2.9) y (2.10) ya que para este caso, las dos condiciones tienen sentido.

Para resolver el sistema, como $N_+ < \infty$, es posible aproximar la solución truncando el espacio de estados hasta N suficientemente grande y posteriormente tomar el límite cuando N tiende a infinito.

Sea N natural tal que $N > \max\{N^+\}$, y supondremos que se cumple la condición de regularidad equivalente a (2.1), que en este caso es

$$\sum_{i \in E} p_i r_i < 0.$$

Como $p_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in E} \pi_j}$, para $n > N$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^n \pi_i r_i < 0. \quad (3.1)$$

Entonces el espacio de estados de la cadena de nacimiento y muerte X_t es $E = \{0, 1, \dots, N\}$ y se define $\lambda_N = 0$ de tal forma que el N -ésimo estado sea reflectante.

Obsérvese que bajo estas condiciones se cumple lo mismo que en el caso finito, por lo que, para el sistema con espacio de estados truncado, la solución es de la forma (2.25). Considerando que se tiene una expresión para la solución al sistema, pero esta solución depende del valor de N , se reescribe la solución con notación que lo indique de la siguiente manera

$$F_i^{(N)}(y) = p_i^{(N)} + \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j^{(N)} e^{\xi_j^{(N)} y} v_i^{(N,j)}, \quad y \geq 0 \quad i = 0, \dots, N. \quad (3.2)$$

Como se tomó $N > \max\{N^+\}$, la suma no depende de ella, lo que permite tomar el límite cuando N tiende a infinito. Teniendo en cuenta que se asumió que la distribución estacionaria de la cadena de nacimiento y muerte existe, se cumple que $\sum_{j \in E} \pi_j < \infty$, por lo que se tiene que

$$p_i^{(\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} p_i^{(N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi_i}{\sum_{j=0}^N \pi_j} = p_i \quad i \in E.$$

Recordando que los polinomios $\Delta_i^*(x)$ cumplen la ecuación de recurrencia (2.15), y eliminando la condición de $i \leq N$, se tiene que $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ es una sucesión infinita de polinomios ortogonales. Entonces el polinomio $\Delta_N^*(x)$ es uno de los elementos de dicha sucesión, y tiene N raíces reales que se denotarán en orden creciente por $\xi_0^{(N)}, \xi_1^{(N)}, \dots, \xi_N^{(N)}$.

Por el Corolario 1.5, para cualquier N fija, la sucesión $\{\xi_i^{(N)}\}_{N=i}^\infty$ es decreciente y $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_i^{(N)}$ existe (es posible que sea $-\infty$). Sea $\xi_i^{(\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_i^{(N)}$ para $i = 1, \dots, N$ y $\xi_0^{(\infty)} = -\infty$, la Proposición 1.6 dice que si $\xi_i^{(\infty)} = \xi_{i+1}^{(\infty)}$ para alguna $i \geq 0$, entonces $\xi_i^{(\infty)} = \xi_{i+k}^{(\infty)}$, $k = 1, 2, \dots$

Considerando además que se sabe que $\Delta_N^*(x)$ tiene N raíces reales de las cuales, en orden creciente, las primeras N_+ son negativas, entonces los límites

$$\begin{aligned} \xi_i^{(\infty)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_i^{(N)} \quad i = 0, \dots, N_+ - 1 \text{ existen y} \\ -\infty &< \xi_0^{(\infty)} < \xi_1^{(\infty)} < \dots < \xi_{N_+-1}^{(\infty)} < 0. \end{aligned}$$

Ahora es posible tomar el límite cuando N tiende a infinito en $v_i^{(j)} = \lim_{N \rightarrow \infty} v_i^{(N,j)}$. Entonces el sistema (2.23) se transforma en

$$\begin{aligned}
v_0^{(j)} &= 1 \\
\mu_1 v_1^{(j)} &= r_0 \xi_j^{(\infty)} + \lambda_0 \\
\mu_i v_i^{(j)} &= (r_{i-1} \xi_i^{(\infty)} + \lambda_{i-1} + \mu_{i-1}) v_{i-1}^{(j)} - \lambda_{i-2} v_{i-2}^{(j)} \quad i > 1.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para las constantes, se define $c_j^{(N)}$ como las constantes que dependen del número de estados N y $c_j^{(\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} c_j^{(N)}$ que, como son constantes, existen y son la única solución del sistema (2.26) con los vectores $v_i^{(j)}$ que se obtuvieron a partir de (3.3). Con lo que se tiene lo necesario para tomar el límite en la solución del sistema con número de estados infinito.

Como se cuenta con una expresión para el sistema con espacio de estados truncado y se sabe que los límites de todos sus factores existen, mas aún, se conocen expresiones para ellos, se puede encontrar una solución para el sistema con número de estados infinito (no debe perderse de vista que un supuesto importante es que $N_+ < \infty$) tomando el límite cuando N tiende a infinito en (3.2).

Con lo cual se obtiene que la distribución estacionaria de la cantidad de fluido en el contenedor de un proceso de fluido modulado por una cadena de Markov, donde la cadena tiene espacio de estado E infinito y $N_+ < \infty$ es

$$P[X = i, C \leq y] = F_i(y) = p_i + \sum_{j=0}^{N_+-1} c_j v_i^{(j)} e^{\xi_j^{(\infty)} y}. \tag{3.4}$$

3.1.1. Ejemplo.

Para ejemplificar el caso analizado en esta sección, al igual que en el Capítulo 2 se buscará un caso que simplifique los cálculos. El caso más sencillo que se puede analizar con espacio de estados infinito, es cuando $N_+ = 1$, es decir, sólo existe un estado con tasa de crecimiento positiva. Se hará primero un análisis general de este caso y después un ejemplo numérico.

Considerese el caso en el que

$$r_0 = r_+ > 0 \quad r_i = -r_- < 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

es decir, $N^+ = 1$ y $N_- = \infty$.

De la misma forma, ya que el espacio de estados es infinito, el caso más sencillo para la cadena de nacimiento y muerte es tomar λ y μ constantes, es decir,

$$\lambda_i = \lambda \quad \mu_{i+1} = \mu \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

Obsérvese que en este caso se tiene que la medida estacionaria de la cadena de nacimiento y muerte es

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i.$$

Por cuestiones de notación, se define

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

y

$$\sigma = \frac{r_+}{r_+ + r_-},$$

con lo que se tiene que

$$\pi_i = \rho^i.$$

Por la condición de ergodicidad $\sum_{i \in E} \pi_i < \infty$, se tiene que $\rho < 1$. Además, con la condición de estabilidad (3.1) que es $\sum_{i \in N} \pi_i r_i < 0$, se tiene que

$$\sum_{i \in E} \pi_i r_i = r_+ - r_- \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i < 0,$$

como $\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$, se tiene que

$$r_+ - r_- \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) < 0,$$

si y sólo si

$$r_+ < \rho(r_- + r_+),$$

lo que implica que

$$\frac{r_+}{r_- + r_+} < \rho,$$

por lo tanto,

$$\sigma < \rho < 1. \quad (3.7)$$

Para este caso, el problema principal radica en encontrar $\xi_0^{(\infty)}$, pues la suma que aparece en la solución general del sistema consta únicamente del sumando asociado al único valor propio negativo (véase (3.4)). También se tendrá que encontrar el vector propio asociado y la constante c_0 .

Nótese que $\xi_0^{(\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_0^{(N)}$ donde $\xi_0^{(N)}$ es el cero mas pequeño de $\Delta_N^*(x)$.

Lema 3.1. *La sucesión $\{\xi_0^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ constituye una sucesión estrictamente decreciente con límite*

$$\xi_0^{(\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_0^{(N)} = -\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\mu}{r_+ + r_-}. \quad (3.8)$$

Demostración. Sea

$$T_i(x) = \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^i \Delta_i^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right). \quad (3.9)$$

donde, por en (2.15), la sucesión $\{\Delta_i^*\}_{i=0}^N$ cumple la relación de recurrencia siguiente

$$\begin{aligned} \Delta_0^*(x) &= 1 \\ \Delta_1^*(x) &= x + \frac{\lambda}{r_+} + \frac{\mu}{r_-} \\ \Delta_i^*(x) &= \left(x + \frac{\lambda}{r_-} + \frac{\mu}{r_-} \right) \Delta_{i-1}^*(x) - \frac{\lambda\mu}{r_-^2} \Delta_{i-2}^*(x) \quad 2 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por (3.10), se tiene que

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^0 \Delta_0^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \\
&= 1. \\
T_1(x) &= \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right) \Delta_1^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \\
&= \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right) \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} + \frac{\lambda}{r_+} - \frac{\mu}{r_-} \right) \\
&= 2x + \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho^{-1}} + \sqrt{\rho} \frac{r_-}{r_+} - \sqrt{\rho^{-1}} \\
&= 2x + \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma}. \\
T_2(x) &= \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^2 \Delta_2^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \\
&= \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^2 \left[\left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} - \frac{\lambda}{r_-} - \frac{\mu}{r_-} \right) \Delta_1^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \right] \\
&\quad - \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^2 \left[\frac{\lambda\mu}{r_-^2} \Delta_0^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \right] \\
&= 2x \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right) \Delta_1^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \\
&\quad + \left[\frac{\lambda + \mu}{r_-} - \frac{\lambda}{r_-} - \frac{\mu}{r_-} \right] \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^2 \Delta_1^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} \right) \\
&\quad - \frac{\lambda\mu}{r_-^2} \left(\frac{r_-}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^2 \\
&= 2xT_1(x) - T_0(x).
\end{aligned}$$

De manera recurrente se obtiene que

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= 2x + \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} \\
T_i &= 2xT_{i-1}(x) - T_{i-2}(x), \quad i = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Como además se cumple, por (3.7), que

$$\rho < 1,$$

se tiene que

$$\sqrt{\rho} < 1,$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} > 1.$$

Y como

$$\sigma < \rho,$$

entonces

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\rho}} < \sqrt{\rho},$$

lo que implica que

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} > \frac{1}{\sqrt{\rho}} > 1,$$

por lo tanto $\left| \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} \right| > 1$.

