UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN VIAJE HAMILTONIANO POR LAS DIGRÁFICAS TRANSITIVAS Y CUASITRANSITIVAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE: MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JESÚS MARTÍN CABALLERO VÁZQUEZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
2017

Ciudad Universitaria, CDMX.

Un Viaje Hamiltoniano por las Digráficas Transitivas y Cuasitransitivas

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108715 Operaciones en gráficas y digráficas. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

No se escribe para ser escritor
ni se lee para ser lector.
Se escribe y se lee para
comprender el mundo.
Juan José Millás

Agradecimientos

A mis padres, Nety y Jesús, por su gran apoyo incondicional en todas las decisiones de mi vida, como la de estudiar la hermosa carrera de matemáticas.

A mis profesores Jefferson King, Laura Pastrana, Oscar Palmas, Max Neumann, Laura Ortíz y sobre todo a mi asesora Hortensia Galeana por inculcarme tanto el amor a sus materias impartidas como el gusto por la práctica docente al compartir mis conocimientos aprendidos a lo largo de la carrera.

A mis tíos Jesús Estrada y Rafael Pinal por formar parte importante de mi ingreso a la UNAM.

A mi hermana Bety significativamente por existir.

A mis amigos Alex, Felipe, Renato, Andrew, Niels, Jorge, Omar, Abner, Paco, Daniel, Laurita y Carmen por las entretenidas tardes a su lado y por hacerme más ligera mi travesía por la universidad, asi como apoyarme en todo momento.

Gracias a todos los demás que lleguen a leer esta tesis y no encuentren su nombre en este apartado, ¡en verdad gracias!.

Introducción

En la teoría de digráficas es bien sabido que no se conocen condiciones suficientes y necesarias para resolver el problema de decisión para decidir si una digráfica es hamiltoniana o no, sin embargo en esta tesis damos una respuesta a este problema para digráficas transitivas, cuasitransitivas y otras generalizaciones de este tipo de digráficas.

En el primer capítulo damos las definiciones previas (esperando que el lector tenga un breve pero claro manejo de la teoría de conjuntos y su notación) de la teoría de digráficas y de la teoría de gráficas necesarias para desarrollar las caracterizaciones de hamiltonicidad deseadas.

En el segundo capítulo mostramos detalladamente la caracterización de las digráficas transitivas, cuasitransitivas y de las digráficas fuertes 3-transitivas y 3-cuasitransitivas siendo estas últimas caracterizaciones de las clases de digráficas citadas anteriormente, respectivamente.

En el tercer capítulo se caracterizan las digráficas cuasitransitivas que son hamiltonianas, este resultado caracteriza inmediatamente a las digráficas transitivas que son hamiltonianas y se cita resultados que muestran la posibilidad de resolver si una digráfica cuasitransitiva es hamiltoniana, o no, en tiempo polinomial. Se muestra también las digráficas 3-cuasitransitivas que son hamiltonias y en un resultado posterior se dan condiciones para asegurar la existencia de una trayectoria hamiltoniana en una digráfica k-cuasitransitiva con k par, por último se prueba una caracterización de las digráficas 3-transitivas.

En el cuarto y último capítulo se hacen notar conclusiones de esta tesis y se invita a un trabajo de investigación posterior sobre la hamiltonicidad de las digráficas k-transitivas y k-cuasitransitivas, observando que ya existe una caracterización de las digráficas fuertes 4-transitivas y condiciones suficientes para trazabilidad de digráficas k-cuasitransitivas con k par.

Para un mejor entendimiento sobre los algoritmos, los problemas de decisión y la complejidad con la que estos son realizados se añade un apéndice al final de este trabajo.

Índice general

Agradecimientos **II**
Introducción III

Lista de figuras **VII**

1. Definiciones y Nociones Precedentes **1**
1.1. Digráficas 1
1.2. Gráficas 7
1.3. Torneos 8
1.4. Generalizaciones de Torneos 9

2. Caracterizaciones Transitivas y Cuasitransitivas **13**
2.1. Digráficas Transitivas 13
2.2. Digráficas Cuasitransitivas 16
2.3. Digráficas 3-cuasitransitivas 21
2.4. Digráficas 3-transitivas 22

3. Hamiltonicidad Transitiva y Cuasitransitiva **25**
3.1. Hamiltonicidad en Digráficas Cuasitransitivas 25
3.2. Hamiltonicidad en 3-Cuasitransitivas 30
3.3. Trazabilidad en K-Cuasitransitivas 31
3.4. Hamiltonicidad en Digráficas 3-transitivas 33

4. Conclusiones **36**

A. Complejidad **37**

Bibliografía **39**

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de una digráfica 2
1.2. Ejemplo de digráficas isomorfas 4
1.3. Ejemplo de una gráfica 8
1.4. Ejemplo de un torneo 9
1.5. Ejemplo de una digráfica cuasitransitiva 11

2.1. Ejemplo de F_4 y F_5 respectivamente. 22
2.2. C_3 , C_3^* y C_3^{**} respectivamente. 23

3.1. Ejemplo de un factor ciclo. 27

Capítulo 1

Definiciones y Nociones Precedentes

En el presente capítulo introduciremos las definiciones y nociones necesarias para la plena comprensión de este trabajo. Asumiremos que el lector conoce previamente los conceptos básicos y la notación de la teoría de conjuntos, cualquier duda referente a este último tema se puede consultar en [18].

1.1. Digráficas

Una **digráfica** D es una pareja ordenada $D = (V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito y no vacío llamado el conjunto de vértices de D y $F(D)$ un subconjunto de $V(D) \times V(D) \setminus \{(v, v) : v \in V(D)\}$ llamado el conjunto de flechas de D. Llamaremos **vértices** y **flechas** a los elementos de $V(D)$ y $F(D)$ respectivamente. Por otro lado a la cardinalidad de $V(D)$, es decir $|V(D)|$, le nombraremos el **orden** de D y a $|F(D)|$ lo llamaremos el **tamaño** de D. Si existe más de una flecha de x hacia y decimos que esa flecha es una **flecha paralela**.

Dados $\{u, v\} \subseteq V(D)$ denotaremos la flecha de u hacia v por $u \longrightarrow v$, o simplemente uv, que es lo mismo que $(u, v) \in F(D)$. Si la flecha de u a v existe en $F(D)$, diremos también que u **domina** a v. Mencionaremos que u y v son **adyacentes** si sucede que $uv \in F(D)$ o $vu \in F(D)$. Llamaremos a una flecha $uv \in F(D)$ **simétrica** si además pasa que $vu \in V(D)$. Si $a \in F(D)$ y $a = uv$ diremos que a incide tanto en u como en v y que a va de u hacia v. Por ejemplo la flecha xy en la digráfica D de la Figura 1.1 es una flecha simétrica debido a que $xy \in F(D)$ y $yx \in F(D)$. Decimos que una digráfica

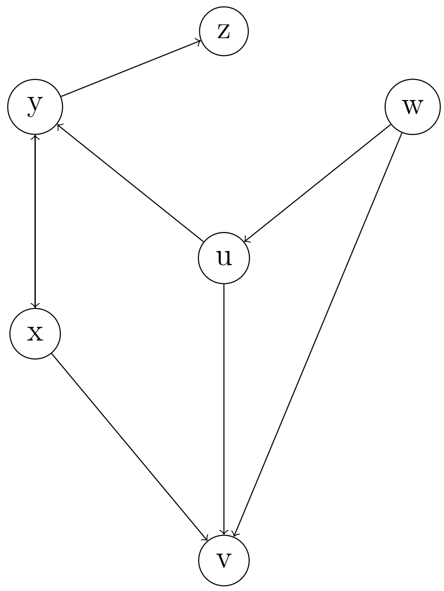

Figura 1.1: Ejemplo de una digráfica

es **completa** si cualesquiera dos vértices son adyacentes por lo que todas sus flechas son simétricas.

Sean D una digráfica y $x \in V(D)$, podemos definir la **invecindad** de x (respectivamente **exvecindad** de x) como el conjunto de vértices que dominan (respectivamente son dominados por) a x y se denota por $N^-(x)$ (resp. $N^+(x)$). De la misma manera, la cardinalidad de la invecindad de un vértice $x \in V(D)$ la llamaremos el **ingrado** de x y la denotaremos por $d^-(x)$, análogamente a la cardinalidad de la exvencidad de x la nombraremos el **exgrado** de x y la denotaremos por $d^+(x)$. El **ingrado máximo** de D es el número $\Delta_D^-=$ máx $\{d^-(v)|v \in V(D)\}$ y el **ingrado mínimo** de D es el número $\delta_D^- =$ mín $\{d^-(v)|v \in V(D)\}$. Análogamente se definen el **exgrado máximo** y el **exgrado mínimo** de D denotados por Δ_D^+ y δ_D^+ respectivamente. Decimos que una digráfica D es una **digráfica regular** si todos sus vértices tienen el mismo exgrado y el mismo ingrado, es decir, $d^-(x) = d^+(x) = r$

Supongamos que $D = (V(D), F(D))$ y $H = (V(H), F(H))$ son un par de digráficas tales que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$, en este caso diremos que H es una **subdigráfica** de D. Si además para cada $\{x, y\} \subseteq V(H)$, se tiene que $xy \in F(H)$ si sólo si $xy \in F(D)$, en este caso llamaremos a H **subdigráfica inducida** de D, una forma intuitiva de pensar a las digráficas inducidas como el resultado de "borrar" vértices de D y sus respectivas flechas incidentes en ellos. De la definición de subdigráfica inducida se sigue que cada subdigráfica inducida depende solamente de un subconjunto de vértices de D, por ello si H es una subdigráfica inducida de D con $S = V(H) \subseteq V(D)$, usaremos la notación $D[S]$ para referirnos a la digráfica H, es decir, $D[S] = H$.

Si D es una digráfica y $x \in V(D)$, denotaremos por $D-x$ a la subdigráfica inducida por $V(D) - \{x\}$, es decir, $D - x = D[V(D) - \{x\}]$. Análogamente si $A \subset V(D)$ entonces $D - A$ es la digráfica inducida por $V(D) - A$, es decir, $D - A = D[V(D) - A]$.

Si A y B son dos subdigráficas de D y todo vértice de A domina a cada vértice de B diremos que A domina a B y lo denotaremos con $A \mapsto B$. Por otro lado A domina a B y no existe ninguna flecha de B hacia A diremos que A domina completamente a B y lo denotaremos con $A \Rightarrow B$.

Es importante en la teoría de digráficas saber distinguir entre dos digráficas esencialmente iguales (isomorfas), por ello definimos las digráficas isomorfas de la siguiente manera: si D y H son dos digráficas, entonces diremos que D y H son **isomorfas** si existe una función biyectiva $f : V(D) \longrightarrow V(H)$ tal que para cualesquiera dos vértices $\{x, y\} \subseteq V(D)$, pasa que $x \longrightarrow y$ si y sólo si $f(x) \longrightarrow f(y)$. En la Figura 1.2 tenemos un claro ejemplo de dos digráficas isomorfas. Debemos tener en cuenta que dos digráficas isomorfas son básicamente la misma digráfica, por lo que casi siempre que hacemos mención de una digráfica en particular en realidad nos refiremos a una digráfica isomorfa a la digráfica mencionada.

Si D es una digráfica entonces un **camino dirigido** C en D es una sucesión finita de vértices $(v_0, v_1, ..., v_n)$ tal que v_i domina a v_{i+1} para todo entero i tal que $0 \leq i < n$. Observemos que si (v) es una sucesión que consta de un solo vértice $v \in V(D)$, entonces cumplirá trivialmente con la definición de camino dirigido. Si $C = (v_0, v_1, ..., v_n)$ es un camino dirigido con $v_0 = u$ y $v_n = v$, decimos que C es un (u, v)-**camino dirigido** y que u y v son los extremos de C, si existe un (u, v)-camino dirigido diremos que u alcanza a v y que v es alcanzable desde u.

Una (u, v)**-trayectoria dirigida** T es un (u, v)-camino dirigido en el que no se repiten vértices. Si D es una digráfica y T una (u, v)-trayectoria que pasa por todos los vértices de D entonces decimos que T es una trayectoria hamiltoniana. A partir de este momento omitiremos la palabra dirigido(a) y

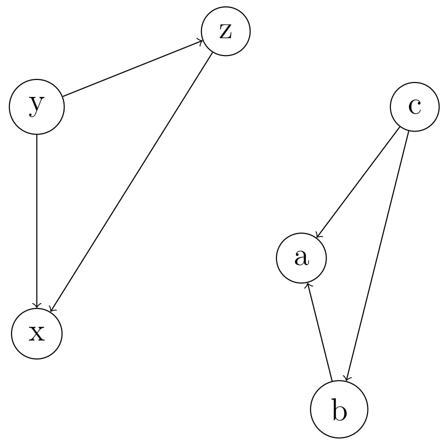

Figura 1.2: Ejemplo de digráficas isomorfas

utilizaremos solamente camino (trayectoria) siempre que nos refiramos a un camino dirigido (trayectoria dirigida). Un camino dirigido que solo repite el vértice incial y final es llamado un **ciclo**, una digráfica con un ciclo dirigido que pasa por todos sus vértices es llamada una **digráfica hamiltoniana**, a un ciclo dirigido lo llamaremos simplemente ciclo en el desarrollo subsecuente de este trabajo, una digráfica con una trayectoria dirigida que pasa por todos sus vértices es llamada una **digráfica trazable**. Una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices de una digráfica es llamada una **trayectoria hamiltoniana**. Un ciclo dirigido que pase por todos los vértices de una digráfica es llamado un **ciclo hamiltoniano**.

