



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS: TEOREMA DE
RICHARDSON EN SU VERSIÓN PARA PI-NÚCLEOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CARLOS ALFREDO RAMÍREZ MORA



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Ramírez
Apellido materno	Mora
Nombre(s)	Carlos Alfredo
Teléfono	55 85 55 23
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o Escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	307120560

2. Datos del tutor

Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre(s)	Ilán Abraham
Apellido paterno	Goldfeder
Apellido materno	Ortiz

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dra.
Nombre(s)	María del Rocío
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	López

6. Datos del sinodal 4

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Loiret Alejandría
Apellido paterno	Dosal
Apellido materno	Trujillo

7. Datos del trabajo escrito.

Título	Núcleos en digráficas: Teorema de Richardson en su versión para Pi-núcleos
Número de páginas	78
Año	2017

Agradecimientos

A mi familia, principalmente a mis padres por ser el pilar esencial en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por todo su cariño y ayuda siempre incondicional a través de los años. Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos.

A todos los profesores que han influido en mi desarrollo académico, por todas sus enseñanzas dentro y fuera de las aulas.

A la Dra. Hortensia, por todo su apoyo y compromiso en la elaboración de esta tesis, por su asesoramiento, sus recomendaciones y correcciones. Así como a los maestros sinodales, que revisaron y corrigieron este trabajo para poder mejorarlo.

A mis compañeros y amigos, que han hecho de mis años como estudiante, una gran etapa de mi vida.

A Karla, por todo su cariño, por el apoyo y los consejos, por su motivación para seguir adelante.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) IN108715 Operaciones en gráficas y digráficas. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción	1
1. Núcleos en digráficas	3
1.1. Digráficas	3
1.2. Caminos, trayectorias, ciclos	8
1.3. Núcleos	20
1.4. Conexidad en digráficas	24
1.5. Cuasinúcleos y Seminúcleos	33
1.6. Teorema de Richardson	43
2. Π-Núcleos en Digráficas	45
2.1. Π -trayectorias de una digráfica	45
2.2. Π -núcleos	47
2.3. Teoremas de Π -núcleos	55
3. Teorema de Richardson para Π-núcleos	65
3.1. Digráficas de clases de color	65
3.2. Teorema de Richardson	75
Conclusiones	77
Bibliografía	78

Introducción

La teoría de gráficas es por si misma una rama muy importante en las matemáticas, además ésta es aplicada en una gran cantidad de áreas como ciencias sociales, ciencias de la computación, química, investigación de operaciones, etcétera.

Dentro de la teoría de gráficas[1] existen las digráficas (gráficas dirigidas), éstas serán en las que nos enfocaremos en este trabajo.

El objetivo primordial es presentar una recopilación de resultados importantes referentes a núcleos, haciendo especial énfasis en el “teorema de Richardson”, también definiremos “II-núcleos”, mostraremos resultados existentes para éstos y finalmente daremos una versión del teorema de Richardson para los II-núcleos.

El capítulo uno tiene como objetivo dar las definiciones de una digráfica y de un núcleo de una digráfica, así como mostrar los principales resultados vinculados a los núcleos.

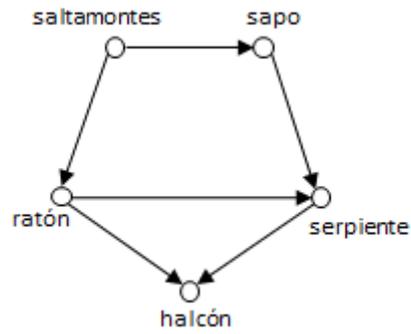
En el capítulo dos nos interesa tomar subconjuntos del conjunto de trayectorias de una digráfica, hacer particiones de ellos, darles color y definir un II-núcleo de una digráfica.

Finalmente en el capítulo tres presentamos una versión del teorema de Richardson para II-núcleos.

Es importante mencionar que este trabajo tiene un enfoque meramente teórico, es decir, que no se ofrecen aplicaciones de dichos temas puesto que en particular, para el capítulo uno, las aplicaciones son un material muy vasto del que se podrían hacer múltiples trabajos.

Antes de empezar formalmente, obtengamos una idea intuitiva de lo que vamos a ver usando el siguiente ejemplo:

Pensemos en un grupo de animales conformado de la siguiente manera: halcón, ratón, saltamontes, sapo y serpiente, sabemos que el halcón come serpientes y ratones, que las serpientes comen sapos y ratones y que el saltamontes es alimento de sapos y ratones. Una manera explícita con la que podemos mostrar si un animal se alimenta de otro es la siguiente:



Donde cada animal es representado con un punto (vértice) y ponemos una flecha de un punto a otro si es que el primer animal es alimento del segundo. Esta representación es un ejemplo de lo que llamaremos una digráfica, (en este trabajo usaremos el término de digráfica).

Si observamos con detalle este ejemplo y de esta digráfica tomamos los puntos correspondientes al halcón y al sapo, notamos que no hay flecha alguna entre ellos, además de que de los puntos restantes si existe una flecha hacia alguno de estos dos puntos.

Digráficas y conjuntos de puntos que cumplen estas características (a los que posteriormente llamaremos núcleos) serán nuestros principales objetos de estudio a lo largo de los tres capítulos.

Capítulo 1

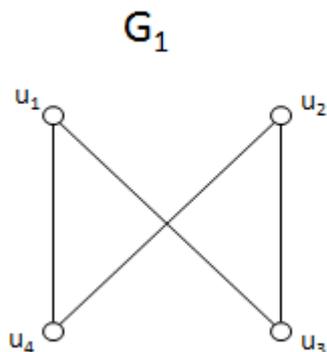
Núcleos en digráficas

En este primer capítulo daremos las definiciones de gráfica y digráfica, también definiremos algunos de los conceptos más importantes de esta teoría, enfocándonos principalmente en aquellos relacionados con los núcleos, así como algunos resultados importantes que nos ayudarán a poner las bases para los siguientes capítulos.

1.1. Digráficas

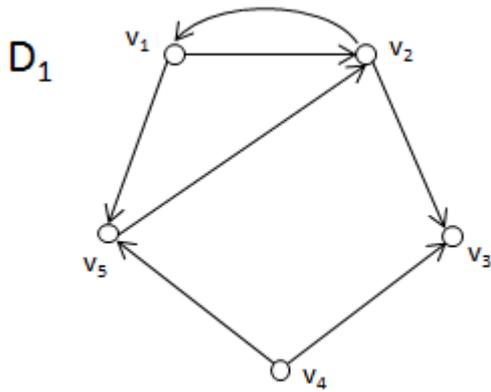
Definición 1.1.1. Una **gráfica** $G=(V, A)$ consiste de un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices**, al que denotamos por $V(G)$ y de $A \subseteq V \times V$ un conjunto de pares no ordenados de vértices llamados las **aristas** de G , al que denotamos por $A(G)$.

Por ejemplo, podemos definir una gráfica $G_1 = (V_1, A_1)$ como el conjunto $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ junto con $A_1 = \{(u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_2, u_4)\}$ a la que podemos dar la siguiente representación:

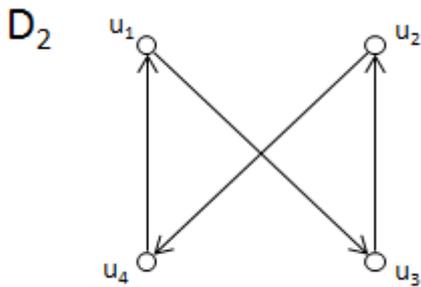


Definición 1.1.2. Una **digráfica** $D=(V, F)$ consiste de un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices**, al que denotamos por $V(D)$ y de $F \subseteq V \times V$ un conjunto de pares ordenados de vértices llamados las **flechas** de D , al que denotamos por $F(D)$.

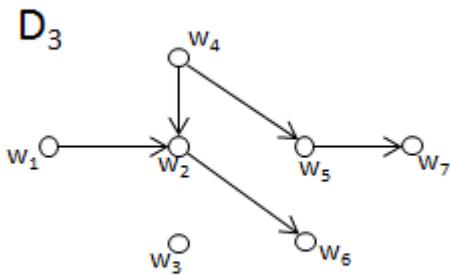
Por ejemplo, podemos definir una digráfica $D_1 = (V_1, F_1)$ como el conjunto $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ junto con $F_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_2)\}$ a la que podemos dar la siguiente representación:



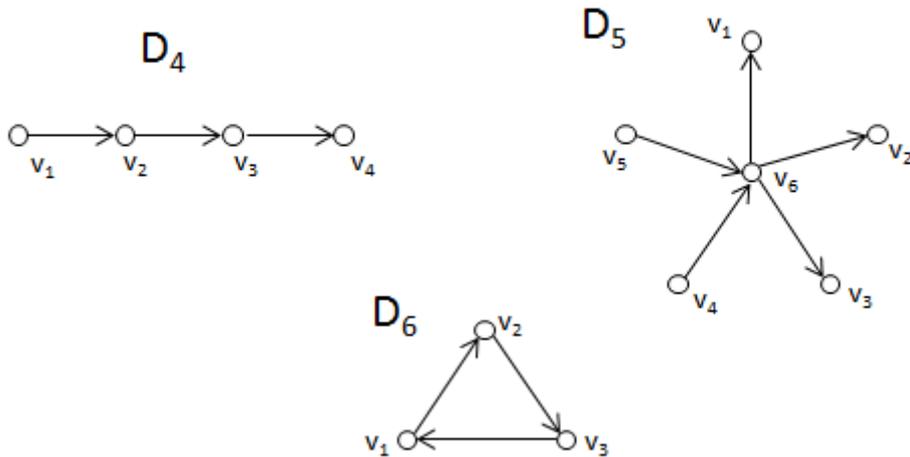
La digráfica $D_2 = (V_2, F_2)$ con $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $F_2 = \{(u_1, u_3), (u_3, u_2), (u_2, u_4), (u_4, u_1)\}$ tiene como representación:



La digráfica $D_3 = (V_3, F_3)$ con $V_3 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$ y $F_3 = \{(w_1, w_2), (w_2, w_6), (w_4, w_2), (w_4, w_5), (w_5, w_7)\}$ tiene como representación:

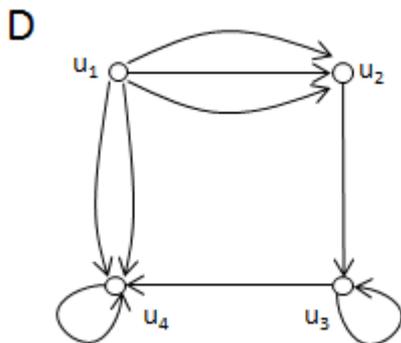


A continuación mostramos más ejemplos de digráficas.



Definición 1.1.3. Una **multidigráfica** $D=(V, F)$ es una digráfica en la que están permitidas flechas del tipo $f=(u,u)$, estas flechas son llamadas **bucles** o **loops**, así como **flechas múltiples**, las cuales son dos o más flechas de un vértice u a un vértice v .

Por ejemplo tenemos la siguiente multidigráfica $D_1 = (V_1, F_1)$ como el conjunto $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ junto con $F_1 = \{(u_1, u_2), (u_1, u_2), (u_1, u_2), (u_1, u_4), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_3, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_4)\}$ a la que podemos dar la siguiente representación:



A lo largo de este capítulo trabajaremos sólo con digráficas, dejando para los capítulos posteriores el uso de multidigráficas.

Definición 1.1.4. En una digráfica $D=(V, F)$ Si $f=(u, v)$ es una flecha de $F(D)$, representada por: $\bigcirc_u \longrightarrow \bigcirc_v$ diremos que:

- f incide hacia v .
- f incide desde u .
- u es adyacente hacia v .
- v es adyacente desde u .

Definición 1.1.5. En una digráfica $D=(V, F)$ El **ingrado** de un vértice u en $V(D)$, denotado por $\delta_D^-(u)$, es igual al número de flechas que inciden hacia u .

El **exgrado** de un vértice u en $V(D)$, denotado por $\delta_D^+(u)$, es igual al número de flechas que inciden desde u .

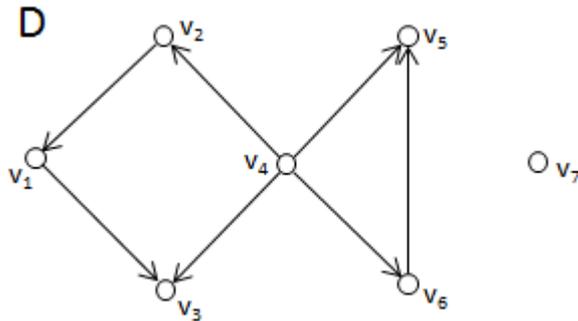
El **grado** de un vértice u en $V(D)$, denotado por $\delta_D(u)$, es igual a la suma del ingrado y exgrado de u ; $\delta_D(u) = \delta_D^-(u) + \delta_D^+(u)$.

Definición 1.1.6. Decimos que un vértice v en $V(D)$ es un **pozo** si $\delta_D^+(v) = 0$, es decir si no hay flechas que inciden desde v .

Decimos que un vértice v en $V(D)$ es una **fuerza** si $\delta_D^-(v) = 0$, es decir si no hay flechas que inciden hacia v .

Un vértice v en $V(D)$ es llamado **vértice aislado** si cumple que $\delta_D^+(v) = \delta_D^-(v) = 0$, es decir si no hay flechas que inciden desde v ni hacia v .

Con las definiciones anteriores y dada la siguiente digráfica D , obtenemos la siguiente información:



$$\begin{aligned} \delta_D^+(v_1) = \delta_D^-(v_1) = 1 & & \delta_D^+(v_2) = \delta_D^-(v_2) = 1 & & \delta_D^+(v_3) = 0, \delta_D^-(v_3) = 2 \\ \delta_D^+(v_4) = 4, \delta_D^-(v_4) = 0 & & \delta_D^+(v_5) = 0, \delta_D^-(v_5) = 2 & & \delta_D^+(v_6) = \delta_D^-(v_6) = 1 \\ \delta_D^+(v_7) = \delta_D^-(v_7) = 0 & & & & \end{aligned}$$

Los vértices v_3 y v_5 son pozos, el vértice v_4 es fuerza y el vértice v_7 es un vértice aislado.

Tras estas definiciones iniciales, tenemos un primer teorema:

Teorema 1.1.1. Si D es una digráfica entonces se cumple que:

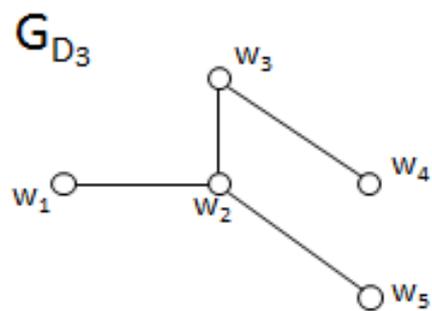
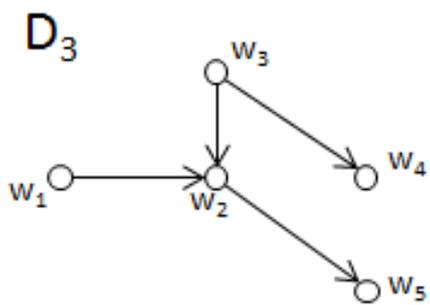
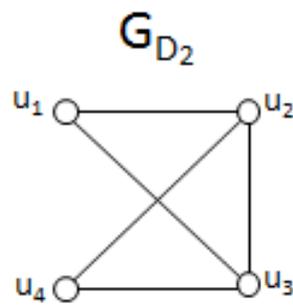
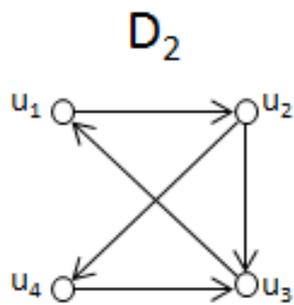
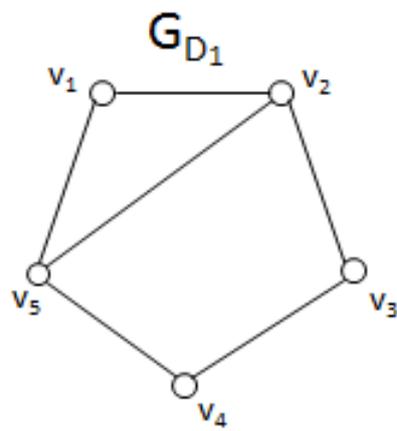
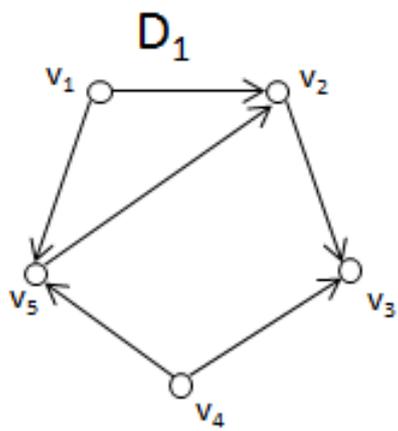
$$\sum \delta_D^-(u) = \sum \delta_D^+(u) = |V(D)|, \quad \text{con } u \text{ en } V(D).$$

Demostración. Cada flecha f en $F(D)$ tiene un solo vértice de salida y un solo vértice de llegada, en palabras antes dichas, cada flecha incide desde un único vértice e incide hacia un único vértice entonces está contada exactamente una vez en la suma de los exgrados, así como en la suma de los ingrados. \square

Con la siguiente definición podemos observar que a cada digráfica la podemos relacionar con una gráfica.

Definición 1.1.7. Sea $D=(V, F)$ una digráfica, la gráfica subyacente de D denotada G_D está definida por $V(G_D) = V(D)$ y diremos que un vértice u es adyacente a un vértice v en G_D si y sólo si (u, v) está en $F(D)$ o (v, u) está en $F(D)$.

Ejemplos:



En los ejemplos vemos que G_{D_1} es la gráfica subyacente de D_1 , G_{D_2} es la gráfica subyacente de D_2 y G_{D_3} es la gráfica subyacente de D_3 .

1.2. Caminos, trayectorias, ciclos

Definición 1.2.1. Sea D una digráfica, definimos:

- Un **camino** en D es una sucesión de vértices $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ tal que la flecha (v_i, v_{i+1}) está en $F(D)$ o la flecha (v_{i+1}, v_i) está en $F(D)$ con i tal que $0 \leq i \leq n - 1$.

La longitud de un camino denotada por $\ell(C)$ es igual al número de flechas, contando repeticiones, que hay en dicho camino.

- Un **camino dirigido** en D es una sucesión de vértices $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ tal que (v_i, v_{i+1}) está en $F(D)$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n - 1$.

- Una **trayectoria** es un camino en el que no se repiten vértices.

La longitud de una trayectoria denotada por $\ell(T)$ es igual al número de flechas que hay en dicha trayectoria.

- Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

Si en una digráfica D tenemos un camino que inicia en un vértice u y termina en un vértice v , diremos que es un **uv -camino**, de la misma manera tendremos un **uv -camino dirigido**, una **uv -trayectoria** y una **uv -trayectoria dirigida**.

- Un **camino cerrado** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.

- Un **camino dirigido cerrado** es un camino dirigido que empieza y termina en el mismo vértice.

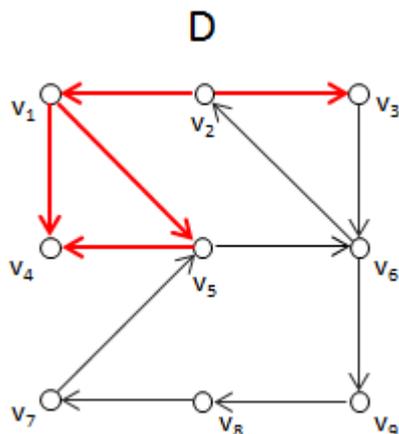
- Un **ciclo** es un camino cerrado en el que no hay vértices repetidos a excepción del vértice inicial (que también es el final).

La longitud de un ciclo denotada por $\ell(C)$ es igual al número de flechas que hay en dicho ciclo, siempre $\ell(C) \geq 2$.

- Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido cerrado en el que no hay vértices repetidos a excepción del vértice inicial (que también es el final).

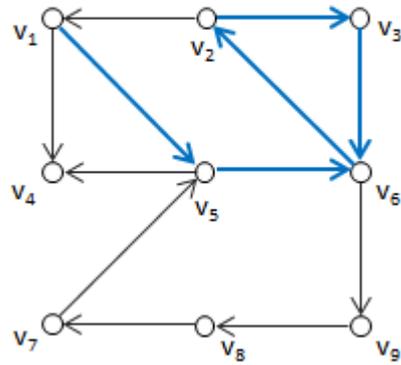
Ejemplos:

Dada la siguiente digráfica D vemos que:



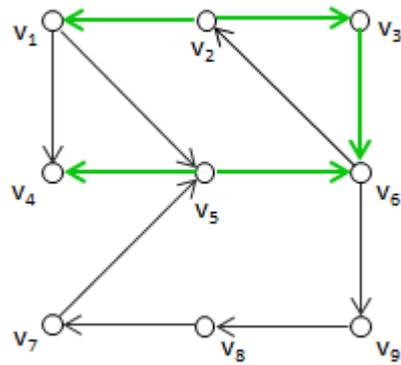
$(v_2, v_1, v_4, v_5, v_1, v_2, v_3)$ es un camino de longitud 6 en D .

D



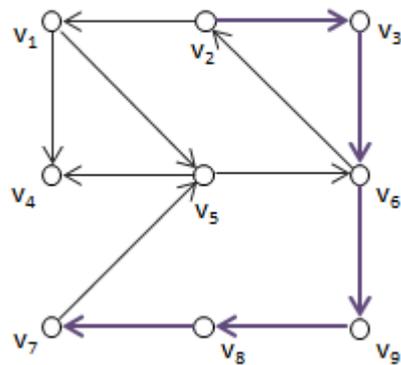
$(v_1, v_5, v_6, v_2, v_3, v_6, v_2)$ es un camino dirigido de longitud 6 en D .

D

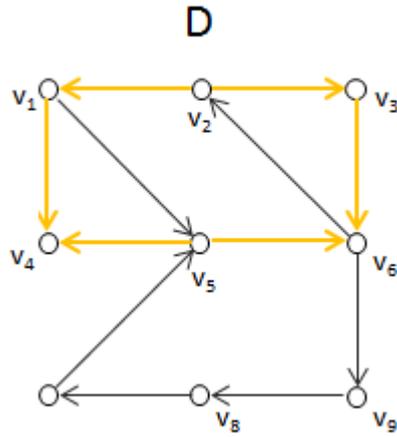


$(v_4, v_5, v_6, v_3, v_2, v_1)$ es una trayectoria de longitud 5 en D .

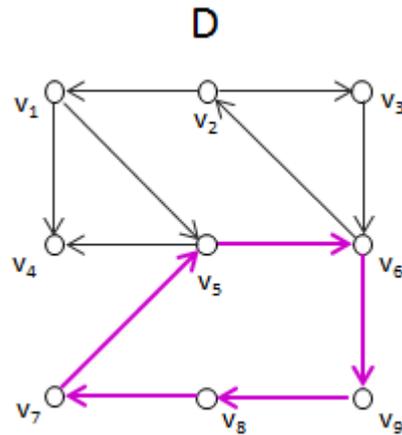
D



$(v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, v_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud 5 en D .



$(v_1, v_4, v_5, v_6, v_3, v_2)$ es un ciclo de longitud 6 en D .



$(v_5, v_6, v_9, v_8, v_7, v_5)$ es un ciclo dirigido de longitud 5 en D .

A partir de las definiciones anteriores obtenemos los siguientes teoremas:

Teorema 1.2.1. *En una digráfica sin bucles todo uv -camino dirigido contiene como subsucesión una uv -trayectoria dirigida.*

Demostración. Por inducción sobre la longitud del camino.

1. Base. Veamos los casos donde $\ell(C)=0$ y $\ell(C)=1$.

Si $\ell(C)=0$ entonces $C = (u)$, por lo que C es una trayectoria dirigida pues no hay vértices repetidos.

Si $\ell(C)=1$ entonces $C = (u, v)$, vemos que u es diferente a v pues hay una flecha entre ellos, y si u y v fueran el mismo vértice tendríamos un bucle, algo que dijimos que no teníamos por lo tanto C es trayectoria dirigida.

2. Hipótesis inductiva. Suponer que todo uv -camino dirigido de longitud menor a n contiene como subsucesión a una uv -trayectoria dirigida.

3. Por demostrar que todo uv -camino dirigido de longitud n tiene como subsucesión una uv -trayectoria dirigida.

Sea $C = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ un uv -camino dirigido de longitud n .

Caso 1) Si $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$ entonces C ya es una uv -trayectoria dirigida.

Caso 2) Si existen u_i, u_j con $i \neq j$ tal que $u_i = u_j$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces podemos expresar a C como $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = v)$ y vemos que $C' = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = u)$ es un uv -camino de longitud menor a n (figura 1.2.1).

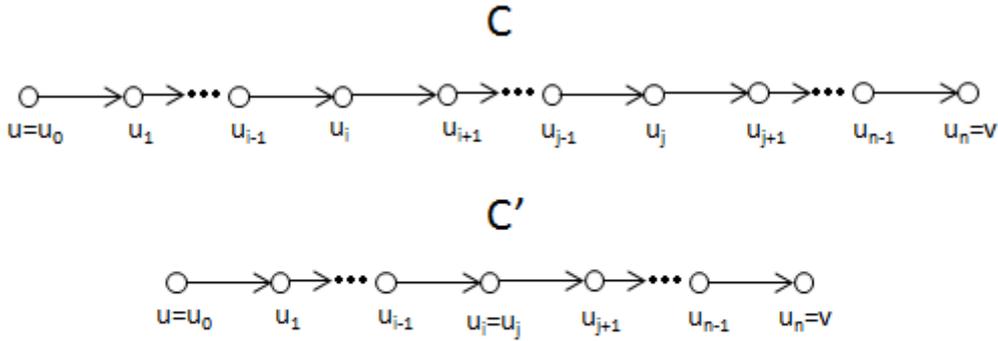


Figura 1.2.1

Por la hipótesis de inducción C' contiene una uv -trayectoria dirigida T , $T \subseteq C'$ y $C' \subseteq C$ por lo que C contiene una uv -trayectoria dirigida.

Por lo tanto todo uv -camino dirigido contiene una uv -trayectoria dirigida. \square

Teorema 1.2.2. *Todo camino dirigido cerrado contiene un ciclo dirigido.*

Demostración. Por inducción sobre $\ell(C)$.

1. Base. Si $\ell(C) = 2$ entonces $C = (u_0, u_1, u_2 = u_0)$ es un ciclo ya que $u_0 \neq u_1$ y $u_1 \neq u_2$ pues (u_0, u_1) y (u_1, u_2) están en $F(D)$.
2. Hipótesis de inducción. Supongamos que todo camino dirigido cerrado de longitud menor a n contiene un ciclo dirigido.
3. Por demostrar que todo camino dirigido cerrado de longitud n tiene un ciclo dirigido.

Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud n .

Caso 1) $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$, en este caso C es un ciclo dirigido.

Caso 2) existen i, j tal que $u_i = u_j$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$.

Por lo que $C = (u_0, u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j = u_i, u_{j+1}, \dots, u_n = u_0)$, observemos que obtenemos dos caminos dirigidos cerrados; $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = u_0)$ y $C_2 = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j = u_i)$.

Se cumple que: $\ell(C) = \ell(C_1) + \ell(C_2)$, por lo que $\ell(C_1) < n$ y $\ell(C_2) < n$.

Por la hipótesis de inducción C_1 (al igual que C_2) contiene un ciclo dirigido (figura 1.2.2).

Por lo tanto C contiene un ciclo dirigido. \square

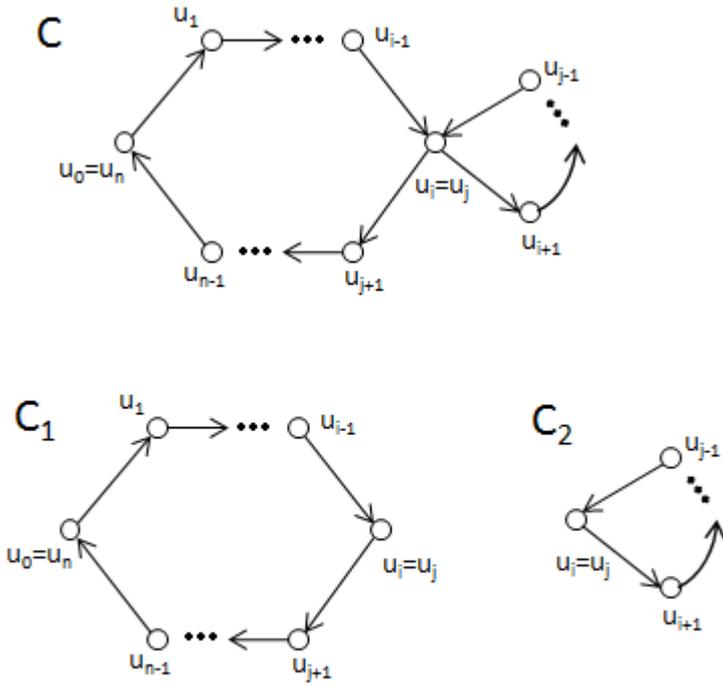
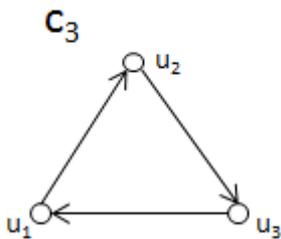


Figura 1.2.2

Teorema 1.2.3. *En una digráfica D todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Demostración. Por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado.

1. Base. Si $\ell(C)=3$ entonces $C = (u_0, u_1, u_2, u_3 = u_0)$, y las flechas (u_i, u_{i+1}) están en $F(D)$ con $0 \leq i \leq 2$. $u_0 \neq u_1, u_1 \neq u_2, u_2 \neq u_3 = u_0$ pues $(u_0, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_0)$ están en $F(D)$. Por tanto C es un ciclo de longitud 3.



2. Hipótesis de Inducción. Supongamos que todo camino dirigido cerrado de longitud impar menor a $2n + 1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

3. Por demostrar que todo camino dirigido cerrado de longitud $2n + 1$ tiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $C=(u_0, u_1, \dots, u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n+1} = u_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud $2n + 1$.

Caso 1) $u_i \neq u_j$ para todo i, j . En este caso C es un ciclo dirigido de longitud impar.