Por el Lema 1.25, $b = -\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma}$, y como $\left| \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} \right| > 1$, la medida con respecto a la cual los polinomios $\{T_i(x)\}$ son ortogonales tiene un único salto de magnitud $1 - \frac{\sigma^2}{\rho}$ en el punto $-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} + \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}} \right)$.

Según el Capítulo II, Sección 4 de [4], si se define la sucesión $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde ζ_i es el cero mas pequeño de $T_i(x)$ se cumple que la sucesión de ceros es estrictamente decreciente y el límite cuando i tiende a infinito coincide con el punto de masa de la medida con respecto a la cual son ortogonales.

Por lo cual el límite es el punto $-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} + \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}} \right)$ para $T_i(x)$.

Como $T_i(x)$ y $\Delta_i^*(x)$ están relacionados por la ecuación (3.9), es posible encontrar el límite $\xi_0^{(\infty)}$ para $\Delta_i^*(x)$ sustituyendo $-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} + \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}} \right)$ en $\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-}$. De esta manera

se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \xi_0^{(\infty)} &= \frac{2 \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma} + \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}} \right) \right) \sqrt{\lambda\mu} + \lambda + \mu}{r_-} = \frac{-\frac{\sqrt{\rho\lambda\mu}}{\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{\lambda\mu}}{\sqrt{\rho}} + \lambda + \mu}{r_-} \\
 &= \frac{-\frac{\lambda}{\sigma} - \sigma\mu + \lambda + \mu}{r_-} = \frac{-\lambda \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) + \mu(1-\sigma)}{r_-} \\
 &= \frac{-\lambda \left(\frac{r_-}{r_+} \right) + \mu \left(\frac{r_-}{r_+ - r_-} \right)}{r_-} = -\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\mu}{r_+ + r_-}.
 \end{aligned}$$

□

Para encontrar el único vector propio involucrado en la solución, que es el vector propio asociado al único valor propio negativo, se sustituye $\xi_0^{(\infty)}$ del Teorema 3.1 en (3.3) obteniendo

$$\begin{aligned}
 v_0^{(0)} &= 1, \\
 v_1^{(0)} &= \sigma, \\
 v_2^{(0)} &= \left(\frac{\lambda}{\mu\sigma} + \sigma \right) v_1^{(0)} - \frac{\lambda}{\mu} v_0^{(0)} = \sigma^2, \\
 v_i^{(0)} &= \left(\frac{\lambda}{\mu\sigma} + \sigma \right) v_{i-1}^{(0)} - \frac{\lambda}{\mu} v_{i-2}^{(0)} = \sigma^i.
 \end{aligned}$$

Para la constante c_0 se debe resolver la ecuación $p_0 + c_0 v_0^{(0)} = 0$, por lo que $c_0 = -p_0$. Donde además $p_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = (1 - \rho)\rho^i$.

Finalmente sustituyendo estos valores en (3.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
 F_i(y) &= (1 - \rho)\rho^i - p_0\sigma^i e^{\left(-\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\mu}{r_+ - r_-}\right)y} \\
 &= (1 - \rho)\rho^i - (1 - \rho)\sigma^i e^{\left(-\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\mu}{r_+ - r_-}\right)y} \\
 &= (1 - \rho) \left(\rho^i - \sigma^i e^{\left(-\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\mu}{r_+ - r_-}\right)y} \right).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

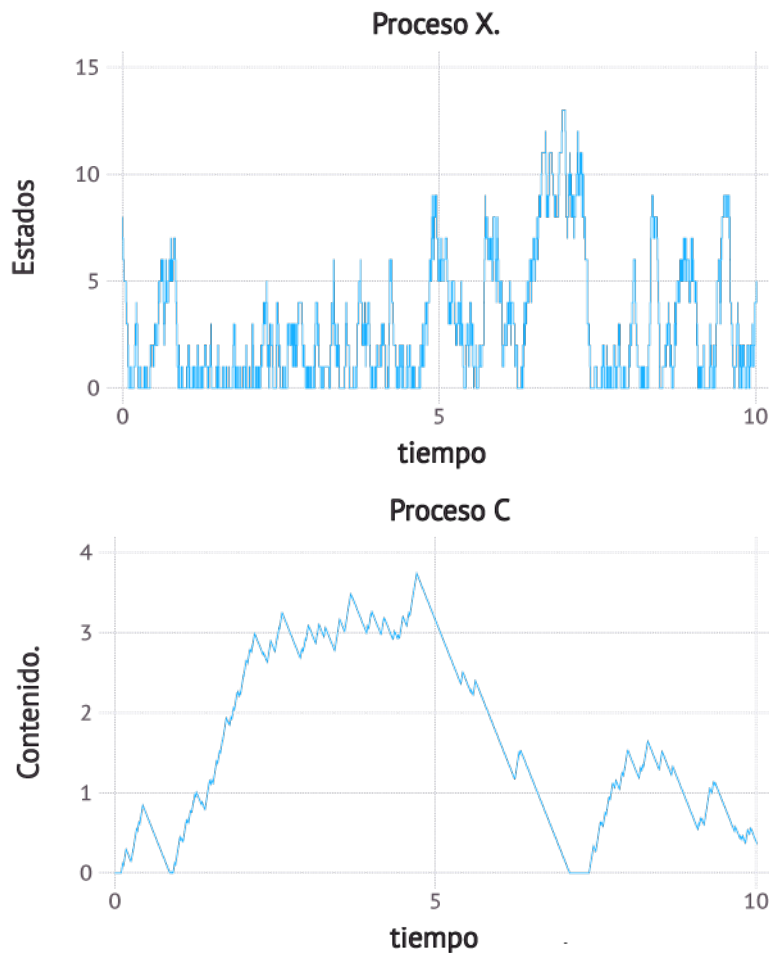
Para el ejemplo numérico, se eligen tasas de muerte y de nacimiento grandes, con

el fin de que el proceso haga cambios de estado rápidos. Ya que el único estado con tasa de crecimiento positiva es el cero, se usará una tasa que haga que el fluido crezca en mayor proporción que la tasa con la que el fluido decrece en todos los demás estados.

Tomando $\lambda = 50$, $\mu = 60$, $r_0 = 5$ y $r_1 = -2$ se tiene que, usando la notación descrita arriba,

$$\sigma = \frac{5}{7}, \rho = \frac{5}{6} \text{ y } \sigma < \rho < 1,$$

por lo que se cumple la condición de estabilidad. Una trayectoria de este proceso se ve de la siguiente forma



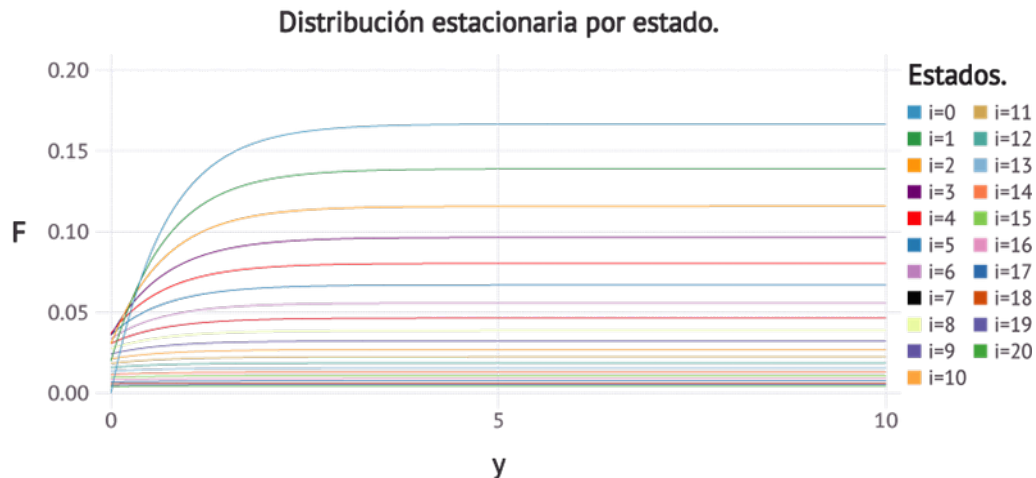
En las gráficas anteriores se puede ver que en los periodos donde la cadena de nacimiento y muerte está en estados mayores a cero por mucho tiempo, el contenido disminuye y se hace cero, mientras que en los intervalos en los que la cadena de nacimiento y muerte permanece saltando constantemente al estado cero, el contenido aumenta rápidamente.

El proceso modulador se mantiene cerca del cero siempre ya que la tasa de nacimiento es más pequeña que la tasa de muerte, lo que provoca que la cadena regrese a los estados iniciales.

Ahora, para calcular las distribuciones estacionarias, se sustituyen los valores necesarios en (3.12) y se encuentra que la distribución estacionaria por estado del proceso conjunto en este caso esta dada por

$$F_i(y) = \left(1 - \frac{5}{6}\right) \left(\left(\frac{5}{6}\right)^i - \left(\frac{5}{7}\right)^i e^{-\frac{10}{7}y} \right). \quad (3.13)$$

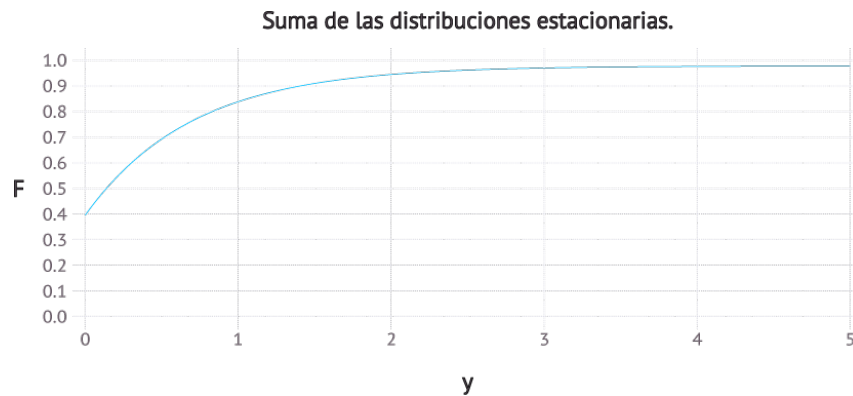
La gráfica de las distribuciones estacionarias para los primeros estados es la siguiente



En la gráfica anterior se observa como al aumentar el estado, la distribución estacionaria se va acercando al eje horizontal. Esto es porque al aumentar el estado la probabilidad de estar en ese estado es muy pequeña cuando t es grande, pues la

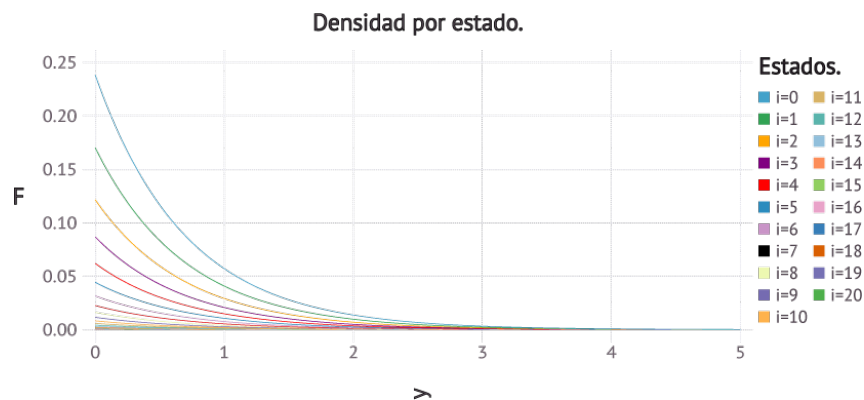
cadena permanece cerca del estado cero.

