



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

ESPARCIMIENTO DE UNA ONDA
ELECTROMAGNÉTICA ENFOCADA SOBRE UNA
ESFERA DE SÍLICE MICROMÉTRICA: SIMULACIÓN
NUMÉRICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Tecnología

PRESENTA:

Arturo González Suárez



DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Oscar G. Rodríguez Herrera

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Remy F. Avila Foucat

Querétaro, Qro., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado de esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Arturo GONZÁLEZ SUÁREZ, Querétaro, 2017.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Resumen

Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada

Nano-Biotecnología

Licenciatura en Tecnología

Esparcimiento de una onda electromagnética enfocada sobre una esfera de sílice micrométrica: Simulación numérica

por Arturo GONZÁLEZ SUÁREZ

En la actualidad, la manipulación de objetos micrométricos es de gran utilidad en los campos de la medicina y la biología. Dicha manipulación se puede llevar a cabo utilizando pinzas ópticas, que se producen cuando un haz láser es enfocado en una pequeña región del espacio y se genera una fuerza capaz de atrapar partículas micrométricas.

En los experimentos realizados con pinzas ópticas en el Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada se ha observado el atrapamiento de múltiples esferas micrométricas de sílice. Las esferas atrapadas forman cadenas largas (con decenas de esferas) que, hasta donde sabemos, no han sido reportadas en la literatura. Hasta ahora, no se cuenta con una explicación satisfactoria sobre la formación de estas cadenas. Este proyecto pretende dar una aproximación a la explicación de dicho fenómeno, mostrando un modelo simplificado del esparcimiento de un haz enfocado al interactuar con una esfera de sílice.

El haz enfocado se simuló a partir de la suma coherente de ondas planas enfocadas por un sistema aplanático. El esparcimiento del haz se calculó a partir de la interacción de un conjunto de ondas planas propagándose en diferentes direcciones con la esfera. El esparcimiento de cada onda plana se calculó utilizando la teoría de esparcimiento de Mie. Los campos calculados se compararon con resultados obtenidos usando un método teórico para el cálculo del esparcimiento de Mie con haces enfocados propuesto por Nicole J. Moore y Miguel A. Alonso.

La distribución del haz esparcido por la esfera que se presenta es similar a la de una lente convergente, donde el máximo de irradiancia se localiza en la vecindad inmediata posterior de la esfera. Se piensa que esta distribución de irradiancia en el exterior de la esfera es responsable de capturar a una segunda esfera, produciendo el mecanismo para la formación de las cadenas de esferas observadas en el laboratorio.

Agradecimientos

A mi gordita (Nora Ilithya) por ser uno de los principales motores que me ayudaron a seguir adelante y a esforzarme día con día y por cederme su tiempo de recreación para la finalización de este trabajo.

A mi mamá la cual siempre me apoyo en cualquier decisión que tomé y siempre me alento a seguir esforzándome para conseguir mis objetivos. Por demostrarme que los límites uno solo se los impone y uno es que los rompe en base a trabajo constancia.

A mi Papá por ser una fuente de consejos útiles y estar siempre a lado de mi mamá y mi hermana. A mi hermana Brisa por ser mi hermana y por mostrarme que las oportunidades hay que tomarlas y no preguntar.

A mi Tía Yolanda, por apoyarme en el trancurso de la licenciatura. A mis tios Gustavo, Miguel Ángel y Víctor por brindarme la oportunidad trabajar con ellos cada sábado, en especial a mi tío Miguel que me dio hospedaje cuando empecé la universidad. Muchas gracias por el apoyo.

A Meme por enseñarme que estudiando se pueden lograr los objetivos que uno se planteé y por siempre estar al pendiente de mí. A mi "primich"(Memo) por siempre haberme apoyado, corregido y guiado en muchos aspectos de mi vida, por mostrarme el camino del trabajo duro y siempre apoyarme. En general a los 2 por ser ejemplos a seguir y en especial porque siempre han sido para mí como mis hermanos mayores.

A mis primos Gustavo y Jemail por siempre tener una pachanga a la cual asistir. A Luis Ángel (Luigi) por la amistad que siempre hemos tenido y ser como un hermano para mí.

Y finalmente a la madre de mi hija a Mayra la mujer que más me ha tolerado y que ha aceptado cada loca decisión que ha pasado por mi cabeza. La mujer con la cual he compartido risas, enojos, llantos y vivencias. que me han hecho crecer en todos los aspectos imaginables de mi vida. Te doy las gracias por haberme dado una hija maravillosa y principalmente por dejarme ser parte de su vida.

Reconocimientos

Al Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada.

A mi tutor el Dr. Oscar G. Rodríguez Herrera, por haberme enseñado, motivado y guiado para la realización de este proyecto.

A mi cotutor el Dr. Remy F. Avila Foucat por haberme guiado la mayor parte de mi licenciatura y por su asesoría durante la las estancias de investigación, así como su apoyo en foros de ciencia y tecnología.

A todos los integrantes del laboratorio de Nano-Bio-Óptica por su ayuda en experimentos y cultivos de células. En especial a la Dra. Luz Ma. López Marín.

A los profesores de la Licenciatura en Tecnología por haber participado en mi formación.

A mis sinodales el Dr. Neil C. Bruce Davidson, el Dr. Jorge Luis Domínguez Juárez y especialmente al Dr. Miguel de Icaza Herrera, por haberme orientado e introducido en el mundo de la Física y por ser mi asesor de beca durante la estancia de mi licenciatura.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Declaración de autenticidad | III |
| Resumen | V |
| Agradecimientos | VII |
| Reconocimientos | IX |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Objetivos | 5 |
| 2.1. Objetivo general | 5 |
| 2.2. Objetivos particulares | 5 |
| 2.3. Hipótesis | 5 |
| 2.4. Justificación | 6 |
| 3. Teoría de esparcimiento de Mie | 7 |
| 3.1. Teoría de esparcimiento de Mie para una onda plana | 7 |
| 4. Onda Enfocada | 21 |
| 4.1. Onda enfocada | 21 |
| 4.2. Simulación de un campo enfocado | 24 |
| 4.3. Esparcimiento del campo enfocado | 26 |
| 4.4. Simulación de un campo enfocado usando el método de Moore y Alonso | 28 |
| 4.5. Comparación de los campos enfocados | 32 |
| 4.6. Comparación de esparcimiento de los campos enfocados | 39 |
| 4.7. Simulación del esparcimiento de un campo enfocado por pinzas ópticas | 41 |
| 5. Conclusiones y perspectivas | 45 |
| Bibliografía | 49 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Representación gráfica de las fuerzas que interactúan en un atrapamiento óptico. | 2 |
| 1.2. Esquema representativo de las pinzas ópticas. | 2 |
| 1.3. Representación gráfica del equilibrio de fuerzas que interactúan en un atrapamiento óptico estable. | 3 |
| 1.4. Fotografía donde se observa el fenómeno del atrapamiento óptico. El eje de propagación está ligeramente inclinado, lo que permite ver la sombra de las esferas atrapadas sucesivas a la esfera que se encuentra en la zona focal. | 4 |
| 3.1. Esparcimiento por una esfera: notación. | 8 |
| 3.2. Coeficientes ${}^e A_l$ y ${}^m A_l$ | 16 |
| 3.3. Coeficientes ${}^e B_l$ y ${}^m B_l$ | 16 |
| 3.4. Construcción de una onda plana de 1064 nm con 20, 40 y 60 términos de la serie. | 17 |
| 3.5. Representación del campo incidente. | 17 |
| 3.6. (A) Irradiancia de la componente r del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (B) Fase de la componente r del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (C) Irradiancia de la componente θ del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (D) Fase de la componente θ del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (E) Irradiancia total del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. | 18 |
| 3.7. (A) Irradiancia de la componente r del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (B) Fase de la componente r del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (C) Irradiancia de la componente θ del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (D) Fase de la componente θ del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (E) Irradiancia total del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. | 20 |
| 4.1. Diagrama representativo de un sistema con aberración esférica. | 21 |

| | |
|---|----|
| 4.2. Diagrama representativo de un sistema con aberración cromática. | 22 |
| 4.3. Diagrama representativo de un sistema con aberración de coma. | 22 |
| 4.4. Diagrama representativo de un sistema aplanático. | 23 |
| 4.5. Ángulo de la AN. | 23 |
| 4.6. Comparación de la irradiancia normalizada obtenida con los diferentes tipos de interpolación usados para la generación de un campo enfocado (en el vacío), por un sistema aplanático con AN = 0.5 y 1000 ondas incidentes a diferentes ángulos. | 25 |
| 4.7. Irradiancia normalizada de un campo enfocado (en el vacío), con un sistema aplanático para AN = 0.5 para 100, 500, 1000 y 2000 ondas planas incidentes a diferentes ángulos. | 25 |
| 4.8. Irradiancia normalizada del campo enfocado en agua, por un sistema aplanático con AN = 0.5 con 1000 ondas incidentes a diferentes ángulos. | 26 |
| 4.9. Irradiancia de los campos incidente, esparcido y total provenientes de un campo enfocado con AN=0.5 (en el vacío) al ser esparcidos por una esfera de sílice de 2500 nm de diámetro. (A) Irradiancia del campo enfocado. (B) Irradiancia del campo esparcido. (C) Irradiancia total. | 27 |
| 4.10. Construcción de un campo enfocado escalar mediante un desplazamiento complejo de multipolos con 12 términos de la serie y $q_z = 12$. (A) Irradiancia del foco complejo. (B) Fase del foco complejo. | 30 |
| 4.11. Construcción del esparcimiento de un campo enfocado complejo escalar esparcido por una esfera de 2500 nm mediante un desplazamiento complejo de multipolos con 12 términos de la serie y $q_z = 12$. (A) Irradiancia del campo enfocado. (B) Irradiancia del campo esparcido. (C) Irradiancia del campo total. | 31 |
| 4.12. Irradiancias normalizadas de campos enfocados en el vacío, por sistemas aplanáticos con 500 ondas incidentes a diferentes ángulos. | 33 |
| 4.13. Irradiancias normalizadas de campos enfocados en el vacío, mediante un desplazamiento complejo de multipolos sobre el eje z , donde la componente q_z toma valores de $1, 4, \dots, 4n, \dots, 40$. | 33 |
| 4.14. Ancho total a altura media de las irradiancias normalizadas de campos enfocados por un sistema aplanático con 500 ondas planas incidentes a diferentes ángulos dados por $m\pi/60$ donde m va de 1 a 30. | 34 |

| | |
|---|----|
| 4.15. FWHM de las irradiancias normalizadas de campos complejos escalares enfocados para $q_z = 1, \dots, n, \dots, 40$ | 34 |
| 4.16. Ajuste de curva para el FWHM de las irradiancias normalizadas de campos complejos escalares enfocados para $q_z = 1, \dots, 40$ | 35 |
| 4.17. Ajuste de curva para el FWHM de las irradiancias normalizadas de campos enfocados por un sistema aplanático con 500 ondas planas incidentes a diferentes ángulos dados por $m\pi/60$ donde m va de 1 a 30. | 36 |
| 4.18. Apertura numérica como función del parámetro q_z del desplazamiento complejo de un campo escalar enfocado. | 36 |
| 4.19. Simulación de campos enfocados para una AN de 0.3. (A) Irradiancia del campo enfocado por un foco complejo con 12 términos de la serie y $q_z = 31.22k$. (B) Irradiancia del campo enfocado a partir de la suma coherente de 500 ondas planas a diferentes ángulos. | 37 |
| 4.20. Irradiancias de los campos enfocados a lo largo del eje z para $x = 0$ | 38 |
| 4.21. Diferencia de las irradiancias de los campos enfocados en el eje z a lo largo del eje x | 38 |
| 4.22. Simulación del esparcimiento de campos enfocados por una AN de 0.3. (A) Irradiancia del esparcimiento de un campo enfocado por un foco complejo con 24 términos de la serie y $q_z = 31.22k$. (B) Irradiancia del esparcimiento de un campo enfocado a partir de la suma coherente de 500 ondas planas a diferentes ángulos. | 39 |
| 4.23. Irradiancias de los campos enfocados en el eje x a lo largo del eje z | 40 |
| 4.24. Simulación de un campo enfocado esparcido por una esfera de sílice de 2500 nm suspendida en agua. (A) Irradiancia normalizada del campo enfocado. (B) Irradiancia normalizada del campo esparcido. (C) Irradiancia normalizada del campo total. | 42 |
| 4.25. Irradiancia del campo total a lo largo del eje z | 42 |

Lista de Abreviaciones

| | |
|--------------|---|
| CFATA | Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada |
| FWHM | Full Width at H alf M aximum |
| AN | Apertura Numérica |

Constantes Físicas

Velocidad de la Luz $c_0 = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (exacto)

Lista de Símbolos

| | | |
|-----------|--------------------------------------|---------------------|
| ω | frecuencia angular | rad |
| λ | longitud de onda | m |
| k | frecuencia espacial (número de onda) | rad m ⁻¹ |
| n | índice de refracción | |

A "Nona"
a mis padres
a mi familia y amigos

1 | Introducción

Las pinzas ópticas son una herramienta moderna en la que, mediante la interacción no mecánica de un rayo láser fuertemente enfocado, se ejerce una fuerza de atracción que permite la libre manipulación de partículas u objetos tales como células, bacterias, virus y ADN, entre otros. La manipulación óptica permite atrapar objetos dentro del rango de los nanómetros a los micrómetros.

En la actualidad las pinzas ópticas son usadas principalmente en campos como la biología, la biotecnología y la medicina, en las que son usadas para atrapar, mover, estirar y/o torcer objetos microscópicos sin la necesidad de interactuar mecánicamente con ellos, evitando así el riesgo de dañar dichos objetos durante su manipulación [1].

Los principios físicos de este instrumento están basados en el desarrollo de la teoría electromagnética de Maxwell y la Mecánica Cuántica. En 1873 James Clerk Maxwell logró demostrar teóricamente que la luz está constituida por ondas electromagnéticas que poseen la capacidad de ejercer fuerzas sobre los objetos en los que inciden. La presión de radiación generada sobre cualquier partícula se puede calcular a partir de las ecuaciones de Maxwell. Más adelante, con los trabajos de Einstein, se demostró que la luz, bajo ciertas circunstancias, también se comporta como un flujo de partículas (fotones) y que también ejercen presión sobre la materia. Tales aportaciones ayudaron a demostrar que la luz en su forma corpuscular u ondulatoria tiene un momento lineal que al cambiar produce fuerzas sobre los objetos. Estos efectos no fueron estudiados hasta la llegada del láser y gracias al trabajo de Arthur Ashkin, que en 1970 demostró que dicha fuerza era capaz de interactuar con objetos de tamaño micrométrico.

La demostración de Ashkin fue producto de la interacción de un láser de He-Ne enfocado en una esfera de látex. En su experimento original, Ashkin observó que la esfera se aceleraba en dirección del haz, como lo había predicho con sus cálculos teóricos. A la fuerza responsable de la aceleración de la partícula se le denominó Fuerza de Dispersión. Junto con esta fuerza, se observó que también existía otra fuerza que movía las partículas en dirección a la cintura del haz. A esta otra fuerza se le conoció como fuerza de gradiente, ya que proviene de la distribución de la intensidad de luz [2, 3]

y su magnitud es proporcional al gradiente de la intensidad luminosa. Fue hasta 1986 que Ashkin y sus colaboradores probaron que se podían atrapar partículas micrométricas con un láser en dirección longitudinal y transversal, como se puede observar en la figura 1.1, que muestra las fuerzas que interactúan en el atrapamiento. Este suceso fue el inicio de las pinzas ópticas.

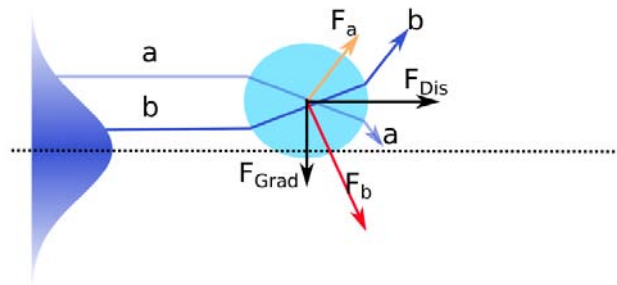


FIGURA 1.1: Representación gráfica de las fuerzas que interactúan en un atrapamiento óptico.

Un equipo de pinzas ópticas como el presentado en la figura 1.2, consta de un láser que al encenderse emite un haz formado por fotones que se propagan en una trayectoria rectilínea. Al momento de que los fotones chocan con algún objeto físico pueden ocurrir fenómenos como esparcimiento, refracción o reflexión que provocan cambios en la rapidez y la dirección de la luz [4]. Este cambio en el momento lineal de los fotones genera fuerzas que actúan sobre el objeto en el que incide la luz. En una posición de equilibrio, donde las fuerzas de gravedad, esparcimiento de luz y de gradiente se anulan, la partícula se dirige a la zona de máxima intensidad focal del láser [5] como se muestra en la figura 1.3, donde se observa que la posición de equilibrio en un atrapamiento óptico ocurre cuando el eje óptico de la propagación del láser enfocado coincide con el centro de la esfera [6].

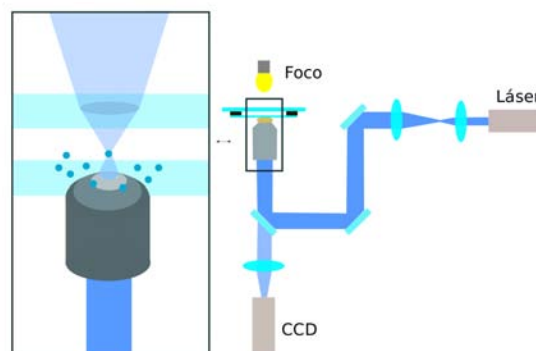


FIGURA 1.2: Esquema representativo de las pinzas ópticas.