Caso 2) existen i, j con $i \neq j$ tal que $u_i = u_j$, y sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces vemos a C como: $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_j = u_i, u_{j+1}, \dots, u_{2n+1} = u_0)$

Sean $C_1 = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_j = u_i)$ y $C_2 = (u_0, u_1, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_{2n}, u_{2n+1} = u_0)$. Como $C = C_1 \cup C_2$ entonces $\ell(C) = \ell(C_1) + \ell(C_2)$, ya que $\ell(C)$ es impar, entonces $\ell(C_1)$ o $\ell(C_2)$ es impar; sin pérdida de generalidad supongamos que $\ell(C_1)$ es impar, además $\ell(C_1) < \ell(C) = 2n + 1$. Por la hipótesis de inducción C_1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, por lo tanto C tiene un ciclo dirigido de longitud impar. \square

Teorema 1.2.4. *Sea D una digráfica, si para todo v en $V(D)$ $\delta_D^-(v) \geq 1$, entonces D tiene un ciclo dirigido.*

Demostración. Sea $T = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D . Como $\delta_D^-(v_0) \geq 1$, entonces hay una fecha que incide hacia v_0 ; es decir, existe un vértice u tal que (u, v_0) está en $F(D)$.

Caso 1) si u es un vértice que pertenece a la trayectoria T , entonces $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, u, v_0)$ es un ciclo dirigido en D .

Caso 2) si u no está en T entonces tomemos $T' = (u, v_0) \cup (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$, T' es una trayectoria de longitud mayor a la de T , ésto es una contradicción pues T era la trayectoria de longitud máxima (figura 1.2.3).

Por lo tanto, D tiene un ciclo dirigido. \square

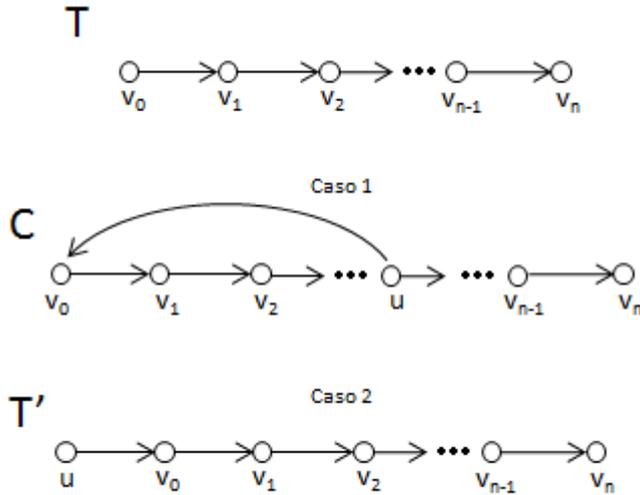


Figura 1.2.3

Análogamente se prueba que si para todo v en $V(D)$ $\delta_D^+(v) \geq 1$, entonces D tiene un ciclo dirigido.

Teorema 1.2.5. *Sea D una digráfica, si para todo v en $V(D)$ $\delta_D^+(v) \geq k$ con $k \geq 1$, entonces D tiene una trayectoria dirigida de longitud mayor o igual a k .*

Demostración. Sea D una digráfica y consideremos una trayectoria dirigida de longitud máxima en D $T = (u_0, u_1, \dots, u_m)$, $\ell(T) = m$.

Si $m \geq k$ ya se cumple lo que queremos por lo que supongamos que $m < k$. Como $\delta_D^+(u_m) \geq k$ y $m < k$, y solo hay m vértices en T distintos de u_m entonces supongamos que de u_m inciden flechas a todos ellos, pero como $\delta_D^+(u_m) \geq k > m$ entonces existe al menos un vértice u_n que no está en $V(T)$ tal que (u_m, u_n) está en $F(D)$ (figura 1.2.4).

Así $T' = T \cup (u_m, u_n)$ es una trayectoria dirigida y $\ell(T') > \ell(T)$, ésto es una contradicción pues T era una

trayectoria dirigida de longitud máxima, por lo que $m \geq k$.

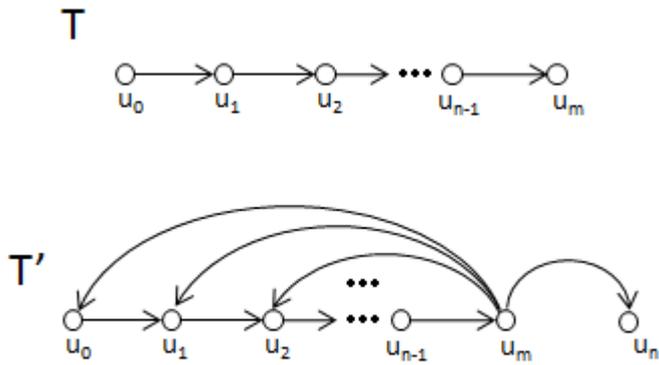
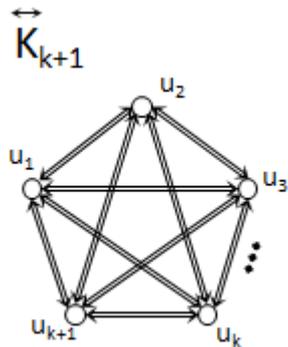


Figura 1.2.4

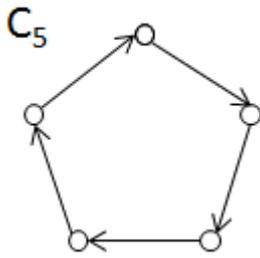
Por lo tanto D tiene una trayectoria dirigida de longitud mayor o igual a k . □

Análogamente se prueba que si para todo v en $V(D)$ $\delta_D^-(v) \geq k$ con $k \geq 1$, entonces D tiene una trayectoria dirigida de longitud mayor o igual a k .

Observamos que éste teorema es la mejor aproximación pues en \vec{K}_{k+1} (La digráfica completa de $k + 1$ vértices tal que entre cada par de vértices están las dos flechas entre ellos) todo vértice tiene exgrado e ingrado k y la trayectoria dirigida de longitud máxima tiene longitud k .

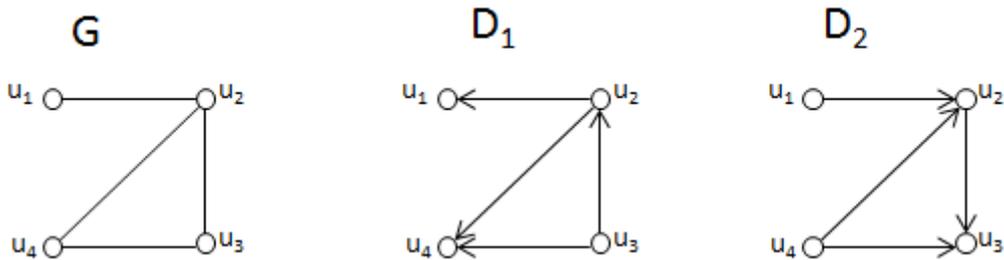


También observamos que el regreso del teorema es falso, pues si la digráfica es un ciclo de 5 vértices, la longitud de la máxima trayectoria dirigida es 4 pero para todo v en $V(D)$ $\delta_D^-(v) = 2 = \delta_D^+(v)$.



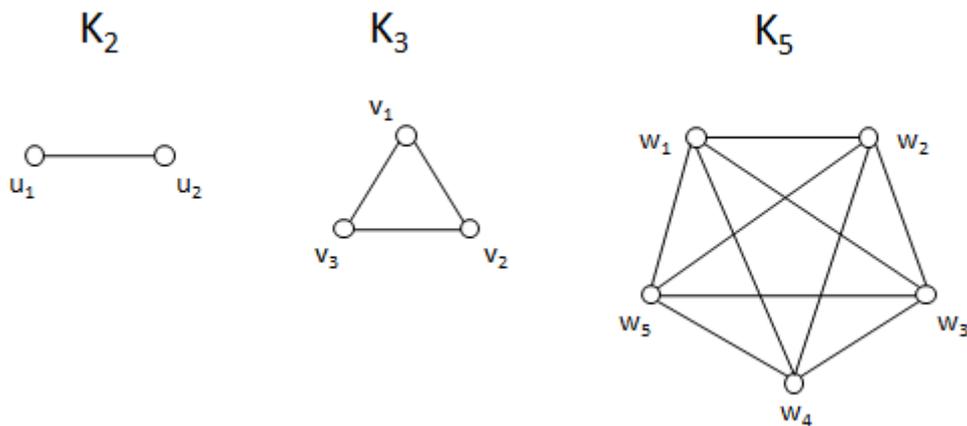
Definición 1.2.2. Dada una gráfica G cualquier digráfica obtenida a partir de G asignándole una y sólo una dirección a cada arista de G es una **orientación de G** .

Ejemplo: sea G la siguiente gráfica, D_1 y D_2 son orientaciones de G .



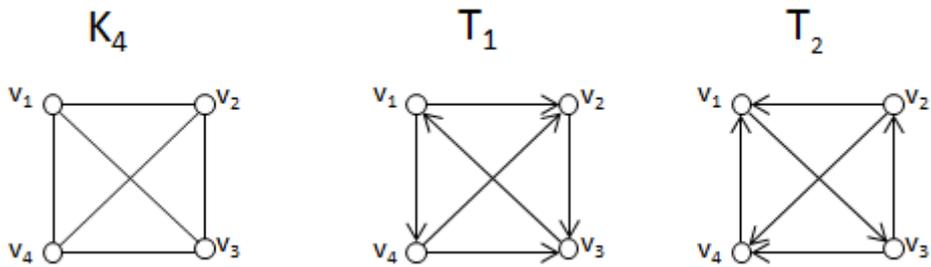
Definición 1.2.3. Dirémos que una gráfica G es **completa** si para cualquier par de vértices u, v en $V(G)$ la arista (u, v) pertenece a $A(G)$. Y las denotamos k_n donde n es el número de vértices de la gráfica.

Ejemplos:



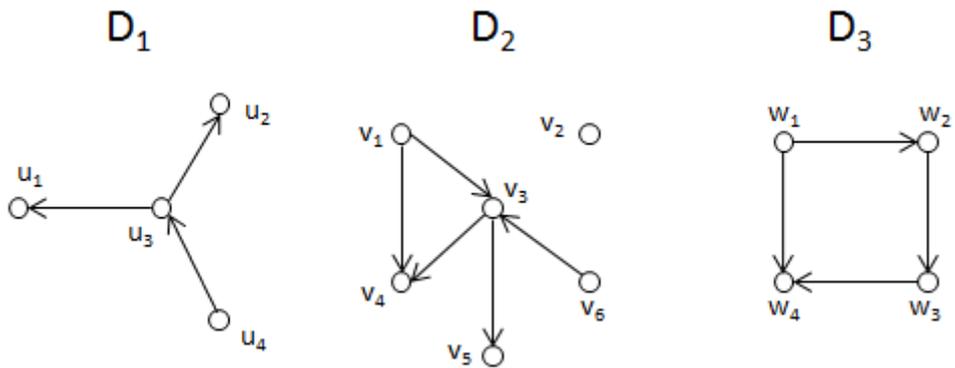
Definición 1.2.4. Un **torneo** es cualquier orientación de una gráfica completa.

Ejemplo: sea K_4 la gráfica completa de cuatro vértices. T_1 y T_2 son dos torneos de 4 vértices.



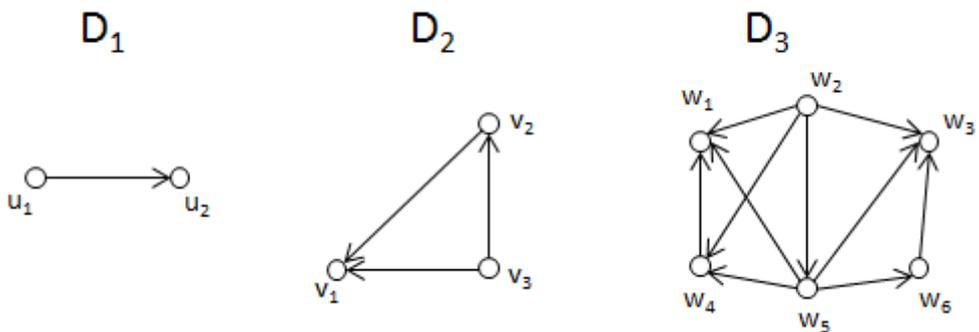
Definición 1.2.5. Una digráfica D es **acíclica** si no tiene ciclos dirigidos.

Ejemplos:



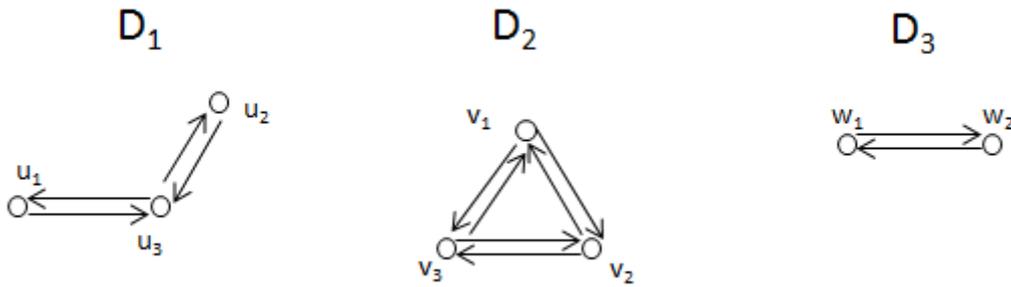
Definición 1.2.6. Una digráfica D es **transitiva** si para cualesquiera tres vértices u, v y w que están en $V(D)$ se cumple que si (u, v) y (v, w) pertenecen a $F(D)$, entonces (u, w) también es un elemento de $F(D)$.

Ejemplos:



Definición 1.2.7. Una digráfica D es **simétrica** si se cumple que para dos vértices u y v en $V(D)$, si $(u, v) \in F(D)$ entonces $(v, u) \in F(D)$.

Ejemplos:



Teorema 1.2.6. Si D es una digráfica transitiva y $\tau = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ es una trayectoria dirigida en D , entonces (u_0, u_n) pertenece a $F(D)$.

Demostración. Por inducción sobre la longitud de la trayectoria.

1. Base. Si $\ell(\tau) = 1$ es inmediato.

Si $\ell(\tau) = 2$, $\tau = (u_0, u_1, u_2)$, como (u_0, u_1) y (u_1, u_2) están en $F(D)$ y D es transitiva entonces (u_0, u_2) también está en $F(D)$.

2. Hipótesis de Inducción. Supongamos que para toda trayectoria dirigida de longitud m , $\tau = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ con m menor a n , se cumple que la flecha (u_0, u_m) pertenece a $F(D)$.

3. Por demostrar que para toda trayectoria dirigida de longitud n $\tau = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, se cumple que la flecha (u_0, u_n) pertenece a $F(D)$.

Sean $\tau = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)$ una trayectoria dirigida de longitud n , y $\tau' = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ una trayectoria dirigida de longitud menor a n contenida en τ , entonces por la hipótesis de inducción (u_0, u_{n-1}) está en $F(D)$. Como D es transitiva y $(u_0, u_{n-1}), (u_{n-1}, u_n)$ son flechas de $F(D)$, entonces (u_0, u_n) está en $F(D)$ (figura 1.2.5). □

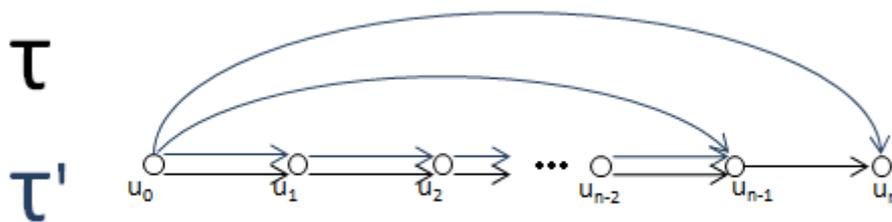


Figura 1.2.5

Teorema 1.2.7. Un torneo es acíclico si y sólo si es transitivo.

Demostración. \Rightarrow) Sea T un torneo acíclico, supongamos que T no es transitivo, entonces existen tres vértices u, v, w en $V(T)$ tales que sin pérdida de generalidad (u, v) y (v, w) están en $F(T)$ y (u, w) no está en $F(T)$. Como T es un torneo y $(u, w) \notin F(D)$ entonces $(w, u) \in F(D)$, ésto es una contradicción pues tendríamos que $\gamma = (u, v, w, u)$ es un ciclo dirigido. Por lo tanto si T es acíclico, entonces es transitivo.

\Leftrightarrow) Sea T un torneo transitivo. Supongamos que en T hay un ciclo dirigido $\gamma = (u_0, u_1, u_1, \dots, u_n, u_0)$, como T es transitivo, por el teorema 1.2.5 la flecha (u_0, u_n) está en $F(T)$, ésto es una contradicción pues (u_n, u_0) pertenece a γ , por lo que T es acíclico.

Por lo tanto T es un torneo transitivo si y sólo si es acíclico. \square

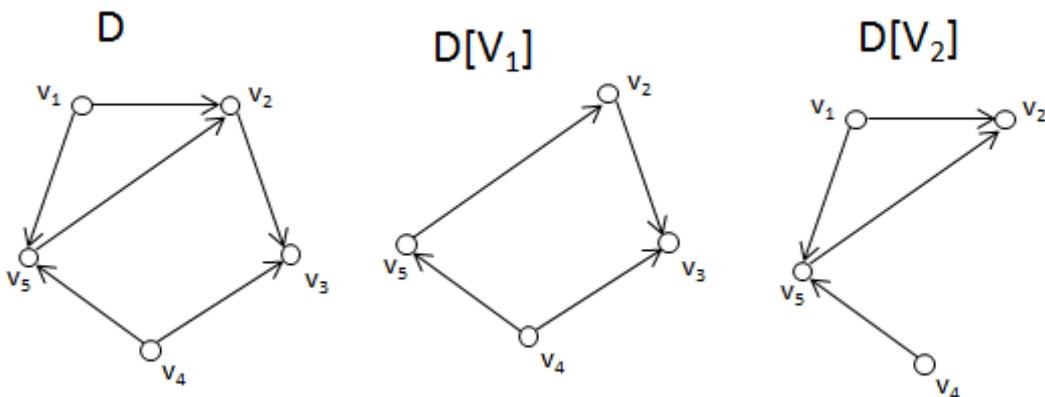
Corolario 1.2.1. *Cada torneo transitivo tiene exactamente una fuente y un pozo.*

Demostración. Sea T un torneo transitivo, primero supongamos que T no tiene fuentes, entonces para todo v en $V(D)$ $\delta_D^-(v) \geq 1$, si se cumple esto, por el teorema 1.2.4, T tiene un ciclo pero esto es una contradicción pues T es transitivo y por el teorema 1.2.7 T es acíclico. La misma contradicción surge al suponer que T no tiene pozos (nuevamente por los teoremas 1.2.4 y 1.2.7). Por lo tanto T si tiene una fuente y un pozo.

Ahora veamos que éstos son únicos. Supongamos que T tiene dos fuentes u_1 y u_2 , como T es un torneo entonces entre u_1 y u_2 hay una flecha, sin pérdida de generalidad supongamos que (u_1, u_2) está en $F(T)$ pero esto implicaría que $\delta_D^-(u_2) \geq 1$ y así u_2 ya no sería fuente, por lo que u_1 es la única fuente. Análogamente suponiendo que v_1 y v_2 son dos pozos de T , como T es un torneo, entonces entre v_1 y v_2 hay una flecha, sin pérdida de generalidad supongamos que (v_1, v_2) está en $F(T)$ pero esto implicaría que $\delta_D^+(v_1) \geq 1$ y así v_1 ya no sería pozo, por lo que v_2 es el único pozo de T . Por lo tanto cada torneo transitivo tiene exactamente una fuente y un pozo. \square

Definición 1.2.8. *Sea $D = (V, F)$ una digráfica, dado un V_1 subconjunto de vértices de D , definimos la subdigráfica inducida V_1 de D denotada por $D[V_1]$, donde $V(D[V_1]) = V_1$ y $F(D[V_1]) = \{f \in F \text{ tal que } f \text{ incide desde un vértice } u \text{ en } V_1 \text{ hacia un vértice } v \text{ en } V_1\}$.*

Ejemplo: Sea D la siguiente digráfica



$D[V_1]$ es la subdigráfica inducida V_1 de D donde $V_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $D[V_2]$ es la subdigráfica inducida V_2 de D , donde $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Teorema 1.2.8. (Redei) *Todo torneo tiene una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices de éste.*

Demostración. Por Inducción sobre el número de vértices del torneo.

1. Base. Si el torneo es trivial (de un vértice) el resultado es inmediato.

Si T tiene solamente dos vértices v_1, v_2 entonces siempre hay una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices y ésta es la flecha que va de un vértice al otro (figura 1.2.6).

Si T tiene tres vértices existen solo dos torneos diferentes, los cuales se puede observar tienen una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices (figura 1.2.6).

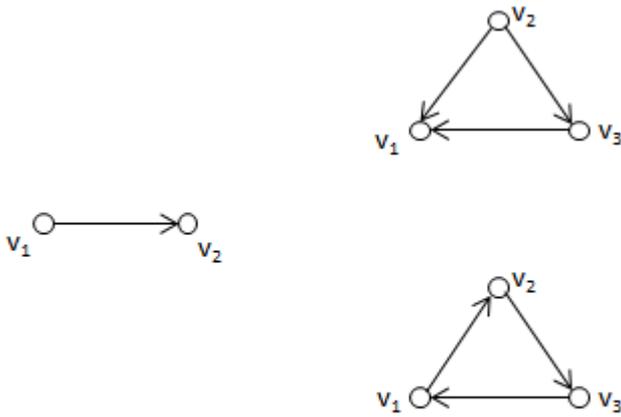


Figura 1.2.6 Todos los torneos de 2 y 3 vértices.

2. Hipótesis de Inducción. Supongamos que los torneos con menos de n vértices siempre tienen una trayectoria dirigida que pasa por todos sus vértices.

3. Por demostrar que todo torneo con n vértices siempre tiene una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices.

Sea T un torneo con n vértices y tomemos el vértice v_n en $V(T)$. La subgráfica inducida por el conjunto de vértices $V(T) \setminus \{v_n\}$ en T es un torneo T' que tiene $n - 1$ vértices, por hipótesis de inducción, en T' hay una trayectoria dirigida que pasa por todos sus vértices. Supongamos sin pérdida de generalidad que esta trayectoria es $\tau = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$. Si la trayectoria dirigida τ está en T' , entonces también está en T .

Caso 1) Si en T existiera la flecha que va de v_n hacia v_1 entonces $(v_n, v_1) \cup \tau$ sería una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices de T (figura 1.9).

Caso 2) Si en T existiera la flecha que va de v_{n-1} hacia v_n entonces $\tau \cup (v_n, v_{n-1})$ sería una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices de T (figura 1.2.7).

En caso contrario a los casos 1 y 2, existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ el mayor número tal que $v_j \rightarrow v_n$ para toda j con $1 \leq j \leq i$. Por lo que existen una flecha de v_i hacia v_n y una de v_n hacia v_{i+1} . Así, $(v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{i+1}, \dots, v_{n-1})$ es una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices de T (figura 1.2.7). Por lo tanto todo torneo tiene una trayectoria dirigida que pasa por todos sus vértices. \square

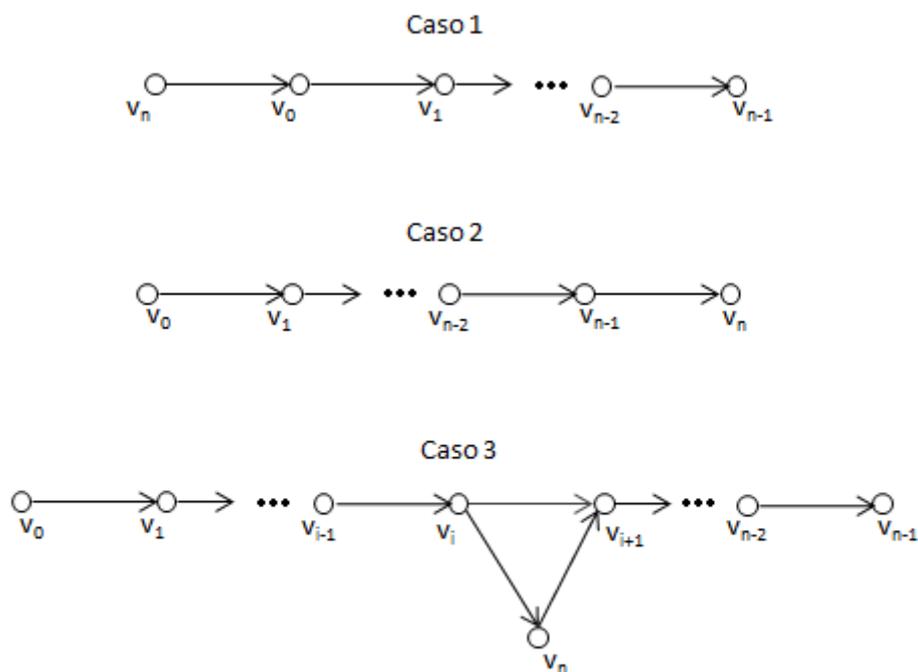


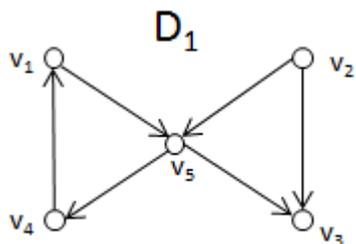
Figura 1.2.7

1.3. Núcleos

A continuación presentamos el concepto de núcleo de una digráfica, un concepto esencial en el desarrollo de este trabajo ya que gran parte de los resultados que presentamos giran en torno al concepto de núcleo. Antes de dar la definición de un núcleo necesitamos un par de definiciones que son las siguientes:

Definición 1.3.1. Sea D una digráfica, diremos que un conjunto $S \subseteq V(D)$ es **independiente** si para cualquiera par de vértices u y v en S no existe flecha en D entre ellos.

Ejemplo:

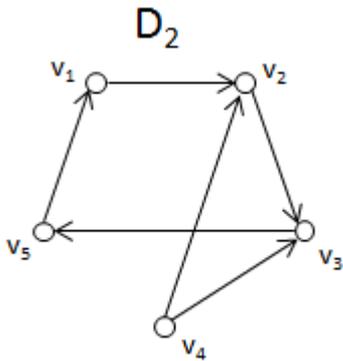


En la digráfica D_1 observamos que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son algunos conjuntos independientes.

Podemos notar que toda digráfica tiene al menos un conjunto $S \subseteq V(D)$ no vacío que es independiente, basta con tomar un conjunto que contenga a un solo vértice.

Definición 1.3.2. Sea D una digráfica, diremos que un conjunto $S \subseteq V(D)$ es **absorbente** si para cada $z \in V(D) \setminus S$ existe una zS -flecha (flecha que empieza en z y termina en algún vértice de S).

Ejemplo:

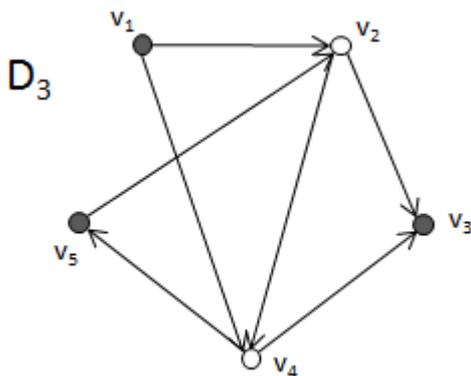


En la digráfica D_2 se observa que $\{v_1, v_3\}$ y $\{v_2, v_5\}$ son dos conjuntos absorbentes.

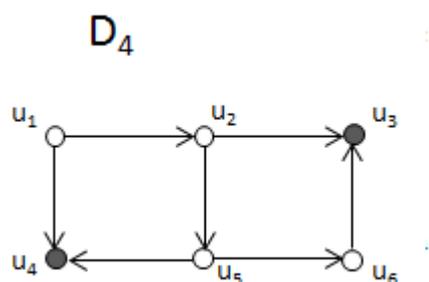
Se puede observar que toda digráfica tiene al menos un conjunto $S \subseteq V(D)$ que es absorbente, basta con tomar el conjunto $S = V(D)$.

Definición 1.3.3. Sea D una digráfica, un conjunto $N \subseteq V(D)$ es llamado **Núcleo** de D si es independiente y absorbente.

Ejemplo:

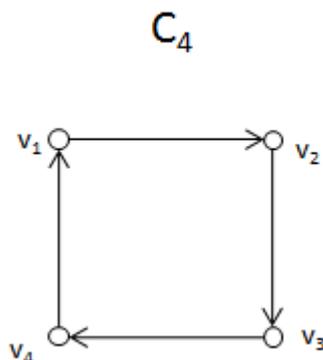
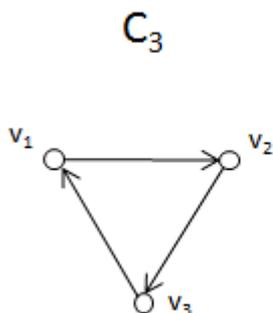


En la digráfica D_3 los vértices v_1, v_3 y v_5 forman un núcleo pues se observa que $N = \{v_1, v_3, v_5\}$ es un conjunto que es independiente y absorbente.



En la digráfica D_4 los vértices u_3 y u_4 forman un núcleo pues podemos observar que $N = \{u_3, u_4\}$ es un conjunto que es independiente y absorbente.

El ciclo dirigido de tres vértices C_3 es un ejemplo de que no todas las digráficas tienen núcleo, pues en C_3 los únicos conjuntos independientes no vacíos son los que contienen un solo vértice, pero ninguno de los tres vértices es absorbente. El ciclo dirigido de cuatro vértices C_4 es un ejemplo de una digráfica que tiene dos núcleos, donde $N_1 = \{v_1, v_3\}$ y $N_2 = \{v_2, v_4\}$ son dos núcleos de C_4 , pues se observa que ambos son conjuntos independientes y absorbentes en C_4 . Por lo que podemos afirmar que existen digráficas que tienen más de un núcleo.



Lema 1.3.1. Sean D una digráfica y N un núcleo de D , se cumple que:

1. N es un conjunto independiente máximo por contención, es decir, que no está contenido en otro conjunto de mayor cardinalidad que también sea independiente.
2. N es un conjunto absorbente mínimo por contención, es decir, que no contiene a otro conjunto absorbente de menor cardinalidad.

Demostración. 1. Sea N un núcleo de D , supongamos que N no es un conjunto independiente máximo por contención, entonces existe un conjunto independiente W tal que $N \subset W$. Sea w en $W \setminus N$, como N es absorbente, entonces existe n en N tal que (w, n) está en $F(D)$ (figura 1.3.1), esto es una contradicción pues W es independiente.