Si se hace la suma de $F_i(y)$ sobre todos los estados, se obtiene la distribución marginal del proceso C_t , es decir, la probabilidad de que el contenido sea menor a y , la gráfica de la suma de las primeras distribuciones es la siguiente:



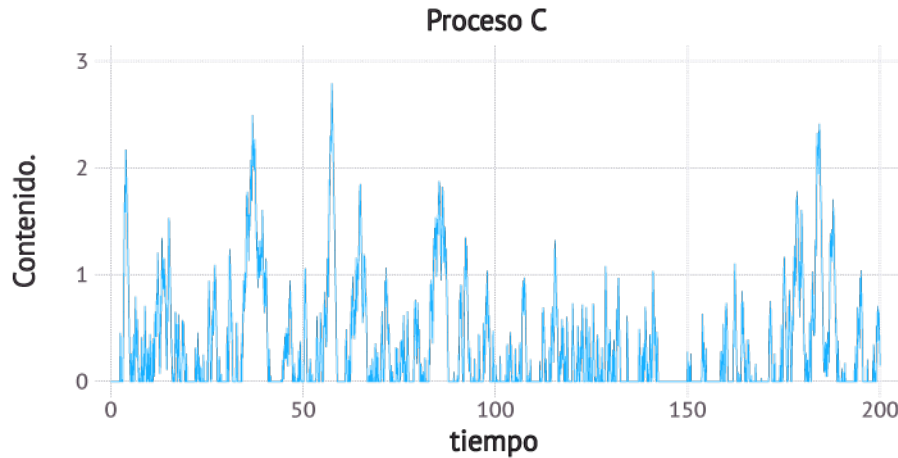
Se puede ver que en cero es muy cercana a 0.4. Se observa también que la probabilidad aumenta rápidamente, de manera que al llegar a 4 es casi uno, lo que quiere decir que la cantidad de fluido en el contenedor será siempre pequeña, pues la probabilidad de ser menor a 5 es casi uno. Esto tiene sentido considerando que sólo el primer estado tiene tasa de crecimiento positiva, y que el proceso modulador se mantiene cerca del primer estado.

La siguiente es la gráfica de las densidades que se obtienen al derivar las expresiones encontradas para las distribuciones estacionarias por estado.



Se puede observar que al igual que las distribuciones, las densidades van decreciendo conforme aumenta el estado, además de que también tienen la forma de densidades exponenciales y decrecen rápidamente.

Una trayectoria del proceso C_t con $t = 200$ es la siguiente:



donde se puede observar que el proceso nunca rebasa la cantidad de tres unidades de fluido.

3.2. Espacio de estados infinito con $N_- < \infty$

En esta Sección se considerará el caso en el que la cadena de nacimiento y muerte que regula las tasas de crecimiento tiene espacio de estados infinito $E = \{0, 1, \dots\}$ y $N_- < \infty$, es decir, los estados asociados a tasas de crecimiento negativas son finitos, lo que implica que los estados asociados a tasas de crecimiento positivas son infinitos, esto es, $N_+ = \infty$.

Se presentará una aproximación a la solución del sistema (2.3) encontrando una solución que sea única para cada estado y después se buscará una combinación lineal de estas soluciones que satisfagan las condiciones iniciales del sistema original (2.9) y (2.10).

Se debe solucionar el sistema (2.3) que consta de un número infinito de ecuaciones, como se busca una solución para cada estado $j \in E$, y además se supondrá que dicha solución es única, entonces cada solución está sujeta a la condición

$$F_i^{(j)}(0) = \delta_{i,j} \quad i \in E, \quad (3.14)$$

donde precisamente $F_i^{(j)}$ representa la solución para el estado j .

Sea $\mathcal{F}(y)$ la matriz con entrada (i, j) igual a $F_i^{(j)}(y)$ con $i, j \in E$, es decir, la matriz que tiene en sus columnas las soluciones por estado para el sistema (2.3). Entonces el sistema a resolver para este caso es

$$\mathcal{F}'(y) = R^{-1}Q^T \mathcal{F}(y),$$

donde $R = \text{diag}(r_0, r_1, \dots)$ y Q el generador infinitesimal del proceso X_t con espacio de estados infinito que se ve de la siguiente manera

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Como se busca una solución única por estado, por (3.14) la condición inicial que se debe satisfacer es

$$\mathcal{F}(0) = I,$$

donde I representa a la matriz identidad.

Dada la forma del sistema a resolver, una primera forma de la solución es

$$\mathcal{F}(y) = e^{yR^{-1}Q^T} = \sum_{k=0}^{\infty} (R^{-1}Q^T)^k \frac{y^k}{k!}$$

que entrada a entrada es

$$F_i^{(j)}(y) = e^{yR^{-1}Q^T} = \sum_{k=0}^{\infty} (R^{-1}Q^T)_{i,j}^k \frac{y^k}{k!} \quad i, j \in E. \quad (3.15)$$

Por otro lado, se puede considerar los polinomios $P_i(x)$ que cumplen la ecuación $xP(x) = P(x)R^{-1}Q^T$, y entrada a entrada, si

$$P(x) = (P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots),$$

se cumple que

$$xP_i(x) = \sum_{j \in E} (R^{-1}Q^T)_{ji} P_j(x) \quad i \in E.$$

Además cumplen la ecuación de recurrencia siguiente

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ \frac{\lambda_0}{r_1} P_1(x) &= x + \frac{\lambda_0}{r_0}, \\ \frac{\lambda_{i-1}}{r_i} P_i(x) &= \left(x + \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{r_{i-1}} \right) P_{i-1}(x) - \frac{\mu_{i-1}}{r_{i-2}} P_{i-2}(x) \quad i = 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Al igual que para el caso finito, se puede demostrar por inducción que

$$x^n P_i(x) = \sum_{j \in E} (R^{-1}Q^T)_{ji}^n P_j(x) \quad i \in E, \text{ para toda } n = 0, 1, \dots$$

Usando la fórmula anterior y la expresión en serie de Taylor alrededor del cero de la función exponencial se tiene que

$$\begin{aligned} e^{xy} P_i(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy)^n}{n!} P_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} x^n P_i(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \sum_{j \in E} (R^{-1}Q^T)_{ji}^n P_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} (R^{-1}Q^T)_{ji}^n \frac{y^n}{n!} P_j(x). \end{aligned}$$

Obsérvese que, como la matriz $R^{-1}Q^T$ es tridiagonal, la suma sólo tiene tres sumandos, por lo que es convergente de manera que las sumas se pueden intercambiar

y usando la forma de la solución que se obtuvo en (3.15) se obtiene

$$e^{xy} P_i(x) = \sum_{j \in E} \sum_{n=0}^{\infty} (R^{-1}Q^T)_{ji}^n \frac{y^n}{n!} P_j(x) = \sum_{j \in E} F_j^{(i)}(y) P_j(x). \quad (3.17)$$

Además, como se muestra en el Lema siguiente, la sucesión $\{P_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ está en \mathcal{C} , es decir, constituye una sucesión de polinomios asociados a una sucesión de cadenas.

Se puede encontrar la sucesión de polinomios núcleo asociada a $\{P_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ que resulta ser la sucesión $\{\Delta_i^*(x)\}$ definida en (2.15) con $N = \infty$. Esta sucesión es ortogonal con respecto al producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\psi^*(dx), \quad (3.18)$$

donde ψ^* es una medida positiva en \mathbb{R} (véase Teorema 1.18).

El siguiente Lema brinda un resultado importante sobre los polinomios $P_i(x)$, pues se puede encontrar una igualdad que los dota de una especie de ortogonalidad bajo las condiciones antes mencionadas.

Lema 3.2. *Si la sucesión $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto a una única medida positiva con momento de orden finito -1 (en el sentido de que $\psi^*({0}) = 0$ y las integrales $\int_{-\infty}^{0^-} x^{-1}\psi^*(dx)$ y $\int_{0^+}^{\infty} x^{-1}\psi^*(dx)$ convergen) entonces existe una medida signada ψ de masa total 1 tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_i(x)P_j(x)\psi(dx) = \frac{r_i}{r_0\pi_i} \delta_{ij} \quad i, j \in E.$$

Si $r_0 < 0$, la masa de ψ en el eje positivo es positiva y la masa en el eje negativo es negativa. Lo contrario si $r_0 > 0$.