Dados dos vértices $\{x, y\} \subseteq V(D)$ decimos que un par de (x, y)-trayectorias son **internamente ajenas** si no repiten vértices más que x y y.

La longitud de un camino,trayectoria o ciclo $W = (x_0, x_1, ..., x_n)$ se define como el número n. Llamamos un k-ciclo a un ciclo dirigido de longitud k, con $k \in \mathbb{N}$. Decimos que una digráfica D es acíclica si no contiene ciclos. Se dice que una (x, y)-trayectoria es **minimal** si es de longitud mínima. A un ciclo de longitud k lo llamamos un k-ciclo.

Dados dos vértices de una digráfica $\{x, y\} \subseteq V(D)$, la **distancia** de x a y, denotada por $d(x, y)$, es la longitud de una (x, y)-trayectoria minimal.

Una digráfica D es **fuertemente conexa** (o simplemente **fuerte**) si para todo par $\{x, y\} \subseteq V(D)$, existe un (x, y)-camino, en otras palabras una digráfica D es fuertemente conexa si todo vértice en $V(D)$ es alcanzable desde cualquier otro vértice de D.

Una **componente fuerte** de una digráfica D es una subdigráfica inducida maximal de D con la propiedad de ser fuerte. Recordemos que por definición una digráfica de un sólo vértice es fuerte, luego si $S_1, S_2, ..., S_t$ son las componentes fuertes de D tendremos que $V(S_1) \cup ... \cup V(S_t) = V(D)$. Debemos notar también que $V(S_i) \cap V(S_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, .., t\}$, ya que de lo contrario cualquier vértice de $V(D_i)$ es accesible desde cualquiera de $V(S_j)$ y recíprocamente cualquier vértice de $V(S_j)$ es accesible desde cualquiera de $V(S_i)$, implicando que $V(S_i) \cup V(S_j)$ deben de pertenecer a una misma componente fuerte lo que contradice la maximalidad de las componentes fuertes $V(D_i)$ y $V(D_j)$.

A continuación definimos una operación entre digráficas que tiene como resultado una nueva digráfica de mayor orden y tamaño. Sean D una digráfica con p vértices, $V(D) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ y sea $L_1, L_2, ..., L_p$ una colección de digráficas ajenas. Luego, la nueva digráfica $D[L_1, ..., L_p]$ es construida a partir de D reemplazando cada vértice v_i de D por L_i y añadiendo una flecha de cada vértice de L_i a cada vértice de L_j si y sólo si $v_i \longrightarrow v_j$ es una flecha de $F(D)$, con $(1 \leq i \neq j \leq p)$, a esta operación le llamamos **composición**.

Otra operación que podemos definir en una digráfica es la **contracción**, para ello supongamos que D es un digráfica y S una subdigráfica de D, **contraer** S en D significa obtener una nueva digráfica D' a partir de D de la siguiente manera, reemplazamos S por un nuevo vértice v, es decir, $V(D') = \{V(D) \cup \{v\}\} - V(S)$ y un vértice $x \in V(D')$ domina (es dominado por) v si y sólo si D contiene una flecha de x hacia S (de S hacia x), las flechas D que no inciden en ningún vértice de S se mantienen igual en D'.

La **digráfica de condensación** $SC(D)$ de D es obtenida por contraer las componentes fuertes de D (tomadas como subdigráficas de D) y de borrar toda flecha paralela resultante de esta operación.

La **descomposición canónica** de una digráfica cuasitransitiva D es una expresión de esta digráfica como composición de sus componentes fuertes (tiene el mismo número de vértices que $SC(D)$), es decir $D = S[Q_1, Q_2, ..., Q_n]$, donde S es una digráfica transitiva y Q_i son sus componentes fuertes para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, esto en el caso de que la digráfica D sea fuerte. Si D no es fuerte la descomposición canónica es una expresión de esta digráfica como composición de subdigráficas no fuertes en lugar de los vértices de S, donde S es semicompleta y $D = S[R_1, R_2, ..., R_n]$. Para digráficas no fuertes R_i para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sean D una digráfica y $x_1, x_2, ..., x_n$ un orden de sus vértices, decimos que este orden es un **orden acíclico** si tenemos que para toda flecha $x_i x_j \in F(D)$ pasa que $i < j$.

Los siguientes lemas son necesarios para la caracterización de las digráficas cuasitransitivas.

Lema 1.1.1. *Sea D una digráfica. Entonces, la digráfica $SC(D)$ es acíclica.*

Demostración. Supongamos que $SC(D)$ tiene un ciclo, si ésto pasa tenemos que un par de vértices de componentes fuertes distintas son accesibles por trayectorias dirigidas en ambas direcciones, como dos vértices estan en una misma componente si y sólo si son accesibles uno desde el otro y viceversa, por lo que están en una misma componente fuerte, lo cual es una contradicción pues deberían estar en componentes fuertes distintas. Por lo tanto $SC(D)$ es acíclica.

□

El **reverso** H de una digráfica D es una digrafica con los mismos vértices de D y sus flechas dadas de la siguiente forma, si $xy \in A(D)$ entonces $yx \in A(H)$. Es claro que el reverso de una digráfica acíclica es de nuevo una digráfica acíclica.

Lema 1.1.2. *Toda digráfica acíclica tiene un vértice de exgrado cero y uno de ingrado cero.*

Demostración. Por contrapositiva, sea D una digráfica en la que todos sus vértices tienen exgrado positivo, probaremos que D tiene un ciclo. Escojamos un vértice v_1 en D. Como el exgrado de v_1 es positivo deberá existir un vértice v_2 tal que v_1 domina a v_2, análogamente como el exgrado de v_2 es mayor que cero este domina a otro vértice v_3. Procediendo de esta manera en el enésimo paso obtenemos un camino de la forma $(v_1 v_2 ... v_n)$, como D es finita existe el menor $n > 2$ talque $v_n = v_i$ para algún $1 \leq i < n$, luego claramente $(v_i v_{i+1} ... v_n)$ es un ciclo.

De esta forma una digráfica acíclica D tiene un vértice de exgrado cero, como el reverso H de una digráfica acíclica es acíclica de nuevo, tendremos que H tiene un vértice de exgrado cero, pero este vértice en D es de ingrado cero por definición del reverso H, por lo tanto D tiene un vértice de exgrado cero y uno de ingrado cero.

□

Lema 1.1.3. *Toda digráfica acíclica tiene un orden acíclico de sus vértices.*

Demostración. Sea D una digráfica acíclica. Daremos una prueba constructiva describiendo un procedimiento que genere un orden acíclico de los vértices de D. En primer paso escojamos un vértice v de ingrado cero (este vértice existe por el lema anterior), nombremos $x_1 = v$ y borremos x_1 de D. En el enésimo encontramos un vértice u de ingrado cero en la correspondiente digráfica acíclica, sea $x_i = u$ y borremos x_i de la correspondiente digráfica acíclica. Este procedimiento tiene tantos pasos como vértices de D.

Por último supongamos que este orden no es acíclico es decir existe $x_i \longrightarrow x_j$ con $i > j$, como x_j fue tomado en nuestro algoritmo antes que x_i, esto significa que x_j tiene ingrado cero cuando x_i aún esta en la digráfica correspondiente, lo que imposibilita que $x_i \longrightarrow x_j$, por lo que toda digráfica acíclica tiene un ordenamiento acíclico de sus vértices.

□

1.2. Gráficas

Una **gráfica** G (también conocida como digráfica simétrica) es una digráfica tal que todas sus flechas son simétricas. Dada una digráfica podemos constuir una gráfica a partir de ella haciendo todas sus flechas simétricas, de esta forma si D es una digráfica llamamos **gráfica subyacente** de D, denotada con $U(D)$ y definida por $V(U(D)) = V(D)$ y $F(U(D)) = \{xy : xy \in F(D)$ ó $yx \in F(D)\}$. Dada una digráfica D, diremos que D es **conexa** si su gráfica subyacente es fuertetemente conexa, por otro lado llamaremos a D **inconexa** si no es conexa. En la Figura 1.3 mostramos un ejemplo de una gráfica.

Dada una gráfica G, podemos definir el **complemento** de G, denotado por $\overline{G}$ y definido como $V(\overline{G}) = V(G)$ y $F(G) = \{xy \mid xy \notin F(G)\}$. Una subdigráfica simétrica de G la llamaremos una **subgráfica** de G.

Dada una gráfica G conexa y $x \in V(G)$, diremos que x es un **vértice de corte** de G si $G - x$ es inconexa. Un **bloque** de una gráfica G es una subgráfica conexa y sin vértices de corte, tal que no existe una subgráfica de G sin vértices de corte que la contenga.

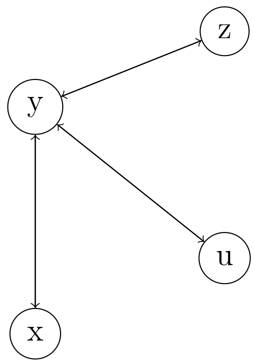

Figura 1.3: Ejemplo de una gráfica

1.3. Torneos

Imaginemos que queremos organizar una competencia entre cinco equipos de fútbol y necesitamos garantizar una forma justa de realizar la competencia, una manera sencilla de solucionarlo es hacer que cada par de equipos jueguen un único partido entre ellos y eliminar la condición de empate en un partido realizando una tanda de penales al final del juego en caso de tener un marcador igualado, resulta que de manera natural este tipo de competencia la podemos modelar con una digráfica D donde tomamos a los vértices de la digráfica como representación de los cinco equipos; es decir, habrá cinco vértices y ponemos una única flecha entre cada par de vértices donde la dirección de la flecha queda determinada por x domina a y si y sólo si el que equipo representado por el vértice x venció al equipo representado por el vértice y para todo par $x, y \in V(D)$ en nuesta competencia. Esto nos lleva a la siguiente de definición.

Decimos que una digráfica D es un **torneo** si para todo par $x, y \in V(D)$ tenemos que x, y son adyacentes y no existen flechas simétricas en $F(D)$. La digráfica de la Figura 1.4 es un ejemplo de torneo. Una digráfica D que es un torneo la detonaremos como T y en ocasiones T_n donde n es el orden la digráfica en cuestión.

Dentro de la rica estructura de los torneos existen resultados muy conocidos como los mencionados a continuación cuya demostración puede ser vista en sus respectivas referencias.

Teorema 1.3.1 (Rédei [20]). *Todo torneo T contiene una trayectoria hamiltoniana.*

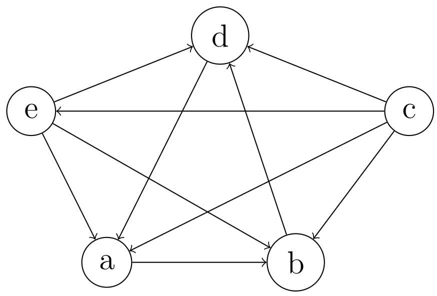

Figura 1.4: Ejemplo de un torneo

Teorema 1.3.2 (Moon [19])**.** *Sea T un torneo fuerte de orden n con $n \geq 3$. Para todo $x \in V(T)$ y para todo $k \in \{3, 4, ..., n\}$, existe un k-ciclo que continene a x en T.*

Teorema 1.3.3 (Camion [7])**.** *Todo torneo fuerte T es hamiltoniano.*

1.4. Generalizaciones de Torneos

En esta sección definiremos varias clases de digráficas que son generalizaciones de los torneos.

Probablemente la generalización más intuitiva de los torneos son las digráficas semicompletas, una digráfica es **semicompleta** si entre cualesquiera dos vértices de $V(D)$ existe alguna flecha entre ellos (puede ser simétrica). Recordemos que un torneo T es una digráfica tal que cualesquiera dos vértices en $V(T)$ son adyacentes y ninguna flecha en $F(T)$ es simétrica, por lo que inmediatamente se sigue que los torneos son una subclase de las digráficas semicompletas.

