UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

El mercado financiero: Caos y orden en sistemas dinámicos no-lineales y su incidencia en la validez predictiva

TESIS

Que para obtener el grado de

Licenciada en Economía

Presenta:

Michelle Méndez Esparza

Director de Tesis:

Gabriel A. Becerril Parreño

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Marzo 2017

"In a chaotic system, a tiny change today can lead to a large change in future outcomes. What tiny change are you making?"

Índice General

Prólogo i

Introducción 1

1. Sistemas dinámicos 10

1.1 Nociones básicas de los sistemas dinámicos 14

1.2 Sistemas dinámicos no-lineales 18

1.3 Bifurcación y duplicación de periodo 24

1.4 Estabilidad en los sistemas no-lineales: atractores 33

1.4.1 Puntos fijos 35

1.4.2 Ciclos límite 37

1.4.3 Atractores extraños 38

1.5 Hiperbolicidad 41

2. Caos y Orden 44

2.1 Caos matemático 49

2.1.1 Determinismo 50

2.1.2 Dependencia sensitiva 52

2.1.3 No-linealidad 53

2.2 Probabilidad 55

2.3 Incertidumbre 57

2.3.1 Exponentes de Lyapunov 59

2.4 Aleatoriedad 63

2.4.1 Entropía: medidas de caos y complejidad 66

2.5 Fractales y Curvas Caóticas 67

2.6 Predictibilidad 74

2.7 Caos en los precios 76

3. El problema del libre albedrío: *behavioral economics* 84
3.1 La hipótesis de la Eficiencia del Mercado 88
3.2 La memoria 101
3.3 Sesgos en la memoria y el comportamiento 103
3.4 SAPE: *Sentiment Asset Pricing Engine* 114
3.5 FEARS: *Financial and Economic Attitudes Revealed by Seach* 117

4. Crítica a la predictibilidad 120
4.1 Técnicas de predicción 123
4.2 Series de Tiempo 129
4.3 Ruido y Teoría de los Errores 131
4.4 Una alternativa: modelos caóticos deterministas y modelos no-lineales estocásticos 133

5. Conclusiones 135

6. Glosario 143

7. Bibliografía 149

OBJETIVO GENERAL

Contrastar métodos de predicción con las herramientas que la Teoría del Caos y la Economía del Comportamiento brindan, con el fin de determinar las condiciones de viabilidad del uso de modelos matemáticos con fines predictivos, y como fundamento para toma de decisiones de inversión.

HIPÓTESIS GENERAL

"Los modelos matemáticos que buscan predecir fenómenos económicos y/o financieros, son típicamente ineficientes por factores intrínsecos a la Teoría del Caos y los sesgos subyacentes del comportamiento humano; tales como la incertidumbre, la aparente aleatoriedad, el determinismo y el libre albedrío."

PRÓLOGO

I have yet to see any problem, however complicated, which, when looked at in the right way, did not become still more complicated.
-Poul Anderson

Una vez que somos conscientes de la relación entre la estructura y el comportamiento de un sistema, podemos empezar a comprender por qué los modelos producen resultados exiguos y cómo podemos transformarlos en mejores patrones de comportamiento. A medida que nuestro mundo continúa cambiando rápidamente y se vuelve más complejo, el pensamiento sistémico nos ayudará a manejar, adaptar y conocer la plétora de opciones que tenemos ante nosotros. Es una manera de pensar que nos da la libertad para identificar la raíz de la causa de los problemas y ver nuevas oportunidades.

Entonces, ¿qué es un sistema? Un sistema es un conjunto de cosas: gente, células, moléculas, etc., interconectadas de tal manera que producen un patrón de comportamiento propio a través del paso del tiempo. El sistema puede ser modificado, constreñido, desencadenado o conducido por fuerzas externas, pero la respuesta del sistema a estas fuerzas es característica de sí mismo y rara vez esta respuesta es simple en el mundo real.

Cuando se trata de personas, empresas, ciudades o economías, la complejidad del sistema incrementa y con ella, la dificultad para comprenderlos. Un evento externo puede desencadenar un cambio en el comportamiento de dicho sistema, pero si el mismo evento fuera aplicado a un sistema distinto, cuyas reglas que rigen su comportamiento fuesen distintas, es probable este produjera un resultado diferente, más aún si este presenta un comportamiento determinista. Pensemos por un momento acerca de las implicaciones de esta idea:

- Los líderes políticos no causan recesiones o auge económico.
- Los altibajos son inherentes a la estructura de la economía de mercado.
- Los participantes del mercado de valores no son los únicos que causan malos resultados a una empresa que cotiza en alguna bolsa de valores, aprovechan la ventaja en los precios, pero la pérdida de la compañía crea sus pérdidas, al menos en parte a través de su propia política de negocio.
- Los países exportadores de petróleo no son los únicos responsables de que el precio del petróleo actual, o que después de la crisis del 2008 hubiese tenido el punto máximo en el precio. Sus acciones por sí solas no podrían disparar el precio y desatar el caos mundial si el consumo de petróleo, los precios y políticas de inversión de los países importadores de petróleo no hubieran construido economías que son vulnerables a las interrupciones del suministro.
- El virus de la gripe no nos ataca, en realidad se configuran las condiciones para que pueda florecer dentro de nosotros.

Muchas de estas declaraciones pueden ser inquietantes, aunque mucho proviene del sentido común. Al parecer, hay una resistencia a reconocer el principio de la funcionalidad de los sistemas, que viene de la experiencia humana y que creemos que es conocido por todos.

Por un lado, se nos ha enseñado a analizar y utilizar nuestra capacidad racional para un seguimiento de rutas directas de causa y efecto, a simplificar las cosas en piezas, segmentos o términos comprensibles para poder resolver problemas y controlar el mundo que nos rodea. Esta enseñanza, la fuente del poder personal y social, nos lleva a ver los presidentes y los competidores, la OPEP y la gripe como las causas de nuestros problemas.

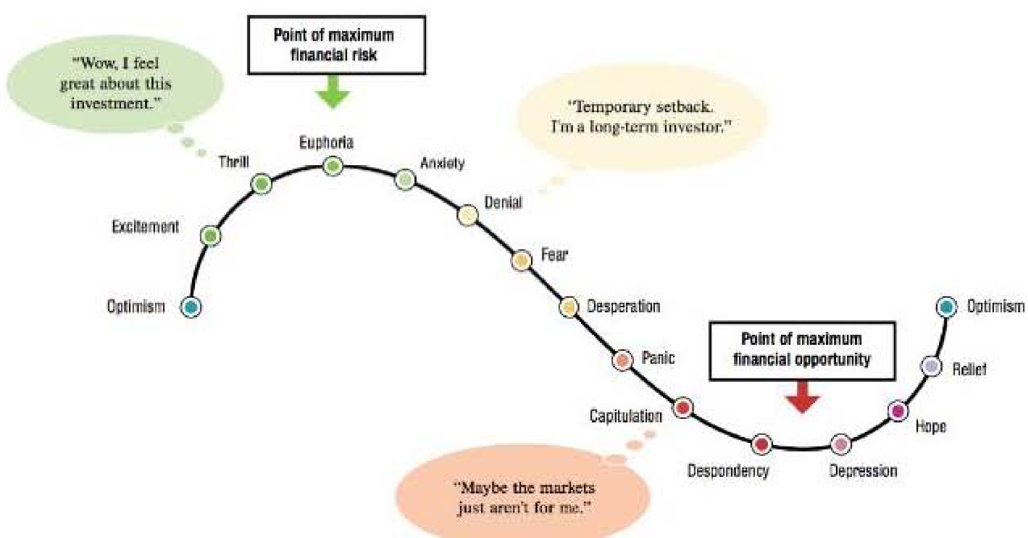
Por otro lado, mucho antes de ser educados en el análisis racional, nos hemos encontrado con sistemas complejos. Somos, de hecho, sistemas complejos. Nuestros propios cuerpos son el magnífico ejemplo de integración, interconexión, auto-mantenimiento, auto organización y complejidad que pude contener un sistema. Cada persona que encontramos, cada organización, cada animal, jardín, árbol y bosque es un sistema complejo. Hemos construido de manera intuitiva, sin análisis, a menudo sin palabras, un conocimiento práctico de cómo estos sistemas funcionan, y cómo trabajar con ellos.

Desde la Revolución Industrial, la sociedad occidental se ha beneficiado de la ciencia, la lógica y la intuición. Psicológica y políticamente nos gustaría suponer que la causa de un problema está "ahí fuera" en lugar de "aquí dentro". Es casi irresistible el aprovechar la oportunidad de trasladar la culpa o la responsabilidad a alguna situación u otra persona y buscar la perilla de control, el producto, la píldora o la técnica que se encargue de hacer que un problema desaparezca. Serios problemas han sido resueltos, centrándose en agentes externos: la prevención de la viruela, el aumento de la producción de alimentos y el movimiento de grandes masas; porque están incrustadas en sistemas más grandes, sin embargo, algunas de nuestras soluciones han creado más problemas. Y algunos problemas, los más arraigados en la estructura interna de los sistemas complejos, los líos reales, se han negado a desaparecer.

El hambre, la pobreza, la degradación ambiental, la inestabilidad económica, el desempleo, las enfermedades crónicas, la adicción a las drogas y la guerra, por ejemplo, persisten a pesar de la capacidad de análisis y la brillantez técnica que se han dirigido hacia la erradicación de ellos. Nadie crea deliberadamente esos problemas, nadie quiere que persistan, no obstante lo hacen. Esto es debido a que son comportamientos indeseables intrínsecos a los sistemas, característicos de la estructura del sistema que los producen.

El mercado financiero es un sistema, por lo cual, para entender su funcionamiento se recurre a diferentes teorías y explicaciones de cómo se comportan los agregados del mismo. El sentimiento, la psicología, la biología en su forma más tradicional, la física, el comportamiento humano, la tecnología y muchos factores más han sido integrados en este sistema, que es más complejo de lo que nos hace ver.

Antes de la crisis de 2008, el mercado era previsible en el sentido de que grandes economistas y analistas financieros identificaban ciclos y etapas del mercado, así como el cúmulo de emociones que se van transformando en decisiones.



El caos está presente en forma ordenada y su funcionamiento es controlado por las reglas que rigen al sistema. Ahora, el caos se presenta no sólo en la propia estructura visible del mercado, si los precios de un activo suben y bajan en una sesión de remate, lo que nos importa es saber las causas que propiciaron esos movimientos, si fueron sujetos a ser predecibles y controlables. Seguir pensando erróneamente que la Eficiencia de los Mercados existe y que en algún punto tendremos una valuación real de los activos, está lejos de ser práctico o funcional. La velocidad con la que se transforma o evoluciona este sistema complejo y caótico, que es el mercado financiero, es de tal envergadura que a simple vista el ser humano es incapaz de responder a esto de una forma lógica. Muchas de las teorías de valuación y selección de activos (CAPM, Markowitz, Sharpe, etc.) son inaplicables a la nueva realidad del mercado, y no es que dichas teorías hayan expirado, sino que fueron diseñadas únicamente como una aproximación o una hipótesis.

Este trabajo busca dar a conocer líneas de investigación alternas que permitan ver y pensar en el mercado financiero de una forma diferente. Se pueden ver algunas cosas a través de la lente del ojo humano, otras cosas a través de la lente de un microscopio o telescopio, y otros aun a través de la lente de la teoría de los sistemas, la teoría del caos o del comportamiento humano. Lo visto a través de cada tipo de lente nos dará alguna respuesta o alternativa a la solución que buscamos. Cada enfoque permite develar segmentos del conocimiento o la realidad del maravilloso mundo en el que vivimos, a fin de que nuestro entendimiento sea más completo.

En un momento en el que el mundo es más complejo, más poblado, más interconectado y más cambiante que nunca, el uso de enfoques diferentes nos permitirá tener una mejor intuición que perfeccionará nuestra capacidad para entender cada una de las partes que rodea a la toma de decisiones y la visualización de las grandes interconexiones que viven dentro del complejo mundo financiero.

Los mercados constantemente evolucionan y gravitan en un nivel de eficiencia, justo como la naturaleza evoluciona de acuerdo al principio de sobrevivencia de Darwin y llega a la noción tradicional de la Economía de que la perfecta eficiencia del mercado nos llevará por principio a un equilibrio. En particular, el mercado no tiene un equilibrio, siempre vivirá en el caos y los participantes tendrán que evolucionar constantemente y ser adaptativos a dicho cambio, al caos que se vive en un nanosegundo de operación, en la misma biología de la toma de riesgos del propio ser humano que limita su velocidad de toma de decisiones.

La Teoría del Caos y la Teoría del Comportamiento, presentan un sistema lógico e integral que nos puede ayudar a clasificar y explicar sucesos divergentes que se presentan en el mercado, como lo son los cisnes negros, el manejo de las probabilidades ante eventos altamente improbables, el efecto mariposa sobre un pequeño cambio en las cosas, y su interconexión y dependencia que pueden resultar en grandes cambios. Estas nuevas ciencias serán la base que alimente nuestro conocimiento y dimensione la complejidad del mercado.

INTRODUCCIÓN

Como sabemos, el sistema financiero, y más específicamente el mercado de valores, juega en la actualidad un papel sumamente importante en la economía internacional, el cual se ha visto maximizado por la creciente globalización financiera y la automatización en los procesos de transacción de valores gracias a las constantes innovaciones en materia de telecomunicaciones e informática.

Además, el mundo se encuentra ante cambios que han llevado al mismo a un proceso evolutivo, resultado de la interacción de las partes que lo conforman y los avances alcanzados en cuanto al conocimiento, por lo que es importante que los enfoques que intentan entender y estudiar al sistema financiero evolucionen también con él, a fin de estar en condiciones de dar respuestas certeras sobre su funcionamiento.

La Economía evolucionó en cuanto a sus métodos y herramientas con la revolución matemática e informática de los últimos años. Y así como la relatividad eliminó la ilusión del espacio y el tiempo absolutos de Newton, y la Teoría Cuántica arruinó la idea de una medición incontrolable, llega la Teoría del Caos para barrer con la fantasía de Laplace de la predictibilidad determinista. Esta tercera revolución en la Física valdría la pena considerarla también como la tercera de la ciencia económica, con el desarrollo de un nuevo campo de estudio que, combinado con la Economía del Comportamiento, podría significar un paso significativo hacia el futuro de nuestra ciencia.

Por lo anterior, es importante tener un vasto conocimiento en materia financiera, su entorno y los mecanismos en los cuales descansa su funcionamiento. Si bien la economía, y particularmente, el mercado de valores en cada uno de sus campos –mercado accionario, bienes raíces, mercado de dinero, mercado de derivados, mercado de divisas, etc.- goza de la existencia de indicadores e índices que miden su comportamiento, gran parte del mismo se encuentra en realidad determinado no sólo por las características inherentes al activo, como podrían ser los fundamentales de una empresa para determinar el precio de una acción o las tasas de interés para precio de un bono, sino por las expectativas que los agentes participantes del mercado tienen en determinado instante temporal, y las transacciones llevadas a cabo como resultado de las mismas.

Lo anterior, nos lleva a resaltar el hecho de que, típicamente, el mercado financiero presenta un comportamiento, cuya trayectoria futura se encuentra predeterminada por la condición actual, y la actual, se determinó a su vez por las condiciones pasadas, lo cual brinda al mercado el carácter de sistema dinámico **determinista**, condición necesaria para ser considerado acreedor de la propiedad caótica de un sistema.

Es decir, el precio de algún instrumento, invariablemente es resultado del comportamiento que el precio del mismo ha tenido a lo largo del tiempo que ha cotizado. Mismo que fue determinado en primera instancia por el desempeño o los fundamentales de la institución que lo emite, o bien, el precio del subyacente sobre el cual se valúa el instrumento, así como de las expectativas que sobre él se generaron.

De lo mencionado anteriormente, surge la idea de estudiar con profundidad enfoques alternos que expliquen el comportamiento del mercado de valores y a la economía en conjunto, tomando en cuenta aspectos que influyen en la trayectoria de las circunstancias, de acuerdo con la causalidad implicada entre ellas, tales como el mismo comportamiento irracional, y en conjunto, aparentemente aleatorio del ser humano. Dicho aspecto ha sido históricamente ignorado en los modelos matemáticos que pretenden predecir una variable en particular, pasando por alto el efecto que el libre albedrío podría incorporar a los mismos, siendo esta última una importante fuente de desviaciones de las trayectorias proyectadas y la realidad.

A propósito, y dada la imprescindible necesidad del ser humano de conocer el futuro, en esta investigación será utilizada la Teoría del Caos y la Economía del Comportamiento en busca de una línea alterna que permita contrastar los métodos utilizados para predicción tales como los métodos estadísticos utilizados por la Econometría.

Se pretende ir más allá de los límites establecidos por la ciencia clásica cuyas leyes, en algunas ocasiones, han representado un obstáculo en la historia del saber científico. Se busca entonces, atacar mediante un enfoque alternativo, la ignorancia de la que hemos adolecido respecto al comportamiento de ciertos fenómenos, tales como las fluctuaciones de la cotización de una acción o cualquier otro instrumento financiero. Los límites de estas nuevas ciencias no han sido alcanzados aún, por lo que vale la pena aprovechar la riqueza de métodos y herramientas que nos brindan, regalándonos una nueva visión del mundo que nos rodea, lleno de leyes hasta hace poco incomprensibles para el ser humano.

Como podemos notar, hay temas que valdría la pena además de identificar, estudiar a fondo, con el fin de robustecer la ciencia económica y los métodos utilizados por ella. El fin último de esta investigación es dar a conocer de manera formal la Teoría del Caos y la Economía del

Comportamiento, así como sus múltiples aplicaciones, particularmente en el campo económico y financiero. Además de dar a conocer sus enfoques alternos, que si bien han sido aceptados ya en círculos científicos tales como la Física, la Biología, la Química y la neurociencia; en nuestro país y ciencia en particular no son del todo conocidas, mismas que, en conjunto con sus múltiples aplicaciones, pueden ser de gran utilidad para comprender desde otra perspectiva cuestiones que han sido estudiadas a lo largo de la historia.

Lo anterior, significa una oportunidad única en la cual estamos ante la posibilidad de hacer uso de herramientas y métodos, que si bien han sido perfeccionadas recientemente, su desarrollo se ha llevado a cabo a lo largo de muchos años, y durante este tiempo han demostrado explicar un buen número de fenómenos con un enfoque novedoso, brindando soluciones alternas y un mayor entendimiento de nuestro entorno.

La siguiente cita del dramaturgo Tom Stoppard en su obra Arcadia (1993), es una representación de la situación que enfrentamos con el nacimiento y último desarrollo de estas nuevas ciencias, así como la revolución que supone para la comunidad y el conocimiento científico, en términos generales y en la ciencia económica en términos particulares. Esperamos que la adopción de este nuevo conocimiento nos permita explotar nuestras habilidades científicas en la búsqueda de nuevas aplicaciones y métodos en el hacer de la ciencia.

> *"Esa realidad ordinaria que es nuestra vida, las cosas sobre las que escribe la gente poesía: las nubes, los narcisos, las cascadas o lo que ocurre en una taza de café cuando le echamos la crema...; todas estas cosas están cargadas de misterio. Son tan enigmáticas para nosotros como lo era el firmamento para los griegos. Somos mejores previendo acontecimientos en los extremos de una galaxia o dentro del núcleo de un átomo que prediciendo si lloverá en el picnic dentro de tres domingos [...] Ni siquiera podemos*

> *predecir la próxima gota en un grifo que gotea cuando el ritmo se vuelve irregular. [...] El futuro es desorden. Una puerta así sólo se ha entreabierto cinco o seis veces desde que echamos a caminar sobre las patas traseras. ¿Qué mejor momento para estar vivo que éste, en el que casi todo lo que creíamos saber ha resuelto estar equivocado?"*

Esta tesis, es una invitación a hacer de lado los viejos paradigmas y dejar que esta revolución nos envuelva, y con ello nos muestre nuevas técnicas y conocimientos, que probablemente nos lleven un paso más allá en el entendimiento del mundo que nos rodea, desde leyes naturales hasta sistemas tan complejos como el cognitivo, que determinan los factores que nos hacen ser quienes somos y tomar las decisiones que tomamos a lo largo de nuestra vida, las cuales a su vez, determinan el futuro de las personas que conoceremos y las decisiones que ellos tomarán, cuyo impacto, resultado de iteraciones o repeticiones sucesivas, determinará la trayectoria del futuro como parte de un todo.

Es también, parte central de esta tesis, mostrar el contraste de los métodos y herramientas utilizados tradicionalmente para la predicción de fenómenos económicos y los propuestos por la Teoría del Caos y la Economía del Comportamiento. Es importante mencionar que en cuanto a lo que a predicción se refiere, los científicos con frecuencia no conocen la regla correspondiente a los fenómenos físicos que intentan predecir, ya que estas por lo general se encuentran determinadas por las leyes de la naturaleza. Sólo pueden guiarse por observaciones científicas que son invariablemente inciertas debido al **ruido** observacional, otro de los problemas que usualmente tienen un papel crucial en la ineficiencia de los modelos. Este problema es uno de los que se presentan con regularidad en el proceso de predicción.

Entonces, el objetivo principal será explicar el origen de la inestabilidad y el proceso que crece después de que la incertidumbre ha sido plantada, lo cual implica atender las relaciones de causalidad de las variables, así como factores intrínsecos al sistema y factores que pudieran jugar un papel determinante en la trayectoria posible, dado que la presencia, ausencia o cambios insignificantes en determinados fenómenos, generarán una trayectoria totalmente distinta en el evento derivado de dichos fenómenos y finalmente en el sistema como un todo.

Surge, asimismo, la pregunta de si la ineficiencia de determinados métodos de predicción se debe a la falta de información o a la imperfección de los métodos utilizados, o incluso a un problema por los errores de observación; factores que proyectarán trayectorias distintas a las reales.

Se parte de la premisa de que el éxito de la predicción depende de la proporción en la que la **dependencia sensitiva** se presente, es decir, mientras la variación en el estado final en distintos escenarios sea mayor derivado de determinados cambios en el **estado inicial**, mayor será la dependencia sensitiva y por ello más difícil la labor de predicción; qué tan sensible es el sistema a cambios en los factores o magnitudes, implica, sensibilidad a la incertidumbre.

La Teoría del Caos es un amplio frente de investigación interdisciplinaria, donde el caos y el orden se encuentran dinámicamente interrelacionados, cuyo enfoque nos permitirá comprender la forma en la que un sistema como el mercado financiero se desarrolla a través del tiempo. Por otro lado, la Economía del Comportamiento es una ciencia recientemente desarrollada, que en este caso particular, servirá como soporte para entender no sólo la trayectoria de un sistema como el enfoque de la Teoría del Caos sugiere, sino para brindarnos un panorama de la causalidad del mismo, proveniente del actuar humano, y en consecuencia, la viabilidad de incorporar el factor humano a modelos de predicción.

A lo largo de esta investigación se adoptarán, dos enfoques generales. Primero, se destaca el orden oculto que existe dentro de los sistemas caóticos, es decir, se reconoce al caos como precursor y socio del orden que estimula el surgimiento de **autoorganizaciones** en las estructuras disipativas que surgen en sistemas fuera de equilibrio, cuando la producción de **entropía** es alta.[1] El segundo enfoque tiene relación con las deficiencias en cuanto a la labor de predicción, proveniente principalmente de errores en la aplicación y el uso de modelos matemáticos que no se adecúan a la realidad, por diversas razones como lo son el componente del comportamiento humano y las deficiencias en cuanto a la observación y mal uso de un modelo o herramientas estadísticas.

El interés público en generadores altamente determinísticos y estocásticos de series de tiempo ha sido estimulado por el reciente trabajo en áreas de conocimiento como la Física y en campos tales como la turbulencia; los cuales han venido a subsanar la incapacidad de predicción de muchos científicos, en especial, del área de las ciencias sociales, que no sólo ha reflejado la necesidad de un cambio de paradigma en cuanto a los fundamentos teóricos, sino también a las herramientas de las que se echa mano.

Pero la imprecisión del conocimiento no sólo es resultado de un mal uso de herramientas teóricas y prácticas, sino de la abstracción que de la realidad hace el ser humano, en especial ante fenómenos económicos que parecieran comportarse como series de tiempo aleatorias –aún bajo *tests* estadísticos, y por ello difíciles o imposibles de predecir. Existen también problemas serios y determinantes en el hacer de la ciencia económica que no son considerados. No son tomadas en

[1] Hayles, N. K. (1993). ***"La evolución del caos. El orden dentro del desorden en las ciencias contemporáneas".*** Barcelona. Gedisa. P.28-29

cuenta cuestiones tales como que el mundo es por naturaleza no-lineal y que no se conocen rigurosamente las leyes que rigen nuestro sistema social, económico y natural.

De la no linealidad subyace otro concepto importante, el cual se encuentra íntimamente relacionado, con la incapacidad de predicción. La dificultad multiplicativa proveniente de la no-linealidad –utilizada en la Teoría del Caos– postula que, dado que hablamos de una realidad determinista, debe evaluarse todo el conjunto de eventos secundarios que a su vez jugarán un papel decisivo en el curso de la trayectoria que determinado movimiento seguirá, es decir, para siquiera pensar en predecir deberíamos conocer cada uno de los nodos o momentos particulares que forman parte de la trayectoria.

Si pensamos en lo anterior como un árbol binomial, nos daríamos cuenta que el resultado final no es más que la trayectoria de una serie de árboles binomiales más pequeños, que van determinando uno a uno el curso de la misma; pero podemos notar también que es extremadamente ambicioso imaginar poder predecir el comportamiento tan solo del nodo siguiente a partir de la información pasada.

Ahora bien, lo anterior se complica aún más si consideramos que cada una de las ramas (no necesariamente binomiales), individualmente, dependen de las decisiones que los seres humanos toman y que estos han sido dotados de libre albedrío, mismo que utilizamos aparentemente de forma irracional; en contraste con la teoría económica, misma que sugiere y asume en sus modelos microeconómicos que el ser humano se encuentra dotado de un modelo de toma de decisiones que no es sujeto de patrones irracionales. Sin embargo, es fácilmente demostrable que no tenemos patrones certeros y tendemos a cambiar de opinión inesperadamente o tomar decisiones contrarias a nuestros ideales; a veces actuamos en función de nuestro componente emocional, nos sesgamos... tenemos un comportamiento totalmente impredecible y en ocasiones, errático.

Además de nuestro comportamiento imperfecto, la información sobre la cual basamos nuestras decisiones es asimétrica, imperfecta y se encuentra sesgada como resultado de diversos procesos cognitivos. Incluso si las observaciones utilizadas para llevar a cabo análisis matemáticos o estadísticos de datos no fuesen imperfectas, notaríamos que en muchas ocasiones los modelos utilizados no se encuentran fundamentados en supuestos que encajen con la realidad, sino con supuestos puramente ideales que no pueden más que mostrar resultados del mismo tipo.

En conjunto, las cuestiones anteriormente expuestas nos dan un amplio campo de investigación respecto a la predicción en el sistema financiero y la adopción de nuevos enfoques en la rama financiera de la Economía, mismos que se desarrollarán a partir del marco conceptual mencionado ampliamente con anterioridad.

A propósito de lo anterior, y dado que en muchos casos la explicación teórica de fenómenos pertenecientes al campo de la Teoría del Caos puede resultar confusa, con el fin de hacer la lectura más comprensible y clara al lector, se ha anexado al final de esta investigación un glosario, cuyos términos se encuentran sombreados a lo largo de la tesis.

1

SISTEMAS DINÁMICOS

Aun cuando la dinámica es hoy en día materia interdisciplinaria, surgió originalmente como una rama de la Física a mediados de la centuria de 1600, cuando Newton utilizó por primera ocasión ecuaciones diferenciales, y descubrió las leyes del movimiento y de la gravitación universal. Newton resolvió el problema del movimiento de dos cuerpos: el Sol y la Tierra, dada la ley de gravitación que existe entre ellos.

Pero el verdadero progreso en la dinámica llegó hasta los tardíos 1800 y comienzos de 1900 con el trabajo de Henri Poincaré –particularmente *Analysis situs* (1895), que introdujo un punto de vista cualitativo en lugar de la línea cuantitativa utilizada hasta ese momento, desarrollando un novedoso enfoque geométrico con aplicaciones multidisciplinarias, mismo que permitió darle un tratamiento alternativo a cuestiones que hasta el momento no tenían solución, desencadenando descubrimientos en áreas adyacentes.

Poincaré fue de hecho también la primera persona en vislumbrar la posibilidad de la existencia del caos, en el cual, un sistema dinámico determinístico exhibe un comportamiento aperiódico dependiente a las condiciones iniciales, provocando la imposibilidad de predicción a largo plazo. Pero el caos quedó en segundo plano hasta que investigadores en el tema se encontraron con el problema de los osciladores no-lineales y avances en su estudio pudieron llevarse a cabo gracias a la presencia de supercomputadoras que permitían experimentar con ecuaciones de un modo que era imposible anteriormente.

Estos avances tecnológicos le permitieron a Edward Lorenz el descubrimiento no intencional, en 1963, del movimiento caótico en un **atractor extraño** cuando estudiaba un modelo simplificado para estudiar otra perspectiva de la impredictibilidad del clima. Su descubrimiento sugirió por primera vez la existencia de un orden inherente y aparentemente oculto dentro sistemas que parecieran tener un comportamiento accidentado o errático.

Exhibió por primera el comportamiento caótico de un sistema cuando computó las soluciones de sus ecuaciones en tres dimensiones y encontró su famoso **fractal** en forma de mariposa.

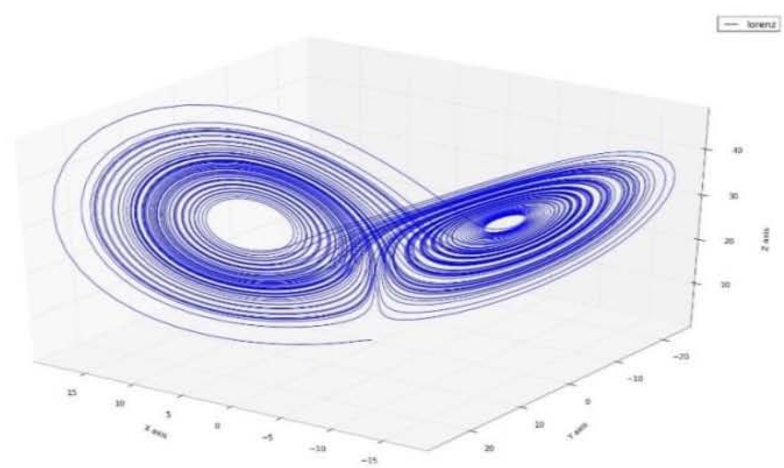


Figura 1.1 Atractor de Lorenz

Fuente: MARTÍNEZ, D. "***Lorenz, la meteorología, y el caos***" El zoco de Ulûm. 30 de noviembre 2015. **[en línea]** Disponible en Internet: <http://www.ulum.es/lorenz-la-metereologia-y-el-caos/>

Pero sus descubrimientos no tuvieron impacto en la ciencia hasta la década de 1970, cuando el *boom* del caos surgió.

Estudios en la turbulencia de fluidos con bases teóricas en consideraciones abstractas de **atractores extraños** comenzaron a darle impulso a una ciencia naciente, y en los años siguientes, la Teoría del Caos en los sistemas dinámicos encontró lugar en campos como la Biología, con lo cual, comienza a considerarse como una necesidad pedagógica el estudio y la enseñanza de los sistemas dinámicos no-lineales, así como la popularización de las nuevas estructuras matemáticas llamadas **fractales,** descubiertas por Benoît Mandelbrot.

Si bien el estudio de sistemas caóticos es relativamente reciente, descubrimientos en el campo de la Física fueron necesarios para que este nuevo enfoque pudiese madurar y desarrollarse de la forma en la que lo ha hecho hasta ahora.

La figura 1.2 es explícita en cuanto a la evolución del conocimiento y técnicas en temas que sirvieron como base para el surgimiento de la Teoría del Caos. Asimismo, se nombran a los principales exponentes de tales descubrimientos, mismos que serán ampliamente explicados a lo largo de esta investigación.

Figura 1.2 Historia de la dinámica.

HISTORIA DE LA DINÁMICA

1666	Newton	Invención del Cálculo y uso del mismo para explicar el movimiento planetario.
1700s		Florecimiento del Cálculo y la mecánica clásica.
1800s		Estudios analíticos del movimiento planetario.
1890s	Poincaré	Enfoque geométrico y vislumbramiento del caos.
1920-1950		Descubrimiento de osciladores no-lineales en la física y la ingeniería. Invención del radio, el radar y el láser.
1920-1960	Birkhoff Kolmogorov Moser	Comportamiento complejo en mecánica Halmitoniana.
1963	Lorenz	Atractor extraño en sistemas simples.
1970s	Ruelle & Takens	Turbulencia y Caos
	May	Caos en un mapa logístico
	Feigenbaum	Universalidad y renormalización, relación entre caos y las transiciones de fase.
		Estudios experimentales de Caos.
	Winfree	Osciladores no-lineales en el campo de la biología
	Mandelbrot	Descubrimiento de los fractales.
1980s		La Teoría del Caos comienza a ser aceptada en círculos científicos, principalmente en la física, y comienza a despertarse el interés por el caos, los fractales, los osciladores y sus aplicaciones.