Demostración. Con $N = \infty$ se tiene que la sucesión $\{\Delta_i(x)\}$ definida en (2.14)

cumple la siguiente relación

$$\begin{aligned}
\Delta_0(x) &= 1 = P_0(x), \\
\Delta_1(x) &= x + \frac{\lambda_0}{r_0} = \frac{\lambda_0}{r_1} P_1(x), \\
\Delta_2(x) &= \left(x + \frac{\lambda_1 + \mu_1}{r_1} \right) P_1(x) - \frac{\lambda_0 \mu_1}{r_0 r_1} P_0(x) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{r_1 r_2} P_2(x), \\
\Delta_i(x) &= \left(x + \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{r_{i-1}} \right) P_{i-1}(x) - \frac{\lambda_{i-2} \mu_{i-1}}{r_{i-2} r_{i-1}} P_{i-2}(x) = \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1}}{r_k} P_i(x).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Entonces

$$P_i(x) = \prod_{k=1}^i \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \Delta_i(x). \tag{3.20}$$

Por el Teorema 1.14 la sucesión infinita $\{\Delta_i(x)\}_{i=0}^\infty$ está en \mathcal{C} , es decir, es una sucesión de polinomios asociada a una sucesión de cadenas, por lo que la sucesión $\{P_i(x)\}_{i=0}^\infty$ también lo es y $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ su correspondiente sucesión de polinomios núcleo asociados que satisface la relación de recurrencia (2.15).

Por hipótesis, la sucesión $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ es ortogonal con respecto a una única medida positiva ψ^* . Cuando $r_0 < 0$, la medida ψ^* se normaliza del tal forma que tenga masa total $-\frac{\lambda_0}{r_0}$ que, por hipótesis tiene momento finito de orden -1, por lo que por el Teorema 1.18 existe una medida signada ψ respecto a la cual los polinomios $\{\Delta_i(x)\}$ son ortogonales. En consecuencia los polinomios $\{P_i(x)\}$ también son ortogonales con respecto a ψ .

Cuando $r_0 > 0$, haciendo la misma normalización de ψ^* , resulta ser una medida negativa, por lo que se puede aplicar el mismo Teorema 1.18 con el signo contrario.

Por la Proposición 1.7 se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i(x) \Delta_j(x) \psi(dx) = \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1} \mu_k}{r_{k-1} r_k} \delta_{ij},$$

por lo que sustituyendo en (3.20) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} P_i(x)P_j(x)\psi(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^i \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \Delta_i(x) \prod_{m=1}^j \frac{r_m}{\lambda_{m-1}} \Delta_j(x)\psi(dx) \\
 &= \prod_{k=1}^i \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \prod_{m=1}^j \frac{r_m}{\lambda_{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i(x)\Delta_j(x)\psi(dx) \\
 &= \prod_{k=1}^i \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \prod_{m=1}^j \frac{r_m}{\lambda_{m-1}} \prod_{n=1}^i \frac{\lambda_{n-1}\mu_n}{r_{n-1}r_n} \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que el caso en el que $i \neq j$ el resultado es cero, por lo que interesa saber el valor de la constante cuando $i = j$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} P_i(x)P_i(x)\psi(dx) &= \prod_{k=1}^i \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \frac{\lambda_{k-1}\mu_k}{r_{k-1}r_k} \delta_{ii} \\
 &= \prod_{k=1}^i \frac{r_k\mu_k}{r_{k-1}\lambda_{k-1}} \\
 &= \frac{r_1 \dots r_i \mu_1 \dots \mu_i}{r_0 \dots r_{i-1} \lambda_0 \dots \lambda_{i-1}} \\
 &= \frac{r_i \mu_1 \dots \mu_i}{r_0 \lambda_0 \dots \lambda_{i-1}} \\
 &= \frac{r_i}{r_0 \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i}} \\
 &= \frac{r_i}{r_0 \pi_i}.
 \end{aligned}$$

Con lo que se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_i(x)P_j(x)\psi(dx) = \frac{r_i}{r_0 \pi_i} \delta_{ij} \quad i, j \in E.$$

□

Nótese que el Lema 3.2 habla sobre un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con respecto al cual los polinomios $\{P_i(x)\}$ son ortogonales. Usando propiedades del producto interior y la ecuación (3.17) se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle e^{xy} P_j(x), P_i(x) \rangle &= \left\langle \sum_{k \in E} F_k^{(i)}(y) P_j(x), P_i(x) \right\rangle \\
&= \sum_{k \in E} F_k^{(i)}(y) \langle P_j(x), P_i(x) \rangle \\
&= \sum_{k \in E} F_k^{(i)}(y) \frac{r_i}{r_0 \pi_i} \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Como dicho producto interior está definido por la integral del Lema 3.2, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} P_j(x) P_i(x) \psi(dx) = F_i^{(j)} \frac{r_i}{r_0 \pi_i}$$

y despejando $F_i^{(j)}$

$$F_i^{(j)} = \frac{r_0 \pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} P_j(x) P_i(x) \psi(dx) \quad y \geq 0, \quad i \in E,$$

que es la solución al sistema para el estado $j \in E$. Como lo que se busca es una solución al sistema general, sin depender de un estado, se agregan las condiciones iniciales originales (2.9) y (2.10). Entonces se busca una expresión para la solución que sea combinación lineal de las soluciones por estado, por lo que se buscan constantes a_j , $i \in E$ tal que

$$F_i(y) = \sum_{j \in E} a_j F_i^{(j)}(y) \quad i, j \in E \quad y \geq 0. \quad (3.21)$$

Con (3.21) y agregando la condición (3.14) sobre cada estado se tiene que

$$F_i(0) = a_i \quad i \in E.$$

Además por la condición (2.9) se tiene que

$$F_i(0) = a_i = 0 \quad i \in N^+. \quad (3.22)$$

Como se está analizando el caso en que $N_+ = \infty$, por (3.22) se tiene que en (3.21) todas las constantes a_i , $i \in N^+$ se anulan, lo que hace que $F_i(y)$ sea finita y

sustituyendo las soluciones por estado

$$\begin{aligned} F_i(y) &= \sum_{j \in N^-} a_j F_i^{(j)}(y) \\ &= \sum_{j \in N^-} a_j \frac{r_0 \pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} P_j(x) P_i(x) \psi(dx) \\ &= \frac{r_0 \pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} P_i(x) \left(\sum_{j \in N^-} a_j P_j(x) \right) \psi(dx) \quad y \geq 0, i \in E. \end{aligned}$$

Ahora el problema es encontrar las constantes a_j , que puede no ser sencillo. Se tiene el siguiente Lema.

Lema 3.3. *La parte de la medida ψ concentrada en el eje positivo consiste de $N_- - 1$ puntos de masa aislados.*

Demostración. Dado que existe una relación entre el soporte de una medida positiva y los ceros de los polinomios que son ortogonales con respecto a dicha medida, se analizarán los ceros de los polinomios $\{\Delta_i^*(x)\}$ para obtener información sobre el soporte de la medida ψ^* que está estrechamente relacionada con ψ .

Sea $i \geq \max\{N_-\}$, x_{ij} el j -ésimo cero del polinomio $\Delta_i(x)$ y x_{ij}^* el j -ésimo cero de $\Delta_i^*(x)$, $j = 0, \dots, i$. Por el Teorema 1.19, el polinomio $\Delta_i(x)$ tiene N_- raíces positivas, más aún, en orden creciente se tiene que

$$x_{i,1} < x_{i,2} < \dots < x_{i,i-N_-} < 0 < x_{i,i-N_-+1} < \dots < x_{i,i}$$

y por el Teorema 1.20, los ceros de $\Delta_i^*(x)$ están separados por los ceros de $\Delta_i(x)$, es decir

$$x_{i,j-1} < x_{i,j}^* < x_{i,j} \quad j = 1, \dots, i$$

donde $x_{i,0} = -\infty$.

Obsérvese que como $\Delta_i^*(x)$ es un polinomio mónico, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_i^*(x) = \infty$. Supóngase que N_- es un número par. Si $\Delta_i^*(0) < 0$, como $\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_i^*(x) = \infty$ el poli-

nomio $\Delta_i^*(x)$ debe cruzar la parte positiva del eje x un número impar de veces, como hay N_- ceros de $\Delta_i(x)$ en la parte positiva y estos separan a los ceros de $\Delta_i^*(x)$, entonces hay $N_- - 1$ ceros de $\Delta_i^*(x)$ en la parte positiva del eje x , entonces el cero $i - (N_- - 1)$ está en la parte negativa, es decir, $x_{i,i-N_-+1}^* < 0$.

Por el contrario, si $x_{i,i-N_-+1}^* < 0$, entonces quiere decir que hay $N_- - 1$ ceros de $\Delta_i^*(x)$ en la parte positiva del eje x , como $\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_i^*(x) = \infty$, debe pasar que $\Delta_i^*(0) < 0$. Siguiendo el mismo razonamiento, si N_- es un número impar y $x_{i,i-N_-+1}^* < 0$ implica que $\Delta_i^*(0) > 0$ y viceversa.

Por lo que $x_{i,i-N_-+1}^* < 0$ si y sólo si $\text{signo}(\Delta_i^*(0))$ es igual a $(-1)^{N_- - 1}$. Es posible probar por inducción que $\text{signo}(\Delta_i^*(0)) = (-1)^{N_-} \text{signo}(\sum_{k=0}^i \pi_k r_k)$.

Como $i \geq \max\{N_-\}$, es posible encontrar i suficientemente grande tal que

$$x_{i,1}^* < \dots < x_{i,i-N_-+1}^* < 0 < x_{i,i-N_-+2}^* < \dots < x_{i,i}^*,$$

por lo que $\Delta_i^*(x)$ tiene $N_- - 1$ ceros positivos. Sea $\text{sop}(\psi^*)$ el soporte de ψ^* , $\zeta_{N_-} = \infty$ y los límites $\zeta_j = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,i-N_-+j+1}^*$, $j = 1, \dots, N_- - 1$ que por el Teorema 1.4 existen en $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Por el Corolario 1.5 se sabe que la sucesión $\{x_{i,i-k+1}^*\}_{k=0}^{\infty}$ es creciente, y de hecho

$$0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_{N_- - 1} < \zeta_{N_-} = \infty, \quad (3.23)$$

y por la Proposición 1.6 si $\zeta_k = \zeta_{k+1}$ para alguna k , entonces $\zeta_k = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,i-N_-+1}^*$ lo que no puede pasar pues no se cumpliría (3.23).