Es bien sabido que los torneos poseen una estructura muy rica y estudiada dentro de la teoría de digráficas, pero existen dos propiedades obvias de los torneos que son muy tomadas en cuenta en demostraciones referentes a ellos y hacen hincapié a generalizaciones de estos mismos. La primera de ellas es para todo torneo T y cualquier $x \in V(T)$ tendremos que la invecindad de x (respectivamente la exvecindad de x) induce un torneo, la segunda de estas propiedades es que existe una adyacencia entre la invecindad y la exvecindad de cualquier $x \in V(T)$, es decir, cada vértice de $N^+(x)$ es adyacente a cada vértice de $N^-(x)$.

Las digráficas que generalizan a los torneos y mejor ilustran la primera de estas propiedades son los **torneos locales** cuya definición está inspirada en las siguientes definiciones.

Decimos que una digráfica D es **localmente in-semicompleta** (respectivamente **ex-semicompleta**) si para todo vértice x de D, la in-vecindad (ex-vecindad) de x induce una digráfica semicompleta, en caso de que la in-vecindad (ex-vecindad) de x induzca un torneo, para todo $x \in V(D)$, decimos que D es un **in-torneo** (**ex-torneo**)

Una digráfica D es **localmente semicompleta** si D es localmente in-semicompleta y localmente ex-semicompleta, analogamente D es **torneo local** si D es in-torneo y ex-torneo a la vez. Claramente toda digráfica semicompleta es localmente semicompleta.

Por otro lado las digráficas que de igual forma generalizan a los torneos e ilustran la segunda propiedad de los torneos antes mencionada son las **digráficas cuasitransitivas**, pero introducimos mejor estas digráficas señalando primero las **digráficas transitivas**.

Dada una digráfica D, decimos que D es una **digráfica transitiva** si para cada tercia de vértices distintos $x, y, z \in V(D)$ tales que xy y yz son flechas de D, entonces existe la flecha $xz \in F(D)$. Una digráfica D es **cuasitransitiva** si, para cada tercia x, y, z de vértices distintos de D tales que xy y yz son flechas en D, entonces existe al menos una flecha entre x y z. Claramente una digráfica semicompleta es cuasitransitiva, por lo que todo torneo es cuasitrantivo. Notemos que si sólo existe una flecha entre x y z, ésta puede ir en cualquiera de las 2 direcciones, por lo que las digráficas cuasitransitivas son una generalización de las transitivas. En la Figura 1.5 se aprecia un ejemplo de una digráfica cuasitransitiva que no es transitiva, la primera vez que estas fueron mencionadas fue en [12] por Ghouilá-Houri.

Muchas veces en una digráfica podemos encontrar un subconjunto de vértices para los que no existe ninguna flecha entre ellos, este hecho motiva la siguiente generalización de los torneos. Dado un conjunto A, una k-**partición** ordenada de A es una sucesión $(A_1, A_2, ..., A_k)$, donde $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$ y $\cup_{i=1}^{k} A_i = A$. Sea D una digráfica y k un entero positivo mayor o igual a 2, decimos que D es una **digráfica** k-**partita** si existe una k-partición de

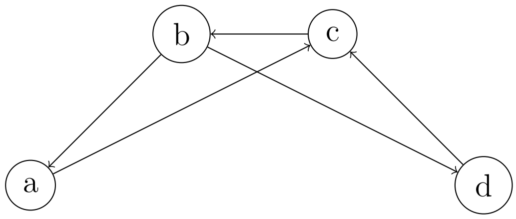

Figura 1.5: Ejemplo de una digráfica cuasitransitiva

los vértices $(V_1, V_2, ..., V_k)$ tal que para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ se tiene que si $\{x, y\} \subseteq V_i$, entonces x y y no son adyacentes en D. A los conjuntos $V_1, ..., V_k$ los nombraremos las **clases** de D, cuando D conste de solamente 2 clases V_1 y V_2 decimos que D es una **digráfica bipartita**. Notemos que la clase de digráficas k-partitas también pueden ser considerada una generalización de los torneos, ya que un torneo T es una digráfica k-partita donde las partes de T constan de un solo vértice. Decimos que D es una **digráfica k-partita semicompleta** o una **digráfica multipartita semicompleta** si D es una digráfica k-partita y para cualesquiera dos vértices de distintas partes de D son adyacentes entre sí, en el caso en que toda flecha sea simétrica diremos que D es una **digráfica k-partita completa** o una **digráfica multipartita completa**. Análogamente en el caso en que D solamente tenga dos partes se definen las **digráficas bipartitas semicompletas** y **las digraficas bipartitas completas**.

Una digráfica D es **k-combinable por trayectorias**, para algún entero $k \geq 2$, si para cualesquiera $x, y \in V(D)$ y cualquier par P y Q de (x, y)-trayectorias internamente ajenas en D, cada una de longitud a lo más k, existe una (x, y)-trayectoria R en D, tal que $V(R) = V(P) \cup V(Q)$. Una digráfica de orden n es **combinable por trayectorias** si esta es n-combinable por trayectorias. No es claro que las digráficas combinables por trayectorias son una generalización de los torneos, pero en cambio es muy sencillo notar esta propiedad si primero mostramos el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. *Todo digráfica D localmente in-semicompleta (localmente ex-semicompleta) es combinable por trayectorias.*

Demostración. Sea D una digráfica localmente ex-semicompleta, consideremos dos vértices $u, v \in V(D)$ y cualquier par $P = (u = u_0, u_1, ..., u_r = v)$ y $Q = (u = v_0, v_1, ..., v_s = v)$ de (u, v)-trayectorias internamente ajenas. La prueba la completaremos por inducción fuerte sobre $r + s$ (número de vértices distintos entre $V(P)$ y $V(Q)$). Si $r = 1 = s$ (caso base), tenemos que $u_1 = v = v_1$, luego P es una (u, v)-trayectoria tal que $V(P) = V(P) \cup V(Q)$, lo que muestra el caso base. Supongamos que si $r+s \leq k \in \mathbb{N}$, entonces existe S una (u, v)-trayecoria tal que $V(S) = V(P) \cup V(Q)$, Sea $r+s = k+1$, como D es localmente ex-semicompleta, entonces la flecha $u_1v_1 \in F(D)$ o la flecha $v_1u_1 \in F(D)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $u_1v_1 \in F(D)$, se sigue que $P_1 = (u_1, u_2, ..., u_r)$ y $Q_1 = (u_1, v_1, v_2..., v_s)$ son dos (u_1, v)-trayectorias internamente ajenas debido a que P y Q lo son, además cumplen con que el número de vértices distintos entre $V(P_1)$ y $V(Q_1)$ es menor o igual que k, por lo que podemos aplicarle la hipótesis de inducción a las trayectorias P_1 y Q_1 implicando la existencia de una u_1v-trayectoria $S = (u_1, x_1, ..., x_k, v)$ tal que $V(S) = V(P_1) \cup V(Q_1)$. Como $u \notin V(S)$, es claro que $T = (u, u_1, x_1, ..., x_k, v)$ es una (u, v)-trayectoria que cumple con que $V(T) = V(P) \cup V(Q)$, lo que muestra que D es combinable por trayectorias. La demostración suponiendo que D es localmente in-semicompleta se sigue de la dualidad entre la invecindad y la exvecindad.

□

Del teorema anterior podemos notar que las digráficas combinables por trayectorias son generalización de los torneos, esto se sigue debido a que como todo torneo es una digráfica semicompleta y toda digráfica semicompleta es una digráfica localmente semicompleta, luego por la proposición anterior tenemos que todas las digráficas localmente semicompletas son digráficas combinables por trayectorias, lo que manifiesta la generalidad de las digráficas combinables por trayectorias.

Capítulo 2

Caracterizaciones Transitivas y Cuasitransitivas

En este capítulo mostraremos con exhaustivo detalle caracterizaciones de algunas generalizaciones de torneos presentadas en el capítulo anterior.

2.1. Digráficas Transitivas

Daremos una caracterización estructural de las digráficas transitvas la cual es propuesta como ejercicio en [4] y con detenimiento resolvemos a continuación.

Lema 2.1.1. *Sean D una digráfica y $\{x, y\} \subseteq V(D)$. Si y es alcanzable desde x entonces existe una (x, y)-trayectoria en D.*

Demostración. Como y es alcanzable desde x, entonces existe un (x, y)-camino. Si este (x, y)-camino no repite vértices terminamos puesto que por definición es una (x, y)-trayectoria; si repite vértices, supongamos que $P = (a_1, a_2, ..., a_n)$ es el (x, y)-camino. Procedamos por inducción sobre el número de ciclos en el (x, y)-camino. Sea r este número, si $r = 1$ se sigue que P contiene un ciclo, pero anulando la parte repetida de éste obtenemos una trayectoria de x a y pues tenemos un (x, y)-camino sin ciclos, es decir una trayectoria. Para $r = k+1$ tenemos que hay un primer vértice del primer ciclo en P, retirando los vértices de este ciclo quedan k ciclos en un (x, y)-camino por lo que es aplicable la hipótesis de inducción, generando una (x, y)-trayectoria, lo que prueba la proposición.

□

Lema 2.1.2. *Sea D una digráfica transitiva. Si $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es una trayectoria en D, entonces $x_1x_n \in F(D)$.*

Demostración. Por inducción sobre n. Caso $n = 1, 2$ son practicamente la adyacencia deseada por lo que consideramos el caso base cuando $n = 3$. En este caso $P = (x_1, x_2, x_3)$, pero como D es transitiva se sigue que x_1 domina a x_3. Caso $n = k + 1$, si $P = (x_1, x_2, ..., x_kx_{k+1})$ entonces $T = (x_1, x_2, ..., x_k)$ es una trayectoria de longitud k por lo que cumple la hipótesis de inducción, implicando que x_1 domina a x_k, de esta forma (x_1, x_k, x_{k+1}) es una trayectoria de longitud 2 y como D es transitiva tendremos que x_1 domina a x_{k+1} lo que termina la prueba.

□

Lema 2.1.3. *Si D es una digráfica transitiva, entonces su digráfica de condensación es transitiva.*

Demostración. Sean D una digráfica transitiva y $SC(D)$ la digráfica de condensación de D. Sean $\{x, y, z\} \subseteq V(SC(D))$ tal que $\{xy,yz\} \subseteq F(SC(D))$. Sabemos que x es el resultado de contraer una componente fuerte S_x de D y que y es la contracción de una componente fuerte S_y de D. También sabemos que $xy \in F(SC(D))$ si y sólo si existe una flecha desde S_x hacia S_y en D, por lo que existe $ab_1 \in F(D)$ con $a \in V(S_x)$ y $b_1 \in V(S_y)$. Análogamente, z es la contracción de una componente fuerte S_z, y existe $b_2c \in F(D)$ con $b_2 \in V(S_y)$ y $c \in V(S_z)$, debido a que $yz \in F(SC(D))$. Si $b_1 = b_2$, entonces como D es transitiva tendremos que $ac \in F(D)$ y luego $xz \in F(SC(D))$ como queremos. Si $b_1 \neq b_2$ entonces como $\{b_1, b_2\} \subseteq V(S_y)$ se tiene que b_2 es alcanzable desde b_1 , por lo que existe un (b_1, b_2)-camino , y una (b_1, b_2)-trayectoria por el Lema 2.1.1, luego como D es transitiva, por el Lema 2.1.2, tendremos que b_1 domina a b_2 y como las componentes fuertes son ajenas entre si, podemos formar la trayectoria $P = (a, b_1, b_2, c)$ en D. Aplicando de nuevo el lema anterior, se tiene que $ac \in F(D)$ y por lo tanto $xz \in F(SC(D))$, lo que garantiza que $SC(D)$ es transitiva.

□

Lema 2.1.4. *Una digráfica D fuerte es transitiva si y sólo si D es completa.*

Demostración. Supongamos primero que D es completa, luego si $\{ab, bc\} \subseteq F(D)$ es claro que $ac \in F(D)$ por que D es completa, de esta forma D es transitiva. Supongamos ahora que D es una digráfica fuerte y transitiva. Sea $\{x, y\} \subseteq V(D)$, como D es fuerte, entonces y es alcanzable desde x y x es alcanzable desde y, luego existe una (x, y)-trayectoria y una (y, x)-trayectoria por Lema 2.1.1, luego por el Lema 2.1.2 tenemos que $\{xy, yx\} \subseteq F(D)$, por lo que D es completa.

□

Teorema 2.1.5 (Caracterización de la digráficas transitivas [4]). *Sea D una digráfica con un orden acíclico $S_1, S_2, ..., S_n$ de sus componentes fuertes, entonces D es una digráfica transitiva si y sólo si S_i es completa para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y la digráfica H obtenida de D por contracción de $S_1, S_2, ..., S_n$ seguido por el borrado de flechas multiples es una digráfica transitiva y $D = H[S_1, S_2, ..., S_n] = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n]$.*

Demostración. Supongamos primero que D es transitiva, por definición de $SC(D)$ y de composición tenemos que $V(D) = V(SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n])$, así que basta probar por el Lema 2.1.4, que $F(D) = F(SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n])$. Sea $xy \in F(D)$, notemos que si $xy \in S_i$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $xy \in F(SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n])$. Si xy no pertenece a alguna componente fuerte S_i, se sigue de igual forma que xy deberá de ser una flecha entre dos componentes fuertes por lo que $xy \in F(SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n])$. De esta forma $F(D) \subseteq F(SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n])$.