2. Sea N un núcleo de D y supongamos que N no es un conjunto absorbente mínimo por contención, entonces

existe un conjunto absorbente M tal que $M \subset N$. Sea n en $N \setminus M$, como M es absorbente entonces existe m en M tal que (n, m) está en $F(D)$ (figura 1.3.2), esto es una contradicción pues N es independiente. \square

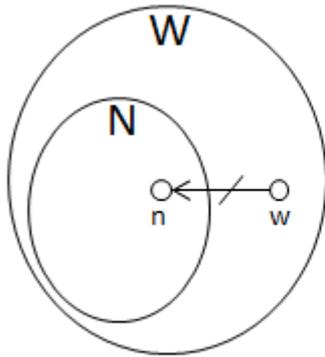


Figura 1.3.1

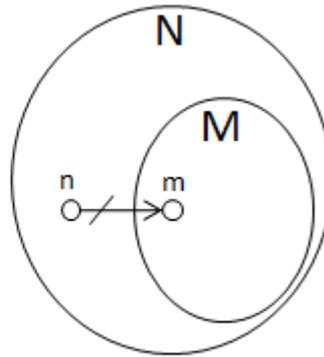
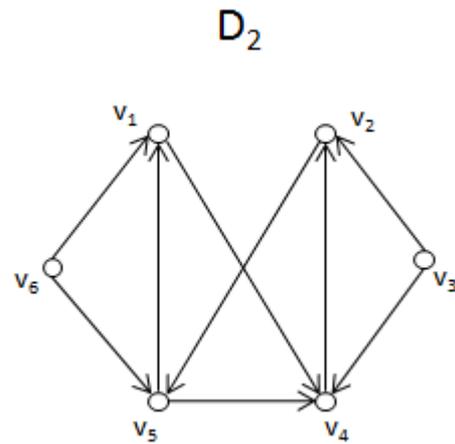
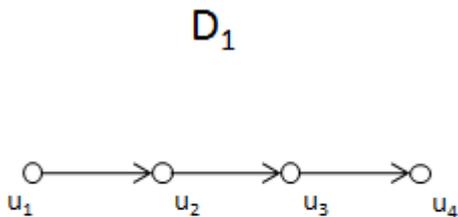


Figura 1.3.2

Notemos que no todo conjunto independiente máximo por contención es núcleo y que no todo conjunto absorbente mínimo por contención es núcleo.

Sean las siguientes digráficas D_1 y D_2 :



Aunque la digráfica D_1 tiene un núcleo $N = \{u_2, u_4\}$, vemos que $\{u_1, u_3\}$ es un conjunto independiente máximo por contención y no es núcleo, puesto que no es absorbente.

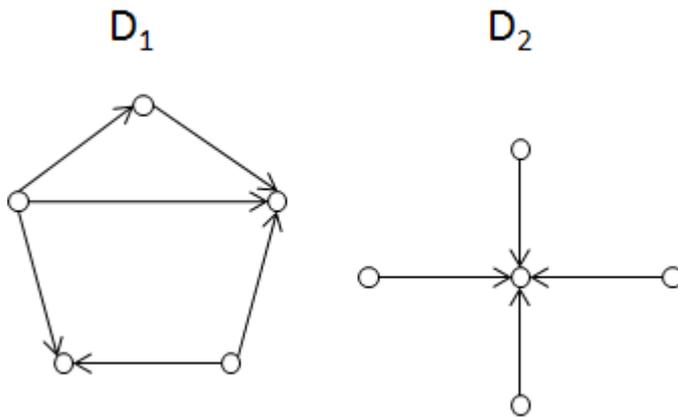
También, aunque la digráfica D_2 tiene un núcleo $N = \{v_1, v_2\}$, vemos que $\{v_4, v_5\}$ es un conjunto absorbente mínimo por contención y no es núcleo, puesto que no es independiente.

1.4. Conexidad en digráficas

A continuación definimos unas clasificaciones de digráficas, para posteriormente dar algunos resultados de núcleos con respecto a este tipo de digráficas.

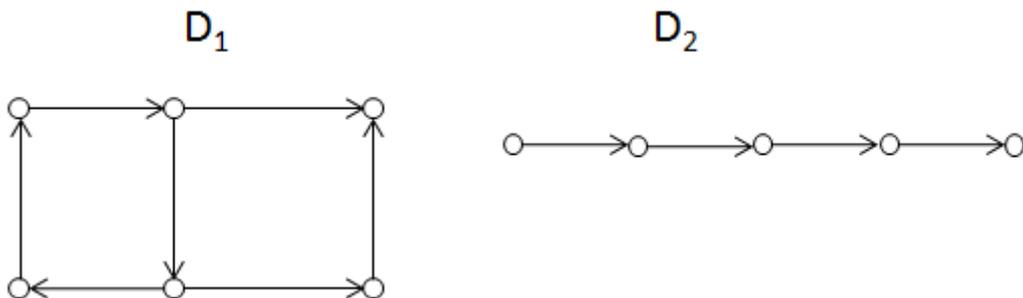
Definición 1.4.1. Una digráfica es *débilmente conexa* si G_D es conexa, es decir, que para todo par de vértices u y v en $V(D)$ existe un uv -camino entre ellos.

Ejemplos:



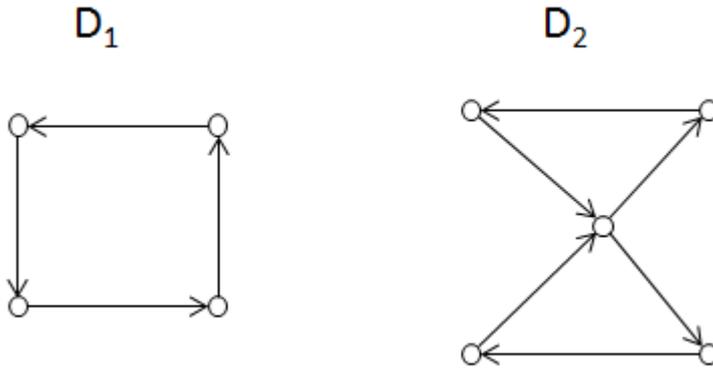
Definición 1.4.2. Una digráfica es *unilateralmente conexa* si para todo par de vértices u y v en $V(D)$ al menos una de las dos siguientes propiedades se cumple: existe un uv -camino dirigido o existe un vu -camino dirigido en D .

Ejemplos:



Definición 1.4.3. Una digráfica D es *fuertemente conexa* si para cualquier par de vértices u y v en $V(D)$, existen un uv -camino dirigido y un vu -camino dirigido en D .

Ejemplos:



Es fácil observar que las digráficas fuertemente conexas son unilateralmente conexas y que las digráficas unilateralmente conexas son débilmente conexas.

Teorema 1.4.1. *Una digráfica es débilmente conexa si y sólo si existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración. \Rightarrow) Sean D una digráfica débilmente conexa y $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_0)$ un camino cerrado que pasa por el mayor número posible de vértices de D . Si $V(C) = V(D)$ ya terminamos. En otro caso, existe w en $V(D) \setminus V(C)$, como D es débilmente conexa existe un camino K de w a u_0 . Sea K' el camino inverso de u_0 a w entonces $K' \cup K \cup C$ sería un camino cerrado que pasa por más vértices que C , contradicción. Por lo tanto no existe un vértice w que no esté en C .

\Leftarrow) Sea $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_0)$ un camino cerrado que pasa por todos los vértices de D , entonces para todo par de vértices u_i, u_j en C , y suponiendo sin pérdida de generalidad que u_i está antes que u_j en C , entonces $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$ es un $u_i u_j$ -camino. Por lo tanto, D es débilmente conexa. \square

Teorema 1.4.2. *Una digráfica es unilateralmente conexa si y sólo si existe un camino dirigido que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración. \Rightarrow) Sean D una digráfica unilateralmente conexa y $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ un camino dirigido que pasa por el mayor número de vértices de D . Si $V(C) = V(D)$ ya terminamos. En otro caso, existe w en $V(D) \setminus V(C)$, si existe un camino dirigido C_0 de w a v_0 entonces $C_0 \cup C$ es un camino dirigido que pasa por más vértices que C , contradicción. Entonces existe un C_0^* camino dirigido de v_0 a w .

Si existe un camino dirigido C_1 de w a v_1 entonces $C_0^* \cup C_1 \cup (v_1, \dots, v_n)$ es un camino dirigido que pasa por más vértices que C , contradicción. Entonces existe un C_1^* camino dirigido de v_1 a w . Si para cada i tal que $v_i \in V(C)$ existe un C_i^* camino dirigido de v_i a w , entonces $C \cup C_n^*$ sería un camino dirigido que pasa por más vértices que C , contradicción.

Si existe j tal que hay un C_j camino dirigido de w a v_j en D , entonces $(v_0, v_1, \dots, v_{j-1}) \cup C_{j-1}^* \cup C_j \cup (v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$ es un camino dirigido que pasa por más vértices que C , contradicción. Por lo tanto no existe un vértice w que no esté en C .

\Leftrightarrow) Sea $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ un camino dirigido que pasa por todos los vértices de D , entonces para todo par de vértices u_i, u_j en C y suponiendo sin pérdida de generalidad que u_i está antes que u_j en C , entonces $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$ es un $u_i u_j$ -camino dirigido. Por lo tanto D es unilateralmente conexa. \square

Teorema 1.4.3. *Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si existe un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración. \Rightarrow) Sean D una digráfica fuertemente conexa y $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_0)$ un camino dirigido cerrado que pasa por el mayor número posible de vértices de D . Si $V(C) = V(D)$ ya terminamos. En otro caso, existe w en $V(D) \setminus V(C)$, como D es fuertemente conexa existe un camino dirigido K de w a u_0 y un camino dirigido K' de u_0 a w , entonces $K \cup K' \cup C$ sería un camino dirigido cerrado que pasa por más vértices que C , contradicción. Por lo tanto no existe un vértice w que no esté en C .

\Leftarrow) Sea $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_0)$ un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de D , entonces para todo par de vértices u_i, u_j en C y suponiendo sin pérdida de generalidad que u_i está antes que u_j en C , entonces $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$ es un $u_i u_j$ -camino dirigido y $(u_j, u_{j+1}, \dots, u_n, \dots, u_0, u_1, u_2, \dots, u_i)$ es un $u_j u_i$ -camino dirigido. Por lo tanto D es fuertemente conexa. \square

Sea D una digráfica, consideremos en $V(D)$ la siguiente relación: $u \sim v$ si y sólo si existen un uv -camino dirigido y un vu -camino dirigido en D (estar fuertemente conectados).

Proposición 1.4.1. *\sim es una relación de equivalencia.*

Demostración. 1) Reflexividad. Es trivial pues si u es un vértice en D , (u) es un camino dirigido de longitud cero, es decir, $u \sim u$.

2) Simetría. Sean u, v en $V(D)$, si $u \sim v$ significa que existen un uv -camino dirigido y un vu -camino dirigido, pero si existen un vu -camino dirigido y un uv -camino dirigido entonces $v \sim u$.

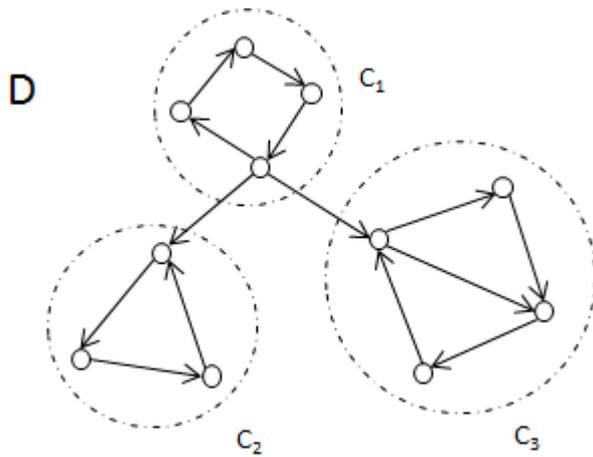
3) Transitividad. Sean u, v, w en $V(D)$. Si $u \sim v$ y $v \sim w$ significa que hay un C_1 uv -camino dirigido, C_2 vu -camino dirigido, C_3 vw -camino dirigido y C_4 wv -camino dirigido. Entonces $C_1 \cup C_3$ es un uw -camino dirigido y $C_2 \cup C_4$ es un wu -camino dirigido. Así $u \sim w$.

Por lo tanto la relación “estar fuertemente conectados” es una relación de equivalencia. \square

Así, observamos que las componentes fuertemente conexas, de una digráfica D , son las subdigráficas inducidas de D por los elementos de la partición generada por \sim .

Definición 1.4.4. *Sea D una digráfica, una **componente fuertemente conexa** de D es una subdigráfica fuertemente conexa máxima por contención con tal propiedad.*

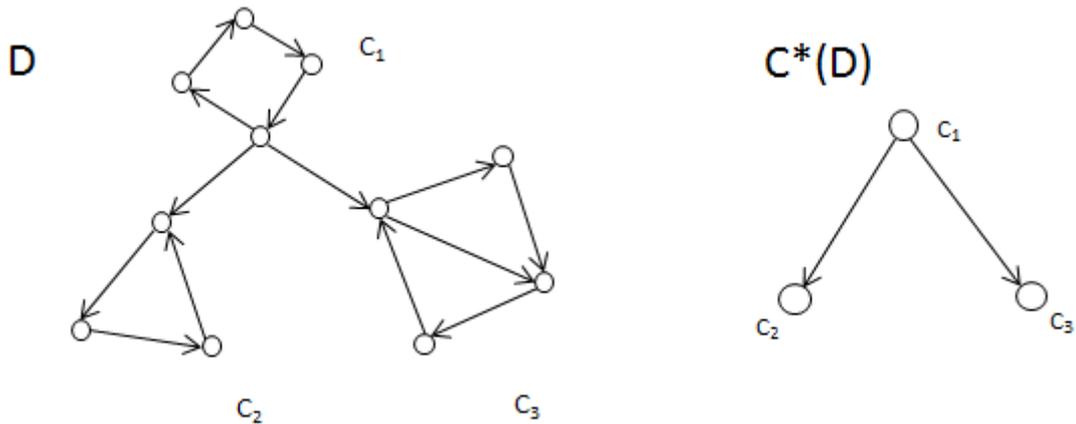
Ejemplo: en la siguiente digráfica podemos ver las componentes fuertemente conexas.



Definición 1.4.5. La *digráfica de condensación* de D , denotada por $C^*(D)$, se define:

$V(C^*(D)) = \{ \text{componentes fuertemente conexas de } D \}$ y (C_i, C_j) pertenece a $F(C^*(D))$ si y sólo si existen u en C_i y v en C_j tal que (u, v) está en $F(D)$.

Ejemplo: tomando la digráfica anterior obtenemos su digráfica de condensación.



Observación 1.4.1. Para toda digráfica D , su digráfica de condensación $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos.

Demostración. Sean D una digráfica y $C^*(D)$ su digráfica de condensación, supongamos que en $C^*(D)$ hay un ciclo dirigido $\Gamma = (C_0, C_1, \dots, C_n, C_0)$. Sean dos vértices C_i y C_j de Γ , entonces hay un $C_i C_j$ -camino dirigido en $C^*(D)$ y un $C_j C_i$ -camino dirigido en $C^*(D)$, entonces como C_i y C_j son componentes fuertemente conexas de D , para algún $u_i \in C_i$ y $u_j \in C_j$ existe un $u_i u_j$ -camino dirigido y un $u_j u_i$ -camino dirigido, por lo que u_i y u_j estarían en la misma componente fuertemente conexas lo que es una contradicción con la definición de digráfica de condensación. Por lo tanto $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos. \square

Teorema 1.4.4. Un torneo es acíclico si y sólo si todas sus componentes fuertemente conexas son triviales (de un solo vértice).

Demostración. \Rightarrow) Sea T un torneo con n vértices, las componentes fuertemente conexas de T pueden ser de $1, 3, 4, \dots, n$ vértices. Si hay una componente conexa C_0 de $3, 4, \dots, n$ vértices, entonces por el teorema 1.4.3 hay un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de C_0 , pero por el teorema 1.2.2 existe un ciclo dirigido en C_0 , lo que es una contradicción pues T es acíclico. Por lo tanto todas las componentes fuertemente conexas tienen que ser triviales.

\Leftarrow) Sea T un torneo de orden n , tal que todas sus componentes fuertemente conexas son triviales y supongamos que no es acíclico, sea $\gamma = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_0)$ un ciclo en T , notemos que (u_0, u_1) es un u_0u_1 -camino dirigido y $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_0)$ es un u_1u_0 -camino dirigido, por lo que u_0 y u_1 tienen que estar en la misma componente fuertemente conexa, lo que es una contradicción pues las componentes fuertemente conexas de T eran triviales. Por lo tanto T es acíclico si y sólo si todas sus componentes fuertemente conexas son triviales. \square

Teorema 1.4.5. *Sea D una digráfica transitiva y acíclica, entonces $N = \{z \in V(D) : \delta_D^+(z) = 0\}$ es el único núcleo de D .*

Demostración. Para ver que N es núcleo primero veamos que es independiente, supongamos que no lo es, entonces existen u y v en N tal que sin pérdida de generalidad (u, v) está en $F(D)$, así tendríamos que $\delta_D^+(u) \geq 1$ lo que es una contradicción. Por lo tanto N es independiente.

Para ver que N es absorbente tomemos un vértice u_0 en $V(D) \setminus N$ y sea $\tau = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_m)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima que empieza en u_0 . Sabemos que $\delta_D^+(u_m) = 0$ pues D es acíclica y τ es de longitud máxima, entonces u_m está en N y por el teorema 1.2.6 la flecha (u_0, u_m) pertenece a $F(D)$. Por lo tanto N es absorbente.

Ahora para ver que N es el único núcleo de D , supongamos que N' es un núcleo de D diferente a N , por la definición de núcleo y como N es núcleo entonces $\{z \in V(D) : \delta_D^+(z) = 0\} \subseteq N'$, entonces $N \subseteq N'$.

Supongamos que hay un vértice z en $V(D)$ tal que $z \in N'$ y $z \notin N$, como N es núcleo entonces existe w en N tal que (z, w) pertenece a $F(D)$, pero esto no puede ser pues z y w están en N' y N' es independiente por ser núcleo. Por lo tanto N' es igual a N y es el único núcleo de D . \square

Teorema 1.4.6. *Si D es una digráfica transitiva y fuertemente conexa, entonces cada vértice de D es un núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva y fuertemente conexa, primero veamos que D es completa simétrica, $D = \overset{\leftrightarrow}{k}_p$, $p = |V(D)|$. Sean u y v cualquier par de vértices en $V(D)$, por demostrar que $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(D)$. Como D es fuertemente conexa existen una τ_1 uv -trayectoria dirigida y una τ_2 vu -trayectoria dirigida, como D es transitiva, por el teorema 1.2.6 tenemos que (u, v) y (v, u) están en $F(D)$. Como u y v son cualquier par de vértices, entonces D es completa simétrica.

Ahora, sea u un vértice en $V(D)$, por demostrar que $\{u\}$ es núcleo de D . $\{u\}$ es independiente pues no hay flecha de u a u . $\{u\}$ es absorbente pues como D es completa simétrica entonces para todo vértice v en $V(D)$ diferente a u , la flecha (v, u) está en $F(D)$.

Por lo tanto $\{u\}$ es núcleo de D . \square

Lema 1.4.1. *Si D es una digráfica transitiva, entonces su digráfica de condensación $C^*(D)$ también es transitiva.*

Demostración. Sean D una digráfica transitiva y $C^*(D)$ la digráfica de condensación de D , como D es transitiva y cada vértice de $C^*(D)$ es fuertemente conexo, entonces cada vértice de $C^*(D)$ corresponde a una subdigráfica completa simétrica en D .

Sean U, V y W tres vértices en $V(C^*(D))$. Por demostrar que si (U, V) y (V, W) están en $F(C^*(D))$ entonces (U, W) está en $F(C^*(D))$.

Si (U, V) pertenece a $F(C^*(D))$, entonces existen u_1 en U y v_1 en V tal que (u_1, v_1) está en $F(D)$.

Si (V, W) pertenece a $F(C^*(D))$ entonces existen v_2 en V y w_1 en W tal que (v_2, w_1) está en $F(D)$. Como v_1, v_2 están en V , entonces (v_1, v_2) pertenece a $F(D)$, entonces (u_1, v_1, v_2, w_1) es una trayectoria dirigida en D y como D es transitiva, por el teorema 1.2.6 la flecha (u_1, w_1) está en $F(D)$. Por lo que (U, W) es una flecha de $F(C^*(D))$ (figura 1.4.1). Por lo tanto $C^*(D)$ es transitiva. \square

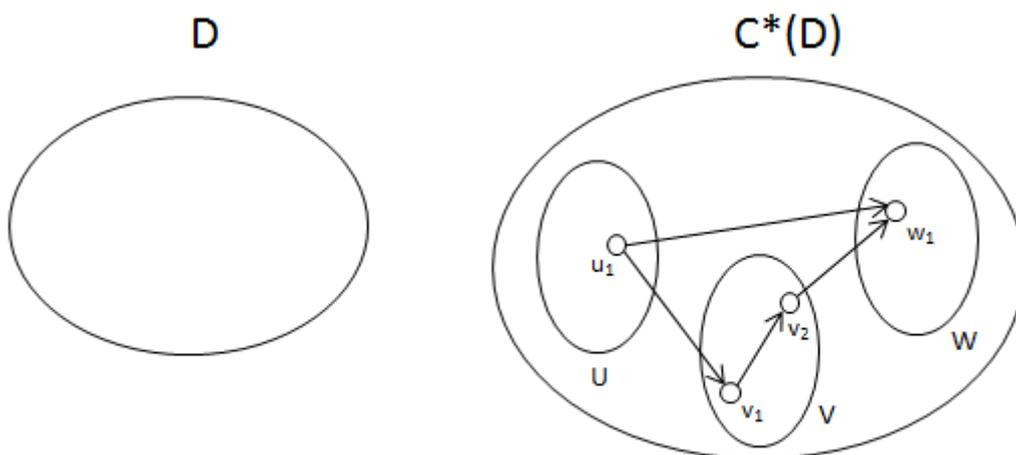


Figura 1.4.1

Teorema 1.4.7. *Toda digráfica transitiva tiene al menos un núcleo.*

Demostración. Caso 1) Si D es fuertemente conexa y transitiva entonces es una digráfica completa simétrica, por el teorema 1.4.6 cada vértice de D es un núcleo.

Caso 2) Si D no es fuertemente conexa consideremos la digráfica de condensación de D , $C^*(D)$, como $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos entonces tiene vértices de exgrado cero (a los que llamamos componentes terminales de $C^*(D)$).

Sea $T = \{C \in V(C^*(D)) : \delta_{C^*(D)}^+(C) = 0\}$. Para cada C en $T = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ elegimos z_i en C_i , recordemos que cada C en $V(C^*(D))$ es completa simétrica.

Afirmación: $N = \{z_i : 1 \leq i \leq n\}$ es núcleo de D .

Demostración. 1) Para ver que N es independiente supongamos que no lo es, entonces existen z_i y z_j en N tal que $z_i \neq z_j$ y (z_i, z_j) pertenece a $F(D)$, entonces existe una flecha de C_i a C_j . Contradicción pues C_i está en T y $\delta_{C^*(D)}^+(C) = 0$ (figura 1.4.2). Por lo tanto N es independiente en D .

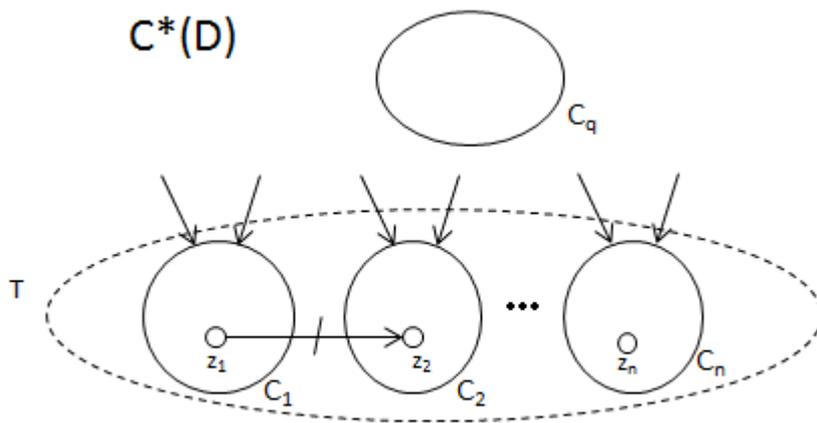


Figura 1.4.2

2) Veamos que $N = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es absorbente en D . Sea $w \in V(D) \setminus N$. Por demostrar que existe una flecha de w a N .

Caso 2.1) Supongamos que $w \in C_m$, tal que C_m está en T . Como es un vírtice terminal de $C^*(D)$ entonces existe z_m en C_m que es vírtice de N , como C_m es completa simétrica entonces existe una flecha de w a z_m . Por lo tanto existe una flecha de w a N (figura 1.4.3).

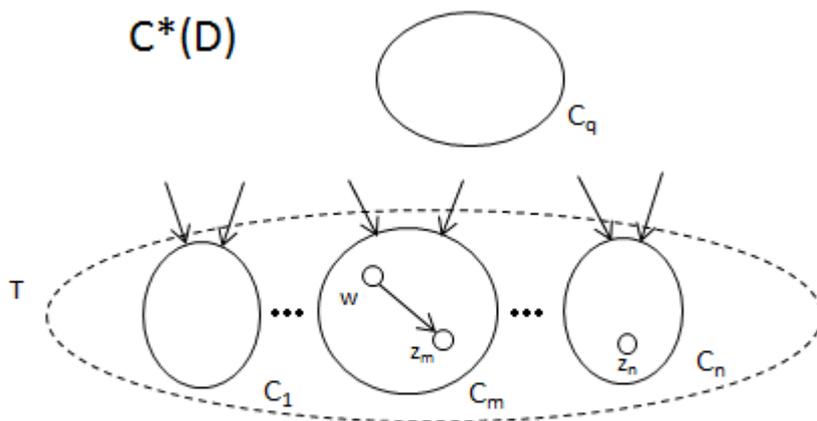


Figura 1.4.3

Caso 2.2) Supongamos que $w \in C_w$, tal que C_w no está en T , como $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos entonces existe una trayectoria dirigida de C_w a algún C_k tal que C_k está en T . Por la definición de digráfica de condensación, si existe una flecha de C_w a C_k entonces existen un vírtice x en C_w y un vírtice y en C_k tal que (x, y) pertenece a $F(D)$.

Como C_w es completa simétrica entonces $(w, x) \in F(D)$, también C_k es completa simétrica entonces $(y, z_k) \in F(D)$, con z_k en N .

$\tau = \{w, x, y, z_k\}$ es una trayectoria dirigida, como D es transitiva, por el teorema 1.2.6 (w, z_k) es una flecha en $F(D)$ y por lo tanto existe una flecha de w a N (figura 1.4.4).

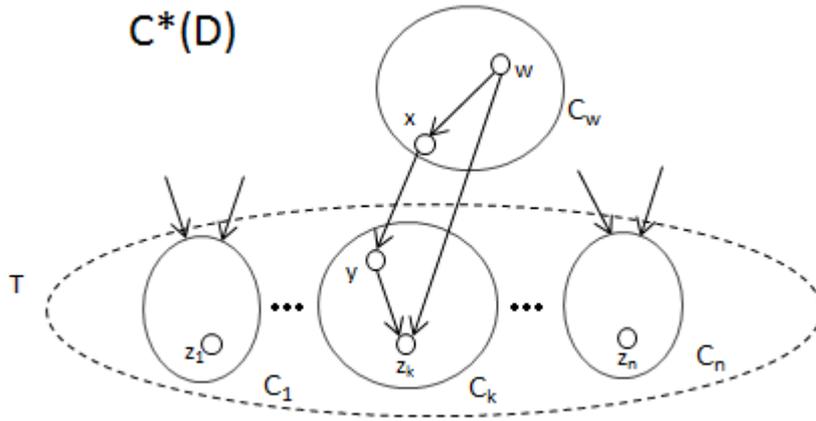


Figura 1.4.4

Por lo tanto N es absorbente en D .

N es un núcleo de D . Por lo tanto todas las digráficas transitivas tienen núcleo. \square

Teorema 1.4.8. Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos entonces D tiene un único núcleo.

Demostración. Sea $N_0 = \{z \in V(D) : \delta_D^+(z) = 0\}$, notemos que $N_0 \neq \emptyset$, ésto por la contrapositiva del teorema 1.2.4.

Sean $F_0 = \{z \in V(D) : \text{existe una flecha de } z \text{ a } N_0 \text{ en } D\}$ y $D_1 = D \setminus (N_0 \cup F_0)$.

Afirmación. D_1 no tiene ciclos dirigidos.

Demostración. Supongamos que D_1 tiene algún ciclo γ , tenemos que $\gamma \subseteq D_1 \subseteq D$. D tiene un ciclo, contradicción pues D es acíclica. Por lo tanto D_1 no tiene ciclos dirigidos.

Sean $N_1 = \{z \in V(D_1) : \delta_{D_1}^+(z) = 0\}$ y $F_1 = \{z \in V(D_1) : \text{existe una flecha de } z \text{ a } N_1 \text{ en } D_1\}$.

Sea $D_2 = D_1 \setminus (N_1 \cup F_1)$, D_2 no tiene ciclos dirigidos.

Sean $N_2 = \{z \in V(D_2) : \delta_{D_2}^+(z) = 0\}$ y $F_2 = \{z \in V(D_2) : \text{existe una flecha de } z \text{ a } N_2 \text{ en } D_2\}$.

Sea $D_3 = D_2 \setminus (N_2 \cup F_2)$, D_3 no tiene ciclos dirigidos.

Continuamos de esta manera y definimos: $D_i = D_{i-1} \setminus (N_{i-1} \cup F_{i-1})$, donde $N_i = \{z \in V(D_i) : \delta_{D_i}^+(z) = 0\}$ y $F_i = \{z \in V(D_i) : \text{existe una flecha de } z \text{ a } N_i \text{ en } D_i\}$ (figura 1.4.5).

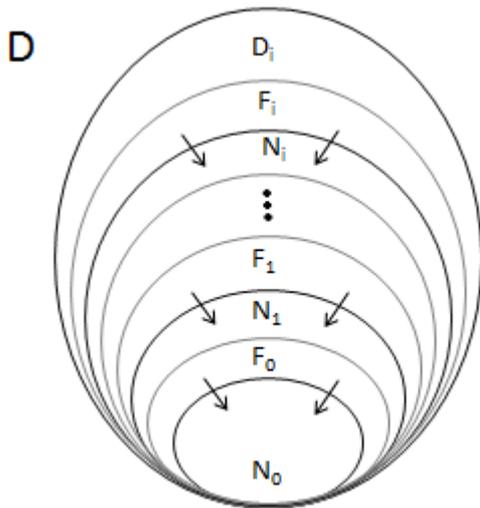


Figura 1.4.5

Suponiendo que están definidos los conjuntos D_j, F_j, N_j para $i \leq j \leq i - 1$. Continuamos así hasta el primer n tal que $D_n = \emptyset$.

Afirmación. $\bigcup_{j=0}^n N_j$ es núcleo de D .

Demostración

1) Independencia. Cada N_i es independiente, supongamos que existe una flecha de x a y con $x \in N_j$ y $y \in N_i$, esto implica que $i < j$. Pero si (x, y) está en $F(D)$ entonces $y \in F_j$, lo que es una contradicción pues x está en N_j .

Por lo tanto la unión de los N_i es independiente (figura 1.4.6).

2) Absorbencia: Sea w un vértice en $V(D) \setminus \bigcup_{j=0}^n N_j$, entonces $w \in F_j$ para algún j tal que $0 \leq j \leq n$. Por lo que existe una flecha de w a N_j , es decir, una flecha de w a $\bigcup_{j=0}^n N_j$ (figura 1.4.6).

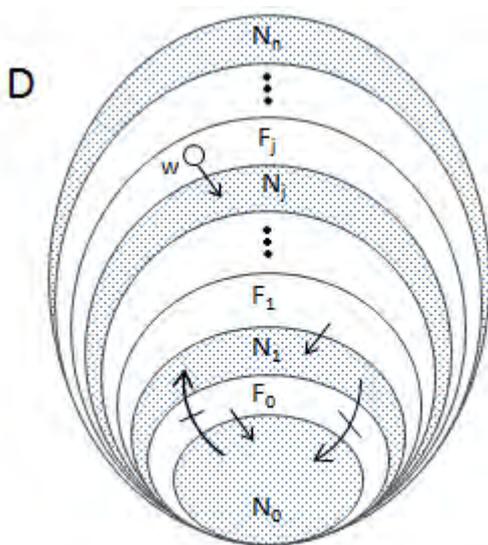


Figura 1.4.6

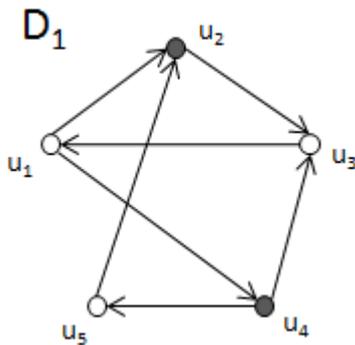
Por lo tanto $\bigcup_{j=0}^n N_j$ es núcleo de D . □

1.5. Cuasinúcleos y Seminúcleos

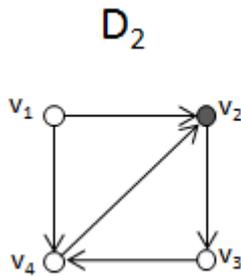
Ahora definiremos dos conceptos que nos ayudan a generalizar algunos resultados para núcleos.

Definición 1.5.1. Sea $D=(V, F)$ una digráfica, diremos que un conjunto $Q \subseteq V(D)$ es un **cuasinúcleo** si Q es independiente y absorbente a distancia a lo más dos, es decir, que para todo $z \in V(D) \setminus Q$ existe una zQ -flecha o una zQ -trayectoria dirigida de longitud dos (empieza en z y termina en algún vértice de Q).

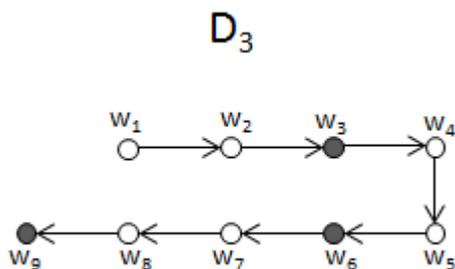
Ejemplos:



En la digráfica D_1 los vértices u_2 y u_4 forman un cuasinúcleo, pues podemos observar que $Q = \{u_2, u_4\}$ es un conjunto que es independiente y absorbente a distancia a lo más dos.



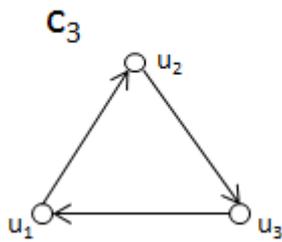
En la digráfica D_2 el vértice u_2 es un cuasinúcleo, pues como se puede observar $Q = \{u_2\}$ es independiente y absorbente a distancia a lo más dos.



En la digráfica D_3 los vértices w_3, w_6 y w_9 forman un cuasinúcleo, pues como se observa $Q = \{w_3, w_6, w_9\}$ es un conjunto que es independiente y absorbente a distancia a lo más dos.

Es fácil observar que todo núcleo es cuasinúcleo pues un núcleo es independiente y absorbente. Pero no todo cuasinúcleo es núcleo.

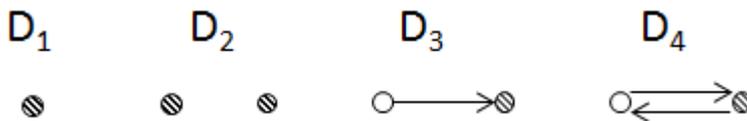
En C_3 cualquier vértice es un cuasinúcleo pues es independiente y absorbente a distancia a lo más dos, pero antes vimos que C_3 no tiene núcleo.



Teorema 1.5.1. *Toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo.*

Demostración. Por inducción sobre $P = |V(D)|$.

1) Base. Si $P = 1, 2$. Estas son todas las digráficas posibles de 1 y 2 vértices donde el cuasinúcleo es el conjunto de vértices sombreados en cada digráfica.



2) Hipótesis de inducción. Supongamos que toda digráfica D' con $2 \leq |V(D')| < P$ tiene un cuasinúcleo.

3) Por demostrar que una digráfica D tal que $|V(D)| = P$ tiene cuasinúcleo. Sean x en $V(D)$ y $D' = D \setminus \{\{x\} \cup \{z \in V(D) : (z, x) \in F(D)\}\}$. Es decir, el conjunto formado por x y por los vértices adyacentes hacia x .

Caso 1) si $D' = \emptyset$, entonces $\{x\}$ es un cuasinúcleo de D , pues es absorbente en D .

Caso 2) si $D' \neq \emptyset$, entonces $|V(D')| = P' < P$. Por la hipótesis de inducción D' tiene un cuasinúcleo Q' , y vemos que por la manera en que definimos a D' no existen flechas de Q' a x (figura 1.5.1).

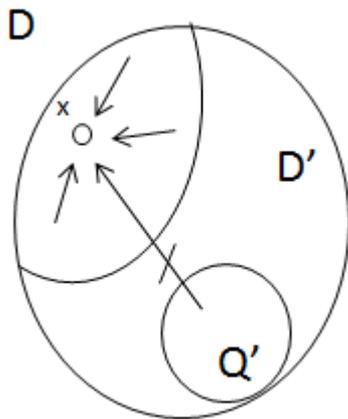


Figura 1.5.1

Subcaso 1) si existe una flecha de x a Q' en D , entonces tenemos que para cada vértice w en $D \setminus Q' \cup D'$ hay una wQ' -trayectoria dirigida de longitud dos, por lo que Q' es absorbente a distancia a lo más dos en D . Por lo tanto Q' es un cuasinúcleo de D (figura 1.5.2).

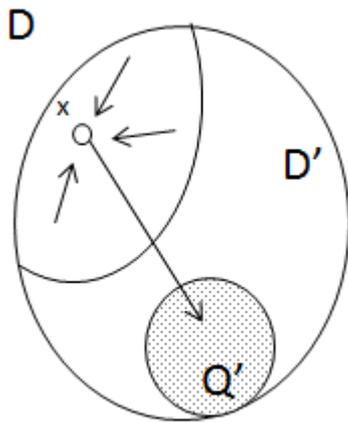


Figura 1.5.2

Subcaso 2) si no existe flecha de x a Q' , entonces $Q' \cup \{x\}$ es independiente, pues habíamos visto que tampoco hay flechas de Q' a x . Q' es absorbente en D' y x es absorbente en $D \setminus D'$ por lo que $Q' \cup \{x\}$ es absorbente en D .

Por lo tanto $Q' \cup \{x\}$ es un cuasinúcleo de D (figura 1.5.3).

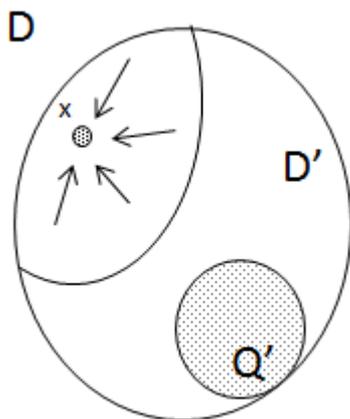


Figura 1.5.3

Así, vemos que D tiene cuasinúcleo.

Por lo tanto toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo. \square

Teorema 1.5.2. Sean T un torneo y x un vértice en $V(T)$ tal que $\delta_T^-(x) = \max\{\delta_T^-(z) : z \in V(T)\}$ (x es el vértice de mayor ingrado en T), entonces $\{x\}$ es cuasinúcleo de T .

Demostración. 1) Es inmediato que $\{x\}$ es independiente.

2) Para ver que es absorbente a distancia a lo más dos, definimos $\Gamma_T^+(x) = \{v \in V(T) : (x, v) \in F(T)\}$ y $\Gamma_T^-(x) = \{v \in V(T) : (v, x) \in F(T)\}$.

Veamos que para todo vértice u en $\Gamma_T^+(x)$, existe un vértice w en $\Gamma_T^-(x)$, tal que (u, w) está en $F(T)$, porque de otro modo como T es un torneo, tendríamos que si para todo w en $\Gamma_T^-(x)$, (w, u) está en $F(T)$ y como (x, u) está en $F(T)$, u sería un vértice con mayor ingrado que x , con lo que surge una contradicción pues supusimos que x era el vértice de mayor ingrado en T .

Por lo tanto para todo vértice u en $\Gamma_T^+(x)$, existe una ux -trayectoria dirigida de longitud 2 (figura 1.5.4), por lo que $\{x\}$ es absorbente a distancia a lo más dos. Por lo tanto $\{x\}$ es un cuasinúcleo de T . \square

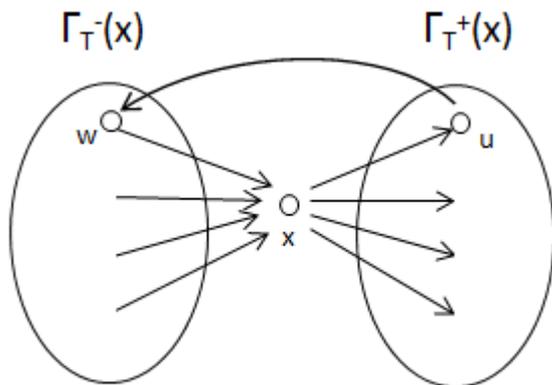


Figura 1.5.4

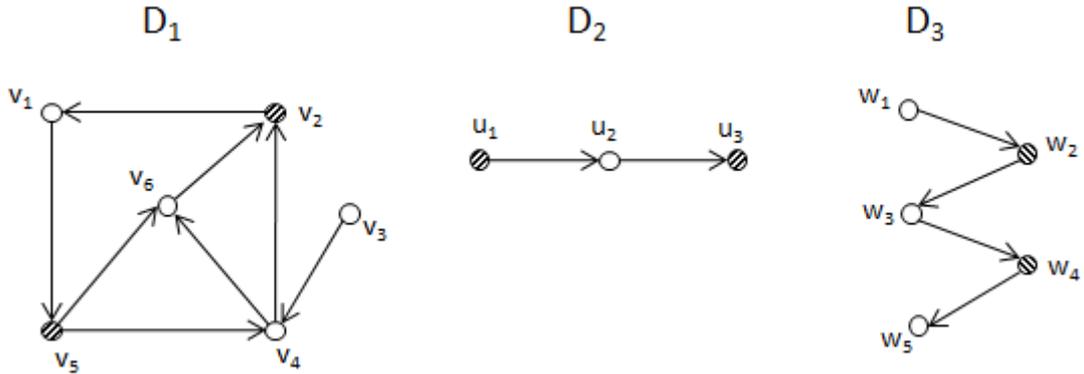
Definición 1.5.2. Sea $D=(V, F)$ una digráfica, un subconjunto $S \subseteq V(D)$ es un **seminúcleo** de D si cumple

que:

1) S es independiente.

2) Para cada z en $V(D) \setminus S$, si existe una flecha de S hacia z entonces existe una flecha de z hacia S .

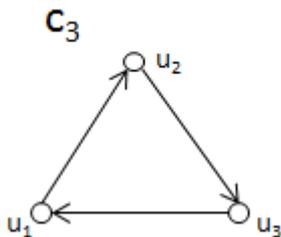
Ejemplos:



$\{v_2, v_5\}$, $\{u_1, u_3\}$ y $\{w_1, w_3, w_5\}$ son seminúcleos de D_1 , D_2 y D_3 respectivamente.

Es claro ver que toda digráfica tiene seminúcleo, pues si tomamos un conjunto vacío de vértices, este cumple con la definición.

El ciclo de tres vértices C_3 , es un ejemplo de una digráfica que no tiene seminúcleo que sea no vacío, pues un sólo vértice es independiente pero no cumple la segunda condición. por lo que no todas las digráficas tienen seminúcleo que sea no vacío.



Teorema 1.5.3. Sean $D=(V, F)$ una digráfica y $S \subseteq V(D)$ un seminúcleo no vacío de D , definimos el conjunto $B = \{z \in V(D) \setminus S : \text{no existe flecha de } z \text{ a } S\}$ y tomamos a S' un seminúcleo de $D[B]$, entonces $S \cup S'$ es seminúcleo de D .

Demostración. S es independiente por definición de seminúcleo.

S' es independiente en D porque S' es independiente en $D[B]$ y $D[B]$ es una subdigráfica inducida de D .

No hay flechas de S' hacia S por definición de B y $S' \subseteq B$.

Por demostrar que no hay flechas de S a S' . Por reducción al absurdo, supongamos que existen z en S y w en S' tal que $(z, w) \in F(D)$. Como S es seminúcleo de D , entonces existe una wS -flecha, ésto es una contradicción

pues $w \in B$. Por lo tanto $S \cup S'$ es independiente en D (figura 1.5.5).

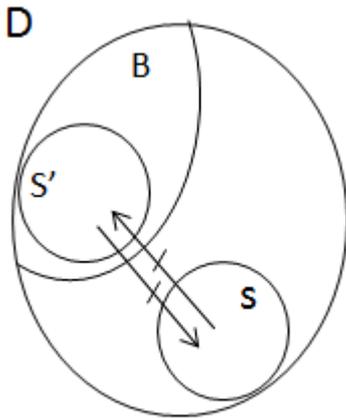


Figura 1.5.5

2) Supongamos que existe una flecha de $(S \cup S')$ hacia w para algún $w \in V(D) \setminus (S \cup S')$.

Si la $(S \cup S')w$ -flecha incide desde S , es decir, que existe una Sw -flecha en D , como S es seminúcleo de D existe una wS -flecha en D y por lo tanto existe una $w(S \cup S')$ -flecha en D .

La $(S \cup S')w$ -flecha incide desde S' , es decir, que existe una $S'w$ -flecha, sea esta flecha (y, w) en $F(D)$ tal que $y \in S'$. Tenemos dos casos. Caso 1) si $w \in (V(D) \setminus B)$, por la definición de B existe una wS -flecha en D .

Caso 2) Si $w \in B \setminus S'$, como S' es seminúcleo de $D[B]$ existe una wS' -flecha. Por lo que existe la $w(S \cup S')$ -flecha (figura 1.5.6).

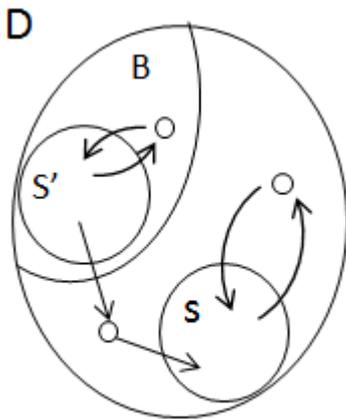


Figura 1.5.6

Por lo tanto $S \cup S'$ es seminúcleo de D . □

Teorema 1.5.4. Sean D una digráfica y $S \subseteq V(D)$ un seminúcleo no vacío de D , definimos

$B = \{z \in V(D) \setminus S : \text{no existe flecha de } z \text{ a } S\}$, si N' es un núcleo de $D[B]$, entonces $S \cup N'$ es núcleo de D .

Demostración. 1) Independencia. S es independiente en D , N' es independiente en $D[B]$ y por lo tanto también en D .

Por definición de B no hay flechas de $D[B] \setminus S$ a S , en particular no hay flechas de N' a S . Si hubiera flecha

de S a algún w en N' entonces como S es seminúcleo de D existiría una wS -flecha lo que es una contradicción pues w está en B (figura 1.5.7).

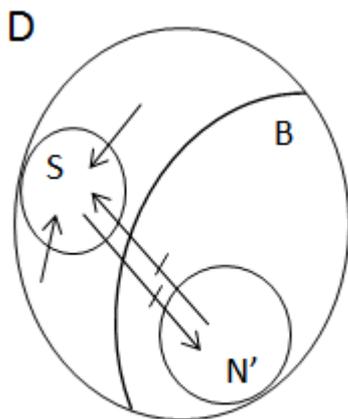


Figura 1.5.7

Por lo tanto $S \cup N'$ es independiente.

2) Absorbencia. Por definición para cada $z \in (V(B) \setminus (B \cup S))$ existe una zS -flecha en D , y como N' es núcleo de $D[B]$ para cada $z \in B \setminus N'$ existe una zN' -flecha (figura 1.5.8).

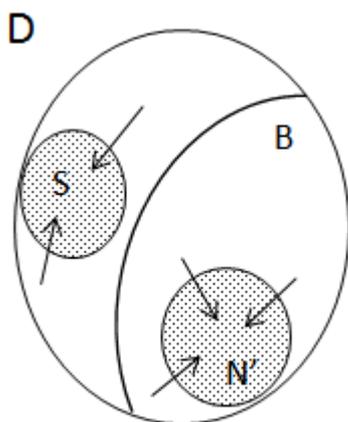


Figura 1.5.8

Por lo tanto $S \cup N'$ es absorbente. Por lo tanto $S \cup N'$ es núcleo de D . □

Teorema 1.5.5. Si D es una digráfica tal que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Sea $S \subseteq V(D)$ un seminúcleo máximo por contención de D . Por demostrar que S es núcleo de D .

Caso 1) para todo z en $V(D) \setminus S$ existe una zS -flecha, en este caso S es absorbente y por lo tanto es núcleo.

Caso 2) existe z en $V(D) \setminus S$ tal que no existen zS -flechas. Definimos $B = \{z \in V(D) : \text{no existe } zS\text{-flecha}\}$, entonces $B \neq \emptyset$.

$D[B]$ tiene seminúcleo no vacío S' , por el teorema 1.5.4 $S \cup S'$ es seminúcleo de D , y además es un seminúcleo

mayor a S , lo que es una contradicción pues S era el seminúcleo máximo por contención. Por lo tanto S es núcleo de D . \square

Observación 1.5.1. *Toda subdigráfica inducida de una digráfica acíclica, transitiva o simétrica también es acíclica, transitiva o simétrica respectivamente.*

Teorema 1.5.6. *Toda digráfica acíclica tiene núcleo.*

Demostración. Por el teorema 1.5.5 y la observación 1.5.1 basta con probar que las digráficas acíclicas tienen seminúcleo no vacío.

Sea D una digráfica acíclica, entonces por ser acíclica existe un z_0 en $V(D)$ tal que $\delta_D^+(z_0) = 0$ por lo que $\{z_0\}$ es seminúcleo no vacío de D pues es independiente y no hay flechas que incidan desde z_0 .

Por lo tanto como toda subdigráfica inducida de una digráfica acíclica tiene seminúcleo no vacío, entonces toda digráfica acíclica tiene núcleo. \square

Teorema 1.5.7. *Toda digráfica transitiva tiene núcleo.*

Demostración. Por el teorema 1.5.5 y la observación 1.5.1 basta con probar que las digráficas transitivas tienen seminúcleo no vacío.

Sea D una digráfica transitiva, tenemos dos casos:

Caso 1) si D es fuertemente conexa entonces D es completa simétrica y cada conjunto con un sólo vértice es un seminúcleo de D pues es independiente y existen flechas simétricas entre cualquier par de vértices. Caso 2) Si D no es fuertemente conexa entonces cada vértice de una componente terminal fuertemente conexa de D es seminúcleo no vacío de D , pues es independiente y existen flechas simétricas entre éste y cualquier otro vértice que está en la misma componente.

Por lo tanto como toda subdigráfica inducida de una digráfica transitiva tiene seminúcleo no vacío, entonces toda digráfica transitiva tiene núcleo. \square

Teorema 1.5.8. *Toda digráfica simétrica tiene núcleo.*

Demostración. Por el teorema 1.5.5 y la observación 1.5.1 basta con probar que las digráficas simétricas tienen seminúcleo no vacío.

Sea D una digráfica simétrica, en este caso cualquier conjunto independiente no vacío es un seminúcleo no vacío de D pues es independiente y además cada flecha que incide desde algún vértice es simétrica.

Por lo tanto como toda subdigráfica inducida de una digráfica simétrica tiene seminúcleo no vacío, entonces toda digráfica simétrica tiene núcleo. \square

Teorema 1.5.9. *Sea D una digráfica, si todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica entonces D tiene núcleo.*

Observación *Sea D una digráfica, con la propiedad de que todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica, entonces toda subdigráfica inducida de D tiene la misma propiedad. Por esto, bastará con probar que si todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica entonces D tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Sea $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria sin flechas simétricas de longitud máxima en D .

Consideremos al vértice x_n , si $\{x_n\}$ es seminúcleo ya terminamos. De otro modo, $\{x_n\}$ no es seminúcleo, entonces existe w en $V(D)$ tal que (x_n, w) es una flecha asimétrica pues si fuera simétrica x_n sería seminúcleo. Tenemos dos casos:

Caso 1) si w es un vértice de T entonces $w = x_i$. Por lo que $(x_n, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es un ciclo dirigido que no contiene flechas simétricas, lo que es una contradicción pues supusimos que todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica.

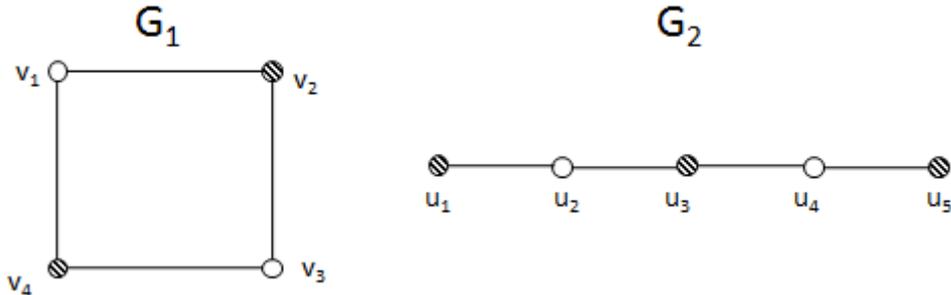
Caso 2) si w no es un vértice de T entonces $T \cup (x_n, w)$ es una trayectoria sin flechas simétricas de longitud mayor a la de T , lo que es una contradicción.

Por lo tanto $\{x_n\}$ es un seminúcleo no vacío de D . Así, por la observación, toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío. Por lo tanto D tiene núcleo. \square

Definición 1.5.3. Una gráfica G es **bipartita**, si existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tal que V_1 y V_2 son independientes, es decir, toda arista de G tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2 .

Ejemplos:

Las siguientes gráficas G_1 y G_2 son bipartitas, en ambas graficas esta sombreado uno de los conjuntos de la partición de los vértices de dicha gráfica.



Teorema 1.5.10. Sea D una digráfica y G_D su gráfica subyacente, si G_D es bipartita entonces D tiene núcleo.

Observación Sea D una digráfica con la propiedad de que G_D es bipartita, entonces toda subdigráfica inducida de D tiene la misma propiedad. Por lo que bastara probar que si G_D es bipartita, entonces D tiene un seminúcleo no vacío.

Demostración. Sea D una digráfica tal que G_D es bipartita, sean V_1 y V_2 la partición de $V(G)$ que la hace bipartita.

Caso 1) existe un x_0 en $V(D)$ tal que $\delta_D^+(x_0) = 0$ entonces $\{x_0\}$ es seminúcleo no vacío de D .

Caso 2) para todo z en $V(D)$ $\delta_D^+(z) > 1$ entonces V_1 es seminúcleo no vacío de D , pues es independiente y para todo w en V_2 , $\delta_D^+(w) > 1$, como V_2 también es independiente las flechas, que inciden desde cada w en V_2 inciden hacia V_1 . Del mismo modo vemos que V_2 también es seminúcleo de D . Por lo tanto D tiene núcleo. \square

Lema 1.5.1. Sea D una digráfica y G_D su gráfica subyacente. G_D es bipartita si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración. \Rightarrow) Sea G_D bipartita con la partición (V_1, V_2) y supongamos por contradicción que existe un ciclo de longitud impar $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$ en G_D . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_0 está en V_1 , entonces $x_1 \in V_2, x_2 \in V_1, x_3 \in V_2, \dots, x_{n-2} \in V_2$ y $x_{n-1} \in V_1$. Como $x_n = x_0$ tenemos que (x_{n-1}, x_n) es una flecha en G_D , lo que es una contradicción pues $\{x_{n-1}, x_n\} \subset V_1$.

Por lo tanto G_D no contiene ciclos de longitud impar.

\Leftarrow) Ahora supongamos que G_D no contiene ningún ciclo de longitud impar. Además, podemos suponer que G_D es conexa, porque una gráfica es bipartita si cada componente conexa de ésta es bipartita. Sea x en $V(G_D)$ y definimos $V_1 = \{y \in V(G_D) : \text{dist}(x, y) \equiv 1 \pmod{2}\}$, $V_2 = V(G_D) \setminus V_1$. Es decir, en V_1 están todos los vértices que están a distancia impar de x y en V_2 están todos los vértices que están a distancia par de x , donde definimos la distancia entre dos vértices de una digráfica al número de vértices mínimo que debe recorrerse para unirlos, es decir, la longitud de la trayectoria mínima que los une. Vemos que estos conjuntos son ajenos.

Ahora, si existiera una arista (u, v) en G_D tal que $\{u, v\} \subset V_i, (i = 1 \text{ o } 2)$, entonces G_D contendría un ciclo impar, lo que no es posible pues supusimos que no contenía ciclos de longitud impar.

Por lo tanto G_D es bipartita. □

Teorema 1.5.11. *Sea D una digráfica, si D no tiene ciclos impares entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Si D no tiene ciclos impares, entonces G_D tampoco tiene. Por el lema 1.5.1 tenemos que G_D es bipartita y se sigue por el teorema 1.5.10 que D tiene núcleo. □

Definición 1.5.4. *Diremos que una digráfica D es **núcleo-imperfecta** denotada por NIC si D no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.*

Un ejemplo de digráficas núcleo-imperfectas son los ciclos de longitud impar.

Proposición 1.5.1. *Toda digráfica sin núcleo contiene una subdigráfica propia inducida que es NIC .*

Demostración. Sea D una digráfica sin núcleos.

Caso 1) si toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo entonces D es NIC .

Caso 2) D contiene una subdigráfica inducida D_1 sin núcleo, hay dos subcasos:

Subcaso 2.1) si toda subdigráfica inducida propia de D_1 tiene núcleo entonces D_1 es NIC .

Subcaso 2.2) D contiene una subdigráfica inducida D_2 sin núcleo, regresamos a las preguntas del caso 1) y 2).

En a lo más $P - 2$ pasos encontramos la NIC inducida en D pues las digráficas:

\bigcirc , $\bigcirc \bigcirc$ y $\bigcirc \rightarrow \bigcirc$ si tienen núcleo. □

Teorema 1.5.12. *Si D es una digráfica NIC entonces no tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Sea D una digráfica NIC y supongamos que D tiene seminúcleo no vacío S , como D es NIC entonces toda subdigráfica inducida propia tiene seminúcleo por lo que por el teorema 1.5.5 D tiene núcleo, esto es una contradicción. Por lo tanto si D es NIC , entonces no tiene seminúcleo no vacío. □

Teorema 1.5.13. *Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos diagonales con puntas consecutivas entonces D tiene núcleo. (Ver demostración y definiciones necesarias en [5].)*

1.6. Teorema de Richardson

Teorema 1.6.1. *(Richardson [17]) Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar entonces D tiene núcleo.*

Para demostrar este teorema primero demostraremos la siguiente proposición:

Proposición 1.6.1. *Si D es una digráfica que es fuertemente conexa, con $|V(D)| \geq 2$ y que no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D es bipartita.*

Demostración. Sea x_0 en $V(D)$, definimos $V_1 = \{z \in V(D) : \text{existe un } x_0z\text{-camino dirigido de longitud par}\}$ y $V_2 = \{z \in V(D) : \text{existe un } x_0z\text{-camino dirigido de longitud impar}\}$.

$V(D) = V_1 \cup V_2$ pues D es fuertemente conexa.

Para demostrar que D es bipartita tenemos que probar que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y que V_1 y V_2 son conjuntos independientes.

•) Por demostrar que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Supongamos por el contrario que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ entonces existe w en $v(D)$ tal que $w \in V_1$ y $w \in V_2$. Como $w \in V_1$ entonces existe un γ_1 x_0w -camino dirigido de longitud par.

Como w está en V_2 , entonces existe un γ_2 x_0w -camino dirigido de longitud impar. Como D es fuertemente conexa entonces existe un γ_3 wx_0 -camino dirigido.

Caso 1) Si γ_3 es de longitud par entonces $\gamma_2 \cup \gamma_3$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar por lo que contiene un ciclo dirigido de longitud impar, esto es una contradicción pues supusimos que no había ciclos dirigidos de longitud impar.

Caso 2) Si γ_3 es de longitud impar entonces $\gamma_1 \cup \gamma_3$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar por lo que contiene un ciclo dirigido de longitud impar, nuevamente esto es una contradicción.

Por lo tanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

•) Por demostrar que V_1 y V_2 son conjuntos independientes.

1) Supongamos que existen w_1 y w_2 en V_1 tal que (w_1, w_2) es una flecha de $F(D)$, como w_1 está en V_1 entonces existe un x_0w_1 -camino dirigido de longitud par φ_1 , así, $\varphi_1 \cup (w_1, w_2)$ es un camino dirigido de longitud impar, por lo que w_2 está en V_2 , entonces $w_2 \in V_1 \cap V_2$, esto es una contradicción pues habíamos visto que la intersección de V_1 y V_2 era vacía.

2) Supongamos que existen u_1 y u_2 en V_2 tal que (u_1, u_2) es una flecha de $F(D)$, como u_1 está en V_2 , entonces existe un x_0u_1 -camino dirigido de longitud impar φ_2 , así, $\varphi_2 \cup (u_1, u_2)$ es un camino dirigido de longitud par, por lo que u_2 está en V_1 , entonces $u_2 \in V_1 \cap V_2$, nuevamente esto es una contradicción. Por lo tanto V_1 y V_2 son conjuntos independientes.

Por lo tanto D es bipartita. □

Ahora si podemos proseguir con la demostración del teorema:

Demostración. Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar, entonces subdigráfica inducida de D tampoco no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Sea H una subdigráfica inducida de D .

Caso 1) si H es fuertemente conexa entonces por la proposición 1.6.1, H es bipartita y por el teorema 1.5.11 H tiene núcleo y por lo tanto tiene seminúcleo no vacío.

Caso 2) si H no es fuertemente conexa entonces sea C_i una componente fuertemente conexa terminal de H , C_i es fuertemente conexa y sin ciclos de longitud impar, por lo que al igual que en el caso 1, C_i tiene un seminúcleo no vacío S , como C_i es terminal, entonces S es un seminúcleo no vacío de H .