En el Capítulo 2, Sección 4 de [4] se muestra que $\text{sop}(\psi^*) \cap \mathbb{R}^+ \setminus \{\zeta_0, \dots, \zeta_{N_- - 1}\} = \emptyset$ y que al menos un punto del soporte de ψ^* está en el intervalo $(x_{i,j}^*, x_{i,j+1}^*)$, $j = 1, \dots, i$ con $x_{i,i+1}^* = \infty$. Entonces $\text{sop}(\psi^*) \cap \mathbb{R}^+ = \{\zeta_0, \dots, \zeta_{N_- - 1}\}$. Por el Teorema 1.18, el $\text{sop}(\psi) = \text{sop}(\psi^*) \cup \{0\}$, entonces ψ tiene $N_- - 1$ puntos de masa en el eje positivo. \square

Con el Lema 3.3, como los puntos de masa $\zeta_1, \dots, \zeta_{N_- - 1}$ de la medida ψ están en el eje positivo y $F_i(y)$ es una probabilidad, los límites de la integral en la expresión

de $F_i(y)$ deben ser $-\infty$ y 0 , mientras que las constantes a_j deben ser tales que

$$\sum_{j \in N^-} a_j P_j(\zeta_k) = 0 \quad k = 1, \dots, N_- - 1.$$

Además, como se busca que la cantidad de fluido esté en equilibrio, debe pasar que la cantidad de fluido que entra sea igual a la cantidad de fluido que sale. Esto se puede representar con la siguiente ecuación

$$\sum_{j \in N^+} p_j r_j = - \sum_{j \in N^-} (p_j - a_j) r_j,$$

donde el lado izquierdo de la igualdad representa la cantidad de fluido que entra pues se cuenta sobre N^+ , que es el conjunto de estados con tasas de crecimiento positivas, mientras que el lado derecho representa la cantidad de fluido que sale pues cuenta sobre N^- que es el conjunto de estados con tasas negativas.

Despejando y sustituyendo la definición de p_i en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N^-} a_j r_j &= \sum_{j \in N^+} p_j r_j + \sum_{j \in N^-} p_j r_j \\ &= \sum_{j \in E} p_j r_j \\ &= \sum_{j \in E} \frac{\pi_j r_j}{\sum_{k \in E} \pi_k} \\ &= \frac{\sum_{j \in E} \pi_j r_j}{\sum_{k \in E} \pi_k}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Proposición 3.4. Sea $P_i(y)$ definida como en (3.16), entonces $P_i(0) = \frac{r_i}{r_0}$ para toda $i \in N$.

Demostración. Por inducción. Para $i = 1$ es claro pues $P_0(0) = 1 = \frac{r_0}{r_0}$.

Supóngase que se cumple para $i < k$ que $P_i(0) = \frac{r_i}{r_0}$.

Por demostrar que se cumple para $i = k$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
P_k(0) &= \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \left[\left(\frac{\lambda_{k-1} + \mu_{k-1}}{r_{k-1}} \right) \frac{r_{k-1}}{r_0} - \left(\frac{\mu_{k-1}}{r_{k-2}} \right) \frac{r_{k-2}}{r_0} \right] \\
&= \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \left[\frac{\lambda_{k-1} + \mu_{k-1}}{r_0} - \frac{\mu_{k-1}}{r_0} \right] \\
&= \frac{r_k}{\lambda_{k-1}} \left[\frac{\lambda_{k-1}}{r_0} \right] \\
&= \frac{r_k}{r_0}.
\end{aligned}$$

□

Regresando a (3.24), por la Proposición 3.4 se tiene que $r_j = r_0 P_j(0)$, entonces

$$\sum_{j \in N^-} a_j r_j = r_0 \sum_{j \in N^-} a_j \frac{r_0 P_j(0)}{r_0} = r_0 \sum_{j \in N^-} a_j P_j(0),$$

por lo que

$$r_0 \sum_{j \in N^-} a_j P_j(0) = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j r_j}{\sum_{k \in E} \pi_k}. \quad (3.25)$$

Teorema 3.5. *Bajo las condiciones del Lema 3.2, la medida ψ^* bajo la cual los polinomios $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ son ortogonales cumple*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} \psi^*(dx) = 1 - \frac{r_0}{\sum_{j=0}^{\infty} r_j \pi_j}.$$

Demostración. Sea ψ^* la medida con respecto a la cual la sucesión $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ es una sucesión de polinomios ortogonales, donde $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ cumple la ecuación de recurrencia (2.15). Entonces existe una medida positiva con masa total igual a 1 con respecto la cual son ortogonales, de hecho esta medida resulta ser $\phi(dx) = -\frac{r_0}{\lambda_0} \psi^*(dx)$, ya que ψ^* está parametrizada de manera que tenga masa total $-\frac{\lambda_0}{r_0}$.

Para $n = 1, 2, \dots$ se construye una medida discreta ϕ_n de manera que su k -ésimo momento sea igual al k -ésimo momento de ϕ , $k = 0, \dots, 2n - 1$. En particular se define a ϕ_n en los puntos de masa de ϕ como $1/\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\Delta}_j^*(x_{nk})$, $k = 1, \dots, n$, donde $\{\tilde{\Delta}_j^*(x)\}_{j=0}^\infty$ es la sucesión de polinomios ortonormales asociados a $\{\Delta_j^*(x)\}_{j=0}^\infty$ y x_{nk}

el k -ésimo cero del polinomio $\Delta_n^*(x)$.

Por el método de momentos del Capítulo 2, Sección 6 de [4], se sabe que ϕ_n converge débilmente a ϕ cuando n tiende a infinito. Entonces para $s \notin \text{sop}(\phi)$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(dx)}{s-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_n(dx)}{s-x}. \quad (3.26)$$

Por el Teorema 4.3 de la Sección 3 de [4] (Teorema de Markov)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_n(dx)}{s-x} = \frac{\tilde{\Delta}_{n-1}^{*(1)}(s)}{\tilde{\Delta}_n^*(s)} = \frac{\Delta_{n-1}^{*(1)}(s)}{\Delta_n^*(s)} \quad (3.27)$$

donde $\{\tilde{\Delta}_n^{*(1)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\Delta_n^{*(1)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son los correspondientes polinomios numeradores definidos en (1.8) asociados a $\{\tilde{\Delta}_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\Delta_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ respectivamente.

Lema 3.6. Sea $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^{\infty}$ la sucesión de polinomios ortogonales definida en (2.15), entonces se cumple que

$$\Delta_n^*(0) = \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{r_0 \cdots r_n} \sum_{i=0}^n r_i \pi_i, \quad \text{para toda } n = 1, 2, \dots$$

Demostración. Por inducción. Para $n=1$ se tiene que

$$\Delta_1^*(0) = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\lambda_0}{r_0} = \frac{\mu_1}{r_0 r_1} \left[r_0 + \frac{r_1 \lambda_0}{\mu_1} \right] = \frac{\mu_1}{r_0 r_1} \sum_{i=0}^1 r_i \pi_i.$$

Supóngase que para $k < n$ se cumple que

$$\Delta_k^*(0) = \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{r_0 \cdots r_k} \sum_{i=0}^k r_i \pi_i.$$

Por demostrar que se cumple para n

$$\Delta_n^*(0) = \left(\frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} + \frac{\mu_n}{r_n} \right) \Delta_{n-1}^*(0) - \frac{\lambda_{n-1} \mu_{n-1}}{r_{n-1}^2} \Delta_{n-2}^*(0),$$

usando la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta_n^*(0) &= \left(\frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} + \frac{\mu_n}{r_n} \right) \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{r_0 \cdots r_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \pi_i, - \frac{\lambda_{n-1} \mu_{n-1}}{r_{n-1}^2} \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-2}}{r_0 \cdots r_{n-2}} \sum_{i=0}^{n-2} r_i \pi_i \\
&= \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{r_0 \cdots r_{n-1}} \left[\frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \pi_i + \frac{\mu_n}{r_n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \pi_i - \frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} r_i \pi_i \right] \\
&= \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{r_0 \cdots r_{n-1}} \left[\lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \frac{\mu_n}{r_n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \pi_i \right] \\
&= \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{r_0 \cdots r_{n-1}} \left[\frac{\mu_n}{r_n} r_n \pi_n + \frac{\mu_n}{r_n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \pi_i \right] \\
&= \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{r_0 \cdots r_n} \sum_{i=0}^n r_i \pi_i.
\end{aligned}$$

En la quinta igualdad se usa la definición de π_n desarrollada como

$$\pi_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \pi_{n-1}. \quad (3.28)$$

□

Lema 3.7. Sea $\{\Delta_i^*(x)\}_{i=0}^\infty$ como en el Lema 3.6 y $\{\Delta_i^{*(1)}(x)\}_{i=0}^\infty$ su correspondiente sucesión de polinomios numeradores, entonces

$$\Delta_{n-1}^{*(1)}(0) = \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_0 r_1 \cdots r_n} \sum_{i=1}^n r_i \pi_i, \text{ para toda } n = 1, 2, \dots$$

Demostración. Para $n = 2$ se tiene que

$$\Delta_1^{*(1)}(0) = \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{\lambda_1}{r_1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_0 r_1 r_2} \left[\frac{r_1 \lambda_0}{\mu_1} + \frac{r_2 \lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \right] = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_0 r_1 r_2} \sum_{i=1}^2 r_i \pi_i.$$

Supóngase que se cumple para $k < n - 1$ que

$$\Delta_k^{*(1)}(0) = \frac{\mu_1 \cdots \mu_{k+1}}{\lambda_0 r_1 \cdots r_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} r_i \pi_i.$$

Entonces para $n - 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n-1}^{*(1)}(0) &= \left(\frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} + \frac{\mu_n}{r_n} \right) \Delta_{n-2}^{*(1)}(0) - \frac{\lambda_{n-1}\mu_{n-1}}{r_{n-1}^2} \Delta_{n-3}^{*(1)}(0) \\
 &= \left(\frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} + \frac{\mu_n}{r_n} \right) \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\lambda_0 r_1 \cdots r_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} r_i \pi_i - \frac{\lambda_{n-1}\mu_{n-1}}{r_{n-1}^2} \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-2}}{\lambda_0 r_1 \cdots r_{n-2}} \sum_{i=1}^{n-2} r_i \pi_i \\
 &= \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\lambda_0 r_1 \cdots r_{n-1}} \left[\frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} r_i \pi_i + \frac{\mu_n}{r_n} \sum_{i=1}^{n-1} r_i \pi_i - \frac{\lambda_{n-1}}{r_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-2} r_i \pi_i \right] \\
 &= \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\lambda_0 r_1 \cdots r_{n-1}} \left[\lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \frac{\mu_n}{r_n} \sum_{i=1}^{n-1} r_i \pi_i \right] \\
 &= \frac{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}}{\lambda_0 r_1, \dots, r_{n-1}} \left[\frac{\mu_n}{r_n} r_n \pi_n + \frac{\mu_n}{r_n} \sum_{i=1}^{n-1} r_i \pi_i \right] \\
 &= \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_0 r_1 \cdots r_n} \sum_{i=1}^n r_i \pi_i.
 \end{aligned}$$