Notemos que en este punto basta probar que si existe una flecha $ab \in F(D)$ con $a \in S_i$ y $b \in S_j$, entonces cada vértice de S_i domina a cada vértice de S_j por definición de composición y de $SC(D)$. Como $b \in S_j$ y S_j es fuerte, por el Lema 2.1.4 se sigue que S_j es completa, entonces b domina a cada vértice de S_j. Como supusimos que D es transitiva, se sigue que a domina a todo vértice de S_j. Por otro lado, como S_i es completa, otra vez por el Lema 2.1.4 y $a \in S_i$, entonces todo vértice de S_i domina a a, luego por la transitividad de D tendremos que cualquier vértice de S_i domina a b y por un argumento análogo al de que a domina a todos los vértices de S_j tendremos que cada vértice S_i domina a cada vértice de S_j, lo que muestra que $D = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n]$.

Supongamos ahora que $D = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n]$ y S_k es completa para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, notemos que por el Lema 2.1.3 sabemos que si una digráfica es transitiva entonces $SC(D)$ es transitiva, por lo que si $SC(D)$ no es transitiva entonces D tampoco es transitiva, de esta forma podemos suponer en esta parte de la demostración gracias a la contrapositiva del Lema 2.1.3 que $SC(D)$ es transitiva. Probaremos ahora que $D = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n]$ es transitiva. Sean $\{ab, bc\} \subseteq F(D)$ notemos que si $\{a, b, c\} \subseteq V(S_i)$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se sigue que $ac \in F(S_i)$ debido a que S_i es completa por hipótesis, si $\{a, b\} \subseteq V(S_i)$ y $c \in V(S_j)$ con $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces como $D = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n]$, se sigue que cada vértice de S_i domina a cada vértice de S_j por lo que se satisface la condición de transitividad. Si $a \in S_i$ y $\{b, c\} \subseteq S_j$ entonces otra vez como cada vértice de S_i domina a cada vértice de S_j tendremos que se sastiface la condición de transitividad. Por último supongamos que $a \in V(S_i)$, $b \in V(S_j)$ y $c \in V(S_k)$ con i, j, k distintos entre sí y con $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. En este caso, como $SC(D)$ es transitiva y $D = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_n]$, entonces S_i domina a S_k por lo que $ac \in F(D) = F(SC(D))[S_1, S_2, ..., S_n]$, por lo tanto D es transitiva.

□

2.2. Digráficas Cuasitransitivas

La estructura de las digráficas transitivas es tan rica que trabajando en esta familia de digráficas muchos problemas suelen tener una simple solución. En vista de esta situación, se han estudiado generalizaciones de las digráficas transitivas, de todas estas generalizaciones la más estudiada, sin duda, son las digráficas cuasitransitivas. En la presente sección daremos una caracterización estructural de las digráficas cuasitransitivas, este resultado es obra de Bang Jensen y Huang en [5].

Lema 2.2.1. *Sea D una digráfica cuasitransitiva, supongamos que $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es una (x_1, x_n)-trayectoria minimal, entonces la subdigráfica inducida por $V(P)$ es una digráfica semicompleta y x_j domina a x_i para todo $2 \leq i + 1 < j \leq n$, salvo cuando $n = 4$, en este caso la flecha de x_n a x_1 puede no existir.*

Demostración. El caso cuando $n = 2$ es trivial. Si $n = 3$ tenemos una trayectoria $P = (x_1, x_2, x_3)$ y como D es cuasitransitiva, entonces x_1 y x_3 son adyacentes. Como P es minimal entonces x_3 domina a x_1, como queremos. Supongamos $n = 4$, este es el caso resctrictivo de nuestro lema, sea $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ una (x_1, x_4)-trayectoria minimal. Análogamente, como D es transitiva y P minimal tenemos que x_3 domina a x_1 y x_4 domina a x_2, pero no tenemos una razón para garantizar que x_4 y x_1 sean adyacentes aunque en caso de serlo x_4 domina a x_1 porque P es minimal. Ahora procederemos la prueba por inducción con base cuando $n = 5$, supongamos que $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ una (x_1, x_5)-trayectoria minimal entonces $x_{i+2} \longrightarrow x_i$ para toda $i \in \{1, 2, 3\}$, luego $x_5x_3, x_3x_1 \in F(D[V(P)])$ tendremos que x_5 domina a x_1 porque D es cuasitransitiva y P minimal. Como $\{x_5x_1, x_1x_2\} \subseteq F(D[V(P)])$ x_5 domina a x_2 por ser D cuasitransitiva y P minimal. Análogamente, $\{x_4x_5, x_5x_1\} \subseteq F(D[V(P)])$ por lo que x_4 domina a x_1 y x_2 otra vez debido a que D es cuasitransitiva y P es minimal, lo que muestra que $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta en D y termina el caso base. Supongamos ahora que para $n = k \geq 6$ nuestro resultado es válido y lo probaremos para $n = k+1$. Supongamos que $P = (x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1})$ es una (x_1, x_{k+1})-trayectoria minimal, consideremos $P_1 = (x_1, x_2, ..., x_k)$ como una (x_1, x_k)-trayectoria. Tenemos que P_1 será minimal debido a que P es minimal, por lo que podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción y garantizar que $D[V(P_1)]$ es una digráfica semicompleta en D, por otro lado sabemos que $\{x_{k-1}x_k, x_k x_{k+1}\} \subseteq F(P)$, por lo que $x_{k+1}x_{k-1} \in F(D[V(P)]$. También sabemos que x_{k-1} domina a x_1 por hipótesis de inducción; como D es cuasitransitiva y P minimal, tendremos que x_{k+1} domina x_1. Luego, por la cuasitransitividad de D y la minimalidad de P se sigue que $x_{k+1} \longrightarrow x_i$ para todo $i \in \{2, 3, ..., k-3, k-2\}$, por lo que $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta en D y x_j domina a x_i para todo $2 \leq i+1 < j \leq n$, lo que termina la demostración.

□

Corolario 2.2.2. *Si D es una digráfica cuasitransitiva y D contiene una (x, y)-trayectoria tal que x no domina a y, entonces y domina a x o existen vértices $u, v \in V(D) - \{x, y\}$ tales que $x \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow y$ y $y \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow x$.*

Demostración. Consideremos P la (x, y)-trayectoria de longitud minima en D (la cual no es de longitud 1 por hipótesis), y apliquemos el Lema 2.2.1. Si la longitud de P es distinta de 3, terminamos porque el lema garantiza que y domina a x. Si la longitud de P es igual a 3 entonces $P = (x, u, v, y)$ y por la condición de cuasitransitividad de D junto con la minimalidad de P tendremos que $y \longrightarrow u$ y $v \longrightarrow x$, de tal forma que $x \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow y$ y $y \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow x$, como deseamos.

□

Lema 2.2.3. *Supongamos que A y B son distintas componentes fuertes de una digráfica cuasitransitiva D con al menos una flecha de A hacia B, entonces A domina completamente a B, es decir $A \Rightarrow B$.*

Demostración. Sea xy una flecha tal que $x \in V(A)$ y $y \in V(B)$. Como B es fuerte, existe P una (y, z)-trayectoria contenida en B para todo $z \in V(B)$. Si $P = (y, c_1, c_2, ..., c_n, z)$ tendremos que x es adyacente a c_1 por ser D cuasitransitiva, además x domina a c_1 debido a que c_1 no puede dominar a x puesto que se formaría un ciclo dirigido que contiene a x, y, c_1 contradiciendo que x y c_1 están en componentes fuertes distintas. Análogamente se sigue que x domina a cada c_i por ser D cuasitrasitiva y ser A y B componentes fuertes distintas. De la misma forma, x domina a z, como la elección de z es arbitraria, tenemos que x domina a cada vértice de B. Por otro lado, como A es fuerte, para todo vértice existe una (w, x)-trayectoria en A para todo $w \in V(A)$. Si $T = (w, d_1, d_2, ..., d_m, x)$, tenemos que d_m domina a y porque $xy \in F(D)$, D cuasitransitiva y d_m domina a x. Análogamente, cada d_j domina a y y así, por un razonamiento totalmente análogo, tenemos que $w \longrightarrow y$ para cualquier vértice $w \in V(A)$. Volviendo a utilizar el razonamiento con el que vimos que x domina a cualquier vértice de B, tenemos que cualquier vértice w de A domina a cada vértice de B. Por otro lado, notemos que ninguna de estas flechas puede ser simétrica por el hecho de que A y B son componentes fuertes distintas de D, por lo que $A \Rightarrow B$.

□

Lema 2.2.4. *Si D es una digráfica fuerte cuasitransitiva con al menos un par de vértices. Entonces $\overline{U(D)}$ es inconexa. Además, si S y S' son dos subdigráficas de D tales que $\overline{U(S)}$ y $\overline{U(S')}$ son componentes conexas disitintas de $\overline{U(D)}$, entonces $S \Rightarrow S'$, $S' \Rightarrow S$ ó $S \mapsto S'$ y $S' \mapsto S$ en cuyo caso $|V(S)| = |V(S')| = 1$.*

Demostración. Probaremos que $\overline{U(D)}$ es inconexa en la segunda parte de la demostración. Supongamos primero que S y S' son dos subdigráficas de D tales que $\overline{U(S)}$ y $\overline{U(S')}$ son componentes conexas disitintas de $\overline{U(D)}$. Notemos que, como $\overline{U(S)}$ y $\overline{U(S')}$ son componentes conexas distintas de $\overline{U(D)}$, no deberá existir ninguna flecha entre ellos en $\overline{U(D)}$, por lo que cada vértice de $U(S)$ es adyacente a cada vértice de $U(S')$ en $U(D)$. De esta forma, cada vértice de S es adyacente a cada vértice de S' en D. Supongamos que existe una flecha simétrica $xy \in F(D)$, $x \in V(S)$, $y \in V(S')$ y supongamos que $|V(S')| \neq 1$. Como x es adyacente a cada vértice de S' se tendrá que la cuasitransitividad de D garantizará que y es adyacente a cada vértice de S' en D por lo que $\overline{U(S')}$ no será una componente conexa de $\overline{U(D)}$, lo cual es una contradicción. Análogamente, si suponemos que $|V(S)| \neq 1$ entonces por la cuasitransitividad de D tendremos que x será adyacente a cada vértice de S en D, implicando que $\overline{U(S')}$ no será una componente conexa de $\overline{U(D)}$, lo cual es de nuevo una contradicción. Así que si existe una flecha simétrica entre S y S' se tiene que cumplir que $|V(S)| = |V(S')| = 1$ cuando $S \longmapsto S'$ y $S' \longmapsto S$.

Supongamos ahora que $|V(S)| \geq 1$ ó $|V(S')| \geq 1$ y que no existen flechas simétricas entre S y S' en D, supongamos también sin perdida de generalidad que existe una flecha $xy \in F(D)$ con $x \in V(S)$ y $y \in V(S')$. Veamos que x domina a cada vértice de S' ya que si existe $w \in V(S')$ tal que domina a x entonces $A = \{z \in V(S')|z \longrightarrow x\} \neq \emptyset$ y $B = \{v \in V(S')|x \longrightarrow v\} \neq \emptyset$. Luego, por la adyacencia entre cada vértice de S y S' en D tendremos que A

y B forman una partición de $V(S')$, y por la propiedad de cuasitransitividad de D, cada vértice de A deberá ser adyacente a cada vértice de B en D, por lo que A y B no tendrán flechas entre sí en $\overline{U(D)}$, lo que contradice que $\overline{U(S')}$ es una componente conexa en $\overline{U(D)}$, por lo que x domina a cada vértice de S' en D. Análogamente, notemos ahora que ningún vértice de S' puede dominar a algún vértice de S, puesto que podríamos formar una partición de $V(S)$ entre los vértices que dominan a ese vértice y los que son dominados por ese vértice y usando la propiedad de cuasitransitividad de D, llegar a la contradicción de que $\overline{U(S)}$ no es componente conexa de $\overline{U(D)}$. Por lo tanto, $S \Rightarrow S'$ si existe una flecha de S hacia S' y la cardinalidad de S o S' es distinta de 1. Por la simetría de la demostración, $S' \Rightarrow S$ si existe una flecha de S' hacia S y no existen flechas simétricas entre S y S'.

Mostraremos ahora que $\overline{U(D)}$ es inconexa. Esta afirmación es claramente cierta cuando $|V(D)| = 2$ ó $|V(D)| = 3$, así que procedamos por inducción asumiendo que $\overline{U(D)}$ es inconexa cuando $|V(D)| < n$, donde $n > 3$.

Supongamos primero que existe un vértice z tal que $D - z$ no es fuerte, por lo que contendrá un ordenamiento acíclico de sus componentes fuertes. Entonces, como D es fuerte por hipótesis, deberá existir una flecha de toda componenente fuerte terminal de $D - z$ hacia z en D. Análogamente existirá una flecha desde z hacia cada componente incial de $D - z$ en D porque D es fuerte y $D - z$ no lo es. Ahora notemos que como D es cuasintrasitiva, en conjunto con el Lema 2.2.3, implican que cada componente fuerte incial de $D - z$ domina totalmente a cada componente fuerte accesible desde esta componente fuerte incial (las componentes intermedias accesibles desde esta componente inicial también dominan totalmente a la respectiva componente fuerte terminal accesible desde esta componente intermedia), por lo que cada componente fuerte de $D - z$ domina a una componente fuerte terminal o es dominada por una componente fuerte incial (las componentes fuertes intermedias satisfacen ambas afirmaciones). La propiedad de cuasitransitividad de D implica que z es adyacente a cada vértice en $D - z$, por lo que $\overline{U(D)}$ contiene una componente conexa que consiste solamente del vértice z, por lo tanto $\overline{U(D)}$ es inconexa.

Asumamos ahora que existe $x \in V(D)$ tal que $D - x$ es fuerte, como D es fuerte por hipótesis se sigue que existe $xw \in F(D)$, con $w \in D - x$. Luego, por hipótesis de inducción, tenemos que $\overline{U(D - x)}$ no es fuerte, así que podemos escoger S y S' un par de componentes conexas de $\overline{U(D - x)}$ y las escogemos de tal forma que $w \in V(S)$ y $S \longmapsto S'$ en D (esto lo podemos escoger debido a que $D - x$ es fuerte y la segunda parte de este lema ya previamente probada en esta demostración). Se sigue por la propiedad de cuasitransitividad de D que x domina a cada vértice de S' en D (puesto que x domina a w), por lo tanto $\overline{U(S')}$ es una componente conexa de $\overline{U(D)}$, así que $\overline{U(D)}$ es inconexa.

□

El siguiente teorema caracteriza a las digráficas cuasitransitivas de una manera recursiva y se debe a Bang Jensen y Huang.

Teorema 2.2.5 (Caracterización de las digráficas cuasitransitivas, Bang-Jensen y Huang [5])**.** *Sea D una digráfica cuasitransitiva.*

a) Si D no es fuerte, entonces es obtenida desde una digráfica transitiva sin flechas simétricas T con vértices $\{u_1, u_2, ..., u_t\}$ y digráficas fuertes cuasitransitivas $H_1, H_2, ..., H_t$ tales que $D = T[H_1, H_2, ..., H_t]$, donde H_i es substituida para u_i, $i = 1, 2, ..., t$.

b) Si D es fuerte, entonces existe S una digráfica semicompleta con vértices $\{v_1, v_2, ..., v_s\}$ y digráficas cuasitransitivas $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ tales que cada Q_i consta de un solo vértice o es es una digráfica no fuerte y $D = S[Q_1, Q_2, ..., Q_s]$ donde Q_i es substituida por v_i , $i = 1, 2, ..., s$.

Demostración. Supongamos primero que D no es fuerte y sean $H_1, H_2, ..., H_t$ las componentes fuertes de D. Notemos que si existe una flecha entre H_i y H_j esta flecha no puede ser simétrica por el hecho de que H_i y H_j son componentes fuertes distintas. Luego, por el Lema 2.3.3 tenemos que pasará solo una de las siguientes dos afirmaciones $H_i \Rightarrow H_j$ ó $H_j \Rightarrow H_i$. Es claro que por la cuasitransitividad de D si tenemos que $H_i \Rightarrow H_j \Rightarrow H_k$, entonces $H_i \Rightarrow H_k$, por lo que si contraemos cada H_i a un vértice h_i, obtendremos una digráfica transitiva sin flechas simétricas T con vértices $h_1, h_2, ..., h_t$, lo que muestra que $D = T[H_1, H_2, ..., H_t]$.

Asumamos ahora que D es fuerte. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ las subdigráficas de D tales que cada $\overline{U(Q_i)}$ es una componente conexa de $\overline{U(D)}$. Notemos que el Lema 2.2.4 nos garantiza que ninguna Q_i es fuerte o es un solo vértice, ya que de ser fuerte tendriamos que $\overline{U(Q_i)}$ es inconexa por el Lema 2.2.4. Luego, por la segunda parte del Lema 2.2.4, si contraemos cada Q_i a un vértice q_i obtendremos una digráfica semicompleta S, lo que prueba que $D = S[Q_1, Q_2, ..., Q_s]$.

□

2.3. Digráficas 3-cuasitransitivas

Las digráficas cuasitransitivas inspiran el concepto de las digráficas 3-cuasitransitivas las cuales fueron introducidas por Bang Jensen en [2]. Una digráfica D es 3-cuasitransitiva si para todos vértices distintos $\{u, v, w, z\} \subseteq V(D)$ tales que $u \longrightarrow v \longrightarrow w \longrightarrow z$ se sigue que u y z son adyacentes o $u = z$. En [2] Bang Jensen no solo intrudujo las digráficas 3-cuasitransitivas sino que afirmó que las digráficas fuertes semicompletas y las digráficas fuertes bipartitas semicompletas eran las únicas digráficas fuertes 3-cuasitransitivas, pero en [10] Galeana-Sánchez, Goldfeder y Urrutia prueban que Bang Jensen no se percató que existe una familia de digráficas, que aquí llamamos digráficas F_n, que son 3-cuasitransitivas fuertes y no son ni semicompletas ni bipartitas semicompletas. Los siguientes lemas hablan sobre la estructura de las digráficas 3-cuasitransitivas y completan la demostración del teorema de caracterización de estas probado en [10] (donde puede consultarse su demostración) por Galeana-Sánchez, Goldfeder y Urrutia.

Lema 2.3.1. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva, si para un par $\{x, y\} \subseteq V(D)$ existe una (x, y)-trayectoria de longitud impar, entonces x y y son adyacentes.*

Lema 2.3.2. *Sea D una digráfica fuerte 3-cuasitransitiva con al menos 3 vértices. Si D no es una digráfica bipartita entonces ésta contiene un 3-ciclo T, además todo $v \in V(D)$ es adyacente a al menos 2 vértices de $V(T)$. Finalmente, si suponemos que $|V(D)| \geq 4$ y $T = x_1, x_2, x_3, x_1$, entonces para todo $s \in V(D) \backslash V(T)$, si $s \longrightarrow x_i$, entonces s y x_{i+2} son adyacentes; si $x_i \longrightarrow s$, entonces x_{i-2} y s son adyacentes, donde los subíndices son tomados módulo 3.*

Lema 2.3.3. *Sea D una digráfica fuerte 3-cuasitransitva de orden $n \geq 4$. Si D contiene un 3-ciclo T como una subdigráfica y existe un vértice $u \in V(D) \backslash V(T)$ tal que u es adyacente a cada vértice de T entonces D es una digráfica semicompleta.*

Consideremos las digráficas F_n con vértices $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y flechas $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{x_1x_{i+3}, x_{i+3}x_2 : i = 1, 2, ..., n-3\}$, donde $n \geq 4$.

Lema 2.3.4. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva de orden $n \geq 4$. Si D contiene un 3-ciclo T como subdigráfica y no existe $v \in V(D) \backslash V(T)$ tal que v es adyacente a cada vértice de T, entonces D es isomorfo a F_n.*

Teorema 2.3.5 (Galeana-Sánchez, Goldfeder y Urrutia [10])**.** *Sea D una digráfica fuerte 3-cuasitransitiva de orden n, entonces D es una digráfica semicompleta, una digráfica bipartita semicompleta o es ismorfa a alguna F_n.*

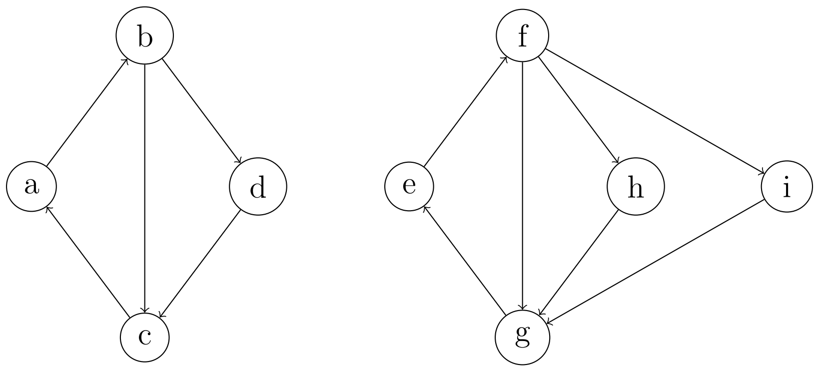

Figura 2.1: Ejemplo de F_4 y F_5 respectivamente.

Demostración. Si D es una digráfica bipartita con bipartición X, Y, como D es fuerte, para cualquier par de vértices $x \in X$, $y \in Y$ existe una (x, y)-trayectoria. Como son vértices de partes de la bipartición distintas, la longitud de la trayectoria es impar, por el Lema 2.3.1 x y y son adyacentes, por lo que D es una digráfica bipartita semicompleta. Ahora supongamos que D es una digráfica no bipartita, por el Lema 2.3.2, D contiene un 3-ciclo T como subdigráfica. Si $n = 3$ entonces D es semicompleta, por lo que supongamos que $n \geq 4$. Si existe un vértice que es adyacente a todo vértice de T, por el Lema 2.3.3 D es semicompleta; si no, por el Lema 2.3.4, D es isomorfa a alguna digrafica de la familia F_n, lo que termina la prueba del teorema.

□

2.4. Digráficas 3-transitivas

Así como las digráficas cuasitransitivas inspiran el concepto de las digráficas 3-cuasitransitivas, las digráficas transitivas inspiran el de las digráficas 3-transitivas. Una digráfica D es 3-cuasitransitiva si para vértices distintos $\{u, v, w, z\} \subseteq V(D)$ tales que $u \longrightarrow v \longrightarrow w \longrightarrow z$ se sigue que $u \longrightarrow z$ o $u = z$. Claramente toda digráfica 3-transitiva es 3-cuasitransitiva. En esta sección daremos la caracterización de las digráficas fuertes 3-transitivas cuya demostración es una aplicación del teorema de caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas citado en la sección anterior, junto con otras proposiciones sobre la esctructura de las digráficas 3-transitivas. La prueba de este resultado y sus lemas anteriores se puede consultar en [16] y se debe a su autor Hernández-Cruz.

Lema 2.4.1. *Sea D una digráfica 3-transitiva, si $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ es una*

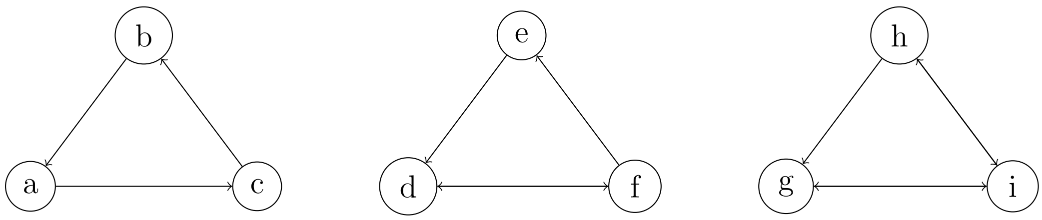

Figura 2.2: C_3 , C_3^* y C_3^{**} respectivamente.

(x_0, x_n)-trayectoria de longitud impar se sigue que $x_0x_i \in F(D)$ para todo entero impar i, con $1 \leq i \leq n$.

Lema 2.4.2. *Sea D una digráfica fuerte 3-transitiva de orden $n \geq 4$. Si D es semicompleta, entonces D es completa.*

Lema 2.4.3. *Sea D una digráfica fuerte 3-transitva de orden $n \geq 4$. Si D es bipartita semicompleta, entonces D es bipartita completa.*

Teorema 2.4.4 (Caracterización de las digráficas fuertes 3-transitivas, Hernández-Cruz [16])**.** *Una digráfica D fuerte es 3-transitiva si y sólo si D es una de las siguientes digráficas:*

a) D es una digráfica completa.

b) D es una digráfica bipartita completa.

c) D es C_3 , C_3^* ó C_3^{**}.