Por lo tanto toda H subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, entonces, por el teorema 1.5.5 D tiene núcleo. □

Con la demostración de este teorema finaliza el capítulo uno.

Capítulo 2

Π -Núcleos en Digráficas

En este capítulo partiremos de definiciones dadas en el capítulo anterior, como lo son las de caminos y trayectorias, para presentar una generalización de resultados referentes a núcleos, en donde tomaremos digráficas con las flechas coloreadas. Daremos las definiciones de Π -trayectorias, y Π -núcleos [6], conceptos esenciales en este trabajo a partir del capítulo 2 de los que obtendremos resultados que nos guiarán hacia el teorema principal en el capítulo 3.

2.1. Π -trayectorias de una digráfica

Definición 2.1.1. Sea $D=(V(D), F(D))$ una digráfica, definimos a $DP(D)$ como el conjunto de trayectorias dirigidas de D .

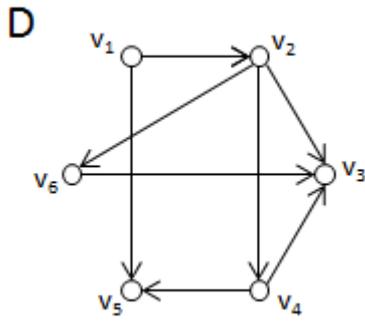
Sea Π un subconjunto de $DP(D)$, a los elementos de Π los llamamos Π -trayectorias.

Definición 2.1.2. Sean $x, y \in V(D)$ usaremos la notación $(x \rightarrow_{\Pi} y)$ si hay una xy -trayectoria dirigida en Π , también usaremos $(x \nrightarrow_{\Pi} y)$ si no hay una xy -trayectoria dirigida en Π .

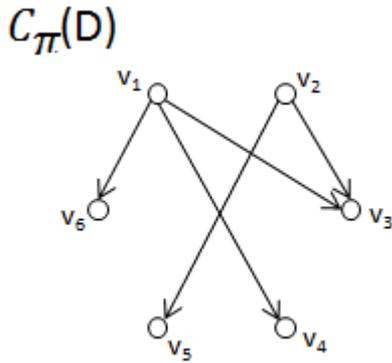
Análogamente si S_1 y $S_2 \subseteq V(D)$ usamos $(S_1 \rightarrow_{\Pi} S_2)$ si hay una S_1S_2 -trayectoria dirigida en Π , también usaremos $(S_1 \nrightarrow_{\Pi} S_2)$ si no hay una S_1S_2 -trayectoria dirigida en Π .

Definición 2.1.3. Sea D una digráfica, definimos la digráfica Π -cerradura como $C_{\Pi}(D)$, tal que $V(C_{\Pi}(D)) = V(D)$ y $(x, y) \in F(C_{\Pi}(D))$ si y sólo si $(x \rightarrow_{\Pi} y)$.

Ejemplo: Sea D la siguiente digráfica



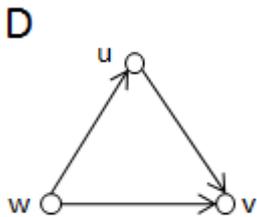
$DP(D) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_6), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_3), (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_2, v_6), (v_2, v_6, v_3), (v_2, v_4, v_3), (v_2, v_4, v_5), (v_1, v_2, v_6, v_3), (v_1, v_2, v_4, v_3), (v_1, v_2, v_4, v_5)\}$
 y sea $\Pi = \{(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_2, v_6), (v_2, v_4, v_3), (v_2, v_4, v_5)\}$ en este caso sólo $(v_1 \rightarrow_{\Pi} v_3), (v_1 \rightarrow_{\Pi} v_4), (v_1 \rightarrow_{\Pi} v_6), (v_2 \rightarrow_{\Pi} v_3)$ y $(v_2 \rightarrow_{\Pi} v_5)$ por lo que $C_{\Pi}(D)$ es:



Si tomamos los conjuntos $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $S_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ tenemos que $(S_1 \rightarrow_{\Pi} S_2)$ y $(S_2 \not\rightarrow_{\Pi} S_1)$.

Definición 2.1.4. Decimos que D es Π -completa si para todos $x, y \in V(D)$ se cumple que $(x \rightarrow_{\Pi} y)$ o $(y \rightarrow_{\Pi} x)$.

Ejemplo:



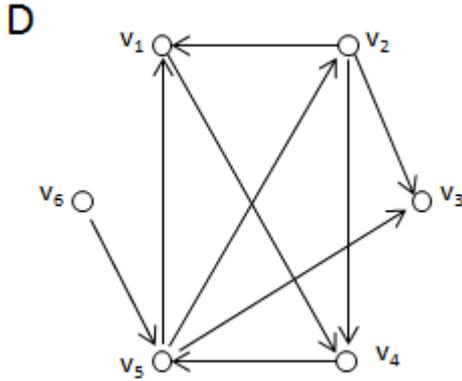
Si $\Pi = \{(u, v), (w, u), (w, v)\}$ entonces D es Π -completa.

2.2. Π -núcleos

Definición 2.2.1. Sean D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$. Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es llamado Π -independiente si para $\{x, y\} \subseteq S$ se cumple que $(x \not\rightarrow_{\Pi} y)$ y $(y \not\rightarrow_{\Pi} x)$. Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es llamado Π -absorbente si para todo $x \in V(D) \setminus S$ se cumple que $(x \rightarrow_{\Pi} S)$.

Definición 2.2.2. Sea D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$. Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es un Π -núcleo si cumple que es al mismo tiempo Π -independiente y Π -absorbente.

Ejemplo: Sea D la siguiente digráfica:



Y sea $\Pi \subseteq DP(D)$, $\Pi = \{(v_1, v_4, v_5), (v_1, v_4, v_5, v_2), (v_2, v_1, v_4), (v_4, v_5, v_1), (v_4, v_5, v_3), (v_5, v_1, v_4), (v_5, v_2, v_1), (v_5, v_2, v_3), (v_6, v_5, v_1), (v_6, v_5, v_2), (v_6, v_5, v_3)\}$.

$\{v_5, v_6\}$ es un conjunto Π -independiente pues $(v_5 \not\rightarrow_{\Pi} v_6)$ y $(v_6 \not\rightarrow_{\Pi} v_5)$.

$\{v_1, v_3, v_4\}$ es un conjunto Π -absorbente pues $(v_2 \rightarrow_{\Pi} v_4)$, $(v_5 \rightarrow_{\Pi} v_3)$, y $(v_6 \rightarrow_{\Pi} v_1)$.

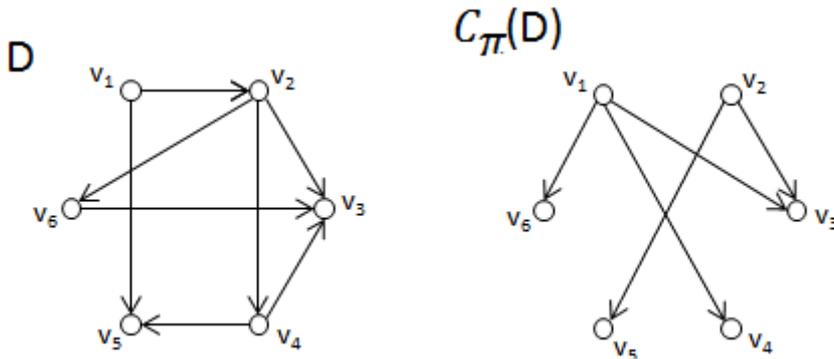
Pero $\{v_2, v_3\}$ es un conjunto que es un Π -núcleo pues es Π -independiente por que $(v_2 \not\rightarrow_{\Pi} v_3)$ y $(v_3 \not\rightarrow_{\Pi} v_2)$ y además es Π -absorbente por que $(v_1 \rightarrow_{\Pi} v_2)$, $(v_4 \rightarrow_{\Pi} v_3)$, $(v_5 \rightarrow_{\Pi} v_3)$ y $(v_6 \rightarrow_{\Pi} v_2)$.

Definición 2.2.3. Una familia $P = [\Pi_i]_{i \in I}$ de subconjuntos de Π la llamaremos **cubierta de Π** si $\bigcup_{i \in I} \Pi_i = \Pi$.

Dada una cubierta $P = [\Pi_i]_{i \in I}$ de Π la **P -cerradura de D** es la multidigráfica $C_P(D)$, coloreada por flechas, cuyos vértices son $V(D)$ y las (x, y) -flechas con color $k \in I$ pertenecen a $C_P(D)$ si y sólo si $(x \rightarrow_{\Pi_k} y)$.

A una subdigráfica H de $C_P(D)$ la llamamos **P -arcoíris** si no hay dos flechas con el mismo color.

Ejemplo: Sean D y $\Pi \subseteq DP(D)$ del ejemplo de la definición 2.1.3.

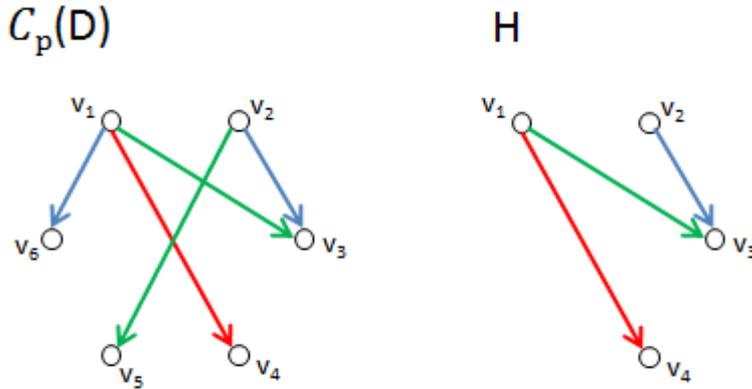


Y sean: $\Pi_1 = \{(v_1, v_2, v_6), (v_2, v_4, v_3)\}$, $\Pi_2 = \{(v_1, v_2, v_4)\}$ y $\Pi_3 = \{(v_1, v_2, v_3), (v_2, v_4, v_5)\}$.

$P = [\Pi_i]_{i \in I}$ es una cubierta de Π .

Así, al hacer la digráfica $C_P(D)$ las flechas (v_1, v_6) y (v_2, v_3) son de un color 1, la flecha (v_1, v_4) es de color 2 y las flechas (v_1, v_3) y (v_2, v_5) de color 3.

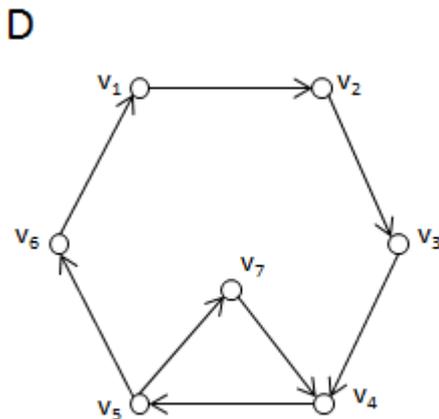
Aquí $C_P(D)$ y vemos que la digráfica H , es subdigráfica de $C_P(D)$ y es un P-arcoíris.



Definición 2.2.4. Un subconjunto $\Pi_1 \subseteq \Pi$ lo llamamos Π -cíclico-transitivo si siempre que hay una sucesión de vértices de $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ tal que para toda i , $0 \leq i \leq n-1$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_1} x_{i+1})$ entonces para alguna j , $0 \leq j \leq n-1$, $(x_{j+1} \rightarrow_{\Pi} x_j)$.

Ejemplo: Sean D la siguiente digráfica, $\Pi = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2, v_3), (v_2, v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_4, v_5, v_6), (v_5, v_7, v_4), (v_5, v_6, v_1)\}$ y $\Pi_1 \subseteq \Pi$.

$\Pi_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6, v_1)\}$, Π_1 es Π -cíclico-transitivo pues $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_1)$ es una sucesión tal que $(v_1 \rightarrow_{\Pi_1} v_2)$, $(v_2 \rightarrow_{\Pi_1} v_4)$, $(v_4 \rightarrow_{\Pi_1} v_5)$, $(v_5 \rightarrow_{\Pi_1} v_1)$ y además para v_4 se cumple que $(v_5 \rightarrow_{\Pi} v_4)$.



Definición 2.2.5. A un subconjunto $\Pi_1 \subseteq \Pi$ lo llamamos *transitivo* si se cumple que para $\{x, y, z\} \subseteq V(D)$

si $(x \rightarrow_{\Pi_1} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(x \rightarrow_{\Pi_1} z)$.

Lema 2.2.1. Si $\Pi_1 \subseteq \Pi$ es transitivo entonces Π_1 es Π -cíclico-transitivo.

Demostración. Primero veamos que si $\Pi_1 \subseteq \Pi$ es transitivo entonces para toda sucesión de vértices de D $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ tal que para toda i , $0 \leq i \leq n-1$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_1} x_{i+1})$ entonces $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_n)$. Esto lo probaremos por inducción sobre el número de vértices de la sucesión.

Base. Sea (x_0, x_1, x_2) una sucesión tal que $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_1)$ y $(x_1 \rightarrow_{\Pi_1} x_2)$, ya que D es Π -transitiva entonces $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_2)$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que si $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$ es una sucesión de vértices de D tal que para toda i , se tiene que $0 \leq i \leq n-2$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_1} x_{i+1})$ entonces se cumple que $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_{n-1})$.

Paso Inductivo. Sean $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ una sucesión de vértices de D tal que para toda i , $0 \leq i \leq n-1$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_1} x_{i+1})$ y $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$ una subsucesión de C , por la hipótesis de inducción se cumple que $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_{n-1})$. Ya que $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_{n-1})$ y $(x_{n-1} \rightarrow_{\Pi_1} x_n)$ y Π_1 es transitiva se tiene que $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_n)$.

Así si Π_1 es transitiva y hay una sucesión de vértices de D $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ tal que para toda i , $0 \leq i \leq n$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_1} x_{i+1})$ entonces por lo probado $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} x_{n-1})$ y esto implica que para $i = n-1$ $(x_n \rightarrow_{\Pi_1} x_{n-1})$. Por lo tanto Π_1 es Π -cíclica-transitiva. \square

Definición 2.2.6. Una cubierta $[\Pi_1, \Pi_2]$ de Π la llamamos Π -cíclica-transitiva si Π_1 y Π_2 son ambos Π -cíclicos-transitivos.

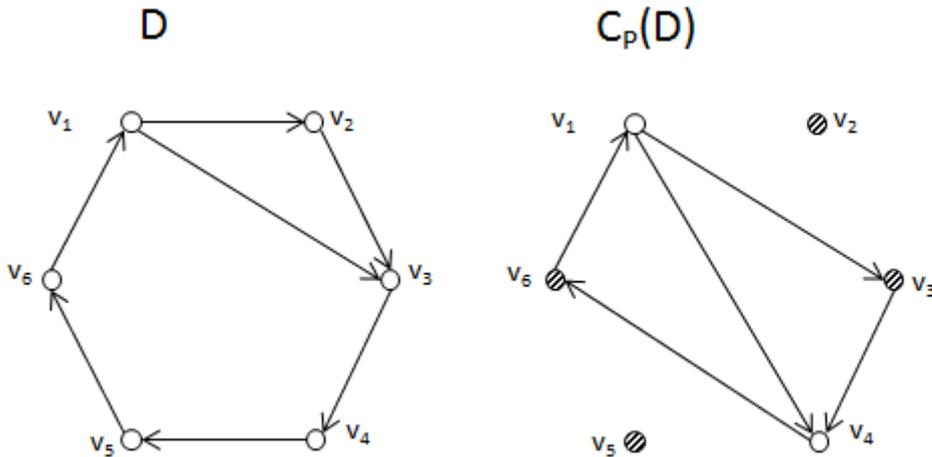
Una cubierta $[\Pi_1, \Pi_2]$ de Π la llamamos Π -transitiva si Π_1 y Π_2 son ambos Π -transitivos.

Definición 2.2.7. Sean D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$, dado $\Pi_1 \subseteq \Pi$ un conjunto $S \subseteq V(D)$ es un Π -seminúcleo módulo Π_1 si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) S es Π -independiente.
- 2) Para todo $z \in V(D) \setminus S$, si $(S \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} S)$.

Ejemplo: Sean D , $\Pi = \{(v_1, v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_3, v_4), (v_4, v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$ y $\Pi_1 = \{(v_3, v_4), (v_6, v_1)\}$.

$\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ es un Π -seminúcleo módulo Π_1 pues es Π -independiente y además $(v_3 \rightarrow_{\Pi_1} v_4)$, $(v_6 \rightarrow_{\Pi_1} v_1)$, $(v_4 \rightarrow_{\Pi} v_6)$ y $(v_1 \rightarrow_{\Pi} v_3)$.



Así, para una cubierta de Π que tenga como elemento a Π_1 se tiene que, si sólo coloreamos las flechas correspondientes a Π_1 en $C_P(D)$ se ve claramente que $\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ es un seminúcleo módulo Π_1 de $C_P(D)$.

Lema 2.2.2. Sean D una digráfica, $\Pi \subseteq DP(D)$ y $\Pi_1 \subseteq \Pi$ tal que Π_1 es Π -cíclico-transitivo.

1) Para todo conjunto no vacío $S \subseteq V(D)$ existe un $x_0 \in S$ tal que para todo $z \in S \setminus \{x_0\}$ si $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} x_0)$.

2) Existe $x_0 \in V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un Π -seminúcleo módulo Π_1 .

Demostración. 1) Por reducción al absurdo. Sea $S \subseteq V(D)$, $S \neq \emptyset$ y supongamos que no hay un vértice x en S tal que para todo z en $S \setminus \{x\}$ tal que si $(x \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} x)$.

Sea y_0 en S , por la suposición sabemos que existe un vértice $y_1 \in S \setminus \{y_0\}$ tal que $(y_0 \rightarrow_{\Pi_1} y_1)$ y $(y_1 \not\rightarrow_{\Pi} y_0)$. También existe un y_2 en $S \setminus \{y_1\}$ tal que $(y_1 \rightarrow_{\Pi_1} y_2)$ y $(y_2 \not\rightarrow_{\Pi} y_1)$. Y existe un y_3 en $S \setminus \{y_2\}$ tal que $(y_2 \rightarrow_{\Pi_1} y_3)$ y $(y_3 \not\rightarrow_{\Pi} y_2)$.

Siguiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita $(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$ de vértices de $S \subseteq V(D)$ tal que para todo $i \geq 0$ $(y_i \rightarrow_{\Pi_1} y_{i+1})$ y $(y_{i+1} \not\rightarrow_{\Pi} y_i)$. Ya que S es un conjunto finito entonces existe $j > i \geq 0$ tal que $y_i = y_j$ y por lo tanto $(y_i, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_j = y_i)$ es una sucesión de vértices de D tal que para todo $k, i \leq k < j$ $(y_k \rightarrow_{\Pi_1} y_{k+1})$ y $(y_{k+1} \not\rightarrow_{\Pi} y_k)$. Pero ésto es una contradicción pues Π_1 es Π -cíclico-transitivo.

Por lo tanto, en todo conjunto no vacío $S \subseteq V(D)$, existe un x_0 en S tal que para todo $z \in S \setminus \{x_0\}$ si $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} z)$, entonces $(z \rightarrow_{\Pi} x_0)$.

2) Si tomamos $S = V(D)$ se sigue de 1) que existe un x_0 en $V(D)$ tal que para todo z en $V(D) \setminus \{x_0\}$ si $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} z)$, entonces $(z \rightarrow_{\Pi} x_0)$, además $\{x_0\}$ es un conjunto independiente. Por lo tanto $\{x_0\}$ es un Π -seminúcleo módulo Π_1 . \square

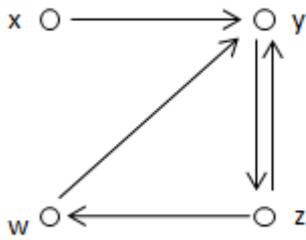
Definición 2.2.8. Sean D una digráfica, Π y $\Pi_1 \subseteq \Pi$, supongamos que D tiene un Π -seminúcleo no vacío módulo Π_1 . Denotamos por $S_{\Pi_1}(D)$ al conjunto de Π -seminúcleos módulo Π_1 de D .

Definición 2.2.9. Denotamos por $D_{\Pi_1} = (V(D_{\Pi_1}), F(D_{\Pi_1}))$ a la digráfica definida como:

$V(D_{\Pi_1}) = S_{\Pi_1}(D)$ y para todo par $\{S_1, S_2\} \subseteq S_{\Pi_1}(D)$, $(S_1, S_2) \in F(D_{\Pi_1})$ si y sólo si para todo $s_1 \in S_1 \setminus S_2$ existe $s_2 \in S_2 \setminus S_1$ tal que $(s_1 \rightarrow_{(\Pi \setminus \Pi_1)} s_2)$ y $(s_2 \not\rightarrow_{\Pi} s_1)$.

Sea $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ una cubierta de Π . Observamos que $C_p(D)$ es una multidigráfica 2-coloreada (por flechas).

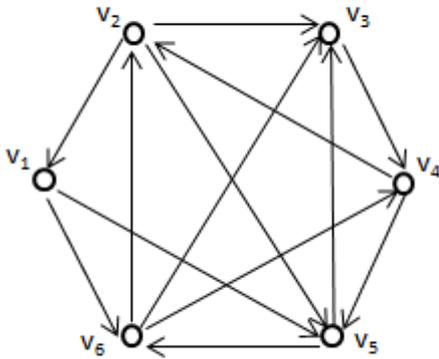
Definición 2.2.10. Una trayectoria dirigida de longitud tres $P_3 = (x, y, z, w)$ en $C_p(D)$ con el conjunto de flechas $\{(x, y), (y, z), (z, w)\}$ la llamamos **P-mala** si (x, y) y (z, w) reciben diferentes colores y el conjunto de flechas de la subdigráfica inducida por $\{x, y, z, w\}$ en $C_{\Pi}(D)$ es un subconjunto de $\{(x, y), (y, z), (z, w), (z, y), (w, y)\}$ es decir que la subdigráfica inducida por $\{x, y, z, w\}$ sea una subdigráfica de la siguiente digráfica:



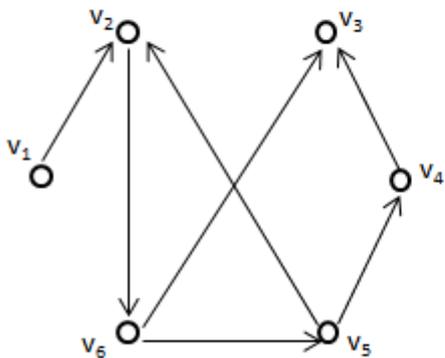
Ejemplo: Sean D la digráfica siguiente, $\Pi = \{(v_1, v_6, v_2), (v_2, v_5, v_6), (v_6, v_4, v_5), (v_5, v_6, v_2), (v_5, v_3, v_4), (v_4, v_2, v_3), (v_6, v_2, v_3)\}$. Y Sea $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ una cubierta de Π con:

$\Pi_1 = \{(v_1, v_6, v_2), (v_2, v_5, v_6), (v_5, v_6, v_2), (v_4, v_2, v_3)\}$ y $\Pi_2 = \{(v_6, v_4, v_5), (v_5, v_3, v_4), (v_6, v_2, v_3)\}$.

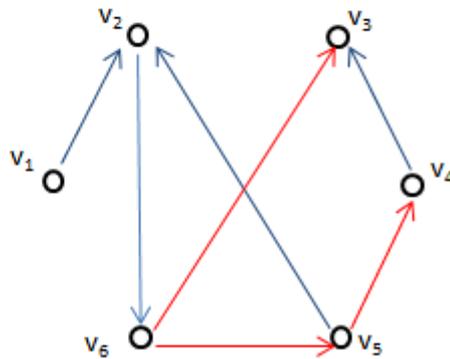
D



$C_{\Pi}(D)$



$C_P(D)$



La trayectoria dirigida $P_{3_1} = (v_1, v_2, v_6, v_5)$ en $C_P(D)$ es P-mala pues (v_1, v_2) y (v_6, v_5) reciben diferentes colores y el conjunto de flechas de la subdigráfica inducida por $\{v_1, v_2, v_6, v_5\}$ en $C_{\Pi}(D)$ es un subconjunto de $\{(v_1, v_2), (v_2, v_6), (v_6, v_5), (v_6, v_2), (v_5, v_2)\}$.

Por otro lado la trayectoria dirigida $P_{3_2} = (v_6, v_5, v_4, v_3)$ en $C_P(D)$ no es P-mala pues aunque (v_6, v_5) y (v_4, v_3) reciben diferentes colores, el conjunto de flechas de la subdigráfica inducida por $\{v_6, v_5, v_4, v_3\}$ en $C_{\Pi}(D)$ no es

un subconjunto de $\{(v_6, v_5), (v_5, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_3, v_5)\}$ (figura 2.2.1).

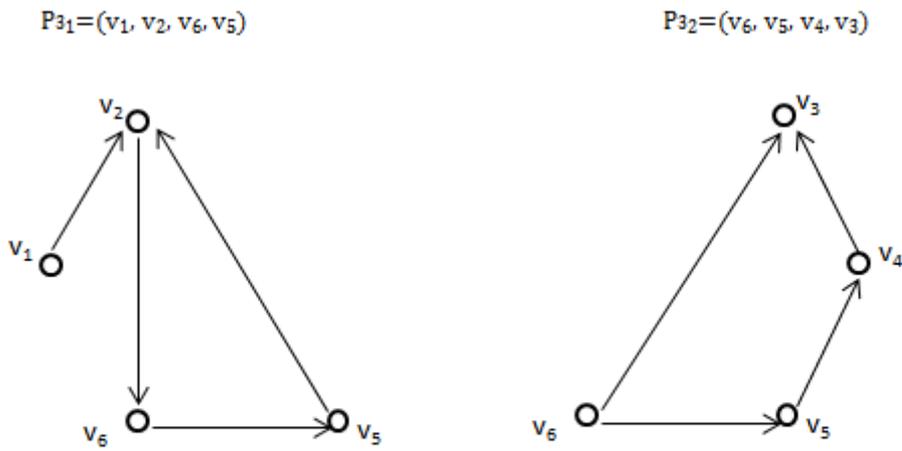
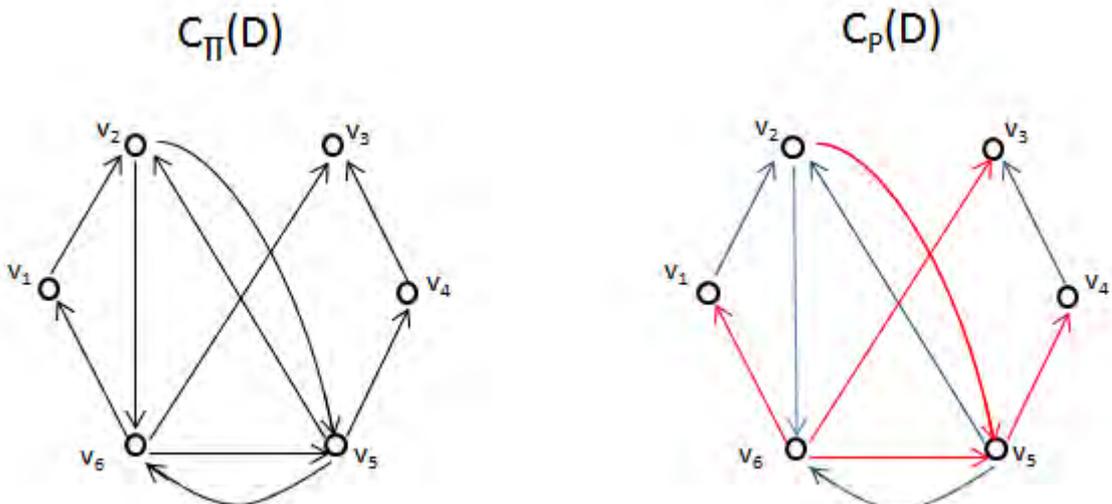


Figura 2.2.1

Definición 2.2.11. Sea $C_3 = (x, y, z, x)$ un triángulo dirigido en $C_P(D)$ el cual es 2-coloreado (por flechas) y su conjunto de flechas es: $\{(x, y), (y, z), (z, x)\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que el color de (x, y) es diferente al color de (y, z) y (z, x) . Decimos que C_3 es **P-malo** si la subdigráfica inducida por $\{x, y, z\}$ en $C_\Pi(D)$ tiene al menos dos flechas asimétricas, donde (x, y) (la flecha de C con color diferente en $C_P(D)$) es una de las flechas asimétricas.

Ejemplo: Sean D (la digráfica anterior) y ahora tomemos $\Pi = \{(v_1, v_6, v_2), (v_2, v_5, v_6), (v_6, v_4, v_5), (v_5, v_6, v_2), (v_5, v_3, v_4), (v_4, v_2, v_3), (v_6, v_2, v_3), (v_2, v_1, v_5), (v_6, v_2, v_1), (v_5, v_6)\}$. Y $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ una cubierta de Π con $\Pi_1 = \{(v_1, v_6, v_2), (v_2, v_5, v_6), (v_5, v_6, v_2), (v_4, v_2, v_3), (v_5, v_6)\}$ y $\Pi_2 = \{(v_6, v_4, v_5), (v_5, v_3, v_4), (v_6, v_2, v_3), (v_2, v_1, v_5), (v_6, v_2, v_1)\}$.



El triángulo dirigido $C_{3_1} = (v_6, v_1, v_2, v_6)$ en $C_P(D)$ es P-malo pues el color de (v_6, v_1) es diferente al color de (v_1, v_2) y (v_2, v_6) , además la subdigráfica de $C_\Pi(D)$ inducida por $\{v_6, v_1, v_2\}$ tiene al menos dos flechas asimétricas donde una de las flechas asimétricas es (v_6, v_1) .

Por otra parte el triángulo dirigido $C_{3_2} = (v_6, v_5, v_2, v_6)$ en $C_P(D)$ no es P-malo pues aunque el color de (v_6, v_5) es diferente al color de (v_5, v_2) y (v_2, v_6) la subdigráfica de $C_\Pi(D)$ inducida por $\{v_6, v_5, v_2\}$ sólo tiene una flecha asimétrica (figura 2.2.2).

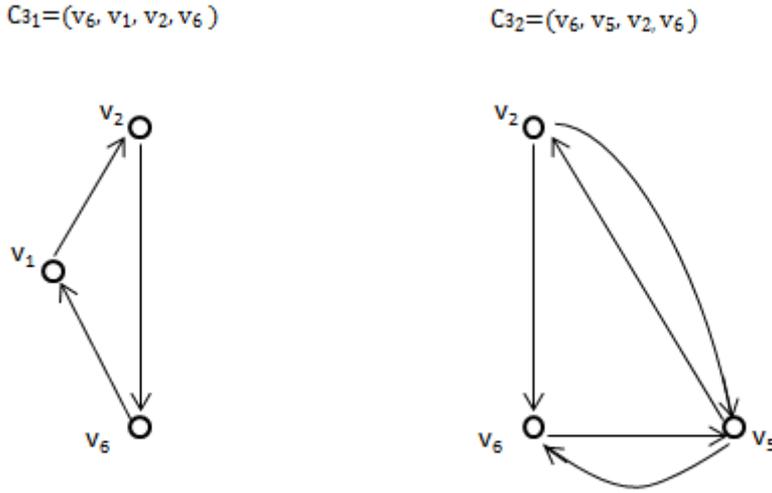


Figura 2.2.2

Lema 2.2.3. Sean D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$. Si Π tiene una cubierta $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ que es Π -cíclica-transitiva, tal que no hay ningún ciclo dirigido con tres vértices C_3 P-malo ni ninguna trayectoria dirigida de longitud tres P_3 que sea P-mala en $C_P(D)$. Para todo $S \in S_{\Pi_1}(D)$ se tiene que si S no es un Π -núcleo entonces $\delta_{D_{\Pi_1}}^+(S) \geq 1$.

Demostración. Sea $S \in S_{\Pi_1}(D)$ tal que S no es un Π -núcleo, y definimos el siguiente conjunto:

$X = \{z \in V(D) : (z \rightarrow_{\Pi} S)\}$. Si suponemos que $X = \emptyset$ tenemos que para todo z en $V(D) \setminus S$ se cumple que $(z \rightarrow_{\Pi} S)$ lo que no puede ocurrir pues S sería un Π -núcleo y por la suposición S no es un Π -núcleo, por lo tanto tenemos que $X \neq \emptyset$.

Afirmación 2.2.3.1 $(S \rightarrow_{\Pi_1} X)$.

Demostración Supongamos por el contrario que $(S \rightarrow_{\Pi_1} X)$, entonces existe x en X tal que $(S \rightarrow_{\Pi_1} x)$ y como S es un Π -seminúcleo modulo Π_1 de D entonces $(x \rightarrow_{\Pi_1} S)$ lo cual es una contradicción con la forma en la que definimos a X , por lo tanto $(S \rightarrow_{\Pi_1} X)$.

Observación 2.2.3.1 Por el inciso 1 del lema 2.2.2 sabemos que existe un x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$ si $(x_0 \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} x_0)$.

Definimos el siguiente conjunto: $T = \{z \in S / (z \rightarrow_{\Pi} x_0)\}$, así tenemos que para todo z en $S \setminus T$ se cumple que $(z \rightarrow_{\Pi} x_0)$. Por la afirmación 2.2.3.1 tenemos que $(z \rightarrow_{\Pi_1} x_0)$ y como Π_1 y Π_2 forman una cubierta de Π se

deduce que $(z \rightarrow_{\Pi_2} x_0)$.

Proposición 2.2.1 $T \cup \{x_0\} \in S_{\Pi_1}(D)$.

Demostración. Para ver que $T \cup \{x_0\} \in S_{\Pi_1}(D)$ demos que $T \cup \{x_0\}$ es un Π -seminúcleo módulo Π_1 de D , es decir, que es Π -independiente y que para todo z en $V(D)$ si $(T \cup \{x_0\} \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} T \cup \{x_0\})$. Por demostrar que $(T \cup \{x_0\})$ es Π -independiente. Sabemos que S es un Π -seminúcleo módulo Π_1 de D , entonces S es Π -independiente, como $T \subseteq S$, así T es Π -independiente, por la afirmación 2.2.3.1 tenemos que $(S \not\rightarrow_{\Pi} x_0)$, en particular como $T \subseteq S$ $(T \not\rightarrow_{\Pi} x_0)$.

Por la definición de X se tiene que $(X \not\rightarrow_{\Pi} S)$, en particular como x_0 está en X y $T \subseteq S$ entonces $(x_0 \not\rightarrow T)$. Por lo tanto $(T \cup \{x_0\})$ es Π -independiente (figura 2.2.3).

Sea z en $V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})$ y t en $(T \cup \{x_0\})$ tal que $(t \rightarrow_{\Pi_1} z)$.

Por demostrar que $(z \rightarrow T \cup \{x_0\})$. Como $(t \rightarrow_{\Pi_1} z)$, deducimos que z no está en S , pues S es Π -independiente. Por lo tanto z está en $V(D) \setminus S$.

Caso 1) z pertenece a X . Como $(t \rightarrow_{\Pi_1} z)$, $T \subseteq S$ y $(S \not\rightarrow_{\Pi_1} X)$ vemos que t no está en T , pero t está en $T \cup \{x_0\}$ entonces $t = x_0$ (figura 2.2.4).

Por la observación 2.2.3.1, como z está en $X \setminus \{x_0\}$ y $(t \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} t)$, con esto obtenemos que $(z \rightarrow_{\Pi} T \cup \{x_0\})$.

Caso 2) z pertenece a $V(D) \setminus S \cup X$. Si tenemos que $(z \rightarrow_{P_i} x_0)$ terminaría el caso 2 pues esto implica que $(z \rightarrow_{\Pi} T \cup \{x_0\})$, por lo que supongamos que $(z \not\rightarrow_{P_i} x_0)$. Sabemos por la definición de X que para todo u en $V(D) \setminus S \cup X$, tenemos que $(u \rightarrow_{\Pi} S)$. Como z está en $V(D) \setminus S \cup X$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} S)$, es decir, existe w en S tal que $(z \rightarrow_{\Pi} w)$.

Por demostrar que w pertenece a T , lo que implica que $(z \rightarrow_{\Pi} T \cup \{x_0\})$. Por el contrario supongamos que w no está en T , es decir, w está en $S \setminus T$.

Anteriormente vimos que para todo z en $S \setminus T$ se cumple que $(z \rightarrow_{\Pi_2} x_0)$, por lo tanto como w es un vértice de $S \setminus T$ se cumple que $(w \rightarrow_{\Pi_2} x_0)$.

Subcaso 2.1) Si t pertenece a T . Vemos que el conjunto de vértices $\{t, z, w, x_0\}$ induce una trayectoria de longitud tres (t, z, w, x_0) que es P-mala pues como $(t \rightarrow_{\Pi_1} z)$ y $(w \rightarrow_{\Pi_2} x_0)$ entonces (t, z) y (w, x_0) tendrían colores diferentes en $C_P(D)$ (figura 2.2.5) lo que no es posible por que supusimos que en $C_P(D)$ no había trayectorias de longitud 3 P-malas. Por lo tanto t no está en T .

Subcaso 2.2) Si $t = x_0$. Como w está en S y t está en X y como $(X \not\rightarrow_{\Pi} S)$ entonces $(x_0 \not\rightarrow_{\Pi} w)$ y además $(z \not\rightarrow_{\Pi} x_0)$. Vemos que el conjunto de vértices $\{x_0, z, w\}$ induce un ciclo P-malo en $C_P(D)$, pues (w, x_0) y (x_0, z) tendrían colores diferentes en $C_P(D)$, además de que ambas son flechas asimétricas en $C_P(D)$ (figura 2.2.6). Ésto tampoco es posible pues supusimos que en $C_P(D)$ no había ciclos C_3 P-malos.

Por lo tanto por las contradicciones surgidas de los subcasos 2.1 y 2.2 se tiene que w es un vértice de T y por lo tanto w está en $T \cup \{x_0\}$ y como $(z \rightarrow_{\Pi} w)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} T \cup \{x_0\})$. Por lo tanto $T \cup \{x_0\}$ está en $S_{\Pi_1}(D)$.

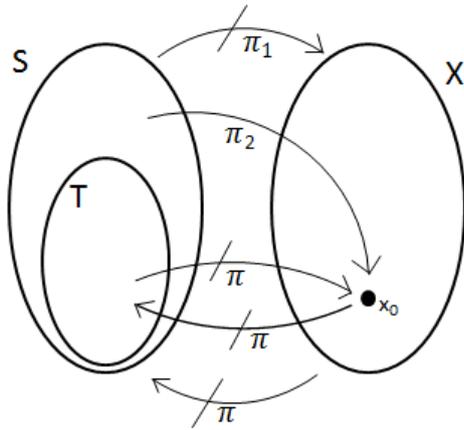


Figura 2.2.3

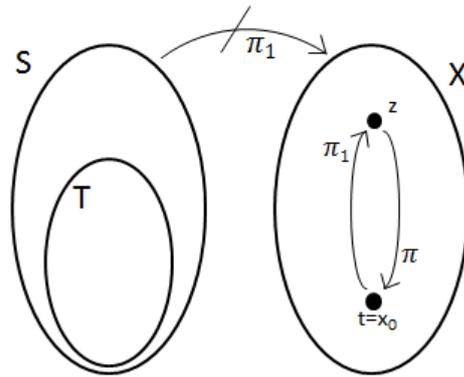


Figura 2.2.4

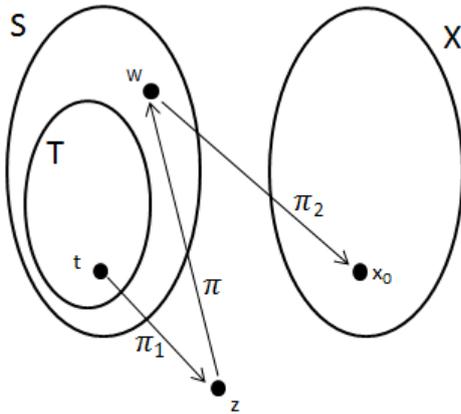


Figura 2.2.5

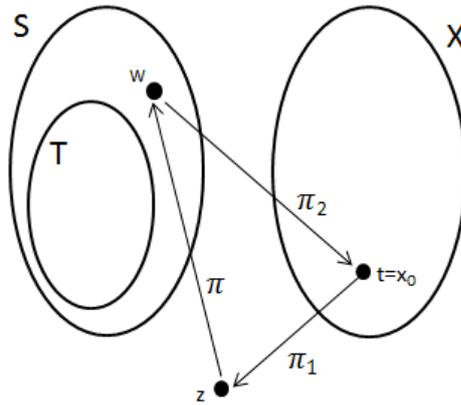


Figura 2.2.6

Proposición 2.2.3.2 $(S, T \cup \{x_0\})$ es una flecha de D_{Π_1} .

Demostración. Para ver que $(S, T \cup \{x_0\})$ es una flecha de D_{Π_1} probemos que para todo s_1 en $S \setminus T \cup \{x_0\}$ existe s_2 en $T \cup \{x_0\} \setminus S$ tal que $(s_1 \rightarrow_{(\Pi_1 \setminus \Pi_2)} s_2)$ y $(s_2 \dashrightarrow_{\Pi} s_1)$.

Sea $s_2 = x_0$, para todo s_1 en $S \setminus T \cup \{x_0\}$, como x_0 no está en S entonces $S \setminus T \cup \{x_0\} = S \setminus T$. Como s_1 pertenece a $S \setminus T$ entonces $(s_1 \rightarrow_{\Pi_2} x_0)$ y como $(X \dashrightarrow_{\Pi} S)$ entonces para todo s_1 en S , se tiene que $(x_0 \dashrightarrow_{\Pi} s_1)$.

Por lo tanto $(S, T \cup \{x_0\})$ es una flecha en D_{Π_1} y por lo tanto $\delta_{D_{\Pi_1}}^+(S) \geq 1$. \square

2.3. Teoremas de Π -núcleos

Teorema 2.3.1. Sean D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$, si Π es Π -cíclico-transitivo entonces D tiene un Π -núcleo.

Demostración. Por el inciso 2 del lema 2.2.2 el conjunto $S_{\Pi}(D)$ de Π -seminúcleos módulo Π es no vacío, como D es una digráfica finita el conjunto $S_{\Pi}(D)$ también es finito. Sabiendo esto tomemos a S en $S_{\Pi}(D)$ tal que S es el Π -seminúcleo módulo Π máximo por contención.

Definimos el siguiente conjunto: $T = \{x \in V(D) \setminus S : (x \not\rightarrow_{\Pi} S)\}$. Sabemos que S es un Π -seminúcleo módulo Π de D entonces demostrar que $T = \emptyset$ implica que para todo z en $V(D) \setminus S$ se cumple que $(z \rightarrow_{\Pi} S)$, es decir, S es Π -absorbente y por lo tanto S sería un Π -núcleo de D .

Para demostrar que $T = \emptyset$ supongamos por el contrario que $T \neq \emptyset$.

Afirmación 2.3.1 ($S \not\rightarrow_{\Pi} T$).

Demostración. Supongamos por el contrario que existe un vértice u en T tal que $(S \rightarrow_{\Pi} u)$. Como S es un Π -seminúcleo módulo Π de D , entonces $(u \rightarrow_{\Pi} S)$ lo que es una contradicción pues u pertenece a T y $(T \not\rightarrow_{\Pi} S)$. Por lo tanto $(S \not\rightarrow_{\Pi} T)$.

Observación 2.3.1.1 Por el inciso 1 del lema 2.2.2 existe un vértice x_0 en T tal que para todo z en $T \setminus \{x_0\}$ si $(x_0 \rightarrow_{\Pi} z)$ entonces $(z \rightarrow_{\Pi} x_0)$.

Tomemos el conjunto $S^* = S \cup \{x_0\}$. Sabemos que S está en $S_{\Pi}(D)$ por lo que S es Π -independiente, como x_0 pertenece a T y sabemos que $(S \not\rightarrow_{\Pi} T)$ y $(T \not\rightarrow_{\Pi} S)$ entonces $(S \not\rightarrow_{\Pi} x_0)$ y $(x_0 \not\rightarrow_{\Pi} S)$.

Por lo tanto $S^* = S \cup \{x_0\}$ es un conjunto Π -independiente (figura 2.3.1).

Por demostrar que S^* es un Π -seminúcleo módulo Π de D . Sea z en $V(D) \setminus S^*$ y supongamos que $(t \rightarrow_{\Pi} z)$, con t en S^* .

Caso 1) si z es un vértice de $V(D) \setminus T \cup S$ entonces z no pertenece a T y sin importar si t está en S o $t = x_0$ por la definición de T tenemos que $(z \rightarrow_{\Pi} S)$ y por lo tanto $(z \rightarrow_{\Pi} S^*)$ (figura 2.3.2).

Caso 2) si z pertenece a $T \setminus \{x_0\}$, por la afirmación tenemos que $(S \not\rightarrow_{\Pi} T)$ y entonces $(S \not\rightarrow_{\Pi} z)$, pero supusimos que $(t \rightarrow_{\Pi} z)$ entonces $t = x_0$ y por la observación tenemos que $(z \rightarrow_{\Pi} t)$ por lo tanto $(z \rightarrow_{\Pi} S^*)$ (figura 2.3.3).

Con lo anterior vemos que S^* cumple las condiciones para ser un elemento de $S_{\Pi}(D)$, pero por la definición de S^* , $S \subset S^*$ lo cual es una contradicción pues supusimos que S era el Π -seminúcleo máximo por contención. La contradicción proviene de suponer que $T \neq \emptyset$ por lo tanto $T = \emptyset$, pero esto significa que para todo z en $V(D) \setminus S$ se cumple que $(z \rightarrow_{\Pi} S)$ y por lo tanto S es Π -absorbente, además S es Π -independiente por esto concluimos que S es un Π -núcleo de D . \square

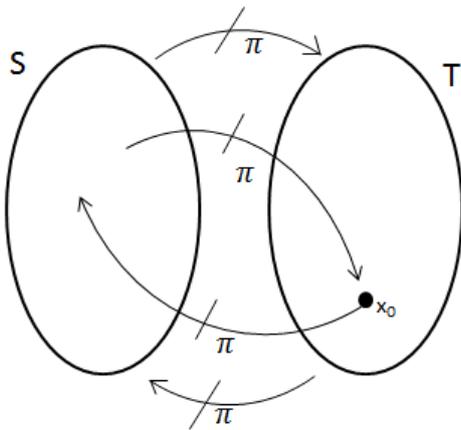


Figura 2.3.1

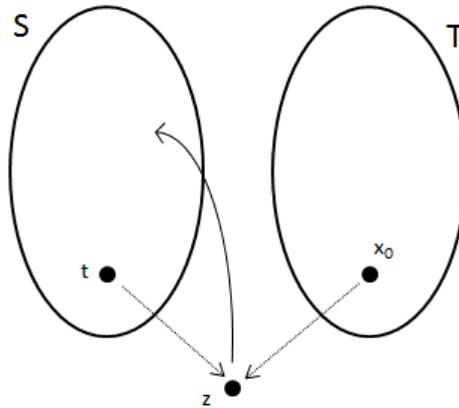


Figura 2.3.2

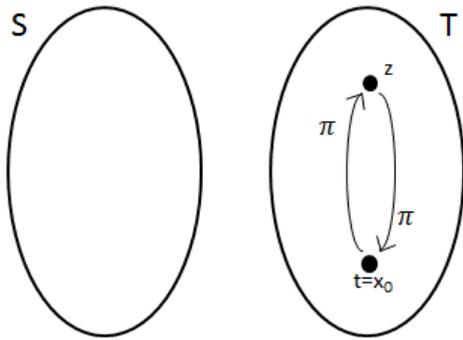


Figura 2.3.3

Corolario 2.3.1. Sean D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$, si cada ciclo en $C_\Pi(D)$ tiene una flecha simétrica entonces D tiene un Π -núcleo.

Demostración. Procediendo por contradicción supongamos que D no tiene Π -núcleo, entonces por el teorema 2.3.1 Π no es Π -cíclico-transitivo y por tanto por la definición de ser Π -cíclico-transitivo hay una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ tal que para todo i , $0 \leq i \leq n$, $(x_i \rightarrow_\Pi x_{i+1})$ y $(x_{i+1} \not\rightarrow_\Pi x_i)$.

Vemos que el conjunto de vértices de C , $V(C) = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ induce un ciclo en $C_\Pi(D)$ sin flechas simétricas, lo que es una contradicción pues supusimos que cada ciclo tiene una flecha simétrica.

Por lo tanto D tiene un Π -núcleo. \square

Teorema 2.3.2. Sea D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$ tal que D es Π -completa, además supongamos que hay una cubierta $P = [\Pi_i]_{i \in I}$ de Π tal que para todo $i \in I$ Π_i es transitivo. Si para todo ciclo C_3 que es P -arcoíris en $C_p(D)$, la subdigráfica inducida por sus vértices en $C_\Pi(D)$ tiene al menos dos flechas simétricas entonces D tiene un Π -núcleo.

Demostración. Por el teorema 2.3.1, para ver que D tiene Π -núcleo primero probemos que Π es Π -cíclico-transitivo. Por contradicción, supongamos que Π no es Π -cíclico-transitivo entonces hay una sucesión de vértices de D $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ tal que es el que tiene la menor cantidad de vértices y cumple que para todo i , $0 \leq i < n$ $(x_i \rightarrow_\Pi x_{i+1})$, es decir, hay una trayectoria dirigida de x_i a x_{i+1} en Π , la cual denotamos $T_{x_i, x_{i+1}}$ y para todo j , $0 \leq j < n-1$ $(x_{j+1} \not\rightarrow_\Pi x_j)$.

Si suponemos que todas las trayectorias $T_{x_i, x_{i+1}}$ en Π pertenecen a un único Π_k en P , por la hipótesis tenemos que Π_k es transitivo, pero por el lema 2.2.1 tenemos que si Π_k es transitivo entonces es Π -cíclico-transitivo, es decir, que como tenemos una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ tal que para todo i , $0 \leq i < n-1$ $(x_i \rightarrow_\Pi x_{i+1})$ entonces para algún j $0 \leq j < n$ $(x_{j+1} \rightarrow_\Pi x_j)$, lo que es una contradicción pues dijimos que para todo j , $0 \leq j < n$ $(x_{j+1} \not\rightarrow_\Pi x_j)$.

Por lo tanto no todas las trayectorias $T_{x_i, x_{i+1}}$ en Π pertenecen a un único Π_k en P . Por lo que hay j, k en I con $j \neq k$ tal que sin pérdida de generalidad T_{x_0, x_1} está en Π_k y T_{x_1, x_2} está en Π_j .

Como D es Π -completa, entonces se cumple que $(x_0 \rightarrow_\Pi x_2)$ o $(x_2 \rightarrow_\Pi x_0)$.

Supongamos que $(x_2 \rightarrow_\Pi x_0)$.

Caso 1) T_{x_2, x_0} está en Π_q , con $q \neq k$ y $q \neq j$. Tenemos que el ciclo $C_3 = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ es un C_3 P -arcoíris

en $C_p(D)$ y por lo tanto por la hipótesis, la subdigráfica inducida por $\{x_0, x_1, x_2, x_0\}$ de $C_\Pi(D)$ tiene al menos dos flechas simétricas.

Vemos que $(x_2 \rightarrow_\Pi x_0)$ pero no sabemos si $(x_0 \rightarrow_\Pi x_2)$, entonces necesariamente al menos una de las otras flechas de C_3 es simétrica, es decir, (x_1, x_0) pertenece a $C_\Pi(D)$ o (x_2, x_1) pertenece a $C_\Pi(D)$, esto significa que $(x_1 \rightarrow_\Pi x_0)$ o $(x_2 \rightarrow_\Pi x_1)$ pero esto es una contradicción pues supusimos que para todo j , $0 \leq j < n$ $(x_{j+1} \not\rightarrow_\Pi x_j)$ (figura 2.3.4).

Caso 2) T_{x_2, x_0} está en Π_j . Como dijimos que T_{x_1, x_2} está en Π_j y sabemos que Π_j es transitiva tenemos que si $(x_1 \rightarrow_{\Pi_j} x_2)$ y $(x_2 \rightarrow_{\Pi_j} x_0)$ entonces $(x_1 \rightarrow_{\Pi_j} x_0)$ y por lo tanto, $(x_1 \rightarrow_\Pi x_0)$ pero esto es una contradicción pues supusimos que para todo j , $0 \leq j < n$ $(x_{j+1} \not\rightarrow_\Pi x_j)$ (figura 2.3.5).

Caso 3) T_{x_2, x_0} está en Π_k . Como dijimos que T_{x_0, x_1} está en Π_k y sabemos que Π_k es transitiva tenemos que si $(x_2 \rightarrow_{\Pi_k} x_0)$ y $(x_0 \rightarrow_{\Pi_k} x_1)$ entonces $(x_2 \rightarrow_{\Pi_k} x_1)$ y por lo tanto, $(x_2 \rightarrow_\Pi x_1)$ pero esto es una contradicción pues supusimos que para todo j , $0 \leq j < n$ $(x_{j+1} \not\rightarrow_\Pi x_j)$ (figura 2.3.6).

Las contradicciones de los casos 1, 2 y 3 surgen de suponer que $(x_2 \rightarrow_\Pi x_0)$ por lo tanto $(x_2 \not\rightarrow_\Pi x_0)$ y $(x_0 \rightarrow_\Pi x_2)$.

Como $(x_0 \rightarrow_\Pi x_2)$ vemos que la sucesión $C^* = (x_0, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ tiene una menor cantidad de vértices que C y además cumple que $(x_0 \rightarrow_\Pi x_2)$ y para todo i , $2 \leq i < n$ $(x_i \rightarrow_\Pi x_{i+1})$ y para todo j , $2 \leq j < n$ $(x_{j+1} \not\rightarrow_\Pi x_j)$.

Ésto es una contradicción pues supusimos que C era la sucesión con la menor cantidad de vértices que cumplía ésto. La contradicción surge de suponer que Π no era Π -cíclico-transitivo.

Por lo tanto Π es Π -cíclico-transitivo y por el teorema 2.3.1 concluimos que D tiene un Π -núcleo. \square

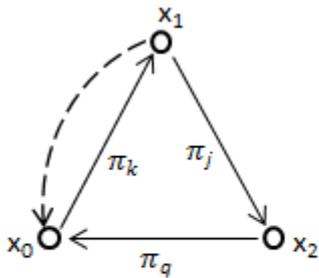


Figura 2.3.4

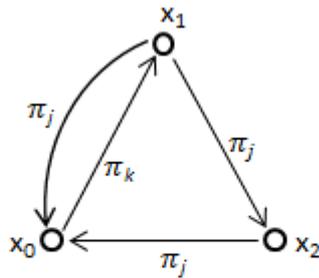


Figura 2.3.5

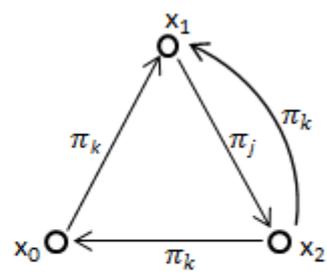


Figura 2.3.6

Teorema 2.3.3. Sean D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$, si hay una cubierta Π -cíclica-transitiva $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ tal que no hay ciclos C_3 P -malos ni trayectorias P_3 P -malas en $C_P(D)$ entonces D tiene un Π -núcleo.

Demostración. Probaremos que si $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva entonces D_{Π_1} es una digráfica sin ciclos.

Probar que D_{Π_1} es una digráfica sin ciclos implica que existe un Π -seminúcleo modulo Π_1 S en D_{Π_1} tal que S es de exgrado cero, es decir, $\delta_{D_{\Pi_1}}^+(S) = 0$.

Observación 2.3.3.1 El Lema 2.2.3 dice que bajo las mismas condiciones que este teorema, para todo S en

D_{Π_1} , si S no es Π -núcleo, entonces $\delta_{D_{\Pi_1}}^+(S) \geq 1$. Ésto es equivalente a que si S está en D_{Π_1} y cumple que $\delta_{D_{\Pi_1}}^+(S) = 0$ entonces S es un Π -núcleo de D .

Por demostrar: Si $[\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva entonces en D_{Π_1} no hay ciclos.

Demostremos por contradicción suponiendo que $[\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva y que en D_{Π_1} existe un ciclo $C = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n = S_0)$ con $n \leq 2$. Recordemos que como C es un ciclo, $S_i \neq S_j$ siempre que $i \neq j$.

El siguiente resultado lo usaremos más adelante:

Afirmación 2.3.3.1 Si hay un S_{i_0} en C con $i_0 \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} y algún w en S_{i_0+1} , ($z \rightarrow_{\Pi} w$), entonces existe un S_{j_0} en C con $j_0 \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{i_0\}$ tal que w pertenece a $S_{j_0} \setminus S_{j_0+1}$.
Demostración Supongamos sin pérdida de generalidad que $i_0 = 0$, $S_0 = S_n$ es Π -independiente pues es un Π -seminúcleo modulo Π_1 entonces w no pertenece a $S_0 = S_n$.

Como w pertenece a S_1 y w no pertenece a S_n existe $j_0 = \max(\{i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \mid w \in S_i\})$. Por lo tanto w está en $S_{j_0} \setminus S_{j_0+1}$.

Procediendo con la demostración del teorema tomemos a $S_0 = S_{i_0}$, observamos que como (S_0, S_1) está en $F(D_{\Pi_1})$, entonces para un x_0 en $S_0 \setminus S_1$ existe un x_1 en $S_{i_0+1} \setminus S_{i_0}$ tal que $(x_0 \rightarrow_{(\Pi \setminus \Pi_1)} x_1)$ y $(x_1 \not\rightarrow_{\Pi} S_{i_0})$.

Por la afirmación 2.3.3.1 sabemos que existe un $i_1 \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{i_0\}$ tal que $x_1 \in S_{i_1} \setminus S_{i_1+1}$.

Por lo tanto como la flecha (S_{i_1}, S_{i_1+1}) está en $F(D_{\Pi_1})$ existe un x_2 en $S_{i_1+1} \setminus S_{i_1}$ tal que $(x_1 \rightarrow_{(\Pi \setminus \Pi_1)} x_2)$ y $(x_2 \not\rightarrow_{\Pi} S_{i_1})$.

Nuevamente por la afirmación 2.3.3.1 existe un $i_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{i_1\}$ tal que $x_2 \in S_{i_2} \setminus S_{i_2+1}$.

Siguiendo este proceso, y sabiendo que $\Pi \setminus \Pi_1 \subseteq \Pi_2$ obtenemos una sucesión infinita de vértices de D

$P = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ tal que para todo $i \geq 0$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_2} x_{i+1})$ y $(x_{i+1} \not\rightarrow_{\Pi} x_i)$ (figura 2.3.7).

Como C es un ciclo finito entonces existen k y l en $\{1, 2, 3, \dots\}$ tal que $x_k = x_l$. Ésto nos genera una sucesión finita de vértices de D $\varphi = (x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{l-1}, x_l = x_k)$, la cual podemos reescribir como $\varphi = (x'_0, x'_1, \dots, x'_{m-1}, x'_m = x'_0)$ que cumple que para todo i $0 \leq i \leq m-1$, $(x_i \rightarrow_{\Pi_2} x_{i+1})$ y $(x_{i+1} \not\rightarrow_{\Pi} x_i)$, ésto implica que Π_2 no es Π -cíclico-transitivo y por la contrapuesta del lema 2.2.1 tenemos que Π_2 no es transitivo, pero eso es una contradicción pues supusimos que $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva lo que implica que en particular Π_2 es transitivo.

La contradicción surge de suponer que existe un ciclo en D_{Π_1} . Por lo tanto si $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva entonces en D_{Π_1} no hay ciclos. Por lo tanto existe un S en D_{Π_1} tal que $\delta_{D_{\Pi_1}}^+(S) = 0$ y por la observación 2.3.3.1 esto implica que D tiene un Π -núcleo. \square

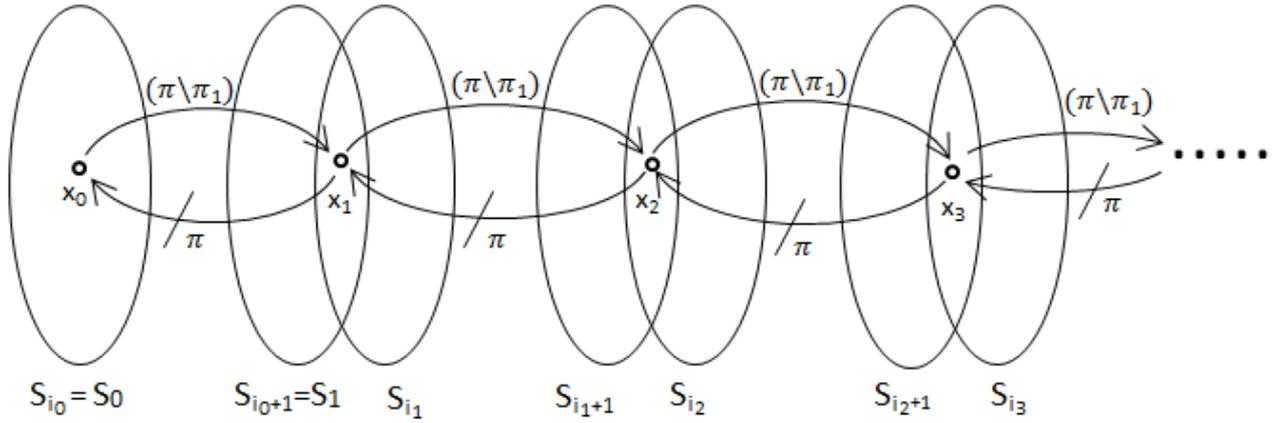


Figura 2.3.7

Corolario 2.3.2. Sea D una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$. Si hay una cubierta Π -transitiva $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ de Π entonces D tiene un Π -núcleo.

Demostración. Primero veamos que si hay una cubierta transitiva $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ entonces Π_1, Π_2 son Π -transitivos, por el lema 2.2.1 tenemos que Π_1, Π_2 son Π -cíclicos-transitivos y por lo tanto $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva.

Basta probar que en $C_P(D)$ no hay ciclos C_3 P-malos ni trayectorias P_3 P-malas, pues el teorema 2.3.3 dice que si hay una cubierta Π -cíclica-transitiva $P = [\Pi_1, \Pi_2]$, tal que no hay ciclos C_3 P-malos ni trayectorias P_3 P-malas en $C_P(D)$ entonces D tiene un Π -núcleo.

Por demostrar que en $C_P(D)$:

1) no hay ciclos C_3 P-malos y

2) no hay trayectorias P_3 P-malas.

1) Sea $A = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ un conjunto de flechas de $C_P(D)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $(x \rightarrow_{\Pi_1} y)$ y que $(y \rightarrow_{\Pi_2} z), (z \rightarrow_{\Pi_2} x)$ es decir que (x, y) recibe color 1 y (y, z) y (z, x) reciben color 2. Como Π_2 es Π -transitivo y como $(y \rightarrow_{\Pi_2} z)$ y $(z \rightarrow_{\Pi_2} x)$ entonces $(y \rightarrow_{\Pi_2} x)$.

Por lo tanto la flecha (y, x) pertenece a $C_P(D)$ y por la definición de ser ciclo C_3 P-malo tenemos que A no es un Ciclo C_3 P-malo en $C_P(D)$ (ver figura 2.3.8).

2) Sea $A' = \{(x, y), (y, z), (z, w)\}$ un conjunto de flechas en $C_P(D)$ y supongamos sin pérdida de generalidad $(x \rightarrow_{\Pi_1} y), (y \rightarrow_{\Pi_1} z)$ y $(z \rightarrow_{\Pi_2} w)$ es decir que (x, y) y (y, z) reciben color 1 y (z, w) recibe color 2. Como Π_1 es Π -transitivo y como $(x \rightarrow_{\Pi_1} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_1} z)$ entonces $(x \rightarrow_{\Pi_1} z)$.

Por lo tanto la flecha (x, z) pertenece a $C_P(D)$ y por la definición de ser trayectoria P_3 P-mala tenemos que A' no es una trayectoria P_3 P-mala en $C_P(D)$ (ver figura 2.3.9).

Por lo tanto en $C_P(D)$ no hay ciclos C_3 P-malos ni trayectorias P_3 P-malas y por lo tanto por el teorema 2.3.3 tenemos que D tiene Π -núcleo. \square

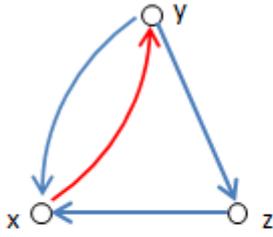


Figura 2.3.8

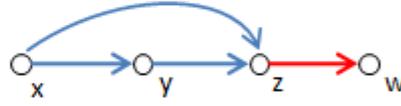


Figura 2.3.9

Como una consecuencia directa del teorema 2.3.1 y del corolario 2.3.2 tenemos el siguiente resultado dado por Berge [1].

Teorema 2.3.4. *Sea D una digráfica, entonces:*

- 1) D tiene un núcleo por trayectorias dirigidas y
- 2) Si D es la unión de dos digráficas transitivas D_1 y D_2 entonces D tiene núcleo.

Demostración. 1) Tomando $\Pi = DP(D)$, probar que D tiene un núcleo por trayectorias dirigidas es igual a probar que D tiene un Π -núcleo, por el teorema 2.3.1, para ver que D tiene un Π -núcleo basta probar que Π es Π -cíclico transitivo.

Por demostrar Π es Π -cíclico transitivo. Sean x, y, z en $V(D)$ tal que $(x \rightarrow_{\Pi} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi} z)$, como $\Pi = DP(D)$ existe una T_1 xy -trayectoria dirigida en D y una T_2 yz -trayectoria dirigida en D , $T_1 \cup T_2 = T$ es una xz -trayectoria dirigida en D por lo que $(x \rightarrow_{\Pi} z)$.

Π es Π -transitivo, por el lema 2.2.1 es Π -cíclico-transitivo y por lo tanto por el teorema 2.3 D tiene un Π -núcleo, en este caso un núcleo por trayectorias dirigidas.

2) Sean $\Pi \subseteq DP(D)$ el conjunto de flechas de D y sea $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ una cubierta de Π donde Π_1 es el conjunto de flechas de D_1 y Π_2 es el conjunto de flechas de D_2 . Como D_1 y D_2 son digráficas transitivas, entonces Π_1 y Π_2 son Π -transitivas por lo que P es una cubierta Π -transitiva de Π y por el corolario 2.3.2 tenemos que D tiene un Π -núcleo, pero Π es el conjunto de flechas de D entonces D tiene un núcleo. \square

Como una consecuencia directa del corolario 2.3.2 tenemos el siguiente teorema de Sands, Sauer y Woodrow[15].

Teorema 2.3.5. *Sean $D=(V(D), F(D))$ una digráfica y $\Gamma : F(D) \rightarrow \{1,2\}$ una coloración de flechas de D , entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

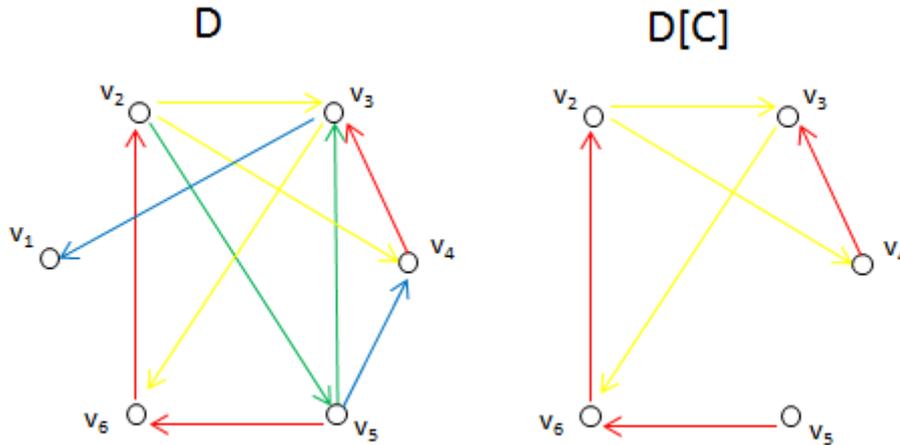
Demostración. Sean $\Pi \subseteq DP(D)$ el conjunto de trayectorias monocromáticas de D y Π_i el conjunto de trayectorias monocromáticas de Π con color i con $i \in \{1,2\}$. Probando que cada Π es Π -transitivo tendríamos que $[\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta transitiva y por el corolario 2.3.2 D tendría Π -núcleo.

Supongamos que $(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_i} z)$ con $i \in \{1,2\}$, es decir, hay una T_1 xy -trayectoria dirigida coloreada con el color i en D y hay una T_2 yz -trayectoria dirigida coloreada con el color i en D , por lo tanto $T = T_1 \cup T_2$ es una xz -trayectoria dirigida coloreada con el color i en D , por lo que $(x \rightarrow_{\Pi_i} z)$ y por lo tanto Π_i es Π -transitivo, $[\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta transitiva y por lo tanto D tiene Π -núcleo.

Como Π es el conjunto de trayectorias monocromáticas de D , entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

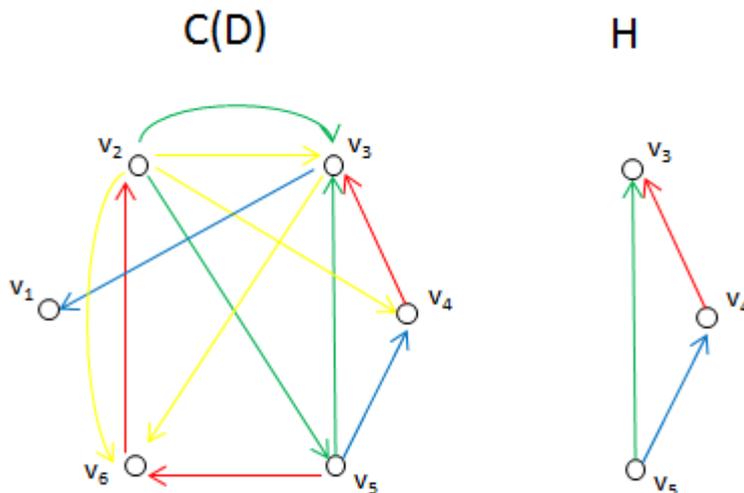
Definición 2.3.1. Sea $D=(V(D), F(D))$ una digráfica m -coloreada, si C es un conjunto de colores, denotamos con $D[C]$ a la subdigráfica de D **abarcada** por las flechas con colores en C .

Ejemplo: sea D la siguiente digráfica y sea $C=\{\text{rojo, amarillo}\}$



Definición 2.3.2. La **cerradura** de D es la multidigráfica m -coloreada $C(D)$ cuyo conjunto de vértices es $V(D)$ y la flecha (x, y) con color j pertenece a $C(D)$ si y sólo si hay una xy -trayectoria monocromática en D con color j . Una subdigráfica H de una digráfica m -coloreada la llamamos **arcoíris** si dos flechas de H no reciben el mismo color.

Ejemplo: sea D la digráfica anterior, tenemos $C(D)$ y H una subdigráfica arcoíris:



Como una consecuencia del teorema 2.3.3 tenemos el siguiente teorema dado por Galeana Sánchez, Gaytan Gómez y Rojas Monroy[10].

Teorema 2.3.6. *Sea D una digráfica finita m -coloreada. Supongamos que hay una partición $C = C_1 \cup C_2$ del conjunto de colores de D , tal que todo ciclo en $D[C_i]$ es monocromático. Supongamos además que $C(D)$ no contiene triángulos dirigidos arcoíris ni trayectorias P_3 arcoíris que tengan colores tanto de C_1 como de C_2 , entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Sean $\Pi \subseteq DP(D)$ el conjunto de trayectorias monocromáticas de D y Π_1 el conjunto de trayectorias monocromáticas de D con color en C_1 y Π_2 el conjunto de trayectorias monocromáticas en D con color en C_2 .

Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ una sucesión de vértices de D tal que para todo i , $0 \leq i < n - 1$ hay una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria T_i en Π_1 . Por tanto $\bigcup_{i=0}^{n-1} F(T_i)$ induce un camino cerrado W en $D[C_1]$.

Sea E_1, E_2, \dots, E_r una cubierta de W compuesta por ciclos dirigidos, como todo ciclo en $D[C_1]$ es monocromático, toda flecha (z, w) en W de color c pertenece a un ciclo dirigido monocromático E_j (de color c) y por lo tanto hay una wz -trayectoria monocromática de color c .

Por lo tanto si $T_0 = (x_0 = y_0, y_1, \dots, y_p = x_1)$ es una $x_0 x_1$ -trayectoria monocromática de color c en C_1 , hay un camino de x_1 a x_0 de color c y por lo tanto hay una $x_1 x_0$ -trayectoria monocromática de color c en C_1 .

De esto se tiene que Π_1 es Π -cíclico-transitivo y del mismo modo vemos que Π_2 es Π -cíclico-transitivo y por lo tanto $P = [\Pi_1, \Pi_2]$ es una cubierta Π -cíclica-transitiva.

Sea C_3 un triángulo dirigido de $C_\Pi(D)$ con el conjunto de flechas $\{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ tal que el color de (x, y) es diferente al de (y, z) y (z, x) . Sin pérdida de generalidad supongamos que hay una xy -trayectoria en Π_1 con color c_1 en C_1 , una yz -trayectoria en Π_2 con color c_2 en C_2 y una zx -trayectoria en Π_2 con color d_2 en C_2 .

Como $c_1 \in C_1$ y $d_2 \in C_2$ tenemos que $c_1 \neq d_2$ y como no hay triángulos dirigidos arcoíris en $C(D)$ teniendo colores de C_1 y C_2 , resulta que $d_2 = c_2$.

Por lo que hay un camino monocromático de color d_2 de y a x y por lo tanto una yx -trayectoria en Π y la flecha (y, x) pertenece a $C_\Pi(D)$. Por esto, $\{x, y, z\}$ no induce un ciclo C_3 P-malo en $C_\Pi(D)$.

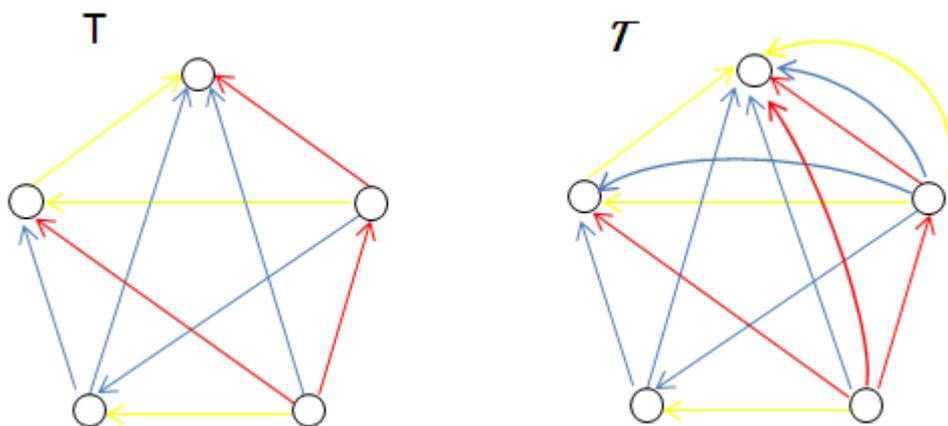
De la misma manera vemos que no hay una trayectoria P_3 P-mala en $C_\Pi(D)$ y por el teorema 2.3.1 D tiene un Π -núcleo. □

Definición 2.3.3. *Dado un torneo m -coloreado $T=(V, F)$, el **multitorneo asociado a T** : $\mathcal{T}=(T_0, T_1, \dots, T_{m-1})$ es definido de la siguiente manera:*

Para cada i la digráfica $T_i=(V, F_i)$ es tal que para un par de vértices x, y en $V(T)$ $(x, y) \in F$ si y sólo si hay una xy -trayectoria monocromática de color i .

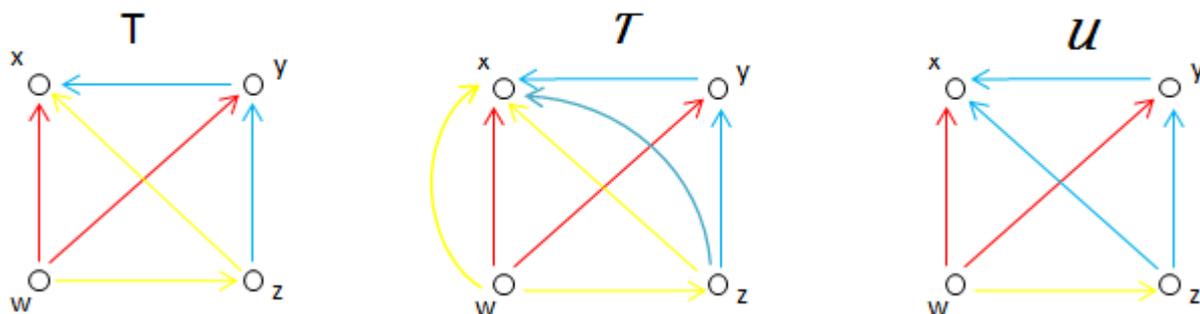
Observamos que cada T_i es transitivo y \mathcal{T} es tal que para todo par de vértices x, y hay un color i tal que (x, y) o (y, x) o ambas son flechas de T_i .

Ejemplo: Sea T el siguiente torneo coloreado por flechas, obtenemos a \mathcal{T} .



Definición 2.3.4. Sea $\mathcal{U}=\{U_0, U_1, \dots, U_{m-1}\}$ un multitorneo obtenido a partir de \mathcal{T} , borrando flechas de las T_i . Tal multitorneo es llamado *minimal* si ninguna flecha puede ser borrada de él, sin destruir lo completo de \mathcal{U} o la transitividad de los U_i o ambos.

Ejemplo: Sea T el siguiente torneo coloreado por flechas, obtenemos a \mathcal{T} y borrando flechas vemos que \mathcal{U} es un torneo minimal.



Como consecuencia del teorema 2.3.2 tenemos el siguiente teorema por Hann, Ille y Woodrow[11].

Teorema 2.3.7. Sean $T=(V, F)$ un torneo m -coloreado y $\mathcal{U}=\{U_0, U_1, \dots, U_{m-1}\}$ un multitorneo minimal que obtenemos del multitorneo asociado de T . Si \mathcal{U} no tiene triángulos dirigidos arcoíris, entonces la digráfica $(V, \bigcup_{i=0}^{m-1} F(U_i))$ es un orden total cuyo máximo es un vértice absorbente en T .

Demostración. Sean $T = (V, F)$ un torneo m -coloreado y $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \dots, U_{m-1}\}$ un multitorneo minimal sin triángulos dirigidos arcoíris obtenido del multitorneo asociado a T . Sea Π el conjunto de flechas de \mathcal{U} y sea $P = [\Pi_i]_{1 \leq i \leq m}$ una cubierta de Π tal que para todo $i, 1 \leq i \leq m$, Π_i es transitivo.

Como no hay triángulos dirigidos arcoíris en \mathcal{U} , vemos que no hay triángulos arcoíris en $C_P(\mathcal{U})$ y por lo tanto por el teorema 2.3.2, \mathcal{U} tiene un Π -núcleo que tiene un único vértice x , pues \mathcal{U} es completa.

Finalmente, como toda trayectoria monocromática en \mathcal{U} es una trayectoria monocromática en T , se deduce que el vértice que forma el Π -núcleo es un conjunto absorbente. \square

Con la recopilación y demostración de estos teoremas de Π -núcleos finaliza el capítulo dos, dando lugar al capítulo tres donde utilizaremos una gran parte de las definiciones vistas en este capítulo.

Capítulo 3

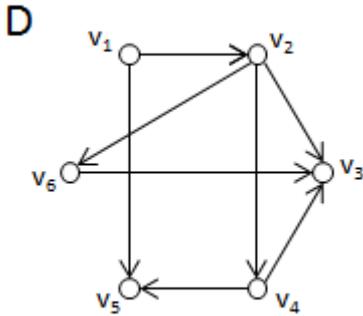
Teorema de Richardson para Π -núcleos

Utilizando conceptos definidos en el capítulo anterior así como algunos definidos a continuación, en este capítulo se demostraran un par de teoremas que nos facilitaran la prueba de la generalización del teorema de Richardson para Π -núcleos.

3.1. Digráficas de clases de color

Definición 3.1.1. Sea D una digráfica y $\Pi \subset DP(D)$, dada una partición $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ de Π la **digráfica de clases de color de D e I** es la digráfica $C_D(I)$ con I como conjunto de vértices y dado un par $\{j, k\} \subseteq I$, la flecha $(j, k) \in C_D(I)$ si y solo si existen $x, y, z \in V(D)$ tal que $(x \rightarrow_{\Pi_k} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_j} z)$.

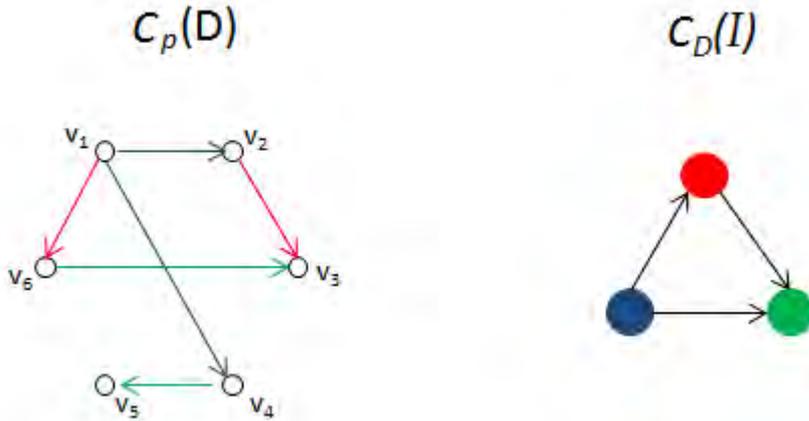
Ejemplo: Sea D



$$DP(D) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_6), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_3), (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_2, v_6), (v_2, v_6, v_3), (v_2, v_4, v_3), (v_2, v_4, v_5), (v_1, v_2, v_6, v_3), (v_1, v_2, v_4, v_3), (v_1, v_2, v_4, v_5)\}$$

Sea $\Pi = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_2, v_6), (v_2, v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_3)\}$

Y sea $\Pi_1 = \{(v_1, v_2, v_6), (v_2, v_4, v_3)\}$, $\Pi_2 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2, v_4)\}$ y $\Pi_3 = \{(v_4, v_5), (v_6, v_3)\}$ una partición de Π si les asignamos colores rojo, azul y verde a Π_1, Π_2 y Π_3 respectivamente obtenemos la multidigráfica $C_P(D)$ y también obtenemos la digráfica de clases de color de D e I .



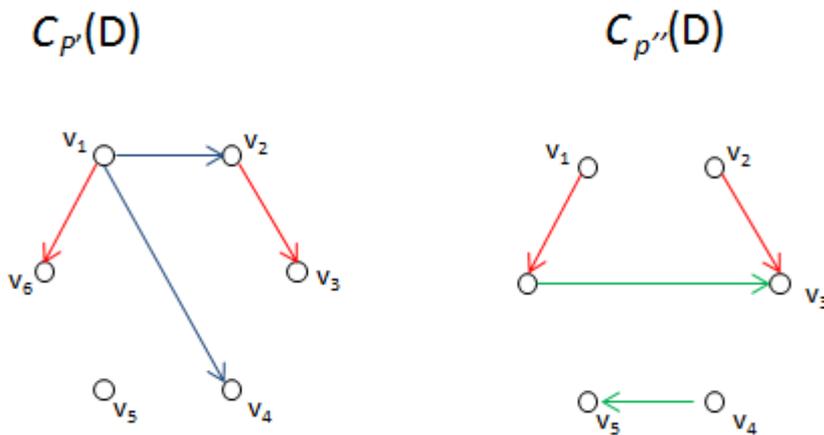
Sea D una digráfica, $\Pi \subseteq DP(D)$ y $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ una partición de Π y sean $C_P(D) = (V_P, F_P)$ y $C_D(I) = (V_I, F_I)$ la P -cerradura de D y la digráfica de clases de color de D e I respectivamente.

El conjunto de flechas F_P es un subconjunto de las trayectorias dirigidas de $C_P(D)$, y las flechas coloreadas de $C_P(D)$ inducen una partición $Q = \{F_i\}_{i \in I}$ de F_P (para todo $i \in I, F_i = \{(x, y) \in F \text{ tal que } (x, y) \text{ tiene color } i\}$).

Definición 3.1.2. Dado $V'_I \subseteq V_I = I$ un subconjunto de vértices de $C_D(I)$ definimos a $\Pi' \subseteq DP(D)$ como $\Pi' = \bigcup_{i \in V'_I} \Pi_i$.

Y sea $P' = \{\Pi_i\}_{i \in V'_I}$ una partición de Π' definimos la **P' -cerradura de D** como la digráfica coloreada $C_{P'}(D)$ con $V(D)$ como conjunto de vértices y la flecha (x, y) pertenece a $C_{P'}(D)$ si y solo si existe un $j \in V'_I$ tal que $(x \rightarrow_{\Pi_j} y)$.

Ejemplo Sean D y Π de la digráfica anterior, y sean $V'_I = \{\text{rojo, azul}\}$, entonces $\Pi' = \Pi_1 \cup \Pi_2$ y $P' = \{\Pi_1, \Pi_2\}$ y $V''_I = \{\text{rojo, verde}\}$ entonces $\Pi'' = \Pi_1 \cup \Pi_3$ y $P'' = \{\Pi_1, \Pi_3\}$ por lo que la P' -cerradura de D y la P'' cerradura de D serían:

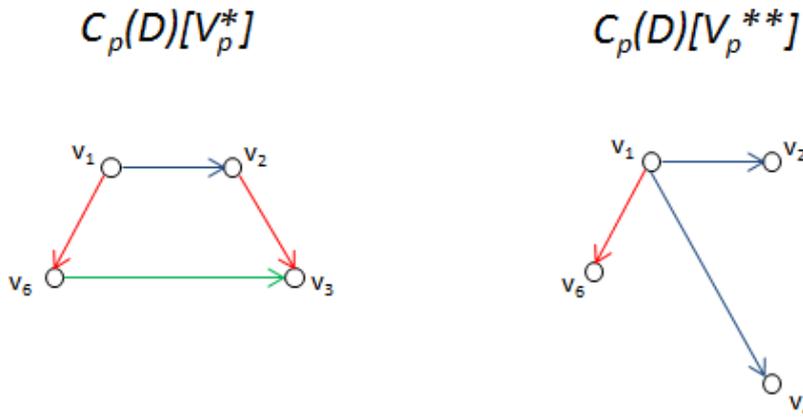


Definición 3.1.3. Por otro lado, dado $V^*_P \subseteq V_P = V(D)$ un subconjunto de vértices de $C_P(D)$, definimos la digráfica $C_P(D)[V^*_P] = (V^*_P, F^*_P)$ como la subdigráfica de $C_P(D)$ inducida por V^*_P , y sea $I^* \subseteq I$ el conjunto

de colores que aparecen en $C_P(D)[V_P^*]$.

Denotamos como $Q^* = \{F_i^*\}_{i \in I}$, donde $F_i^* = \{(x, y) \in F_P^* : (x, y) \text{ tiene color } i \in I^*\}$ a una partición de F_P^* .

Ejemplo tomenos nuevamente la digráfica anterior D , Π y teniendo a $C_P(D)$, sean $V_P^* = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ y $V_P^{**} = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$, obtenemos $C_P(D)[V_P^*]$ y $C_P(D)[V_P^{**}]$ donde $I^* = \{\text{rojo, azul, verde}\} = I$ y $I^* = \{\text{rojo, azul}\}$ respectivamente.



Teorema 3.1.1. Sea $D=(V(D), F(D))$ una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$. Si existe una partición $P= \{\Pi_i\}_{i \in I}$ de Π tal que:

- i) Para todo i en I , Π_i es transitivo;
 - ii) $C_D(I)$ no tiene ciclos impares de orden mayor a 1;
- entonces D tiene Π -núcleo.

Demostración. Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica y $\Pi \subseteq DP(D)$. Y sea $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ una partición de Π tal que para todo $i \in I$, Π_i es transitivo, y tal que la digráfica de clases de color $C_D(I) = (V_I, F_I)$ no tiene ciclos de longitud impar.

Procederemos a demostrar que D tiene Π -núcleo por inducción sobre la cardinalidad de I .

Recordemos que en el teorema 2.3.1 del capítulo 2 se probó que cuando $\Pi = P = \{\Pi\}$, si Π es transitivo entonces D tiene Π -núcleo.

Base. Si $|I| = 2$ tenemos que $P = \{\Pi_1, \Pi_2\}$ es una partición de Π tal que Π_1 y Π_2 son ambos transitivos, por el corolario 2.3.2 del capítulo 2 tenemos que D tiene Π -núcleo.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que: Dada una digráfica D' , $\Pi' \subseteq DP(D')$ y $P' = \{\Pi'_i\}_{i \in I'}$ una partición de Π' tal que para todo i en I' , Π'_i es transitivo y $|I'| < n$. Si $C_{D'}(I')$ no tiene ciclos impares con más de un vértice; entonces D' tiene Π' -núcleo.

Por demostrar que dada una digráfica D y $\Pi \subseteq DP(D)$. Si hay una partición $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ de Π tal que para

todo i en I , Π_i es transitivo, $|I| = n$ y que $C_D(I)$ no tiene ciclos impares de orden mayor a 1, entonces D tiene Π -núcleo.

Caso 1) $C_D(I)$ es fuertemente conexa.

Si $C_D(I)$ es fuertemente conexa tenemos que $C_D(I)$ es bipartita pues por hipótesis en $C_D(I)$ no hay ciclos impares de longitud mayor a 1. Sea $\{A, B\}$ la partición de V_I y sea $\{A^*, B^*\}$ la partición de Π donde $A^* = \bigcup_{i \in A} \Pi_i$ y $B^* = \bigcup_{i \in B} \Pi_i$. Probando que A^* y B^* son transitivos, por el corolario 2.3.2 del capítulo 2 tendríamos que D tiene Π -núcleo.

Por demostrar que A^* y B^* son transitivos.

Sean x, y, w en $V(D)$ tal que $(x \rightarrow_{A^*} y)$ y $(y \rightarrow_{A^*} w)$, por demostrar que $(x \rightarrow_{A^*} w)$. Como $(x \rightarrow_{A^*} y)$ y $(y \rightarrow_{A^*} w)$, esto implica que para algún i en A^* , $(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y para algún j en A^* , $(y \rightarrow_{\Pi_j} w)$.

Supongamos que $i \neq j$, como $(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_j} w)$ por la definición de $C_D(I)$ tendríamos que (i, j) está en F_I . Ésto no es posible, pues como $\{\Pi_i, \Pi_j\} \subseteq A^*$, $\{i, j\} \subseteq A$ pero A es independiente en $C_D(I)$ pues $\{A, B\}$ es una bipartición de $V(C_D(I))$ (figura 3.1).

Por lo tanto por la definición de $C_D(I)$, no existen x, y, w en $V(D)$ tal que $(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_j} w)$.

En consecuencia tenemos que $i = j$ y como todo Π_i es transitivo entonces como $(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_{j=i}} w)$, $(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y por lo tanto $(x \rightarrow_{A^*} w)$, lo que implica que A^* es transitivo. Análogamente vemos que B^* es transitivo, por lo tanto $\{A^*, B^*\}$ es una partición de Π donde A^* y B^* son ambos transitivos y por lo tanto D tiene Π -núcleo.

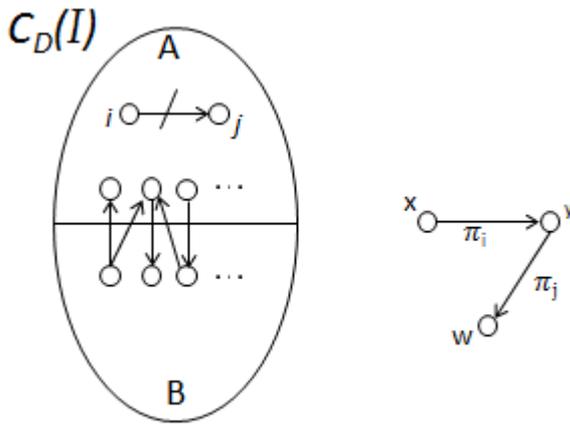


Figura 3.1

Caso 2) $C_D(I)$ no es fuertemente conexa

Sea $G^0 = (V_I^0, F_I^0)$ una componente terminal fuertemente conexa de $C_D(I)$, y sea $V_I^1 = V_I \setminus V_I^0$.

Sean $\Pi^1 = \bigcup_{i \in V_I^1} \Pi_i$ y $\Pi^0 = \bigcup_{i \in V_I^0} \Pi_i$. Observemos que como $C_D(I)$ no es fuertemente conexa, $V_I^1 \neq \emptyset$.

Sea $P^0 = \{\Pi_i\}_{i \in V_I^0}$ una partición de Π^0 , y tomemos a $C_{P^0}(D) = (V_{P^0}, F_{P^0})$ la P^0 -cerradura de D y sea

$Q = \{F_j\}_{j \in V_I^0}$, con $F_j = \{(x, y) \in F_{P^0} : (x, y) \text{ tiene color } j \in V_I^0\}$, Q es una partición de F_{P^0} , por lo que se sigue que la digráfica de clases de color de $C_{P^0}(D)$ y V_I^0 , denotada por $\mathbf{C}_{C_{P^0}(D)}(V_I^0)$ es una digráfica contenida

en $C_D(I)$ y por lo tanto $\mathbf{C}_{C_{P^0}(D)}(V_I^0)$ no tiene ciclos de longitud impar con más de un vértice. Como $V_I^1 \neq \emptyset$ tenemos que $|V_I^0| < |I| = n$, que por la hipótesis de inducción implica que $C_{P^0}(D)$ posee un Π^0 -núcleo. Sea N_0 un Π^0 -núcleo en $C_{P^0}(D)$, observamos que como $\Pi^0 = F_{P^0}$, N_0 es un núcleo de $C_{P^0}(D)$. Además como $V_I^0 \neq \emptyset$ entonces $F_{P^0} \neq \emptyset$ y $V_{P^0} \setminus N_0 \neq \emptyset$. Por definición de $C_{P^0}(D)$, (x, y) está en F_{P^0} si y solo si existe j en V_I^0 tal que $(x \rightarrow_{\Pi_j} y)$. Así, como $V_{P^0} = V(D)$ tenemos que N_0 es Π -absorbente en D (figura 3.2).

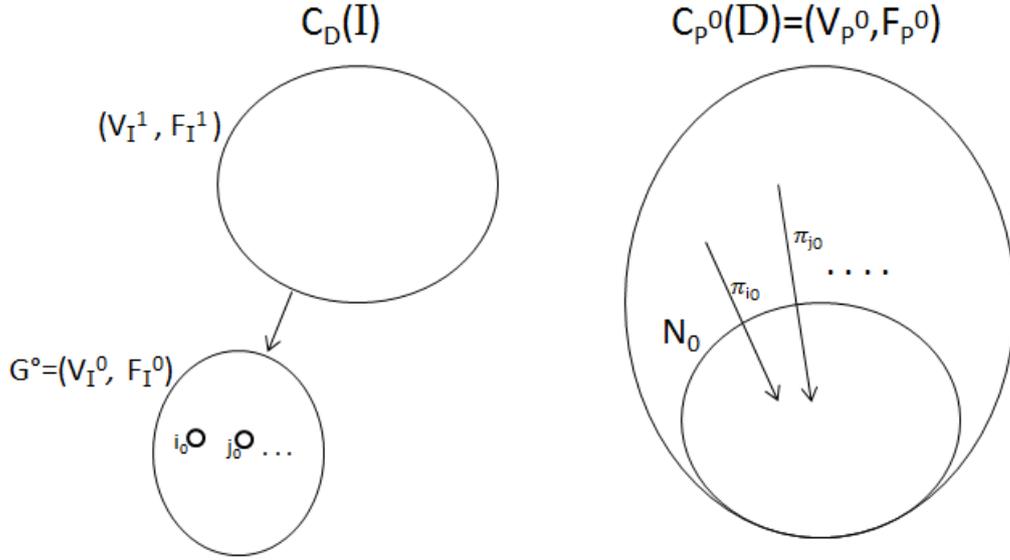


Figura 3.2

Tenemos que N_0 es Π -absorbente en D , si N_0 fuera Π -independiente en D tendríamos que N_0 es Π -núcleo de D y terminaríamos; por lo que supongamos que N_0 no es Π -independiente en D y sean u, v en N_0 tal que para algún j en I $(u \rightarrow_{\Pi_j} v)$. Como N_0 es Π^0 -núcleo, se sigue que j está en V_I^1 .

Afirmación 3.1.1.1 Para todo w en $V_{P^0} \setminus N_0$ y todo i en V_I^0 , $(w \rightarrow_{\Pi_i} u)$.

Demostración. Supongamos por el contrario que para algún w en $V_{P^0} \setminus N_0$ y para algún i en V_I^0 tenemos que $(w \rightarrow_{\Pi_i} u)$, como $(u \rightarrow_{\Pi_j} v)$ tenemos que $(i, j) \in F_I$, pero esto es una contradicción pues i es un vértice de G_0 que es una componente terminal de $C_D(I)$ y j está en $V_I \setminus V_I^0$ (figura 3.3). Por lo tanto para todo w en $V_{P^0} \setminus N_0$ y todo i en V_I^0 , $(w \rightarrow_{\Pi_i} u)$.

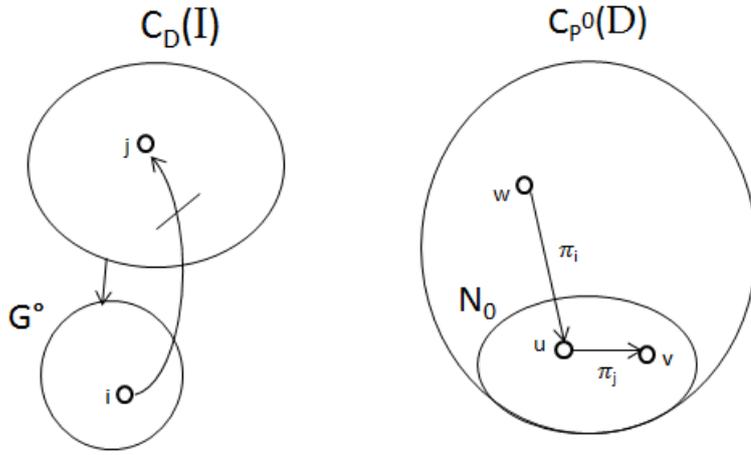


Figura 3.3

Definimos $T = \{z \in N_0 : \exists k \in N_0 \setminus \{z\} \text{ tal que para alg\u00fan } j \text{ en } V_I^1(z \rightarrow_{\Pi_j} k)\}$.

Observaci\u00f3n 3.1.1.1 Como N_0 no es Π -independiente en D , entonces $T \neq \emptyset$.

Definimos $N_1 = N_0 \setminus T$ (figura 3.4).

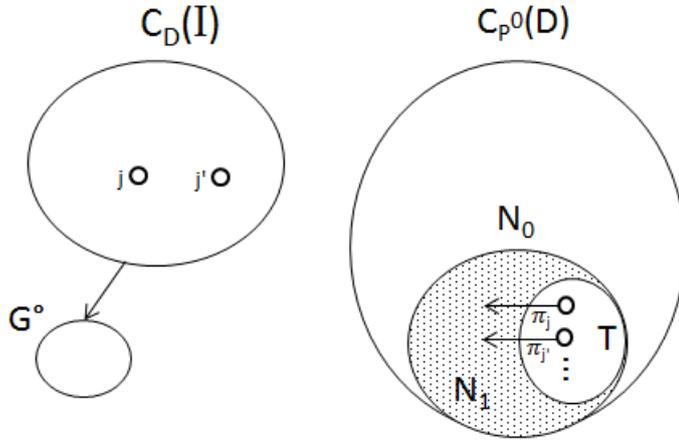


Figura 3.4

Afirmaci\u00f3n 3.1.1.2 $N_1 \neq \emptyset$.

Demostraci\u00f3n. Supongamos por el contrario que $N_1 = \emptyset$, es decir que $N_0 = T$ lo que implica que para cada z en N_0 , existe k en $N_0 \setminus \{z\}$ tal que para alg\u00fan j en $V_I^1(z \rightarrow_{\Pi_j} k)$. Como $V_{P^0} \setminus N_0 \neq \emptyset$ y N_0 es un Π^0 -n\u00facleo de $Cl_{P^0}(D)$ existen h en $V_{P^0} \setminus N_0$ y w en N_0 tal que $(h \rightarrow_{\Pi_i} w)$ con i en V_I^0 , como w est\u00e1 en $N_0 = T$, existe k en $N_0 \setminus \{w\}$ tal que para alg\u00fan j en $V_I^1(w \rightarrow_{\Pi_j} k)$.

Por la Afirmaci\u00f3n 3.1.1.1 esto no puede pasar, (figura 3.5) por lo que $N_1 \neq \emptyset$.

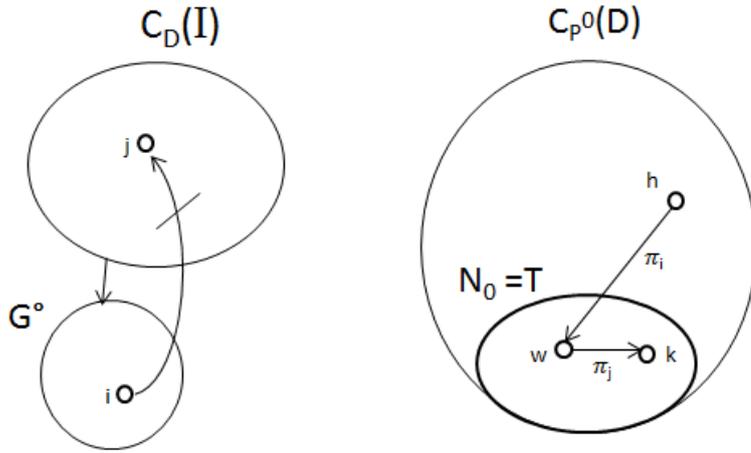


Figura 3.5

Afirmación 3.1.1.3 N_1 es Π -independiente en D .

Demostración. Como $N_1 \subseteq N_0$ y N_0 es Π^0 -núcleo, en particular N_0 es Π^0 -independiente, tenemos que N_1 es Π^0 -independiente y por la definición de T , no existen j en V_I^1 y u, v en N_1 tal que $(u \rightarrow_{\Pi_j} v)$; lo que implica que N_1 es Π^1 -independiente en D y por lo tanto N_1 es Π -independiente en D .

Afirmación 3.1.1.4 Para cada w en $V(D) \setminus N_0$ existe h en N_1 tal que para algún i en V_I^0 ($w \rightarrow_{\Pi_i} h$).

Demostración. Sea w en $V(D) \setminus N_0$. Como N_0 es Π^0 -absorbente en $C_{P^0}(D)$ y $V_{P^0} = V(D)$, existe i en V_I^0 y h en N_0 tal que $(w \rightarrow_{\Pi_i} h)$. Por la afirmación 3.1.1.1 y por la definición de T tenemos que h no está en T y por lo tanto h está en N_1 cumpliéndose así que $(w \rightarrow_{\Pi_i} h)$ (figura 3.6).

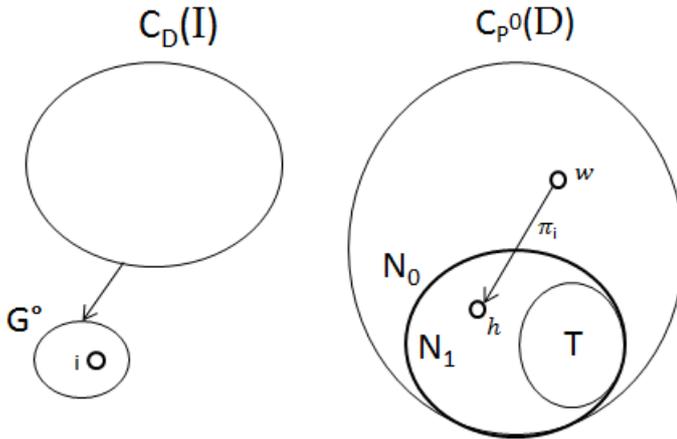


Figura 3.6

Por la afirmación 3.1.1.3 sabemos que N_1 es Π -independiente, notemos que si para todo t en T , $(t \rightarrow_{\Pi} N_1)$, entonces N_1 sería Π -absorbente, y por lo tanto sería Π -núcleo de D .

Por lo que definimos: $T^* = \{t \in T : (t \not\rightarrow_{\Pi} N_1)\}$.

Sea $C_P(D)[T^*] = (V^*, F^*)$ la subgráfica de $C_P(D)$ inducida por T^* , sea I^* el conjunto de colores que aparecen en $C_P(D)[T^*]$ y sea $Q^* = \{F_i^*\}_{i \in I^*}$ la partición de F^* , con $F^* = \{(x, y) \in F^* : (x, y) \text{ tiene color } i \in I^*\}$.

Como $T^* \subseteq N_0$ y N_0 es Π^0 -independiente tenemos que $I^* \subseteq V_I^1$ y que la digráfica de clases de color de $C_P(D)[T^*]$ y I^* denotada como $\mathbf{C}_{C_P(D)[T^*]}(I^*)$, es una subdigráfica de $C_D(I)[I^*]$.

Entonces $\mathbf{C}_{C_P(D)[T^*]}(I^*)$ no tiene ciclos impares de longitud mayor a 1 y como $|V_I^1| < |I| = n$, por la hipótesis de inducción $C_P(D)[T^*]$ tiene un Π^1 -núcleo.

Afirmación 3.1.1.5 Sea N_2 un Π^1 -núcleo de $Cl_P(D)[T^*]$, N_2 es Π -independiente en D .

Demostración. Sean x, y en N_2 y i en I tal que $(x \rightarrow_{\Pi} y)$. Como $N_2 \subseteq T^*$, la flecha (x, y) está en F^* y por lo tanto, como N_2 es un Π^1 -núcleo se tiene que $i \in V_I^0$, pero como $T^* \subseteq N_0$ y N_0 es Π^0 -independiente tenemos una contradicción, por lo tanto N_2 es Π -independiente en D .

Por demostrar que $N_1 \cup N_2$ es un Π -núcleo de D .

i) Π -independencia en D . Por las afirmaciones 3.1.1.3 y 3.1.1.5 tenemos que N_1 y N_2 son ambos Π -independientes en D . También tenemos por la definición de N_1 que $(N_1 \rightarrow_{\Pi} N_2)$ y por la definición de T^* tenemos que $(N_2 \rightarrow_{\Pi} N_1)$. Por lo tanto tenemos que $N_1 \cup N_2$ es Π -independiente en D .

ii) Π -absorbencia en D . Sea x en $V(D) \setminus (N_1 \cup N_2)$;

Subcaso 1) x está en $T^* \setminus N_2$. Como N_2 es un Π^1 -núcleo de $Cl_P(D)[T^*]$, tenemos que $(x \rightarrow_{\Pi} N_2)$.

Subcaso 2) x está en $T \setminus T^*$. Por la definición de T vemos que $(x \rightarrow_{\Pi} N_1)$.

Subcaso 3) x está en $V_P^0 \setminus N_0$. Por la afirmación 3.1.1.4, para todo x en $V(D) \setminus N_0$, se tiene que $(x \rightarrow_{\Pi} N_1)$.

Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es Π -absorbente en D (figura 3.7).

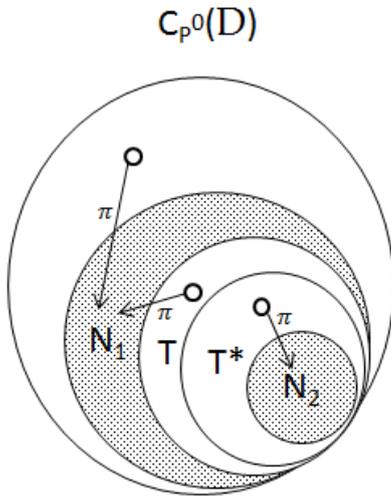


Figura 3.7

Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es un Π -núcleo de D . □

Para el caso cuando D es un torneo tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 3.1.2. Sea $T=(V(T), F(T))$ un torneo y $\Pi \subseteq DP(T)$ tal que es Π -completo. Si existe una partición $P=\{\Pi_i\}_{i \in I}$ de Π tal que:

i) Para todo i en I Π_i es transitivo;

ii) No hay triángulos dirigidos arcoíris en la P-cerradura de T con menos de 2 flechas simétricas; entonces T tiene Π -núcleo.

Demostración. Sea $T = (V(T), F(T))$ un torneo y $\Pi \subseteq DP(T)$ tal que es Π -completo y $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ una partición de Π tal que para todo $i \in I$ Π_i es transitivo y tal que no hay triángulos dirigidos arcoíris en la P-cerradura de T con menos de 2 flechas simétricas.

Veamos que por el teorema 1.5.9 del capítulo 1, si todo ciclo dirigido en $C_P(T)$ tiene una flecha simétrica entonces $C_P(T)$ tiene núcleo, lo que implica que T tiene Π -núcleo.

Por demostrar que todo ciclo dirigido en $C_P(T)$ tiene una flecha simétrica.

Sea $C_P(T)$ la P-cerradura de T , coloereada con el conjunto de colores I , supongamos que existe un ciclo dirigido de longitud mínima $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ sin flechas simétricas en $C_P(T)$, notemos que si todas las flechas de γ fueran del mismo color $i \in I$ como para todo i en I , Π_i es transitivo tendríamos que en γ habría flechas simétricas, lo que es una contradicción pues dijimos que no tenía flechas simétricas.

Por lo tanto deducimos que en γ existen al menos dos flechas con diferente color. Sean q, k en I dos colores diferentes que aparecen en γ , y entonces existe j , con $0 \leq j \leq n$ tal que (x_{j-1}, x_j) tiene color q y (x_j, x_{j+1}) tiene color k .

Afirmación 3.1.2.1 (x_{j+1}, x_{j-1}) no es una flecha de $C_P(T)$.

Demostración. Supongamos por el contrario que (x_{j+1}, x_{j-1}) es una flecha de $C_P(T)$.

Caso 1) (x_{j+1}, x_{j-1}) tiene color q . Si (x_{j+1}, x_{j-1}) tiene color q , como Π_q es transitivo y (x_{j-1}, x_j) tiene color q tenemos que (x_{j+1}, x_j) tiene color q y pertenece a $C_P(T)$ lo que es una contradicción pues en γ no hay flechas simétricas.

Caso 2) (x_{j+1}, x_{j-1}) tiene color k . Si (x_{j+1}, x_{j-1}) tiene color k , como Π_k es transitivo y (x_j, x_{j+1}) tiene color k tenemos que (x_j, x_{j-1}) tiene color k y pertenece a $C_P(T)$ lo que es una contradicción pues en γ no hay flechas simétricas (figura 3.8).

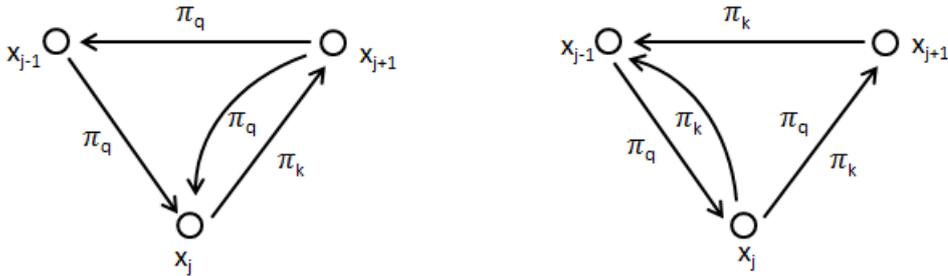


Figura 3.8

Como consecuencia de los casos 1 y 2 tenemos que el color de (x_{j+1}, x_{j-1}) es $l \in I$ diferente a q y k . Por lo que el conjunto de flechas $\{(x_{j-1}, x_j), (x_j, x_{j+1}), (x_{j+1}, x_{j-1})\}$ induce un triángulo dirigido arcoíris δ en $C_P(T)$, pero como $(x_j, x_{j+1}), (x_{j+1}, x_{j-1})$ no son flechas simétricas δ tiene a lo más una flecha simétrica, lo que es una contradicción pues supusimos que no había triángulos dirigidos arcoíris en la P-cerradura de T con menos de 2 flechas simétricas.

Por lo tanto, (x_{j+1}, x_{j-1}) no es una flecha de $C_P(T)$. Como Π es completa y (x_{j+1}, x_{j-1}) no es una flecha de $C_P(T)$ deducimos que (x_{j-1}, x_{j+1}) si es flecha de $C_P(T)$. (figura 3.9)

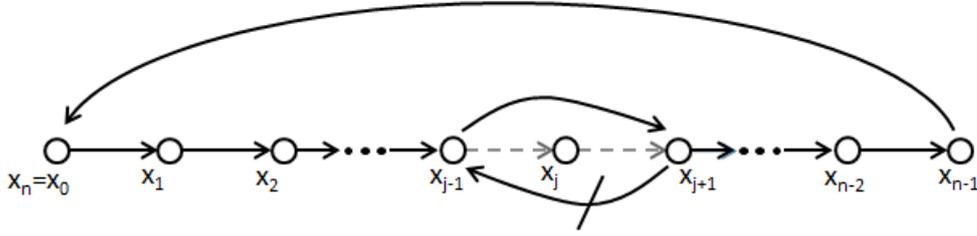


Figura 3.9

Entonces $\varphi = (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, x_0)$ es un ciclo dirigido en $C_P(T)$ sin flechas simétricas y con menor longitud de γ lo que es una contradicción pues dijimos que γ era el ciclo dirigido de longitud mínima sin flechas simétricas.

Por lo tanto todo ciclo dirigido en $C_P(T)$ tiene una flecha simétrica, por lo que $C_P(T)$ tiene núcleo y por lo tanto T tiene Π -núcleo. \square

Observación 3.1.1 Dado un torneo T , coloreado por flechas con el conjunto de colores I . Si tomamos a $\Pi \subseteq DP(T)$ como el conjunto de trayectorias monocromáticas en T y $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ es la partición de Π , tal que para cada i en I , Π_i es el conjunto de trayectorias monocromáticas de T de color $i \in I$. Se cumple que:

T es Π completo, pues en particular cada flecha es una trayectoria monocromática.

Para cada i en I , Π_i es transitivo, pues si dados tres vértices x, y, z en T , hay una xy -flecha y una zy -flecha, ambas de color $i \in I$ ($(x \rightarrow_{\Pi_i} y)$ y $(y \rightarrow_{\Pi_i} z)$), entonces (x, y, z) es una trayectoria monocromática con color $i \in I$ y por lo tanto $(x \rightarrow_{\Pi_i} z)$.

La P-cerradura de T es la cerradura de trayectorias monocromáticas de T .

Corolario 3.1.1. Sea T un torneo 3-coloreado por flechas, si no hay triángulos dirigidos arcoíris en la cerradura de trayectorias monocromáticas de T con menos de dos flechas simétricas, entonces T tiene un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Si tomamos a $\Pi \subseteq DP(T)$ como el conjunto de trayectorias monocromáticas en T y $P = \{\Pi_i\}_{i \in I}$ con $I = \{1, 2, 3\}$ es la partición de Π , tal que para cada i en I , Π_i es el conjunto de trayectorias monocromáticas de T de color i en I .

Por la observación 3.1.1 tenemos que cada Π_i es transitivo. Por el teorema 3.1.2 tenemos que T tiene un Π -núcleo y por como definimos Π sabemos que es Π -completa por lo que el Π -núcleo esta formado por un solo vértice y por lo tanto es absorbente por trayectorias monocromáticas. \square

3.2. Teorema de Richardson

Teorema 3.2.1. (Richardson)

Una digráfica finita sin ciclos dirigidos de longitud impar tiene núcleo.

Demostración. Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica finita sin ciclos dirigidos de longitud impar. Sea $\Pi = F(D)$ y sea $P = \{e\}_{e \in F(D)}$ una partición de Π (cada elemento de la partición es una única flecha de D), lo que implica que cada elemento de P es transitivo. Sea $L(D)$ la digráfica de clases de color de D y $F(D)$.

Afirmación 3.2.1.1 Si D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar entonces $L(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Demostración. Supongamos por contradicción que D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar y que existe un ciclo dirigido de longitud impar en $L(D)$. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ un ciclo dirigido de longitud impar en $L(D)$ (figura 3.10) y sea $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Para cada i en $[n]$, sea $x_i = (y_i, w_i)$ una flecha en $F(D)$. Como para todo i en $[n]$, (x_i, x_{i+1}) es una flecha de $L(D)$ tenemos que para todo i en $[n]$, $w_i = y_{i+1}$.

Por lo tanto C induce en D un camino cerrado $\varphi = (w'_0, w'_1, \dots, w'_{n-1}, w'_n = w'_0)$ de longitud impar (figura 3.10), lo que implica que existe un ciclo dirigido Θ de longitud impar en D (figura 3.10). Esto es una contradicción pues supusimos que no había ciclos dirigidos de longitud impar en D .

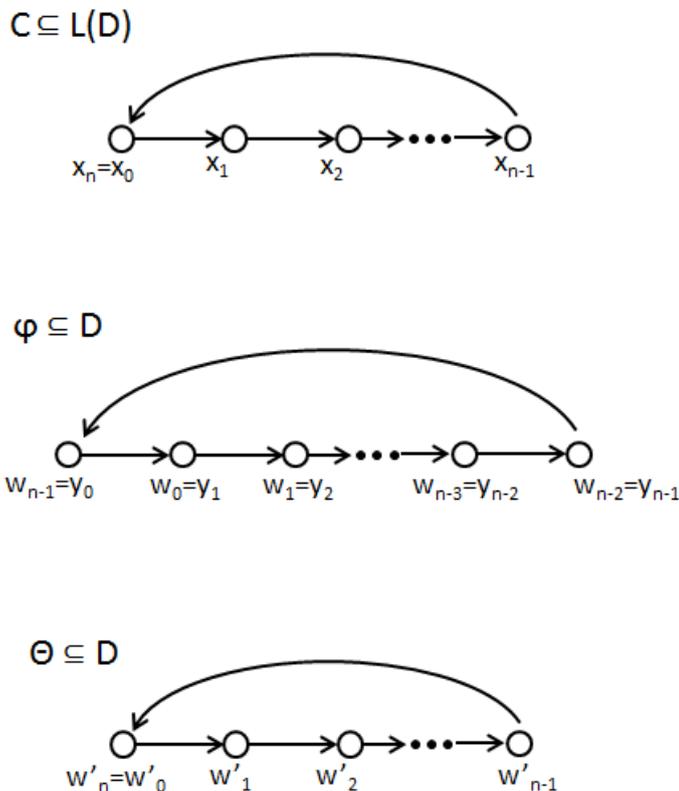


Figura 3.10

Por lo tanto $L(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Como todo elemento de Π es transitivo y la digráfica de clases de color de D y $F(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, por el teorema 3.1.1 tenemos que D tiene Π -núcleo, pero como $\Pi = F(D)$ entonces D tiene núcleo. \square

Con esto queda demostrado el teorema de Richardson en su versión para Π -núcleos. Y es así, con esta demostración que concluye el tercer y último capítulo de este trabajo.

Conclusiones

En este trabajo se presentó un panorama básico del concepto de una gráfica dirigida, cubriendo conceptos importantes con los cuales podemos estudiar temas más específicos con mayor profundidad.

El desarrollo de este trabajo es tal, que cada capítulo engloba las definiciones y resultados más relevantes, los cuales utilizamos para demostrar los teoremas principales los cuales otorgan el título a este trabajo.

En un principio dimos todas las definiciones y resultados necesarios para poder abordar sin ningún obstáculo el Teorema de Richardson en su versión original.

Después se planteó la idea de tomar un subconjunto Π de las trayectorias dirigidas de una digráfica, obteniendo conceptos como: Π -trayectorias, conjuntos Π - independientes, etcetera, siendo de éstos el más importante el Π -núcleo de una digráfica.

Finalmente obtuvimos una versión del teorema de Richardson que es correcta cuando usamos la idea de los Π -núcleos de una digráfica.

Como fue planteado inicialmente, el objetivo de este trabajo era hacer una recopilación de resultados importantes y relacionados con el concepto de núcleos de digráficas, hecho esto mostramos que si modificamos un poco las ideas principales, podemos encontrar una versión del teorema de Richardson que es válida y que es congruente con estos conceptos. Dicho esto podemos pensar en la idea de definir nuevos terminos, tomando “partes” o subconjuntos de las digráficas iniciales, definir nuevos “tipos de núcleos” y con base en estos descubrir si hay alguna versión de los resultados importantes, en particular del Teorema de Richardson que sean válidos para estos nuevos criterios.

Bibliografía

- [1] Berge C. *Graphs*. North-Holland Mathematical, Amsterdam (1989).
- [2] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang. *Graphs and digraphs*. Prindle, Weber and Schmidt Boston, Massachusetts 02116 (1986).
- [3] Bang Jesen, J., Gutin, G. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, London (2000).
- [4] Boros, E., Gurvich, V. *Perfect graphs, kernels and cores of cooperative games*. Discrete Math. 306, no. 19-20, 2336-2354 (2006).
- [5] H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara. *On kernels and semi-kernels of digraphs*. Discrete Math. 48, 67-76 (1984).
- [6] H. Galeana Sánchez, J.J. Montellano Ballesteros. *Π -kernels in digraphs*. Graphs and Comb. (2014).
- [7] Fraenkel, A. S. *Combinatorial Games: Selected Bibliography with a Succinct Gourmet Introduction*. Electron. J. Combin. 14 (DS2) (2009).
- [8] Galeana Sánchez, H. *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*. Discrete Math. 156, 103-112 (1996).
- [9] Galeana Sánchez, H. *Kernels in edge coloured digraphs*. Discrete Math. 184, 87-99 (1998).
- [10] Galeana Sánchez, H., Gaytán Gómez, G., Rojas Monroy, R. *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-coloured digraphs*. Discuss. Math. Graph Theory 31 no. 2, 283-292 (2011).
- [11] Hahna, G., Ille, P., Woodrow, R. E. *Absorbing sets in arc-coloured tournaments*. Discrete Math. 283, 93-99 (2004).
- [12] Linek, V., Sands, B. *A note on paths in edge-coloured tournaments*. Ars Combin. 44, 225-228 (1996).
- [13] Minggang, S. *On monochromatic paths in m -coloured tournaments*. J. Combin. Theory Ser. B 45, 108-111 (1988).
- [14] Neumann, J. V., Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton (1944).
- [15] Sands, B., Sauer, N., Woodrow, R. *On monochromatic paths in edge coloured digraphs*. J. Combin. Theory Ser. B 33, 271-275 (1982).
- [16] Chhvatál, V. *On the computational complexity of finding a kernel*. Report CRM300 Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques (1973).
- [17] Richardson, M. *Solutions of irreflexive relations*. Ann. Math. 58 (2), 573 (1953).
- [18] H. Galeana Sánchez, J.J. Montellano Ballesteros. *A Richardson's Theorem Version for Π -kernels*. Graphs and Comb.