Donde se utiliza (3.28) para obtener la quinta igualdad. □

Volviendo al problema principal, se tiene que como ϕ tiene masa total igual a uno y tomando $s = 0$ en (3.26)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^*(dx)}{x} &= -\frac{\lambda_0}{r_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(dx)}{x} \\
 &= \frac{\lambda_0}{r_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(dx)}{-x} \\
 &= \frac{\lambda_0}{r_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_n(dx)}{-x}
 \end{aligned}$$

y sustituyendo en (3.27)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^*(dx)}{x} = \frac{\lambda_0}{r_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n-1}^{*(1)}(0)}{\Delta_n^*(0)},$$

entonces finalmente usando los Lemas 3.6 y 3.7

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^*(dx)}{x} &= \frac{\lambda_0}{r_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_0 r_1 \cdots r_n} \sum_{i=1}^n r_i \pi_i}{\frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{r_0 \cdots r_n} \sum_{i=0}^n r_i \pi_i} \\
&= \frac{\lambda_0}{r_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_0 \sum_{i=1}^n r_i \pi_i}{\lambda_0 \sum_{i=0}^n r_i \pi_i} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n r_i \pi_i - r_0 \pi_0}{\sum_{i=0}^n r_i \pi_i} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{r_0 \pi_0}{\sum_{i=0}^n r_i \pi_i} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^*(dx)}{x} = 1 - \frac{r_0 \pi_0}{\sum_{i=0}^{\infty} r_i \pi_i}. \quad (3.29)$$

□

Ahora que se cuenta con los elementos necesarios, se puede enunciar el teorema principal de la sección.

Teorema 3.8. *Bajo las mismas condiciones del Lema 3.2, cuando $N_- < \infty$ la distribución conjunta estacionaria $F_i(y) = P[X_t = i, C_t \leq y]$, $i \in E$, $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $r \geq 0$ del proceso (X_t, C_t) se puede expresar como*

$$F_i(y) = p_i + \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx),$$

donde $P_i(x)$, $i \in N$ son los polinomios definidos en (3.16), y ψ la medida con respecto a la cual estos polinomios son ortogonales definida en el Lemma 3.2. $R(x)$ está definido como

$$R(x) = r_0 \sum_{j \in N^-} a_j P_j(x),$$

y entonces $R(0)$ tiene la forma de (3.25):

$$R(0) = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j r_j}{\sum_{j \in E} \pi_j},$$

y $R(\zeta_j) = 0$, $j = 1, \dots, N_- - 1$ con $\zeta_1, \dots, \zeta_{N_-}$ los puntos del soporte de ψ en el eje positivo.

Demostración. Sea $F_i(y) = \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx)$, sustituyendo en la fórmula (2.6) se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_{i-1} F_{i-1}(y) - (\lambda_i + \mu_i) F_i(y) + \mu_{i+1} F_{i+1}(y) &= \frac{\lambda_{i-1} \pi_{i-1}}{r_{i-1}} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_{i-1}(x) R(x) \psi(dx) \\ &\quad - \frac{(\lambda_i + \mu_i) \pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx) \\ &\quad + \frac{\mu_{i+1} \pi_{i+1}}{r_{i+1}} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_{i+1}(x) R(x) \psi(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} \left[\frac{\lambda_{i-1} \pi_{i-1}}{r_{i-1}} P_{i-1}(x) - \frac{(\lambda_i + \mu_i) \pi_i}{r_i} P_i(x) + \frac{\mu_{i+1} \pi_{i+1}}{r_{i+1}} P_{i+1}(x) \right] R(x) \psi(dx). \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.11) se tiene que

$$\frac{\lambda_{i-1} \pi_{i-1}}{r_{i-1}} = \frac{\lambda_{i-1} \prod_{j=0}^{i-2} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}{r_{i-1}} = \frac{\mu_i \pi_i}{r_{i-1}}$$

y de igual manera

$$\frac{\mu_{i+1} \pi_{i+1}}{r_{i+1}} = \frac{\mu_{i+1} \prod_{j=0}^i \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}{r_{i+1}} = \frac{\lambda_i \pi_i}{r_{i+1}}$$

Regresando a la ecuación diferencial, se tiene que por lo anterior y por la ecuación (3.16) ocurre que

$$\begin{aligned} \lambda_{i-1} F_{i-1}(y) - (\lambda_i + \mu_i) F_i(y) + \mu_{i+1} F_{i+1}(y) &= \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} \left[\frac{\mu_i \pi_i}{r_{i-1}} P_{i-1}(x) - \frac{(\lambda_i + \mu_i) \pi_i}{r_i} P_i(x) + \frac{\lambda_i \pi_i}{r_{i+1}} P_{i+1}(x) \right] R(x) \psi(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} \pi_i x P_i(x) R(x) \psi(dx) \\ &= r_i \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} x e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx) \\ &= r_i F_i'(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $F_i(y)$ cumple la ecuación diferencial (2.6). Además se tiene que por el Lema 3.2

$$\begin{aligned}
F_i(0) &= \frac{r_0\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^+} P_i(x)R(x)\psi(dx) = \frac{r_0\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^+} P_i(x) \left(\sum_{j \in N^-} a_j P_j(x) \right) \psi(dx) \\
&= \frac{r_0\pi_i}{r_i} \sum_{j \in N^-} a_j \int_{-\infty}^{0^+} P_i(x)P_j(x)\psi(dx) \\
&= \frac{r_0\pi_i}{r_i} \sum_{j \in N^-} a_j \left(\frac{r_i}{r_0\pi_i} \delta_{ij} \right) \\
&= \sum_{j \in N^-} a_j \delta_{ij} = 0, \text{ para toda } i \in N^+.
\end{aligned}$$

Por lo que $F_i(y)$ cumple la condición inicial (2.9). Ahora tomando el límite cuando y tiende a infinito

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow \infty} F_i(y) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x)R(x)\psi(dx) \\
&= \frac{\pi_i}{r_i} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x)R(x)\psi(dx) \\
&= \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{xy} P_i(x)R(x)\psi(dx) \\
&= \frac{\pi_i}{r_i} P_i(0)R(0)\psi(\{0\}).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Como se está trabajando bajo el supuesto de que ψ^* está normalizada de manera que su masa total sea $\frac{-\lambda_0}{r_0}$ por el Teorema 1.18 se tiene que $\psi(\{0\}) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1}\psi^*(dx)$ y por el Teorema 3.5 $\int_{-\infty}^{\infty} x^{-1}\psi^*(dx) = 1 - \frac{r_0}{\sum_{j=0}^{\infty} r_j\pi_j}$.

Entonces sustituyendo $P_i(0)$ de la Proposición 3.4 y el valor de $\psi(\{0\})$ en la ecuación (3.30) se tiene que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_i(y) = \frac{\pi_i}{r_i} \left(\frac{r_i}{r_0} \right) \left(\frac{\sum_{j=0}^{\infty} r_j\pi_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j} \right) \left(\frac{r_0}{\sum_{j=0}^{\infty} r_j\pi_j} \right) = \frac{\pi_i}{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j} = p_i,$$

por lo tanto, $F_i(y)$ satisface la segunda condición inicial (2.10). Finalmente se tiene que la distribución conjunta estacionaria de (X_t, C_t) está dada por

$$\begin{aligned} F_i(y) &= \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^+} e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx) \\ &= \frac{\pi_i}{r_i} P_i(0) R(0) \psi(\{0\}) + \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx) \\ &= p_i + \frac{\pi_i}{r_i} \int_{-\infty}^{0^-} e^{xy} P_i(x) R(x) \psi(dx). \end{aligned}$$

□

3.2.1. Ejemplo.

Al igual que en la sección anterior, para ejemplificar este proceso se analizará el caso más sencillo. Como se requiere que N_- sea finito, se definirá un sistema donde únicamente el primer estado tendrá asociada una tasa de crecimiento negativa y todos los demás estados tendrán asociada una tasa de crecimiento positiva.

Para el análisis general, considere las tasas

$$r_0 = -r_- \text{ y } r_i = r_+ \quad i = 1, 2, \dots$$

y las tasas de nacimiento y muerte constantes

$$\lambda_i = \lambda \quad \mu_{i+1} = \mu \quad i = 0, 1, \dots$$

Si definimos $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ y $\sigma = \frac{r_-}{r_+ + r_-}$ se tiene que la medida estacionaria de la cadena de nacimiento y muerte es

$$\pi_i = \rho^i,$$

de esta manera se tiene que $\sum_{i \in E} \pi_i = \frac{1}{1-\rho}$, por lo que $p_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in E} \pi_j} = (1-\rho)\rho^i$.