Fuente: Strogatz, S. (2015) "***Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering***" Estados Unidos. Westview Press. P.5

1.1 Nociones básicas de los sistemas dinámicos

La dinámica se refiere al estudio del movimiento mediante el uso de estructuras matemáticas, cuyo estado se define por variables que dependen del tiempo. Cada porción del sistema dinámico capaz de moverse con independencia es otra variable, otro **grado de libertad** u otra dimensión en el estado de fase. Variables tales como la temperatura, los latidos del corazón, el empleo, la velocidad o los precios de algún instrumento financiero son parte de estos sistemas dinámicos.

Un sistema dinámico se encuentra integrado por dos componentes esenciales: un vector de estados que describe, usualmente con un número, el estado de la(s) variable(s) en determinado instante de tiempo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$. Y una función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^n}$ que nos dice, dado un estado particular, qué estado del sistema tomará la variable, es decir, describe su evolución a través del tiempo, iterándose a sí misma a partir de su **estado inicial**, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\ldots \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \ldots)))$$

Un sistema dinámico puede clasificarse según sus características, por ejemplo, puede ser lineal o no-lineal, invariante o variante en el tiempo, discreto o continuo, estocástico o determinista, autónomo o no autónomo, entre otras. Dichas características definen la dinámica del sistema. Además, dicha clasificación nos facilita identificar el mejor tratamiento para cada sistema dinámico y problema particular.

Para entender el comportamiento de los sistemas dinámicos, se modelan matemáticamente las trayectorias del mismo, lo cual implica una descripción matemática del sistema o fenómeno de la vida real, el cual puede ser físico, sociológico o económico.[2]

Derivado de lo anterior, diversas herramientas matemáticas han sido utilizadas multidisciplinariamente en un esfuerzo por entender y manipular el comportamiento de sistemas en los que interacciones biológicas, sociales y físicas se llevan a cabo, así como para determinar los factores que influyen para tomar los **parámetros** y la escala de la variable tiempo.[3]

A su vez, con el fin de entender el comportamiento futuro de algún sistema, es necesario entender el comportamiento del mismo cuando el tiempo tiende a infinito, o se presenta un comportamiento asintótico consecuencia de un proceso iterativo en el modelado del sistema. Iterar las funciones significa la aplicación repetida de una función, cuyo proceso puede interpretarse como un sistema dinámico discreto[4], donde la variable continua de tiempo se cuantifica de tal forma que se asuman valores enteros. Dicho proceso, incluso iterando simples funciones cuadráticas escalares puede crear una plétora de fenómenos dinámicos, cuya aplicación no compete únicamente a las matemáticas, sino que tiene un papel importante en el entendimiento de fenómenos naturales y sociales.

En general, un sistema iterativo tiene la siguiente forma:

---

[2] Sosa, C. (1998). TESIS: "***Dinámica de poblaciones y caos***". México, D.F. Facultad de Ciencias, UNAM. P.17

[3] *Ibíd*., P.17

[4] Cuando consideramos que el tiempo sólo toma valores enteros $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, los valores de una variable $\mathbf{x}$ a lo largo del tiempo forman una sucesión numérica $\{x_t\}$. Cuando el valor de esta variable en el instante siguiente depende de los valores que toma en instantes anteriores tenemos un sistema dinámico discreto.

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{g}(u^{(k)})$$

Donde la solución de un sistema dinámico discreto puede ser expresada de la siguiente manera, partiendo siempre de una condición inicial:

$$\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{c}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{g}(u^{(0)}) = \boldsymbol{g}(\mathrm{c}), \quad \boldsymbol{u}^{(2)} = \boldsymbol{g}(u^{(1)}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\mathrm{c})), \quad \boldsymbol{u}^{(3)} = \boldsymbol{g}(u^{(2)}) = \left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\mathrm{c})\right)\right), \quad \ldots.$$

Derivado de lo anterior, la iteración puede ser entendida entonces como una realimentación que implica la continua absorción del pasado. Cuando se iteran las ecuaciones en lugar de resolverlas, las ecuaciones se transforman en un proceso y no una descripción, es decir, el proceso se torna dinámico en lugar de estático; donde dicho mapa matemático, no es más que la regla que transforma un conjunto de valores en el siguiente conjunto de valores, dada una condición inicial.

La iteración revela la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y hace evidente la relación **determinista** de los nodos o estados temporales; donde objetos o eventos, relativa y aparentemente ínfimos pueden surtir un efecto enorme en un universo no-lineal.

Los sistemas dinámicos se encuentran representados geométricamente en el **espacio de fase**, el cual provisiona el modo de convertir números en imágenes, abstrayendo la información de un sistema de partes móviles, mecánicas o fluidas para la construcción de un diagrama flexible de caminos que conducen a todas sus posibilidades.

Existen varios tipos de sistemas dinámicos:

a) Matemáticos. Son una regla, se introduce un número y se obtiene otro que se debe volver a introducir para obtener el siguiente, a modo de iteración.
b) Físicos. Se encuentran en el mundo empírico, donde la secuencia de observaciones son mediciones ruidosas de la realidad.
c) Simulación por ordenador. Donde se requiere una medida que represente una variable y una simulación por ordenador de la misma.

Los datos que alimentan a los tres son las llamadas **series de tiempo**.

Es importante, además, hacer la distinción entre **sistemas dinámicos conservativos** y **disipativos**, ya que dicha definición será de utilidad en capítulos posteriores. Si un sistema conserva el volumen en el **espacio de fase** se le llama conservativo, si no lo hace se llama disipativo, el cual ocasionalmente, y más aún en el caso de sistemas dinámicos caóticos, en el comportamiento a largo plazo, suele contar con puntos o conjuntos de ellos que atraen las trayectorias próximas del sistema a medida que son iterados hacia adelante, contrayendo las áreas entre ellos haciéndolas converger; dichos puntos son conocidos como **atractores.**[5]

[5] Márquez, L. (2014). TESIS: "***Dinámica no-lineal y las rutas al caos***". México, D.F. Facultad de Ciencias, UNAM. P.5

1.2 Sistemas dinámicos no-lineales

Un sistema dinámico no-lineal, es aquel que se puede modelar matemáticamente con ecuaciones que evolucionan con el tiempo, donde las variables dinámicas que describen las propiedades del sistema aparecen en ecuaciones con operaciones no-lineales, tales como la potenciación. La no-linealidad implica la ausencia de correspondencia en cuanto a la magnitud de proporcionalidad entre causas y consecuencias.

Los sistemas no-lineales presentan un comportamiento que no está sujeto al principio de superposición, es decir, la función que representa al sistema dinámico no cumple con que la suma y el producto de soluciones, es solución. La superposición queda definida de la siguiente manera, en términos de la homogeneidad y la aditividad:

1. ***Homogeneidad:*** Que sea homogéneo significa que cuando la entrada de un sistema es multiplicada por un factor, la salida del sistema también será multiplicada por el mismo factor.

$$Si\, x(t) \longrightarrow y(t) \quad \Rightarrow \quad \beta x(t) \rightarrow \beta y(t) \qquad \textbf{(1)}$$

2. ***Aditividad:*** Por otro lado, que un sistema sea aditivo significa que si la entrada es el resultado de la suma de dos entradas, la salida será la resultante de la suma de las salidas que producirían cada una de esas entradas individualmente

$$Si \quad x_1(t) \rightarrow y_1(t) \;\; \wedge \;\; x_2(t) \rightarrow y_2(t) \quad \Longrightarrow \quad x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \qquad \textbf{(2)}$$

Combinando la (1) y la (2): $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \;\Rightarrow\; \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ***(Superposición)***

Evidentemente, esto se cumplirá si el sistema, para obtener la salida, efectúa sobre la señal de entrada operaciones que son matemáticamente lineales, como son: suma, multiplicación por una constante, diferenciación e integración.

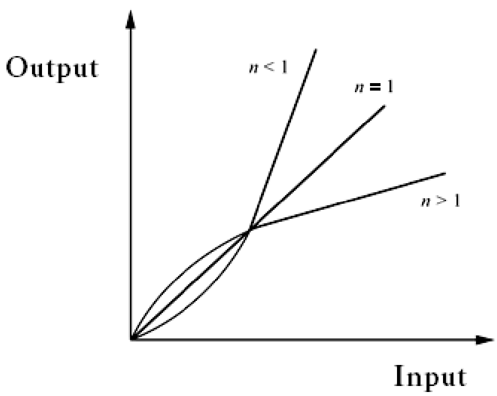


Figura 1.3 Noción de linealidad y no-linealidad

Fuente: Adaptado de Beléndez, T., Neipp, C. y Beléndez A. (2002) "***Estudio de la flexión de una viga de material elástico no-lineal***" Universidad de Alicante. Alicante, España.

Dicho de otra forma, se puede expresar la noción de linealidad en términos de la respuesta de un sistema a un estímulo. Si suponemos que ***m(x, t)*** da la respuesta del sistema a un estímulo particular ***S(t)*** y se ejerce un cambio de ***S(t) a 2S(t),*** un sistema lineal deberá tener como respuesta ***2m(x, t)***, mientras que en uno no-lineal la respuesta será más grande o más pequeña que ***2m(x, t).***

Derivado del hecho de que los sistemas no-lineales poseen un comportamiento no sujeto al principio de superposición, son difíciles y a veces imposibles de resolver, es por ello que a menudo es complicado predecir su trayectoria a partir de sus variables estado. Algunos sistemas no-lineales tienen soluciones exactas o integrables, es decir, las soluciones son expresiones cerradas, mientras que otros presentan comportamientos impredecibles o aparentemente impredecibles, que será lo que entenderemos por caos.

Además, los sistemas no-lineales suelen ser tan complejos que no sólo la existencia de soluciones únicas no está garantizada, sino que la superposición lineal es, en muchos casos, imposible de demostrar y las aproximaciones numéricas no son precisas. Incluso cuando los avances tecnológicos han ampliado nuestra capacidad limitada de cálculo en cuanto al estudio y la búsqueda de soluciones de sistemas no-lineales, es importante mencionar que existen sistemas que superan aún las capacidades de las supercomputadoras disponibles en la actualidad.

Es por ello, que para estar en condiciones de comprender la dinámica de sistemas no-lineales, debemos tener claras las leyes ante las cuales responden los sistemas lineales, así al menos podremos identificar el comportamiento característico de cada uno de ellos, haciendo más sencilla la labor de distinción y asignación de herramientas o métodos correspondientes al tratamiento particular de cada uno de ellos.

Para entender mejor el marco conceptual con el que se trabajará a lo largo de esta tesis, se muestra el siguiente cuadro, en el cual, en el eje horizontal muestra el número de variables que caracteriza al estado del sistema, que equivalentemente llamaremos, dimensión del **espacio de fase**. Mientras que el eje vertical nos indica la linealidad o no-linealidad del sistema.

Number of variables →

Nonlinearity ↓

	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n >> 1$	Continuum
Linear	*Growth, decay, or equilibrium* Exponential growth RC circuit Radioactive decay	*Oscillations* Linear oscillator Mass and spring RLC circuit 2-body problem (Kepler, Newton)	Civil engineering, structures Electrical engineering	*Collective phenomena* Coupled harmonic oscillators Solid-state physics Molecular dynamics Equilibrium statistical mechanics	*Waves and patterns* Elasticity Wave equations Electromagnetism (Maxwell) Quantum mechanics (Schrödinger, Heisenberg, Dirac) Heat and diffusion Acoustics Viscous fluids
				The frontier	
Nonlinear	Fixed points Bifurcations Overdamped systems, relaxational dynamics Logistic equation for single species	Pendulum Anharmonic oscillators Limit cycles Biological oscillators (neurons, heart cells) Predator-prey cycles Nonlinear electronics (van der Pol, Josephson)	*Chaos* Strange attractors (Lorenz) 3-body problem (Poincaré) Chemical kinetics Iterated maps (Feigenbaum) Fractals (Mandelbrot) Forced nonlinear oscillators (Levinson, Smale) Practical uses of chaos Quantum chaos ?	Coupled nonlinear oscillators Lasers, nonlinear optics Nonequilibrium statistical mechanics Nonlinear solid-state physics (semiconductors) Josephson arrays Heart cell synchronization Neural networks Immune system Ecosystems Economics	*Spatio-temporal complexity* Nonlinear waves (shocks, solitons) Plasmas Earthquakes General relativity (Einstein) Quantum field theory Reaction-diffusion, biological and chemical waves Fibrillation Epilepsy Turbulent fluids (Navier-Stokes) Life

Figura 1.4 Caracterización de sistemas dinámicos.
Fuente: Strogatz, *op. cit.*, P.10

En este caso partiré de la esquina inferior izquierda, con la caracterización del comportamiento de los sistemas no-lineales. Intentaré llegar hasta la tercera columna con demostraciones y argumentos rigurosos, donde se encuentra el estudio de las poblaciones y el crecimiento exponencial, los **puntos fijos** y **bifurcaciones**, oscilaciones no-lineales, y el caos y los **fractales**.

Una vez cruzada "la frontera" hacia la cuarta columna, donde se encuentran nuestro campo de estudio y la hipótesis que se pretende validar, es importante puntualizar sobre la complejidad de los temas que se abordarán. Incluso en muchos casos se hace referencia a temas recientemente explorados, dada su naturaleza no-lineal y los límites en cuanto a la complejidad en tiempo y espacio de dichos procesos. Sin embargo, se pretende estudiar ideas o hipótesis que bien podrían ser desarrolladas y demostradas en años próximos, mismas que podrían resultar de gran utilidad para los temas que nos competen.

Por otro lado, y regresando a la idea de no-linealidad, la importancia de entender el concepto de crecimiento exponencial y el papel que juega en la predicción de sistemas caóticos merece mención, ya que la incertidumbre en dichos sistemas suele tener un crecimiento de este tipo, mismo que puede incluso amplificarse dado el carácter iterativo de este tipo de sistemas –tema en el cual se abundará en capítulos posteriores.

Además, en un sistema no-lineal un pequeño cambio en una variable en particular puede generar un efecto desproporcionado e incluso catastrófico en otras variables, dada su interconexión. La sensibilidad a los estados iniciales y su efecto aumentan significativamente con el número de variables y las relaciones entre ellas, dado el incremento en los **grados de libertad** del sistema.

En un sistema real en el mundo finito en el que vivimos, donde los recursos son limitados, el crecimiento exponencial no puede ser infinito, por lo tanto, las predicciones tampoco se alejarán al infinito; lo cual supondría a su vez, que el hilo que conecta la verdad con una predicción se doblará sobre sí mismo al final. Es por ello, que la fuente de la falta de coincidencia de los modelos matemáticos con los sistemas físicos, subyace principalmente de la incertidumbre en los **estados iniciales**, y los estados que toma el sistema a lo largo de su trayectoria, así como la falta de consideración de variables esenciales en el proceso de modelación. También es importante la influencia de los parámetros en el sistema, o la inadecuación del modelo al fenómeno que pretende modelarse.

Entonces, los **parámetros** son parte vital del sistema matemático debido a que definen la constante de proporcionalidad entre el estado actual y el siguiente, y nos proporciona la pendiente de la relación lineal entre ellos –si es que la hay. También son de suma importancia al construir modelos matemáticos, ya que fungen como una herramienta que permite entender los factores que influyen en la dinámica de las interacciones físicas y biológicas de un sistema.

Asimismo, dado un sistema dinámico que modele el comportamiento de ciertas variables, por ejemplo, económicas, biológicas, físicas, etc., la Teoría de las Bifurcaciones locales nos indica para qué valores de los parámetros del sistema se producen cambios cualitativos importantes en la dinámica del mismo. Por cambios cualitativos importantes entenderemos cualquier variación que afecte al número y/o la estabilidad de los equilibrios estacionarios del sistema, así como la aparición de nuevas **órbitas** cerradas con comportamiento oscilatorio de las que denominamos **ciclos límite.**[6]

[6] VILCHEZ, Ma. L., VELASCO, F., GARCÍA, J. (2002) ***"Bifurcaciones transcríticas y ciclos límites en un modelo dinámico de competición entre dos especias. Una aplicación a la pesquería de engraulis encrasicholus de la Región Suratlántica española"***. Estudios de Economía Aplicada. Vol. 20-III. P.651 Departamento de Economía General y

Entonces, la estructura cualitativa de un sistema dinámico no-lineal puede cambiar si se modifican los parámetros del mismo. En particular, pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas cerradas, o bien, desaparecer los existentes, además de ver alteradas sus propiedades de estabilidad. Un sistema donde esto ocurre recibe el nombre de sistema estructuralmente inestable, o se dice equivalentemente, que una **bifurcación** ha ocurrido para algunos valores de los parámetros.[7]

Derivado de lo anterior, se requiere cautela para definir qué factores influyen para tomar los parámetros, y cuáles para la escala variable de tiempo; ya que estos determinarán la **trayectoria** del sistema.

1.3 Bifurcación y duplicación de periodo

La principal aplicación de las bifurcaciones en el mercado financiero, es identificar y describir el desequilibrio del mismo, tema que ha sido exhaustivamente estudiado en busca de una respuesta que nos permita comprender los eventos que desencadenan la inestabilidad del sistema económico-financiero, en aras de evitar dichos periodos de ajuste en los que se generan pérdidas económicas a nivel global.

Pero para poder comprender el concepto de **bifurcación**, y consecuentemente el de duplicación de periodo, es necesario antes introducir conceptualmente el comportamiento de flujos en un **espacio de fase** unidimensional, en sistemas no-lineales, tales como:

Estadística. Universidad de Huelva. Universidad de Sevilla. **[en línea]** Disponible en Internet: < https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/289665.pdf >

[7] *Ibíd.*, P.652

$$\dot{x} = \sin x$$

Se podría partir de un análisis a través de ecuaciones diferenciales, lo cual podría ser complicado y llevarnos a un error de cálculo. Pero si en lugar de eso, recurrimos a una interpretación geométrica, como la utilizada por Poincaré; y partimos de una técnica fundamental en la dinámica: interpretar una ecuación diferencial como un campo vectorial. Notaremos que podemos hacer que la ecuación $\dot{x} = \sin x$ represente un campo vectorial que dicte la velocidad del vector $\dot{x}$ para cada x.

Más explícito aún, suponemos que t es el tiempo, x es la posición de una partícula y $\dot{x}$ la velocidad de la misma; entonces, procedemos a graficar $\dot{x}$ *versus* x, y posteriormente indicar la velocidad del vector para cada x, la trayectoria se dirige a la derecha cuando $\dot{x} > 0$ y a la izquierda en el caso contrario.

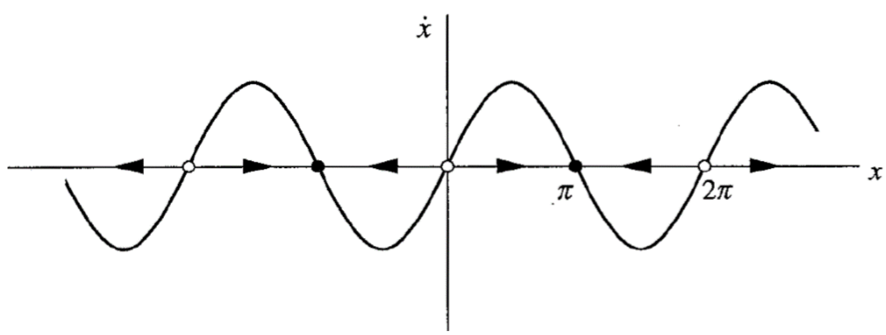


Figura 1.5 Ejemplo de puntos fijos: estables e inestables.
Fuente: Strogatz, *op. cit.*, P.17

Desde otra perspectiva, podemos pensar en un fluido que corre por el eje x a una velocidad distinta en cada punto particular, en función de la regla $\dot{x} = \sin x$. Entonces, como se muestra en la figura anterior, el flujo va hacia la derecha cuando $\dot{x} > 0$ y hacia la izquierda cuando $\dot{x} < 0$, pero cuando $\dot{x} = 0$ no hay movimiento[8], dichos puntos son llamados **puntos fijos**.

Se puede hacer la distinción entre dos tipos de puntos fijos: los sólidos de color negro son llamados **atractores** o pozos, que son puntos fijos estables; y los círculos con relleno blanco, llamados fuentes o punto de repulsión que representan puntos fijos inestables.

Una vez expuesto lo anterior, estamos en condiciones de mencionar que dicho flujo imaginario es llamado en realidad fluido de fase, el eje de las x es el **espacio de fase**, la partícula imaginaria es el punto de fase, la función $\boldsymbol{x(t)}$ que determina el movimiento del punto de fase se denomina **trayectoria** y es la que representa la solución a la ecuación diferencial dada una condición inicial particular. Por otro lado, la gráfica que representa todas las trayectorias del sistema se llama retrato de fase.

En términos de ecuaciones diferenciales, los puntos fijos representan soluciones de equilibrio, tal equilibrio, puede ser entonces clasificado como estable o inestable, dependiendo de si las perturbaciones crecen a través del tiempo.

Si bien la explicación anterior nos muestra una nueva perspectiva bajo la cual podemos entender el comportamiento y características de los sistemas no-lineales, nos brinda también una idea intuitiva sumamente útil: la dependencia a los **parámetros**.

[8] Intuitivamente, podemos notar que dependiendo del tipo de punto fijo que se presente, el sistema tomará trayectorias y consecuentemente equilibrios distintos, determinados por los valores de la función y por la forma en la que el punto fijo se encuentra constituido, así como la reacción que ejerce sobre el sistema, es decir, si atrae o repele la trayectoria. Asimismo, es importante conocer la influencia de los parámetros en un sistema, ya que un cambio en los mismos podrá eliminar o modificar la forma en la que el punto fijo ejerce su influencia en la trayectoria del sistema.

Ya que la estructura cualitativa del fluido de fase puede cambiar ante la variación de los parámetros, en particular, los **puntos fijos** pueden ser creados o destruidos a partir de un cambio en los parámetros. Dichos cambios cualitativos son llamados **bifurcaciones** y los valores de los parámetros en los cuales se llevan a cabo dichos cambios son llamados puntos de bifurcación.

En términos llanos, la bifurcación es un súbito cambio de dirección en la manera en que los sistemas se desenvuelven, proceso desencadenado por la sobretensión en sistemas complejos que lo empujan fuera de su estabilidad –dicha estabilidad es representada por el punto crítico. Es decir, las correlaciones entre los elementos de un sistema en evolución permanecen relativamente constantes, hasta que en un punto crítico se dividen y la ecuación que describe el sistema se lanza hacia un nuevo equilibrio.

La bifurcación, es un instante en el que determinada condición se ve amplificada por la **iteración** hasta alcanzar tal tamaño, que se crea una ramificación y el sistema adopta un nuevo rumbo, o como se dijo anteriormente, un nuevo equilibrio. En el curso del tiempo, las cascadas de puntos de bifurcación hacen que un sistema se fragmente (duplicación de periodo) cayendo en el caos, o bien, se estabilice en una nueva conducta mediante una serie de rizos de realimentación para acoplar el nuevo cambio a su medio ambiente. Una vez estabilizado por la realimentación, un sistema que ha pasado por una bifurcación puede resistir nuevos cambios durante largos períodos hasta que una nueva perturbación crítica amplifica la realimentación y crea un nuevo punto de bifurcación.

La bifurcación es un concepto clave, ya que describe el desarrollo de una posible doble solución que el sistema tenía antes de pasar por su nivel crítico. Una cascada de bifurcaciones se da cuando al llegar a este nivel, la ruta hacia el caos se duplica –o en las siguientes etapas, se cuadriplica, octuplica, etc. Es la transición de un sistema ordenado a un sistema caótico, lo que ocurre cuando el número de soluciones posibles empieza creciendo y doblándose periódicamente.

En el contexto económico y financiero, se ha encontrado evidencia del uso intuitivo del concepto de **bifurcación,** mismo que podría ayudar a identificar y explicar la reestructuración del mercado financiero o determinada economía en periodos de desequilibrio, tales como crisis o periodos de euforia.

Dicha noción de equilibrio fue encontrada, entre otros, por Fischer Black, matemático dedicado entre otras disciplinas, a las finanzas. Conocido por su valiosa aportación -desarrollada en conjunto con Myron Scholes y Robert Merton, la famosa fórmula para valuar opciones europeas que lleva su nombre (Black-Scholes).

La idea de que el mundo se encuentra en constante evolución, misma que le permite alcanzar nuevos equilibrios viene justamente de la Física, área en la que incursionó al inicio de su carrera académica. Es común encontrar que sistemas complejos tienden a estados estables, cuyo equilibrio se mantiene bajo perturbaciones pequeñas. Dichos estados son considerados como un equilibrio debido a que representan un balance de diversas fuerzas.[9]

Dicho descubrimiento se encuentra cristalizado en la Teoría de la Bifurcación, misma que identifica un punto de bifurcación, es decir, mediante modelos de **entropía** se modela el proceso dinámico

---

[9] Weatherall, J. (2013). ***"The physics of Wall Street: A brief history of predicting the unpredictable"***. USA. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company. P.111

que cambia la estructura de la información o la estructura física de un sistema en respuesta al estrés creado por condiciones derivadas del desequilibrio.[10]

Para identificar dicho punto de bifurcación se introduce el concepto de Constante de Feigenbaum, misma que resulta de gran utilidad debido a las características que nos permite identificar en un sistema. En la década de 1970, Feigenbaum físico americano, descubrió que en casi todos los casos, la razón de las distancias entre puntos sucesivos de bifurcación presenta un límite bien definido, a esa razón se le llamó la constante de Feigenbaum, en adelante $\boldsymbol{\lambda}$.

Más aun, en casi todos los casos, las razones correspondientes de las distancias entre los puntos de bifurcación tienen el mismo valor límite, es decir:

$$\boldsymbol{\lambda} \rightarrow \frac{\boldsymbol{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}}{\boldsymbol{\lambda_{n+1} - \lambda_{n}}}$$

Una vez que se supera dicha constante o valor de estabilidad, las **órbitas** resultantes de la iteración desencadenan un comportamiento caótico en el sistema, aparentemente **aleatorio**.

En sistemas dentro de este régimen caótico, en ciertos rangos de dicha constante, se establece una órbita estable que no necesariamente tiene periodo 2, sino muestra un periodo $\boldsymbol{k}$**,** para cualquier entero positivo $\boldsymbol{k}$. Esto, hasta que $\boldsymbol{\lambda}$ encuentre otro punto crítico donde el caos cede y se encuentra estabilidad nuevamente. Dicho comportamiento es típicamente representado por el siguiente mapa logístico.

---

[10] NAWROCKI, D. ***"Entropy, bifurcation and dynamc market disequilibrium"***. The Financial Review. Mayo 1984. P.266 **[en línea]** Disponible en Internet:
<http://www56.homepage.villanova.edu/david.nawrocki/entropy%20bifurcation%201984.pdf>

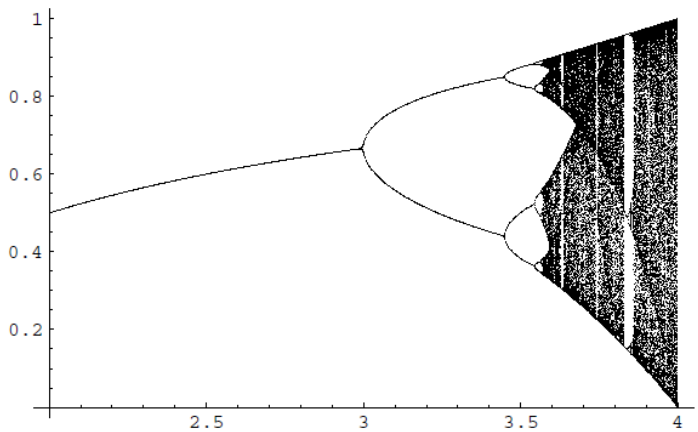


Figura 1.6 Mapa logístico o diagrama de bifurcación.

Fuente: OLVER, P. ***"Nonlinear Systems"***. Universidad de Minnesota. 18 de octubre 2015. P.12 **[en línea]** Disponible en Internet: <http://www.math.umn.edu/~olver/ln_/nls.pdf>

Existen, a su vez, distintos tipos de **bifurcación**, algunos de ellos se describen a continuación:

a) Bifurcación de Punto de Silla o Tangente: es el mecanismo básico para la creación y supresión de **puntos fijos**. Según la variación del **parámetro**, dos puntos fijos se mueven hasta encontrarse, alejarse o desaparecer.

   Típicamente se utiliza $\dot{x} = r + x^2$ como prototipo, donde r es el parámetro, mismo que puede ser positivo, negativo o cero. Para r negativo existen dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. A medida que el parámetro se acerque al cero los puntos fijos se juntarán hasta que en el origen el **punto fijo** pase a ser un punto fijo semi-estable, para desaparecer cuando el parámetro se vuelve positivo.

   En este ejemplo, la bifurcación ocurre cuando ***r=0***, que es el punto a partir del cual los campos vectoriales pasan a ser cualitativamente distintos.

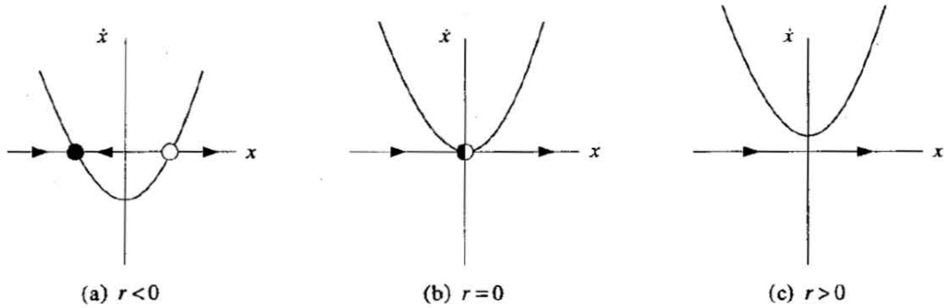


Figura 1.7 Bifurcación de Punto de Silla.
Fuente: Strogatz, *op. cit*, P.46

b) Bifurcación Transcrítica: Se lleva a cabo en los casos en los que el punto fijo existe para todos los valores del parámetro, es decir, no puede ser destruido. En la bifurcación transcrítica, los puntos fijos colisionan igualmente, pero no desaparecen, como se dijo con anterioridad, sino que intercambian su estabilidad.

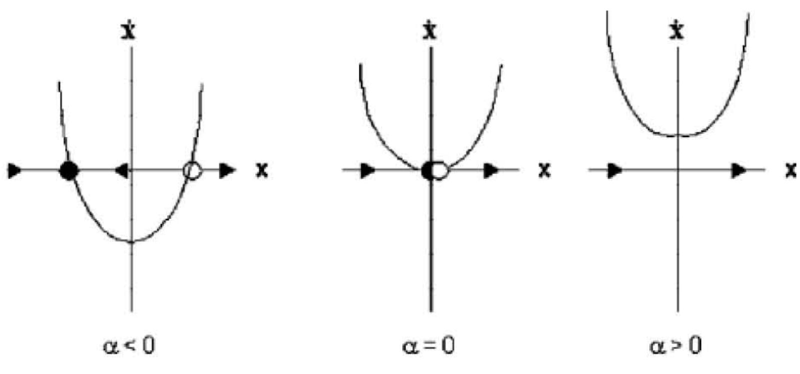
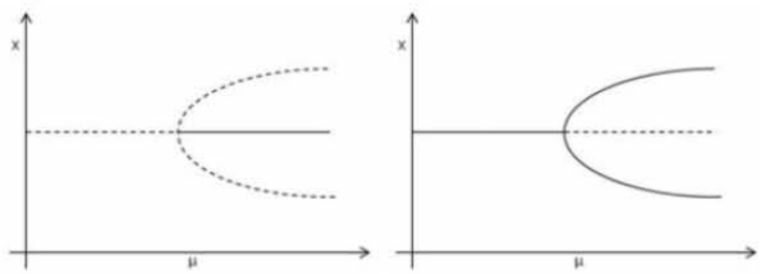


Figura 1.8 Bifurcación Transcrítica del sistema unidimensional **$x=\alpha x-x^2$**.
Fuente: VILCHEZ, Ma. L., VELASCO, F., GARCÍA, J, *op. cit.* P.654

c) Bifurcación Horquilla: Consiste en que un único punto fijo se separa en tres, de los cuales dos tienen la misma estabilidad que el punto original y el sobrante, estabilidad en un sentido contrario. Es una bifurcación simétrica y, por ende, se encuentra en muchos sistemas que presentan simetría entre una parte positiva y otra negativa. Pueden ser: (1) bifurcación subcrítica, cuando un punto fijo inestable bifurca en dos puntos fijos inestables y uno estable; y (2) bifurcación supercrítica, cuando un punto fijo estable bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable.



(a) Bifurcación horquilla subcrítica (b) Bifurcación horquilla supercrítica

Figura 1.9 Bifurcación Horquilla.
Fuente: Márquez, L. *op. cit.* P. 50

d) Bifurcación de Hopf: Es una de las más habituales en los sistemas no-lineales que provoca la aparición o desaparición de un **ciclo límite**, esta puede ser supercrítica o subcrítica.

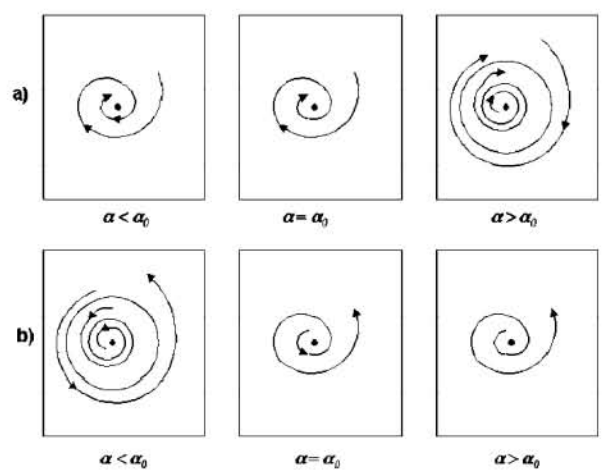


Figura 1.10 Bifurcación de Hopf supercrítica (a) y subcrítica (b).
Fuente: VILCHEZ, Ma. L., VELASCO, F., GARCÍA, J; *op. cit.* P.656

1.4 Estabilidad en los sistemas no-lineales: atractores

Como se mencionó anteriormente, puede ser difícil y a veces imposible encontrar la solución explícita de un sistema dinámico, en especial cuando es no-lineal y presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. Consecuencia de lo anterior, la **trayectoria** de sistemas con dichas características parece mostrar un comportamiento **aleatorio**; sin embargo, métodos analíticos exclusivos de fenómenos aleatorios, no son aplicables a sistemas con este tipo de comportamiento.

Es por ello, que en ocasiones resulta más conveniente conocer el comportamiento meramente cualitativo de las soluciones, tales como la periodicidad, o si existe algún límite cuando el tiempo tiende a infinito. Derivado de lo anterior, se considera preferible recurrir a la información cualitativa del sistema, evitando la previa solución del mismo, ya que podría sesgar el tratamiento que se le dé.

Dichas cualidades son a menudo estudiadas geométricamente con el fin de visualizar el comportamiento de las soluciones y deducir características importantes sin necesidad de acudir a desarrollos analíticos exhaustivos. Entre las principales herramientas geométricas se encuentran las gráficas de series de tiempo o los retratos de fase (el espacio donde se encuentra el retrato de fase se llama **espacio de fase**), que son representaciones de una variable estado contra el tiempo o bien, la representación de todas las **trayectorias** de un sistema dinámico, respectivamente.

En un **sistema dinámico disipativo,** cuyos segmentos de línea se reducen y como, por ende, traduce un volumen de **espacio de estados** completamente dentro de sí; los espacios de fase pueden contener subconjuntos de puntos que atraen o repelen las **trayectorias**, por lo que podemos entonces considerar la existencia de un **atractor**, aunque no sepamos qué aspecto tiene. Si los volúmenes en espacio de estados no se reducen con el tiempo, no puede haber atractores.

Básicamente, en función de lo descubierto por Lorenz, los atractores representan la noción de orden en el caos, ya que el retrato de los patrones trazados por objetos que responden a ecuaciones diferenciales, tienden a lucir como patrones regulares.

Un **atractor** es una región del **espacio de fases** que ejerce atracción sobre el sistema, arrastrándolo hacia sí, estabilizándose en función de las propiedades que operan sobre él. Los atractores son determinados por los dos componentes de los sistemas dinámicos: el vector de estados y la función del sistema.

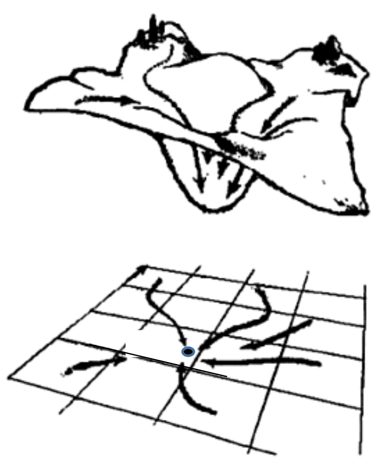


Figura 1.11 Región del espacio de fases que ejerce la atracción sobre el sistema.

Fuente: Rodríguez, J. M. (2006). **"*La dinámica de la innovación tecnológica*"** Colombia. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería. P.32

En función de la existencia y el tipo de los **atractores**, existen tres posibles trayectorias en los sistemas no-lineales: se converge o gravita alrededor de algún punto fijo, se tiene un comportamiento cíclico o la trayectoria diverge al infinito, dependiendo de la órbita.

Una **órbita** es el conjunto de puntos que define la evolución del sistema, este espacio es también conocido y previamente definido como **espacio de fases**, donde cada punto del mismo constituye un estado concreto del sistema dinámico. Entonces, dada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ **,** se define la órbita de $\boldsymbol{x}_0$ bajo F como una secuencia de los puntos, donde el punto $\boldsymbol{x_0}$ es llamado semilla o condición inicial.

$$\boldsymbol{x_1} = \mathrm{F}(\boldsymbol{x_0}), \qquad \boldsymbol{x_2} = \mathrm{F}^2(\boldsymbol{x_0}), \qquad \boldsymbol{x_3} = \mathrm{F}^3(\boldsymbol{x_0}), \quad \dots, \quad \boldsymbol{x_n} = \mathrm{F}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x_0})$$

Típicamente, los puntos de la órbita de una función tienden hacia algún valor una vez llevada a cabo la **iteración** correspondiente. Los espacios de fase pueden contener subconjuntos de puntos, ciclos o ambos, llamados singularidades, que atraen o repelen a las trayectorias que pasan cerca de estos.[11] Dichas singularidades determinan la estabilidad del sistema donde están contenidas, en el caso de los sistemas no-lineales se conocen como puntos fijos, ciclos límite y atractores extraños. Mientras en los sistemas lineales el único tipo de singularidades son los puntos fijos, para el caso de los sistemas no-lineales, las singularidades pueden ser también llamadas **ciclos límite** o **atractores extraños**, cuyas características serán enunciadas en los siguientes párrafos.

1.4.1 Puntos fijos

Órbitas en las que el sistema es atraído hacia un punto en el plano en dos dimensiones hacia una posición estable de descanso. Es decir, cada **punto fijo** representa una solución fija a un sistema dinámico, donde cada solución del sistema converge al punto fijo.

Mientras que la solución de un sistema dinámico discreto es trivial, comprender su comportamiento está lejos de serlo. Por ejemplo, en algunas ocasiones, la solución converge a un valor particular

[11] Márquez, L., *op. cit*. P.6

cuando la variable temporal tiende a infinito, es decir, después de $\boldsymbol{n}$ iteraciones, la solución se repite. Asimismo, puede que las iteraciones generen un comportamiento aparentemente aleatorio, o bien, caótico; dependiendo de la función, el número de iteraciones y las condiciones iniciales. Cuando esto sucede y el proceso llega a un estado estable, se dice que el sistema posee puntos fijos.

Si partimos de un $\boldsymbol{x}^*$que satisfaga $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$. Entonces, $\boldsymbol{x}^*$ es un punto fijo si para $\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{x}^*$ entonces $\boldsymbol{x_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$; por lo tanto la órbita permanece en $\boldsymbol{x}^*$para futuras iteraciones.

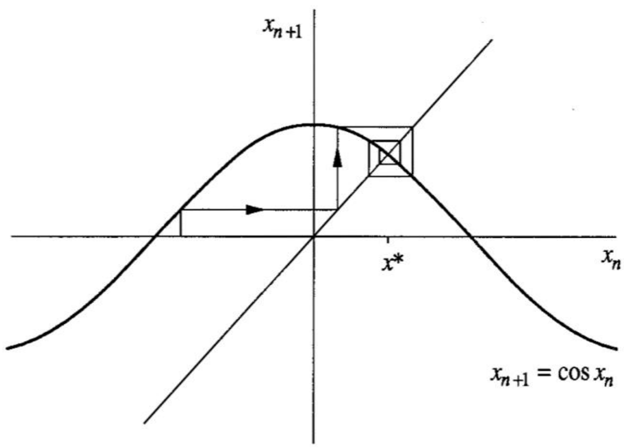


Figura 1.12 Ejemplo de punto fijo: iteración de punto fijo $x_{n+1} = cos\ x_n$.

Fuente: Adaptación de "Cosine fixed point" de Wikipedia

En caso de que un sistema posea puntos fijos, pueden a su vez suceder distintos eventos, el punto de convergencia o punto fijo puede ser estable, marginalmente estable o inestable.

- Asintóticamente estable, con la propiedad de que las soluciones cercanas convergen a él.
- Estable, las soluciones cercanas permanecen cerca del punto fijo estable.
- Inestable, casi todas las soluciones cercanas divergen del punto fijo.

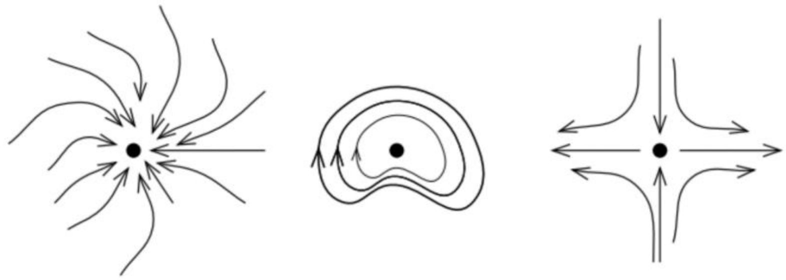


Figura 1.13 Tres tipos de puntos fijos. El de la izquierda es estable, el del centro Marginal o asintóticamente estable y el último inestable.

Fuente: Scheinerman, E. (2013). ***"Invitation to Dynamical Systems"*** Nueva York, Estados Unidos. Departamento de Ciencias Matemáticas. Universidad Johns Hopkins. P.77

Para encontrar el punto fijo de un sistema particular, el método de Newton es el más conveniente, ya que basta con diseñar un esquema eficiente de iteraciones que converja rápidamente a la solución. Dicha convergencia por medio de la iteración es encontrada por medio de la magnitud de la derivada al punto fijo.

1.4.2 Ciclos límite

Son órbitas donde todo oscila y determinado comportamiento se repite continua y periódicamente en ciclos regulares previsibles pero dinámicos; dado que una trayectoria se ve atraída hacia un punto fijo $\boldsymbol{a}$ tal que $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \rightarrow \boldsymbol{a}$ cuando $\boldsymbol{t} \rightarrow \infty$.

Un sistema es periódico cuando regresa a un estado previo $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{T})$ para alguna $\boldsymbol{T>0}$, lo cual implica que cualquier trayectoria que el sistema tome de $\boldsymbol{t_1}$ a $\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{T}$, se convertirá en un patrón que se repetirá una y otra vez: repitiendo la misma trayectoria infinitamente.

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{2T}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{3T}) = \cdots = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_n} + \boldsymbol{nT})$$

Un **ciclo límite** es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en su vecindad, por lo que las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite.

Los ciclos límite poseen entonces tres características principales: (1) son periódicas, (2) son una trayectoria u órbita cerrada y aislada, y (3) son trayectorias inherentemente no-lineales.

Por otro lado, existen distintos tipos de ciclos límites, cuando todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, el ciclo límite es considerado estable; en caso contrario éste es inestable. Existen, además, casos en los que el ciclo es semi-estable, mismo que se presenta cuando algunas trayectorias se acercan al ciclo y otras tienden a él.

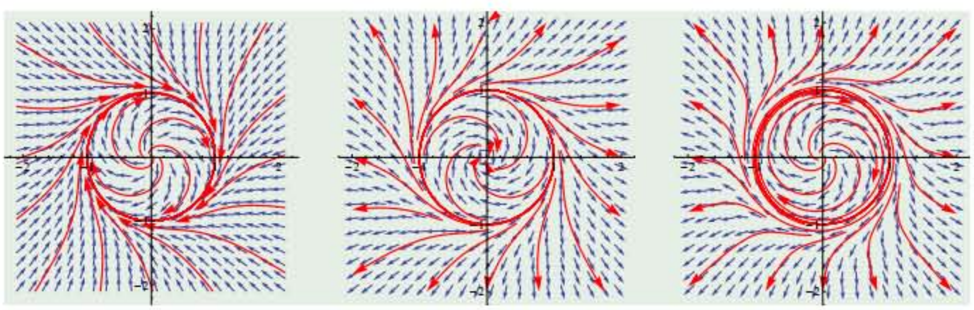


Figura 1.14 Tres tipos de ciclos límite. Estable, inestable y semi-estable.
Fuente: Adaptada de https://dcf.fc.up.pt/dinamica/ciclos_limite.html

1.4.3 Atractores extraños.

Nacieron en el marco del descubrimiento de un nuevo tipo de oscilaciones caóticas –en experimentos, dichas oscilaciones son típicamente tratadas como **ruido** por lo que son llamadas oscilaciones estocásticas. Un **atractor extraño** es aquel que tiene un movimiento aperiódico y presenta una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, el cual además posee una dimensión no entera, es decir, una **dimensión fractal**.

En algunas ocasiones surge cuando diferentes **ciclos límite** y puntos fijos de silla se encuentran en el sistema. Bajo ciertas condiciones, dichos repulsores enviarán a la trayectoria al infinito, sin embargo, suele haber casos en los que la trayectoria permanece viajando entre repulsores creando una órbita aperiódica, es decir, un atractor extraño.

El atractor extraño es de naturaleza fractal, ya que su estructura es producida por sucesivos plegamientos del **espacio de fases** sobre sí mismo, y en su proceso de generación revela las siguientes propiedades:

a) Compresión, por la cual el atractor caótico atrae a las órbitas próximas, dando lugar a un fenómeno de compresión del espacio de fases en torno al atractor.

b) Expansión o estiramiento, propiedad básica de las órbitas del atractor caótico, la cual provoca que éstas diverjan exponencialmente entre sí, causando así la expansión o estiramiento del espacio de fase. El estirado hace que las condiciones iniciales se separen con una rapidez exponencial.

c) Plegamiento, característica de la transitividad topológica del atractor, la cual causa que órbitas alejadas inicialmente puedan llegar a aproximarse, efecto que se logra mediante el plegamiento del atractor sobre sí mismo, causando mezclas en el espacio de fase.

d) Cerramiento, propiedad por la cual se cierra por sus propios extremos la órbita caótica sobre sí misma.

e) Microestructura fractal, que se explica mediante el proceso esquematizado de plegamientos sucesivos en las primeras fases de generación de un atractor extraño.

Un atractor extraño es, entonces, un atractor en un espacio de fases, donde los puntos jamás se repiten a sí mismos y las órbitas nunca se interceptan, pero en donde tanto los puntos como las órbitas están dentro de la misma región del espacio de fase.[12]

Dado que el caos dinámico implica la presencia de un **atractor extraño** y **bifurcaciones**, es importante mencionar que las bifurcaciones en órbitas periódicas como los ciclos homoclínicos y heteroclínicos son la forma más sencilla para llegar al caos; las principales características estructurales de un atractor extraño pueden ser fácilmente detectadas por dichas bifurcaciones.

Como se mencionó anteriormente, un atractor extraño no es periódico, por lo cual, no tiene ritmo constante, ni se repite y todas sus trayectorias son inestables. Entonces, los únicos posibles casos de estabilidad son: estados de equilibrio, órbitas periódicas y cuasi-periódicas. La tercera posibilidad es que el valor absoluto de $\mathbf{x}$ crezca cada vez más con lo que la trayectoria tiende a infinito cuando $\boldsymbol{t} \rightarrow \infty$.

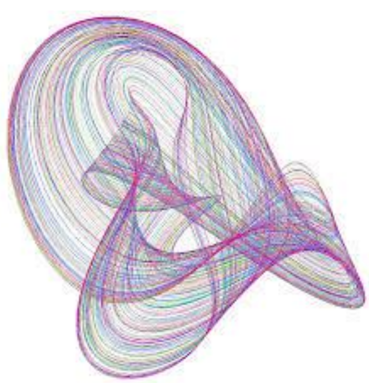


Figura 1.15 Atractor cíclico simétrico de Halvorsen.

Fuente: SPROTT, J.C. ***"Strange Attractors"***. Universidad de Wisconsin, Departamento de física. Invierno del 2008. P.12 **[en línea]** Disponible en Internet: < http://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper317.pdf>

[12] Peters, E. (1994). **"Fractal Market Analysis: applying chaos theory to investment & economics"** New York. John Wiley & Sons, Inc., P.311

Se encuentran tres principales clases de atractores extraños:

- Hiperbólicos. Son estructuralmente estables, en ellos, las orbitas periódicas y homoclínicas, así como las trayectorias son densas y del mismo del tipo de punto de silla.
- De Lorenz. También son densos en sus órbitas homoclínicas, pero es estructuralmente inestable. Sin embargo, si las perturbaciones son pequeñas y suaves, las órbitas periódicas estables no se originarán.
- Cuasi-atractores. Denotan un limitado conjunto englobando órbitas periódicas de distintos tipos topológicos. Puede ser estructuralmente estable o inestable, el segundo caso resultado de la presencia de tangencias homoclínicas. Las órbitas periódicas estables tienen una periodicidad reducida, es decir, son muy largas. Los cuasi-atractores suelen lucir como el caos determinístico.

1.5 Hiperbolicidad

La hiperbolicidad juega un papel central en la teoría de sistemas dinámicos: es el paradigma de los sistemas llamados "caóticos", a pesar de lo cual se tiene una descripción bastante completa de su dinámica. Por otro lado tienen propiedades de estabilidad, lo que implica que esta "caoticidad" no se destruye por pequeñas perturbaciones del sistema.[13]

La hiperbolicidad ha sido particularmente estudiada, pues permite sacar conclusiones respecto a la dinámica de los conjuntos que tienen dicha propiedad (tanto de dinámica topológica como desde

[13] SAMBRINO, M. (2009) ***"Hiperbolicidad y estabilidad"***. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Escuela Venezolana de Matemáticas. P.12 **[en línea]** Disponible en Internet: <http://evm.ivic.gob.ve/LibroSambarino.pdf>

el punto de vista ergódico). Por ejemplo, la expansividad, una propiedad característica y fundamental de los conjuntos hiperbólicos no dice que la dinámica en dichos conjuntos es impredecible, en el sentido de que es imposible predecir el comportamiento de una órbita cuando cometemos un pequeño error en la medición de la condición inicial.[14]

La idea anterior, refuerza la importancia de las condiciones iniciales en el sistema y la forma en la que los errores nos llevarán a un error en las predicciones, derivado de errores observacionales y el carácter exponencial de un sistema dadas las múltiples iteraciones.

Además, se ha llegado a unir procesos tales como la **bifurcación** con la pérdida de hiperbolicidad, y dado que la presencia de hiperbolicidad implica algún tipo de estabilidad, se reafirma la idea de que una bifurcación desplaza al sistema, de un punto de inestabilidad a un nuevo equilibrio, que le permita seguir su trayectoria.

Casualmente, enfoques similares han sido adoptados a lo largo de los años por la teoría económica por investigadores, tales como Marx, Pigou, Shumpeter, Keynes, Alvin Hansen, John Hicks, Kondratieff, entre otros.

Joseph Schumpeter, fue un economista austro-estadounidense, cuya principal contribución a la Economía fue su investigación sobre la dinámica de los ciclos económicos. La escuela de Schumpeter considera que los ciclos económicos son naturales en el capitalismo y provienen de oleadas de innovación de productos y empresas. Las patentes e inventos se acumulan en el Ciclo de Crecimiento y se convierten en innovación durante las crisis. Las crisis demoran el tiempo que los

[14] *Ibíd.*, P.35

inventos se convierten en nuevos productos o innovación. Con el nuevo ciclo de crecimiento desaparecen del mercado las empresas y empresarios que no han realizado innovación. [15]

El crecimiento puede reanudarse en nuevas regiones, en nuevos centros de crecimiento, con nuevos empresarios y nueva generación de trabajadores, más calificados. Es decir, se plantea la presencia de perturbaciones que desestabilizan al sistema, cuyo proceso lleva al mismo a alcanzar un nuevo equilibrio, como la dinámica de la bifurcación sugiere.

[15] GIUDICE, V.; ***"Teorías de los ciclos económicos"***. Instituto de Investigaciones Económicas, Facultad de Ciencias Económicas. P.2 **[en línea]** Disponible en Internet: <http://economia.unmsm.edu.pe/org/arch_doc/VGiudiceV/publ/TeoriasCiclosEconomicos.pdf>

2

CAOS Y ORDEN

En términos prácticos, el caos se puede definir como la propiedad intrínseca a los sistemas dinámicos que permite un crecimiento rápido de la incertidumbre en los modelos matemáticos, causando impredictibilidad a largo plazo en el comportamiento del sistema, muchas veces dicha impredictibilidad se encuentra asociada al **ruido**, hecho que se discutirá posteriormente.

El caos es un tipo peculiar de comportamiento complejo, dinámico, no-lineal, **aperiódico**, impredecible y que suele aparecer bajo condiciones totalmente **deterministas**, mismas que presentan una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, comportamiento que difiere de los fenómenos aleatorios, con los que la dinámica caótica es comúnmente confundida. Lo anterior, consecuencia en gran medida de una de las características principales de los sistemas caóticos, y es que presentan estructuras ordenadas ocultas en dinámicas desordenadas o aparentemente azarosas, determinadas por reglas fijas que producen esta cierta apariencia desorganizada. [16]

El caos no encaja plenamente en el paradigma causa-efecto tradicionalmente seguido hasta hace poco tiempo por las ciencias, pues postula una causalidad circular y asimétrica, misma que podría

---

[16] Borjón, J. J. (2002) ***"Caos, orden y desorden: en el sistema monetario y financiero internacional: el caso de México"*** México. Plaza y Valdes Editores. P.25

funcionar bajo una dinámica no-lineal. Además, como se ha mencionado anteriormente y se abundará más adelante, es determinista por su sensibilidad a las condiciones iniciales. Es, además, no-lineal, por lo que se dificulta aún más la tarea de distinguir con exactitud la regla bajo la cual el sistema lleva a cabo su dinámica, o las condiciones iniciales de las cuales partió la trayectoria actual.[17]

En el mundo real, donde la mayoría de los sistemas dinámicos son no-lineales, vive un universo de sistemas caóticos. Nos enfrentamos entonces a un conjunto de fenómenos caóticos bastante amplio, cuyo comportamiento por muchos años ha tratado de ser explicado bajo el supuesto de la no-linealidad o de la existencia de perturbaciones estocásticas.

Los fenómenos caóticos, forman entonces parte de un conjunto universal y ampliamente estudiado en el capítulo anterior, que son los sistemas dinámicos. Particularmente, se encuentran dentro de un subconjunto de los mismos, que responden ante reglas que determinan un comportamiento no-lineal en las trayectorias de los sistemas dinámicos. El esquema 3.1 es ilustrativo respecto a lo mencionado anteriormente.

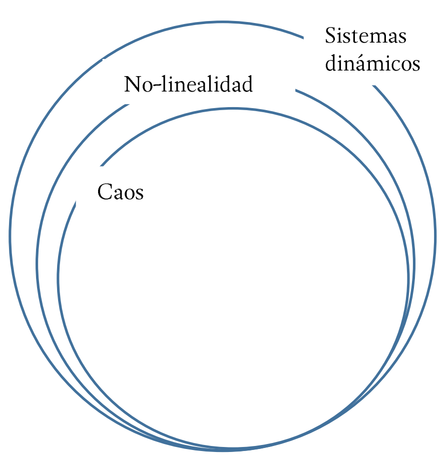


Figura 2.1 Sistemas dinámicos no lineales caóticos

Fuente: Elaboración propia

[17] *Ibíd.*, P.25

deEl caos se relaciona, entonces, con una clase de fenómenos bien definidos e impredecibles detrás de los cuales existe un orden oculto, por lo que la Teoría del Caos podría quedar definida en términos del estudio científico de dichos fenómenos, procesos y cambios de carácter dinámico, complejo y no-lineal, que no sólo encuentran cabida en la naturaleza, sino también en formaciones sociales, organizaciones políticas, económicas, e incluso financieras.

Dentro de sus características principales se encuentran: el orden sin periodicidad, comportamiento recurrente y su apariencia estocástica, irregular y no-lineal, con un equilibrio entre las fuerzas de la estabilidad y la inestabilidad, donde existe una interacción poderosa de fuerzas a escala atómica y macroscópica.

Consecuentemente, el caos es típicamente definido como un comportamiento presente en algunos sistemas dinámicos deterministas no-lineales, hecho que puede producir resultados aparentemente aleatorios, resultado de la continua transición de una órbita periódica a otra[18], por lo que el estudio del caos revela modelos ocultos de fluctuaciones de orden que caracterizan con frecuencia a los sistemas complejos –como las transacciones de instrumentos financieros y el comportamiento del precio de los mismos.

Los sistemas caóticos deberían tener **dimensión fractal** y mostrar **dependencia sensitiva** a las condiciones iniciales; siendo la dimensión fractal la que influye en la irregularidad y asimetría de los mercados financieros. Sin embargo, podría ser estable si su peculiar irregularidad persiste a

[18] Borjón, J., *op. cit.* P.43

pequeñas perturbaciones, es decir, a pesar de su impredictibilidad, el caos puede ser globalmente estable aun cuando muestre formas de irregularidad y sea localmente impredecible.[19]

En general, el término "caos" se aplica, en el campo de la Física, para cualquier fenómeno que siendo de carácter determinista es impredecible, sobre todo a mediano y largo plazo; sin embargo, esto no quiere decir que sea imprevisible, pues se puede retroalimentar a una computadora con determinada información y darle la orden para que nos proporcione un número de **iteraciones**, las cuales pueden describir la evolución de un fenómeno a partir de un valor inicial y darnos sus diversas etapas de estabilidad e inestabilidad, periodicidad y **aperiodicidad**, regularidad e irregularidad y orden y desorden.

Otra definición popular del caos es la condición del **Exponente de Lyapunov** –mismo que será definido posteriormente. Para que un sistema dinámico muestre un comportamiento caótico, el exponente de Lyapunov más grande debería ser positivo, ya que es la forma en la que podemos capturar la noción de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, supuesto con el cual se trabajará más adelante.

Es importante mencionar una característica peculiar del caos, mencionada ya anteriormente, que es la presencia de orden en una escala macroscópica y caos en una microscópica, donde la información se transmite de escalas altas a bajas por medio de un **atractor extraño**, que agranda el azar inicial. El cambio de área corresponde a introducir incertidumbre sobre el pasado del sistema, una ganancia o pérdida de información. Cuanto más depende del azar una corriente de datos, más información aporta cada bit nuevo.

[19] *Ibíd.*, P.43

El fin de la mecánica estadística[20] es explicar cómo movimientos erráticos (caóticos) en partículas a escala microscópica, parece ser regular y organizada a escala macroscópica. La creencia universal es que la dinámica microscópica emerge en una forma matemática rigurosa en el idealizado límite de infinitas separaciones de escala. Fue por ello, que la teoría ergódica surgió, para explicar dicho comportamiento.

Existe un aspecto que fue considerado hasta los inicios de la década de 1980 en el contexto de la Teoría del Caos y sistemas complejos, y es que una estructura de gran escala podía emerger de procesos subyacentes. Es decir, la organización de partículas en un sistema son las que rigen y desencadenan el comportamiento del mismo a gran escala. Por ejemplo, el aparentemente inofensivo movimiento de partículas de gas en la atmósfera, en una escala microscópica, y sus interacciones y choques con fenómenos adyacentes alcanzan un estado de organización tal que puede desencadenarse la formación de un huracán.[21]

Entonces, el principal problema es entender qué causa el movimiento desordenado de las partículas en la escala microscópica. De acuerdo con los fundamentos de la estadística mecánica, el estado de un sistema de partículas es aleatorio porque cualquier sistema en la naturaleza contiene un número exorbitante de partículas. Es por eso que hablar de un estado en particular de dicho sistema no

[20] Los comienzos de esta rama de la Física se remontan a la segunda mitad del S XIX, ligada con nombres tales como Maxwell, Boltzmann, Clausius y Gibbs. La mecánica estadística busca describir y predecir las propiedades de los sistemas compuestos por un gran número de partículas, en función de las fuerzas entre las mismas. Incluye dos campos principales, cada uno de los cuales intenta explicar un conjunto de resultados experimentales de los sistemas macroscópicos: La mecánica estadística de los sistemas en equilibrio (o también llamada Termodinámica Estadística) y la Mecánica Estadística fuera del Equilibrio.
En Mecánica Estadística, con cada estado macroscópico del sistema se asocia una colectividad de sistemas, todos en el mismo estado macroscópico, pero cada uno con microestados, posiblemente diferentes, pero compatibles como el macroestado de referencia. Así, el valor de una propiedad del sistema, en un determinado estado macroscópico, es el promedio de los valores de dicha propiedad, calculado en los sistemas correspondientes a tal macroestado.
CÁRCAMO, Ulises; ***"El origen fenomenológico de la Teoría Ergódica".*** Revista Universidad Eafit. No. 103. P. 20 [en línea]. Disponible en Internet: <http://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/revista-universidad-eafit/.../1078>

[21] Weatherall, J. *op. cit*. P.146

tendría sentido y resulta mejor considerar el conjunto/unidad probabilística de dichos estados, donde la aleatoriedad surge por el gran número de **grados de libertad** (partículas) en el sistema, tal como sucede en el sistema financiero, cuyas variables o grados de libertad son infinitos.

El interés de los economistas por la Teoría del Caos comenzó a finales de la década de 1980, aproximadamente veinte años después de que Lorenz vislumbrara dicha teoría en 1963. La Teoría del Caos presenta una interesante perspectiva desde el punto de vista económico, principalmente en la explicación de fenómenos que aparentan tener un comportamiento desordenado. Detrás de ese aparente desorden, existe una dinámica que puede ser explicada usando apropiadas técnicas matemáticas y estadísticas.[22]

2.1 Caos matemático

El caos matemático encuentra sus bases y se rige por tres condiciones o rasgos particulares que permiten su existencia y que dejan de lado la idea de **aleatoriedad** asumida durante periodos anteriores a su identificación, mismas en las que se abundará a continuación: el **determinismo**, la sensibilidad a las condiciones iniciales y la no-linealidad.

2.1.1 Determinismo

La hipótesis determinista de los sistemas dinámicos asume la existencia (aunque no se les conozca con precisión) de leyes $\mathcal{L}$ no azarosas, que regulan las variables del sistema, que ante la misma causa

[22] Rodríguez, R. (2013). TESIS: "***El efecto mariposa dentro de la Teoría del Caos y su incidencia en la planeación estratégica de organizaciones*".** México, D.F., UNAM. Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración. P.23

producen el mismo efecto y que son invariantes (las leyes, no las variables o las causas) en todo instante.

Lo que nos interesa muchas veces respecto a un sistema, como se ha mantenido a lo largo de esta investigación, no es sólo conocer las leyes $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ que gobiernan las **trayectorias** del mismo, sino tener la capacidad de predecir o conocer el estado del sistema en cada instante.[23]

Con el fin de encontrar una solución al problema anteriormente expuesto, los científicos del caos han descubierto que los sistemas deterministas que se mantienen a sí mismos por oscilación, iteración, retroalimentación y ciclos límite, son vulnerables al caos y enfrentan un destino indeterminado si se los lleva más allá de los límites críticos, razón por la que se considera al determinismo como una condición necesaria para la existencia de propiedades caóticas en un sistema.

En términos prácticos, la presencia de determinismo implica que el estado actual de un sistema, define completamente su trayectoria futura, por lo que, consecuentemente, el estado actual es el efecto de su pasado y la causa de su futuro.

Es decir, el determinismo en su forma más simple puede ser expresado matemáticamente de la siguiente manera, donde el estado actual de un sistema $\boldsymbol{x_n}$ es dependiente del estado anterior $\boldsymbol{x_{n-1}}$, por lo cual, conocer los estados anteriores importa, e importa mucho:

[23] CATSIGERAS, E. (2000) ***"La teoría matemática del caos determinista"***. Instituto de Sistemas Dinámicos. P. 4. **[en línea]** Disponible en Internet: <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/caosDeterminista.pdf>

$$\boldsymbol{x_n = F(x_{n-1})}$$

Es por lo anterior, que un modelo determinista no puede ser considerado aleatorio, ya que no se encuentra implícita una perturbación aleatoria, por lo que cualidades pertenecientes al azar no son introducidas al sistema. Por el contrario, las variables que determinan el sistema son identificables y la trayectoria futura sería predecible de conocerse las leyes que rigen el dinamismo, las condiciones anteriores incluyendo el estado inicial, y se tuviera además, la capacidad de efectuar los cálculos necesarios con la gran cantidad de variables que interfieren en el sistema.

Como se mencionó anteriormente, en un sistema matemático determinista, la norma o función no requiere la presencia de un número aleatorio para ser llevada a cabo. Caso contrario, en un sistema estocástico, incluso si iteramos exactamente la misma condición inicial, esperaremos que los resultados de la serie temporal sean distintos, derivado de esas cualidades propias de la incertidumbre, introducidas por las perturbaciones aleatorias, cuyas leyes no permiten discernir fácilmente patrones o trayectorias certeras. Cabe mencionar que procesos caóticos sólo se desarrollan en sistemas dinámicos que presentan cualidades deterministas en su funcionamiento, por lo que sistemas dinámicos con perturbaciones aleatorias, se encuentran fuera de nuestro universo de estudio.

No obstante lo anterior, el caos determinista añade movimientos irregulares producidos por sistemas no-lineales cuya evolución en el tiempo está determinada en forma única a partir del conocimiento de su historia anterior, en términos generales, el caos determinista da lugar a trayectorias irregulares aparentemente aleatorias que, sin embargo, son deterministas.[24]

[24] Márquez, L. *op. Cit*. P.28

2.1.2 ependencia sensitiva

El caos es presentado como un sistema complejo e inestable en el cual la presencia, ausencia o cambios insignificantes en determinados fenómenos generarán una trayectoria totalmente distinta en el evento derivado de dichos fenómenos y finalmente en el sistema como totalidad. Dicho comportamiento se entiende como la tendencia a alejarse rápidamente de trayectorias cercanas por cambios es las condiciones iniciales a través del tiempo, Lorenz llamó **efecto mariposa** a esta dependencia a las condiciones iniciales. Es por ello que poner especial atención a las relaciones de causalidad toma gran importancia cuando intentamos analizar sistemas con propiedades caóticas.

De hecho, Lorenz descubrió accidentalmente el caos debido a sus investigaciones orientadas a la predicción climática. Fue justamente la sensibilidad a las condiciones iniciales la característica descubierta en su modelo, sin embargo, quienes desarrollaron la Teoría del Caos como la conocemos hoy en día, fueron los físicos James Yorke y Tien-Yien Li. [25]

Un sistema dinámico tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si dos condiciones iniciales distintas la una de la otra, después de atravesar un proceso iterativo, separan sus trayectorias por una distancia $\boldsymbol{\delta}$, es decir:

Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio métrico y $\boldsymbol{f}$ una función que mapea $\boldsymbol{X}$ en sí mismo:

$$\boldsymbol{f: X \to X.}$$

[25] Para más información acerca del trabajo de James Yorke y Tien-Yien Li en la dinámica de procesos caóticos, consultar su *paper* más afamado respecto al tema: “Period three implies chaos”.
YORKE, J; LI, T. (1975)***“Period three implies chaos”*** The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10., P.985-992. **[en línea]** Disponible en Internet: <http://www.its.caltech.edu/~matilde/LiYorke.pdf>

La función $\boldsymbol{f}$ tiene dependencia a las condiciones iniciales si

$$\exists \quad \boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$$

Tal que,

$$\forall\, \boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{X} \quad \text{y} \quad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$$

Hay un $\boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{X}$ y un número $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Tal que,

$$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] < \boldsymbol{\varepsilon} \quad y \quad \boldsymbol{d}[\boldsymbol{f^n}(\boldsymbol{x_1}), \boldsymbol{f^n}(\boldsymbol{x_2})] > \boldsymbol{\delta}$$

Es decir, dos condiciones iniciales comienzan separadas en $\boldsymbol{\varepsilon}$ y después de $\boldsymbol{n}$ iteraciones se separarán por una distancia $\boldsymbol{\delta}$.

2.1.3 No-linealidad

Se refiere a los sistemas que muestran una respuesta desproporcionada, donde el impacto de una unidad más, no tiene que ser el mismo que la unidad añadida anteriormente. Un aspecto que distingue la dinámica no-lineal del análisis tradicional, es que la primera tiende a centrarse en el comportamiento de los sistemas más que en los detalles de un determinado **estado inicial** bajo ecuaciones concretas con valores paramétricos específicos, es decir, tiende a ser más geométrica que estadística.

El concepto de no-linealidad se encuentra íntimamente vinculado con la idea de la dependencia sensitiva. De hecho, la predicción se acercará un poco más a la realidad si el sistema es lineal, ya que la dependencia sensitiva se limita de cierta manera y cambios pequeños en el estado inicial o la trayectoria misma sólo producen variaciones pequeñas o certeras en el estado final.

Aun cuando pudiéramos pensar que conociendo las leyes generales de cualquier fenómeno y dado el determinismo presente en algún sistema, pudiese conocerse cualquier estado en cualquier momento temporal, presente, pasado o futuro, con el descubrimiento de sistemas no-lineales y la imposibilidad de predicción fiel de su comportamiento, derivada de la dependencia de las trayectorias del sistema a las condiciones iniciales, el determinismo deja de aportar predictibilidad al sistema, ya que pequeños cambios iniciales en los sistemas caóticos se amplifican con el tiempo y dan lugar a diferencias macroscópicas.

Hay quienes sostienen que la definición de caos matemático sólo se puede aplicar a modelos matemáticos, de modo que no se puede demostrar que un sistema físico es caótico. Sin embargo, la presencia de caos en dichos sistemas ha sido exhaustivamente demostrada mediante el cumplimento de las tres condiciones anteriormente mencionadas, además de métodos matemáticos más rigurosos como la identificación de hiperbolicidad de un sistema o el estudio de sus características topológicas, mismas que pueden, mediante demostraciones de dichas cualidades, asumir la existencia de comportamiento caótico. Asimismo, nos permite la comprensión y estudio del comportamiento e identificación de las propiedades caóticas de un sistema.

2.2 Probabilidad

Aun cuando el ser humano parece tener una imperativa necesidad del pleno conocimiento del mundo y los fenómenos que lo rodean, somos conscientes de que nuestra ignorancia es infinitamente mayor a nuestro conocimiento; que aunque queramos prever la densidad del tráfico para llegar a nuestro destino, el tiempo que hará mañana o la cotización de algún instrumento financiero, no conocemos la respuesta con certeza. Incluso, ni siquiera conocemos la aproximación a un posible estado de la realidad.

Es por ello, que se han creado herramientas matemáticas que nos permitan elaborar mediciones y aproximaciones a esos eventos ante los cuales el ser humano se encuentra expuesto. La Probabilidad, es la rama de la ciencia encargada de estudiar y desarrollar las técnicas matemáticas que nos faciliten hacer inferencias cuantitativas acerca de la incertidumbre, lo anterior, usando como base las reglas de la lógica.

La Probabilidad no nos dirá el tiempo que hará mañana, ni el precio de las acciones en bolsa de la próxima semana, pero sí nos proporciona una estructura de razonamiento que nos permite trabajar con nuestro conocimiento limitado de la realidad y así tomar decisiones con base en lo que sí sabemos. Por ejemplo, cuando hablamos de **probabilidades**, al ver un pronóstico del 40% de lluvia para mañana, no estamos prediciendo el futuro, sino haciendo énfasis en lo que no sabemos sobre el tiempo de mañana.

De cualquier forma, incluso cuando la incertidumbre ha estado siempre presente entre nosotros, las teorías matemáticas sobre la Probabilidad se originaron en el S XVII con Blaise Pascal y Pierre de Fermat, cuyo resultado fue la obra de Pascal *"Traité du Triangle Artihmetique"*, donde describe los coeficientes binomiales (Triángulo de Pascal) y la distribución binomial de probabilidad. Para que posteriormente, en el S XX, Kolmogorov, Markov y Chebyshev desarrollaran una Teoría de Probabilidad matemáticamente más formal, que la llevó a la popularización en el mundo occidental como un área de la matemática pura, y como una herramienta importante para otras áreas del conocimiento científico tales como la Física, la Química e incluso la Informática y la Economía, llegando hasta las Finanzas.

En esta rama de la Economía -las Finanzas, la Probabilidad ha sido de gran ayuda para la valuación de instrumentos financieros y la medición de los riesgos inherentes, lo cual nos permite hacer coberturas a portafolios, por ejemplo. Pero muchas veces, los modelos matemáticos probabilísticos, en su abstracción, desdeñan la complejidad de sistemas como el financiero. Más aún, ignoran cualidades y propiedades inherentes al carácter sociológico de la población, haciendo a un lado características determinantes para las trayectorias futuras de series temporales, o bien una valuación de riesgos sin tomar en cuenta factores tales como el libre albedrío de los agentes económicos o el hecho de que vivimos en un mundo no-lineal.

Bajo el paradigma actual en las Finanzas Bursátiles, se utilizan distribuciones de probabilidad con el fin de realizar pruebas estadísticas sobre éstos, de tal forma que se conozca la **probabilidad** de ocurrencia de valores en particular, y se nos permita también evaluar las características de una serie de datos. Es por lo anterior, que debe utilizarse la distribución de probabilidad que se adecúe a cada serie de datos, de otra forma, los resultados no serán válidos.

Derivado de lo anterior, y si partimos de la premisa de que el mercado financiero presenta un comportamiento caótico, deberíamos apegarnos a la distribución correspondiente, ya que al utilizar una distribución normal como se ha hecho durante años, los resultados de cualquier examen que se haga bajo este enfoque, resultarán erróneos. Es por ello, que la importancia de reconocer la familia de distribución a la que una **serie de tiempo** pertenece cobra importancia.

2.3 Incertidumbre

Técnicamente, el caos es la propiedad de un sistema dinámico con ecuaciones fijas y valores de los **parámetros** especificados, de modo que la incertidumbre sobre la que actúa el caos, es la incertidumbre del estado inicial y las leyes que gobiernan determinado proceso. Pero el conocer la situación inicial del sistema ya supone un gran paso en la predicción, además de la existencia del problema de la **dependencia sensitiva**. Como ya se había mencionado anteriormente, aun cuando la predictibilidad es prácticamente imposible, la previsión no es inviable.

Al ser caótico un sistema dinámico, asumimos su **determinismo**, expansividad, y sensibilidad a las condiciones iniciales. Entonces, dos estados iniciales diferentes (aunque estén arbitrariamente próximos), dan lugar a órbitas que se separan más que una constante positiva $\boldsymbol{\alpha}$, llamada constante de **expansividad** (para efectos prácticos $\boldsymbol{\alpha}$ es el umbral de percepción de error). Si quisiéramos predecir toda la evolución del estado del sistema dinámico caótico, es decir, conocer la **órbita** o **trayectoria** en el **espacio de fases**, con un error menor que $\boldsymbol{\alpha}$**,** necesitaríamos conocer exactamente el estado inicial del sistema, sin hacer absolutamente ninguna aproximación del mismo, ni de los sucesivos estados obtenidos. [26]

No existe especificación tolerable de error en los datos iniciales. Desde el punto de vista matemático teórico, implica la individualidad de la evolución en el tiempo de cada órbita: cada estado inicial da origen a un recorrido único y bien distinguible de los demás, irreproducible con otro dato inicial, por más parecido que sea inicialmente este al primero.[27]

Para poder vencer a la incertidumbre y hacer que nada sea incierto, y el futuro al igual que el pasado fueran presente se necesitaría poseer tres propiedades elementales según Laplace: conocimiento exacto de todas las fuerzas, posiciones y capacidad infinita de cálculo. El demonio de Laplace[28] nos muestra el vínculo entre determinismo y predicción ya que para que un modelo matemático sea eficiente entonces deberá cumplir con tres características:

- Conocimiento exacto de las leyes de la naturaleza, es decir, de las fuerzas.
- Conocimiento del estado exacto del universo, es decir, las posiciones.
- Infinita capacidad de cálculo, o sea, un intelecto que sea capaz de someter los dos puntos anteriores a un análisis exhaustivo.

Según Laplace, contando con las tres condiciones anteriores podemos suponer que la **aleatoriedad** no existe. Se supone que seríamos capaces de calcular, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda al aire. Desafortunadamente, sabemos que no poseemos siquiera una de las tres condiciones

[26] CATSIGERAS, E., *op. cit*. P.6
[27] *Ibíd.*, P.7
[28] Se le llama demonio de Laplace a una inteligencia que en un instante dado conozca todas las fuerzas actuando en la naturaleza, así como la posición de todo lo que la compone, y si esta inteligencia fuese lo suficientemente vasta para someter esos datos a análisis, podría incluir en una sola fórmula el movimiento de los objetos más grandes del Universo, así como el más pequeño de los átomos: nada sería incierto para tal sujeto y tanto el futuro como el pasado estarían ante sus ojos.

necesarias, así que debemos proceder a conocer mejor el papel que la incertidumbre juega en los sistemas dinámicos.

Para poder conocer hasta qué punto la incertidumbre a las condiciones iniciales y el momento en que la incertidumbre sobrepasará un determinado umbral nos resulte relevante en determinada predicción, resulta necesario cuantificar la dinámica de la incertidumbre, típicamente, esto se lleva a cabo mediante los Exponentes de Lyapunov.

2.3.1 Exponentes de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es uno de los métodos más seguros para identificar la presencia de caos en un sistema, ya que nos da una idea de cómo evolucionan (divergen, convergen o mantienen la distancia) dos órbitas que parten de dos puntos suficientemente próximos. [29]

Proporcionan una medida precisa de las cualidades topológicas correspondientes a conceptos como la impredictibilidad de la evolución de un sistema. Dicho en un contexto topológico, mide los efectos de estirar, contraer y plegar el **espacio de fases** de un **atractor**. Asimismo, define si un sistema tiene o no dependencia sensitiva, ya que si se aplica cualquier deformación suave al **espacio de estados**, el exponente no cambiará.

Suministran además, una imagen de todas las propiedades de un sistema, las cuales pueden culminar en estabilidad o inestabilidad, dependiendo de lo siguiente (donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un Exponente de Lyapunov):

[29] Briggs, J y F.D. Peat, (1990). "***Espejo y reflejo: del caos al orden***" Barcelona. Gedisa. P.114

- **λ>0** → Estirar el espacio de fases → Los puntos próximos se alejan conforme el sistema avanza en su trayectoria.

- **λ<0** → Contraer el espacio de fases → Existe un **punto fijo**, ya que el esfuerzo se dirige al interior, al estado estable final.

- Un exponente **λ =0** y los demás negativos→ **Atractor** en forma de órbita periódica. Por ejemplo, un **atractor extraño,** tiene cuando menos un exponente positivo.

Entonces, utilizamos el exponente de Lyapunov para conocer la magnitud o el parámetro de la dependencia sensitiva de un sistema, el cual mide el alejamiento de puntos inicialmente cercanos a medida que la función es **iterada**, como se había planeado anteriormente.

Se parte considerando un pequeño intervalo Δ_0 de condiciones iniciales centradas en x_0:

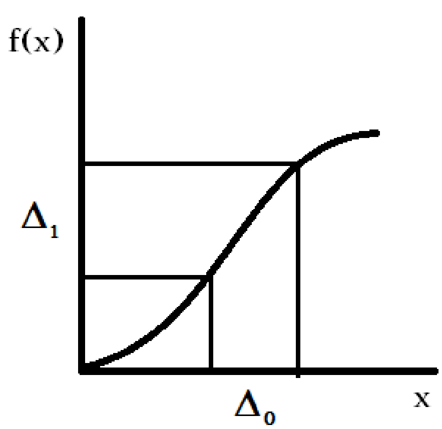


Figura 2.2 Gráfico de la construcción del crecimiento por intervalos

Fuente: Adaptada de http://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/crecimiento-decrecimiento-funcion/

La primera iteración del intervalo es: $\Delta_1 \approx |f'(x_0)|\Delta_0$. Considerando que $|f'(x_0)|$ es el factor de expansión o contracción local. El cual, después de n iteraciones:

$$\Delta_n = \prod_n |f'(x_n)|\Delta_0$$

Se espera que el crecimiento del intervalo $\boldsymbol{\Delta_0}$ sea exponencial, ya que se multiplica el intervalo en cada paso del tiempo, por lo que:

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_0} = \boldsymbol{e^{\lambda n}}$$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la razón de crecimiento exponencial

El crecimiento exponencial es sólo el producto de todos los factores de expansiones locales a lo largo de la trayectoria:

$$\boldsymbol{e^{\lambda n} = \prod_n |f'(x_n)|}$$

Para encontrar el exponente de Lyapunov:

$$\boldsymbol{\lambda = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_n \ln|f'(x_n)|\right]}$$

Típicamente, si $\boldsymbol{\lambda > 0}$, la función tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. Y dado que la definición de $\boldsymbol{\lambda}$ depende de la condición inicial, entendemos que $\boldsymbol{\lambda}$ es una propiedad de $\boldsymbol{x_0}$ y no una propiedad global de $\boldsymbol{f}$.

Un exponente positivo indica que el número de bits que ha crecido en promedio muestra incertidumbre después de cada iteración, entonces, lo que tenemos es un crecimiento exponencial en promedio de las incertidumbres infinitesimales, y por ende, se considera que un exponente de Lyapunov positivo es una condición necesaria para el caos. Con un exponente positivo, la incertidumbre crece y siendo este negativo decrece.

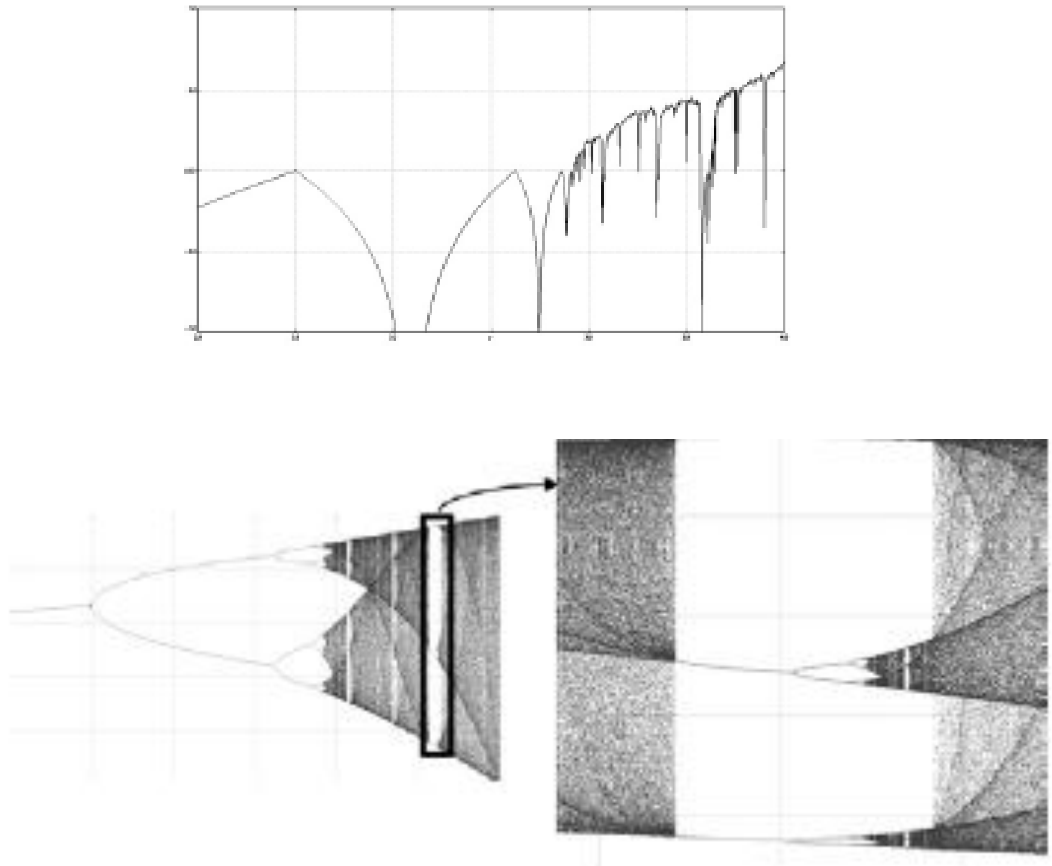


Figura 2.3 Gráfica superior muestra el exponente de Lyapunov como una función del parámetro r. A notar que $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ en las regiones caóticas del mostradas en el diagrama de bifurcación (gráfico inferior).

Fuente: Márquez, L. *op. cit.* P. 96

A continuación, se presenta un diagrama de la clasificación de Exponente de Lyapunov, que nos ayudará a identificar qué tipo de trayectoria sigue nuestro sistema, por ejemplo, las trayectorias caóticas tienen al menos un exponente de Lyapunov positivo y en las periódicas, todos los exponentes son negativos. Asimismo, el exponente es cero cuando está cerca una bifurcación.[30]

[30] Espinosa, A. (2004). TESIS: ***"El caos y la caracterización de series de tiempo a través de técnicas de la dinámica no-lineal"*** UNAM. México, D.F. P.111

Constantes	Periódicas	Cuasi periódicas	Caóticas	Aleatorias	Punto de Bifurcación
	Exponente: (-) (-)	Exponente: (+)(-)	Exponente: (+)(+)	Exponente: (+)(+)	Exponente: 0

Figura 2.4 Clasificación del Exponente de Lyapunov.
Fuente: Espinosa, A. (2004). TESIS: ***"El caos y la caracterización de series de tiempo a través de técnicas de la dinámica no-lineal"*** UNAM. México, D.F. P.115

Cuando se tienen espacios de estado con dos o más dimensiones, se asocia un Exponente de Lyapunov por cada una de las direcciones en el **espacio de estados** que dan la tasa de expansión o contracción de las trayectorias. En particular, para ***n*** dimensiones se deben definir ***n*** exponentes de Lyapunov.[31]

Entonces, entendemos que un sistema tiene tantos Exponentes de Lyapunov como direcciones existentes en el **espacio de estados**, que equivale al número de componentes que forman el estado; se enumeran en orden descendente, el más grande se nombra *exponente máximo de Lyapunov.*

2.4 Aleatoriedad

La **aleatoriedad** se refiere a todo proceso que no posee un resultado previsible, más que en razón de la intervención del azar, incluso aunque se conocieran los estados precedentes de un sistema, como no podemos predecir si el lanzamiento de una moneda dará como resultado cara o cruz, aun

[31] Márquez, L., *op. cit*. P.30

sabiendo los resultados de lanzamientos anteriores. Esto significa que no puede determinarse el resultado antes de que se produzca, quedando dentro del campo de la Probabilidad para estimarlos. La aleatoriedad se utiliza para expresar una aparente carencia de propósito u orden.

Un proceso estocástico o aleatorio es una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Dichos procesos pueden ser estacionarios y no estacionarios, lo primeros presentan una media y varianza constantes a través del tiempo, además de que el valor de la covarianza entre dos periodos depende sólo de la distancia o rezago entre estos dos periodos, y no del tiempo en el cual fue calculada la covarianza. Es decir, su media varianza y covarianza serán iguales sin importar el momento en el tiempo en que sean medidos, lo cual implica que tal serie tendrá una tendencia de regresión a la media y las fluctuaciones alrededor de la media tendrán una amplitud constante en términos generales.

Un proceso estocástico estacionario, entonces, cumplirá con las siguientes condiciones, de lo contrario será un proceso no estacionario:

$\boldsymbol{i.}\ \boldsymbol{E(Y_t) = \mu_t}\,,\ \ \forall \boldsymbol{t}.\ \ \textit{Es decir, la media del proceso } Y_t \textit{ es constante}$

$\boldsymbol{ii.}\ \boldsymbol{V(Y_t) = \sigma^2} < \infty\,,\ \ \forall \boldsymbol{t}.\ \ \textit{Lo cual indica que la variabilidad del proceso es constante y finita}$

$\boldsymbol{iii.\,cov(Y_t, Y_{t-k})}$
$= \boldsymbol{\gamma_t}\,.\ \ \textit{La covarianza entre } Y_t \textit{ y } Y_{t-k} \textit{ solo depende de la distancia que hay entre } t \textit{ y } t-k.$

El proceso estocástico no estacionario clásico es la **caminata aleatoria**, de la cual podemos identificar dos tipos: sin deriva (sin término constante o intercepto) y con deriva (hay un término constante).

Los defensores de la **Hipótesis del Mercado Eficiente (HME)** argumentan que los precios de las acciones son esencialmente aleatorios, y por tanto, no hay lugar para la especulación redituable en el mercado de valores. Es decir, se supone que el precio de una acción se encuentra en función del precio anterior más un choque aleatorio, es decir:

$$\boldsymbol{Y_t = Y_{t-1} + u_t}$$

O bien, de la siguiente manera si la caminata aleatoria tiene deriva, es decir, si existe un parámetro $\boldsymbol{\delta}$ que desvíe la trayectoria en términos negativos o positivos.

$$\boldsymbol{Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t}$$

Donde la media, al igual que la varianza se incrementa con el tiempo violando las condiciones de estacionariedad.

El caos como se ha entendido a lo largo de la investigación difiere de la verdadera aleatoriedad, sin embargo, las nociones de aleatoriedad y caos se encuentran íntimamente unidas debido a que intuitivamente se han atribuido al caos propiedades relativas a la aleatoriedad.[32] Empero, puede ser demostrado, que el caos contiene estructuras profundamente codificadas, llamadas **atractores extraños**.

Mientras que los sistemas verdaderamente aleatorios no muestran un esquema discernible cuando se les organiza en el **espacio de fase,** los sistemas caóticos se concentran en una región limitada que traza modelos complejos dentro de ella, es decir, el caos tiene un orden inherente que estructura su comportamiento en patrones cuya apariencia es azarosa.

[32] GUNDLACH, V., *op. cit*. P.1

Pero, ¿por qué el caos muestra un comportamiento aparentemente aleatorio? Parecería que la respuesta debería implicar argumentos más sofisticados, pero la verdad es que ésta resulta simple en términos meramente intuitivos. Esta idea ya fue introducida por Laplace, ya que, en términos generales, un sistema caótico parece ser aleatorio porque no conocemos las leyes que gobiernan el proceso.[33] Además, juegan en nuestra contra variables tales como el **ruido** observacional y el desconocimiento de técnicas y conocimiento que va en contra de paradigmas utilizados por un largo periodo de tiempo.

Incluso, entre las razones de la incorrecta adjudicación de la presencia de aleatoriedad en sistemas que poseen en realidad propiedades caóticas, se encuentra la justificación misma del ser humano que intenta disfrazar su capacidad limitada de cálculo y entendimiento del entorno con propiedades azarosas, mismas que intentan ser un sustituto (aunque erróneo) de argumentos que expliquen el comportamiento de sistemas complejos, hasta el momento, con una sofisticación superior a la inteligencia humana.

2.4.1 Entropía: medidas del caos y complejidad

El concepto nace en la termodinámica como una magnitud que mide la parte no utilizable de la energía que contiene un sistema.

Ludwig Boltzmann definió la **entropía,** en términos de la dinámica de gases como la suma $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k} \sum \boldsymbol{p_i} \boldsymbol{ln}\, \boldsymbol{p_i}$, donde $\boldsymbol{p_i}$ es la **probabilidad** de que ocurra una determinada configuración $\boldsymbol{i}$ en el gas y $\boldsymbol{k}$ es un número fijo, hoy denominado “constante de Boltzmann”. Como lo demostró Boltzmann,

[33] Weatherall, J., *op. cit.* P.5

esta peculiar forma de combinar probabilidades tiene la propiedad de hacerse máxima en el equilibrio, cuando todo es estable y nada cambia. Además, cuando un gas se aparta de ese estado, vuelve a él por un afán natural de maximizar su desorden interno. Una manera de entender esta tendencia es tener presente que hay menos maneras de organizarse ordenadamente, realidad que hace al orden menos probable.[34]

En Teoría del Caos se utiliza como una medida de desorden en un sistema, se denomina como la forma de medición de la magnitud de incertidumbre de un posible evento futuro ante la gama de posibilidades de ocurrencia que se tiene. Determina también si el proceso es reversible o irreversible.

Estrictamente hablando, es un **parámetro** utilizado para diferenciar el caos de los sistemas dinámicos no-lineales. Típicamente se utiliza la llamada "entropía de Kolmogorov" que se define como la suma de los exponentes de Lyapunov. Se le da el nombre de entropía ya que mide la velocidad media de pérdida de información en una serie temporal.

2.5 Fractales y Curvas Caóticas

Los **fractales** son objetos cuya forma es sumamente irregular, fragmentada o interrumpida, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca la examinación. Contiene elementos distintivos con

[34] Claro, F. (2009). **"De Newton a Einstein y algo más"** Chile. Ediciones Universidad Católica de Chile. P.66

escalas muy variadas y cubren una gama muy amplia. Otra característica de un conjunto fractal es el hecho de que su **dimensión fractal** sea igual o mayor que su dimensión ordinaria o topológica.

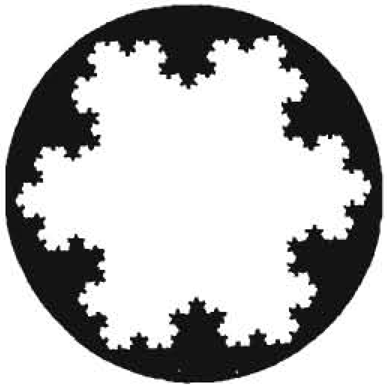


Figura 2.5 Curva de Koch

Fuente: Eliezer, B. (2011) "***Caos, fractales y cosas tatas***" Fondo de Cultura Económica. México, D.F.

Es de suma importancia la distinción de fractales matemáticos y fractales físicos, así como caos en sistemas matemáticos y caos en sistemas físicos. Los fractales del caos son objetos matemáticos que se encuentran en **espacio de estado**; a diferencia de sus **homónimos** físicos, son fractales verdaderos. Un fractal físico solo muestra las propiedades de un fractal a determinadas escalas de longitud.

En general, los fractales son curvas, superficies u objetos en espacios de más dimensiones que presentan un mayor grado de complejidad, aunque del mismo tipo, a medida que nos acercamos a ellos. Donde las **trayectorias** de los sistemas no lineales suelen ser curvas fractales que resultan ser aperiódicas y aparentemente impredecibles.

Se demostró que en estas estructuras reside el secreto de medir la irregularidad del mundo real. Si la longitud aproximada de una curva se hace arbitrariamente mayor según disminuye el tamaño del instrumento de medida, entonces la curva se llamará curva fractal. Ya no se mide la longitud cuantitativamente, sino con una nueva clase de medida cualitativa basada en escalas: la **dimensión fractal**, que es una medida del grado relativo de complejidad de un objeto. Es la medida de su grado de irregularidad, considerada en todas las escalas, y puede ser algo mayor que la dimensión geométrica euclídea de un objeto.

Un fractal es un conjunto de formas con dimensión fractal con una clase especial de invariancia o simetría que relaciona un todo con sus partes: el todo puede descomponerse en partes que evocan todo, lo anterior es una burda noción de lo que se denomina **autosimilitud** o auto semejanza.

> *"Swedenborg nos dice, en su teoría de la naturaleza (...), que los pulmones están compuestos por pulmones menores, el hígado de hígados menores, el bazo de bazos menores, etcétera, Aunque no soy tan buen observador, hace tiempo que advertí que esto era cierto. A menudo digo que las ramas de un árbol son ellas mismas árboles completos menores; un pedazo de roca es similar a una roca mayor, y un puñado de tierra a un montón mucho más grande. Estoy convencido de que podrían encontrarse muchos más ejemplos como éstos. Una única pluma está hecha de un millón de plumas."*

Dicha auto semejanza puede ser tan simple como la repetición de figuras geométricas como la siguiente:

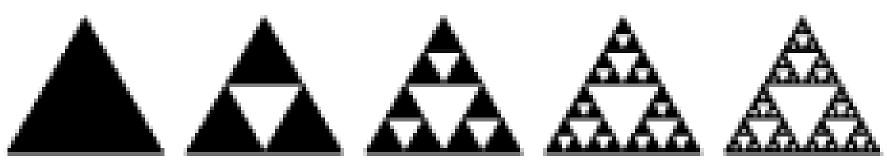


Figura 2.6 Construcción del triángulo de Sierpinski[35]

Fuente: MORENO, M. (2007) ***"Dimensión y conjuntos de Julia"***. Ideas CONCYTEG. Año 2, Núm. 25, 14 de septiembre de 2007 **[en línea]** P. 474. Disponible en Internet: <http://www.concyteg.gob.mx/ideasConcyteg/Archivos/25042007_DIMENSION_CONJUNTOS_JULIA.pdf>

---

[35] En 1915 el matemático polaco Waclaw Sierpinski dio a conocer una curva donde cada punto en ella es un punto de ramificación, esto significa que cada punto tiene tres o más segmentos que emanan de él (por ejemplo, las letras E, Y y T contienen un único punto de ramificación, mientras que la L, M y N no contienen ninguno). Su ejemplo, ahora conocido como el Triangulo de Sierpinski, puede también describirse de una forma recursiva.

O bien, tan complejas como la siguiente:

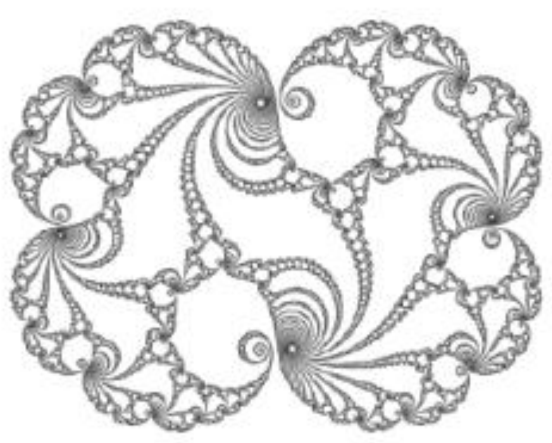


Figura 2.7 Conjunto de Julia, Mandelbrot para c ≈ 0.2539 + 0.00048i y dimensión de Hausdorff dH ≈1.405 (figura y cómputos realizados por T. M. Jonassen). [36]

Fuente: MORENO, M. (2007) ***"Dimensión y conjuntos de Julia"***. Ideas CONCYTEG. Año 2, Núm. 25. **[en línea]** P. 477. Disponible en Internet: http://www.concyteg.gob.mx/ideasConcyteg/Archivos/25042007_DIMENSION_CONJUNTOS_JULIA.pdf>

Los fractales se caracterizan también por los infinitos detalles, la infinita longitud y la carencia de dimensión derivativa, además de que pueden ser generados por **iteración**. Poseen dimensión fraccionaria, una estructura compleja en todas las escalas y bifurcación infinita.

Por otro lado, antes de pasar a las dimensiones que pueden ser fraccionarias, hemos de comprender mejor la noción de dimensión, desde el punto de vista de la Física. La geometría elemental nos enseña que un punto aislado constituye una figura de dimensión cero, que una recta, así como cualquier otra curva constituyen figuras de dimensión uno y un cubo tiene dimensión tres. A todo esto, los matemáticos han añadido la existencia de dimensiones no enteras, incluso a menudo, números irracionales.

La dimensión fractal es entonces un número usado para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. Una vez definido un concepto

[36] El conjunto de Julia correspondiente a un valor determinado de la constante c se genera computacionalmente a través de la aplicación de la iteración $z_{+n1} = z_n^2 + c$ a cada uno de los puntos de una red definida en una región adecuada del plano complejo.

cualquiera de dimensión $\mathcal{D}$, se puede definir a un conjunto fractal como aquél para cual, $\mathcal{D}$ es un número real no entero, o bien $\mathcal{D}$ es un entero pero el conjunto es globalmente irregular. Entonces, $\mathcal{D}$ es un exponente de semejanza. Una dimensión fractal más alta quiere decir que el objeto es más irregular.

Dimensión Fractal (de frontera)

Las variaciones asociadas a la escala de longitud siguen un patrón regular que se resume con un número en cada "frontera" particular: un exponente que relaciona la longitud de la curva con la escala de longitud empleada para medirla.

Dimensión Fractal (de contenido) o dimensión Hausdorff-Besicovitch

Se aplica a figuras muy generales, que no tienen por qué tener una **homotecia** interna. Para clarificarla, es conveniente descomponerla en partes. Se parte de un espacio métrico $\boldsymbol{\Omega}$ de puntos $\boldsymbol{\omega}$, es decir, un espacio en el que se ha definido de manera conveniente la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos, y por consiguiente la bola de centro $\boldsymbol{\omega}$ y radio $\boldsymbol{\rho}$; $\boldsymbol{\Omega}$ puede ser, por ejemplo, un espacio euclídeo. Consideremos un conjunto $\boldsymbol{\theta}$ en $\boldsymbol{\Omega}$ cuyo soporte sea acotado, es decir, esté contenido en una bola finita.

Dimensión Topológica

El concepto de dimensión topológica requiere de ciertas definiciones y conceptos de la Topología, la rama de las matemáticas que estudia la estructura global de un objeto. A forma de ejemplo, considere una esfera y un cubo, estos son el mismo objeto para la topología ya que uno se puede deformar en el otro (sin cortar o romper) independientemente de sus dimensiones, color, textura, etc. Por otro lado, una esfera no pude deformarse en una taza sin tener que hacer un orificio en la esfera para formar el asa.[37]

Los fractales han contribuido, con su desarrollo y relativamente reciente incorporación como herramienta en el campo de las finanzas, a la creación por Edgar Peters (1991) de una nueva hipótesis del mercado, llamada Hipótesis del Mercado Fractal (FMH, por sus siglas en inglés) que combina el uso de fractales y otros conceptos provenientes de la Teoría del Caos con los métodos cuantitativos tradicionales para explicar y predecir el comportamiento del mercado. Este enfoque incorpora la supuesta **aleatoriedad** inherente al mercado y anomalías tales como *flash-crashes,* crisis y comportamiento eufórico. Algunas de sus premisas se enuncian a continuación[38]:

I. El mercado es estable cuando los inversionistas cubren un gran número de inversiones horizontes. Esto asegura que hay una amplia liquidez para los comerciantes.

II. El conjunto de información se relaciona más con el sentimiento del mercado y los factores técnicos en el a corto plazo que en el largo plazo. Conforme los horizontes de inversión crecen, la información fundamental a largo plazo domina.

III. Si se produce un evento que hace que la validez de la información fundamental resulte cuestionable, los inversionistas con un horizonte de inversión a largo plazo dejarán de participar en el mercado o comenzarán a cotizar con base en lo establecido en la información a corto plazo. Cuando el horizonte de todas las inversiones del mercado se mantiene en un nivel uniforme, el mercado se vuelve inestable.

---

[37] MORENO, M., *op. cit*. P.470

[38] Peters, E., *op. cit,* P.49

IV. Los precios reflejan una combinación del uso de herramientas de análisis técnico en el corto plazo y de valuación fundamental a largo plazo.

V. Si un título tiene ningún vínculo con el ciclo económico, entonces no habrá una tendencia a largo plazo. La negociación del mismo, la liquidez y la información a corto plazo dominará.

En términos generales, entendemos que la Hipótesis del Mercado Fractal postula que la información es descontada en función del horizonte de inversión del agente de mercado, por ello, los precios no reflejarán toda la información disponible, pero sí la información relevante para ese horizonte de inversión.[39]

Además, la presencia de elementos propios de los fractales en el entorno financiero podría ser de ayuda en cuestiones relativas a la comprensión de la transmisión de fuerzas, patrones y la amplificación de trayectorias a razón de las distintas escalas que componen determinado sistema. Una ruptura o desequilibrio podría ser resultado de una ruptura o desequilibrio en una escala menor que se vio amplificada por alguna razón, que a lo largo del tiempo logró crecer, amplificándose de tal forma que se perdió el equilibrio inicial del sistema.

De hecho, el doctor francés Didier Sornette, destacó que incluso cuando la incorporación de nueva información al mercado podría desencadenar un desequilibrio en el mercado, derivado de la reacción de los inversionistas a la misma, existen de hecho factores intrínsecos al sistema que son los que permiten que el desequilibrio se lleve a cabo. Por lo cual, Sornette sugiere, es posible

[39] BOHDALOVÁ, M., GREUS, M. ***"Markets, information and their fractal analysis"***. Universidad de Comenius, facultad de Administración. Slovak Republic. . P.3 **[en línea]** Disponible en Internet: <http://www.g-casa.com/conferences/budapest/papers/Bohdalova.pdf>

identificar el estado pre-crisis, lo cual significa que, sin importar qué choque externo sea el que lleve al sistema al desequilibrio, puede identificarse el momento en el que esto pase, consecuencia de un estado particular que sensibiliza al sistema a dichos choques.

Cabe destacar que Sornette logró predecir el *crash* de 1997 gracias al descubrimiento conjunto de lo que llamarían tiempo después: patrón log-periódico. La idea principal de este patrón es que una ruptura se encuentra precedida, a su vez, por rupturas más pequeñas que siguieron un patrón que aceleró su crecimiento. Un patrón log-periódico, es llamado así, ya que el tiempo que se encuentra entre la ocurrencia de los eventos pequeños decrece de una forma particular, relacionado con el logaritmo del tiempo.[40]

Si bien la solución de Sornette no brinda una explicación del comportamiento de los inversionistas que acarrea una crisis económica o un *crash* en el mercado financiero, es posible identificar el estado en el que ciertas circunstancias podrían tener efectos significativos. Es decir, es posible predecir la **probabilidad** de que un estado de inestabilidad alcance su cénit generando crisis y posteriormente un nuevo equilibrio.

2.6 Predictibilidad

Existen procesos o fenómenos en los que no puede encontrarse la regla o función que modele la forma en la que las variables de un sistema se relacionan, en este caso, el sistema se denomina

[40] Weatherall, J. *op. cit*. P.169

indeterminista. Dichos sistemas pueden responder a leyes matemáticas específicas que describan el proceso, pero su naturaleza es probabilística y no determinística.

La impredictibilidad a largo plazo del caos es una conducta subyacente de su carácter determinista, debido al papel que juegan las condiciones iniciales y la iteración del sistema. Además de la no-linealidad que los sistemas presentan, contribuyendo a que la identificación de trayectorias o patrones sean detectados con la misma facilidad que en el caso de los sistemas lineales, o aquellos que tienen un comportamiento aleatorio.

Aunque bien, el comportamiento de los sistemas caóticos es perfectamente predecible a corto plazo, si y sólo si se tiene pleno conocimiento de las condiciones iniciales y el conocimiento de las leyes que rigen al sistema, así como la medida en que el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

Sin embargo, existen estudios cuya evidencia sugiere la existencia de predictibilidad en los excesos de retorno, y que incluso, existe una predictibilidad paralela con los errores de las expectativas. Aunque dicha predictibilidad va en contra de los fundamentos de hipótesis clásicas como la teoría de las expectativas de la estructura temporal de las tasas de interés o la paridad de las tasas de interés.[41]

[41] BACCHETTA, P., MERTENS, E., VAN WINCOOP, E. ***"Predictability in Financial Markets: What do survey expectations tell us?"*** **[en línea]** Disponible en Internet: <http://www.econ.yale.edu/~shiller/behfin/2007-12/bacchetta.pdf >

2.7 Caos en los precios

Si bien se ha argumentado que el creciente flujo de dinero e información en el mercado financiero podría contribuir a la confirmación de la Hipótesis sobre la Eficiencia de los Mercados, se ha comprobado que, dada la complejidad del comportamiento, las variables y los supuestos sobre los cuales el mercado financiero funciona, es imposible que las técnicas econométricas convencionales, especialmente aquellas que asumen la linealidad del sistema, expliquen o sean capaces de predecir el comportamiento del mercado financiero. Claro ejemplo de lo anterior es la hipótesis defendida durante largo tiempo sobre la linealidad de patrones observados en los retornos de los activos financieros, que aseguran que estos tienen una distribución aproximadamente lineal y son independientes.

Sin embargo, se conocen científicos que han dedicado sus esfuerzos a la aplicación de la Teoría del Caos al mercado financiero, más específicamente al mercado de capitales. Algunos de ellos son Edgar Peters, Dimitris Chorafas y Richard Bauer, cuyas obras se citan y reseñan a lo largo de esta investigación.

Siendo más específicos, desde 1985 Melvin J. Hinich y Douglas M. Patterson reportaron evidencia por primera vez sobre la no-linealidad de los retornos observados en el NYSE[42] gracias al uso de su test biespectral[43]. Dicho test estadístico resulta de gran importancia ya que nos permite conocer la magnitud de la divergencia entre las observaciones de determinada serie de tiempo y el

[42]Para más información al respecto consultar: HINICH, M., PATTERSON, D. "***Evidence of nonlinearity in daily stock returns***" Journal of Business & Economic Statistics, Enero 1985, Vol. 3, No. 1. Estados Unidos.
[43] Para más información al respecto consultar: HINICH, M.; PATTERSON, D.; BROCKETT, P. "***Bispectral-Based Tests for the Detection of Gaussianity and Linearity in Time Series***" Journal of the American Statistical Association. Septiembre 1988, Vol. 83, No. 403. Estados Unidos.

comportamiento de una serie de tiempo consistente con la hipótesis de un modelo lineal, así como hacer un diagnóstico a la naturaleza de la serie de datos, con el fin de modelarlos bajo la dinámica correspondiente, ya que de acuerdo con lo anterior, la estructura estadística de una serie de datos no-lineales no puede ser capturada por medio del modelamiento de modelos GARCH.

Ejemplo del uso de metodologías similares es el trabajo de Chris Brooks, quien utiliza técnicas lineales y no-lineales de modelado para identificar la dinámica y predecir el comportamiento del mercado ForEX. Los resultados de su investigación arrojan que, utilizando el error cuadrático medio para medir la exactitud de los pronósticos, los métodos contrastados muestran sólo una mejora modesta sobre los pronósticos generados por un modelo de caminata aleatoria. Sin embargo, aún con el aumento en la complejidad, cambiar de un modelo lineal a uno no-lineal parece un sacrificio que vale la pena hacer, dadas las evidencias de la presencia de no-linealidades en un conjunto de diez tipos de cambio diarios que abarcan toda la era posterior a Bretton Woods.[44]

Otro estudio que analiza la no-linealidad aplicando el test biespectral de Hinich fue el llevado a cabo por Azali, Habibullah y Liew (2002) y Liew, Baharumshah, Habibullah y Midi (2011) para una muestra de cuatro (Hong Kong, Malasia, Singapur y Japón) y cinco economías, respectivamente; encontrando fuerte evidencia de aquello. Con esto se soporta de cierta manera la hipótesis encontrada en investigaciones anteriores en cuanto al hecho de que la no-linealidad en series de tiempo de índices accionarios (u otras variables financieras) es un fenómeno recurrente y tiene importantes implicaciones sistémicas respecto a la eficiencia del mercado, así como para el modelado y la valuación de activos (especialmente derivados)[45].

[44] Para más información al respecto consultar: BROOKS, C. ***"Lineal and non-linear (Non-) Forecastability of High-frequency Exchange Rates"*** Journal of Forecasting. 1997.
[45] Para más información al respecto consultar: Liew, K.S; Baharumshah, A.Z.; Habibullah, M.S. and Midi, H. ***"ASEAN-5 exchange rate determination in the presence of nonlinearity"*** Journal of International Economic Review. 2011.

Por otro lado, Lim, Hinich y Liew (2005) desestiman el uso del modelado vía estructura GARCH luego de encontrar a través del test de Hinich para índices accionarios de 8 economías asiáticas la violación del supuesto de estacionariedad en la covarianza, requerido para utilizar dicha clase de modelos.[46]

Además, en 1995 David Hsieh encontró que los datos diarios de los retornos exhiben dos características principales: los cambios en los precios no están auto-correlacionados, pero sí los cambios en valor absoluto, y que lo anterior era generado por conductas no-lineales en los datos. Hsieh encontró también evidencia que sugiere que algunas series bursátiles siguen una tendencia dinámica caótica, con evidencia de heteroscedasticidad condicional y que la distribución de estas series no se comporta como series idénticas e independientemente distribuidas[47].

Aunado a lo anterior, evidencias no sólo sobre la no-linealidad, sino de la presencia de caos en el mercado financiero han sido encontradas gracias a múltiples estudios, algunos ejemplos de lo anterior: Peters (1991), exhaustivamente citado a lo largo de esta tesis afirma haber encontrado el caos en el mercado de renta fija, renta variable y cambiario en Estados Unidos[48]; Blank (1991) analizó los precios futuros del índice S&P 500 y de la soya, donde todos los resultados fueron consistentes con los de mercados con la presencia de sistemas generadores característicos del caos determinista; Decoster, Labys y Mitchell (1992) buscaron evidencia del caos en los futuros de materias primas (plata, cobre, azúcar y café) y encontraron evidencia de estructura no lineal y de la presencia del caos; Yang y Brorsen (1993) encontraron también evidencia de no-linealidad en

[46] Para más información al respecto consultar: Lim, K.P. and M. Hinich ***"Cross-Temporal universality of non-linear serial dependencies in Asian stock markets"***. Economics Bulletin. 2005.
[47] Para más información al respecto consultar: HSIEH, D. ***"Implications of nonlinear dynamics for financial risk management"*** Journal of Financial and Quantitative Analysis. Marzo 1993.
[48] Para más información al respecto consultar: PETERS, E. (1991) ***"Chaos and order in the capital markets"*** Jhon Wiley. NY, USA.

el mercado de futuros, lo que era consistente con el caos determinista; Abhyankar, Copeland y Wong (1995) encontraron que el índice FTSE-100 de Inglaterra presenta un comportamiento caótico y no-lineal usando datos en tiempo real, esta conclusión la encuentran en especial en series de entre 1 y 5 minutos[49]; Kohers (1998) buscó no-linealidades en el mercado bursátil de Nueva York y Over The Counter (OTC) y encontró que los grandes portfolios de la bolsa de Nueva York son manejados por una influencia caótica determinística de baja dimensión, haciéndolos potencialmente predecible[50]; Panas y Ninni (2000) encontraron fuertes evidencias de caos en el petróleo para los mercados de petróleo de Rotterdam y el Mediterráneo.

Como podemos notar, la presencia de no-linealidad, y en consecuencia, caos determinista ha sido comprobada en diversos mercados y en diversas regiones, por lo que la hipótesis de la existencia de caos en el sistema bursátil difícilmente puede ser negada.

Derivado de lo anterior, insistir en el uso de modelos que asuman la linealidad de este tipo de variables se vuelve en un absurdo, ya que se ha mantenido como un paradigma el uso de modelos que asumen la linealidad de la dinámica del sistema económico-financiero, bajo la justificación de que el uso de modelos lineales simplificaría el comportamiento del sistema y nos permitiría un manejo y entendimiento de la realidad. Sin embargo, la simplificación de la realidad ha ido demasiado lejos, ya que, si bien en términos del entendimiento en primera instancia nos vemos favorecidos, a largo plazo esta simplificación de la realidad sólo nos aleja del fin último del modelado de las series de tiempo, ya que el uso de instrumentos como la distribución normal y el

[49] Para más información al respecto consultar: ABHYANKAR, A.; COPELAND, L.; WONG, W. ***"Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: the S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100"***. Journal of Business and Economic Statistics. 1997.

[50] Para más información al respecto consultar: KOHERS, T. ***"Using Nonlinear Dynamics to Test For Market Efficiency Among the Major U.S. Stock Exchanges"*** The Quarterly Review of Economics and Finance. Summer 1997. Vol. 37, No. 2.

supuesto de la existencia de una relación de linealidad entre el riesgo y los retornos dentro de los modelos lineales nos incapacita para predecir el comportamiento futuro en las variables.

Asimismo, el uso de series de tiempo históricas como medio para estimar el comportamiento futuro de la misma presenta problemas serios en términos de correlación y distribución, así como de la suavización de efectos denominados como *outliers* (cisnes negros o *dragon kings*), cuestiones previamente discutidas a lo largo de la presente.

Existe también un paradigma lineal en el sentido de que la reacción de los inversionistas ante la información es lineal, lo cual implicaría que la información es descontada conforme es recibida, tal y como lo postula la HME bajo un supuesto de racionalidad en los participantes del mercado.

Lo anterior, sería fácilmente evitado con el uso de modelos inteligentes no-lineales y Redes Neuronales Artificiales[51] que replicarían y facilitarían la identificación y el uso de modelos caóticos para estimar el comportamiento de variables financieras, ya que no asumen alguna distribución en específico y el uso de redes neuronales elimina sesgos. Asimismo, este nuevo paradigma permitiría aceptar dentro del modelo que la reacción ante la información por parte de los inversionistas es no-

---

[51] Las redes neuronales artificiales (RNA) emulan la estructura y el comportamiento del cerebro durante el procesamiento de información en los procesos de aprendizaje para buscar una solución a distintos problemas.
El objetico de utilizar los modelos RNA es desarrollar modelos que permitan realizar predicciones correctas que se ajusten en mayor medida a las características del mercado, incorporando el factor humano como un componente esencial del sistema.
eural Artificial
Las RNA están compuestas de un gran número de elementos de procesamiento altamente interconectados trabajando al unísono para resolver problemas específicos y complejos. En términos prácticos las Redes Neuronales son herramientas de modelado de datos estadísticos o de toma de decisiones no-lineales. Si hablamos de la aplicación económica, encontramos que las Redes Neuronales se pueden utilizar como una alternativa a los métodos más tradicionales como el análisis discriminante o la regresión logística. Una característica especial de las Redes Neuronales que las distingue de los métodos tradicionales es su capacidad para clasificar datos que no son linealmente separables.

Para más información al respecto consultar: ÖZÜN, A. "***Modeling chaotic behaviours in financial markets***" Journal of Istambul Kültür University. Febrero 2006.

lineal, tal y como funciona en el mundo real, como resultado de los sesgos intrínsecos al comportamiento humano presentados en el capítulo anterior.

Por otro lado, la importancia de la aplicación de la Teoría del Caos en nuestro campo científico reside en el hecho de ir más allá de las fronteras del análisis probabilístico que han limitado nuestros conocimientos en el sentido de hacer una práctica usual el uso técnicas de análisis de dinámicas aleatorias ante un proceso que ha demostrado responder a una dinámica caótica (aunque aparentemente aleatoria), que por su naturaleza es determinista.

Si bien la existencia de caos en el mercado significa la predictibilidad a corto plazo, dada la complejidad del universo y las variables económicas, no limita las oportunidades de encontrar las funciones que determinan la dinámica del sistema; de hecho, aceptar e identificar su carácter caótico nos acerca más a la verdad. Además, el uso de nuevas disciplinas como la física estadística, ciencias computacionales y las aportaciones en campos como las redes complejas en física, matemáticas, economía y otras ciencias, incrementan aún más las posibilidades de lograr nuestro objetivo: la predicción y el entendimiento de la dinámica del mercado.

Es por ello de suma importancia estar en sintonía con sus avances, ya que la Teoría del Caos trata de modelar procesos dinámicos a partir de estructuras no-lineales afectadas por procesos caóticos, como la evolución de los rendimientos o precios de determinados activos financieros. Se parte del supuesto de que una modelización lineal con perturbaciones aleatorias resultaría ineficaz, y si los rendimientos siguieran un proceso estocástico ruido blanco, serían impredecibles; sin embargo, si el proceso subyacente fuese caótico, la impredictibilidad sería solamente aparente y los rendimientos serían estimables, al menos a corto plazo[52].

Entonces, bajo el nuevo enfoque de estos científicos, combatimos los paradigmas que durante tanto tiempo han frenado la evolución del estudio y la misma valuación de instrumentos financieros que nos permitirían comprender de una forma más acertada el comportamiento del mercado financiero.

Dado que ningún inversionista se encuentra en una isla desierta, en términos matemáticos, considerar al mercado dentro del supuesto de la independencia estadística no resultaría adecuado, como se ha comprobado anteriormente. Como sabemos y hemos mencionado a lo largo de la investigación, los movimientos de los precios se encuentran globalmente interconectados por las variables que los determinan, sean estos factores intrínsecos o externos a ellos, como los sentimientos y decisiones de los inversionistas.

Los inversores, las empresas, los fondos de inversión colectiva, las agencias bursátiles, los analistas y los medios de comunicación se encuentran interconectados entre sí a través de una red muy amplia y poco definida, cuyos nodos influyen sobre los nodos a los que están conectados en un proceso iterativo. Es probable que esta red sea mucho más densa y contenga nodos más influyentes de lo que suele pensarse.

Lo anterior nos lleva al campo de la dinámica de redes, ya que una de las características de los sistemas complejos es la de establecer relaciones entre los diversos elementos del sistema en

---

[52] Mailoc, M.; Illera, C. (2013). "***Invertir en Hedge Funds: Análisis de su estructura, estrategias y eficiencia***" Madrid. Ediciones Díaz y Santos. P.486

múltiples bucles de retroacción. Se parte de que el proceso de innovación genera dinámicas de confirmación de redes en múltiples niveles de carácter social.

Una red consiste, en esencia de dos elementos: una población de actores o agentes y por lo menos una relación que sea medible y definida para cada par o conjunto de agentes. Por lo tanto, una red contiene: variedad en cuanto a los agentes que conforman el sistema, interacción entre los agentes y una selección que promueva la adaptación.

Es por ello, que para entender al mercado se requiere de una estructura que refleje la complejidad de la interacción de los inversionistas con las variables que tienen un impacto en el comportamiento de los activos. Las conexiones entre estas variables no se tienen suficientemente en cuenta, ni siquiera las conexiones entre las mismas variables económicas. Pero el problema reside en el hecho de que muy pocas de estas asociaciones pueden ser descritas con precisión mediante el uso de una recta, es decir, las partes del sistema no se relacionan de forma proporcional; por lo que resulta necesario el uso de herramientas que permitan un estudio de la dinámica no lineal descrita con anterioridad.

3

LIBRE ALBEDRÍO: *BEHAVIORAL ECONOMICS*

La Teoría del Caos, como se ha definido a lo largo de los capítulos anteriores, se refiere a aquella teoría de los procesos del devenir que trata de explicar el peculiar comportamiento de ciertos sistemas dinámicos, sistemas con problemas de estabilidad y equilibrio, los cuales son difíciles de diferenciar de un proceso estocástico por su aparente aleatoriedad, que esconde un funcionamiento con leyes precisas y un orden oculto contenido en atractores extraños, cuyos patrones de orden manifiestan una alta y rica **autoorganización**. Dicha autoorganización surge en condiciones de alejamiento del equilibrio de los sistemas, es decir, la producción elevada de **entropía**.

En este caso, el sistema financiero es el sistema dinámico por estudiar. Sus investigaciones han llevado a la determinación de tres principales tipos de atractores relacionados con el mercado bursátil:

- El atractor puntual o **punto fijo**: se establece según las fuerzas de la oferta y de la demanda en un punto matemáticamente equidistante entre ambos, este punto es un atractor lineal, que constituye el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda en cada operación.
- El atractor cíclico o **ciclo límite**: responde a la naturaleza cíclica de los mercados financieros. La teoría de las ondas de Elliot, que se expresa a través de pautas, es una

aproximación elemental en este sentido, siendo el primer paso de los mercados financieros hacia el atractor cíclico.

- Finalmente, el **atractor extraño**: es el caos propiamente dicho, pues es la suma de factores pequeños, diversos y variables que en última instancia determinan el sentimiento de los inversionistas sobre los precios de las acciones, este atractor se estudia en Economía dentro del campo de las expectativas racionales, que es una nueva modalidad de análisis bursátil: olvida las empresas (análisis fundamental) y las cotizaciones (análisis técnico) y se concentra en el único agente activo del mercado: el inversionista, cuyo libre albedrío ofrece otra fuente de semillas de incertidumbre que el caos podría alimentar.

En función de lo anterior, podemos determinar entonces que en cada uno de los tipos de atractores que representan el comportamiento del sistema bursátil hay un elemento en común, el cual es el centro y motor del dinamismo del sistema: los inversionistas.

La Economía es una ciencia social, por lo que depende del comportamiento del hombre, implicando esto la presencia de cierto grado de imprevisibilidad, dado que el ser humano tiene un comportamiento que dista del ideal racional *homo economicus* presentado en los modelos microeconómicos tradicionales. Si queremos saber qué puede pasar en el futuro tenemos que entender cómo se comporta el ser humano hoy.[53]

El inversionista por ser humano es intrínsecamente irracional, por lo que las decisiones que toma y que inciden directamente en la trayectoria del sistema a lo largo del tiempo, son irracionales y se encuentran sesgadas también, hecho que las aleja de seguir el principio de maximización de

[53] Tetaz, M. (2014) "***Psychonomics. La economía está en tu mente***" Argentina. Ediciones B. P.18

utilidad. Es por ello, que si se busca entender el comportamiento del mercado financiero, además de comprender una base teórica tan rica y útil como la Teoría del Caos, deberíamos prestar atención a nuevas ramas de la Economía como la denominada Economía del Comportamiento.

Daniel Kahneman, premio Nobel de Economía es un psicólogo israelí considerado el padre de la Economía del Comportamiento por sus aportaciones para entender el modo en que las personas toman decisiones, más aún en contextos de incertidumbre, contexto preponderante en el mercado financiero.[54]

Al respecto, es importante destacar algunas particularidades del sistema cognitivo humano. Si bien los seres humanos somos todos distintos, nos pasan las mismas cosas. Las personas aun siendo expuestas al mismo entorno y a la misma información, tienden a reaccionar de forma distinta, por lo general, debido a que procesan la información de modo diferente. Quizá utilizan los mismos mecanismos o herramientas, pero lo hacen de modo distinto, dando como resultado los grados de inteligencia y la diferencia de aptitudes[55]. Es decir, es distinta la capacidad de los individuos para detectar regularidades y construir teorías explicativas, algunos detectan irregularidades que otros no notan; pensamos diferente, pensar es abstraer, generalizar, olvidar las diferencias: categorizar.

Esto nos lleva a la forma en la que modularizamos nuestras experiencias y el entorno mismo, el mecanismo que utilizamos para etiquetar en categorías fácilmente diferenciables la información que posee algo en común. Pero no sólo tenemos mecanismos de categorización que difieren de un individuo a otro, sino que además son distintos los sesgos e inteligencia particulares en cada individuo, tema que abordaré posteriormente.

---

[54] *Ibíd.*, P.23
[55] *Ibíd.. cit.* P.58

Aunado a esto, nuestros mecanismos cognitivos nos permiten tener dos tipos de toma de decisiones: uno automático cuyo mecanismo es casi inconsciente, y otro deliberado cuya lógica responde a la evaluación consciente de un problema. Es por lo anterior que muchas veces los mercados no funcionan de manera eficiente, ya que las personas no se detienen a pensar en pros y contras de cada decisión, sino que se toman con mecanismos heurísticos automáticos que se han construidos a partir de la experiencia modularizada. [56]

Dicho mecanismo automático puede ser el origen de la euforia o pánico, como el desarrollo de un "módulo precautorio" que automáticamente dispara ciertas conductas. Típicamente, cuando actuamos bajo este mecanismo automático, tendemos a tener la sensación de estar haciendo las cosas bien, aunque no se pueda justificar porqué, lo que llamamos "comportamiento instintivo".[57]

Al respecto, es interesante también el enfoque de psicólogos como Steven Pinker, quienes creen que en su inmensa mayoría nuestro comportamiento es heredado. Plantea la existencia de una psicología intuitiva de carácter innato, sugiriendo esto que la inteligencia y todas aquellas habilidades o aptitudes innatas son transmitidas de alguna forma por selección natural.[58]

Cabe recordar que en los cuadros de pánico suele presentarse la claustrofobia o ansiedad extrema donde se busca la huida de lugares o en este caso situaciones que generan ansiedad, tal como sucede cuando la incertidumbre o las pérdidas en el mercado financiero se materializan y hace que los inversionistas replanteen sus decisiones previas y retiren sus inversiones, de tal forma que el

[56] *Ibíd.*, P.47
[57] *Ibíd.*, P.47
[58] *Ibíd.*, P.41

comportamiento de un pequeño sector pueda influir para que se forme un comportamiento en manada.

3.1 La Hipótesis de la Eficiencia del Mercado

Las principales teorías que se usan actualmente para analizar los mercados financieros están basadas en la **Hipótesis de Mercados Eficientes (HME),** cuyo origen se remonta al trabajo de Eugene Fama. La HME postula que la eficiencia de los mercados en términos de la información se alcanza cuando el precio de algún instrumento financiero refleja correcta e inmediatamente su verdadero valor, ya que los agentes que intervienen en el mercado han descontado toda la información y se han incorporado todas las expectativas disponibles. Dicha hipótesis, le asigna a la distribución de la información un carácter **aleatorio,** hecho que empata a la teoría del movimiento browniano[59] o **caminata aleatoria**. La relación entre la HME y el movimiento browniano reside en que los precios de los activos financieros se comportan igual que las partículas al interior de un fluido, de tal manera que se asume que los rendimientos de los activos son variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas.[60]

Bachelier, fue un matemático francés, conocido en el ámbito financiero por ser el creador de las matemáticas financieras, quien encontró la forma de aplicar los métodos y las herramientas

---

[59] El movimiento browniano es un movimiento o agitación aleatoria, brusca e incesante que anima a finísimas partículas sólidas en la suspensión de un líquido. Este movimiento fue observado por primera vez por Robert Brown (1827), a quien debe este nombre. Brown observó la agitación, inexplicable por entonces, de granos de polen suspendidos en el agua. Mucho más tarde se observó este mismo fenómeno en partículas en suspensión en un gas. No se encontró una explicación satisfactoria hasta Einstein y Von Smulokowsky en 1905, inspirándose en la teoría cinética de la agitación molecular. Según estos autores, las partículas en suspensión se comportan como moléculas de un cuerpo entre las moléculas de una sustancia dispersante. La expresión de movimiento browniano es utilizada constantemente para designar las variaciones desordenadas de un conjunto compuesto por un gran número de elementos.

[60] Villagómez, J. (2009). Tesis: "***Sistemas dinámicos no lineales aplicados al IPC e índices internacionales***" México, D.F., UNAM. Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración. P.7

matemáticas al mercado financiero, y entre sus múltiples aportaciones se encuentra su tesis acerca del comportamiento del mercado financiero, su premisa conjunta el modelo de **caminata aleatoria** y la idea de que el mercado es una apuesta justa, donde el resultado promedio para los participantes es igual a cero, es decir, el mercado significa un juego de suma cero. Su modelo utiliza la idea de que los precios siguen una distribución normal, cuyo uso se encuentra vigente aún en nuestros días en los supuestos de los modelos de valuación.[61]

La premisa fundamental de Bachelier (1900), acerca de que el mercado financiero, y más específicamente, el precio de las acciones se comporta entonces como un proceso de **caminata aleatoria**, le atribuye un comportamiento aleatorio al mercado, que es justamente una de las premisas de las que parte la Teoría de la Eficiencia del Mercado, como se mencionó con anterioridad.

Bachelier fue el primero en sugerir dicho enfoque, y Harry Roberts (1967) en acuñar el término de la "Hipótesis de los Mercados Eficientes" y definir los tres niveles de la eficiencia de los mercados:

1. En la forma débil de la HME se supone que cada título refleja totalmente la información histórica de precios. Según esta hipótesis ningún inversionista podrá conseguir un rendimiento superior al promedio analizando exclusivamente la información pasada, y si lo logra será sólo por azar.
2. Según la hipótesis en su forma intermedia, los precios reflejan no sólo toda la información pasada, sino también toda la información hecha pública relevante. La única forma de lograr

[61] Weatherall, J., *op. cit.* P.

un rendimiento superior al promedio, que no sea por medio del azar, es a través de la utilización de la información privilegiada.

3. La hipótesis fuerte asume que los precios reflejan absolutamente toda la información ya sea pasada, pública o privada. Partiendo de esto, ningún inversionista podría generar rendimientos sobre el promedio, a menos de que esto sea por azar. Esta forma de la hipótesis es extrema y por ello, prácticamente imposible de cumplir, ya que ello implicaría que dicho mercado sería perfecto.

Estos preceptos fueron retomados tiempo después, en 1965, por el economista de la Universidad de Chicago, Eugene Fama, quien la popularizó.[62]

Al respecto, es importante mencionar también las aportaciones de Fama a la Teoría Económica que sugieren que el comportamiento de los precios de los títulos cumple con las características de una **caminata aleatoria**. La eficiencia de los mercados para Eugene Fama se resume en los siguientes puntos principales:

- Los precios actuales son independientes entre sí y tienen la misma distribución de probabilidad.
- Los precios de los activos cambiarán rápidamente para ajustarse al nuevo valor intrínseco derivado de la presencia de nueva información.
- La variación en los precios de los títulos, no está influida por la variación producida en el pasado, negando entonces el carácter **determinista** del mercado, considerándolo entonces totalmente aleatorio e impredecible.

[62] Weatherall, J. *op. cit*. P.

- El tiempo que transcurre entre dos ajustes sucesivos de precios (o entre dos informaciones sucesivas) de un mismo título es una variable aleatoria independiente

Las premisas fundamentales de un mercado eficiente son descritas a continuación:

I. **Los precios reflejan la información que pudiese anticipar eventos futuros.** Se plantea la posibilidad de que la nueva información lejos de crear un conocimiento compartido, en realidad incremente la incertidumbre, dada la creación de expectativas y la heterogeneidad de intereses, procesos cognitivos y heurística inherentes a los agentes del mercado.

II. **Los inversionistas reaccionan homogéneamente a la información.** Implica la generalidad tanto en la información, como los inversionistas, por lo que la información debería crear el mismo efecto en cada uno de los tomadores de decisiones. Si lo anterior sucediera, sería imposible que alguna transacción se completara, debido a que no habría algún inversionista dispuesto a tomar la posición contraria a la posición que proporcionaría una ventaja según la información recibida. Esto, sin tomar en cuenta la heterogeneidad de los horizontes de inversión y la falta de liquidez a la que tendría que hacerse frente, además de otras cuestiones subyacentes, mismas que en conjunto empujarían al mercado fuera una estabilidad sostenible, derivada de la diversificación de posiciones y horizontes de inversión, principalmente.

III. **Independencia en las variables.** Es claro que los inversionistas no toman decisiones de esta manera, para los inversionistas la información a su alcance tiene ciertas implicaciones, dependiendo típicamente de sus posiciones, por lo que se hacen juicios y se crean expectativas respecto a la información, proceso que desencadenará la toma de decisiones y en su conjunto un movimiento en el mercado.[63]

IV. **El mercado sigue una caminata aleatoria, caracterizada por la distribución normal.** Sin embargo, se sugiere que la forma de la distribución de frecuencia asociada al mercado, es en realidad leptocúrtica, donde los datos se encuentran concentrados en la media. Lo anterior implica una curtosis mayor que la asociada a la distribución normal, significando esto, que pequeños cambios ocurren con menor frecuencia, ya que los valores históricos se encuentran agrupados en la media. Provocando esto, que grandes fluctuaciones sean más probables dentro de las colas gruesas, debido a una amplificación del proceso, eventos abruptos y discontinuos tales como un *flash-crash* o comportamiento eufórico que orille a los inversionistas a comportamiento irracional e inesperado. [64]

Entonces, si los precios de las acciones presentan un comportamiento aleatorio, la teoría de las caminatas aleatorias podría explicarlo. Pero por qué deberíamos de asumir dicho comportamiento si el comportamiento del mercado financiero se encuentra fuertemente correlacionado con el clima económico y las expectativas subyacentes del mismo. Además, se ha demostrado que el volumen de negociación no es constante, como postula la **HME** respecto a la caminata aleatoria. Ni los precios son independientes, de nuevo, existe una correlación. Tampoco existe la misma probabilidad de que suba el precio a que baje, como se observa en el movimiento browniano.

Es curiosa la forma en que la paradoja de la eficiencia de los mercados actúa. Se plantea que la eficiencia de los mercados será válida, si y sólo si, un número elevado de inversionistas desconfía

[63] BOHDALOVÁ, M.; GREUS, M., *op. cit.* P.2
[64] *Ibíd.*, P.2

de su eficiencia y se comporta en consecuencia, es decir, que analicen toda la información pública disponible.

Entonces, el uso de dicha información para intentar descifrar al mercado y lo que depare para el futuro, forma parte de la condición de eficiencia de los mercados, es lo que hace que el mercado esté conectado a las expectativas y posibles decisiones de los inversionistas. Además, si el mercado es eficiente, es decir, si la información sobre un título queda incorporada casi inmediatamente a su cotización, cualquier movimiento futuro de esta vendrá determinada por acontecimientos externos aleatorios. Sin embargo, es fácil identificar que el mercado bursátil no es siempre tan eficiente.

La completa eficiencia de los mercados implicaría que cualquier novedad o particularidad que podría determinar o tener importancia para la predicción de una cotización ya ha sido ponderada y asimilada por los participantes del mercado, cuyas compras y ventas han ajustado la cotización actual de tal forma que dicha novedad ya ha sido reflejada. Entonces, lo que haría que cambien las cotizaciones en el futuro deberían ser acontecimientos enteramente nuevos, es decir, novedades que por definición son imposibles de prever. Si dichas perturbaciones fuesen resultado del azar, significaría una oscilación aleatoria en las cotizaciones bursátiles, donde lo importaría tener en cuenta su pasado y su desplazamiento sería como la llamada caminata aleatoria.

Pero, ¿realmente dichas perturbaciones son resultado del azar? ¿No se encuentran más bien determinadas por decisiones deliberadamente tomadas por los inversionistas o agentes cuyas decisiones intervienen en la trayectoria del sistema? Exploremos algunos ejemplos: acontecimientos imprevisibles como los que mencionados en el párrafo anterior que deberían ser perturbaciones estocásticas no son en el mundo real más que un *flash crash*, el resultado o la publicación de EPS de alguna empresa, la declaración de fraude en alguna institución, el impacto de algún desastre natural en la producción de algún país, la publicación de indicadores de cualquier tipo, etc. Como podemos ver, la lista es larga y cada uno de estos acontecimientos es dependiente de condiciones anteriores, es decir, son consecuencia de causas bien definidas, cuyo resultado deriva de la toma de decisiones en la mayoría de las veces premeditadas de agentes participantes en el mercado.

Osborne, descubrió que la idea del comportamiento aleatorio sostenida, incluso en la actualidad por la HME, no podría ser cierta. Dado que la **caminata aleatoria** encuentra su base estadística en la famosa curva de la campana; lo cual implicaría que los precios de las acciones, por ejemplo, podrían ser negativos. Consecuencia de lo anterior, encontró un nuevo enfoque basado en un nuevo modelo, donde los retornos y no los precios siguen una distribución log-normal, mencionada anteriormente.

Tiempo después Mandelbrot llegó a los círculos científicos para desmentir ambas teorías: tanto la de Bachelier, como la de Osborne. Descubrió que cuando se analiza la información del mercado se encuentran patrones que no siguen un comportamiento aleatorio, al menos no de la forma en la que Bachelier y Osborne predijeron. [65]

Mandelbrot se percató, gracias a su trabajo en la estructura matemática fractal, de que existe una variedad de aleatoriedades en la naturaleza y en el mundo real, mucho más allá del típico experimento del lanzamiento de una moneda, cuyas consecuencias y alcances van más allá de la ciencia matemática, alcanzando a tener impacto en las finanzas.[66]

[65] Weatherall, J., *op.cit*. P.72
[66] *Ibíd.*, P.51

Del nuevo enfoque establecido por Mandelbrot otros científicos han cambiado el paradigma que asume que los mercados son aleatorios, y lo sustituyen con una nueva perspectiva que sugiere que estos son salvajes.

En algunas ocasiones, la ineficiencia del mercado en términos de la información es resultado de la existencia de lo que Taleb (2007) denomina "Cisne Negro", que no son más que eventos que poseen los siguientes atributos:

- Son raros. Habitan fuera de las expectativas y en la incertidumbre.
- Suelen tener un impacto con magnitudes catastróficas en caso de ser estos negativos o excesivamente positivos en el caso contrario, lo que llamaríamos un golpe de suerte.
- Los seres humanos intentamos explicar el evento una vez ocurrido –llamada distorsión retrospectiva, atribuyéndole características que lo vuelven explicable y predecible.

A las anteriores, yo agregaría el hecho de que polarizan dada su escalabilidad. Es decir, producen resultados acumulativos y del tipo "el ganador se lo lleva todo", generando desigualdades monstruosas con disparidades inmensas entre *inputs* y *outputs*. Cuyo efecto coincide con el carácter no-lineal de los sistemas que se ha manejado a lo largo de esta investigación. Además, se encuentra en función de nuestras expectativas. Y nos comportamos como si el Cisne Negro no existiera. He ahí el gran problema: ceguera por convicción.

Pero lo que los hace realmente peligrosos, fascinantes y dignos de ser estudiados no es su naturaleza en sí misma; sino la forma en la que los seres humanos los percibimos, manejamos o ignoramos y reaccionamos ante ellos. Por ejemplo, ignoramos las grandes desviaciones como lo hace la herramienta estadística usada por excelencia: la curva de la campana, la cual nos hace creer que hemos domesticado la incertidumbre y que entendemos más de lo que realmente entendemos. En este caso, "platonificamos" el conocimiento intentado dividir o simplificar la realidad en piezas nítidas que resultan ser más entendibles para el ser humano. Categorizar reduce la complejidad, resultando esto ya en un riesgo de omisión de posibles *outcomes*.

Incluso, con el paso de los años se ha acuñado un nuevo término, que viene incluso a sustituir al Cisne Negro de Nassim Taleb, los llamados *Dragon-Kings*. Una de las propiedades más sobresalientes de las ciencias naturales y sociales es que presentan eventos raros, con consecuencias dramáticas para el sistema, principalmente en el sentido de su organización, misma que lo lleva a un gran desequilibrio que su vez puede significar una catástrofe. Estos eventos son típicamente cuantificados por distribuciones de colas gruesas. Un régimen de *Dragon-Kings* implica la existencia de eventos extremos, pero se diferencia de un régimen de Cisnes Negros por la sincronización, en lugar de la **autoorganización** característica de los cisnes negros.

Los *Dragon-Kings* en los sistemas complejos se definen como eventos extremos que son estadística y mecánicamente diferentes de otros eventos con **probabilidad** de ocurrencia ínfima. El nombre viene de la idea de que estos eventos muestran características de un tipo distinto a los animales comunes: el dragón, con cualidades fantásticas y con poder sobrehumano; y por otro lado, se usa la palabra "rey" para hacer referencia a la fortuna de la monarquía como un evento fuera de la extrapolación de la distribución de colas gruesas del resto de la población. [67]

---

[67] SORNETTE, D. ***"Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises"*** Departamento de Negocios, Tecnología y Economía. Zurich. **[en línea]** Disponible en Internet: < https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0907/0907.4290.pdf>

El concepto de *Dragon-Kings* hace referencia a la existencia de una organización transitoria que lleva al sistema a condiciones que permiten que se presente un evento extremo, cuyas propiedades mecánicas y estadísticas son distintas de eventos similares, pero en escalas menores. Usualmente, los *Dragon-Kings* son asociados con la transición de fase, las **bifurcaciones**, catástrofes o puntos de inflexión.

Existen métodos que pueden ayudarnos a identificar el papel de las transiciones de fase en la predicción de este tipo de eventos, como se había mencionado anteriormente, la ley de potenciación log-periódica es una de ellas.

En los sistemas complejos, la presencia de distribuciones bajo la ley de potenciación es considerada como una característica distintiva de mecanismos de **autoorganización** al origen de una jerarquía de escalas. Asimismo, son ejemplo de que la noción de que los eventos extremos deben de ser considerados como frecuentes y que se presentan como consecuencia de los principios de organización que generan a otros eventos a escala menor, ya que pertenecen a la misma distribución estadística. En este sentido, un gran terremoto es en realidad uno pequeño que nunca paró.

Entonces, ¿qué está mal con la estimación de ocurrencia de eventos tales como los *Dragon-Kings* en el sistema financiero, tales como una crisis post-burbuja? La fuente principal de ineficiencia es el hecho de que se asume independencia entre la ganancia o pérdida de un instrumento entre un día y el día siguiente. En contraste, los *Dragon-Kings* del mercado financiero, particularmente los *crashes* financieros, son resultado de rompimientos transitorios de la dependencia entre pérdidas sucesivas significativas. Entonces, la idea de dependencia se pierde de vista con el uso de estadísticas con cortes de información en horizontes temporales pequeños y su uso para la toma de decisiones, tales como el cálculo de un retorno diario.

Matemáticamente, las crisis financieras son las análogas en la ciencia social de lo ya estudiado anteriormente, llamados puntos críticos, pertenecientes al campo de la física estadística. Esta teoría se basa en la existencia del comportamiento colectivo de los agentes de mercado que progresivamente incrementa la cooperatividad del mercado y las interacciones efectivas entre los inversionistas, que se traduce en un acelerado ascenso de los precios de instrumentos financieros sobre meses o hasta años, derivado de las expectativas futuras más que por la realidad actual. De acuerdo con esta teoría, una crisis ocurre cuando el mercado entra a un estado de inestabilidad, en el que cualquier perturbación, por mínima que sea puede tener consecuencias catastróficas.

Entonces, el aumento en la sensibilidad a las perturbaciones derivada de la inestabilidad del sistema explica por qué es tan complicado explicar el origen de las crisis. Son muchos los factores que incentivaron el desequilibrio del sistema. Sin embargo, identificar aquél evento que lleva al sistema a abandonar su estado actual para alcanzar un nuevo equilibrio, es sumamente complejo.

La idea central es que los eventos catastróficos implican la presencia de interacción entre las estructuras a distintas escalas que permiten que emerjan transiciones entre regímenes colectivos de organización.

Cabe mencionar, también, que un desorden con consecuencias catastróficas no requiere en realidad de grandes perturbaciones para alcanzar sus proporciones, efectos locales tales como el incremento o la baja de tasas de interés, nuevos regímenes fiscales o regulaciones son sólo factores que incentivan el crecimiento de un proceso ya existente, que cuando se presenta en el momento justo bajo condiciones que permitan que dicha perturbación o rompimiento se vea ampliada progresiva y cooperativamente a partir de **iteraciones** sucesivas parte del sistema o bien por el comportamiento dependiente y cooperativo entre los agentes de mercado.

Sornette propone que el verdadero origen de una burbuja y su colapso se encuentra en el ritmo de crecimiento insostenible del mercado de valores basado en el auto fortalecimiento de expectativas hiperoptimistas. Durante el desarrollo de una burbuja, el equilibrio del mercado financiero se vuelve cada vez más inestable y por ello, susceptible a una perturbación. Lo anterior, ya que el origen de *Dragon-Kings* es construido progresivamente por el mercado en conjunto, como un proceso de **autoorganización** con propiedades universales.

Para romper con el paradigma de la distribución que siguen los precios de las acciones llegó Matthew F. M. Osborne, un econofísico, y el primer científico en relacionar el movimiento browniano con el mercado accionario, estudiando rigurosamente el mercado desde un enfoque técnico en lugar de fundamental –incluso antes que Mandelbrot, y notando también la naturaleza log-normal de los precios.[68] De hecho, los precios siguen una distribución log-normal, mientras que la tasa de retorno, curiosamente, sí sigue una distribución normal. ¿Por qué? La tasa de retorno se encuentra relacionada con el cambio en el precio mediante una operación matemática llamada logaritmo, por lo que, si la tasa de retorno se encuentra normalmente distribuida, los precios siguen una distribución log-normal.[69]

---

[68] NIEDERHOFFER, V. "***The life of Matther Fontaine Maury Osborne***". 28 de mayo del 2013. Daily Speculations. **[en línea]** Disponible en: < http://www.dailyspeculations.com/wordpress/?p=8410>

[69] Weatherall, J., *op. cit.* P.36

Suelen ser utilizados los logaritmos dada su propiedad de relatividad en la variación, es decir, el cambio en los precios no se mide en términos absolutos o de cuántos miles o millones ha ganado una cartera, sino en términos relativos al monto invertido. Se ha sugerido que, convenientemente, la diferencia entre los logaritmos de dos precios, corresponde a la sensación psicológica de pérdida o ganancia en el cambio de precios. [70]

Por otro lado, si un mercado no es eficiente no significa necesariamente que los precios sean incapaces de descartar adecuadamente la información, sino que bastaría con que no la descuenten en el mismo instante que se genera. Incluso, se ha encontrado evidencia que sugiere que la existencia o no de la **Hipótesis del Mercado Eficiente** no es inmutable, sino que depende considerablemente de las creencias de los inversores. A medida que varía el porcentaje de inversionistas que creen en el mercado eficiente, los efectos de la hipótesis varían de forma inversamente proporcional a este, como se mencionó anteriormente.

Además, si un inversionista ha interpretado adecuadamente la evolución de los precios antes de que estos descuenten el efecto de la información, entonces éste se habría aprovechado de su anticipación teniendo así algún beneficio[71], tal y como se celebran ganancias mediante una estrategia con la utilización de algoritmos que operen de forma automática con baja latencia, permitiendo anticiparse a aquellos inversionistas que aún no han descontado la información.

Entonces, si los movimientos del mercado no se producen totalmente al azar, puede decirse que el mercado dispone de cierta especie de memoria, lo cual implica a su vez, que presenta un cierto

---

[70] *Ibíd.*, P.38

[71] Villagómez, B., *op. cit*. P.8

grado de **determinismo**, dado que la **trayectoria** del sistema dependerá en cierta medida de las condiciones pasadas.

Por lo anterior, las estrategias basadas en el impulso del mercado producen una rentabilidad adicional moderada, pero parece indicar más bien, que los elementos decisivos son los modelos de comportamiento y los factores psicológicos, entonces es de mayor utilidad entender el comportamiento del ser humano, así como el proceso cognitivo involucrado en la toma de decisiones y su reacción ante eventos particulares que lo llevan fuera de su *statu quo.*

3.2 La memoria

Ahora bien, sin importar el modo de toma de decisiones, el ser humano basa sus decisiones en contextos con incertidumbre en la heurística. Misma que resulta por completo ineficiente, principalmente porque la heurística necesita de la memoria para funcionar, es decir, de los recuerdos de experiencias ya vividas y la utilidad que diversas situaciones significaron para nosotros.

El problema subyace de las distorsiones en nuestro sistema de memoria que no nos permiten recordar exactamente lo que experimentamos en el momento en que el recuerdo se creó, y como consecuencia, no hay manera de asegurar que tomemos decisiones correctas en función de nuestra experiencia acumulada, ya que incluso somos capaces de crear, manipular o tergiversar recuerdos.

Lo anterior, ya que nuestra memoria no graba literalmente los eventos, sino que guarda fragmentos. Además, psicólogos cognitivos como Andel Tulving y Karmiloff Smith, aseguran que no tenemos una sola memoria, sino un sistema con distintos almacenes, módulos y procesos de almacenamiento donde guardamos distintos tipos de información[72]. Se enuncian algunas de ellas:

- *Memoria semántica*: conocimientos transmitidos, son los datos que se aprenden en el colegio o en algún libro, son hechos o valores de carácter enciclopédico.
- *Memoria episódica:* son experiencias autobiográficas, marcadas o señalizadas por las emociones desencadenadas en el momento de la creación del recuerdo. Pueden entonces estar sesgadas por las preferencias, intereses o emociones del sujeto. A falta de memoria episódica, se recurre a la imaginación, seleccionando así la alternativa que brinde mayor satisfacción de acuerdo a la gama de escenarios supuestos planteados[73].
- *Memoria procedural*: conocimientos o procesos tan automatizados que no necesitan ser siquiera recordados conscientemente, como el procedimiento para manejar un auto, o recordar dónde están las teclas en el teclado de tu laptop o teléfono celular.
- *Memoria perceptual:* son imágenes, formas y disposiciones de colores que son grabadas en este tipo de memoria, que hacen que el reconocimiento de un objeto sea rápido, incluso antes de notarlo de manera consistente. Es utilizada, por ejemplo, en el contexto publicitario.

El ser humano actúa dependiendo de la situación a la que se esté enfrentando: si es un evento antes vivido se recurre a la memoria episódica, de lo contrario a la semántica. Al ser la memoria semántica, conocimientos brutos adquiridos nosotros les damos el sentido y para ello utilizamos nuestra imaginación, es decir, imaginamos y/o proyectamos la posible utilidad que nos brindarían,

[72] Tetaz, M. *op. cit*. P.37
[73] Tetaz, M., *op. cit*. P.55

dándole sentido al concepto de utilidad esperada como promedio de las utilidades que le reporta a una persona cada estado probable de la naturaleza ponderado por sus probabilidades de ocurrencia.[74]

Por otro lado, se encuentra el concepto de utilidad recordada, que es el grado de satisfacción declarado cuando con posterioridad se le pide a un sujeto que recuerde la acción, evocada entonces por la memoria episódica. La cuestión es que si no podemos confiar en nuestros recuerdos o incluso las proyecciones que hagamos sobre información guardada en la memoria semántica, entonces no tenemos garantías de que la toma de decisiones efectivamente se haga bajo el precepto de maximización de utilidad –incluso si el ser humano fuese un **agente racional** maximizador de utilidad como los manuales microeconómicos dictan.

3.3 Sesgos de memoria y comportamiento

Los seres humanos hacemos nuestro mejor esfuerzo para darle sentido a una realidad muy compleja a partir de un aparato cognitivo que posee muchas limitaciones para procesar y almacenar información[75]. Sin embargo, ese esfuerzo no queda exento de múltiples sesgos que afectan tanto a nuestra memoria, como al comportamiento y la toma de decisiones resultante del proceso cognitivo.

---

[74] Es importante asimismo mencionar, que el valor esperado y utilidad esperada son distintas, tal y como nuestros manuales de microeconomía nos han enseñado. Además del valor esperado ante la elección de alternativas inciertas, los individuos toman en cuenta la utilidad esperada, es decir, la suma de las utilidades asociadas a los distintos resultados posibles, ponderados por sus probabilidades de ocurrencia.

[75] Tetaz, M., *op. cit*. P.65

El primero y el más importante de ellos son las emociones, definidas por Tetaz como vectores informativos que recogen información ambiental, no necesariamente percibida de manera consciente, resumida en un *output* que es captado por el sistema sensorial.[76] Este producto es el responsable de que nuestra atención se dirija sesgadamente a la consideración de determinadas fuentes de variabilidad ambiental; funcionan entonces como marcadores somáticos que nos permiten asignar valor a los estados de la naturaleza que tenemos que sopesar en el momento de tomar una decisión.

Las emociones resumen toda la información de lo que sentimos en el momento en que almacenamos en nuestra memoria episódica cada una de las experiencias que vivimos. Es importante mencionar la universalidad de las emociones, es decir, han sido producto de la evolución de nuestra especie por lo que cada uno de los seres humanos somos sensibles a ellas, aunque algunos lo son más que el promedio bajo circunstancias particulares, como Alan Greenspan y Robert Shiller evidencian la forma en que los inversionistas pueden llegar a ser irracionalmente optimistas o pesimistas, según sea el caso.

Siendo ayudados por las emociones en la tarea de generalizar y sacar conclusiones apresuradamente, resumimos los estímulos en una sensación placentera o displacentera que dirige nuestra atención a un conjunto particular de información, sobre el cual trabaja el sistema ejecutivo central para encontrar regularidades y realizar clasificaciones. Las emociones condicionan nuestro análisis del mundo e influyen de esa manera en nuestra conducta. Muchas veces, de hecho, resolvemos un problema a partir de decisiones basadas en nuestros estímulos emocionales y luego buscamos argumentos racionales para justificar nuestra acción.

---

[76] *Ibíd.*, P.45

Las emociones se vuelven decisivas cuando consideramos que el efecto de las mismas y la psicología de cada inversionista son factores imponderables en la fluctuante variabilidad del mercado, ya que los elementos básicos de las empresas no varían tan rápidamente como lo hacen las volubles reacciones ante nueva información. Nuestras respuestas a las noticias económicas no son sino una de las maneras de manifestar nuestra irracionalidad, comportándonos en pocas ocasiones como seres maximizadores de utilidad, ya que los puntos ciegos cognitivos, así como las manías e ilusiones psicológicas de las que somos víctimas los seres humanos hacen posible nuestra irracionalidad.

Ya hablamos del papel de las emociones, pero es importante mencionar la necesidad de un filtro para establecer a qué estímulos daremos prioridad y a qué estímulos dejaremos de lado. El primero de ellos es la atención, la cual nos ayuda a codificar la información, de modo que no se esfume en la memoria de corto plazo, cuya duración es tan solo de 15 segundos. Así, prestando atención a particularidades le asignamos un patrón o una referencia significativa que nos permita no olvidarla. Es importante mencionar que no sólo nuestro comportamiento está sesgado, sino también nuestra memoria ya que recordamos con mayor medida aquella información que tiene que ver con nuestras propias hipótesis sobre el funcionamiento del mismo. Además, recordamos el pico de utilidad, es decir, no la utilidad total, sino la última parte de cada experiencia.

Existe también, en relación con la atención el *efecto habituación*, mismo que responde al acostumbramiento a las nuevas condiciones posterior a un periodo determinado. Por ejemplo, cuando se genera cierta tolerancia al riesgo; esta no sólo se encuentra determinada por factores sociales, culturales e incluso genéticos, sino que depende también de las experiencias del individuo en cuestión.

Cabe mencionar que es posible generar habituación ante escenarios positivos o negativos, es decir, el efecto es simétrico. Podría entonces crearse tolerancia o habituación a las pérdidas y a las ganancias por igual, generando comportamientos más agresivos. En parte debido a que psicológicamente, los cambios en el estado de ánimo que llevan a que nos sintamos más o menos felices son respuesta de nuestro organismo ante una novedad que exige de nuestra parte cierta acción compensadora para restaurar el balance con el ambiente.

El *sesgo de la disponibilidad de información* se ve a su vez influido por el efecto habituación, ya que el hecho de que llame nuestra atención aquello que sale de la normalidad subyace de la cierta tolerancia que creamos ante eventos que suelen repetirse con regularidad en nuestro entorno, por ello, aquellas situaciones que salen de la normalidad suelen ser plenamente identificados por los sujetos dado que ellas se encuentran marginadas por el efecto habituación. Dicho proceso incide directamente en la forma en la que discriminamos la información que utilizaremos para la posterior toma de decisiones.

Asimismo, se presenta un par de sesgos que provoca que un individuo se muestre reticente a cambiar su opinión o modo de actuar. El primero de ellos es el llamado *sesgo status quo*, mismo que provoca que las personas sean reacias a cambiar de opinión incluso cuando podrían estar mejor si modificaran sus pautas de comportamiento, por el simple hecho de tener que cambiar una serie de procesos ya establecidos y utilizados por un periodo considerable, de tal forma que modificarlos supone para el individuo un costo de oportunidad superior al beneficio obtenido por llevar a cabo el cambio.

Por otro lado, se encuentra el *sesgo de confirmación de hipótesis*, que funciona cuando hemos arribado apresuradamente a una conclusión, y nos aferramos a nuestra teoría con uñas y dientes aun cuando aparezca información que la contradiga. Lo hacemos mediante la discriminación consciente de información: ignoramos o desestimamos la información contradictoria o no le damos importancia, mientras que le asignamos un valor superior o prestamos más atención a aquellas aseveraciones que confirmen nuestra hipótesis o aprueben nuestro comportamiento.[77]

Respecto a nuestro comportamiento, los sesgos se generan principalmente por nuestra falta de comprensión de **probabilidades**, ya que somos animales sedientos de regularidades. Buscamos patrones y construimos modelos explicativos de nuestro mundo y los utilizamos para pronosticarlo todo. Tendemos a construir reglas causales de nuestro entorno, pero es difícil que un evento se repita, en su manifestación más pura un número suficiente de veces como para que seamos capaces de construir frecuencias de este fenómeno y computar probabilidades. [78]

Además, abusamos de las probabilidades, muchas veces las utilizamos para referirnos a eventos que no son repetitivos ni aleatorios, muchas veces tampoco la muestra es significativa para el evento del cual intentamos conocer las probabilidades[79], por ejemplo, no me interesaría el salario promedio de un recién egresado cualquiera, dado que no todos tienen los mismos conocimientos y aptitudes, me interesaría por ejemplo el salario promedio de una recién egresada con un perfil económico financiero y conocimientos en ciencia actuarial con capacidades y aptitudes particulares, así como experiencia en regulación financiera y el uso de modelos matemáticos. Carentes de estimar probabilidades objetivas, construimos perfiles que nos permiten representarnos mentalmente en

[77] Tetaz, M. *op. cit*. P.98
[78] *Ibíd.*, P.81 y 83
[79] Tetaz, M. *op. cit*. P.84

distintas situaciones y ante eventos concretos, simplemente analizamos si una persona cumple con los requisitos para entrar o no en determinada categoría.

En sintonía con lo anterior, presentamos el *sesgo de representatividad*, el cual provoca que tengamos la propensión a creer que la realidad que nos rodea es representativa del total, cuando de hecho, por características inherentes al ser humano, solemos rodearnos de individuos y entornos similares al propio. Formulamos nuestros juicios a partir de una experiencia acotada y no nos damos cuenta de que nuestro mundo no es representativo de toda la sociedad.[80]

Siguiendo con el proceso de categorización, se encuentra el proceso de clasificación de datos, mediante el cual categorizamos y agrupamos. Por supuesto, las categorías que emergen son resultado de la historia de cada sujeto. Esto contribuye a la existencia del *sesgo de categorizaciones instantáneas*, gracias al cual nos apresuramos a concluir y pronosticar a partir de muy pocos casos, porque sabemos que los casos serán bastante distintos y no tendremos la oportunidad de construir probabilidades ciertas sobre las cuales basar nuestros juicios. Así, tenemos más probabilidades de cometer el error de ver una relación entre dos variables cuando la relación en realidad no existe –llamado error tipo 1 en estadística, que de incurrir en el error de no ver una relación entre las dos variables cuando esta en realidad existe –error tipo 2. Aun cuando de hecho no se pueden minimizar ambos al mismo tiempo.

Presentamos también el *sesgo de falacia ad hominem*, que hace que ponderemos la información que recibimos no por su valor lógico o estadístico, sino por la legitimidad que le adjudicamos a quien sea el mensajero. Es comúnmente identificado cuando nos encontramos en situaciones en las que

[80] *Ibíd.*, P.91

vemos superados nuestros conocimientos en determinada materia por otro sujeto, suponemos que sus conocimientos lo califican de tal forma que su opinión o pronóstico sean certeros. Por ejemplo, cuando vamos al médico, al ser este un especialista en anatomía y farmacología tendemos a sobrestimar sus conocimientos y asignarle un valor superior aun cuando otra persona sin un título de médico nos pudiera proporcionar la misma información.

Lo mismo pasa en la economía o las finanzas, al ser sujetos doctorados o con altos estudios en materia económica o financiera, tendemos a creer en la opinión de banqueros centrales o ministros/secretarios de finanzas, aun cuando con conocimientos o experiencia más amplios en el campo, su opinión no debería ser mucho más valiosa que la de un dentista o un químico, ninguno de los especialistas posee una bola de cristal ni el don de la clarividencia para conocer el futuro, mucho menos posee las tres características del demonio de Laplace, mencionado en capítulos anteriores, sin embargo, posee la capacidad de modificar el estatus lógico de una dosis de información moldeando el conocimiento de los agentes económicos e incidiendo en las decisiones y el comportamiento de los mismos.

Por otro lado, como resultado del *sesgo de anclaje* las personas tienden a dar opiniones cercanas o crearse juicios en función de la sugerencia de quien les brinda cierto tipo de información. Funciona a nivel categórico y numérico. Dicho sesgo, combinado con el *sesgo de falacia ad hominem* podría desencadenar el llamado “comportamiento en manada”, ya que basta con que un grupo de individuos fundamenten su toma de decisiones en una fuente de información que consideren fiable, para que anclen sus expectativas a la información proporcionada por dicha fuente, de tal forma que las decisiones tomadas por ese grupo comparten los fundamentos y podrían reaccionar de una forma similar.

En especial, porque muchas veces lo que motiva a las personas no es su bienestar absoluto, sino su bienestar relativo, por lo que tendemos a tomar en consideración el actuar y el resultado del comportamiento y toma de decisiones de los individuos que consideramos pertenecen a nuestro entorno. En ese caso, bastaría con que en un contexto de pánico e incertidumbre algunos de los individuos actuasen de cierto modo para que los demás siguieran el mismo comportamiento: basarían sus decisiones en lo que ellos consideran una fuente fiable y seguirían a su *benchmark* confirmando con esto que están tomando la decisión correcta.

Otra forma extrema de anclaje es la que se manifiesta por el interés de los inversores en comprobar si los beneficios anunciados cada trimestre por las empresas coinciden con las previsiones a los analistas, o bien, ante exageraciones financieras en cuanto a los objetivos de precios, más aún cuando el plazo planteado es largo, ya que cuando más lejos esté el futuro que describen los números, más posible es proponer un número enorme que pueda justificarse, aunque sea aparentemente. Y cuando los beneficios se encuentran por debajo o por encima de sus expectativas, los inversionistas suelen sobre reaccionar.

Curiosamente, presentamos también el llamado *sesgo de acción*. Dicho sesgo implica que ante malos resultados, las personas se sientan peor si consideran que no han hecho el máximo esfuerzo posible para evitarlos. En cambio, no se sienten tan mal si creen que esos resultados se han producido aun a pesar de haber intentado evitarlos. Sin darnos cuenta que paradójicamente, algunas veces, la mejor estrategia es no hacer algo, principalmente en contextos de incertidumbre y pánico, donde sobre reaccionamos a los estímulos.

Existe también la *teoría de los prospectos*, asociada con la existencia de lo que Richard Thaler definió como las cuentas mentales separadas.[81] Las personas son propensas a tratar de modo diferente el dinero perdido o ganado. En el terreno de las ganancias preferimos evitar el riesgo, ser conservadores, a diferencia de cuando nos movemos en contextos de pérdidas, donde solemos preferir arriesgarnos. Nos gustan las ganancias seguras y las pérdidas inciertas, incluso se ha demostrado que los inversionistas experimentan mayor sufrimiento después de una pérdida financiera que placer posterior a una ganancia equivalente. Además, naturalmente la predisposición a asumir riesgos tiene un componente que depende de la personalidad, pero también se relaciona con las circunstancias, así como el entorno social y personal.

Las cuentas mentales separadas son una consecuencia directa de nuestros límites cognitivos de procesamiento de información, a los cuales se suma el hecho de que muchas veces definimos por separado un conjunto de objetivos y los medios o planes apropiados para alcanzar cada uno de ellos.

Podemos resumir lo anterior diciendo que poseemos una memoria de trabajo (memoria a corto plazo) que procesa los valores de cada una de las alternativas de elección a fin de poder compararlos y elegir. Dado que la memoria a corto plazo es limitada en su capacidad y tiempo de almacenamiento, los valores de decisión computados no pueden ser comparados todos entre sí, motivo por el cual es habitual que lo contraste con un repertorio preestablecido de opciones, es decir, un status quo. Es razonable pensar entonces que los marcadores somáticos o emociones dirigen la atención hacia algunos aspectos particulares de las alternativas bajo análisis.

[81] Tetaz, M. *op. Cit*. P.114

A medida que las elecciones se adentren en el terreno de las alternativas no conocidas ni experimentadas, deberán producirse estimaciones de la utilidad esperada a partir de la experiencia registrada en situaciones evaluadas como las más similares a la nueva situación. Igualmente, el modelo de generación de similitudes será construido de manera diferente por cada individuo, cada uno presenta distintos niveles de sesgo y varianza en sus estimaciones de utilidad, dichas estimaciones de utilidad son las llamadas expectativas, concepto de utilidad crucial en el campo de las finanzas, donde los agentes que participan en el mercado construyen expectativas partiendo de la construcción de probabilidades asignadas la mayoría de las veces en términos emocionales y/o de la memoria episódica, lo cual genera sesgos en el comportamiento, tanto del individuo particular como de aquellos que le rodean.

Y es que el comportamiento estratégico es inherente al comportamiento humano, siempre buscamos el mejor resultado, el que nos proporcione mayor ventaja, el cual muchas veces es alcanzado cuando se encuentra el famoso equilibrio de Nash, donde los individuos modifican su actuación hasta el punto de dejar de beneficiarse de las posibles modificaciones en función de las actuaciones de los demás, es decir, conviene pensar en el funcionamiento de la mente del resto de los participantes; vale la pena ser conscientes del estado mental de los demás. Parafraseando aquella escena de la película "Una mente brillante":

> *"El bienestar del grupo se maximiza cuando cada uno hace lo mejor para sí mismo, teniendo en cuenta las acciones del resto del grupo".*

Queda demostrado con el estado actual de la economía y el mercado financiero, es el estado real de indicadores económicos como el empleo y la producción de países con la hegemonía económica como Estados Unidos y China, sin embargo, en última instancia, lo que determina el clima de la economía global no son dichos indicadores o en el caso de una acción, su valor en libros, sino las expectativas que los consumidores o los inversionistas tienen de las posibilidades de recuperación económica de un país o el futuro de la emisora.

Más aún, si los inversionistas son pensadores sofisticados, vale la pena tener presente la forma en la que piensan los demás agentes económicos. Lo cual dan lugar al llamado “metarrazonamiento”, es decir, una iteración del intento de anticiparse al razonamiento de los demás. Misma que genera una profundización potencial del evento como profecía auto cumplida, donde las opiniones de los inversionistas acerca de los valores o el sistema en su conjunto pueden de hecho hacerse realidad, dado el proceso mental de anticiparse a lo que la opinión media espera que sea la opinión media. Dando lugar a un proceso que resulta conveniente examinar desde un nuevo enfoque en el que la psicología resulta inseparable de las consideraciones matemáticas, y más aún las económicas; principalmente en un mercado en el que casi todos los operadores intentan anticiparse a los demás antes que buscar la riqueza.

De la idea anterior surge el concepto de “conocimiento compartido” introducido por el economista Robert Aumann, que resulta crucial para comprender la complejidad del mercado de valores y la importancia de la transparencia. Una pequeña dosis de información constituye conocimiento compartido por un grupo de personas cuando todas están al corriente de ella, saben que los demás la conocen, saben que los demás saben que la conocen, y así sucesivamente.[82] La noción del conocimiento compartido es esencial para darse cuenta de que el tratamiento confidencial de la información explica algunos de los bruscos movimientos del mercado, particularmente aquellos que parecen no tener explicación alguna y, por tanto, es casi imposible de prever.

[82] Paulos, J.(2004). **“Un matemático invierte en la bolsa”**. España. Tusquets Editores. P.23

3.4 SAPE: *Sentiment Asset Pricing Engine*

Con el nacimiento y desarrollo que la Economía del Comportamiento y el estudio de la psicología del inversionista, cada vez más gente se ha dado cuenta que el sentimiento de los inversionistas juega, un papel crucial en la formación de precios de los instrumentos financieros.

Sentiment Asset Pricing Engine (SAPE) es un conjunto de algoritmos computacionales construidos para incorporar el factor humano a la valuación de instrumentos financieros, cuyo fundamento es una amalgama de la teoría de portafolio de Markowitz, el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) y particularmente, el modelo de valuación de opciones Black-Scholes. Es por lo anterior, que se toman en consideración también, variables como los riesgos, los retornos y la volatilidad, usualmente utilizados en los modelos de valuación convencionales.

En la mayoría de los casos, la mejor forma de cuantificar el sentimiento del mercado es a través del análisis a la respuesta de los agentes ante la incorporación de nuevas noticias. Esto se debe a que las noticias proveen de información a los agentes participantes del mercado, de tal forma, que dichos eventos sean considerados para la toma de decisiones. La dinámica del flujo de información, así como la incertidumbre que existe en el mercado influyen directamente en la formación de precios de activos financieros y la reacción de los inversionistas, por lo tanto, en la estabilidad del mercado al menos en el corto plazo.

En los últimos años se ha vuelto más importante el impacto de la información en la toma de decisiones de los inversionistas, principalmente por los avances en las comunicaciones y la nueva tecnología adoptada por parte de los proveedores de información que permiten seleccionar, extraer, agregar y categorizar de forma automática dicha información, facilitando y agilizando la dispersión de la información a nivel global.

En otros casos, es posible crear algoritmos que transformen descripciones cualitativas en un insumo para modelos computacionales matemáticos ideados con el fin de que actúen de forma automática según las condiciones del mercado y los parámetros preestablecidos por el usuario, buscando disminuir la latencia y los posibles sesgos que el comportamiento humano podría incorporar. Dicha estrategia es conocida como *High Frequency Trading* (HFT).

A grandes rasgos, el HFT es un tipo de negociación caracterizado por el uso de herramientas tecnológicas sofisticadas y técnicas matemáticas. La estrategia consiste en crear algoritmos de tal forma, que se opere al mercado velozmente y se elimine la intermediación de agentes financieros para contactar a un vendedor con su respectivo comprador y viceversa. Es decir, una computadora elimina la intervención de seres humanos y con ello, su comportamiento comúnmente imperfecto. Se obtiene entonces, como resultado, una nueva estrategia de inversión caracterizada por la baja latencia que genera ventajas sobre los demás actores del mercado, y con ello, arbitraje.

Este reemplazo de los seres humanos –eliminando así las limitaciones que las capacidades humanas suponen– por computadoras programadas, con el fin de que hicieran lo que normalmente haría un bróker o una casa de bolsa al momento de elegir el momento de entrada o salida de una posición, se comenzó a observar desde el crack de 1987, pero fue hasta la década del 2000 cuando se convirtió en el centro de atención y también el objeto de deseo de los participantes del mercado. Cada institución que se dedicaba a operar el mercado tenía la firme idea de que mientras más rápido pudiese generar su postura era mejor, por ende, mientras más rápidamente pudiera tener acceso a la información del mercado y con ello adelantarse a sus competidores, mejores resultados tendrían con sus inversiones.

Es por ello que es importante entender cómo y qué tan rápido reaccionan los inversionistas ante nueva información en el mercado, más aún, cuando somos conscientes de que la inmensa mayoría de los agentes con posiciones en el mercado tienen acceso a algún tipo de fuente de información en el cual fundamentan la toma de decisiones.

El modelo SAPE contiene una serie de fórmulas matemáticas que buscan identificar el efecto que el estado psicológico de los inversionistas tendrá en el precio futuro de algún activo. Por ello, sus contribuciones al mundo de las finanzas van mucho más allá de lo pensado, ya que encontró la forma de unir a la Economía del Comportamiento con la visión tradicional de las Finanzas, incorporando el factor del comportamiento humano a un modelo matemático de valuación de precios, representado por el sentimiento del mercado; lo cual podría ayudar a reducir la asimetría que presentan los modelos de valuación actuales.

Una ventaja importante de ser mencionada es el hecho de que el SAPE puede ser alimentado de manera automática en tiempo real con datos de mercado, en lugar de usar series de datos históricas como los típicos modelos de valuación. Además de otras ventajas, mencionadas a continuación.

	Valuación futura	Factor de comportamiento humano	Información en tiempo real	Empíricos	Procesable
Modelo SAPE	✓	✓	✓	✓	✓
Modelos APM (*Asset Pricing Models*) convencionales	✓	×	×	✓	×

Figura 3.1 Comparación Modelo SAPE y Modelos APM
Fuente: Adaptación de Ye, G. (2011) "***High Frequency Trading Models***" John Wiley & Sons, Hoboken, New York.

3.5 FEARS: *Financial and Economic Attitudes Revealed by Search*

John Maynard Keynes afirmó que los mercados pueden presentar fluctuaciones bajo influencia de los "espíritus animales" de los inversionistas, los cuales se encuentran determinados por las cuentas mentales del individuo en cuestión, su experiencia (heurística) y el sesgo que produce el propio comportamiento en su toma de decisiones; además de que la información en la que fundamenta sus decisiones, a pesar de que es probable que esta sea un recurso compartido, es casi seguro que se encuentra sesgada por el tiempo, las características antes mencionadas y fricciones externas propias del mercado y demás factores que participan en él.

Se sugiere además que el crecimiento exponencial en los errores en la valuación proviene del sentimiento de los inversionistas, factor que resulta inherente a los agentes de mercado y por ello, imposible de ser diversificado. Incluso se ha llegado a la conclusión de que el sentimiento de los inversionistas respecto al mercado, por sí mismo, representa un factor de riesgo sistemático para el sistema financiero en su conjunto. Lo anterior, provoca entonces que dichos individuos sean capaces de mover los precios de instrumentos más allá del valor supuesto asignado por sus fundamentales.

Años después, se llegó a la formalización de este supuesto, demostrando que si los *noise traders* –término utilizado para referirse a los inversionistas que toman decisiones de compra o venta sin usar información sobre los fundamentales- basan sus decisiones en las propias expectativas y la aversión al riesgo de los arbitrajistas, dichas expectativas provocarán más compra venta sin fundamentales, manipulación de precios y exceso de volatilidad.

Por lo anterior, se plantea la posibilidad de medir el sentimiento de los inversionistas y cuantificar sus efectos, es decir, la incidencia de sus expectativas respecto al mercado mediante algo más que las ya clásicas encuestas como el Índice de Sentimiento del Consumidor de la Universidad de Michigan que pueden ser manipuladas o presentar los ya antes mencionados sesgos, u otros métodos como el uso del volumen de las cotizaciones.

Es por lo anterior que, echando mano de los avances en la informática fue creado el índice FEARS (*Financial and Economic Attitudes Revealed by Search)*, que cuantifica los efectos del sentimiento de los inversionistas reflejado en las búsquedas de motores como Google o en plataformas que ofrecen información de mercado como Bloomberg, sobre los precios de los activos, la volatilidad o los flujos de dinero. Por supuesto, la clave de la construcción de un índice que refleje el sentimiento del mercado es la correcta identificación los factores que determinen dicha variable, ya que las noticias y publicaciones de indicadores se dan a conocer continuamente, y algunos de ellos han de influir en el sentimiento del mercado y otros no.

Cabe mencionar, se recabó evidencia que sugiere la eficiencia de FEARS en predecir una reversión en los retornos, ya que un incremento en el índice corresponde a un nivel bajo en los retornos en el mercado hoy, que predice un alza en los retornos en los días próximos.[83]

Dicho índice significa muchas ventajas sobre los métodos actualmente utilizados, como el hecho de que este índice es calculado diariamente o incluso con una periodicidad menor, dejando de lado los efectos que genera la publicación en intervalos mayores de indicadores que provocan euforia o pesimismo debido al efecto habituación.

[83] Para mayor información sobre el modelo FEARS consultar el siguiente *paper*:
DA, Z.; ENGELBERG, J.; GAO, P. ***"The sum of all FEARS: Investment Sentiment and Asset Prices"*** 17 de octubre del 2014. Oxford University. **[en línea]** Disponible en Internet: < http://rady.ucsd.edu/faculty/directory/engelberg/pub/portfolios/FEARS.pdf>

4

CRÍTICA A LA PREDICTIBILIDAD

Predecir, por definición, es anunciar por revelación, ciencia o conjetura, algo que ha de suceder. En el contexto científico la predicción ha sido de gran importancia; son muchas las situaciones en las que es deseable prever algún evento, basta con pensar en los esfuerzos de los economistas por conocer el comportamiento y anticiparse a los ciclos económicos o la tendencia de algún tipo de instrumento financiero o indicador económico. Entendemos que es inherente al ser humano explicar nuestro comportamiento en función de la información de la que disponemos, e incluso de la que esperamos disponer en un futuro.

Es por lo anterior, que surge la pregunta de si los métodos de predicción utilizados a lo largo de la historia y aún más los utilizados en la actualidad, son útiles debido a la falta de información o a la imperfección de los métodos utilizados.

El éxito de la predicción depende de la proporción en la que la **dependencia sensitiva** se presente, es decir, mientras el cambio dado determinado cambio inicial sea mayor, mayor será la dependencia sensitiva y por ello más difícil la labor de predicción, por eso es de suma importancia conocer la medida en que nuestro sistema es sensible a cambios en los factores o magnitudes, ya que ello implica sensibilidad a la incertidumbre, siendo justamente la incertidumbre la variable que deseamos eliminar de los sistemas.

Es por ello, que en capítulos anteriores se puntualizó en gran medida en este tipo de conceptos, tales como la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, y medidas como el **Exponente de Lyapunov**, que nos dan una idea de lo poco confiable que pudiera ser una predicción dada la no-linealidad intrínseca a determinado sistema y al crecimiento exponencial de los errores y con ello la incertidumbre. Lo anterior, ya que al ser un proceso recursivo, un error en tiempos iniciales se acarreará a lo largo de la predicción, cuyos efectos probablemente crezcan a lo largo de la **iteración** del proceso, provocando que la trayectoria sea inválida y bastante alejada de la realidad.

Por otro lado, es importante también mencionar que en cuanto a lo que a predicción se refiere, los científicos con frecuencia no conocen la regla correspondiente a los fenómenos físicos que intentan predecir, ya que estas por lo general se encuentran determinadas por las leyes de la naturaleza. Más aún, idealmente deberíamos contar con la función que dará vida a la trayectoria del sistema dinámico, sin embargo, si lo que deseamos es predecir o proyectar su comportamiento debemos actuar en sentido opuesto, a través de las trayectorias pasadas de un sistema, dibujar las trayectorias futuras.

De lo anterior subyace otro problema, los científicos sólo pueden guiarse por observaciones científicas que son invariablemente inciertas debido al **ruido** observacional y factores derivados del comportamiento humano. Además de que se ignora el hecho de que las conmociones que perturban la estabilidad de un sistema son únicamente provenientes de fuentes externas, ignorando que los sistemas mismos pueden ser inherentemente caóticos.

Es decir, si tenemos series de tiempo $\{\boldsymbol{a_t}\}$, como los retornos mensuales de cualquier índice bursátil, por ejemplo, el IPC o S&P con indicios de ser determinística, entonces existe un vector de estados $\boldsymbol{x_t}$ que tiene un comportamiento $\boldsymbol{x_{t+1}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_t})$, y una función $\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x_t}) \ \ \forall \boldsymbol{t}$.

Si se conocieran **h** y **F**, y se pudiera medir $\boldsymbol{x_t}$ a la perfección, estaríamos en condiciones de poder predecir el futuro de **x**, y por ello su trayectoria. Pero como sabemos, ambas son desconocidas, y sólo podemos conocer **x** indirectamente observando el resultado de la iteración de la función $\boldsymbol{a_t}$ a través del tiempo.

También debemos tomar en cuenta cómo es que la magnitud de tiempo por predecir determinará la eficacia de la predicción, ya que los errores disminuyen nuestro rango de predicción y debemos entonces cuestionarnos hasta qué momento una predicción es fiable. A mayor periodo hacia atrás, los datos estarán menos correlacionados, a menos que se encuentren en un ciclo periódico.

Por otro lado, suele confundirse la idea del **determinismo**, al hablar de un proceso que depende de los estados anteriores, suele pensarse que implica la existencia de una correlación lineal, sin embargo, no es así; además, la correlación no implica causalidad, ni viceversa para sistemas no-lineales, incluso cuando el estado actual este en función del anterior.

El hecho es que sencillamente no se pueden aplicar los estándares de la demostración matemática a los sistemas físicos, sino solamente a los modelos matemáticos de los mismos sistemas físicos. Y si partimos de ahí, los modelos matemáticos son sencillamente distintos de los sistemas físicos que pretenden reflejar, son únicamente la forma en la que a situaciones reales se les puede representar mediante objetos matemáticos[84].

Es en muchos casos la inadecuación del modelo lo que limita la predictibilidad, no el caos, ya que en la abstracción de la realidad se pierden de vista cualidades del sistema que es necesario tomar en cuenta, además de que en la misma simplificación se llega a tal punto en el que la realidad se interpreta en un contexto lineal o estocástico, al que no necesariamente pertenece.

Por ejemplo, ignoramos las grandes desviaciones como lo hace la curva de la campana, la cual nos hace creer que hemos domesticado la incertidumbre y que entendemos más de lo que realmente entendemos; es decir, "platonificamos" el conocimiento intentado dividir o simplificar la realidad en piezas nítidas que resultan ser más entendibles para el ser humano.

4.1 Técnicas de Predicción

Para estar en condiciones de presentar las técnicas de predicción es necesario conocer conceptos fundamentales, que nos permitirán un pleno entendimiento del proceso. Por lo cual partiré de la definición de los tres pilares de la predicción: los datos, el sistema y el modelo.

Al sistema conviene definirlo como el conjunto de cosas o partes, entre las cuales se establece alguna forma de relación que las articula en una unidad, que es el sistema. Tenemos particular interés en los sistemas dinámicos, en los que el tiempo juega un papel fundamental debido a que las relaciones entre magnitudes involucran no sólo a las propias magnitudes que nos permiten

[84] Sosa, C., *op. cit*. P.1

medir el comportamiento del mismo sistema, sino también a sus derivadas, es decir, los cambios en el sistema a través del tiempo. La trayectoria se define entonces como la evolución temporal de una magnitud, y finalmente, el conjunto de trayectorias seguidas por las magnitudes indica el comportamiento del sistema.

Generalmente, un sistema existe en un medio con el que puede interactuar, en tal caso, cambios en el exterior afectan el comportamiento de dicho sistema. Por lo que es importante considerar los dos tipos de relaciones entre variables: las internas que relacionan elementos propios del sistema y las externas que conecta a los elementos del sistema con el universo exterior.

El término de modelo como herramienta matemática fue introducido a la ciencia económica en la década de 1930 con el trabajo del físico con estudios en Economía, Jan Tinbergen. Respecto al modelo, es importante tomar en cuenta su proceso de desarrollo y el ámbito de aplicación del mismo, lo cual condicionará el diseño del mismo en cuestiones tales como la complejidad, el número de entradas y salidas pasadas del proceso, precisión de la reproducción del comportamiento del sistema real, etc.

Existen modelos no matemáticos, como los lingüísticos o esquemáticos, y los matemáticos, que son los que nos ocupan en esta investigación, que utilizan un conjunto de ecuaciones matemáticas para modelar un sistema.

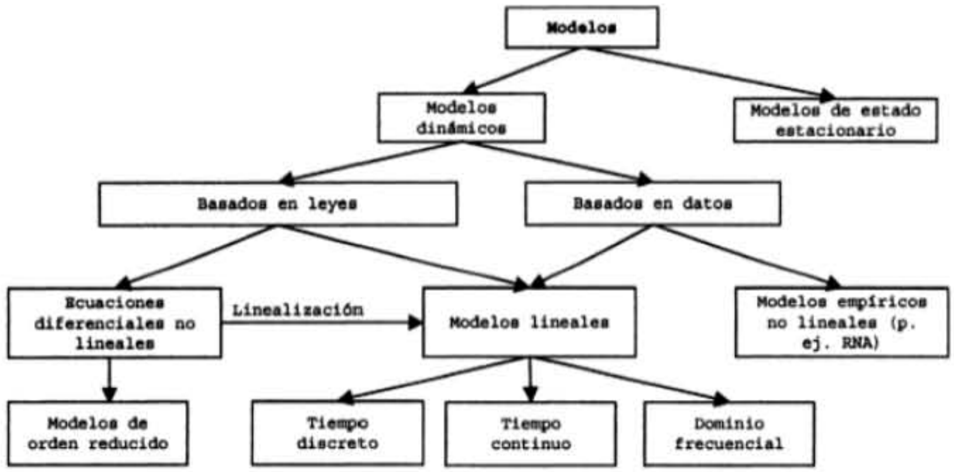


Figura 4.1 Tipos de modelos.

Fuente: Arahal, M., Berenguel, M., Rodríguez, F. (2006) ***"Técnicas de predicción con aplicaciones en Ingeniería"*** Universidad de Sevilla. Sevilla. P.26

La principal ventaja de la utilización de modelos es ayudar a evaluar el resultado de una decisión en el mundo real sin llegar a tomar efectivamente la misma. Al ser únicamente una representación y simplificación del sistema, nos permite plantear suposiciones y evaluar decisiones o acciones sin que se lleven a cabo experimentos reales. Por lo que permite la organización del conocimiento y facilita el análisis, ya que proporciona un marco para contrastar el sistema y sus posibles trayectorias.

Asimismo, proporciona una perspectiva sobre aspectos relevantes y facilita la identificación de las fuentes de variación, por lo que posibilita incluso la manipulación del sistema. Por supuesto, también están las desventajas, ya que no existe garantía de que el proceso modelado se apegue a la realidad y en consecuencia, las decisiones tomadas a partir de las trayectorias proyectadas sean erróneas.

Además, es importante que el investigador defina primero con qué fin será creado el modelo, ya que de ello depende la discriminación de variables y por ello, los resultados. Entre los principales usos de los modelos se encuentran los siguientes.

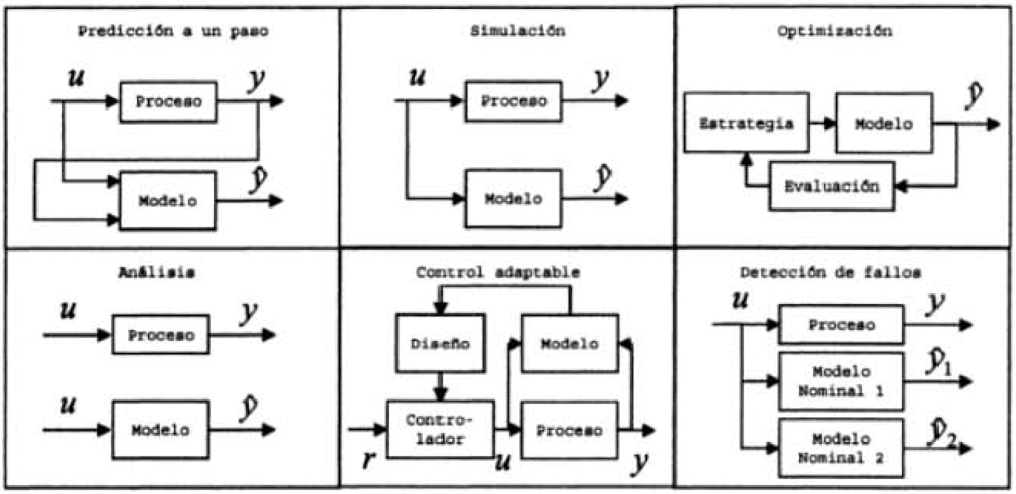


Figura 4.2 Principales aplicaciones de los modelos.

Fuente: Arahal, M., Berenguel, M., Rodríguez, F. *op. cit.* P.28

A propósito, y adelantando conclusiones, considero un dilema el hecho siguiente: dado que buscamos predecir con la mayor exactitud posible, deberíamos tomar en cuenta toda aquella relación que nuestro fenómeno de estudio tenga, ya sea con las variables intrínsecas al sistema o con las variables con las que interactúa en su entorno, pero ello significaría romper con la definición de lo que es un modelo: ya no abstraeríamos y simplificaríamos la realidad.

Nos encontramos en un callejón sin salida, no podemos simplificar el modelo sin hacer caso omiso de relaciones que invariablemente juegan un papel importante en la trayectoria del sistema, pero tampoco somos seres omnisapientes ni poseemos capacidades infinitas de cálculo, de tal forma que conozcamos las leyes que gobiernan cada una de las variables e incluso si las conociéramos, no seríamos capaces de hacer uso de ellas por falta de capacidad de cálculo. ¿Entonces, cuál es la salida?

Las más habituales técnicas de predicción utilizan un modelo en forma de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

- *Modelos derivados de leyes.* Consisten en ecuaciones matemáticas que ligan las entradas y salidas del estado. Las ecuaciones utilizadas son obtenidas a menudo realizando simplificaciones de la realidad. Su ventaja es que las leyes tienen típicamente dominios de validez muy amplios.
- *Modelos de caja negra o paramétricos.* Los modelos paramétricos establecen una estructura funcional predeterminada entre variables a explicar y las explicativas. El problema se reduce a encontrar una estimación de los parámetros que permita realizar las predicciones más exactas posibles.
    - Modelos paramétricos lineales.
        - Para la media condicional. Modelos tipo ARMA que tratan de modelar los rendimientos bursátiles con la intención de calcular su valor esperado.
        - Para la varianza condicional. Modelos ARCH. Aunque los rendimientos no suelen mostrar autocorrelación significativa, los rendimientos al cuadrado sí lo hacen. La volatilidad del mercado, medida como la varianza o desviación típica de los rendimientos futuros del activo, sigue esta conducta. Por otro lado, la teoría de la **caminata aleatoria** postula que la distribución de probabilidad de los rendimientos debe seguir una norma. Sin embargo, las distribuciones reales suelen mostrar elevada curtosis que se traduce en colas anchas; todas estas anomalías encuentran explicación si, en lugar de considerar la dependencia hacia los valores pasados de la media (momento de primer orden), prestamos atención al condicionamiento respecto de las varianzas pasadas (momento de segundo orden).

Este es el fundamento de los modelos heteroscedásticos condicionalmente autorregresivos, en los que la varianza actual es una función lineal de las innovaciones pasadas.

Aunque estos modelos no permiten predecir precios ni rendimientos futuros, son de gran utilidad para estimar la volatilidad de un valor, importante para el mercado de derivados, más específicamente de opciones.

  - Modelos paramétricos no lineales.

- *Sin modelo explícito*
- *Modelos fractales*. La evidencia empírica nos informa que las series de rendimientos bursátiles exhiben un espectro de banda ancha, inconsistente con un comportamiento cíclico regular generado por un proceso subyacente de tipo lineal que, sin embargo, sí es consistente con un proceso estocástico o caótico. Además, los modelos lineales no generan distribuciones con colas anchas y elevada curtosis, características propias de estas series.

  Tradicionalmente, la literatura financiera mantuvo que los rendimientos financieros exhibían una dependencia de observaciones inmediatamente anteriores; recientemente se ha postulado que los rendimientos presentes están fuertemente influenciados no solo por su pasado próximo, sino por su historia completa. Este hecho sería consistente con un lento decaimiento en la función de autocorrelación, lo cual se ha observado repetidamente en las series financieras.

  Los modelos diseñados para insertar la memoria de largo plazo son los AFIRMA y los movimientos fraccionales brownianos, que aprovechan su característica fundamental: la **autosimilitud**, para recoger el comportamiento fractal.

  Los movimientos fraccionales brownianos modelan el comportamiento de los rendimientos financieros a partir de aparentemente complejos (pero matemáticamente sencillos) proceso fractales, que presentan una estructura estadística fractal con parámetro de autosimilitud ½ y con magnitud y dirección en el movimiento de los precios aleatorio.

Si los precios de los activos siguen un movimiento browniano, los rendimientos seguirán un proceso Ruido Blanco, en dicho caso, la densidad espectral es cero para todas las frecuencias, lo cual es tanto como decir que no existe ningún comportamiento cíclico.

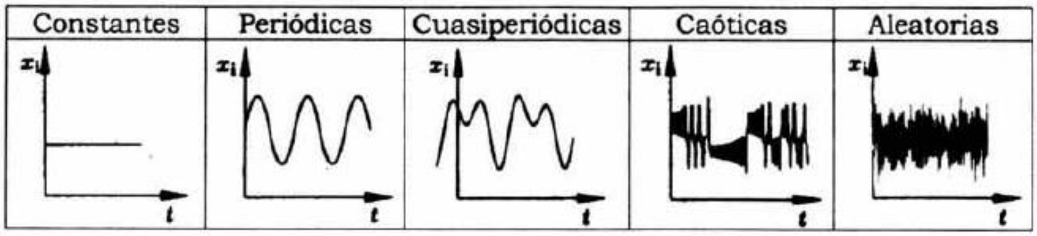
La tarea de encasillar en leyes empíricas series de datos que generan comportamientos caóticos con el fin de realizar predicciones se remonta a la antigüedad. En dicha tarea se han visto importantes avances, desde los últimos años del siglo XX, que ha generado un nuevo arsenal de métodos que permiten considerar comportamientos no lineales, separando los casos no deterministas de las dinámicas caóticas.

4.2 Series de Tiempo

Una **serie de tiempo** es un conjunto de observaciones sobre los valores de una variable en diferentes momentos, los cuales reflejan la evolución de un fenómeno a lo largo del tiempo. Tal información debe ser recopilada en intervalos regulares.

Las figuras que a continuación se presentan son una muestra geométrica de las diferentes **series de tiempo**, caracterizadas en orden de izquierda a derecha como: constantes, periódicas, cuasi periódicas, caóticas y aleatorias.

Figura 4.3 Tipos de series de tiempo[85]



Fuente: Espinosa, A. *op. Cit.* P.106.

El principal problema que las series de tiempo tienen en la Econometría es que se supone que éstas son estacionarias, esto quiere decir que su media y su varianza no cambian sistemáticamente a través del tiempo, condición que no se observa en series de tiempo de precios de activos financieros, y se procede a interpretar su comportamiento como una **caminata aleatoria**, es decir, su comportamiento se cree que se debe a los precios pasados más un choque puramente aleatorio.

La importancia de la caracterización de las series de tiempo radica en que nos podemos anticipar un paso en el análisis, es decir, podemos encontrar la explicación de porqué algunas series son predecibles y otras no[86]. Esto, ya que mediante el análisis de datos, test estadísticos y herramientas matemáticas es posible modelar el comportamiento de un sistema, de forma que es posible identificar, en primera instancia, cualidades cualitativas del mismo, que nos guiarán en la toma de decisiones respecto al adoptar el enfoque más apropiado para el estudio de un sistema particular.

Para llevar a cabo una correcta caracterización de las series de tiempo, se sugiere seguir la siguiente secuencia: (1) se deben obtener los datos del fenómeno a estudiar, de tal forma que estos representen de la forma más precisa posible el comportamiento del mismo, (2) se identifica la

[85] La serie constante responde a la ecuación $(f(x) = (x \cdot 0) + 1$, la periódica es una función de seno, la cuasi periódica de doble seno, la caótica es la ecuación de Lorenz y la aleatoria es una representación gráfica del ruido blanco.
[86] *Ibíd.*, P.37

complejidad y las características particulares con el fin de darles el tratamiento correspondiente, (3) se aplican las técnicas de análisis de la dinámica, ya sea lineal o no-lineal correspondiente, dependiendo de si ésta tiene un comportamiento constante, periódica, cuasi periódica, caótica o aleatoria, y (4) se intenta recrear el comportamiento del sistema por medio de una modelización de las trayectorias con la técnica de predicción adecuada.

Lo anterior, siempre teniendo presente el alcance que el modelo tiene respecto a la realidad, principalmente en cuanto al plazo en el que las predicciones se apegan a la realidad y las posibles desviaciones que pudiesen influir en el comportamiento del sistema, derivado principalmente de perturbaciones internas.

4.3 Ruido y Teoría de los Errores

Hablando en términos generales, se llama error de una medida a la diferencia entre el valor obtenido y el valor real de la magnitud medida. Si, repitiendo la experiencia, medimos varias veces la misma magnitud, obtendremos cada vez un valor distinto y se nos plantea el problema de decidir cuál de todos los valores hallados es el que ofrece mayores garantías de exactitud.

Existen, entonces, distintos tipos de errores:

a) Sistemáticos: Son aquéllos que se reproducen constantemente y en el mismo sentido.
    a. Teóricos. Son introducidos por la existencia de condiciones distintas a las idealmente supuestas para la realización del experimento, mismas que inciden en la falta de exactitud de la observación.

b. Instrumentales. Son inherentes al propio sistema de medida, donde la falta de exactitud se presenta por la posibilidad de que instrumentos pudiesen estar mal calibrados o incluso, derivada de las limitaciones de los mismos.
c. Personales. Debidos a desviaciones en el observador, ya sean por limitaciones físicas o cognitivas, así como aquellos sesgos mencionados anteriormente, provenientes de la condición humana de dicho observador.

b) Accidentales: Son resultado de causas irregulares e impredecibles en cuanto a presencia y efectos, por lo que difícilmente pueden ser controlados.

Cabe mencionar, que los errores pueden ser medidos de distintas formas, las más comunes son: el error absoluto y el error relativo, magnitudes que nos ayudarán a considerar el grado de incidencia que dicha desviación del estado real en un fenómeno pueda afectar los resultados de algún modelo. La falta de exactitud en datos se debe en gran medida a errores en medición y observación, lo cual crea la incertidumbre y esta asimismo crea el llamado **ruido**. Lo anterior tiene como consecuencia la ineficiencia de los modelos, ya que si el *input* es inexacto, el *output* lo será aún más dada la **dependencia sensitiva** a las condiciones iniciales.

Teniendo lo anterior, a su vez, un efecto amplificado dado lo que se denomina el Efecto Burns "es una expresión que resume los efectos que la previsión incompleta y los modelos imperfectos suponen para los intentos de tomar decisiones racionalmente. Del uso de dichos modelos viene también la confusión tan usual entre los usuarios de ellos, de confundir al modelo con la realidad, siendo este sólo una simplificación de la misma. Los modelos matemáticos no gobiernan el mundo real.

4.4 Una alternativa: modelos caóticos deterministas y modelos no-lineales estocásticos

El uso de modelos no-lineales para la predicción de series de tiempo tiene una historia reciente. La comunidad dedicada a la estadística ha construido modelos estocásticos no-lineales aproximadamente desde la década de 1980. Por otro lado, los científicos dedicados al estudio de los sistemas dinámicos, motivados por los fenómenos caóticos, construyeron modelos determinísticos no-lineales desde 1987.[87] Derivado de lo anterior, y con el fin de conjuntar los beneficios de ambos modelos, Casdagli (1991) nos muestra un modelo que podría servir como puente entre el enfoque determinista y el estocástico.

Como se ha expuesto a lo largo de esta investigación, los fenómenos caóticos presentan un comportamiento irregular en las soluciones de ecuaciones deterministas de movimiento. Asimismo, se ha mencionado la necesidad de no-linealidad en las ecuaciones del sistema para generar soluciones caóticas.

También se ha mencionado el carácter aparentemente aleatorio presentado por este tipo de ecuaciones cuando son analizadas mediante herramientas o técnicas exclusivas de los sistemas lineales. Ha sido ampliamente expuesto el **Exponente de Lyapunov**, cuya importancia es crucial al servir como herramienta para cuantificar la divergencia exponencial entre las **trayectorias** de un sistema caótico, además de fungir como indicador para el proceso de transición derivado de una bifurcación, que puede a su vez, llevar al sistema a un atractor.

[87] CASDAGLI, M. "***Chaos and Deterministic versus Stochastic Nonlinear Modeling***" Santa Fe Institute, New Mexico, Estados Unidos. P.1 **[en línea]** Disponible en Internet: < http://www.santafe.edu/media/workingpapers/91-07-029.pdf>

La idea detrás de un algoritmo que introduzca el uso de técnicas no-lineales estocásticas en modelos caóticos deterministas tiene que ver con la construcción de aproximaciones lineales de la función en cuestión usando un número ***k*** variable de vecindades. Un número pequeño de ***k*** corresponde a una aproximación del modelado lineal, mientras que a valores grandes de ***k*** se ajusta a un modelo lineal estocástico autorregresivo.[88]

> *"The . . . goal of all theory is to make the . . . basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of . . . experience."*
>
> *—Albert Einstein, physicist*

[88] Para más información acerca del tema se sugiere recurrir al *paper* del citado autor Martin Casdagli: "Chaos and Deterministic versus Stochastic non-linear modeling", mismo que se encuentra en la citado en la referencia anterior.

5

CONCLUSIONES

A lo largo de la presente Tesis se presentaron argumentos que sugieren que el uso de técnicas procedentes de la Física tal como la Teoría del Caos y de las Ciencias Sociales y Neurológicas como la Economía del Comportamiento, pueden ayudarnos a comprender y proyectar el comportamiento de sistemas sociales y económicos, y fenómenos tales como el surgimiento de una crisis financiera o el seguimiento a un instrumento financiero, pero ¿realmente pueden la Teoría del Caos y la Economía del Comportamiento aplicarse al estudio de la dinámica del sistema económico y financiero internacional? Y si las crisis se originan en este contexto, ¿poseen las propiedades características de un sistema caótico, tales como la **aperiodicidad**, complejidad, sensibilidad a las condiciones iniciales, impredictibilidad y turbulencia?

Primero, me parece importante destacar la importancia que en los últimos años han tenido tanto la Teoría del Caos como la Economía del Comportamiento, así como el hecho de que merecen plenamente el nombramiento de "Ciencia", ya que poseen aquellas características que les permiten ser catalogadas como tal, presentan un esquema lógico, sistémico y coherente con reglas para clasificar y explicar hechos, fenómenos o procesos, conceptual y lógicamente interrelacionados. Ambas utilizan como fundamentos conocimiento plenamente aceptado en el círculo científico proveniente de la Neurociencia y las Matemáticas y la Física, por lo cual cada premisa planteada a lo largo de investigaciones bajo estos supuestos encuentra fundamentos sólidos y robustos.

Una de las más valiosas aportaciones de la Teoría del Caos a la Economía Financiera es la nueva estructura teórica y matemática que permite identificar mediante técnicas estadísticas y matemáticas adecuadas, patrones regulares donde se suponía un comportamiento aleatorio. Dichos patrones, con poder predictivo real, metodológicamente congruentes, vienen a romper con el paradigma lineal seguido por la Economía Financiera, mismo que, derivado de argumentos presentados a lo largo de esta Tesis, no es sostenible dada la no-linealidad y complejidad del sistema; además de que, como se ha planteado, las ganancias en los mercados financieros no ostentan una distribución normal, sino fractal con una varianza infinita. Además de que, en el largo plazo, los mercados maduros tienen una notable estabilidad.

Una buena parte de la literatura financiera asume la impredictibilidad de los retornos financieros debido a la **Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME)**. Sin embargo, hay evidencia contundente de la presencia de patrones predecibles en muchas de las series examinadas de forma empírica, patrones, que tiempo después Mandelbrot bautizó con el nombre de **fractales**.

Asimismo, la gran mayoría de la literatura de predictibilidad que existe se ha centrado en modelos de predicción lineales en media, como los modelos MA (*moving average* o promedio móvil), AR (*autorregresive* o autorregresivos) y ARMA (*autoregressive moving average* o autorregresivos con promedio móvil). A pesar de esto, la linealidad es un supuesto fuerte, dado que el predominio de los modelos lineales en la Economía no se debe en todos los casos al asumir que las teorías económicas sean intrínsecamente lineales, sino a que los modelos lineales son más sencillos.

El paradigma del comportamiento aleatorio e independiente en el tiempo que sostiene la teoría de la HME se nulifica, ya que si el mercado fuera aleatorio no seríamos capaces de demostrarlo. Un mercado aleatorio tendría una complejidad mayor a la nuestra, y de la propia definición de complejidad se deduce que una secuencia no puede generar una secuencia de mayor complejidad, lo cual implica que, si una persona deseara predecir el comportamiento de un mercado aleatorio, ese mercado tendría que ser menos complejo que la persona, contrario a lo que hemos supuesto. Incluso si el mercado no fuese aleatorio, existe la probabilidad de que sus regularidades sean tan complejas que se sitúen más allá de nuestros horizontes de complejidad, entendimiento y capacidad de cálculo.

Por el contrario, se explica al mercado como una serie de sucesos resultado a su vez de decisiones que deliberadamente toman los agentes que intervienen en los mercados, las cuales se encuentran sujetas a un comportamiento errático, no maximizador y sesgado. Entonces, el argumento más prominente en contra del uso de modelos en el área financiera proviene del impacto que tiene el comportamiento del ser humano en los fenómenos que se pretenden predecir.

La idea de que herramientas y métodos provenientes de la física y las matemáticas pueden ser utilizados para modelar el comportamiento del mercado financiero se ve dificultada por la presencia de variables humanas con libre albedrío, como consecuencia, errores en los resultados pueden surgir de dar el mismo tratamiento de sistemas físicos que responden a leyes bien definidas a dichos sistemas con características sociales. Entonces, el argumento más prominente en contra del uso de modelos en el área financiera proviene del impacto que tiene el comportamiento del ser humano en los fenómenos que se pretenden predecir, como Einstein dijo alguna vez: *"La física no puede predecir la locura humana"*. Por lo anterior, el comportamiento humano es difícil, e incluso imposible de modelar mediante fórmulas y leyes matemáticas y físicas en la actualidad. Sin embargo, el constante desarrollo técnico podría llevarnos a desarrollar herramientas que faciliten el proceso de predicción, incluso de sistemas con variables humanas inherentes.

Se ha demostrado que el sistema financiero presenta turbulencia, discontinuidad, **aperiodicidad** con su volatilidad, **bifurcaciones** y crisis cíclicas. Por lo cual, el tratamiento a fenómenos como los antes mencionados por parte de la Econometría crearía desviaciones respecto de la realidad. Lo anterior, consecuencia de que las relaciones entre variables que esta maneja son lineales o bien parten de la premisa de existencia de una perturbación estocástica en el sistema.

Por otro lado, partiendo de la no-linealidad se podrían generar nuevos modelos con estructuras fractales y caóticas para analizar las **probabilidades** en un mundo que puede cambiar de forma brusca cuando se rebasan ciertos niveles críticos. Aunque este enfoque no garantiza un control mejor de nuestro entorno, sin duda funcionará como una mejor y más completa representación del dinamismo de mundo.

Los conceptos de predicción o repetibilidad de un experimento adquieren nuevos aspectos cuando se analizan desde la óptica del Caos, se descubrió que con el pleno conocimiento de las reglas que rigen el sistema y sus condiciones iniciales, es posible hacer una predicción fiable, siempre y cuando se posea la capacidad de cálculo necesaria. Asimismo, se resalta la importancia de la sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que un cambio mínimo en las mismas desencadenará un alejamiento de trayectorias de forma exponencial creciente conforme las **iteraciones** del sistema se llevan a cabo.

Entonces, si bien son hasta cierto punto necesarias, las predicciones deben ser llevadas a cabo desde un punto de vista perspicaz y no profético, enfocado a entender la naturaleza del negocio y su valor intrínseco, dejando de lado los intentos en vano por adivinar el futuro. De esta forma aprovechamos el poder de la visión externa –es decir, las pruebas estadísticas– para perfeccionar nuestra visión interna o punto de vista.

Hemos vivido bajo la simplificación de la realidad, proveniente de la idea de modelar y predecir nuestra realidad. Sin embargo, en esta simplificación hemos perdido aspectos importantes para el estudio de los fenómenos naturales, físicos y sociales. Por ejemplo, la idea del uso de distribuciones de probabilidad como la normal desvía las predicciones al no modelar de forma correcta el comportamiento de los sistemas. También hemos olvidado que los sucesos inesperados, o cisnes negros ocurren con mayor frecuencia de la que contemplamos, justamente por el hecho de que ignoramos o desestimamos su probabilidad de ocurrencia.

Además, la dinámica de las bifurcaciones revela que los sistemas complejos tanto caóticos como ordenados, son imposibles de analizar si partimos de una reducción en partes, ya que las partes constantemente se pliegan unas dentro de otras mediante la iteración y la realimentación.

En los fenómenos caóticos, como se mencionó anteriormente, existe sensibilidad a las condiciones iniciales, pero como éstas nunca pueden ser conocidas con certidumbre, la predicción a mediano y largo plazo es imposible. Más aún, la base para la aplicación de los elementos y técnicas matemática presentadas en esta investigación, está constituida por las actitudes siempre cambiantes y a veces sospechosas de los inversionistas. Dado que los estados psicológicos son en gran medida imponderables, cualquier cosa que dependa de ellos es menos exacta de lo que parece. Sin embargo, la psicología del comportamiento es una ciencia que recientemente ha comenzado a ser explotada, por lo que no se descarta el desarrollo de técnicas que nos permita acercarnos más a la anhelada certeza.

Las matemáticas pueden ser exactas, pero los juicios, las suposiciones y las estimaciones en la que se basan sus aplicaciones son las responsables del sesgo sobre los resultados y las aplicaciones de los mismos. La predicción siempre estará en función de las estimaciones, expectativas, ilusiones y miedos colectivos. Entonces, el análisis del mercado desde un punto de vista objetivo, no podrá llevarnos a conocer el futuro, pero sí a crear posibles escenarios y así estar preparados para cada uno de ellos. No podemos saber lo que pasará mañana, pero la idea es eliminar los límites de nuestro conocimiento estando conscientes de dónde estamos parados –más aún si retomamos la idea de Schumpeter de los ciclos económicos– y los factores que pueden jugar a nuestra contra o a nuestro favor, y así estar preparados para tomar las oportunidades que el mercado nos brinde.

Es importante, estar conscientes del poco control que tenemos sobre las inversiones y sobre todo del riesgo implícito en ellas –la idea de que podemos cuantificar y manejar el riesgo es una de las grandes falacias de la economía moderna, podemos tomar ciertas decisiones, pero no debemos sobreestimar la influencia que podemos tener en el resultado. Por otro lado, debemos ser cuidadosos también con ideas demasiado optimistas acerca de nuestras inversiones o el confiar demasiado en nuestras capacidades, eso puede crear una ilusión provocada en la mayoría de las veces por el sistema somático, junto con su papel protagonista en la toma de decisiones de los seres humanos.

Es también importante centrarnos en la información más relevante, dado que nuestra capacidad de análisis tiene límites intrínsecos como el anclaje, la sobrecarga de información, la falacia narrativa y la tendencia a la confirmación, entre otros. Debemos aprender a abordar el análisis de la inversión desde un punto práctico, donde la información recabada nos ayude a crearnos un juicio de lo que significa para nosotros la inversión y nos brinde un panorama de lo que podemos hacer con ella, tal que no nos lleve a un punto como los antes planteados.

Se requiere de un nuevo paradigma que incorpore factores como el comportamiento de los agentes económicos en los mercados financieros, mismo que ha sido expuesto a lo largo de esta Tesis. Técnicas y herramientas alternas han dado como resultado nuevos modelos que incorporan el comportamiento del ser humano y el libre albedrío con el que fue dotado, así como sus incidencia en la respuesta de otros individuos participantes del mercado, entre ellos se planteó el *"SAPE: Sentiment Asset Princing Engine"*, el *"FEARS: Financial and Economic Attitudes Revealed by Search"* y una breve explicación de lo que sería amalgama entre modelos caóticos deterministas y modelos no lineales estocásticos.

Además, debería considerar incluirse en la formación de los economistas, financieros y demás agentes que intervengan en el mercado financiero activamente conocimientos con una intuición en dirección de la Física, ya que, como Descartes declaró y quedó demostrado a través de esta tesis: *"La metafísica es la raíz, la física es el tronco, y todo lo demás, las ramas"*.

Asimismo, la Economía debe de ser vista desde una perspectiva distinta, desechando el paradigma que nos ha acompañado durante muchos años, ya que, como Tetaz ha dicho:

“El verdadero triunfo de la nueva ciencia no se medirá por los premios Nobel que la economía sea capaz de obtener, ni por el caudal de citas bibliográficas de economistas destacados en prestigiosos journals, sino que estará vinculado con los usos efectivos que esta nueva disciplina genere… La economía dejará entonces de ser un juguete académico de poco poder de pronóstico para convertirse en un insumo fundamental, capaz de comprender y estimar las decisiones económicas del ser humano”.

La decisión final no existe, se ramifica en otras.” -Borges

6

GLOSARIO

Aleatoriedad.- Dinámica en la cual, por sus características, el estado futuro no está determinado por el estado actual. También se denomina "dinámica estocástica". *(Smith, L., 2007, P.247)*

Aperiódico.- califica la evolución de un sistema que regresa a su posición de equilibrio sin poder efectuar a una y otra parte de las mismas oscilaciones periódicas, estando su evolución fuertemente amortiguada. (*Elie Levy (2008) "Diccionario Akal de física" Ediciones Akal Madrid, España. P.57)*

Atractor.- Punto o conjunto de puntos en un **espacio de estados** al que otro conjunto de estados se acerca cada vez más a medida que son iterados hacia adelante. *(Smith, L., 2007, P.246)*

Atractor extraño.- atractor con una estructura fractal. Un atractor extraño puede ser caótico o no caótico. *(Smith, L., 2007, P.246)*

Autoorganización.- Orden espontáneo que surge en un sistema, cuando ciertos parámetros del mismo alcanzan valores críticos. Muchos sistemas que desarrollan transiciones a la autoorganización pueden también desarrollar transiciones al caos. (*Diccionarios Oxford Complutense, 2007, P.37)*

Autosimilitud.- la curva contiene copias a escala de sí misma.

Bifurcación.- Una bifurcación ocurre cuando un sistema dinámico modifica cualitativamente su comportamiento al variar el parámetro de control. Es importante, ya que con una bifurcación las propiedades locales de estabilidad de las singularidades cambian.

Caminata aleatoria.- Típicamente nombrado en términos matemáticos como "Movimiento Browniano", donde el pasado de una variable no es un factor determinante en el futuro de la misma.

Caos (definición matemática).- sistema matemático dinámico que es determinista, recurrente y muestra dependencia sensitiva respecto al estado inicial. *(Smith, L., 2007, P.247)*

Ciclo límite.- Es un atractor en sistemas dinámicos no-lineales que presenta órbitas o ciclos periódicos en el especio de fase.

Dependencia sensitiva.- la separación rápida y exponencial de promedio de estados cercanos con el paso del tiempo. *(Smith, L., 2007, P.247)*

Determinismo.- propiedad de un sistema dinámico, cuyo estado inicial define todos los estados futuros. Dicho sistema dinámico puede ser iterado sin recurrir a un generador de números aleatorios.

Dimensión fractal.- Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera. *(Mandelbrot, B., 2009, P.168)*

Efecto Mariposa.- Expresión que resume la idea de que una pequeña diferencia en el presente puede tener como resultado grandes diferencias en el futuro. *(Smith, L., 2007, P.247)*

Entropía.- Definido en su carácter más simple como el nivel de desorden que existe en un sistema.

Espacio de Fase.- espacio donde se encuentra la representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema dinámico. El espacio ordinario que habitamos tiene tres dimensiones, la superficie de una hoja tiene dos, y una línea, una dimensión. El espacio de fase agrega al espacio ordinario las velocidades, duplicando su dimensión, de modo que una mosca que vuela se representa como un punto móvil en un espacio de seis dimensiones: tres espaciales y tres de velocidades. Dos moscas que vuelan se representan también como un punto, pero en un espacio de doce dimensiones, seis por cada una. En el juego de billar si no consideramos las rotaciones, una bola sobre la mesa se describe en un espacio de fases de cuatro dimensiones, ya que la bola se mueve sobre un plano. (*Francisco Claro (2009) "De Newton a Einstein" Ediciones Universidad Católica de Chile P.63)*

Espacio de Estados.- (1) espacio en el cual cada punto especifica completamente el estado o la condición de un sistema dinámico. (Smith, L., 2007, P.247) (2) Es el conjunto de todos los estados posibles de un sistema dinámico. **(***[en línea]* < *http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/caosDeterminista.pdf*>

Estado Inicial.- P(0), es el estado del sistema en el instante temporal n = 0.

Exponente de Lyapunov.- Medida de la velocidad media con la cual se separan estados *infinitesimalmente* cercanos. Se denomina exponente porque es el logaritmo de la velocidad media, lo que facilita distinguir el crecimiento exponencial en promedio (mayor que cero) del decrecimiento exponencial promedio (negativo). *(Smith, L., 2007, P.248)*

Fractal.- (1) conjunto auto similar que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se examine. (2) curva o superficie generada por un proceso en el que se realizan subdivisiones sucesivas. Por ejemplo, la curva de un copo de nieve puede producirse comenzando por un triángulo equilátero, dividiendo cada segmento en tres segmentos. El segmento central es entonces reemplazado por dos segmentos iguales, que pueden formar los lados de un triángulo equilátero más pequeño. Esto da lugar a una figura estrellada de doce lados. La formación se lleva a cabo cuando se repite el proceso en cada uno de los triángulos que van formándose. En el límite, una figura fractal tiene una dimensión fraccionaria, es decir, no entera; como lo es por ejemplo una línea, cuya dimensión es uno, o una superficie, cuya dimensión es dos.

Grados de libertad.- número de parámetros independientes, necesarios para especificar la configuración de un sistema.

Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME).- Es una teoría que supone que los precios de los instrumentos financieros siguen una caminata aleatoria o movimiento browniano. Lo anterior tiene diversas implicaciones, tales como que se asuma que los rendimientos de los activos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID) y que el conocimiento de información privilegiada no permite obtener beneficios superiores a los esperados. *(Villagómez Bahena, Israel (TESIS), 2009, P. 7)*

Homotecia.- Es una transformación geométrica entre dos figuras en la que se verifican dos condiciones: (1) los puntos correspondientes están alineados con un punto fijo denominado centro de homotecia, y (2) el cociente de las distancias, de los puntos correspondientes, al centro de homotecia es constante y como consecuencia de estos, las rectas o segmentos homotéticos son paralelos.

Inversionistas racionales.- El inversionista racional desea activos que le den mayo rendimiento dado un nivel de riesgo, también se asume que es averso al riesgo. Dichos inversionistas requieren de eficiencia en el promedio de sus rendimientos, tomando en cuenta su varianza, y valúan sus rendimientos potenciales mediante la asignación de pesos probabilísticos distintos escenarios, lo cual les genera un rendimiento esperado. El riesgo se mide como la desviación estándar del rendimiento. *(Ojeda, R. (TESIS), 2004, P.6)*

Iteración.- aplicación de la regla que define a un mapa dinámico a sí misma.

Órbita/Trayectoria.- La trayectoria, u órbita, o recorrido, dado el estado inicial, es la sucesión de puntos correspondientes a los estados en cada instante ***n.*** Corresponde a la evolución del estado del sistema, y depende del estado inicial. ***[en línea]*** *<http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/caosDeterminista.pdf>*

Parámetro.- Cantidades, en nuestros modelos, que representan y definen determinadas características del sistema modelado; generalmente, los parámetros se mantienen fijos mientras el estado modelo evoluciona. *(Smith, L., 2007, P.249)*

Probabilidad.- Sea *A* un suceso en un espacio muestral. Sea *P(A)* la probabilidad del suceso A, es decir, la proporción de veces que el suceso *A* sucederá en ensayos repetidos de un experimento. *(Gujarati, D., 2009, P.802)*

Punto fijo.- Estado de un sistema dinámico que permanece estático; un punto estacionario cuyo valor futuro bajo el sistema es su valor actual. *(Smith, L., 2007, P.249)*

Ruido.- Incertidumbre observacional; la idea de que hay un valor "verdadero" que intentamos medir y de que lo intentos reiterados de hacerlo nos dan cifras cercanas al valor, pero no exactas. El ruido es a lo que culpamos de la inexactitud de nuestras mediciones. (*Smith, L., 2007, P.249)*

Serie de Tiempo.- Es una serie de observaciones que se consideran una representación de la evolución de un sistema en el tiempo. *(Smith, L., 2007, P.249)*

Sistema dinámico conservativo.- Sistema dinámico en el cual un volumen del espacio de estados no decrece al ser iterado hacia adelante. Estos sistemas no pueden tener atractores. *(Smith, L., 2007, P.250)*

Sistema dinámico disipativo.- Sistema dinámico para el cual, de promedio, el volumen del espacio de estados se reduce cuando se itera hacia adelante bajo el sistema. Aunque el volumen tenderá a cero, no necesariamente tiene que decrecer hasta un punto, y puede aproximarse a un atractor bastante complicado. *(Smith, L., 2007, P.250)*

Variable estado.- Son conocidas como variables estado aquellas variables, cuyos valores numéricos (en función del tiempo) describen el estado del sistema. Pueden ser pocas o muchas, aún infinitas. Si es una sola, el sistema se llama unidimensional; si son dos, bidimensional; si son infinitas, infinito-dimensional. ***[en línea]***
http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/caosDeterminista.pdf

7

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

1. Arahal, M., Berenguel, M., Rodríguez, F. (2006) ***Técnicas de predicción con aplicaciones en Ingeniería.*** Universidad de Sevilla. Sevilla
2. Borjón, J. J. (2002) ***Caos, orden y desorden: en el sistema monetario y financiero internacional: el caso de México.*** México. Plaza y Valdes Editores.
3. Briggs, J y F.D. Peat, (1990) ***Espejo y reflejo: del caos al orden.*** Barcelona. Gedisa.
4. Brock, W., Hsieh, D., LeBaron, B. (1991) ***Nonlinear dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence***. US: Massachusetts Institute of Technology.
5. Cambel, A. (1993) ***Applied Chaos Theory: A Paradigm for Complexity***. Academic Press.
6. Chorafas, D. (1994) ***Chaos Theory in the Financial Markets***. McGraw Hill.
7. Claro, F. (2009) **De Newton a Einstein y algo más**. Chile. Ediciones Universidad Católica de Chile.
8. Douglas, K., Elliott, E. (1997) ***Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications.*** US: University of Michigan Press.
9. Gleick, J. (2012) ***Caos: La creación de una ciencia***. España: Drakontos.
10. Mandelbrot, B., Hudson, R. (2010) ***Fractales y finanzas: Una aproximación matemática a los mercados.*** España: Tusquets Editores.
11. Hayles, N. K. (1993). ***La evolución del caos. El orden dentro del desorden en las ciencias contemporáneas***. Barcelona. Gedisa
12. Mailoc, M.; Illera, C. (2013) ***Invertir en Hedge Funds: Análisis de su estructura, estrategias y eficiencia.*** Madrid. Ediciones Díaz y Santos
13. Murphy, R. (2010) ***Chaos Theory; Two essays on market anarchy***. US: Mises Institute.
14. Paulos, J. (2009) ***Un matemático invierte en bolsa***. España. Tuquets editores.
15. Peters, E. (1994) ***Fractal market analysis: applying Chaos Theory to investment and economics.*** US: Wiley Finance Edition.
16. Peters, E. (1996) ***Chaos and Order in the Capital Markets: a New View of Cycles, Prices and Market Volatility***. US: Wiley Finance Edition.
17. Scheinerman, E. (2013) ***Invitation to Dynamical Systems.*** Nueva York, Estados Unidos. Departamento de Ciencias Matemáticas. Universidad Johns Hopkins.
18. Smith, L. (2001) ***Caos: Una breve introducción***. España: Alianza Editorial.

19. Strogatz, S. (2015) ***Nonlinear dynamcs and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering.*** Westview Press.
20. Taleb, N. (2013) ***Antifrágil: Las cosas que se benefician del desorden.*** México: Paidós.
21. Taleb, N. (2008) ***El Cisne Negro***. España: Paidós.
22. Tetaz, Martín. (2014) ***Psychonomics. La economía está en tu mente***. Argentina. Ediciones B.
23. Vaga, T. (1994) ***Profiting with Chaos: Using Chaos Theory for Market Timing, Sock Selection and Option Valuation.*** McGraw Hill.
24. Weatherall, James. (2013). ***The physics of Wall Street: A brief history of predicting the unpredictable.*** USA. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.
25. Ye, G. (2011) ***High Frequency Trading Models.*** John Wiley & Sons, Hoboken, New York.

TESIS

1. Espinosa Contreras, A. (2004) ***El caos y la caracterización de series de tiempo a través de técnicas de dinámica no-lineal.*** México, D.F.: Facultad de Ciencias.
2. Gómez Anaya, M. (1984) ***La econometría como instrumento de predicción empleada en el análisis de la economía mexicana***. México, D.F.: Facultad de Economía.
3. Herrera Aguilar, J. (1999) ***Estudio del caos en sistemas dinámicos discretos.*** México, D.F.: Facultad de Ciencias.
4. Márquez Rentería, L. (2014) ***Dinámica no lineal y rutas al caos***. México, D.F.: Facultad de Ciencias.
5. Rodríguez, R. (2013). ***El efecto mariposa dentro de la Teoría del Caos y su incidencia en la planeación estratégica de organizaciones.*** México, D.F., UNAM. Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración
6. Sosa Garza, C. (1998) ***Dinámica de poblaciones y caos.*** México, D.F.: Facultad de Ciencias.
7. Villagómez Bahena, J. (2009) ***Sistemas dinámicos no lineales aplicados al IPC e índices internacionales.*** México, D.F.: Facultad de Contaduría y Administración.

CIBEROGRAFÍA

1. ABHYANKAR, A.; COPELAND, L.; WONG, W. ***"Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: the S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100"***. Journal of Business and Economic Statistics. 1997.
2. BACCHETTA, P., MERTENS, E., VAN WINCOOP, E. ***Predictability in Financial Markets: What do survey expectations tell us?***
3. BOHDALOVÁ, M., GREUS, M. ***Markets, information and their fractal analysis***. Universidad de Comenius, Facultad de Administración. Slovak Republic.

4. BROOKS, C. ***"Lineal and non-linear (Non-) Forecastability of High-frequency Exchange Rates"*** Journal of Forecasting. 1997.
5. BUNIMOVICH, L. (1997) ***Non-equilibrium Statistical Mechanics and Ergodic Theory*** en "Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems" Cambridge Univ. Press.
6. CASDAGLI, M. ***Chaos and Deterministic versus Stochastic Nonlinear Modeling.*** Santa Fe Institute, New Mexico, Estados Unidos.
7. CATSIGERAS, E. ***La teoría matemática del caos determinista***. Instituto de Sistemas Dinámicos. 13 de octubre de 2000.
8. DA, Z., ENGELBERG, J., GAO, P. Oct 2014. ***The sum of all fears investor sentiment and asset prices***. Oxford Journals.
9. GIUDICE, V. ***Teorías de los ciclos económicos***. Instituto de Investigaciones Económicas, Facultad de Ciencias Económicas.
10. GUNDLACH, V. ***Chaos in random dynamical systems***. Instituto de Sistemas Dinámicos. Universidad de Bremen. Bremen, Alemania
11. HINICH, M., PATTERSON, D. "***Evidence of nonlinearity in daily stock returns"*** Journal of Business & Economic Statistics, Enero 1985, Vol. 3, No. 1. Estados Unidos.
12. HINICH, M.; PATTERSON, D.; BROCKETT, P. ***"Bispectral-Based Tests for the Detection of Gaussianity and Linearity in Time Series"*** Journal of the American Statistical Association. Septiembre 1988, Vol. 83, No. 403. Estados Unidos.
13. HSIEH, D. ***"Implications of nonlinear dynamics for financial risk management"*** Journal of Financial and Quantitative Analysis. Marzo 1993.
14. KOHERS, T. ***"Using Nonlinear Dynamics to Test For Market Efficiency Among the Major U.S. Stock Exchanges"*** The Quarterly Review of Economics and Finance. Summer 1997. Vol. 37, No. 2.
15. MORENO, M. ***Dimensión y conjuntos de Julia***. Ideas CONCYTEG. Año 2, Núm. 25, 14 de septiembre de 2007
16. NAWROCKI, D. ***Entropy, bifurcation and dynamc market disequilibrium***. The Financial Review. Mayo 1984.
17. NIEDERHOFFER, V. ***The life of Matther Fontaine Maury Osborne***. 28 de mayo del 2013
18. OLVER, P. ***Nonlinear Systems***. Universidad de Minnesota. 18 de octubre 2015
19. ÖZÜN, A. "***Modeling chaotic behaviours in financial markets"*** Journal of Istambul Kültür University. Febrero 2006.
20. SAMBRINO, M. ***Hiperbolicidad y estabilidad***. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Escuela Venezolana de Matemáticas. 9 de septiembre de 2009.
21. SORNETTE, D. ***Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises*** Departamento de Negocios, Tecnología y Economía. Zurich.
22. SPROTT, J.C. ***Strange Attractors***. Universidad de Wisconsin, Departamento de física. Invierno del 2008
23. VILCHEZ, Ma. L., VELASCO, F., GARCÍA, J. ***Bifurcaciones transcríticas y ciclos límites en un modelo dinámico de competición entre dos especias. Una aplicación a la pesquería de engraulis encrasicholus de la Región Suratlántica española***. Estudios de Economía

Aplicada. Vol. 20-III, 2002. P.651 Departamento de Economía General y Estadística. Universidad de Huelva. Universidad de Sevilla.

24. YORKE, J; LI, T. ***Period three implies chaos.*** The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (Dec., 1975)