Demostración. Como toda digráfica 3-transitiva es 3-cuasitransitiva, en virtud del Teorema de Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas fuertes tenemos que las digráficas 3-transitivas fuertes son, o una digráfica semicompleta, bipartita semicompleta o isomorfa alguna digráfica de la familia de digráficas F_n. Es fácil notar que toda la familia de digráficas F_n es una familia de digráficas que no son 3-transitivas, por lo que la digráfica 3-transitiva sera una digráfica semicompleta o bipartita semicompleta. Es claro que si suponemos que la cardinalidad de una digráfica 3-transitiva fuerte es menor o igual que 3, ésta será isomorfa a una digráfica completa, bipartita completa ó a C_3 , C_3^* ó C_3^{**}. Si suponemos que la cardinalidad de una digráfica 3-transitiva fuerte es mayor que 3 entonces tendremos 2 casos. El primero es que sea semicompleta, pero en este caso por el Lema 2.4.2, podemos afirmar que está digráfica sera completa. El segundo caso es cuando es bipartita semicompleta, pero en este caso por el Lema 2.4.3 podemos afirmar que la digráfica en cuestión sera bipartita completa lo que termina la demostración. □

Lamentablemente no se conoce aún una caracterización de las digráficas 3-transitivas pero los siguientes resultados junto con la caracterización de las digráficas transitivas expuesta antes ayudan a dar una caracterización de las digráficas 3-transitivas que son transitivas. Esta caracterización también fue propuesta en [16] y se debe a su autor Hernández-Cruz. El siguiente teorema muestra que la estructura de las digráficas 3-transitivas es muy parecida a la estructura de las digráficas transitivas.

Teorema 2.4.5. *Sea D una digráfica no fuerte y 3-transitiva con componentes fuertes $S_1, S_2, ..., S_p$. Entonces $D = SC(D)[S_1, S_2, ..., S_p]$ si y sólo si, para todo par de componentes fuertes S_i, S_j de D, tales que exista una flecha de S_i a S_j en $F(D)$, entonces:*

a) Si S_i, S_j son digráficas bipartitas semicompletas, entonces $D[S_i \cup S_j]$ no es bipartita.

b) Si S_i es una digráfica bipartita completa y S_2 consiste solamente de un sólo vértice v, entonces $D[S_1 \cup \{v\}]$ no es bipartita.

c) Si S_i consiste solamente de un vértice v y S_2 es una digráfica bipartita completa, entonces $D[\{v\} \cup S_2]$ no es bipartita.

Teorema 2.4.6. *Sea D una digráfica 3-transitiva. Entonces $SC(D)$ es una digráfica transitiva si y sólo si para toda tripleta de componentes fuertes S_1, S_2, S_3 de D, tales que: S_i consiste solamente de un vértice para $i \in \{1, 3\}$ y S_2 consiste solamente de un vértice v_2 ó es una digráfica bipartita completa con bipartición (X, Y) y $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3$ (en el primer caso) ó $v_1 \longrightarrow X \longrightarrow v_3$ pero no existe ninguna flecha de v_1 a Y ni de Y a v_3 en D(en el segundo caso), entonces $v_1v_3 \in F(D)$.*

Teorema 2.4.7 (Hernández-Cruz [16])**.** *Sea D una digráfica 3-transitiva, D es una digráfica transitiva si y sólo si cada componente fuerte de D es una digráfica completa y para toda tripleta de componentes fuertes S_1, S_2, S_3, tales que S_i consiste de un solo vértice v_i, para $i \in \{1, 3\}$ y S_2 consiste solamente de un vértice ó de dos vértices x, y con una flecha simétrica entre ellos, tales que $v_1 \longrightarrow x \longrightarrow v_3$ pero $v_1y, yv_3 \notin F(D)$, entonces $v_1v_3 \in F(D)$.*

Capítulo 3

Hamiltonicidad Transitiva y Cuasitransitiva

3.1. Hamiltonicidad en Digráficas Cuasitransitivas

Se sabe que no existen condiciones suficientes y necesarias para determinar cuando una digráfica contiene un ciclo hamiltoniano, sin embargo existe más de una carecterización de la digráficas cuasitransitivas hamiltonianas. Notemos que como toda digráfica transitiva es cuasitransitiva, estos resultados caracterizan también de forma inmediata a las digráficas transitivas hamiltonianas, aunque esta de más notarlo debido a que una digráfica transitiva es hamiltoniana si y sólo si es fuerte.

Además de que en general no están caracterizadas las digráficas hamiltonianas se sabe que determinar si una digráfica es hamiltoniana o tiene una trayectoria hamiltoniana son un par de problemas NP-completos (definición en el apéndice A), estos resultados pertenecen a Garey y Johnson, cuya demostración puede consultarse en [9].

Teorema 3.1.1 (Garey y Johnson [9]). *El problema de determinar cuando una digráfica es hamiltoniana es NP-compelto.*

Teorema 3.1.2 (Garey y Johnson [9]). *El problema de determinar cuando una digráfica contiene una trayectoria hamiltonia es NP-completo.*

Para continuar el estudio de las caracterizaciones de la digráficas cuasitransitivas hamiltonianas, necesitamos definir el siguiente tipo de digráfica.

Decimos que una digráfica D es llamada **semicompleta extendida** si ésta puede ser obtenida por composición de una digráfica semicompleta S substituyendo los vértices por conjuntos independientes de vértices $S_1, S_2, ..., S_k$, tales que para cualquier $i \neq j$, una de las siguientes condiciones se cumple,

$$S_i \Longrightarrow S_j$$

$$S_j \Longrightarrow S_i$$

$$S_i \longrightarrow S_j \qquad y \qquad S_j \longrightarrow S_i.$$

Por otro lado Gutin les llamó en [13] y [15] a estas digráficas, **digráficas multipartitas semicompletas ordinarias** en lugar de digráficas semicompletas extendidas. Es muy sencillo notar que toda digráfica semicompleta es semicompleta extendida. Debemos definir un par de conceptos más para entender los futuros resultados, dada una digráfica D y $k \in \mathbb{N}$, decimos que D contiene un factor **k-trayectoria-ciclo** si D contiene una partición de sus vértices en k trayectorias y r ciclos (notemos que número de ciclos r puede ser igual a cero) que son ajenos entre sí por ser una partición de $V(D)$. Por ejemplo, un factor 1-trayectoria-ciclo de D es una partición de $V(D)$ en una trayectoria y un número natural r de ciclos, por otro lado un **factor ciclo** de una digráfica D es una partición de $V(D)$ en ciclos ajenos, de la definición se sigue que un ciclo hamiltoniano es un factor ciclo y una trayectoria hamiltoniana es una 1-trayectoria-ciclo lo que muestra la utilidad y generalidad de este par de definiciones en problemas de hamiltonicidad.

En la Figura 3.1 podemos apreciar una digráfica que tiene un factor ciclo dado por el siguiente par de ciclos en sus vértices, (a, i, j, d, c, b, a) y (h, e, k, l, g, f, h), lo cual ilustra la definición de factor ciclo y además tiene una 1-trayectoria $(a, i, j, d, c, b, h, f, g, l, k, e)$, pues es trazable.

Sabemos que para que una digráfica sea hamiltoniana necesitamos que ésta sea fuerte y tenga un factor ciclo, pero no siempre son suficientes estas condiciones. El siguiente resultado se debe a Gutin en [3] y caracteriza a las digráficas semicompletas extendidas hamiltonianas (mostrando que ser fuerte y tener un factor ciclo basta) y por ende a las semicompletas hamiltonianas.

Teorema 3.1.3. *Sea D una digráfica semicompleta extendida, D es hamiltoniana (tiene una trayectoria hamiltoniana) si y sólo si D es fuerte y contiene un factor ciclo (tiene un factor 1-trayectoria-ciclo).*

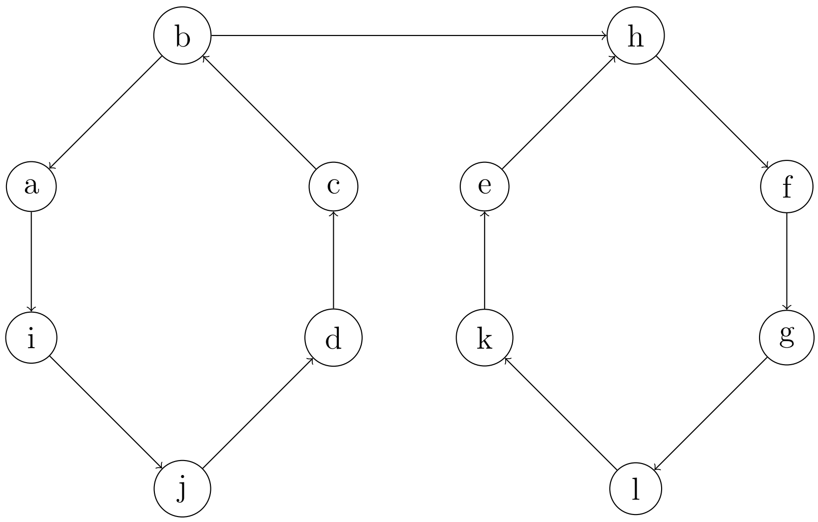

Figura 3.1: Ejemplo de un factor ciclo.

Por otro lado a pesar de la caracterización de Gutin para las digráficas extendidas semicompletas hamiltonianas, existen digráficas cuasitransitivas fuertes y con un factor ciclo que no son hamiltonianas, como ejemplo podemos ver la siguiente construcción.

Construyamos una digráfica D con $5k + 1$ ($k \geq 1$) vértices de la siguiente manera, D consiste de tres subdigráficas ajenas S_1, S_2, S_3 tales que $S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow S_3 \Rightarrow S_1$, donde S_1 consiste de $k - 1$ 3-ciclos ajenos y un conjunto independiente de 2 vértices, S_2 consiste de un único 3-ciclo y de un conjunto de $k - 1$ vértices independientes, S_3 consiste de un conjunto independiente de k vértices. No es difícil probar que D tiene un ciclo de longitud $3 \leq l \leq |V(D)|$ pasando por cada vértice, además D tiene un factor ciclo y es claramente fuerte por construcción, pero la independencia de los subconjuntos de vértices hace imposible que D sea hamiltoniana y por el teorema de caracterización de las digráficas cuasitransitivas se tiene que D es cuasitransitiva.

Sin embargo añadiendo más hipótesis Bang-Jensen y Huang en [5] lograron caracterizar las digráficas cuasitransitivas hamiltonianas y con una trayectoria hamiltoniana.

Teorema 3.1.4 (Bang-Jensen y Huang [5]). *Una digráfica fuerte cuasitransitiva D, con descomposición canónica $D = S[Q_1, Q_2, ..., Q_s]$ es hamiltoniana si y sólo si tiene una factor ciclo F tal que ningún ciclo de F es un ciclo de* *alguna* $D\langle V(Q_i)\rangle$.

Demostración. Si suponemos primero que D es hamiltoniana, entonces D contiene un ciclo hamiltoniano T que claramente es un factor ciclo con la propiedad requerida, puesto que cruza cada Q_i. Supongamos por lo tanto que D es fuerte y tiene un factor ciclo F tal que ningún ciclo de F es un ciclo de alguna $D\langle V(Q_i)\rangle$, probaremos que D es hamiltoniana. Observemos primero que $V(Q_i) \cap F$ es un factor trayectoria F_i de Q_i para toda $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Ahora ignoramos todas las aristas que no pertenezcan a algún F_i para toda $i \in \{1, 2, ..., s\}$ y apliquemos la operación de contracción a cada trayectoria de F_i para toda $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Llamemos S_1 a la digráfica resultante, como S es fuerte y semicompleta por el Teorema de caracterización de digráficas cuasitransitivas, se sigue que S_1 es una digráfica semicompleta extendida, por construcción S_1 es fuerte y tiene un factor ciclo por lo que el Teorema 3.1.3 afirma que tiene un ciclo hamiltoniano. Como se hizo contracción sobre cada trayectoria de cada F_i, el ciclo hamiltoniano de S_1 induce un ciclo hamiltoniano en D, lo que termina la demostración.

□

Teorema 3.1.5 (Bang-Jensen y Huang [5])**.** *Una digráfica cuasitransitiva* D*, con descomposición canónica* $D = R[G_1, G_2, ..., G_r]$ *contiene una trayectoria hamiltoniana si y sólo si tiene un factor 1-trayectoria-ciclo* F *tal que ningún ciclo o trayectoria de* F *esta completamente contenida en alguna* $D\langle V(G_i)\rangle$.

Demostración. Si suponemos primero que D es hamiltoniana entonces D es trazable por lo que D claramente contiene un factor 1-trayectoria-ciclo que cruza cada G_i. Por lo tanto, supongamos que D contiene un factor 1-trayectoria-ciclo F tal que ningún ciclo o trayectoria esta contenido completamente en alguna $D\langle V(G_i)\rangle$, probaremos que D es trazable. Veamos primero que $V(G_i) \cap F$ es un factor trayectoria F_i para cada G_i, con $i \in \{1, 2, ..., r\}$, procedamos ignorando (pero no retirándolas) todas las aristas que no pertenezcan a algún F_i para toda $i \in \{1, 2, ..., r\}$ y apliquemos la operación contracción sobre cada trayectoria de cada F_i. Llamemos R_1 a la digráfica resultante. Ahora, por el teorema de caracterización de las digráficas cuasitransitivas tendremos que R es semicompleta o transitiva. Notemos que si R es transitiva, como ningún ciclo de F esta contenido en un G_i implica que hay ciclos entre al menos dos $G_i's$ distintos, lo que imposibilita que R sea transitiva, por lo que si R es transitiva, F es un factor 1-trayectoria-ciclo sin ciclos, es decir, una trayectoria hamiltoniana. Por otro lado, si R es semicompleta, se sigue que R_1 es una digráfica semicompleta extendida por construcción, luego, por el Teorema 3.1.3, como R_1 tiene un factor 1-trayectoria-ciclo y es semicompleta extendida, se sigue que R_1 es trazabale. Aplicando una operación inversa a la contracción realizada antes sobre cada trayectoria de cada F_i, tendremos que D es trazable, lo que termina la demostración.

□

Estos dos teoremas aparecidos en [5] no mostraron la existencia de un algoritmo en tiempo polinomial (consultar Apéndice A) para determinar si una digráfica es hamiltoniana, trazable o no es ninguna de las dos, por lo que Bang Jensen y Huang en [5] conjeturan la existencia de un algoritmo en tiempo polinomial para resolver el problema de hamiltonicidad y trazabilidad de una digráfica cuasitransitiva D.

El siguiente resultado es otra caracterización de las digráficas cuasitransitivas hamiltonianas esta dada de forma implícita por Gutin en [14]. Para entender este resultado necesitamos otra definición, dada una digrafica D un **factor k-trayectoria** es una colección de k trayectorias ajenas dos a dos que cubren todos los vértices de D y **pc(D)** es el mínimo entero positivo k tal que D tiene un factor k-trayectoria. Claramente si $pc(D) = 1$ entonces D es trazable.

Teorema 3.1.6 (Gutin [14])**.** *Sea D una digráfica cuasitransitiva fuerte con descomposición canónica $D = S[Q_1, Q_2, ..., Q_s]$. Sean $n_1, ..., n_s$ el orden de las digráficas $Q_1, Q_2, ..., Q_s$, respectivamente. Entonces D es hamiltoniana si y sólo si la digráfica semicompleta extendida $S' = S[\overline{K_{n_1}}, \overline{K_{n_2}}, ..., \overline{K_{n_s}}]$ tiene un ciclo como subdigráfica que cubre al menos $pc(Q_j)$ vértices de $\overline{K_n}$ para todo $j \in \{1, 2, ..., s\}$.*

Como mencionamos antes [5] Bang Jensen y Huang conjeturan la existencia de algoritmos en tiempo polinomial para determinar si una digráfica es hamiltoniana o es trazable. Ambos problemas fueron resueltos por Gutin en [14]. Para el primer problema, prueba la existencia de un algoritmo que determina si una digráfica es hamiltoniana, y si lo es, encuentra el citado ciclo en tiempo polinomial. Para el segundo problema, determinar si D es trazable es lo mismo que determinar si $pc(D) = 1$, por lo que Gutin logra resolver este problema mostrando un algoritmo que determina el problema de encontrar $pc(D)$ para una digráfica cuasitransitiva arbitraria en tiempo polinomial.

Teorema 3.1.7 (Gutin [14])**.** *Existe un algoritmo donde dada una digráfica cuasitransitiva D, en tiempo $O(n^4)$ determina la existencia de un ciclo hamiltanonio en D en caso de ser D hamiltoniana y determina si este ciclo no existe en el caso en que D no es hamiltoniana.*

Teorema 3.1.8 (Gutin [14]). *Dada una digráfica cuasitransitiva D, el problema de determinar $pc(D)$ tiene solución en tiempo $O(n^4/log\ n)$.*

Para tener una noción del uso de la notación O en los tiempos de ejecución de un algoritmo consultar el Apéndice A.

3.2. Hamiltonicidad en 3-Cuasitransitivas

En el capítulo 2 en la sección referente a las digráficas 3 cuasitransitivas se mencionó el siguiente teorema de caracterización.

Teorema 3.2.1. *Sea D una digráfica fuerte 3-cuasitransitiva de orden n, entonces D es una digráfica semicompleta, una digráfica bipartita semicompleta o es isomorfa a alguna F_n.*

Donde F_n es una familia de digráficas citadas en esa sección. Notemos ahora que como las digráficas semicompletas contienen siempre a una subdigráfica isomorfa a un torneo, y el siguiente Teorema (1.3.3) del capítulo 1 implican que una digráfica semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuerte.

Teorema 3.2.2. *Una digráfica semicompleta D es hamiltoniana si y sólo si D es fuerte.*

Como una digráfica bipartita semicompleta es una digráfica semicompleta extendida, podemos aplicar el siguiente teorema de caracterización de digráfica semicompletas extendidas hamiltonianas expuesto anteriormente en la primera sección de este capítulo y caracterizar las digráficas bipartitas semicompletas hamiltonianas.

Teorema 3.2.3. *Sea D una digráfica semicompleta extendida, D es hamiltoniana si y sólo si D es fuerte y contiene un factor ciclo.*

Teorema 3.2.4. *Si D es una digráfica bipartita semicompleta, D es hamiltoniana si y sólo si D es fuerte y tiene un factor ciclo.*

El siguiente teorema caracteriza a las digráficas 3-cuasitransitivas hamiltonianas.

Teorema 3.2.5. *Una digráfica 3-cuasitransitiva D es hamiltoniana si y sólo si D es fuerte y contiene un factor ciclo.*

Demostración. Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva. Supongamos primero que D es hamiltoniana, entonces D tiene un ciclo hamiltoniano y es evidente que D es fuerte y tiene un factor ciclo. Supongamos ahora que D es fuerte y contiene un factor ciclo, si D es semicompleta o bipartita semicompleta los Teoremas 3.2.3 y 3.2.5 se encargan de verificar el resultado, por lo que podemos suponer que D es isomorfa a una digráfica de la familia F_n, recordemos la definición de las digráficas de esta familia:

Consideremos las digráficas F_n con vértices $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y flechas $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{x_1x_{i+3}, x_{i+3}x_2 : i = 1, 2, ..., n-3\}$, donde $n \geq 4$.

Ahora, como D tiene un factor ciclo, todo vértice x_i con $i \geq 4$ esta contenido en un ciclo, pero cualquier ciclo que contenga al citado vértice x_i debe de contener también a x_2, imposibilitando que $i \geq 5$, por lo tanto $i = 4$ y D isomorfa a F_4 que claramente es hamiltoniana.

□

3.3. Trazabilidad en K-Cuasitransitivas

Definiremos un tipo de digráficas que generalizan a las digráficas cuasitransitivas, 3-cuasitransitivas y por ende a las transitivas y 3-transitivas antes definidas.

Sea $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, decimos que una digráfica D es k-cuasitransitiva si para toda trayectoria T de longitud k, $T = x_0x_1...x_k$ se tiene que $x_0x_k \in F(D)$ o $x_kx_0 \in F(D)$.

El siguiente Lema se debe a Galeana Sánchez y Hernández Cruz, apareciendo en [11].

Lema 3.3.1 ([11]). *Sea k un entero con $k \geq 2$ y D una digráfica k-cuasitransitiva con $\{u, v\} \subseteq V(D)$ tal que existe una (u, v)-trayectoria. Entonces cada una de las siguientes proposiciones se sigue*

(1) Si $d(u, v) = k$, entonces $d(v, u) = 1$.

(2) Si $d(u, v) = k + 1$, entonces $d(v, u) \leq k + 1$.

(3) Asumamos que $d(u, v) = n \geq k + 2$. Si k es par ó k y n son impares entonces $d(v, u) = 1$, si k es impar y n es par entonces $d(v, u) \leq 2$.

Demostración. (1) Como $d(u,v) = k$, existe una trayectoria T de longitud k con $T = x_0x_1...x_k$, $x_0 = u$ y $x_k = v$. Se tiene que la k-cuasitransitividad de D implica que $uv \in F(D)$ o $vu \in F(D)$, pero como $d(u,v) = k$ entonces $vu \in F(D)$ y $d(v,u) = 1$.

(2) Como $d(u,v) = k+1$ existe una trayectoria T de longitud $k+1$ con $T = x_0x_1...x_{k+1}$ y $x_0 = u$,$x_{k+1} = v$. Se tiene que la k-cuasitransitividad de D implica $\{x_{k+1}x_1, x_kx_0\} \subseteq F(D)$, luego $x_{k+1}x_1...x_kx_0$ forman una trayectoria de v a u con longitud $k+1$ lo que muestra que $d(v,u) \leq k+1$ como queremos.

(3) La demostración de esta proposición puede consultarse en [11]

□

Los siguientes resultados (salvo el Lema 3.3.3 que es probado por Wang y Meng en [21]) aparecen en [22] y se deben a Wang y Zhang, todos son usados en ese artículo para demostrar o un Lema posterior o el Teorema 3.3.8 que es el resultado central de esta sección puesto que da condiciones para garantizar la trazabilidad de una digráfica k-quasitransitiva.

Lema 3.3.2. *Sea k un entero con $k \geq 4$ y D una digráfica k-cuasitransitiva. Supongamos que $P = x_0x_1...x_n$ es la (x_0,x_n)-trayectoria de longitud más corta, entonces la subdigráfica inducida por $V(P)$ es una digráfica semicompleta y $x_j \longrightarrow x_i$ para todo $1 \leq i+1 < j \leq n$.*

Lema 3.3.3 ([21])**.** *Sea k un entero con $k \geq 2$ y D una digráfica k-cuasitransitiva fuerte. Supongamos que C es un ciclo de longitud $n \geq k$, entonces para cada vértice $x \in V(D) \setminus V(C)$, x y C son adyacentes.*

Lema 3.3.4. *Sea k un entero con $k \geq 2$ y D una digráfica k-cuasitransitiva fuerte. Supongamos que $C = x_0x_1...x_{n-1}x_0$ es un ciclo de longitud n con $n \geq k$ en D. Entonces para toda $x \in V(D) \setminus V(C)$, si $x \longrightarrow x_i$ y no existen flechas de $V(C)$ hacia x, entonces $x \longrightarrow x_{i+(k-1)}$. Análogamente si $x_i \longrightarrow x$ y no existen flechas de x hacia $V(D)$ entonces $x_{i-(k-1)} \longrightarrow x$.*

Lema 3.3.5. *Sea k un entero con $k \geq 2$ y D una digráfica k-cuasitransitiva fuerte y sea $C = x_0x_1...x_{n-1}x_0$ un ciclo de longitud n con $n \geq k$ en D. Supongamos que $mcd(n, k-1) = 1$. Para toda $x \in V(D) \setminus V(C)$, si no existen flechas de $V(C)$ hacia x entonces x domina cada vértice de C.*

Lema 3.3.6. *Sea k un entero con $k \geq 4$ y D una digráfica k-cuasitransitiva fuerte. Supongamos que $P = x_0x_1...x_{k+2}$ es una (x_0,x_{k+2})-trayectoria de menor longitud en D. Sea $B_C = \{x \in V(D) \setminus V(P) | (x, V(P)) \neq \emptyset$ y*

$(V(P), x) \neq \emptyset\}$. Entonces la subdigráfica inducida por B_C es una digráfica semicompleta.

Lema 3.3.7. *Sea k un entero par con $k \geq 4$ y D una digráfica k-cuasitransitiva fuerte. Supongamos que $P = x_0x_1...x_{k+2}$ es una (x_0, x_{k+2})-trayectoria minimal en D. Entonces la subdigráfica inducida por $V(D)\setminus V(P)$ es una digráfica semicompleta.*

Teorema 3.3.8. *Sea k un entero par con $k \geq 4$ y D una digráfica k-cuasitransitiva fuerte. Si $diam(D) \geq k+2$, entonces D tiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Como el diámetro de D es mayor o igual que $k+2$, se sigue existen $\{u, v\} \subseteq V(D)$ tales que $dist(u, v) = k+2$. Sea $P = x_0x_1...x_{k+2}$ una (u, v)-trayectoria de longitud mínima, por la parte (3) del primer lema de esta sección tenemos que $x_{k+2} \longrightarrow x_0$. De forma natural obtenemos un ciclo C de longitud $k+3$, con $C = x_0x_1...x_{k+2}x_0$ y definimos $H = D[V(D)\setminus V(C)]$.

Por los Lemas 3.3.2 y 3.3.7 tenemos que $D[V(C)]$ y H son digráficas semicompletas. Es bien sabido que en cada digráfica semicompleta existe una trayectoria hamiltoniana, sea $Q = y_0y_1...y_p$ una trayectoria hamiltoniana en H. Por construcción se tiene que cada $y_i \in V(Q)$. Si y_p es adyacente a C terminamos; si existe x_j tal que $x_j \longrightarrow y_0$ también terminamos. Supongamos que no existen flechas de C a y_0. Notemos ahora que $mcd(k-1, k+3) = 1$, por lo que acorde con el Lema 3.3.5 tenemos que y_0 domina a cada vértice de C. Similarmente si existe x_j que domine a y_1 terminamos, por lo que siguiendo un procedimiento análogo podemos concluir que y_1 domina a cada vértice de C, continuando con este procedimiento concluimos que D tiene una trayectoria hamiltoniana o H domina totalmente a los vértices de C lo cual no puede pasar puesto que D es fuerte.

□

Al final del artículo [22] Wang y Zhang propoenen el siguiente problema:

Problema 3.3.9. *Supongamos que D es una digráfica fuerte k-cuasitransitiva con k par, $k \geq 4$ y $diam(D) \geq k+2$, ¿Existe un ciclo hamiltoniano en D?*

3.4. Hamiltonicidad en Digráficas 3-transitivas

Las digráficas 3-transitivas fueron definidas en el capítulo anterior aunque en general podemos definir las **digráficas k-transitivas**, decimos que una digráfica D es k-transitiva con $k \geq 2$, si para toda trayectoria T de longitud k, $T = x_0x_1...x_k$ se tiene que $x_0x_k \in F(D)$, es claro que esta clase de digráficas generaliza a las transitivas y 3-transitivas antes definidas, y es generalizada por las digráficas k-cuasitransitivas. En esta sección se resaltarán las caracterizaciones de las digráficas hamiltonianas 3-transitivas, la cual viene como un corolario en [16] del Teorema de caracterización de las digráficas 3-transitivas fuertes.

A continuación citamos de nuevo el Teorema de Caracterización de las digráficas 3-transitivas fuertes y probamos como un corolario de éste la caracterización de las digráficas 3-transitivas hamiltonianas.

Teorema 3.4.1 (Hernández-Cruz [16]). *Una digráfica D fuerte es 3-transitiva si y sólo si D es una de las siguientes digráficas:*

a) D es una digráfica completa.

b) D es una digráfica bipartita completa.

c) D es C_3 , C_3^* *ó* C_3^{**}.

Corolario 3.4.2 (Hernández-Cruz [16]). *Una digráfica D, 3-transitiva, es hamiltoniana si y sólo si D es fuerte y D no es bipartita a menos que sea bipartita regular.*

Demostración. Supongamos primero que D es hamiltoniana, entonces contiene un ciclo hamiltoniano por lo que D es fuerte. Por el teorema anterior, si D es fuerte sabemos que D es completa, bipartita completa ó isomorfa a C_3 , C_3^* ó C_3^{**}. Si D es isomorfa a C_3 , C_3^* ó C_3^{**} es claro que no es bipartita puesto que contiene un ciclo impar C_3 como subdigráfica. Si es completa, tenemos que la única digráfica completa bipartita es la completa de orden 2 la cual claramente es bipartita regular, por lo que supongamos que D es bipartita completa con bipartición X, Y. Si D no es regular, se sigue que X y Y tienen distinta cardinalidad, supongamos sin perdida de generalidad $|X| = n$ y $|Y| = m$, con $n < m$, por lo que el ciclo hamiltoniano de D tiene longitud $n + m$. Como D es bipartita, el ciclo de mayor longitud (tomando un vértice de cada componente alternadamente) tendra una longitud igual $n + n = 2n < n + m$ por que $n < m$, lo que conlleva una contradicción. Por otro lado es claro que si D es bipartita completa regular con bipartición X, Y tendra un ciclo hamiltoniano ya que deberá contener un ciclo de longitud $2n$ (tomando un vértice de cada componente alternadamente) donde cada componente de la bipartición tiene orden $|X| = n = |Y|$. Por lo tanto D no es bipartita a menos que sea regular.

Supongamos ahora que D es fuerte y no es bipartita a menos que sea regular. Si D es es fuerte por el teorema anterior sabemos que D es completa, bipartita completa o isomorfa a C_3 , C_3^* ó C_3^{**}. Si D es completa es claro que es hamiltoniana, si es isomorfa a C_3 , C_3^* ó C_3^{**} es hamiltoniana puesto que cada una de estas digráficas tiene orden 3 y contiene a un ciclo de orden 3 como subdigráfica. Si D es bipartita completa y regular, tenemos que D si tiene bipartición X, Y con $|X| = n = |Y|$, entonces D contiene un ciclo de longitud $2n$ por ser D bipartita completa (tomando un vértice de cada componente alternadamente), por lo que D es hamiltoniana, lo que termina la demostración.

$\square$

Capítulo 4

Conclusiones

Se sabe que no existen condiciones suficientes y necesarias para poder especificar si una digráfica en general es hamiltoniana o no, sin embargo en esta tesis se expone una solución a este problema para las digráficas transitivas, cuasitransitivas, 3-transitivas y 3-cuasitransitivas.

Podemos notar que en cada una de las caracterizaciones de estas ciertas digráficas hamiltonianas se analizó y utilizó fuertemente en su demostración la previa caracterización de las digráficas fuertes transitivas, cuasitransitivas, 3-transitivas y 3-cuasitransitivas para una prueba sencilla de la caracterización de sus ejemplares hamiltonianos puesto que ser fuerte es una condición necesaria para que una digráfica sea hamiltoniana, de esta forma Hernández-Cruz en [17] caracateriza las digráficas 4-transitivas fuertes dejando la puerta abierta a un trabajo posterior a esta tesis sobre la caracterización de las digráficas 4-transitivas hamiltonianas, respondiendo un poco más la pregunta ¿cuáles son las digráficas k-transitivas hamiltonianas? y aún más en general ¿cuáles son las digráficas k-cuasitransitivas hamiltonianas?.

También fue estudiado en esta tesis el problema de decidir si una digráfica k-cuasitransitiva tiene una trayectoria hamiltoniana, explicando una solución parcial y dejando como problema a un estudio posterior de hamiltonicidad y problemas relacionados con ésta en el Problema 3.3.9.

Apéndice A

Complejidad

Muchas veces las demostraciones en la teoría de digráficas conllevan ideas que pueden ser interpretadas como un algoritmo, pero ¿qué es un algoritmo?. Aunque no existe consenso definitivo en cuanto la definición formal de un algoritmo decimos que un **algoritmo** es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite llevar a cabo una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba hacer dicha actividad. Dados un estado inicial y una entrada (input), siguiendo los pasos sucesivos se llega a un estado final y se obtiene una solución. Para una mayor comprensión sobre los algoritmos se puede consultar la subsecuente bibliografía Aho, Hopcroft y Ullman [1], Brassard y Bratley [6] o Cormen, Leiserson y Rivest [8].

Una computadora esta capacitada para realizar operaciones elementales como operaciones artiméticas, comparaciones, movimiento de datos, etc., siempre en un tiempo constante. El tiempo de ejecución asintótico en que un algoritmo tarda en ser realizado es llamado la **complejidad** del algoritmo. Los algoritmos se vuelven más importantes cuando poueden ser realizados por una computadora en un tiempo breve, lo que conlleva a que una parte del estudio en ellos se dictamine en encontrar algoritmos que optimicen el tiempo o complejidad de los algoritmos ya existentes.

En la complejidad de los algoritmos usados en este trabajo, siempre n denota el orden de la digráfica y m el tamaño de ésta. Cuando un algoritmo es tratado por una computadora, la computadora recibe los datos en bits y da salida a un resultado en bits, como cada bit es asociado a un único número binario y cada número binario se puede asociar a un solo número natural, podemos pensar a un algoritmo tratado por una computadora como una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

La notación O es usada para describir el comportamiento en el límite cuando una función tiende a un valor particular o a infinito, suele ser usada en la teoría para describir la complejidad, a veces llamada también **orden**, del algoritmo. Se define concretamente de la siguiente manera, dadas dos funciones $f(k)$ y $g(k)$ de un entero no negativo k, decimos que $f(k) = O(g(k))$(f es de orden g) si existen constantes positivas c y k_0 tales que $0 \leq f(k) \leq cg(k)$ para toda $k \geq k_0$.

Cuando el tiempo de resolución de un algoritmo esta acotado por una función de orden polinomial (un polinomio en alguna variable de la entrada del algoritmo), decimos que el algoritmo es de **orden o tiempo polinomial**. Los algoritmos de orden polinomial son de suma importancia en la teoría de computabilidad puesto que una computadora puede ejecutarlos en un tiempo relativamente corto.

Un problema de decisión es un problema que puede resolver con la respuesta sí o no, como por ejemplo determinar si una digráfica es hamiltoniana o no lo es. Además de los algoritmos ejecutables en tiempo polinomial que dan el nombre a los llamados **problemas P** puesto que son problemas para los cuales las respuestas sí y no pueden ser verificadas en tiempo polinomial. Existen otras clases de problemas clasificados según la complejidad de su ejecución como lo son los **problemas NP** que son problemas de decisión para los cuales existe un algoritmo ejecutable que muestra a si como respuesta en tiempo polinomial, pero no necesariamente existe un algoritmo en tiempo polinomial que obtenga la respuesta no como resultado del problema de decisión.

Dado un par de problemas de decisión S, T diremos que S es **reducible** a T, si existe un algoritmo en tiempo polinomial A tal que transforme un estado x de S en un estado $A(x)$ de T tal que el segundo estado tiene la misma respuesta que el primero. Otra clase de problemas según su complejidad son los **problemas NP-completos**, decimos que un problema X es NP-completo si es un problema NP para el cual es posible reducir cualquier otro problema NP Y a X en tiempo polinomial. Por último tenemos a los **problemas NP-duros**, diremos que un problema X es NP-duro si existe un problema NP-completo Y, tal que Y es reducible a X en tiempo polinomial, para un aprendizaje de mayor profundidad dentro de estos tipos de problemas de decisión es imprescindible consultar [9].

Bibliografía

[1] Aho, A. V., and Hopcroft, J. E. *The design and analysis of computer algorithms.* Pearson Education India, 1974.

[2] Bang-Jensen, J. The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete mathematics 283*, 1 (2004), 1–6.

[3] Bang-Jensen, J., Gutin, G., and Huang, J. A suficient condition for a complete multipartite digraph to be hamiltonian. *Discrete Math., to appear*.

[4] Bang-Jensen, J., and Gutin, G. Z. *Digraphs: theory, algorithms and applications.* Springer Science & Business Media, 2008.

[5] Bang-Jensen, J., and Huang, J. Quasi-transitive digraphs. *Journal of Graph Theory 20*, 2 (1995), 141–161.

[6] Brassard, G., and Bratley, P. *Fundamentals of algorithmics.* Prentice-Hall, Inc., 1996.

[7] Camion, P. Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES 249*, 21 (1959), 2151–2152.

[8] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C. *Introduction to algorithms*, vol. 6. MIT press Cambridge, 2001.

[9] Ga-rey, M., and Johnson, D. Computers and intractability: A guide to the theory of {NP}-completeness.

[10] Galeana-Sánchez, H., Goldfeder, I. A., and Urrutia, I. On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs. *Discrete Mathematics 310*, 19 (2010), 2495–2498.

[11] Galeana-Sánchez, H., and Hernández-Cruz, C. k-kernels in k-transitive and k-quasi-transitive digraphs. *Prel. Inst. Mat, UNAM 897*, 14–14.

[12] GHOUILAHOURI, A. Theorie des graphes-caracterisation des graphes non orientes dont on peut orienter les aretes de maniere a obtenir le graphe dune relation dordre. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES 254*, 8 (1962), 1370.

[13] Gutin, G. Finding a longest path in a complete multipartite digraph. *SIAM Journal on Discrete Mathematics 6*, 2 (1993), 270–273.

[14] Gutin, G. Polynomial algorithms for finding paths and cycles in quasi-transitive digraphs. *Australas. J. Combin 10* (1994), 231–236.

[15] Gutin, G. Cycles and paths in semicomplete multipartite digraphs, theorems, and algorithms: a survey. *Journal of Graph Theory 19*, 4 (1995), 481–505.

[16] Hernández-Cruz, C. 3-transitive digraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory 32*, 2 (2012), 205–219.

[17] Hernández-Cruz, C. 4-transitive digraphs i: The structure of strong 4-transitive digraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory 33*, 2 (2013), 247–260.

[18] Hernández Hernández, F. Teoría de conjuntos, 1998.

[19] Moon, J. On subtournaments of a tournament. *Canad. Math. Bull 9*, 3 (1966), 297–301.

[20] Rédei, L. Ein kombinatorischer satz. *Acta Litt. Szeged 7*, 39-43 (1934), 97.

[21] Wang, R., and Meng, W. k-kings in k-quasitransitive digraphs. *Journal of Graph Theory 79*, 1 (2015), 55–62.

[22] Wang, R., and Zhang, H. Hamiltonian paths in k-quasi-transitive digraphs. *Discrete Mathematics 339*, 8 (2016), 2094–2099.