Como se debe cumplir la condición de estabilidad $\sum_{i \in E} \pi_i r_i < 0$, se tiene que

$$\rho < \sigma.$$

Además, como $P_0(x) = 1$ se tiene que el polinomio $R(x)$ es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} R(x) &= r_0 a_0 P_0(x) = r_0 a_0 = R(0) = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j r_j}{\sum_{i \in E} \pi_i} \\ &= \frac{-r_- \pi_0 + \sum_{j \in E} \pi_j r_+ - r_+ \pi_0}{\sum_{i \in E} \pi_i} = r_+ - \frac{\pi_0(r_- + r_+)}{\sum_{i \in E} \pi_i}. \end{aligned}$$

Como $\pi_0 = 1$ y $\sum_{i \in E} \pi_i = \frac{1}{1-\rho}$ se tiene que

$$\begin{aligned} R(x) &= r_+ - (r_- + r_+)(1 - \rho) = r_+ - r_- + r_- \rho - r_+ + r_+ \rho \\ &= -r_- + r_- \rho + r_+ \rho = -r_- + \rho(r_- + r_+) = -r_- \left(1 - \rho \frac{r_+ + r_-}{r_-}\right) \\ &= -r_- \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Para los polinomios $P_i(x)$ se tiene que sustituyendo en (3.16)

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= \frac{r_+}{\lambda} x - \frac{r_+}{r_-} \\ P_2(x) &= \left(\frac{r_+}{\lambda} x + 1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) P_1(x) + \frac{\mu r_+}{\lambda r_-} \\ P_i(x) &= \left(\frac{r_+}{\lambda} x + 1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) P_{i-1}(x) - \frac{\mu}{\lambda} P_{i-2}(x) \quad i = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

y para los $\Delta_i^*(x)$, sustituyendo en (2.15)

$$\begin{aligned} \Delta_0^*(x) &= 1 \\ \Delta_1^*(x) &= x - \frac{\lambda}{r_-} + \frac{\mu}{r_+} \\ \Delta_i^*(x) &= \left(x + \frac{\lambda + \mu}{r_+}\right) \Delta_{i-1}^*(x) - \frac{\lambda \mu}{r_+^2} \Delta_{i-2}^*(x) \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Lema 3.9. *La medida ψ^* con respecto a la cual la sucesión de polinomios $\{\Delta_i^*(x)\}_{i \geq 0}$ es ortogonal, normalizada de tal forma que tenga masa total igual a $\frac{\lambda}{r_-}$ es*

$$\psi^*(dx) = \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{r+x}{\mu} + \rho + 1\right)^2}}{2\pi \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{r-x}{\mu\sigma} - 1\right)} dx.$$

Demostración. Si definimos la transformación

$$T_i(x) = \left(\frac{r_+}{\sqrt{\lambda\mu}}\right)^i \Delta_i^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} - \lambda - \mu}{r_+}\right),$$

entonces la sucesión de polinomios $\{T_n(x)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión perturbada de polinomios de Chebyshev que cumple

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= 2x - \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma}, \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Por el Lemma 1.25 de la Sección 1.1 del Capítulo 1, se tiene que $b = \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma}$ y se sabe que la sucesión es ortogonal con respecto a la medida de masa total 1 dada por

$$\psi_T(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 + \frac{\rho}{\sigma^2} - \frac{2x\sqrt{\rho}}{\sigma}} dx$$

y tiene un salto en el punto $\frac{\sqrt{\rho}}{2\sigma} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\rho}}$ de tamaño $1 - \frac{\rho}{\sigma^2}$.

Se tiene entonces que

$$\delta_{ij} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_i(x)T_j(x) \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 + \frac{\rho}{\sigma^2} - \frac{2x\sqrt{\rho}}{\sigma}} dx + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\rho}\right) T_i\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2\sigma} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\rho}}\right) T_j\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2\sigma} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\rho}}\right).$$

Como nos interesa el caso en el que no es cero, se toma $i = j$, entonces

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{r_+}{\sqrt{\lambda\mu}}\right)^{2i} \Delta_i^* \left(\frac{2x\sqrt{\lambda\mu} - \lambda - \mu}{r_+}\right)^2 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 + \frac{\rho}{\sigma^2} - \frac{2x\sqrt{\rho}}{\sigma}} dx, \quad (3.31)$$

haciendo $y = \frac{2x\sqrt{\lambda\mu} - \lambda - \mu}{r_+}$ se tiene que

$$dy = \frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{r_+} dx, \quad x = \frac{yr_+ + \lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}$$

y para los límites, si $x = 1$ entonces $y = -\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}$ y si $x = -1$ entonces $y = -\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+}$. Por lo que la integral (3.31) se ve de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+}}^{-\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^{2i} \Delta_i^*(y)^2 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{yr_+ + \lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} \right)^2}}{1 + \frac{\rho}{\sigma^2} - \frac{2 \left(\frac{yr_+ + \lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} \right) \sqrt{\rho}}{\sigma}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+}}^{-\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^{2i} \Delta_i^*(y)^2 \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{yr_+}{\mu} + \rho + 1 \right)^2}}{\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\lambda\rho}{\sigma^2 r_+} - \frac{y\rho}{\sigma} - \frac{\lambda\rho}{\sigma r_+} - \frac{\mu\rho}{\sigma r_+}} dy, \end{aligned}$$

como la medida con respecto a la cual la sucesión $\{\Delta_i^*(x)\}$ es ortogonal debe estar normalizada de forma que tenga masa total $\frac{\lambda}{r_-}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r_-} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+}}^{-\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^{2i} \Delta_i^*(y)^2 \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{yr_+}{\mu} + \rho + 1 \right)^2}}{\frac{r_-}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{r_+} + \frac{\lambda\rho}{\sigma^2 r_+} - \frac{y\rho}{\sigma} - \frac{\lambda\rho}{\sigma r_+} - \frac{\mu\rho}{\sigma r_+} \right)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+}}^{-\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}} \left(\frac{r_+}{\sqrt{\lambda\mu}} \right)^{2i} \Delta_i^*(y)^2 \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{yr_+}{\mu} + \rho + 1 \right)^2}}{\frac{\rho}{\sigma} - \frac{yr_-}{\sigma\mu} - 1} dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto la medida de ortogonalización de la sucesión $\{\Delta_i^*(x)\}$ normalizada de forma que tenga masa total igual a $\frac{\lambda}{r_+}$ es

$$\psi^*(dx) = \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{xr_+}{\mu} + \rho + 1 \right)^2}}{2\pi \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{xr_-}{\mu\sigma} - 1 \right)} dx.$$

□

Ahora, por el Teorema 1.18 se tiene que la medida de ortogonalización asociada

a los polinomios $\{\Delta_i(x)\}_{i \geq 0}$ y por lo tanto a los polinomios $\{P_i(x)\}_{i \geq 0}$ está dada por

$$\psi(dx) = x^{-1} \psi^*(dx) \quad x \neq 0,$$

con lo que se tiene que la medida de ortogonalización para $\{P_i(x)\}_{i \geq 0}$ está dada por

$$\psi(dx) = \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{r+x}{\mu} + \rho + 1\right)^2}}{2\pi x \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{r-x}{\mu\sigma} - 1\right)} dx$$

para $-\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+} \leq x \leq -\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}$.

Por lo que finalmente se tiene que la distribución estacionaria del proceso conjunto (X_t, C_t) es

$$F_i(x) = (1 - \rho)\rho^i - \frac{(\sigma - \rho)\rho^i r_-}{\sigma r_i} \int_{-\frac{\mu(1+\sqrt{\rho})^2}{r_+}}^{-\frac{\mu(1-\sqrt{\rho})^2}{r_+}} e^{xy} P_i(x) \frac{\sqrt{4\rho - \left(\frac{r+x}{\mu} + \rho + 1\right)^2}}{2\pi x \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{r-x}{\mu\sigma} - 1\right)} dx. \quad (3.32)$$

Para ejemplificar numéricamente este proceso, se eligen tasas de nacimiento y muerte

$$\lambda = 10 \text{ y } \mu = 70$$

y tasas de crecimiento

$$r_0 = -10 \text{ y } r_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots,$$

entonces

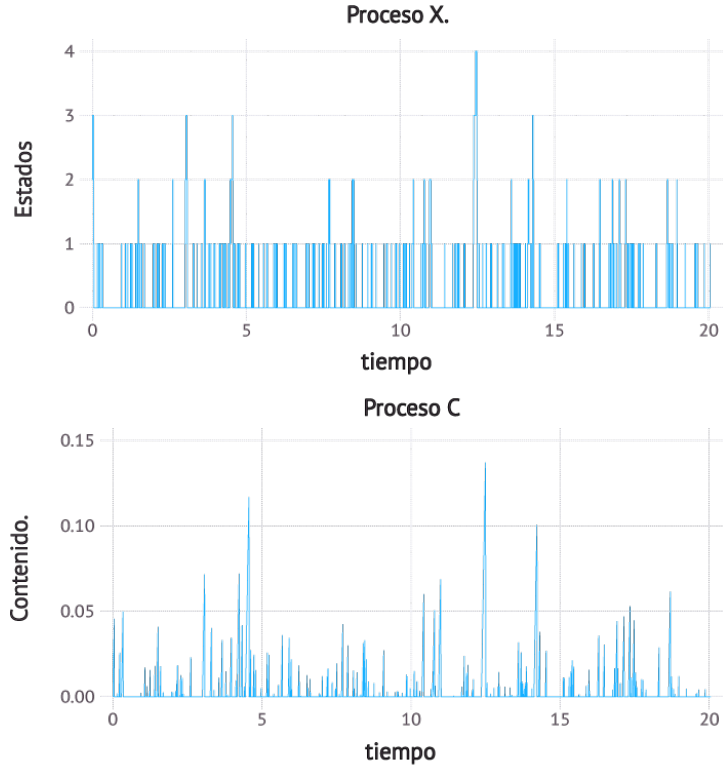
$$r_- = 10 \quad \text{y } r_+ = 1,$$

de manera que

$$\rho = \frac{1}{7} \text{ y } \sigma = \frac{10}{11} \quad (3.33)$$

donde se cumple que $\rho < \sigma$.