En el Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada (CFATA) se ha desarrollado un equipo de pinzas ópticas que ha sido utilizado en experimentos para la manipulación de esferas de sílice, células de Embrión de Riñón Humano (HEK por sus siglas en inglés) y bacterias. En el atrapamiento de esferas de sílice fue común observar que se podían atrapar dos o más objetos con un solo haz de luz. Este fenómeno nos permitió observar esferas de sílice atrapadas que formaban una cadena de cuentas, como se muestra en la figura 1.4. Tal fenómeno ha sido reportado en la literatura pero escasamente estudiado [7, 8].

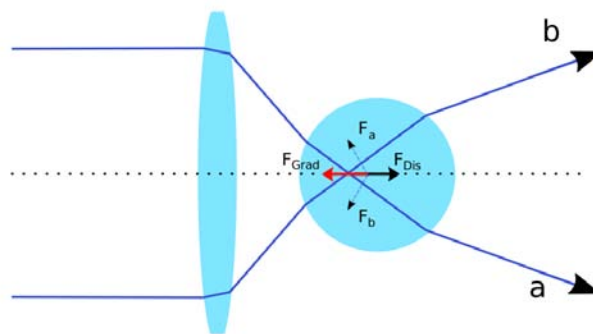


FIGURA 1.3: Representación gráfica del equilibrio de fuerzas que interactúan en un atrapamiento óptico estable.

Posiblemente, una de las preguntas más interesantes que surgen al conocer el fenómeno del múltiple atrapamiento es: ¿cuál es el número de partículas que se puede atrapar con un solo haz y cuáles son los factores principales? La respuesta a esta pregunta no es trivial y está relacionada con la interacción entre la luz enfocada y las partículas que se pretende atrapar. Otro factor importante es el índice de refracción de las partículas, en nuestro caso esferas de sílice con un índice de refracción de 1.52. Con estas partículas, se han observado cadenas de más de diez partículas atrapadas con un solo haz de luz.

El trabajo en esta Tesis contribuirá a la comprensión del fenómeno, ya que se obtendrá una simulación de las pinzas ópticas en un caso ideal. Es decir, la simulación se hará con una esfera homogénea e isotrópica, a la cual se le incidirá una onda enfocada por una lente aplanática. Cabe señalar destacar que la selección de una lente aplanática es porque esta lente no tiene ni aberración cromática, no esférica, ni coma. Otro detalle para la simulación es que, dado que los experimentos que se han realizado con una longitud de onda del láser de 1064 nanómetros para esferas atrapadas con un diámetro de 2500 nanómetros, es apropiado utilizar la teoría de dispersión de Mie, en las que las dimensiones de las partículas no son despreciables en comparación con la longitud de onda de la radiación.

La descripción de los fenómenos de esparcimiento que se producen en una

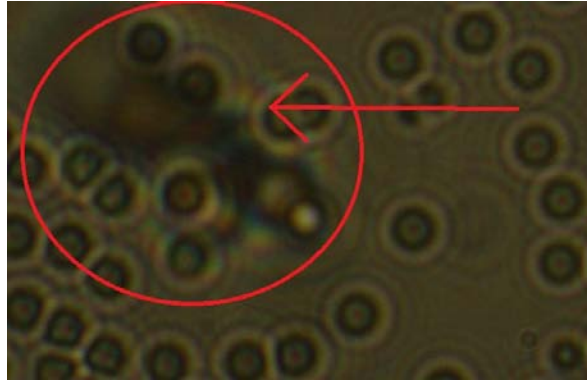


FIGURA 1.4: Fotografía donde se observa el fenómeno del atrapamiento óptico. El eje de propagación está ligeramente inclinado, lo que permite ver la sombra de las esferas atrapadas subsiguientes a la esfera que se encuentra en la zona focal.

partícula esférica, isótropa y homogénea, iluminada por ondas planas homogéneas, fue dada de manera independiente por Lorenz en 1890 y por Mie en 1908. En esas descripciones las dimensiones de las partículas no son despreciables en comparación con la longitud de onda de la radiación y sus propiedades de dispersión dependen de su tamaño, forma e índice de refracción [9].

El cálculo del esparcimiento de una onda plana que incide en una esfera se basa en la descomposición de la onda electromagnética en sus componentes r , θ y ϕ , para poder aplicar separación de variables en las ecuaciones de Maxwell. Para resolver las ecuaciones es necesario conocer las condiciones de continuidad en la superficie de la partícula y resolver los potenciales de Debye, cuyas soluciones están dadas por funciones especiales definidas en coordenadas esféricas. El vector de posición \mathbf{r} se define respecto a un sistema de coordenadas esféricas situado en el centro de la partícula, donde la onda plana incidente se propaga en la dirección del eje z con una polarización lineal respecto al plano XY [10].

2 | Objetivos

2.1. Objetivo general

Simular el esparcimiento de una onda electromagnética enfocada que incide en una esfera de sílice a través de la Teoría de esparcimiento de Mie.

2.2. Objetivos particulares

- Simular una onda plana y mediante la superposición de ondas planas incidentes a diferentes ángulos, aproximar una onda enfocada por una lente aplanática.
- Mediante la solución analítica de la teoría de Mie, simular el esparcimiento de una onda plana producido por una esfera de sílice homogénea e isotrópica.
- Simular el esparcimiento de una onda enfocada mediante la suma coherente de ondas planas incidentes a distintos ángulos y esparcidas por una esfera de sílice homogénea e isotrópica.
- Realizar una comparación del esparcimiento obtenido con la solución analítica propuesta por Moore y Alonso [11, 12], obtenida con un frente de onda producido por un foco complejo.

2.3. Hipótesis

El esparcimiento de una onda electromagnética enfocada producido por una esfera de sílice calculado mediante la suma coherente de ondas planas esparcidas, es comparable con la solución analítica propuesta en la literatura por Moore y Alonso [11, 12]. Dicho esparcimiento de un campo enfocado produce una distribución de luz con un máximo local posterior a la esfera y es similar a la de un campo enfocado. Esta distribución de campo esparcido produce un gradiente de irradiancia que puede ser utilizado para capturar sucesivamente otra esfera.

2.4. Justificación

La caracterización de los fenómenos de esparcimiento que se producen en una partícula esférica, isótropa y homogénea es de relevancia para poder encontrar el modelo físico del encadenamiento óptico, o múltiple atrapamiento óptico, observado en experimentos de pinzas ópticas realizados en el Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada de la UNAM Campus Juriquilla, el cual puede tener varias aplicaciones en la rama de la manipulación micrométrica.

3 | Teoría de esparcimiento de Mie

3.1. Teoría de esparcimiento de Mie para una onda plana

Las bases de la teoría electromagnética del esparcimiento de una onda monocromática por una esfera homogénea de cualquier diámetro en un medio homogéneo fueron dadas en 1908 por Gustav Mie. Posteriormente, Peter Debye presentó una solución equivalente para resolver este problema por medio de un análisis de las fuerzas mecánicas sobre la esfera ejercidas por la luz. En este capítulo se da una breve recopilación del análisis realizado en el libro de Max Born y Emil Wolf llamado "Principles of Optics"[10]. Para llegar a la formulación propuesta por Mie es necesario buscar la solución a las ecuaciones de Maxwell que describen el campo electromagnético que resulta del esparcimiento de una onda monocromática que incide en una esfera con propiedades físicas diferentes a las del medio. Dado que se tiene una simetría esférica, el sistema de coordenadas esférico facilita el desarrollo de las ecuaciones y la evaluación de las condiciones de frontera necesarias para calcular los campos eléctrico y magnético.

Para iniciar nuestra discusión de la formulación propuesta por Mie se considerará el esparcimiento en el plano de polarización de la onda plana por una esfera dieléctrica de radio a inmersa en un medio dieléctrico homogéneo, es decir, un medio en el que no hay variaciones de presión ni densidad. Asimismo, consideraremos que las propiedades físicas de la esfera y el medio no cambian con el tiempo. En este caso, las ecuaciones de Maxwell que incluyen derivadas temporales de los campos se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -k_1 \mathbf{E}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = k_2 \mathbf{H}, \quad (3.1b)$$

donde

$$k_1 = \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) = i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right),$$

$$k_2 = \frac{i\omega}{c} = i \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$k^2 = -k_1 k_2.$$

En las ecuaciones anteriores, ω es la frecuencia angular de la onda monocromática, σ es la conductividad del medio, λ es la longitud de onda en el vacío y ϵ es la permitividad eléctrica. Estas ecuaciones son similares para la esfera y el medio, pero de aquí en adelante se denotarán con un superíndice I para el medio y II para la esfera. En ambos casos la conductividad es nula ya que tanto el medio como la esfera son no conductores, es decir $\sigma^I = \sigma^{II} = 0$. Para realizar el análisis consideremos un sistema de coordenadas con el origen situado en el centro de la esfera y una onda plana que se propaga en la dirección z linealmente polarizada en la dirección x , como se muestra en la figura 3.1. En este sistema, las componentes del campo son

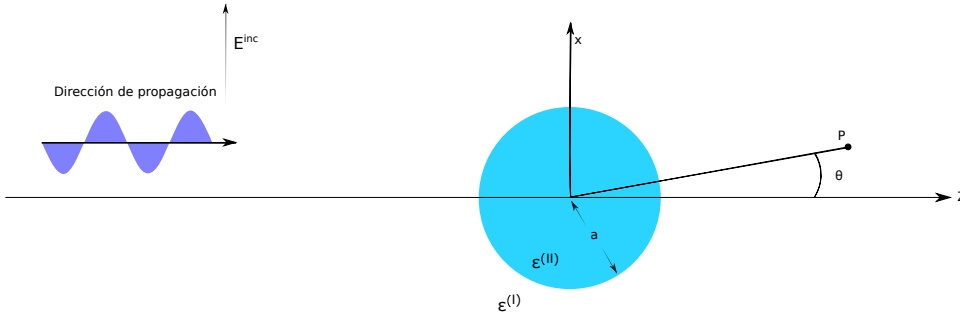


FIGURA 3.1: Esparsamiento por una esfera: notación.

$$E_x^{inc} = e^{izk_2^I}, H_y^{inc} = i \frac{k^I}{k_2^I} e^{izk_2^I}, E_y^{inc} = E_z^{inc} = H_x^{inc} = H_z^{inc} = 0. \quad (3.2)$$

Las condiciones de frontera son que las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} deben ser continuas a través de la superficie de la esfera, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{tang}^I &= \mathbf{E}_{tang}^{II} \\ \mathbf{H}_{tang}^I &= \mathbf{H}_{tang}^{II} \end{aligned} \right\} \text{ en } r = a. \quad (3.3)$$

Además del campo incidente (\mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc}) y el campo dentro de la esfera (\mathbf{E}^d , \mathbf{H}^d) hay un campo esparsado o difractado alrededor de la esfera (\mathbf{E}^s , \mathbf{H}^s) de manera que el campo total dentro y fuera de la esfera debe satisfacer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^s \quad \text{fuera de la esfera,} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^d \quad \text{dentro de la esfera.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

En coordenadas esféricas, la ecuación 3.1a se puede escribir de la siguiente manera:

$$-k_1 E_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial (r H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial \phi} \right), \quad (3.5a)$$

$$-k_1 E_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r H_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right), \quad (3.5b)$$

$$-k_1 E_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right). \quad (3.5c)$$

Ecuaciones similares se pueden encontrar para el campo magnético usando la ecuación 3.1b. En estas coordenadas las condiciones de frontera en la superficie de la esfera son:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^I &= E_\theta^{II}, E_\phi^I = E_\phi^{II}, \\ H_\theta^I &= H_\theta^{II}, H_\phi^I = H_\phi^{II}, \end{aligned} \right\} \text{ para } r = a. \quad (3.6)$$

La solución a las ecuaciones 3.5a, 3.5b y 3.5c se puede escribir como la superposición de dos campos linealmente independientes (${}^e\mathbf{E}$, ${}^e\mathbf{H}$) y (${}^m\mathbf{E}$, ${}^m\mathbf{H}$), tales que:

$$\begin{aligned} {}^e E_r &= E_r, {}^e H_r = 0, \\ {}^m E_r &= 0, {}^m H_r = H_r. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por las ecuaciones anteriores tenemos que $H_r = {}^e H_r = 0$ en las ecuaciones 3.5a, 3.5b y 3.5c. Al sustituir estos resultados en las ecuaciones que representan las componentes del campo magnético se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r {}^e H_\theta) = -\frac{k_1}{\sin \theta} \frac{\partial {}^e E_r}{\partial \phi}, \quad (3.8a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r {}^e H_\phi) = \frac{k_1}{\sin \theta} \frac{\partial {}^e E_r}{\partial \theta}. \quad (3.8b)$$

Los campos antes mencionados deben satisfacer la relación $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, que proviene de la segunda ecuación de Maxwell y establece la no existencia de monopolos magnéticos.

La solución de los campos ${}^e E$ y ${}^e H$ con campos magnéticos radiales evanescentes es llamada *onda transversal eléctrica* y su similar con el campo eléctrico ${}^m E$, ${}^m H$ es llamada *onda transversal magnética*. Ambos modos pueden ser obtenidos a partir de potenciales escalares conocidos como potenciales de Debye (${}^e\Pi$, ${}^m\Pi$). Esto es debido a que dichos campos pueden ser representados en términos del gradiente de un escalar, es decir,

$${}^e E_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad {}^e E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (3.9)$$

donde U puede ser escrito como:

$$U = \frac{\partial (r^e \Pi)}{\partial r}. \quad (3.10)$$

Siguiendo un procedimiento similar para el potencial magnético de Debye, y sustituyéndolo en las ecuaciones 3.5a, 3.5b y 3.5c, se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones para el campo eléctrico

$$E_r = {}^e E_r + {}^m E_r = \frac{\partial^2 (r^e \Pi)}{\partial r^2} + k^2 {}^e \Pi, \quad (3.11a)$$

$$E_\theta = {}^e E_\theta + {}^m E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^e \Pi)}{\partial r \partial \theta} + k_2 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (r^m \Pi)}{\partial \phi}, \quad (3.11b)$$

$$E_\phi = {}^e E_\phi + {}^m E_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r^e \Pi)}{\partial r \partial \theta} - k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial (r^m \Pi)}{\partial \theta}, \quad (3.11c)$$

donde ambos potenciales ${}^e \Pi$ y ${}^m \Pi$ son soluciones de la ecuación

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0. \quad (3.12)$$

La ecuación 3.12, conocida como la ecuación de Helmholtz, describe cómo una onda electromagnética como la luz, tiende a propagarse en el espacio. Las condiciones de frontera siguen siendo las mismas, es decir, las componentes tangenciales del campo magnético y eléctrico deben ser continuas en la superficie de la esfera. Para resolver la ecuación diferencial se puede usar separación de variables y representar cualquiera de los potenciales ${}^m \Pi$ y ${}^e \Pi$ como el siguiente producto

$$\Pi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (3.13)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.12, se encuentra que las ecuaciones a resolver son de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 (rR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right) rR = 0, \quad (3.14a)$$

$$\sin \theta \left(\frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (3.14b)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d^2 \phi} + \beta \Phi = 0. \quad (3.14c)$$

La solución a la ecuación 3.14c es de la forma

$$\Phi = a_m \cos (m\phi) + b_m \sin (m\phi), \quad (3.15)$$

donde m es un entero. Para la ecuación 3.14b se pueden realizar las sustituciones de $\xi = \cos \theta$ y $\alpha = l(l+1)$, dando como resultado la ecuación

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right\} \Theta = 0, \quad (3.16)$$

que tiene como solución las funciones asociadas a Legendre

$$\Theta = P_l^m(\xi) = P_l^m(\cos \theta).$$

Estas funciones se desvanecen idénticamente si $|m| > l$. Por lo tanto, para cada l , m solo toma los valores

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

Al reescribir la ecuación 3.14a y sustituyendo

$$kr = \rho, \quad R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} Z(\rho),$$

se obtiene la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \left(1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2}{\rho^2} \right) Z = 0,$$

que tiene como solución a las siguientes funciones

$$\zeta_l(\rho) = c_l \psi_l(\rho) + d_l \chi_l(\rho), \quad (3.17)$$

donde ψ_l y χ_l son las funciones de Riccati-Bessel, que están definidas de la siguiente manera

$$\psi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho), \quad \chi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(\rho).$$

En las ecuaciones anteriores, $J(\rho)$ es la función de Bessel de primer tipo y $N(\rho)$ es la función de Neumann. La función de Bessel del primer tipo está definida en cualquier punto del dominio de ρ , incluyendo el origen. Por otro lado la función $N(\rho)$ tiene una singularidad en $\rho = 0$, donde se vuelve infinita. Por lo tanto, podemos utilizar la función de Bessel, pero no la función de Neumann, para representar el campo dentro de la esfera.

Entonces, la solución a la ecuación 3.12 es de la forma:

$$r\Pi = r \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Pi_l^{(m)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{c_l \psi(kr) + d_l \chi_l(kr)\} \{P_l^m(\cos \theta)\} \{a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi\}. \quad (3.18)$$

Ahora debemos de determinar los valores de las constantes a_m , b_m , c_l y d_l de forma tal que satisfagan las condiciones de frontera. Para esto es necesario poder expresar el campo incidente, refractado y esparcido en términos de ${}^m\Pi$ y ${}^e\Pi$. Los potenciales de Debye del campo incidente se pueden escribir de la siguiente manera:

$$r^e\Pi^{inc} = \frac{1}{k^{(I)2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(I)}r) P_l^1(\cos \theta) \cos \phi, \quad (3.19a)$$

$$r^m\Pi^{inc} = \frac{1}{k^{(I)2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{k^{(I)}}{k_2^{(I)}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(I)}r) P_l^1(\cos \theta) \sin \phi. \quad (3.19b)$$

Como se mencionó anteriormente, dentro de la esfera el potencial Π^d debe ser escrito usando solo la función de Bessel, dado que la función de Neumann tiene una singularidad en el origen. Por lo tanto, el potencial de Debye dentro de la esfera es de la siguiente forma:

$$r^e\Pi^d = \frac{1}{k^{(II)2}} \sum_{l=1}^{\infty} {}^e A_l \psi_l(k^{(II)}r) P_l^1(\cos \theta) \cos \phi, \quad (3.20a)$$

$$r^m\Pi^d = \frac{i}{k^{(II)2} k_2^{(II)}} \sum_{l=1}^{\infty} {}^m A_l \psi_l(k^{(II)}r) P_l^1(\cos \theta) \sin \phi. \quad (3.20b)$$

Para el caso del potencial que describe el campo esparcido Π^s es apropiado describirlo con las funciones de Bessel y de Neumann, siendo estas funciones las que lo describen

$$r^e\Pi^s = \frac{1}{k^{(I)2}} \sum_{l=1}^{\infty} {}^e B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(I)}r) P_l^1(\cos \theta) \cos \phi, \quad (3.21a)$$

$$r^m\Pi^s = \frac{i}{k^{(I)2} k_2^{(I)}} \sum_{l=1}^{\infty} {}^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(I)}r) P_l^1(\cos \theta) \sin \phi. \quad (3.21b)$$

Los coeficientes a_m, b_m, c_l y d_l se encuentran a partir de resolver las condiciones de frontera

$$\frac{\partial}{\partial r} \{r ({}^e\Pi^{inc} + {}^e\Pi^s)\}_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} \{r {}^e\Pi^d\}_{r=a}, \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \{r ({}^m\Pi^{inc} + {}^m\Pi^s)\}_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} \{r {}^m\Pi^d\}_{r=a}, \quad (3.22b)$$

$$k_1^{(I)} \{r ({}^e\Pi^{inc} + {}^e\Pi^s)\}_{r=a} = k_1^{(II)} = \{r {}^e\Pi^d\}_{r=a}, \quad (3.22c)$$

$$k_2^{(I)} \{r ({}^m\Pi^{inc} + {}^m\Pi^s)\}_{r=a} = k_2^{(II)} = \{r {}^m\Pi^d\}_{r=a}. \quad (3.22d)$$

Estas ecuaciones solo se pueden satisfacer si $a_1 = b_1 = 0$ en los términos de las expansiones para los potenciales Π^{inc} y Π^s que son de la forma 3.18.

Al sustituir las ecuaciones 3.19, 3.20 y 3.21 en las ecuaciones 3.22 obtenemos las siguientes relaciones para los coeficientes ${}^eA_l, {}^mA_l, {}^eB_l$ y mB_l

$${}^eB_l \frac{1}{k^{(I)}} \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)}a) + \frac{1}{k^{(I)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l'(k^{(I)}a) = \frac{1}{k^{(II)}} {}^eA_l \psi_l'(k^{(II)}a), \quad (3.23a)$$

$${}^mB_l \frac{1}{k_2^{(I)}} \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)}a) + \frac{1}{k_2^{(I)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l'(k^{(I)}a) = \frac{1}{k_2^{(II)}} {}^mA_l \psi_l'(k^{(II)}a), \quad (3.23b)$$

$${}^eB_l \frac{1}{k_2^{(I)}} \zeta_l^{(1)}(k^{(I)}a) + \frac{1}{k_2^{(I)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(I)}a) = \frac{1}{k_2^{(II)}} {}^eA_l \psi_l(k^{(II)}a), \quad (3.23c)$$

$${}^mB_l \frac{1}{k^{(I)}} \zeta_l^{(1)}(k^{(I)}a) + \frac{1}{k^{(I)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(I)}a) = \frac{1}{k^{(II)}} {}^mA_l \psi_l(k^{(II)}a). \quad (3.23d)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentran las siguientes expresiones para los coeficientes de la expansión en serie de los potenciales

de Debye

$${}^e B_l = i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{k_2^{(I)} k^{(II)} \psi'_l(k^{(I)} a) \psi_l(k^{(II)} a) - k_2^{(II)} k^{(I)} \psi'_l(k^{(II)} a) \psi_l(k^{(I)} a)}{k_2^{(I)} k^{(II)} \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} a) \psi_l(k^{(II)} a) - k_2^{(II)} k^{(I)} \psi'_l(k^{(II)} a) \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} a)}, \quad (3.24a)$$

$${}^m B_l = i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{k_2^{(I)} k^{(II)} \psi_l(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(II)} a) - k_2^{(II)} k^{(I)} \psi'_l(k^{(I)} a) \psi_l(k^{(II)} a)}{k_2^{(I)} k^{(II)} \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(II)} a) - k_2^{(II)} k^{(I)} \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} a) \psi_l(k^{(II)} a)}, \quad (3.24b)$$

$${}^e A_l = -k^{(II)} k_2^{(II)} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \dots \frac{\zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} a) \psi_l(k^{(II)} a) - \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(I)} a)}{k^{(I)} k_2^{(II)} \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(II)} a) - k^{(II)} k_2^{(I)} \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(II)} a)}, \quad (3.24c)$$

$${}^m A_l = -k^{(II)} k_2^{(II)} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \dots \frac{\zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} a) \psi_l(k^{(II)} a) - \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(I)} a)}{k^{(II)} k_2^{(I)} \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(II)} a) - k^{(I)} k_2^{(II)} \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} a) \psi'_l(k^{(II)} a)}. \quad (3.24d)$$

Ahora que ya conocemos los coeficientes para el potencial de Debye del campo (${}^e B_l$, ${}^m B_l$) se pueden obtener las componentes del campo eléctrico espacido por la esfera. Dichas componentes son:

$$E_r^s = \frac{\cos \phi}{(r k^{(I)})^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) {}^e B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \quad (3.25a)$$

$$E_{\theta}^s = -\frac{\cos \phi}{r k^{(I)}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ {}^e B_l \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta - \dots \right. \\ \left. i^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\}, \quad (3.25b)$$

$$E_{\phi}^s = -\frac{\sin \phi}{r k^{(I)}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ {}^e B_l \zeta_l^{(1)'}(k^{(I)} r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} - \dots \right. \\ \left. i^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(I)} r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right\}. \quad (3.25c)$$

De manera similar, se puede usar el potencial de Debye dentro de la esfera (ecuaciones 3.20) para calcular las componentes correspondientes del campo eléctrico. Dichas componentes para el campo dentro de la esfera, es decir, para $r < a$, son:

$$E_r^d = \frac{\cos \phi}{(r k^{(II)})^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) {}^e A_l \psi_l(k^{(II)} r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \quad (3.26a)$$

$$E_{\theta}^d = -\frac{\cos \phi}{rk^{(II)}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ e A_l \psi_l'(k^{(II)}r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta - \dots \right. \\ \left. i^m A_l \psi_l(k^{(II)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\}, \quad (3.26b)$$

$$E_{\phi}^d = -\frac{\sin \phi}{rk^{(II)}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ e A_l \psi_l'(k^{(II)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} - \dots \right. \\ \left. i^m A_l \psi_l(k^{(II)}r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right\}. \quad (3.26c)$$

Finalmente, también podemos calcular las componentes del campo incidente, que son:

$$E_r^{inc} = \frac{\cos \phi}{(rk^{(I)})^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} (2l+1) \psi_l(k^{(I)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \quad (3.27a)$$

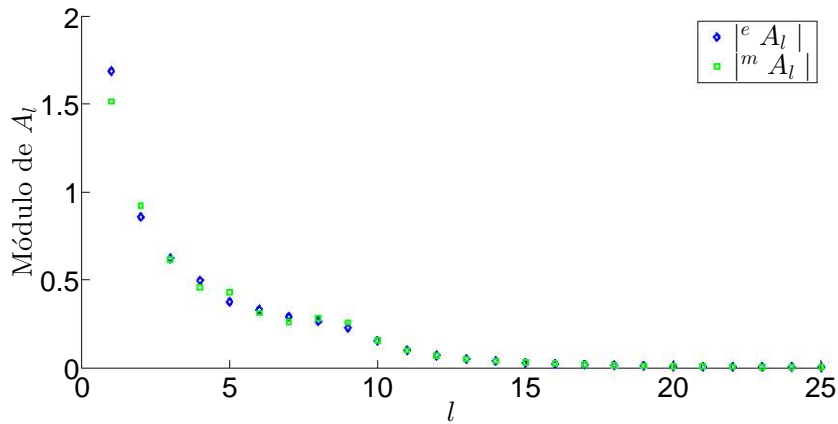
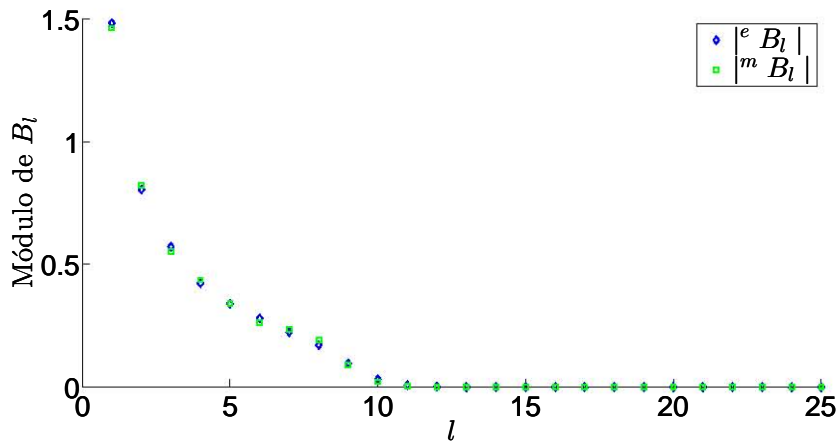
$$E_{\theta}^{inc} = -\frac{\cos \phi}{rk^{(I)}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2l+1}{l(l+1)} \right) \left(i^{l-1} \psi_l'(k^{(I)}r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta - \dots \right. \right. \\ \left. \left. i^{l+1} \psi_l(k^{(I)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right) \right\}, \quad (3.27b)$$

$$E_{\phi}^{inc} = -\frac{\sin \phi}{rk^{(I)}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2l+1}{l(l+1)} \right) \left(i^{l-1} \psi_l'(k^{(I)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. i^{l+1} \psi_l(k^{(I)}r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right) \right\}. \quad (3.27c)$$

Usando los resultados anteriores¹, se calculó el esparcimiento de una onda plana linealmente polarizada por una esfera de sílice. Dado que las componentes de los campos incidente, refractado y esparcido están dados como una suma infinita de términos, resultaría impráctico evaluar un número elevado de elementos de esta serie en computadora. Por lo tanto, es necesario determinar qué términos contribuyen en mayor parte a la evaluación de las series y así establecer en qué término truncar la evaluación de cada serie. Al realizar una evaluación finita de los coeficientes se obtuvieron los valores que toman ${}^e A_l$ y ${}^m A_l$, mostrados en la figura 3.2, y los valores de los coeficientes ${}^e B_l$ y ${}^m B_l$, que se muestran en la figura 3.3.

Como se puede ver en las figuras, los coeficientes que más contribuyen son aquellos con l menor o igual a 25. Sin embargo, en el ejemplo que se discute en esta sección, se usaron 80 elementos de las series correspondientes para calcular las componentes del campo eléctrico, ya que, lejos del origen, se notan imperfecciones en la onda plana dentro de la región del espacio modelado. En la figura 3.4 se muestra un campo de visión de $100k \times 100k$ construido con un número diferente de elementos de la serie alrededor del

¹Para ampliación del conocimiento consultar [10]

FIGURA 3.2: Coeficientes ${}^e A_l$ y ${}^m A_l$.FIGURA 3.3: Coeficientes ${}^e B_l$ y ${}^m B_l$.

centro de una esfera de 2500 nm de diámetro y k es el número de onda igual a $2\pi/1064 \text{ nm}^{-1}$.

La evaluación de los campos se realizó en una región cuadrada de $100k \times 100k$ alrededor del centro de la esfera, donde k es el número de onda de la onda incidente. Para la simulación se utilizaron datos similares a los componentes disponibles en el laboratorio de Nano-bio-óptica del Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada (CFATA), los cuales son un láser con una longitud de onda de 1064 nm en el vacío y esferas de sílice de 2500 nm de diámetro, donde el índice de refracción de las esferas es de 1.52 y el medio en el que están suspendidas es agua. En la figura 3.5 se muestra una representación de la irradiancia de la onda plana propagándose a lo largo del eje z , donde la línea azul representa el contorno de la esfera usada en la simulación. Para evaluar las funciones se utilizaron un total de 80 términos de la series infinitas que componen a los campos incidente y esparcido.

En la figura 3.6 se observa la irradiancia de las componentes del campo esparcido, en una región de 100k por 100k, donde $k = 2\pi n/1064 \text{ nm}^{-1}$

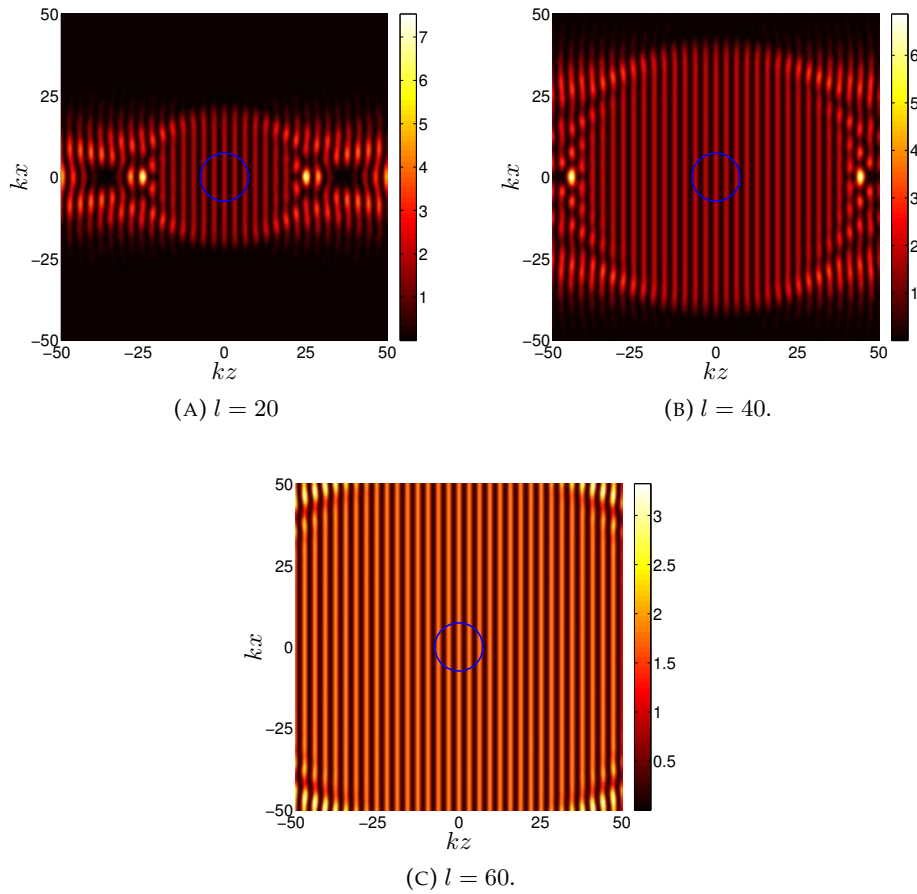


FIGURA 3.4: Construcción de una onda plana de 1064 nm con 20, 40 y 60 términos de la serie.

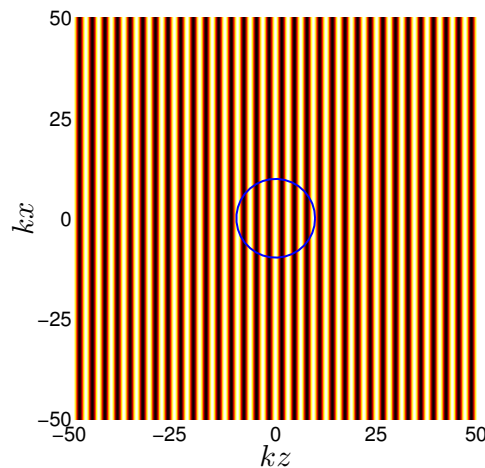


FIGURA 3.5: Representación del campo incidente.

y n es el índice de refracción del agua que es aproximadamente 1.33. La simulación se realizó en el plano XZ, por lo que la contribución de las componentes E_ϕ^{inc} , E_ϕ^d y E_ϕ^s es nula. Las imágenes mostradas son la irradiancia de las componentes r y θ en el plano $\phi = 0$.

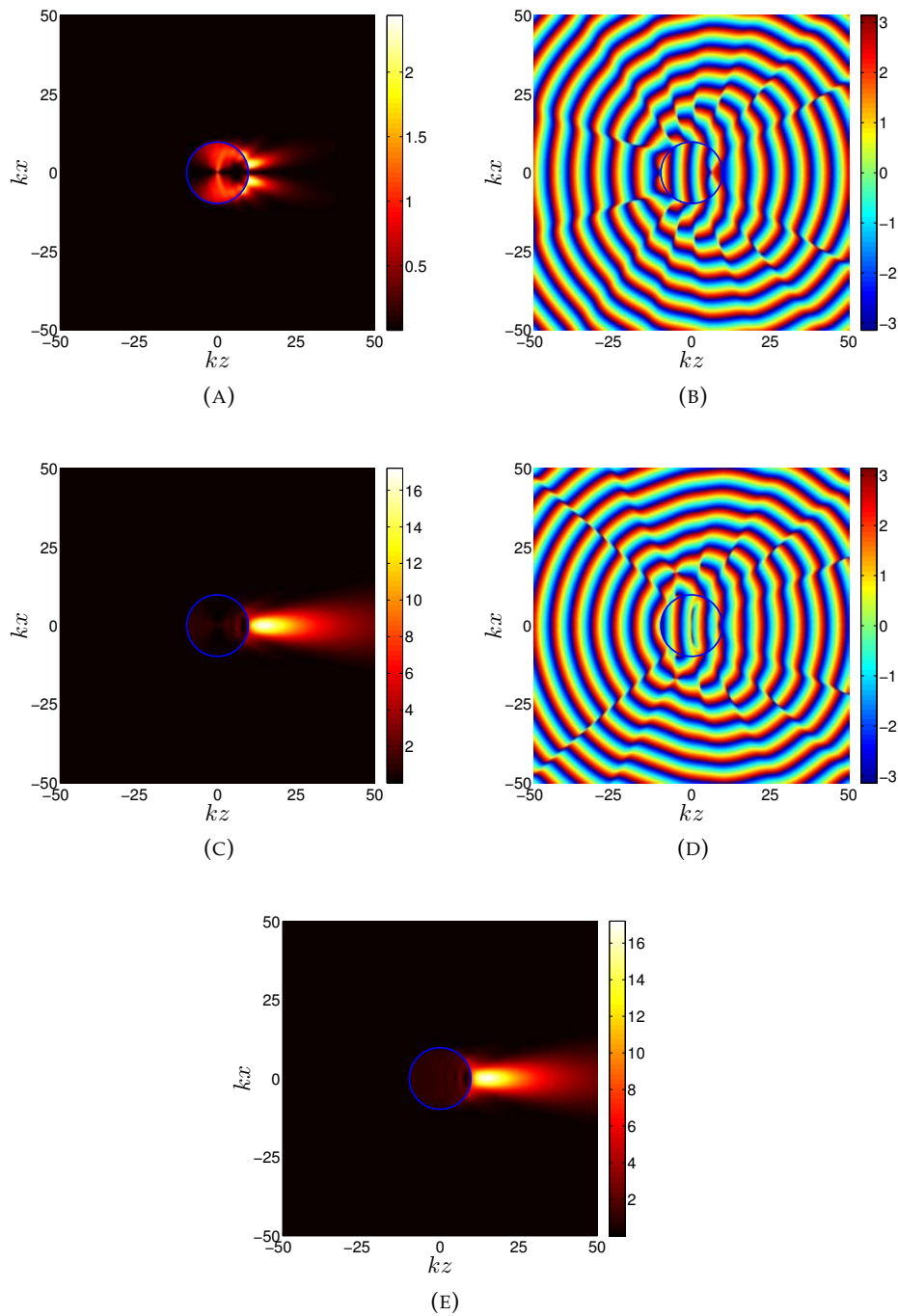


FIGURA 3.6: (A) Irradiancia de la componente r del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (B) Fase de la componente r del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (C) Irradiancia de la componente θ del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (D) Fase de la componente θ del campo esparcido dentro y fuera de la esfera. (E) Irradiancia total del campo esparcido dentro y fuera de la esfera.

En las figuras 3.7 se observa la irradiancia y la fase de las componentes r y θ de la suma del campo esparcido, el campo incidente y el campo dentro

de la esfera. La componente ϕ no es mostrada, ya que, tiene un valor nulo para el plano que se consideró. Las figuras que presentan la fase de las componentes muestran la continuidad de las componentes a lo largo del plano en el cual se muestra el espacimientto, donde la componente que más contribuye a la irradiancia del campo total es la componente azimutal.

Como se observa en las figuras 3.7, al ser iluminada una esfera con una onda plana, se produce una concentración de luz similar a la producida por una lente convergente y como consecuencia, la distribución de luz podría ser utilizada para capturar una segunda esfera en un atrapamiento óptico. Este efecto será discutido con más detalle en el siguiente capítulo.

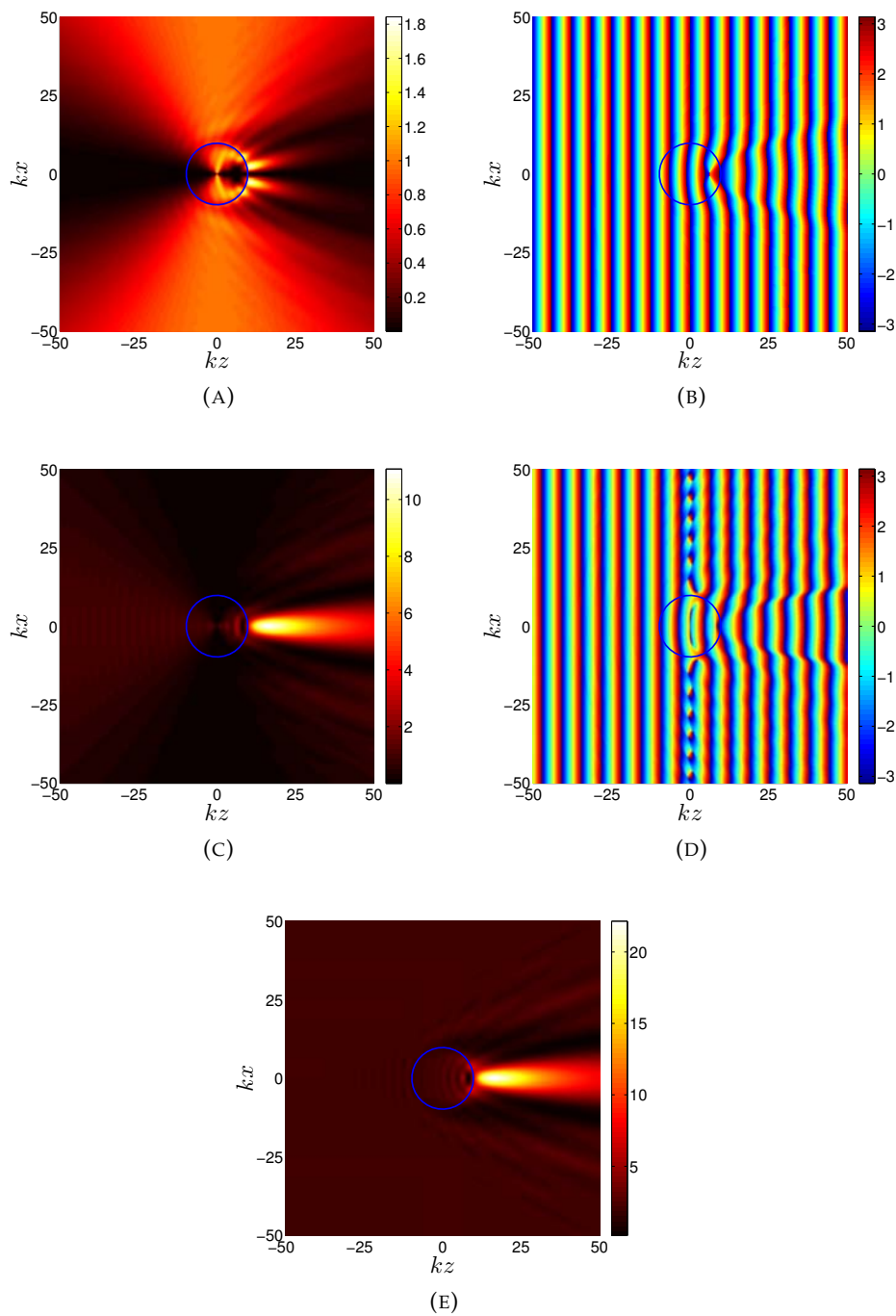


FIGURA 3.7: (A) Irradiancia de la componente r del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (B) Fase de la componente r del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (C) Irradiancia de la componente θ del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (D) Fase de la componente θ del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice. (E) Irradiancia total del esparcimiento de una onda plana por una esfera de sílice.

4 | Onda Enfocada

4.1. Onda enfocada

Como un siguiente paso en la comprensión de los fenómenos que ocurren en un atrapamiento óptico de objetos micrométricos en un sistema de pinzas ópticas, nos hemos dado a la tarea de analizar las propiedades del campo electromagnético enfocado cerca de la zona focal. Es decir, hemos analizado cómo es la distribución espacial del campo electromagnético en la vecindad del punto donde convergen los rayos para un láser enfocado con una lente convergente. En las pinzas ópticas el objetivo de microscopio actúa como la lente convergente, que enfoca la luz proveniente de un láser. Esta parte es esencial en un sistema de pinzas ópticas, ya que en la región focal de la lente el gradiente de irradiancia aumenta considerablemente, lo que posibilita el atrapamiento óptico [2].

En una lente se pueden presentar diferentes tipos de aberraciones. A continuación se definen algunas de ellas:

- **Aberración esférica:** Defecto en el cual los rayos monocromáticos que inciden paralelos al eje óptico pero a diferentes distancias del centro de la lente, se enfocan en diferentes puntos, como se muestran en la figura 4.1.

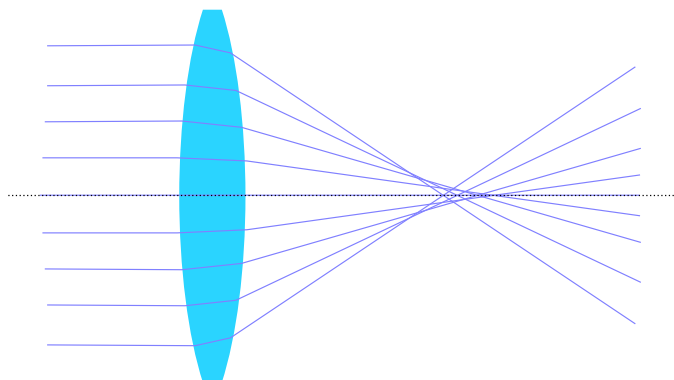


FIGURA 4.1: Diagrama representativo de un sistema con aberración esférica.

- **Aberración cromática:** Defecto en el cual los rayos de diferentes longitudes de onda que inciden paralelos al eje óptico, se enfocan a diferentes distancias de la lente, como se muestran en la figura 4.2.

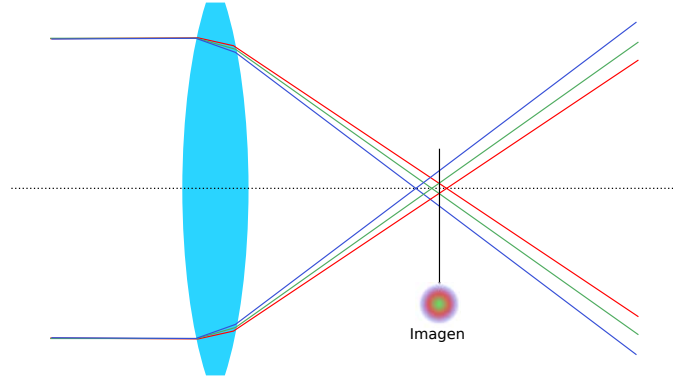


FIGURA 4.2: Diagrama representativo de un sistema con aberración cromática.

- **Aberración de coma:** Defecto en el cual los rayos que inciden y no son paralelos al eje óptico, son refractados a diferentes puntos mostrando una imagen en forma de coma, como se muestra en la figura 4.3.

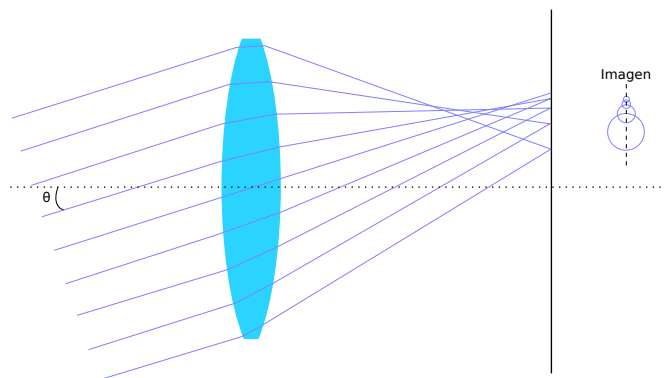


FIGURA 4.3: Diagrama representativo de un sistema con aberración de coma.

Para el análisis que se presenta aquí, se simulará una onda plana monocromática enfocada con un sistema aplanático, es decir, un sistema que no tiene ninguna de las aberraciones anteriores. Un sistema aplanático es aquél en el que se cumple la condición de los senos de Abbe, la cual es necesaria para que un sistema óptico pueda producir imágenes definidas dentro y fuera del eje óptico. Para un rayo paralelo al eje óptico incidente a una altura h un sistema aplanático refracta el rayo de manera que éste intersecta una esfera de radio f centrada en el foco, donde f es la distancia focal del sistema, a la misma altura h del rayo incidente, independientemente del ángulo entre el rayo enfocado y el eje óptico [13]. En la figura 4.4 se muestra un diagrama de un sistema aplanático. Para realizar el análisis de un campo

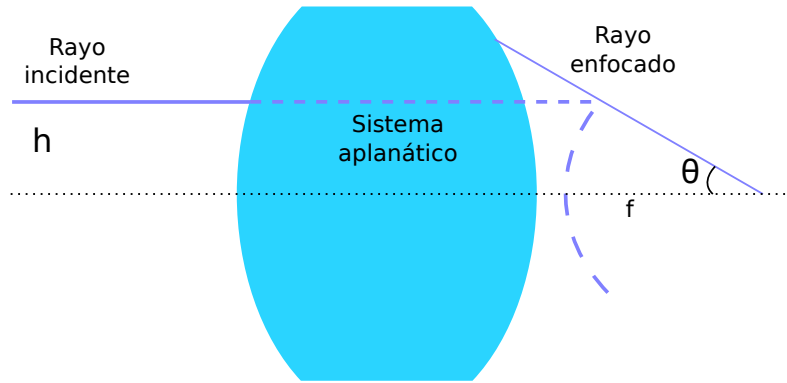


FIGURA 4.4: Diagrama representativo de un sistema aplanático.

electromagnético fuertemente enfocado es necesario usar la teoría vectorial de la difracción, ya que la teoría escalar sólo es aplicable cuando la Apertura Numérica (AN) es baja. La AN de un sistema óptico está definida de la siguiente manera:

$$AN = n \sin \theta_m \quad (4.1)$$

donde n es el índice de refracción del medio y θ_m es el semiángulo del máximo cono de luz que puede entrar o salir del sistema. En otras palabras, θ_m está dada por el ángulo del rayo marginal que entra en el sistema, como se puede ver en la figura 4.5. La teoría vectorial propuesta por Richards y

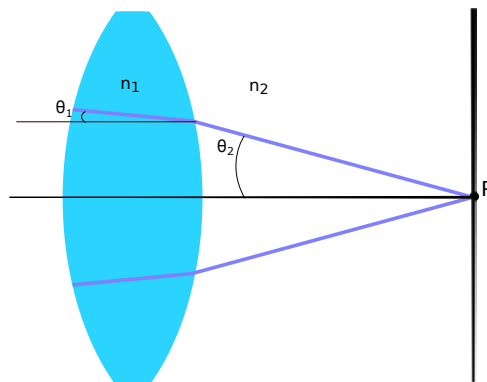


FIGURA 4.5: Ángulo de la AN.

Wolf describe el campo enfocado como la superposición coherente de ondas planas polarizadas linealmente, donde cada onda está relacionada con un rayo, que parte desde un punto en la pupila de salida del sistema y se dirige hacia el foco [10]. Cada onda es multiplicada por un factor de apodización, para garantizar la conservación de la energía dentro del sistema aplanático. En el caso de un sistema aplanático el factor es $\sqrt{\cos \theta}$, donde θ es el ángulo de cada rayo que sale del sistema medido con respecto al eje óptico. Una de las principales predicciones de la teoría vectorial es que la distribución de irradiancia en el plano focal ya no corresponde a un patrón

de Airy, como lo predice la teoría escalar, sino que es una distribución que depende tanto del estado de polarización de la luz incidente como de la AN de la lente.

4.2. Simulación de un campo enfocado

En el laboratorio de Nano-bio-óptica del Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada (CFATA), se cuenta con un equipo de pinzas ópticas con un láser de 1064 nm y un objetivo de inmersión en aceite con apertura numérica de 1.25, para aceite con un índice de refracción de 1.52. Como se discutió en el capítulo anterior se realizó la simulación de una onda plana enfocada con las propiedades antes descritas. Para esto se simuló el campo enfocado con diferente número de ondas planas incidentes para un sistema aplanático con una AN de 0.5, con el fin de observar la variación en la distribución espacial de irradiancia con respecto al número de ondas incidentes. Un resultado de la teoría escalar de la difracción, es que en el plano focal de una lente convergente se forma un patrón de Airy. Dicho patrón se puede usar como punto de referencia para medir la variación de la irradiancia en el plano focal con respecto al número de ondas superpuestas en un sistema con AN baja. En el capítulo anterior, se generó una onda con dirección de propagación en el eje z , que se hizo a partir de 80 elementos de las series que construyen las componentes r , θ y ϕ de la onda. Dichas series contienen funciones como las de Ricatti-Bessel y las de Neumann, donde cada elemento utiliza como argumento el ángulo θ . Si quisiéramos usar esta metodología para calcular en campo enfocado, tendríamos que realizar el cálculo para cada onda a un número infinito de ángulos de incidencia en una región dada. Sin embargo, esta metodología es poco práctica. Entonces, es necesario utilizar otro método para la creación de las ondas incidentes a diferentes ángulos. En este trabajo se propone como alternativa el rotar una onda plana y asegurarse de tener los valores del campo electromagnético en los mismos puntos mediante una interpolación. Los métodos de interpolación que se usaron en esta investigación fueron:

- Interpolación por el vecino más cercano: Considera el punto más cercano al punto (x, y) interpolado, es decir agranda el punto, dando un error de a lo sumo medio punto.
- Interpolación bilineal: Se consideran los 4 puntos más cercanos al punto (x, y) a interpolar y se realiza un promedio para obtener el valor interpolado, produciendo una disminución en la resolución.
- Interpolación bicúbica: Se consideran los 16 puntos más cercanos al punto (x, y) a interpolar, el valor interpolado se obtiene a partir de

una función polinómica bicúbica, dando algunas veces valores mayores que el rango de los valores originales.

Se realizaron simulaciones con las interpolaciones antes mencionadas [14], donde se incluyó el factor de apodización para considerar la conservación de energía en nuestro sistema. En la figura 4.6 se presentan secciones transversales de las distribuciones del campo enfocado en el plano focal a lo largo del eje x , para una AN de 0.5 y 1000 ondas incidentes (con una longitud de onda de 1064 nm en el vacío), obtenidas con los diferentes métodos de interpolación.

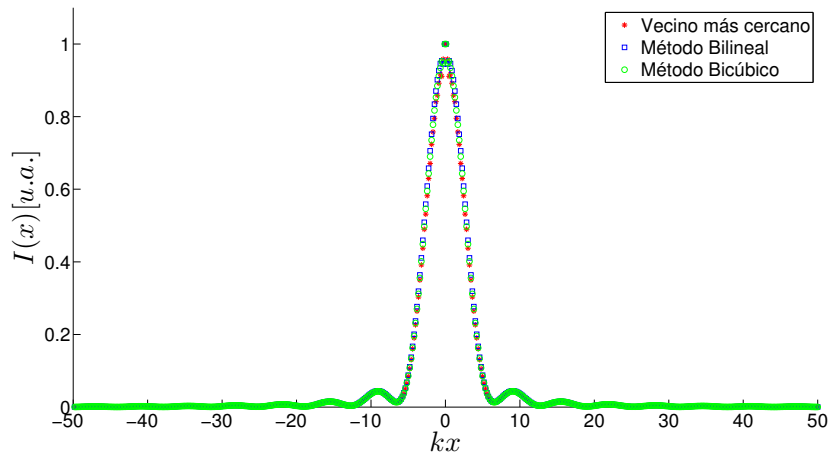


FIGURA 4.6: Comparación de la irradiancia normalizada obtenida con los diferentes tipos de interpolación usados para la generación de un campo enfocado (en el vacío), por un sistema aplanático con AN = 0.5 y 1000 ondas incidentes a diferentes ángulos.

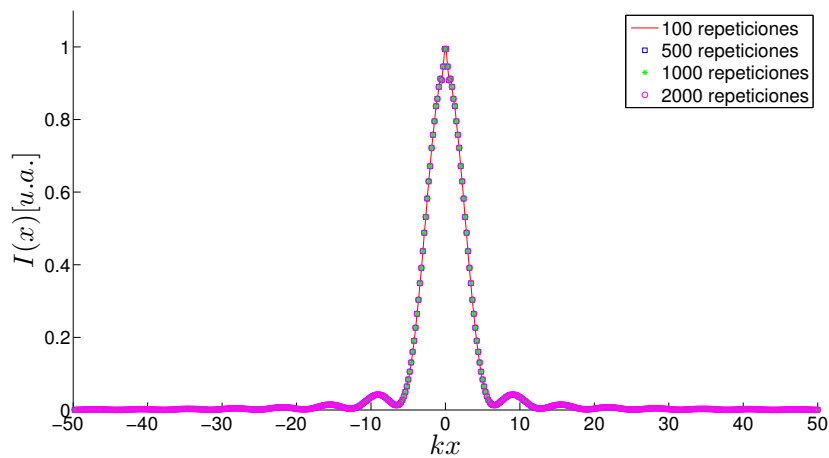


FIGURA 4.7: Irradiancia normalizada de un campo enfocado (en el vacío), con un sistema aplanático para AN = 0.5 para 100, 500, 1000 y 2000 ondas planas incidentes a diferentes ángulos.

En la figura 4.6 se puede observar que no hay gran diferencia entre las diferentes interpolaciones. Por lo tanto, se optó por el método del vecino más cercano, ya que éste método es el más rápido en el procesamiento de las simulaciones. Otro punto a considerar fue la selección del número de ondas incidentes para generar el campo enfocado, es decir, cuántas ondas superpuestas se necesitan para simular el campo enfocado. Dado que, un campo enfocado en teoría está constituido por una infinidad de ondas incidentes con una minúscula diferencia en el ángulo de incidencia, se realizaron pruebas con 100, 500, 1000 y 2000 ondas planas incidentes con propiedades idénticas a las simulaciones anteriores.

En la figura 4.7 se presentan las distribuciones de irradiancia a lo largo del eje x para campos enfocados creados a partir de 100, 500, 1000 y 2000 ondas planas. En la figura se puede ver que hay un límite en el cual la distribución del campo enfocado no cambia con respecto al número de ondas incidentes. En la figura 4.8 se muestra un campo enfocado por un sistema aplanático producido con 1000 ondas planas incidentes, donde fue utilizado el vecino más cercano como método de interpolación. En la próxima sección se mostrará un análisis similar para reproducir el esparcimiento de un campo enfocado al pasar por una esfera de sílice.

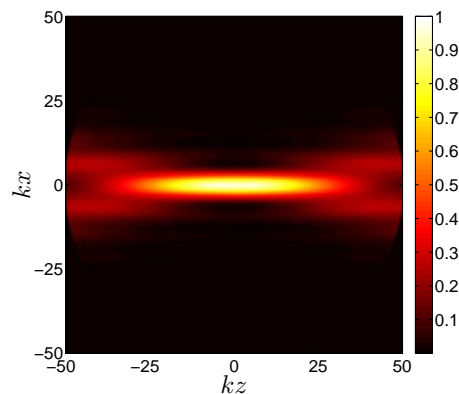


FIGURA 4.8: Irradiancia normalizada del campo enfocado en agua, por un sistema aplanático con $AN = 0.5$ con 1000 ondas incidentes a diferentes ángulos.

4.3. Esparcimiento del campo enfocado

En la sección anterior se obtuvieron parámetros que permitieron la creación de un campo enfocado por un sistema aplanático. También se mencionaron algunos conceptos de las teorías escalar y vectorial de la difracción, que fueron necesarios para realizar la simulación de un campo enfocado. Ahora, para la simulación del esparcimiento producido por una esfera de

sílice iluminada por un campo enfocado utilizaremos conceptos del capítulo anterior. Estos conceptos son la descripción de las componentes vectoriales del esparcimiento de una onda plana que pasa a través de una esfera. Dichas componentes vectoriales muestran la onda incidente y el campo esparcido dentro y fuera de la esfera iluminada. Como se vio anteriormente,

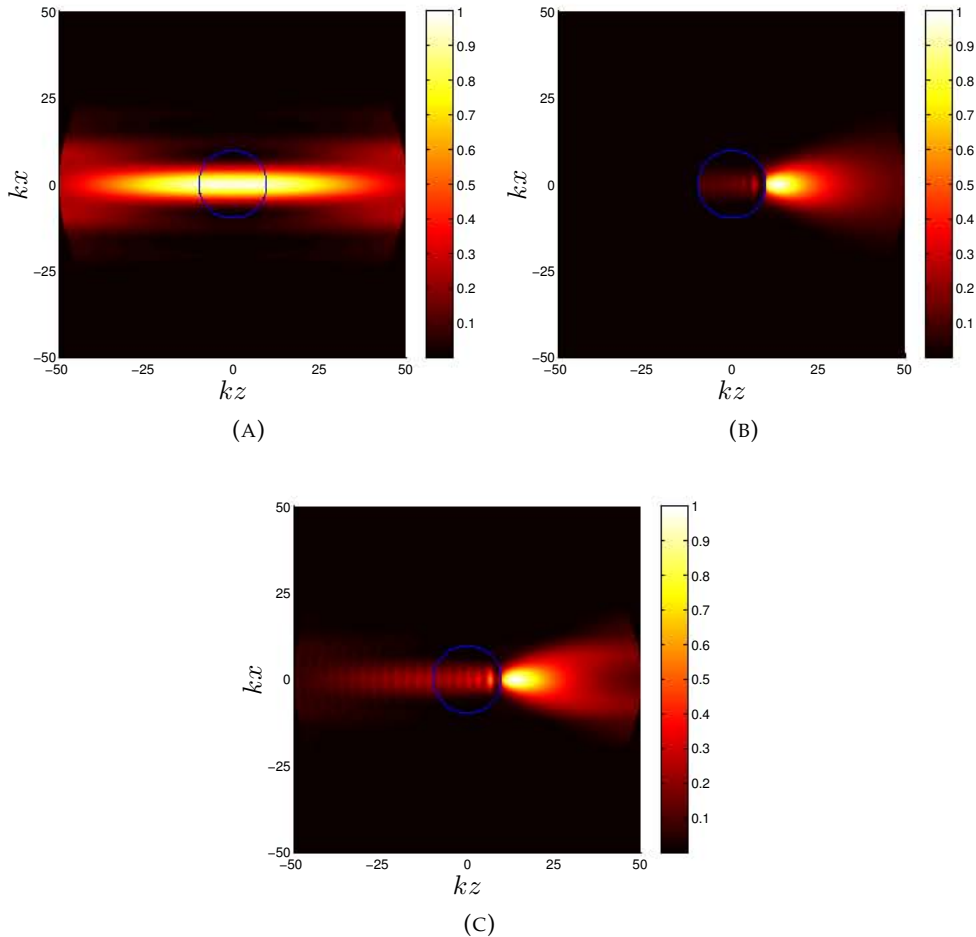


FIGURA 4.9: Irradiancia de los campos incidente, esparcido y total provenientes de un campo enfocado con $AN=0.5$ (en el vacío) al ser esparcidos por una esfera de sílice de 2500 nm de diámetro. (A) Irradiancia del campo enfocado. (B) Irradiancia del campo esparcido. (C) Irradiancia total.

un campo enfocado por un sistema aplanático se puede representar como la suma coherente de ondas planas linealmente polarizadas que se dirigen a diferentes ángulos hacia el punto focal. Dicho punto se sitúa en el centro de la esfera de sílice, ya que se sabe que en un atrapamiento óptico el objeto a manipular debe localizarse en este punto [2]. Esto también es útil porque el origen del sistema de referencia en el cual se analiza el esparcimiento coincide con el centro de la esfera.

Entonces, si se quiere analizar el esparcimiento de un campo enfocado por un sistema aplanático y se conoce el esparcimiento de una onda plana

que ilumina la esfera, basta con sumar coherentemente los resultados del esparcimiento de las ondas que forman el campo enfocado y que pasan por la esfera a diferentes ángulos respecto al eje óptico del sistema aplanático, cuyo punto focal coincide con el centro de la esfera, dando los resultados que se muestran en la figura 4.9.

En la figura 4.9a se observa un campo enfocado similar al creado en la sección anterior, siendo construido a partir de 1000 ondas incidentes, donde el medio de propagación es el agua y cada onda plana tiene $\lambda = 1064$ nm. El sistema aplanático tiene $AN = 0.5$ y la circunferencia azul es la representación de la esfera de sílice vista en el plano XZ. En otras palabras, esta imagen es la representación del campo que incide sobre la esfera. En la figura 4.9b se muestra la irradiancia obtenida a partir de la suma coherente del esparcimiento de cada onda plana que incidió a diferente ángulo en la esfera de sílice. También se observa que el punto con una mayor irradiancia está del lado derecho y fuera de la esfera. Este fenómeno es similar al que ocurre en una lente convergente, donde el punto de máxima irradiancia está localizado fuera de la lente. Por último, en la figura 4.9c se observa la irradiancia total del campo enfocado que fue esparcido por la esfera. De la suma del campo incidente y el campo esparcido se puede ver que el máximo de irradiancia ha sido desplazado hacia la derecha como consecuencia del esparcimiento generado por la esfera. Este esparcimiento será analizado más adelante.

4.4. Simulación de un campo enfocado usando el método de Moore y Alonso

Como vimos en secciones anteriores del capítulo, la propagación de un campo enfocado en un medio homogéneo puede ser modelado a través de métodos que integran la superposición de ondas planas. Sin embargo, estos métodos son numéricamente intensos, ya que cada función necesita ser evaluada en cada punto de observación y con una suma limitada de términos en las series. En el caso del método propuesto por Moore y Alonso [11, 12], el campo enfocado se representa por medio de multipolos complejos, es decir, multipolos desplazados de su posición de origen a una posición compleja. Para comprender el multipolo complejo primero es necesario saber que un multipolo es una base natural para la construcción de campos electromagnéticos, los cuales satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.2)$$

donde $U(\mathbf{r})$ es un campo escalar que tiene contribuciones desde los 4π estereorradianes de un ángulo sólido, es decir, el campo es generado por la

suma de ondas planas en todas direcciones. Moore y Alonso proponen en [12] el desplazamiento de estos multipolos a través de un vector imaginario que tenga componentes en el eje z , tal que el vector de desplazamiento sea $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{r}_c + i\mathbf{q} = (r_{cx} + iq_x)\hat{\mathbf{x}} + (r_{cy} + iq_y)\hat{\mathbf{y}} + (r_{cz} + iq_z)\hat{\mathbf{z}}$, donde \mathbf{q} es un vector real, tal que $q_x = q_y = 0$. El vector \mathbf{r}_c es un vector real nulo, dado que el enfoque se realiza en el origen de coordenadas. En cuanto a \mathbf{q} si $q = |\mathbf{q}| = 0$ el campo tomará la forma de una onda esférica. En cambio si $q \neq 0$ el haz enfocado tendrá un ancho de enfoque de aproximadamente $\sqrt{q/k}$ y la dirección de propagación de z creciente, ya que q_z es la única componente mayor que 0. Al tener esto considerado, Moore y Alonso obtienen en [15] la ecuación que representa un campo enfocado escalar para un sistema de coordenadas esféricas que es de la forma:

$$U_{cf}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) = A_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Lambda_{lm}^*(\boldsymbol{\rho}_0) \Lambda_{lm}(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

en la cual A_0 es la amplitud de la onda, $\Lambda_{lm}(\mathbf{r})$ es llamada vector multipolo, la función $\Lambda_{lm}^*(\boldsymbol{\rho}_0)$ es el conjugado de $\Lambda_{lm}(\mathbf{r})$ y la función $\Lambda_{lm}(\mathbf{r})$ está dada por

$$\Lambda_{lm}(\mathbf{r}) = 4\pi i^l j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.4)$$

donde (r, θ, ϕ) son componentes del punto \mathbf{r} en coordenadas esféricas, j_l es la función esférica de Bessel de primer tipo y de orden l y Y_{lm} es la función de armónicos esféricos dada por

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (\sigma_m)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_m^{(|m|)}(\cos(\theta)) \exp(im\phi), \quad (4.5)$$

en la cual $l \geq 0, |m| \leq l, P_l^{(m)}(\cdot)$ es la función asociada de Legendre y

$$\sigma_m = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

El campo enfocado representado por la ecuación 4.3 se muestra en la figura 4.10, para $l = 12$ y $q_z = 12$, en una región cuadrada de $100k \times 100k$ alrededor del punto en el cual se enfoca el campo complejo monocromático de una longitud de onda $\lambda = 1064$ nm en el vacío, donde el medio en el que se enfoca el campo es agua.

En la figura 4.10a se puede observar la irradiancia del campo eléctrico generado a partir de multipolos, que es parecida a la distribución que se habían obtenido anteriormente con la suma ponderada de ondas planas incidiendo a diferentes ángulos. En la figura 4.10b se puede ver la fase de la

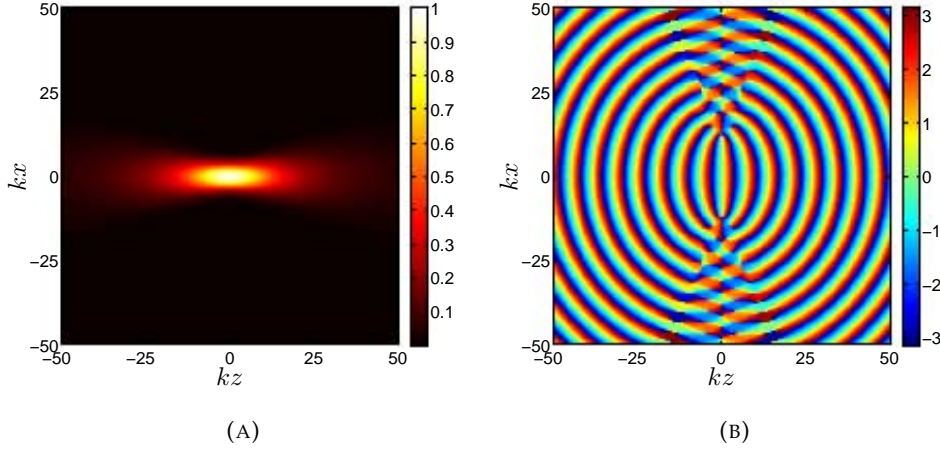


FIGURA 4.10: Construcción de una campo enfocado escalar mediante un desplazamiento complejo de multipolos con 12 términos de la serie y $q_z = 12$. (A) Irradiancia del foco complejo. (B) Fase del foco complejo.

onda que se generó. Posteriormente, para expresar el esparcimiento de Mie del campo complejo enfocado sobre una esfera de radio R con un índice de refracción n , Moore y Alonso ubican el centro de la esfera y el punto focal en el origen de coordenadas, es decir, $\mathbf{r}_c = 0$ y aplican las condiciones de frontera a la ecuación 4.3, tales como la continuidad de las componentes tangenciales del campo en la superficie de la esfera y obtienen la siguiente ecuación

$$U_{sc}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) = A_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l \Lambda_{lm}^*(\boldsymbol{\rho}_0) \Pi_{lm}(\mathbf{r}), \quad (4.7)$$

en la cual A_0 es la amplitud de la onda, $\Lambda_{lm}^*(\boldsymbol{\rho}_0)$ es la expresión del vector multipolo conjugado, el coeficiente c_l es un factor de escalamiento proveniente de aplicar las condiciones de frontera dado por

$$c_l(kr, n) = \frac{n j_l(kR) j_l'(nkR) - j_l(nkR) j_l'(kR)}{j_l(nkR) h_l^{(1)'}(kR) - n h_l^{(1)}(kR) j_l'(nkR)}, \quad (4.8)$$

donde la prima indica la diferenciación respecto a su argumento. El término $\Pi_{lm}(\mathbf{r})$ contiene las componentes esparcidas del campo enfocado que son de la siguiente forma

$$\Pi_{lm}(\mathbf{r}) = 4\pi i^l h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.9)$$

en la cual $h_l^{(1)}$ es la función esférica de Hankel de primer tipo. Otra característica importante de $\Pi_{lm}(\mathbf{r})$ es que también cumple con la condición de radiación de Sommerfeld, que dice que la energía irradiada por una fuente debe de esparcirse hasta el infinito [16], es decir, las resultantes del campo esparcido que se enfoca en la esfera deben ser en dirección tal que

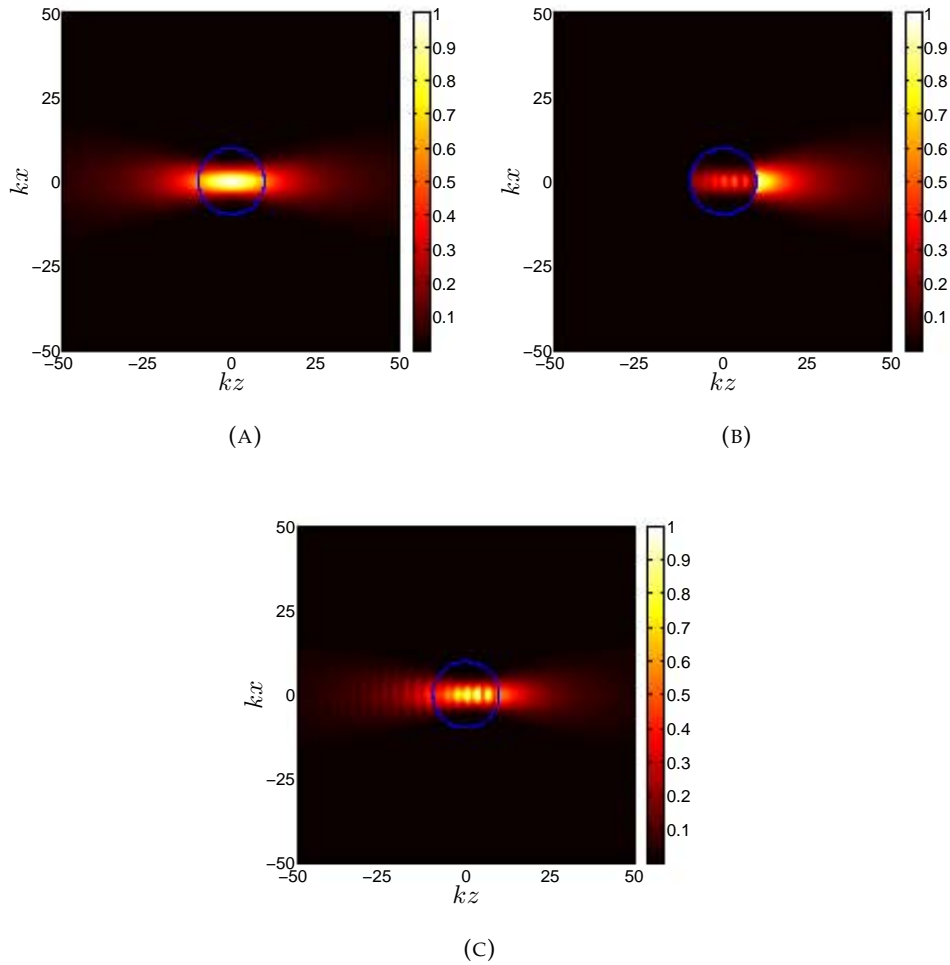


FIGURA 4.11: Construcción del esparcimiento de un campo enfocado complejo escalar esparcido por una esfera de 2500 nm mediante un desplazamiento complejo de multipolos con 12 términos de la serie y $q_z = 12$. (A) Irradiancia del campo enfocado. (B) Irradiancia del campo esparcido. (C) Irradiancia del campo total.

se alejen de la esfera.

En la figura 4.11 se muestra un campo que viaja a través de agua y se enfoca en una esfera de sílice de 2500 nm de diámetro, que esparce el campo enfocado. La figura 4.11a muestra la irradiancia del campo enfocado calculado usando un desplazamiento complejo en el eje z de $q_z = 12$. Dado que el desplazamiento es sobre el eje z y q_z es positiva, el campo viaja en sentido positivo al eje z . También se muestra una circunferencia de color azul que representa la esfera de sílice para mostrar la escala del campo enfocado respecto a la esfera. Las figuras están situadas sobre el plano XZ en un campo de visión cuadrado, con longitud de 100k, y su centro está alineado al centro de la esfera que, a su vez, es el punto donde se enfoca el campo. En la figura 4.11b se muestra el esparcimiento del campo enfocado dentro

y fuera de la esfera, mismo que tiene una mayor irradiancia en la parte exterior de la esfera. En esta imagen se forma una distribución oscilatoria de luz causada por la interferencia de las ondas esparcidas dentro de la esfera. En la figura 4.11c se muestra la irradiancia total que es el módulo de la suma del cuadrado de los campos incidente y esparcido dentro y fuera de la esfera. Se observa que el punto de mayor irradiancia está ubicado dentro de la esfera, mostrando un desplazamiento en el punto de enfoque por el esparcimiento del campo escalar producido por la esfera. Dicho campo produce una distribución similar a la que realiza una lente convergente. Este resultado también es consistente con los resultados mostrados en la sección anterior. Ambos campos enfocados se compararán a detalle en la siguiente sección, en donde se tomará en cuenta el ancho medio de las distribuciones de irradiancia.

4.5. Comparación de los campos enfocados

En secciones anteriores se ha mostrado cómo simular un campo enfocado de 2 formas diferentes, la primera mediante la suma coherente de ondas planas a diferentes ángulos, donde el ángulo máximo de incidencia viene dado por una apertura numérica (AN) propuesta, y la segunda forma mediante el desplazamiento de un multipolo por un vector complejo. Ambos casos producen campos enfocados similares. Para comparar los campos se realizaron simulaciones de campos enfocados en el vacío con una longitud de onda de 1064 nm. Las simulaciones se realizaron en una región cuadrada que tiene como longitud 100k y se obtuvo la irradiancia de los campos en el plano XZ, donde el campo enfocado viaja en dirección positiva al eje z y se enfoca en el centro de la región considerada. Para el caso donde el enfoque depende de una AN, es decir, va en función del máximo ángulo de incidencia, se usaron valores para el ángulo que van de $[0, \pi/2]$ donde $\pi/2$ es para una AN = 1 en el aire, dado que este ángulo es tomado con respecto al eje óptico. Se realizaron diferentes simulaciones del campo enfocado a diferentes ángulos dados por la serie $m\pi/60$, donde m va como 1, ..., 30. En la figura 4.12 se muestran algunas irradiancias en $z = 0$ a lo largo del eje x , donde son claramente observables los patrones que se forman al enfocar las ondas planas por medio de un sistema aplanático.

Posteriormente, para el campo enfocado que se forma a partir del desplazamiento complejo se utilizaron diferentes valores para el vector del desplazamiento. Todos los valores se colocaron en el eje z y con un valor positivo para que el campo se propague en la dirección positiva del eje z , es decir, $\rho_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + q_z\hat{z}$. Las demás componentes son cero, ya que algún valor diferente proporcionaría un cambio en la dirección de propagación

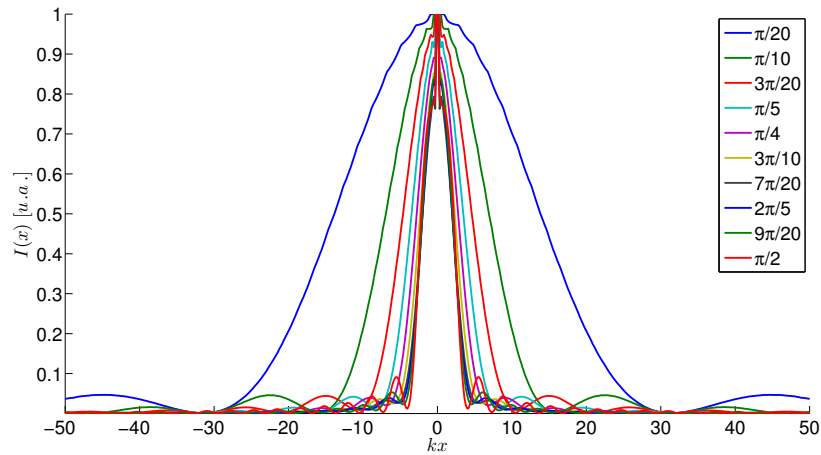


FIGURA 4.12: Irradiancias normalizadas de campos enfocados en el vacío, por sistemas aplanáticos con 500 ondas incidentes a diferentes ángulos.

del campo. Los valores para q_z que se usaron para realizar la simulación estuvieron dentro del rango de $1 \text{ } kz$ hasta $40 \text{ } kz$. Para dicha simulación se utilizaron 12 términos para la evaluación de las series que forman el campo escalar.

En la figura 4.13 se muestran las distribuciones de irradiancia en $z = 0$ a lo largo del eje x en las cuales se observan patrones que no son tan definidos como los que se mostraron en la figura 4.12. Estos patrones son mayormente apreciables cuando q_z es baja. Para el caso con $q_z = 1$ se observan claramente los máximos y mínimos del patrón, pero a medida que q_z aumenta estas oscilaciones pierden dimensión y son difíciles de ver en las figuras.

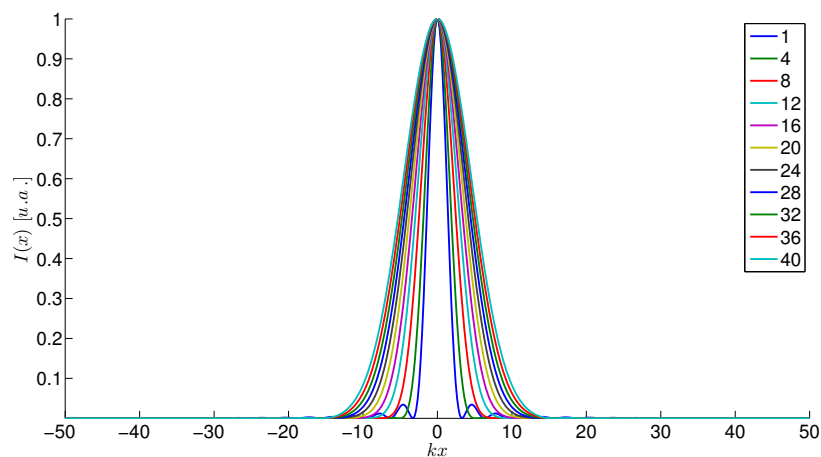


FIGURA 4.13: Irradiancias normalizadas de campos enfocados en el vacío, mediante un desplazamiento complejo de multipolos sobre el eje z , donde la componente q_z toma valores de $1, 4, \dots, 4n, \dots, 40$.

En la figura 4.12 se muestran patrones de irradiancia, que se van haciendo más estrechos a medida que se incrementa el ángulo de incidencia. En la figura 4.14 se muestra la disminución del ancho total a altura media del patrón de irradiancia con respecto al aumento de AN que se obtiene de la figura 4.12.

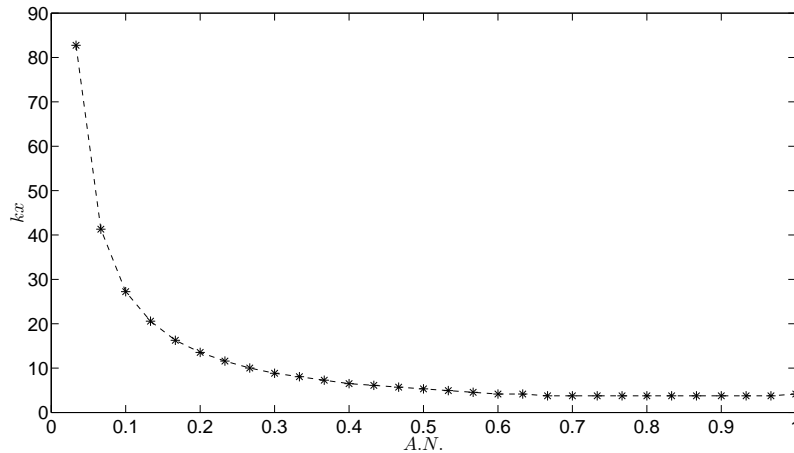


FIGURA 4.14: Ancho total a altura media de las irradiancias normalizadas de campos enfocados por un sistema aplanático con 500 ondas planas incidentes a diferentes ángulos dados por $m\pi/60$ donde m va de 1 a 30.

Como se mencionó antes, en el caso del enfoque mediante desplazamientos complejos que se muestra en la figura 4.13 se observan patrones de Airy más difíciles de percibir. De estos patrones se tomó el ancho total a altura media (FWHM por sus siglas en inglés) para diferentes valores de q_z . Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.15 que muestra el FWHM como función de q_z .

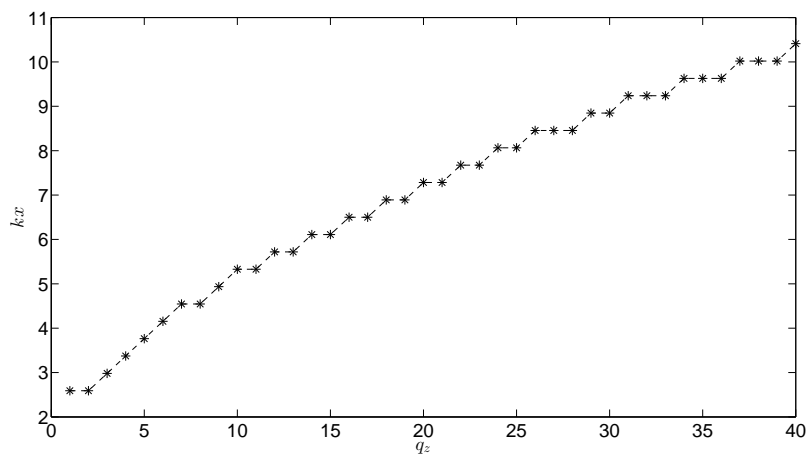


FIGURA 4.15: FWHM de las irradiancias normalizadas de campos complejos escalares enfocados para $q_z = 1, \dots, n, \dots, 40$

Dado que para ambos métodos para calcular campos enfocados conocemos algunas distancias del FWHM del patrón de irradiancia, se realizó un análisis para obtener una función que relacione la AN de un sistema con el valor de q_z para ese mismo sistema. Para esto se realizaron varios ajustes de funciones con Matlab. Los ajustes se caracterizaron usando su R^2 y

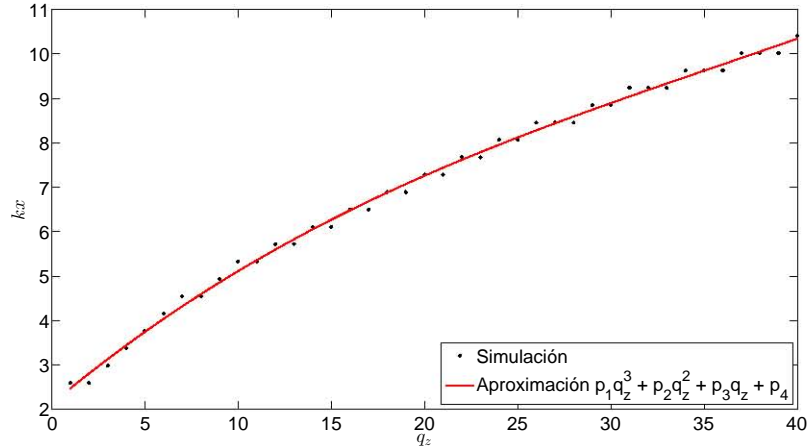


FIGURA 4.16: Ajuste de curva para el FWHM de las irradiancias normalizadas de campos complejos escalares enfocados para $q_z = 1, \dots, 40$.

el resultado se muestra, para el campo enfocado que se obtiene con el foco complejo, en la figura 4.16, para la cual se obtuvo un valor de R^2 de 0.9971 usando una aproximación por medio de polinomios de 3er grado, es decir,

$$f(q_z) = p_1 q_z^3 + p_2 q_z^2 + p_3 q_z + p_4, \quad (4.10)$$

donde $p_1 = 5,413e - 05$, $p_2 = -0,005805$, $p_3 = 0,351$ y $p_4 = 2,126$.

Para los valores obtenidos de la suma coherente de ondas planas se ajustó una función de potencias de la forma

$$g(AN) = a(AN)^b + c, \quad (4.11)$$

donde a , b y c son constantes y tienen los valores 2,466, $-1,032$ y 0,5325, respectivamente. En la figura 4.17 se muestran los valores obtenidos de la simulación y la función obtenida por el ajuste. Para esta curva se obtuvo un valor de R^2 de 0.9994, que indica que el ajuste de la curva tiene una alta correlación con los datos obtenidos. Dado que las funciones anteriormente obtenidas nos muestran la relación existente entre el FWHM de la irradiancia en el plano $z = 0$, a lo largo del eje x , respecto a AN y el parámetro q_z de la función escalar de un campo enfocado complejo, se puede obtener una relación directa entre la AN y el parámetro q_z . Al igualar las ecuaciones 4.10 y 4.11 obtenemos una nueva función que aproxima la AN como función de

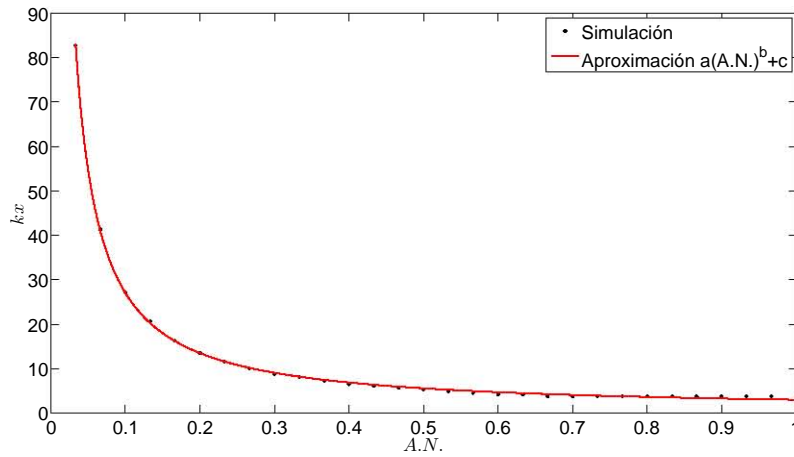


FIGURA 4.17: Ajuste de curva para el FWHM de las irradiancias normalizadas de campos enfocados por un sistema aplanático con 500 ondas planas incidentes a diferentes ángulos dados por $m\pi/60$ donde m va de 1 a 30.

q_z dada por:

$$AN = \left(\frac{p_1 q_z^3 + p_2 q_z^2 + p_3 q_z + p_4 - c}{a} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad (4.12)$$

donde los valores de p_1, p_2, p_3, p_4, a, b y c son las constantes antes mencionadas. En la figura 4.18 se muestra la gráfica de la función 4.12 para q_z

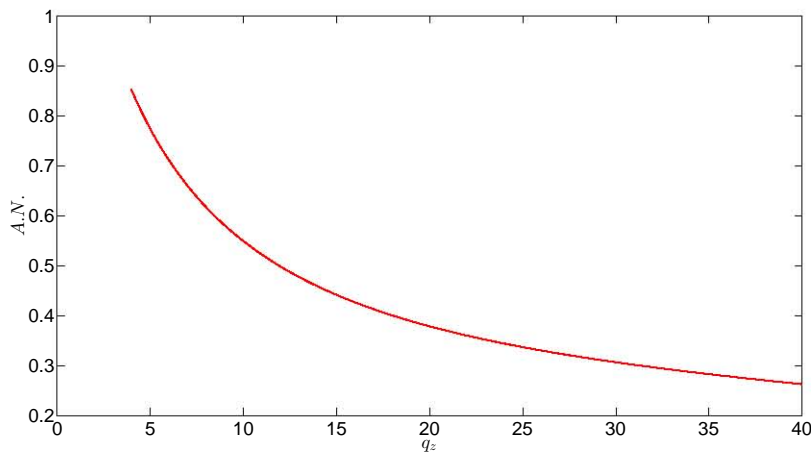


FIGURA 4.18: Apertura numérica como función del parámetro q_z del desplazamiento complejo de un campo escalar enfocado.

con valores de 1 a 40. Se puede observar que q_z baja corresponde a una AN alta y a medida que q_z crece, el ancho medio del patrón de Airy también crece, provocando que la AN disminuya.

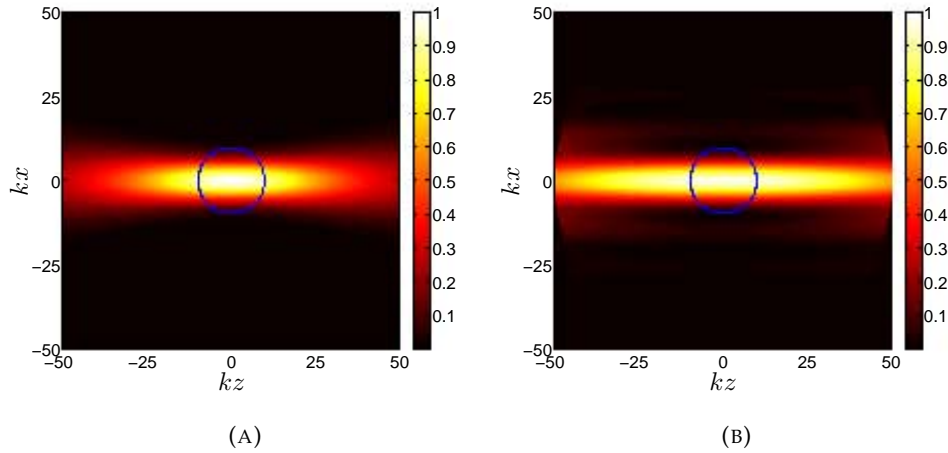


FIGURA 4.19: Simulación de campos enfocados para una AN de 0.3. (A) Irradiancia del campo enfocado por un foco complejo con 12 términos de la serie y $q_z = 31.22k$. (B) Irradiancia del campo enfocado a partir de la suma coherente de 500 ondas planas a diferentes ángulos.

Ahora que se tiene una función que describe la AN en función del parámetro q_z , se pueden simular campos enfocados similares con ambos métodos. Una consideración presente es que el campo enfocado mediante el foco complejo escalar es válido para una AN baja. Las simulaciones usaron una AN de 0.3, que corresponde a un parámetro $q_z = 31.22k$ en aire. Ambas formas de simulación se realizaron en una región cuadrada con longitud de $100k$ sobre el plano XZ y el enfoque se dirigió al centro del cuadrado. La medida utilizada (k) equivale a $2\pi / 1064$ nm. Para la suma coherente de ondas planas se utilizaron 500 ondas y para el foco complejo escalar se usó el valor de $l = 12$. En la figura 4.19 se observan las irradiancias de los campos enfocados, donde la silueta de color azul representa la circunferencia de la esfera de sílice de 2500 nm de diámetro, con el fin de comparar la dimensión de la esfera respecto al campo enfocado. En la figura 4.20 muestra la comparación entre las irradiancias de ambos campos enfocados a lo largo del eje z , con $x = 0$, donde se observa una gran similitud entre ambos campos generados, con la excepción de que para el campo obtenido con la suma coherente son más perceptibles las oscilaciones del patrón de irradiancia.

En la figura 4.21 se presenta la diferencia de las irradiancias, donde la diferencia máxima observada es menor al 5%. Como ya se había mencionado antes, el objetivo principal de estos resultados es la comparación del esparcimiento de los campos enfocados obtenidos con ambos métodos y la validación del campo enfocado creado a partir de la suma coherente de ondas planas.

La comparación de estos campos es satisfactoria pues no se esperaba que los campos fueran exactamente iguales, dado que el campo enfocado

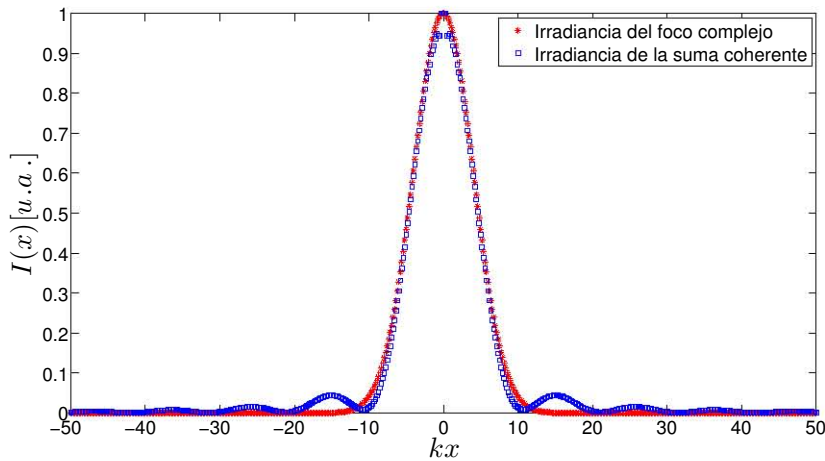


FIGURA 4.20: Irradiancias de los campos enfocados a lo largo del eje z para $x = 0$.

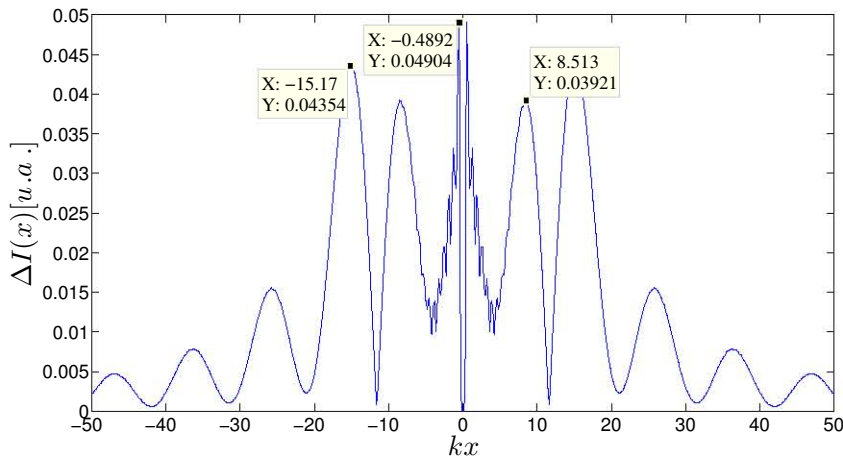


FIGURA 4.21: Diferencia de las irradiancias de los campos enfocados en el eje z a lo largo del eje x .

por el método del foco complejo es la solución analítica de un campo escalar y el campo enfocado mediante la suma coherente de ondas planas es la solución numérica de un campo vectorial. La suma utilizó una cantidad limitada de ondas planas, ya que un campo enfocado por un sistema aplanático es, en principio, la suma de una infinidad de ondas planas. Otro punto a resaltar es que el enfoque de un foco complejo es más adecuado para AN pequeñas, ya que es una teoría escalar. En la figura 4.18 se puede observar que un cambio en q_z para AN grande afecta más el valor de la AN asociada que un cambio de q_z cuando AN es pequeña. En las distribuciones de la suma coherente de ondas planas, se nota que para AN altas, es decir, arriba de 0.7 el FWHM de las distribuciones en el eje x cambia lentamente con la AN, lo cual produce errores en la estimación del FWHM, como se puede ver en la figura 4.17. Respecto a la irradiancia sobre el eje z , se espera que sus distribuciones sean más parecidas al tomar más términos en la serie

para calcular foco complejo y en la suma infinita de ondas planas.

4.6. Comparación de esparcimiento de los campos enfocados

Como se vió en la sección anterior, los campos enfocados mediante la suma coherente de ondas planas y el foco complejo son similares para AN bajas, es decir, AN menores que 0.5, la máxima diferencia relativa que se obtuvo de 5% en la dirección x . En secciones anteriores se vió cómo calcular el esparcimiento de un campo enfocado mediante un foco complejo y una suma coherente de ondas planas.

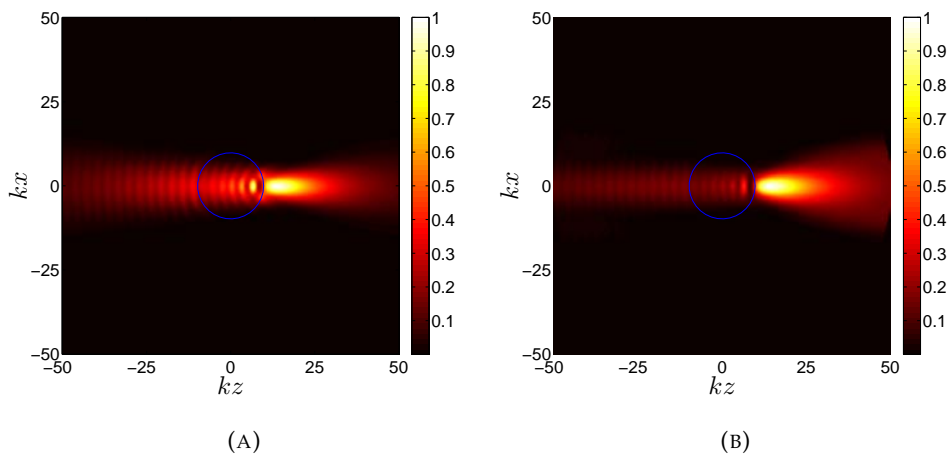


FIGURA 4.22: Simulación del esparcimiento de campos enfocados por una AN de 0.3. (A) Irradiancia del esparcimiento de un campo enfocado por un foco complejo con 24 términos de la serie y $q_z = 31.22k$. (B) Irradiancia del esparcimiento de un campo enfocado a partir de la suma coherente de 500 ondas planas a diferentes ángulos.

En esta sección se muestran simulaciones de campos enfocados esparcidos por una esfera, usando ambos métodos, producidos por una lente aplanática de una AN = 0.3 en agua en una región cuadrada, centrada en la esfera, que tiene $100k$ de longitud, para una longitud de onda de 1064 nm . Los parámetros de la simulación fueron extraídos de la configuración de pinzas ópticas que se tienen en el CFATA. En estos experimentos los objetos a atrapar están inmersos en agua y el láser utilizado tiene una longitud de onda de 1064 nm en el vacío. El campo enfocado por el foco complejo se evaluó con $l = 24$ para tener una mayor precisión en la irradiancia. En la figura 4.22 se observan el esparcimiento de los campos enfocados en una esfera. La circunferencia de color azul representa una esfera de sílice de 2500 nm de diámetro. En ambos casos se puede ver que la esfera produce

una concentración de irradiancia en su exterior, similar a un campo enfocado y una distribución oscilatoria en su interior. Para poder observar con más detalle las distribuciones de irradiancia, en la figura 4.23 se representan cortes a lo largo del eje z , para $x = 0$, de la irradiancia obtenida en los dos casos. Las distribuciones espaciales de la irradiancia son semejantes pero con valores distintos. La diferencia en valores es comprensible, dado que la generación de ambos campos esparcidos es diferente, un campo esparcido es generado por una función analítica que devuelve un campo escalar, y el otro es una simulación numérica de un campo vectorial. La distribución de irradiancia de la suma coherente de ondas en $-10kz$ y $10kz$ presenta discontinuidades producidas por la superficie de la esfera, dado que ésta es una simulación numérica de una suma finita de ondas planas con sus respectivos esparcimientos evaluada en puntos en el espacio y no sobre el espacio continuo. En otras palabras, las discontinuidades observadas son artefactos numéricos sin significado físico.

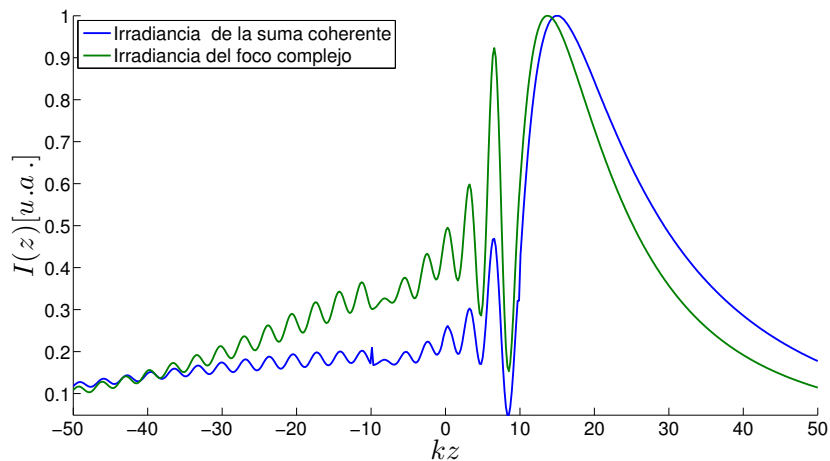


FIGURA 4.23: Irradiancias de los campos enfocados en el eje x a lo largo del eje z .

Se puede observar que ambas distribuciones tienen un máximo antes de salir de la esfera y el máximo global de la irradiancia está después de la esfera. Este fenómeno nos recuerda al campo enfocado posterior a una lente convergente, donde el máximo global se encuentra después de la lente y para el caso de las pinzas ópticas da como resultado un atrapamiento óptico. Este campo esparcido por la esfera podría fungir como una segunda lente que al enfocar de nuevo el campo produciría un segundo atrapamiento y así sucesivamente hasta formar una cadena de esferas. En la siguiente sección se analizará el esparcimiento de un campo enfocado de ondas planas con parámetros provenientes de un equipo de pinzas ópticas.

4.7. Simulación del esparcimiento de un campo enfocado por pinzas ópticas

En el laboratorio de Nano-Bio-Óptica del Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada del Campus Juriquilla UNAM se han realizado experimentos de atrapamiento óptico, con un equipo de pinzas ópticas que consta de un láser de 1064 nm que es enfocado por un objetivo de microscopio de inmersión en aceite, el cual puede atrapar esferas de sílice suspendidas en agua de 2500 nm de diámetro. El fenómeno de esparcimiento del haz enfocado sobre la esfera se quiere reproducir mediante la siguiente simulación para entender el proceso de encadenamiento. En dicha simulación se utilizaron los valores como el diámetro de las esferas, el medio en el cual están suspendidas, la AN de la lente y la longitud de onda del láser. La lente se simuló como una lente perfecta, es decir como una lente aplanática. La simulación se realizó con la suma coherente de 1000 ondas planas y en una región cuadrada de longitud $100k$ sobre el plano XZ. El foco de la lente se escogió de manera que coincida con el centro de coordenadas de la región y el centro de la esfera.

En la figura 4.24 se observa el resultado de la simulación, donde la figura 4.24a muestra el campo incidente, es decir, el campo enfocado por el objetivo de microscopio. En la figura 4.24b que nos muestra la irradiancia normalizada del campo esparcido, se observa que el máximo global de la irradiancia está localizado a la salida de la esfera. Dentro ésta se ve una serie de oscilaciones que son puntos máximos de la irradiancia del campo esparcido. En la figura 4.24c se presenta el campo total, que tiene las contribuciones del campo incidente y el campo esparcido. En este caso se producen una serie de máximos dentro y fuera de la esfera.

Esto es más visible en la figura 4.25, que nos muestra la irradiancia normalizada a lo largo del eje z . En esta figura se puede observar que los puntos de mayor irradiancia se encuentran dentro de la esfera. En la parte exterior de la esfera se observa un máximo que es de la mitad del máximo de la irradiancia y el cual se piensa que podría dar paso a un siguiente atrapamiento óptico, como los observados en los experimentos realizados con las pinzas ópticas, los cuales logran atrapar hasta 20 esferas de sílice. Este resultado es una primera aproximación para describir el fenómeno por completo. Hay más factores a considerar como las micro-corrientes generadas por el cambio de temperatura que produce el láser al ser enfocado. Este efecto fue observado al realizar atrapamientos ópticos sobre bacterias y células de riñón de embrión humano (HEK), que morían al estar mucho tiempo atrapadas en la pinza óptica. Otro efecto que no se consideró fue la viscosidad del medio, ya que el medio ejerce una fuerza sobre la esfera, esto se ha visto en los experimentos, dado que al arrastrar una esfera atrapada por una pinza

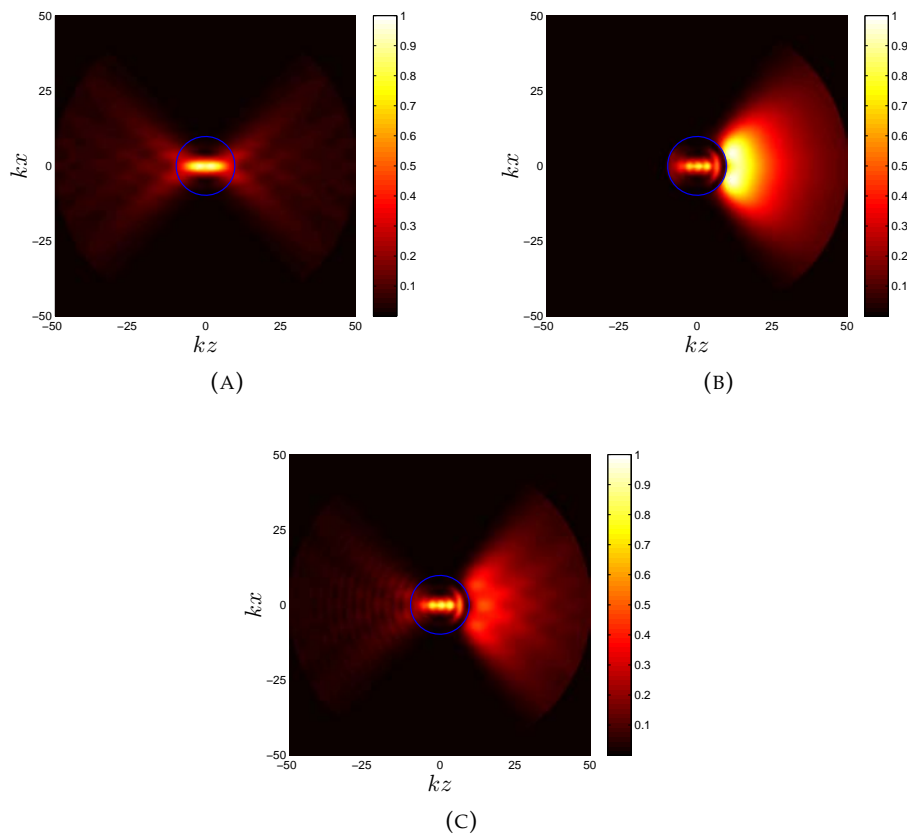


FIGURA 4.24: Simulación de un campo enfocado esparcido por una esfera de sílice de 2500 nm suspendida en agua. (A) Irradiancia normalizada del campo enfocado. (B) Irradiancia normalizada del campo esparcido. (C) Irradiancia normalizada del campo total.

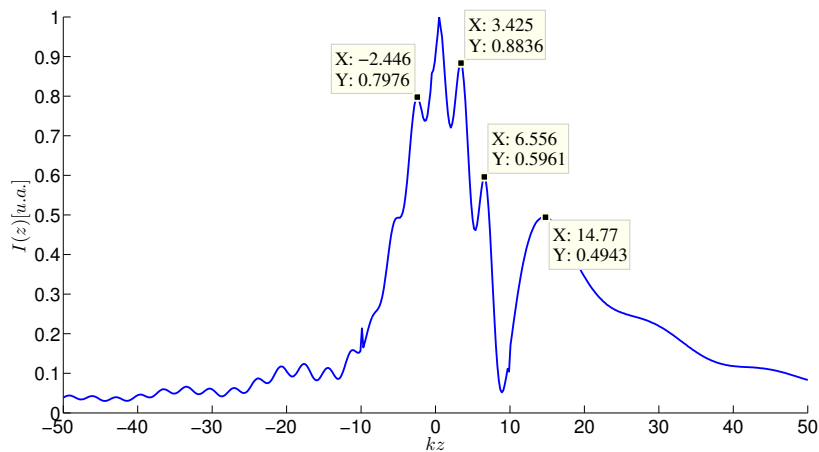


FIGURA 4.25: Irradiancia del campo total a lo largo del eje z .

óptica, ésta se soltaba al realizar movimientos bruscos en el atrapamiento. De hecho, esa fuerza sirve para realizar la medición de la fuerza con la que atrapa una pinza óptica. Aparte de las fuerzas antes mencionadas, la fuerza

de gravedad también juega un papel importante por la configuración de microscopio invertido de las pinzas ópticas que se tiene en laboratorio. Esta configuración permite realizar atrapamientos ópticos por la parte inferior del cubreobjetos, es decir, la lente que enfoca el láser esta situada debajo del mismo, logrando atrapar los objetos que se encuentran sedimentados en éste. Al arrastrar una esfera cerca de otra se ha observado que la esfera atrapada se va a segundo plano y la otra toma su lugar en el plano de enfoque. Este atrapamiento es en sentido contrario a la fuerza de gravedad, dado que la primera esfera es empujada hacia arriba por la segunda. Los fenómenos antes mencionados tienen relevancia para un análisis más completo del atrapamiento óptico, ya que se han observado de diferentes formas en los experimentos realizados. Sin embargo los alcances de este trabajo se limitaron a corroborar que el esparcimiento de un campo enfocado por una esfera produce un máximo a su salida, tal máximo podría ser un factor relevante para la captura de una siguiente esfera.

5 | Conclusiones y perspectivas

El objetivo de este proyecto fue conocer el esparcimiento de un campo al ser enfocado en una esfera de sílice. Este objetivo surgió dado que en experimentos con pinzas ópticas se vio el fenómeno de encadenamiento óptico, que consta en la captura de varias esferas por un haz láser enfocado. Este trabajo pretende contribuir a la comprensión del fenómeno, ya que presenta simulaciones de un campo vectorial esparcido por una esfera, lo cual es fundamental en el atrapamiento realizado con pinzas ópticas. El atrapamiento se logró al enfocar un láser con un objetivo de microscopio donde este enfoque permite la captura objetos con tamaños que van alrededor de las micras. Para llegar a la simulación del campo esparcido se comenzó por el esparcimiento de una onda plana linealmente polarizada que incidía sobre una esfera de sílice. Esta simulación se basó en la teoría creada por Lorentz y Mie, la cual permite describir el esparcimiento que produce una esfera isótropa y homogénea al ser iluminada por una onda plana linealmente polarizada. Esta teoría se utilizó porque la dimensión de la esfera no es despreciable comparándola con la longitud de onda del láser, tal como se tiene en los experimentos realizados en el laboratorio de Nano-Bio-óptica de CFATA. En estos experimentos las esferas a atrapar son del orden de 2500 nm de diámetro y la longitud de onda del láser es de 1064 nm.

Posterior a conocer el esparcimiento producido por la esfera, se realizaron simulaciones para reproducir un campo enfocado por una lente aplanática. Se optó por la lente aplanática, ya que este tipo de lente está libre de aberraciones como la crómica, la esférica y la de coma. El campo enfocado que genera la lente se obtuvo a partir de una suma finita de ondas planas linealmente polarizadas que inciden a diferentes ángulos respecto al eje óptico del sistema y son multiplicadas por un factor de apodización que contribuye a la conservación de energía en el sistema. Al haber obtenido estos resultados se realizó una comparación con los análisis teóricos realizados por Moore y Alonso [11, 12], donde se describen campos enfocados mediante el desplazamiento complejo de multipolos electromagnéticos, dando como

resultado campos electromagnéticos enfocados de origen escalar, que tienen como parámetro un vector complejo (\mathbf{q}) que indica la magnitud y la dirección de propagación de la onda que se enfoca. En cuanto a las simulaciones de campos enfocados realizadas con la suma de ondas planas, los campos resultantes son de origen vectorial y tienen como parámetro de enfoque la AN de la lente aplanática. La comparación de dichos campos se hizo mediante la comparación de la irradiancia normalizada de los campos sobre el plano XZ, donde se midió el ancho total a altura media (FWHM) sobre el eje x , dando como resultado de la comparación una relación entre la AN y el módulo del vector \mathbf{q} .

Al haber obtenido la función antes descrita, se procedió a realizar simulaciones de los campos enfocados que fueran comparables, es decir, que el FWHM fuera similar para ambas metodologías. Las simulaciones se hicieron en el plano XZ y se compararon las irradiancias normalizadas sobre el eje x , mostrando que sus diferencias eran menores del 5% para AN bajas. Estas diferencias son consistentes con lo que se esperaba, dado que la simulación que utiliza el vector complejo como parámetro, devuelve un campo escalar que solo es válido para AN pequeñas.

Para validar el método propuesto, se realizaron simulaciones del esparcimiento de un campo enfocado en una esfera, donde ambos campos tenían un FWHM similar, el cual correspondía a una AN baja, en los cuales se mostraron distribuciones de irradiancia muy similares, pero con diferencias en los valores. Las distribuciones mostraron un máximo dentro de la esfera y un máximo global posterior a ésta. Este fenómeno nos recuerda a un campo enfocado por de una lente convergente que refuerza la hipótesis de que el esparcimiento del campo enfocado en una esfera genera una distribución de irradiancia que podría ser capaz de atrapar una segunda esfera. Por último, después de mostrar que las distribuciones de irradiancia son similares, se realizaron simulaciones del esparcimiento de un campo enfocado en una esfera utilizando los valores del equipo de pinzas ópticas que se encuentra en el laboratorio de Nano-Bio Óptica del CFATA. En este equipo se utiliza un objetivo de microscopio de inmersión en aceite con AN de 1.25, un láser de 1064 nm en el vacío y , como espécimen, esferas de sílice de 2500 nm de diámetro.

Las simulaciones mostraron que el esparcimiento del campo enfocado producía un máximo posterior a la esfera de la mitad de la máxima irradiancia. Este máximo podría ser un factor relevante para un múltiple atrapamiento pero no definitivo, dado que el sistema mostrado es un sistema simplificado que no toma en cuenta fenómenos como las microcorrientes, la gravedad, la viscosidad del medio o la densidad de las partículas de sílice. Uno de los fenómenos mencionados son las microcorrientes que pueden ser inducidas

por el calentamiento del medio al enfocar el láser por un tiempo prolongado, generando en la zona donde se enfoca el láser una mayor temperatura y, en consecuencia, una fuerza en sentido negativo a la gravedad, ya que la densidad del agua caliente disminuye y tiende a subir. El cambio de la temperatura se ha observado al atrapar células de Embrión de Riñón Humano (HEK por sus siglas en inglés), ya que en experimentos de calibración que utilizaban células que morían al estar demasiado tiempo atrapadas. Otro fenómeno que no se consideró fue la gravedad, dado que los experimentos son realizados con un objetivo de microscopio que está localizado en la parte inferior del cubreobjetos propiciando que la propagación del haz sea en dirección contraria a la gravedad y, en consecuencia, las fuerzas que ejerce el atrapamiento óptico empujen la esfera hacia arriba. Este fenómeno es interesante porque al unir este fenómeno con los resultados obtenidos, es decir, que el esparcimiento de un campo enfocado en una esfera produce un máximo posterior, esto prodría dar paso a que mientras el máximo posterior, a la esfera atrapa una segunda esfera, la fuerza de gravedad actuaría sobre la segunda para mantenerla cerca de la zona donde se encuentra la máxima irradiancia y así lograr un atrapamiento estable como se ha visto en los experimentos.

Otro efecto a considerar en los siguientes trabajos sería la viscosidad del medio, dado que el medio ejerce una fuerza sobre la esfera. Este efecto se ha visto en los experimentos, donde el objeto atrapado se suelta de la pinza óptica al realizar movimientos bruscos en el atrapamiento. De hecho, esa fuerza sirve para la calibración de la fuerza con la que atrapa una pinza óptica.

Finalmente, para poder describir el sistema de un atrapamiento múltiple es necesario conocer el espacimientto que genera una segunda esfera colocada en el máximo de irradiancia que produce la primera esfera atrapada y posteriormente incluir los fenómenos antes descritos, ya que a la escala del sistema cualquier fuerza por mas pequeña que sea puede modificar el comportamiento del sistema. Esto se puede intuir porque en los experimentos realizados se observan movimientos brownianos en las partículas de sílice cuando se encuentra en reposo el experimento, es decir, que no hay partículas atrapadas.

En conclusión este proyecto es un primer paso para calcular el campo esparcido por una segunda esfera, ya que aquí se presenta una manera de calcular el campo esparcido por una esfera para AN altas. Posteriormente, dicho campo esparcido fungiría como el campo incidente para la segunda esfera. Otro aspecto relevante es que en el presente proyecto se muestra que para AN altas el esparcimiento de un campo por una esfera produce un máximo posterior a esta, siendo este máximo un precedente para un segundo atrapamiento. Aunque la irradiancia máxima del campo producido

por el esparcimiento en la primera esfera se ve reducida con respecto a la irradiancia del campo enfocado original, es posible que el máximo de irradiancia fuera de la primera esfera sea capaz de capturar una segunda esfera y que este mismo proceso se repita sucesivamente.

Bibliografía

- [1] Milton Carlos González Sánchez. «Desarrollo de una instalación para la manipulación y acaracterización de partículas por atrapamiento óptico. "Pinzas ópticas"». Maestría. Instituto Politécnico Nacional, 2009.
- [2] A. Ashkin. «Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure». En: *Phys. Rev. Lett.* 24 (4 1970), págs. 156-159. DOI: [10.1103/PhysRevLett.24.156](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.24.156). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.24.156>.
- [3] A. Ashkin y J. M. Dziedzic. «Observation of Resonances in the Radiation Pressure on Dielectric Spheres». En: *Phys. Rev. Lett.* 38 (23 1977), págs. 1351-1354. DOI: [10.1103/PhysRevLett.38.1351](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1351). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1351>.
- [4] Ibis Ricárdez Vargas Karen Volke Sepúlveda y Rubén Ramos García. *Pinzas ópticas: las delicadas manos de la luz*. 2016. URL: http://www.revistaciencia.amc.edu.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=%20131&Itemid=100011.
- [5] Qirong Xing y col. «Numerical modeling and theoretical analysis of femtosecond laser tweezers». En: *Optics and Laser Technology* 36.8 (2004), págs. 635 -639. ISSN: 0030-3992. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2004.01.016>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030399204000210>.
- [6] A. Ashkin. «Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime». En: *Biophysical Journal* 61.2 (1992), págs. 569 -582. ISSN: 0006-3495. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495\(92\)81860-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495(92)81860-X). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000634959281860X>.
- [7] T Čižmár y col. «Multiple optical trapping and binding: new routes to self-assembly». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 43.10 (2010), pág. 102001. URL: <http://stacks.iop.org/0953-4075/43/i=10/a=102001>.

- [8] Pavel Zemánek y col. «Theoretical comparison of optical traps created by standing wave and single beam». En: *Optics Communications* 220.4–6 (2003), págs. 401–412. ISSN: 0030-4018. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018\(03\)01409-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018(03)01409-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401803014093>.
- [9] R.W. Dichburn. «Óptica». En: 2.^a ed. 2009. Cap. 25, págs. 316-324.
- [10] Max Born y Emil Wolf. «Principles of Optics». En: 6ta edición. 1980. Cap. 13, 633–664.
- [11] Nicole J. Moore y Miguel A. Alonso. «Bases for the description of monochromatic, strongly focused, scalar fields». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 26.7 (2009), págs. 1754-1761. DOI: [10.1364/JOSAA.26.001754](https://doi.org/10.1364/JOSAA.26.001754). URL: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-26-7-1754>.
- [12] M. A. Alonso, R. Borghi y M. Santarsiero. «New basis for rotationally symmetric nonparaxial fields in terms of spherical waves with complex foci». En: *Opt. Express* 14.15 (2006), 6894–6905.
- [13] Oscar Gabriel Rodríguez-Herrera. «Far-field method for the characterisation of three-dimensional fields: vectorial polarimetry». Tesis doct. College of Science, National University of Ireland, Galway, ago. de 2009.
- [14] R. Olivier y C. Hanqiang. «Nearest Neighbor Value Interpolation». En: *International Journal of Advanced Computer Science and Applications* 3.4 (2012).
- [15] Nicole J. Moore y Miguel A. Alonso. «Closed form formula for Mie scattering of nonparaxial analogues of Gaussian beams». En: *Opt. Express* 16.8 (2008), págs. 5926-5933. DOI: [10.1364/OE.16.005926](https://doi.org/10.1364/OE.16.005926). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-8-5926>.
- [16] A. Sommerfeld. «Partial Differential Equations in Physics». En: New York: Academic Press, 1949. Cap. 4, págs. 84-157.
-