Una trayectoria del proceso, con $t = 20$ es



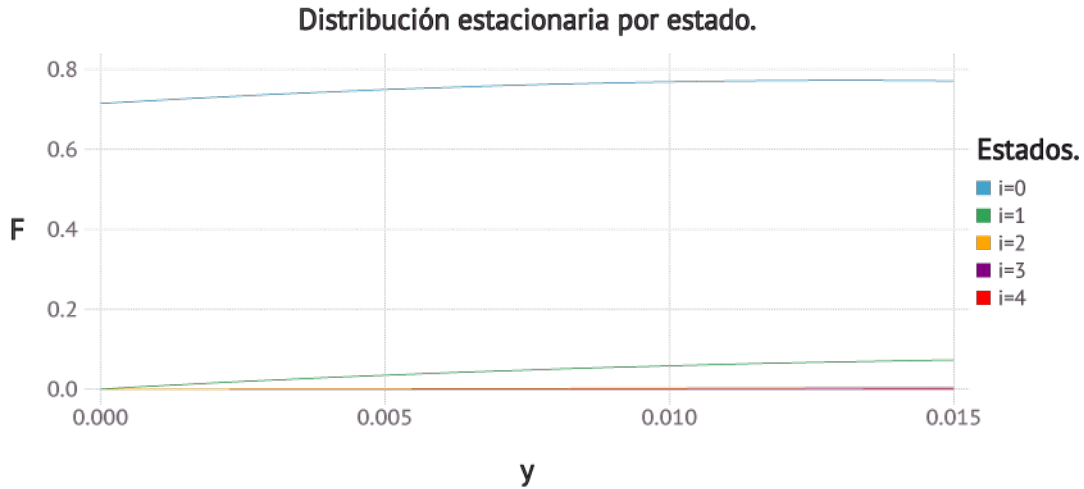
donde se puede ver que la cadena de nacimiento y muerte regresa siempre al estado cero que tiene tasa de crecimiento negativa, ya que la tasa de muerte es mucho más grande que la tasa de nacimiento. Como consecuencia, la cantidad de fluido en el contenedor es siempre muy cercana a cero.

Para encontrar la distribución estacionaria, se sustituyen los valores necesarios en (3.32) y se obtiene que la distribución estacionaria por estado es

$$\begin{aligned}
 F_0(y) &= \frac{6}{7} + \frac{59}{14\pi} \int_{-80-20\sqrt{7}}^{-80+20\sqrt{7}} e^{xy} \frac{\sqrt{\frac{4}{7} - \left(\frac{x}{70} + \frac{8}{7}\right)^2}}{x \left(\frac{11}{70}(1-x) - 1\right)} dx \\
 F_i(y) &= \frac{6}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^i - \frac{59 \left(\frac{1}{7}\right)^i}{14\pi} \int_{-80-20\sqrt{7}}^{-80+20\sqrt{7}} e^{xy} P_i(x) \frac{\sqrt{\frac{4}{7} - \left(\frac{x}{70} + \frac{8}{7}\right)^2}}{x \left(\frac{11}{70}(1-x) - 1\right)} dx \quad i = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

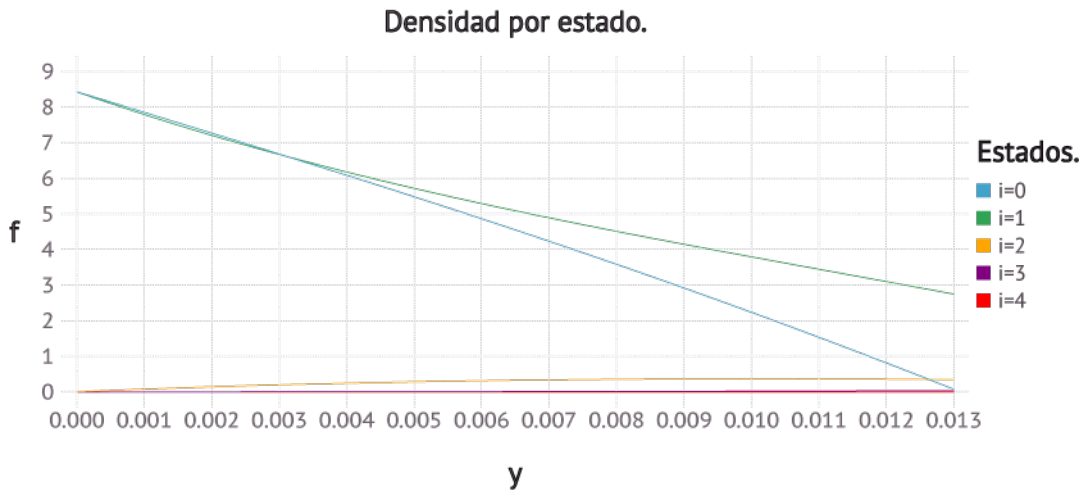
Para poder observar el comportamiento de las distribuciones estacionarias, se

han graficado para los primeros 5 estados. Para poder resolver la integral de forma explícita con ayuda de Mathematica, se ha tomado la expansión en serie de Taylor de e^{xy} alrededor del cero hasta el quinto término, y eso para cada estado. La gráfica para los primeros 5 estados es la siguiente.



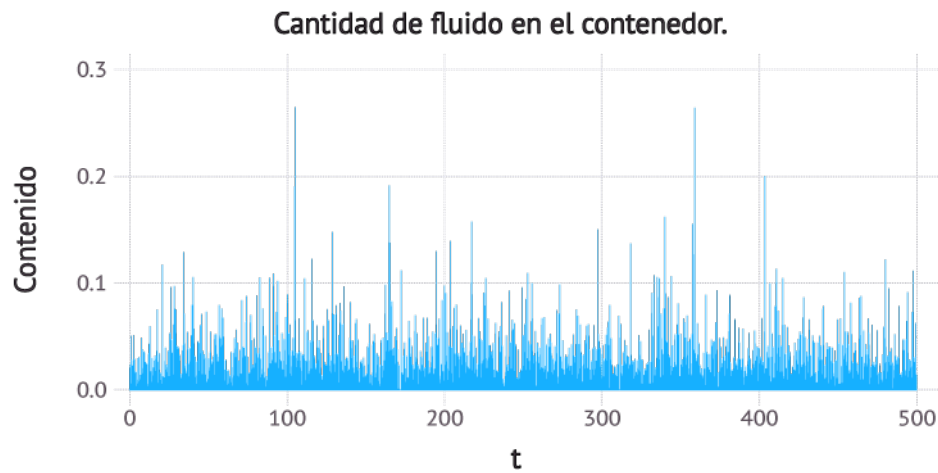
En la gráfica de las distribuciones estacionarias de los primeros 5 estados se puede observar que la probabilidad de estar en el estado cero es notablemente mayor que para los otros estados.

Derivando las expresiones halladas para las distribuciones estacionarias, se pueden encontrar las densidades por estado que también se pueden graficar.



Se puede ver que las densidades para los estados 0 y 1 son mucho mayores que para los demás estados, lo cual es consistente con las tasas de nacimiento y muerte del proceso. Considerando que para los estados 3 y 4 la gráfica esta pegada al eje horizontal, se puede decir que lo mismo pasará para estados mayores. Además tienen forma de densidades exponenciales, lo que tiene sentido pues no se debe perder de vista que en un principio las distribuciones son exponenciales aunque se usó un polinomio para aproximarlas.

Una trayectoria de la cantidad de fluido con un tiempo mas grande se muestra en la siguiente gráfica



donde es muy claro que la cantidad de fluido se mantiene cercana a cero.

Bibliografía

- [1] J. ANDERSON WILLIAM, (1991), *Continuous-Time Markov Chains*, New York: Springer.
- [2] D. ANICK, D. MITRA and M. M. SONDHI, (1982), *Stochastic Theory of a Data-Handling System with Multiple Sources*, Bell System Technical Journal, 61(8), 1871-1894.
- [3] S. BLAABJERG and H. ANDERSSON, (1995), *Approximating the Heterogeneous Fluid Queue with a Birth-Death Fluid Queue*, IEEE Transactions on Communications, 43 (5), 1884–1887.
- [4] T. S. CHIHARA, (1978), *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, New York: Gordon and Breach.
- [5] T. S. CHIHARA, (1957), *On Co-Recursive Orthogonal Polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society, 8 (5), 899-905.
- [6] E.A. VAN DOORN, (1995), *Some New Results for Chain-Sequence Polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 57 (1-2), 309–317.
- [7] E.A. VAN DOORN, A.A. JAGERS and J.S.J DE WIT, (1988), *A Fluid Reservoir Regulated by a Birth-Death Process*, Stochastic Models, 4 (3):457–472.
- [8] D. P. GAVER and J.P. LEHOCZKY, (1982), *Channels that Cooperatively Service a Data Stream and Voice Messages*, IEEE Transactions on Communications, 30 (5), 1153-1162.

-
- [9] R. J. GRIEGO and R. HERSH, (1969), *Random Evolutions, Markov Chains, and Systems of Partial Differential Equations*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 62(2), 305-308.
- [10] R. HERSH, (1974), *Random Evolutions: A Survey Of Results and Problems*, Journal of Mathematics, 4 (3), 443–476.
- [11] P. G. HOEL, S. C. PORT and C. J. STONE, (1972), *Introduction to Stochastic Processes*, Boston: Houghton-Mifflin.
- [12] D. G. KENDALL, (1953), *Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain*, The Annals of Mathematical Statistics, 24 (3), 338-354.
- [13] L. KOSTEN, (1974), *Stochastic Theory of a Multi-Entry Buffer, part 1*, Delft Progress Report, 1,10–18.
- [14] V. G. KULKARNI, (1997), *Fluid Models for Single Buffer Systems*, Frontiers in Queueing, Cap.11, 321-338.
- [15] P. LANCASTER, (1985), *The Theory of Matrices*, Canadá: Academic Press.
- [16] E. LLUIS-PUEBLA, (2008), *Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica*, México: Sociedad Matemática Mexicana.
- [17] S. MAO,G. LAPIOTIS and S.S. PANWAR, (2001), *The Effective Bandwidth of Markov Modulated Fluid Process Sources with a Generalized Processor Sharing Server*, Proceedings of the 2001 IEEE Global Telecommunications Conference, 4, 2341–2346.
- [18] D. MCDONALD and K. QIAN, (1998), *An Approximation Method for Complete Colutions of Markov-Modulated Fluid Models*, Queueing Systems, 30 (3), 365–384.
- [19] D. MITRA, (1988), *Stochastic Theory of a Fluid Model of Producers and Consumers Coupled by a Buffer*, Advances in Applied Probability, 20(3), 646-676.

-
- [20] L. RINCÓN, (2012), *Introducción a los Procesos Estocásticos*, México: Las prensas de ciencias.
- [21] SHEN, JIE, TANG, TAO, WANG, and LI-LIAN, (2011), *Spectral Methods. Algorithms, Analysis and Applications*, Berlin: Springer.
- [22] WERNER SCHEINHARDT and WILLEM RICHARD, (1998), *Markov-Modulated and Feedback Fluid Queues*, PhD Thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands.