



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE ECONOMÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**CONTAGIO FINANCIERO: MODELACIÓN CON FRACTALES Y CÓPULAS DESDE LA CRISIS
SUBPRIME A LA EUROZONA Y SU REPERCUSIÓN EN LATAM**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN ECONOMÍA

PRESENTA:
ROMINA MORENO MALDONADO

TUTORES PRINCIPALES
DR. EDGAR ORTIZ CALISTO (Tutor Principal)
Facultad de Economía
DRA. ALEJANDRA CABELLO ROSALES (Co-Tutora)
Facultad de Química
DR. JUAN MANUEL UGARTE CHAVEZ (Co-Tutor)
Facultad de Economía

CIUDAD DE MÉXICO., FEBRERO DEL 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Objetivo general	6
1.3. Hipótesis	7
1.4. Justificación y Aportaciones	7
1.5. Estructura de la Tesis	8
CAPÍTULO II CRISIS FINANCIERA.....	9
2.1. Un Repaso a la Literatura Teórica.....	9
2.1.1. Explicación Marxista	10
2.1.2. Política Keynesiana	14
2.1.3. Inestabilidad Financiera	16
2.1.4. Teoría de sobre Endeudamiento	19
2.1.5. Escuela Austriaca de Economía	23
2.2. Modelos de Crisis Financiera	24
2.2.1. Modelos de Primera Generación	25
2.2.2. Modelos de Segunda Generación	34
2.2.3. Modelos de Tercera Generación	40
2.2.4. Criterio de Clasificación.....	43
Conclusiones	44
Referencias	47
CAPÍTULO III CONTAGIO FINANCIERO	51
3.1. Definiciones y Relevancia.....	51
3.1.1. Literatura Teórica	53
3.1.2. Literatura Empírica.....	58
3.2. Tipos de Contagio	61
3.2.1. Derrame Financiero	62
3.2.2. Contagio Puro	64
3.3. Otros Tipos de Contagio	66
3.3.1. Teorías Contingentes	66

3.3.2. Teorías no Contingentes.....	66
3.4. Algunas Aplicaciones Contemporáneas.....	67
Conclusiones	70
Referencias	72
CAPÍTULO VI FRACTALES – CÓPULAS: ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA LA MEDICIÓN DE CONTAGIO FINANCIERO.....	77
4.1. Los Fractales: La Geometría de la Naturaleza.....	78
4.1.1. Definición	79
4.1.2. Características de los Fractales.....	81
4.1.3. El Conjunto de Mandelbrot	83
4.1.4. Teoría del Caos	85
4.1.5. La Teoría del Caos y los Atractores	88
4.1.6. Los Fractales y la Teoría del Caos.....	89
4.1.7. El Movimiento Browniano Fraccionario.....	90
4.1.8. Coeficiente de Hurst y Análisis R/S.....	93
4.1.9. La Dimensión Fractal.....	95
4.1.10. Espectro Multifractal	100
4.1.11. Fractales y los Mercados Financieros	102
4.2. Cópulas.....	103
4.2.1. Definición de Cópulas.....	104
4.2.2. El Teorema de Sklar	105
4.2.3. Medidas de Dependencia	106
4.2.4. Tipos de Funciones Cópulas.....	109
4.2.4.1. Cópulas Elípticas.....	110
4.2.4.2. Cópulas Arquimedianas	111
4.2.4.3. Cópulas Bivariadas	111
4.2.5. Estimación de Parámetros de las Cópulas	116
4.2.6. Selección del Modelo.....	118
Conclusiones	119
Referencias	122
CAPÍTULO V DESARROLLO DEL MODELO	127
5.1. Análisis de Datos.....	129

5.2. Modelo Multifractal	134
5.3. Las Cópulas y su Estructura de Dependencia	150
Conclusiones	155
Referencias	156
CAPÍTULO VI CONCLUSIONES.....	161
6.1. Otras líneas de estudio	162
APENDEICE	164
Apéndice A. Los Fractales Clásicos.....	164
Apéndice B. Otros Modelos de Selección de Cópulas.....	169
Apéndice C. Índices de Precios	170
Apéndice D. Estadística Descriptiva de los Índices de Precios.....	173
Apéndice E. Rendimiento diario y rendimiento al cuadrado	174
Apéndice F. Resultados Estimados para 5 Cópulas	178
Apéndice G. Resultados de los Coeficientes de Dependencia Asintótica.....	190
Apéndice H. Resumen de Coeficientes de Dependencia entre Periodos.....	202

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la inestabilidad financiera se ha vuelto un fenómeno común en la mayoría de los países. La mayoría de las crisis financieras han revelado que los mercados de valores presentan mayor dependencia durante periodos de inestabilidad económica. Esta situación se le conoce generalmente como contagio financiero, que recientemente se ha convertido en uno de los temas más apasionantes de la literatura económico-financiera contemporánea. Conocer el impacto de condiciones extremas en un mercado sobre otras economías, ha tomado una gran importancia tanto para los investigadores e inversionistas, como para quienes elaboran la política económica. Las implicaciones que se derivan de la medición del contagio, o incluso la sola determinación de su existencia, pueden afectar desde la elaboración de políticas monetarias o cambiarias óptimas, hasta la localización eficiente de los recursos de un fondo de capital internacional.

No obstante, entender el contagio o incluso determinar su existencia no es una tarea fácil. Sin una comprensión clara de contagio financiero y los mecanismos a través de los cuales funciona, parece imposible acceder al problema o diseñar políticas para controlarlo.

Una creciente literatura ha surgido en un intento de estudiar las consecuencias de la existencia del contagio financiero entre países. Es un hecho, que el contagio financiero tiene importantes implicaciones económicas en términos de políticas internacionales llevadas a cabo por el Fondo Monetario Internacional (FMI) en conjunto con un país o grupo de países, ya que los fondos de rescate empleados por el FMI han tenido un efecto débil sobre la balanza de pagos de los países cuando no se tiene evidencia del contagio financiero sea la fuente de la crisis del país prestatario. Por otro parte, los inversionistas deben entender la naturaleza de los cambios en las correlaciones de los mercados de valores con el fin de evaluar el potencial de los beneficios de la diversificación del portfolio internacional, así como la evaluación de riesgos.

Para medir el contagio financiero se han propuesto diferentes modelos alternativos. Uno de los más revolucionarios en el campo de la teoría de la especulación es la hipótesis de Mandelbrot, quien descubre que los cambios en los precios de los activos financieros siguen

una distribución estable de Lévy.¹ Así mismo, el modelo cópula se ha utilizado ampliamente en la econometría financiera y gestión de riesgos, ya que las cópulas son funciones que describen la dependencia entre las variables aleatorias. Existen estudios relacionados como el de Palaro y Hotta (2006) quienes utilizaron cópula condicional para estimar el VaR. Junker et al. (2006) examinaron la dependencia de la estructura plazo y el riesgo no lineal basado en cópulas. Hu (2006) propuso un modelo mixto de cópula que puede capturar varios patrones de estructuras de dependencia. Rodríguez (2007) modela la dependencia con cópulas para estudiar el contagio financiero. Hsu et al. (2008) proponen modelos GARCH a base de cópula para la estimación de la cobertura óptima de futuros. Lee (2010) investigó la correlación dinámica entre NASDAQ y Toronto Stock a través del modelo Cópula-AR-GARCH.

La presente tesis emplea la metodología de multifractales–cópulas para realizar un análisis de las crisis financieras más relevantes y altamente contagiosas de los últimos años: la Crisis Subprime (2008-2012) y la Crisis de la Deuda Soberana Europea (2010-actual). El objetivo es identificar si existe un contagio financiero entre los países desarrollados y América Latina, su nivel de dependencia, así como el contagio entre estos países desarrollados. La muestra incluye cinco mercados desarrollados y cinco mercados emergentes: Alemania, España, E.U.A., Francia, Inglaterra, Argentina, Brasil, Chile, México y Perú. En el caso de ambas crisis se considera como países afectados Alemania, España, E.U.A., Francia, Inglaterra y se analiza su contagio hacia América Latina, adicionalmente, se analiza el efecto contagio.

1.1. Planteamiento del Problema

En las últimas décadas, las crisis financieras se han contagiado velozmente a otros mercados; consiguientemente un gran número de países han sufrido rápidas y repentinas caídas en sus principales mercados financieros², reflejándose principalmente en caídas de precios y alta volatilidad de sus índices bursátiles. Tal situación ha sido uno de los mecanismos de crisis económicas generalizadas en los países afectados conllevados a que muchos requirieran la asistencia de instituciones internacionales como el FMI o el Banco Mundial para

¹ Los procesos estables de Lévy son estocásticos y obedecen al teorema generalizado del límite central. La forma de la distribución de Lévy permanece estable si se suman dos variables aleatorias que son explicadas cada una con una distribución estable de Lévy. (Mantegna & Stanley 2000).

² El concepto de mercados financieros incluye de manera enunciativa, más no limitativa los siguientes: mercado de crédito, mercado de deuda (dinero), mercado de capitales, mercado cambiario, mercado de derivados, entre otros.

restablecer la estabilidad y la confianza en su sistema bancario y financiero. Este entorno de inestabilidad financiera, es lo que ha llevado a profundizar los análisis sobre el contagio financiero.

Conviene precisar que el término contagio se ha incorporado al debate económico tan solo en años muy recientes. De hecho, no aparece en casi ninguna publicación de la literatura económica anterior a 1997, a excepción de algunos artículos escritos después de la crisis del peso en México en 1994 donde se hace mención de su contagio a otros países de América Latina. Es posible afirmar que la evolución del análisis sobre contagio ha ido avanzando conforme la globalización de los mercados financieros avanza también, y la interrelación entre los mercados ha sido creciente. Para efectos de esta investigación se considera que este fenómeno tuvo visibilidad en los años 1990's, cuando los mercados financieros internacionales comenzaron a mostrar los primeros síntomas de inquietud respecto al desequilibrio exterior de Tailandia, uno de los países cuya economía venía atrayendo fuertes inversiones extranjeras, como icono de las ventajas asociadas a las economías emergentes de mayor dinamismo en esa época. En julio de 1997, y ante insistentes salidas de capital, el gobierno tailandés se vio obligado a apelar al FMI en busca de soporte financiero, originándose (por indicación del FMI) una fuerte devaluación del baht y un severo ajuste de la demanda interna.

En los meses posteriores, se registraron notables tensiones sobre el dólar de Hong Kong, cuyas autoridades monetarias venían aplicando un esquema de *currency board*, o caja de conversión, similar al vigente en Argentina y otros países. Pero no fue en la ex-colonia británica, sino en Corea del Sur, en donde inesperadamente se manifestó una situación casi idéntica a la de Tailandia, con fugas de capitales, fuerte devaluación del wong (octubre de 1997) y posterior colapso económico, rápidamente extendido a Indonesia, Malasia y Filipinas, sin que la velocidad e intensidad de la propagación permitieran reaccionar a los gobiernos ni a los organismos internacionales.

Unos meses más tarde (agosto de 1998) el gobierno ruso declaró inesperadamente la imposibilidad de repagar su deuda externa a corto plazo, lo que añadió a las crisis asiáticas un elemento nuevo, que amenazaba a la propia arquitectura del sistema financiero internacional,

hasta el punto de provocar la quiebra de varios fondos, entre ellos el *Long Term Capital Management*, entonces considerado el más relevante de la inversión colectiva en Wall Street.³

Los efectos del contagio cruzaron el océano y se manifestaron de forma inmediata en México y Brasil. En enero de 1999, éste último país se vio obligado a devaluar significativamente el real y a llevar severos ajustes domésticos para evitar el colapso total de sus finanzas. Finalmente, la economía Argentina, seriamente afectada por los episodios de Brasil, no pudo evitar una profunda crisis, que terminó estallando dos años después.

Sebastián Edwards⁴ (1999), en su “*World Economic Lecture*” ofreció una clara perspectiva del fenómeno contagio, en línea con esta definición intermedia del Banco Mundial, propone restringir la expresión contagio económico a aquellas situaciones en las que la extensión e intensidad con que se transmite una perturbación, real o financiera, excede de cuanto era esperable. El contagio es considerado, pues, como algo atípico, que supera cuanto podía ser razonablemente esperado por los participantes en los mercados. Un número considerable de otros analistas⁵ han adoptado también este enfoque del problema.

Una vez identificado el concepto de contagio como un elemento residual (aunque decisivo) respecto a las extensiones y desbordamientos explicables por vínculos fundamentales, es preciso responder a los siguientes cuestionamientos: ¿cómo se da su aparición? ¿cómo explicar su impacto? ¿cómo medir este impacto?

Visiblemente, el proceso de globalización económica y financiera ha incrementado la relación entre diversos países y mercados, aumentando los canales de transmisión, mucho más allá de lo que hasta ahora se consideraban conexiones ordinarias. Vínculos financieros, reales y políticos, han resultado intensificados en el avance hacia la globalización. Ello resulta especialmente cierto respecto a los mercados de capitales y, en particular, respecto a la actuación de los inversores institucionales, que constituyen la columna vertebral de aquéllos.

³ Es importante destacar que este fondo tenía entre sus administradores a dos premios Nobel, y entre sus actividades se encontraba la realización de ataques especulativos sobre monedas, entre ellas las asiáticas. También es de considerar el hecho de que la crisis de Rusia se materializa en el marco de las políticas del FMI.

⁴ Sebastián Edwards Figueroa, (Santiago, 16 de agosto de 1953) es un economista, consultor internacional y escritor chileno. Radicado en Estados Unidos, país del que también es ciudadano, escribe sus novelas en español y, generalmente, sus libros de economía en inglés.

⁵ Eichengreen, Rose & Wyplosz (1996); Kaminsky & Reinhart (2000) etc.

Las explicaciones de simples comportamientos de rebaño no agotan la explicación sobre fenómenos de contagio, ni es probablemente esa la intención de quienes las proponen. Distintos analistas ponen énfasis en diferentes causas y canales de transmisión⁶, aunque quizás una de las hipótesis más sugerentes sea la planteada por Prakash Kannan y Fritzi Köhler-Geib (2009).

Los autores observan que históricamente algunas crisis registradas en mercados emergentes (como las descritas en México 1994, Tailandia 1997 y Rusia 1998) provocaron un amplio efecto de contagio que afectó, de modo intenso, no sólo a otros países de sus correspondientes zonas geográficas, sino a economías mucho más lejanas y estructuralmente desvinculadas de aquéllas. Sin embargo, otras crisis del mismo período (Brasil 1999, Turquía 2001, y Argentina 2002) tuvieron muy poca repercusión más allá de sus respectivas fronteras nacionales y zonas aledañas, o se mantuvieron, incluso, como fenómenos meramente locales.

Alternativas para la modelación de mercados financieros

Desde hace poco más de un siglo, se han desarrollado y aplicado diversas técnicas como un intento de medir el riesgo y la volatilidad en los mercados financieros, como el movimiento geométrico browniano, el modelo de Black-Scholes-Merton, el modelo de Bachelier, la frontera de eficiencia de Markowitz, los modelos autorregresivos ARCH y GARCH, por mencionar algunas de las metodologías más empleadas en este campo, que han propiciado el desarrollo de instrumentos y teorías que son de suma utilidad y aplicados hoy día por doquier en los mercados financieros. Desgraciadamente y a pesar de la gestión relativamente fácil que han demostrado tener estos instrumentos, representan una vaga descripción de las características de la realidad financiera hoy día.

Esta realidad puede observarse en las gráficas generadas por las series de tiempo de los mercados financieros, donde se destacan dos categorías: unas deterministas y otras aleatorias. En el primer caso, los valores futuros dependen de su estado actual, así como de la suma acumulativa de todos sus estados pasados. Mientras que en el segundo caso, la correlación entre el pasado del sistema y su presente es cercana a cero, por lo que no influirá en el futuro.

⁶ Van Rijckeghem & Weder (2001); Caramazza, Ricci & Salgado (2004); Broner, Gelos & Reinhart (2006) etc.

Los mercados financieros comparten ambas características. Frente a esta condición, el presente trabajo de tesis introduce un modelo que une dos metodologías fractales y cópulas.

Mandelbrot (1997), Bouchaud (2001) y Chorafas (2000), entre varios autores, sostienen que el enfoque fractal es preferido por ser un medio que permite seguir de cerca movimientos dinámicos y complejos. Por otro lado, las cópulas han probado ser una herramienta efectiva para medir la dependencia no normal de las series de tiempo financieras. Nguyen, Bhatti y Hayat (2014) proponen mezclar funciones cópula con los modelos GARCH asimétricos y aplicar el procedimiento en el *All Ordinaries Index* y su correspondiente *Share Price Index* en los contratos de futuros en Australia. Las cópulas marginales descritas por procesos AGARCH pueden diferenciar entre los impactos de choques positivos y negativos en los rendimientos, tomando en cuenta la curtosis.

1.2. Objetivo general

Realizar un estudio sobre la crisis financiera Subprime hasta la deuda Soberana Europea, desde una perspectiva cuantitativa con el fin de identificar el contagio de las crisis financieras y su repercusión en América Latina durante el periodo 2004 a 2015. Para determinar la existencia de contagio financiero durante una crisis, se toma como muestra, las crisis antes mencionadas durante un periodo de tiempo que abarca un ciclo financiero pre y post crisis utilizando información diaria del índice bursátil principal de algunos de los países afectados. La muestra incluye cinco mercados desarrollados y cinco mercados emergentes: Alemania, España, E.U.A., Francia, Inglaterra, Argentina, Brasil, Chile, México y Perú; y se analiza su contagio de los países emergentes hacia América Latina.

Para lograr el objetivo, se identificaron las siguientes tareas de investigación:

1. Proporcionar un panorama amplio de las teorías que explican el contagio financiero;
2. Explorar los marcos teóricos del contagio financiero, incluyendo definiciones, canales de transmisión y métodos de prueba;
3. Analizar cualitativamente los resultados empíricos anteriores sobre el tema;
4. Desarrollar un modelo basado en la combinación de los métodos multifractales y cópulas para estudiar el efecto contagio entre los mercados de valores antes y después de la crisis mencionadas; y

5. Analizar los resultados de la aplicación del modelo a fin de dar respuesta al impacto que tienen las crisis financieras sobre América Latina y el contagio de países desarrollados a emergentes.

1.3. Hipótesis

Las crisis financieras más relevantes de los últimos años, subprime y soberana europea, sirven de muestra para probar la existencia del contagio financiero y su impacto en América Latina. La medición del efecto contagio financiero revela la rapidez, alcance y fuerza de este fenómeno empleando un modelo basado en multifractales – cópulas.

1.4. Justificación y Aportaciones

Aunque el contagio de las perturbaciones financieras generalmente va de los países más grandes a los más pequeños, la crisis financiera de Asia ha demostrado que las dificultades severas en el sector financiero en una economía relativamente pequeña (Tailandia) pueden tener un amplio rango de efectos indirectos si actúan como una señal de alerta a los inversionistas para que reevalúen el riesgo de un país, especialmente si un grupo de otras economías tienen vulnerabilidades similares a aquellas en la economía afectada primero.

Por todo lo expuesto anteriormente, la presente tesis considera que el estudio del contagio financiero es un tema de mayor importancia a la luz de la integración de los mercados financieros a nivel global y de las consecuencias de la misma.

El análisis del contagio es particularmente oportuno por dos razones. Una es el riesgo continuado de los efectos indirectos en los mercados financieros, que podrían tener una relación inmediata sobre las perspectivas económicas de corto plazo para muchos países individuales y para la economía mundial. La otra razón es la necesidad de extraer lecciones de las crisis financieras en los mercados emergentes en los últimos años, las cuales hacen destacar el papel potencialmente nocivo de los mercados internacionales de capital, siendo que, los flujos de capital pueden ser volátiles y sujetos a los efectos de rebaño. En ambos casos, las contribuciones que puedan derivarse de la investigación pueden aplicarse en

perfeccionar los pronósticos para la mitigación o eliminación del riesgo sistémico, y aportando elementos de juicio para la toma de decisiones en materia de riesgo.

Cabe mencionar que en los mercados financieros emergen patrones inesperados que requieren de modelos que sigan de cerca dicho movimiento. En esta investigación se demuestra que la metodología del análisis fractal se presenta como una alternativa científica, por su capacidad para analizar el valor de una sola variable que evoluciona a lo largo del tiempo y coadyuva a descubrir un orden dentro del funcionamiento de los mercados.

Además, la presente investigación contribuye a la literatura sobre la capacidad de propagación de las crisis financieras, ya que se lleva a cabo el desarrollo de un modelo basado en multifractales-cópulas con el fin de identificar el contagio financiero entre los mercados de valores, enriqueciendo así la literatura económica financiera.

Finalmente, se espera que los resultados que se obtengan en esta investigación puedan agregar valor a la investigación y el análisis económico a mayor profundidad y especificidad.

1.5. Estructura de la Tesis

El documento consta de cinco capítulos además de esta introducción. En el segundo capítulo se analizan las crisis financieras mencionadas y se determina su efecto inmediato en otros mercados. El tercer capítulo revisa la literatura relevante sobre el contagio financiero algunos de los enfoques y modelos más importantes. En el cuarto capítulo se describe la metodología multifractales-cópulas, a partir de la cual se genera el modelo dirigido a probar la existencia de contagio financiero y su impacto en América Latina. El método multifractales puede filtrar la heterocedasticidad con mayor precisión, y las cópulas contienen toda la información sobre la estructura de dependencia de un vector de variables aleatorias. En el quinto capítulo se presentan y examinan las series de tiempo empleadas; se desarrolla el modelo econométrico, y se analizan los resultados empíricos obtenidos. Finalmente, en el último capítulo se exponen las conclusiones e implicaciones del estudio.

CAPÍTULO II

CRISIS FINANCIERA

Los ciclos y las crisis económicas han sido uno de los temas que más controversias ha provocado entre los economistas. En términos generales, la expresión crisis como es utilizada en el presente estudio, se refiere a un conjunto generalizado de las fallas en las relaciones económicas y políticas del funcionamiento de las economías. En la historia del pensamiento económico, se pueden distinguir líneas básicas de análisis sobre las crisis, en las que cada una de las posiciones implica un correspondiente concepto de crisis, por qué se producen y qué implican.

En este capítulo se agrupan una serie de estudios, dada la importancia y trascendencia que estos enfoques han tenido, y tienen, en la literatura económica contemporánea, y que sirven de base para realizar la propuesta teórica que se enfoca en cinco grupos: la Explicación Marxista, la Política Keynesiana, la Inestabilidad Financiera, la Teoría de Sobre endeudamiento y la Escuela Austriaca de Economía.

2.1. Un Repaso a la Literatura Teórica

Uno de los objetivos más importantes de los economistas desde el siglo XVIII y principio del XIX fue el desarrollo de una explicación detallada de las causas de la crisis bancaria en Inglaterra a final del siglo XVIII.⁷ Asimismo, estudios posteriores intentaron delinear los factores de influencia en la incidencia de las crisis económicas. Grandes pensadores económicos, como Adam Smith, Karl Marx, John Maynard Keynes, Joseph Schumpeter y otros economistas modernos han tratado de averiguar exactamente por qué suceden estas crisis, cómo se pueden solucionar y prevenir.⁸ Las explicaciones tienen sus fundamentos particulares y complementarios, determinando ello que al día de hoy no existe una explicación única o una

⁷ Para mayor información sobre estos estudios ver *Bullion Report (1810)*, en donde tuvieron una participación destacada el banquero Henry Thornton y el economista David Ricardo, identificando las causas y sugiriendo medidas vigentes hasta nuestros días.

⁸ En general el soporte explicativo es el de la teoría de ciclos económicos. Los aspectos financieros fueron reconocidos posteriormente, pero como un factor externo. Es hasta la última década que en la teoría económica los factores financieros son reconocidos como parte de la Macroeconomía.

solución generalmente aceptada, pero muchos pensadores han dado una visión crítica de por qué se generan las crisis financieras.

2.1.1. Explicación Marxista

Karl Marx fue uno de los primeros grandes economistas que rechazó la escuela clásica y esbozó principios sobre las causas de las crisis económicas. Marx identificó tres tipos diferentes de crisis económicas. Las primeras ocasionadas a corto plazo por acontecimientos recientes, como la pérdida de cosechas. El segundo tipo de crisis se debe al incremento y decremento en el ciclo económico. El último tipo, que se centra en las crisis a largo plazo, donde las afirmaciones de Marx son relacionadas con el comportamiento del sistema capitalista. Esta es su contribución única y más importante de la explicación de las crisis económicas.

Marx creía que el sistema capitalista observa una tendencia de la crisis a largo plazo cada vez más grave y llamó a la tendencia a la baja de la tasa de rendimiento (la ley más importante de la economía política) (Marx, 1863). La idea de que la tasa de rendimiento tuviera una tendencia a la baja fue discutida previamente por los economistas clásicos como Adam Smith y John Stuart Mill, pero Marx lo utilizó como centro de su explicación de la crisis del capitalismo. Para Marx, la tendencia a la baja de la tasa de rendimiento se inicia con la idea de que la plusvalía se deriva de los excedentes de mano de obra, o la diferencia entre el valor de la mano de obra de los trabajadores y los salarios que se les hayan pagado por él. Marx explica que la tasa de rendimiento se puede definir como la plusvalía dividida por el volumen del capital constante (por ejemplo, fábricas, materias primas, etc.). Afirma que la tasa de rendimiento se reducirá si se reduce la cantidad de plusvalía en relación a la cantidad de capital constante; y llega a la conclusión de que al aumentar la productividad, conducirá inevitablemente a la tasa de rendimiento a caer. El escribe que: "*Si la productividad de la industria aumenta, el precio de los productos básicos se cae. Hay menos trabajo, tanto trabajo remunerado y como no remunerado*" (Marx, 1894). Según la definición de la tasa de rendimiento de Marx, si la cantidad de mano de obra en los productos disminuye entonces la tasa de rendimiento caerá. De acuerdo con Marx, mientras que puede haber aumentos a corto plazo en la tasa de rendimiento, la tendencia a largo plazo sería a la baja. Ello es fundamentalmente importante porque considera la fuente de valor importante al trabajo.

La tendencia de la tasa de rendimiento no explica por qué se produce la crisis económica, sino que sólo establece algunas bases de la teoría de Marx. Dado que la crisis económica se caracteriza por un exceso de oferta en general y alto desempleo involuntario, es necesario ver cómo Marx explica esto. El describe la saturación general como un problema de la sobreproducción. Como él mismo escribe: *"Los límites en los que la conservación y especulación del valor del capital que descansa sobre la expropiación y empobrecimiento de la gran masa de productores solo pueden moverse estos límites continuamente en conflicto con los métodos de producción empleados por el capital para sus fines, que avanza hacia la extensión ilimitada de la producción"*. (Marx: El Capital, 1867).

Los medios de desarrollo incondicional de las fuerzas productivas de la sociedad viene continuamente en conflicto con el propósito limitado, la valorización del capital existente donde Marx prevé una situación en la que lidera el aumento de la productividad el mercado que está inundado de productos. Esto a la larga baja los precios y reduce las ganancias. La reducción de los precios sólo sería una solución temporal, y la reducción de beneficios obligará a los capitalistas a tratar de reducir los costos, empujando los salarios hacia abajo, pero esto sólo conduce a una disminución de la capacidad de funcionamiento de clase para el consumo. Al disminuir los precios de la demanda, los consumidores tendrían que seguir bajando hasta que los beneficios desaparecen por completo.

Para clarificar la segunda característica de las crisis económicas, Marx explica que el alto desempleo durante una crisis es generada por la tendencia a la baja de las tasas de rendimiento; es decir, si se reduce la necesidad de mano de obra, luego los empleadores ya no necesitan a los trabajadores. Esta sustitución de trabajadores por máquinas más eficientes dará lugar a un aumento del desempleo.

Finalmente, la explicación de la crisis económica y la tendencia a la baja de la tasa de rendimiento vienen dadas en la explicación del ciclo económico. El ejército de reserva (desempleados), son utilizados por la clase capitalista cuando se necesita más mano de obra. Al explicar los salarios Marx escribe que, tomando como un todo, los movimientos generales de los salarios se regulan exclusivamente por la expansión y contracción del ejército de reserva, y éstos a su vez se corresponden con los cambios periódicos del ciclo industrial. Por lo tanto, no están determinados por las variaciones del número absoluto de la población activa, pero las

proporciones varían y la clase obrera se divide en activa y en ejército de reserva, mediante el aumento o la disminución en la cantidad relativa de la población sobrante. En combinación de la explicación del ejército de reserva de Marx y cómo afecta a los salarios nos permite ver que cuando aumenta la productividad del trabajo y el tamaño del ejército de reserva aumentará y por lo tanto bajarán los salarios. Cuando el costo de mano de obra se vuelve más barato que invertir en capital constante más eficiente, entonces los empleadores comenzarán a contratar a más trabajadores. Esto aumentará la plusvalía en relación al capital constante y hacer que la tasa de beneficios vuelva a subir de nuevo. Esto provocaría el llamado boom del ciclo económico, o un período de crecimiento económico. Sin embargo, a medida que más mano de obra es contratada y el tamaño del ejército de reserva se reduce, los salarios empiezan a subir de nuevo y el trabajo se vuelve más caro que el capital constante. Los trabajadores son despedidos de nuevo, la tasa de rendimiento cae y se genera una crisis grave.

En resumen, la escuela Marxista, sostenía que las crisis económicas que se producen en el capitalismo provienen de un desequilibrio entre oferta y demanda. Para ellos la causa de la crisis económica radicaba en que se producía más de lo que la gente podía consumir. Se puede llamar a estas explicaciones teorías de sobre producción. Sin embargo, existe un grupo de autores marxistas que contemplan la posibilidad de que algunas variables financieras ayuden a explicar las causas del estallido de cierto tipo de crisis financieras; sobre todo si se trata de crisis financieras internacionales (Aglietta, 1998; Aglietta y de Boissieu, 1999; Amin 2000; Callinicos, 1998; Chesnais, 2000; Duménil y Lévy, 2000 y Hahnel, 1997). Por ejemplo, Callinicos (1998) y Duménil y Lévy (2000) afirman que para comprender la verdadera naturaleza de las crisis, hay que añadirle una dimensión financiera al análisis marxista, como puede ser la introducción del pánico financiero como variable explicativa (Callinicos, 1998) o la creciente movilidad en el sector financiero (Duménil y Lévy, 2000). Sin embargo, es evidente que en el contexto del análisis realizado por Marx, en la ortodoxia económica no existía la dimensión financiera dentro de la teoría de los ciclos económicos.

Chesnais (2000) parte de la hipótesis marxista de sobreproducción y sobreacumulación del capital pero considera que el fenómeno de la financiarización de la economía está adquiriendo tales dimensiones que las causas de las crisis financieras recientes (y probablemente de las futuras) se encuentran (y se encontrarán) cada vez en mayor proporción en la esfera financiera. Desde su punto de vista, la financiarización de la economía ha coincidido con un aumento

paralelo de la inestabilidad financiera, que se debe a tres fenómenos. El primero de ellos es el carácter especulativo de los mercados bursátiles y de los mercados de productos derivados que se plasma, entre otras cosas, en el carácter ficticio del capital bursátil, en el comportamiento mimético de los agentes financieros que favorece la creación de burbujas especulativas y en el aumento de la correlación de los precios de algunos productos (como por ejemplo de los derivados respecto de sus correspondientes subyacentes). Una segunda fuente de inestabilidad es el debilitamiento del sistema financiero, provocado por el auge de las instituciones financieras no bancarias que son, según el autor, las grandes beneficiarias del proceso de mundialización financiera. La tercera y última fuente de inestabilidad financiera nace del hecho de que algunos sectores están adoptando el carácter especulativo de los mercados financieros (por ejemplo y sobre todo, los mercados inmobiliarios y de materias primas). Chesnais (2000) sostiene asimismo que esta inestabilidad financiera se ve acentuada con el proceso de globalización financiera, estableciendo así una relación causal entre globalización y crisis financieras.

La Ley Say

El economista Jean-Baptiste Say (1767-1832), expone la Ley Say en 1803, la cual intentaba refutar a los empresarios que sostenían que la recesión se debía a la falta de moneda. Say mostró que es imposible que haya sobreproducción en todos los mercados como sostenían los socialistas dando lugar a una crisis económica generalizada.

Say expone su ley en su tratado de Economía Política del siguiente modo: dado que los productos se intercambian por productos no pueden existir desequilibrios globales entre la oferta y la demanda. Say decía que cuando un productor termina un producto, su mayor deseo es venderlo, y cuando lo ha vendido no está menos apresurado en deshacerse del dinero que le proveyó la venta, comprando otro producto. Lo importante es que, según la ley de Say, el sistema capitalista no podría generar de forma endógena crisis generales de sobreproducción. A lo sumo podrían existir crisis en determinadas ramas o sectores, debido a las desproporciones que son propias de toda coordinación basada en el mercado; pero no una crisis generalizada.

En resumen, en el marco rígido establecido por Say, en el que es imposible la existencia de un desfase global entre la oferta y la demanda de bienes, se deduce lógicamente que la economía de mercado, gracias a las señales que trasmite a los productores, es capaz de obtener el equilibrio económico general en el que todos los mercados individuales están simultáneamente en equilibrio.

Cuando se plantea la cuestión de las crisis, los partidarios de la ley de Say se precipitan a insistir en la existencia de mecanismos correctores automáticos restablecedores del equilibrio, eliminadores de la sobreproducción y recuperadores del pleno empleo. Las crisis se conciben entonces como fenómenos esencialmente transitorios, lo que lleva a la versión débil de la ley de Say.

2.1.2. Política Keynesiana

Alrededor de cincuenta años después de la muerte de Marx, con John Maynard Keynes se desarrolla una teoría de la crisis económica que vino desde una perspectiva muy diferente a la de Marx y de los economistas clásicos. La explicación de Keynes comienza con una crítica de la teoría clásica. La escuela clásica había seguido la ley de Say, que afirmó que el ingreso pagado por producir bienes sería suficiente para comprar todo el bien producido, pero Keynes afirmaba que esto era incorrecto. Se dio cuenta de que la gente no gasta todos los ingresos que recibía, sino que parte de estos ingresos era ahorrado. Esto significa que la producción de bienes no se compró en su totalidad y por lo tanto un exceso general ocurre si el gasto en consumo disminuye. La teoría clásica sugiere que si esto sucede así, entonces los precios y los salarios caerían hasta que el mercado llegara a un punto en el que se aclarará. Keynes no creía que esto necesariamente pudiera suceder por dos razones. En primer lugar, si los salarios cayeran sólo serviría para disminuir aún más la demanda agregada y por lo tanto agravaría el problema. La segunda era que él creía que los salarios eran rígidos.

Keynes argumenta que, dado que la movilidad imperfecta de mano de obra, los salarios no tienden a una igualdad exacta para diferentes ocupaciones, cualquier individuo o grupo de individuos, que autoriza la reducción de los salarios nominales, sufrirá una reducción relativa de los salarios reales, lo cual es una justificación suficiente para que puedan resistir. Afirma que los trabajadores se resisten a los recortes en los salarios, lo que causa que sus salarios sean

más bajos al igual que sus contrapartes en otras empresas, por lo que ninguna empresa tratará de reducir los salarios a fin de evitar esta resistencia. Keynes también señala que los sindicatos desempeñan un papel en la resistencia a los recortes salariales.

El punto de vista de Keynes, era que si los salarios no pueden caer entonces la mano de obra nunca caería y no habría desempleo involuntario. En resumen, más ahorro no provoca una reducción de los salarios, sino una disminución la demanda agregada.

Para Keynes el problema de la crisis es una caída en demanda global que proviene en última instancia de un incremento en la preferencia por la liquidez de los agentes económicos. Según Keynes, el ahorro que no es invertido provoca una caída en la demanda global, como consecuencia las empresas acumulan stocks por encima de su nivel deseado, lo que provoca una baja en la producción para liquidar esos stocks y que, por lo tanto, despidan trabajadores. De esta manera se entra en un nivel de producción más bajo y la desocupación aumenta.

Actualmente se está dando un renacer del keynesianismo. Muchos recuerdan que el *New Deal* tanto en América como en Europa produjo decenios de bienestar: ocupación y elevación del nivel de vida de la población, junto con la superación de la gran crisis de los años treinta. Tal es una creencia actualmente muy difundida, que explica también por qué casi todos tienden hoy a pensar que para salir de esta crisis se requieren políticas keynesianas: más Estado, más crédito, más emisión monetaria, más regulaciones

Sin embargo, las políticas keynesianas no pueden ya ser útiles para enfrentar la actual crisis. Ello, en el corto plazo, porque no podrían tener siquiera los reducidos efectos positivos que tuvo el *New Deal* en los años treinta frente a la crisis. En efecto, si hubiera que reconocer que en las condiciones de entonces las medidas aplicadas por el *New Deal* eran razonables, ya no lo son actualmente. Había entonces un evidente subconsumo, hoy partimos de un notable consumismo. Escaseaba el dinero, por las elevadas tasas de interés; hoy abunda la emisión monetaria, con tasas de interés muy bajas durante períodos muy prolongados. Regía el patrón oro y la convertibilidad en oro que daban un excesivo respaldo al dinero; actualmente el dinero se crea ex nulla, o su respaldo es solamente el crédito. En ese tiempo era altamente premiado el ahorro; actualmente y desde hace mucho tiempo el ahorro es castigado por la inflación y las bajas tasas de interés.

En general, si hay un punto en el que todos los economistas, indistintamente de su tendencia ideológica, están de acuerdo es que el problema económico es un problema de escasez de recursos. Sin embargo Keynes cree que no es imposible que el capital deje de ser escaso. Keynes creía que una expansión monetaria puede provocar que la tasa de interés baje hasta llegar a cero. Esto implica confundir capital con dinero y que la tasa de interés no está afectada por factores reales.

2.1.3. Inestabilidad Financiera

Frederic Mishkin elabora una teoría de la inestabilidad financiera basada en la información asimétrica que señala las fuerzas fundamentales que dañan tanto el sector financiero como la actividad económica (Mishkin, 1998). Según el autor, esas fuerzas fundamentales, pueden dañar la estructura financiera y económica de un país hasta el punto de provocar en él una crisis financiera. Así, según Mishkin, una crisis financiera provocada por este tipo de elementos consistiría en *“una interrupción no lineal de los mercados financieros en la que los problemas de selección adversa y de riesgo moral empeoran, de modo que los mercados financieros son incapaces de canalizar de modo eficiente los fondos a los agentes que disponen de las oportunidades de inversión más rentables”* (Mishkin, 1996).

Desde su punto de vista, la labor de intermediación que ejerce el sistema bancario en un país (ya sea éste desarrollado o subdesarrollado) es crucial para el buen funcionamiento de la economía. Sin embargo, ningún sistema bancario, por sofisticado que sea, puede funcionar perfectamente a causa de la asimetría de la información. En el planteamiento de Mishkin, el problema de la asimetría de la información da lugar a otros dos tipos de problemas, que resultan ser determinantes para los mecanismos de funcionamiento de los mercados financieros. Estos son la selección adversa y el riesgo moral. La selección adversa significa que una de las partes prior a un contrato (de crédito), en este sentido el prestatario se encuentra mejor informado que el prestamista (banco) y la transmisión de información que le da el prestatario al prestamista es incompleta o no fidedigna, lo cual implica que las decisiones que puedan tomarse a partir de estos hechos representan actividades de inversión con un riesgo considerable. Por tanto, aquellos empresarios que tengan mayores probabilidades de emprender actividades adversas para la economía en su conjunto (por su elevado riesgo) son los mismos que tienen más posibilidades de ser elegidos por los acreedores. En otras palabras,

la probabilidad de que el crédito sea concedido a prestatarios de baja calidad es mayor que la probabilidad de que dicho crédito sea concedido a deudores de alta calidad.

El segundo problema que deriva de la asimetría de la información (el riesgo moral) aparece una vez que se ha establecido el contrato financiero entre las dos partes. El riesgo moral consiste en la posibilidad de que, una vez concedido el crédito, el deudor se aventure en actividades que pueden poner en peligro la devolución de la deuda al prestamista. Este problema surge porque el prestatario tiene incentivos para desviar el crédito obtenido hacia actividades de inversión más rentables pero también más arriesgadas. Por otro lado, los ahorradores también pueden ser víctimas de la información asimétrica, cuando la banca usa los ahorros para actividades diferentes al crédito. En definitiva, el riesgo moral es una manifestación del conflicto de intereses que existe entre prestamista y prestatario. El problema del riesgo moral puede acarrear las mismas consecuencias que el de la selección adversa, esto es, una disminución de la oferta de crédito. La solución obvia al problema de la selección adversa es el aumento de los niveles de información del prestamista respecto del prestatario, en definitiva, la reducción de la asimetría de la información. Así, al no reducirse la asimetría de la información, tampoco se solucionan los problemas de selección adversa y riesgo moral.

La explicación de Mishkin de cómo funcionan los mercados financieros desde el punto de vista de los problemas de información es la base sobre la cual se asienta la hipótesis de la inestabilidad financiera del mismo autor. Según él, la inestabilidad financiera “*ocurre cuando los choques sufridos por el sistema financiero interfieren con los flujos de información, de modo que el sistema financiero no puede seguir canalizando fondos a aquellos con oportunidades de inversión productivas*” (Mishkin, 1998). La inestabilidad financiera puede surgir por la aparición de alguno, o varios, de los siguientes cuatro factores: el aumento de las tasas de interés, el aumento de la incertidumbre, los efectos provocados por el mercado de activos en los balances y, por último, la aparición de problemas en el sector bancario. La aparición de cualquiera de los cuatro factores, según Mishkin, da lugar a una situación de inestabilidad financiera. Además, según el autor, si varios de estos factores aparecen de forma simultánea, esto puede dar lugar al estallido de una crisis financiera.

Propagación de la inestabilidad financiera

De acuerdo con las hipótesis de Mishkin (1996 y 1998), los mecanismos de propagación de la inestabilidad financiera son distintos según el tipo de economía de que se trate. Así, la propagación de la inestabilidad se dará de un modo distinto en los países desarrollados que en los subdesarrollados. Esto es así debido a las diferencias institucionales que existen entre los mercados financieros de los países desarrollados y los de otros países más pobres. Estas diferencias institucionales son las mismas que ya se han repasado: en los países industrializados los contratos de deuda suelen ser a largo plazo mientras que en los países subdesarrollados, la deuda suele ser a corto plazo.

El proceso de propagación empieza del mismo modo en los dos tipos de economías. Surge alguno de los cuatro factores y la economía se desestabiliza. En las economías emergentes, esto da lugar a una crisis de tipo de cambio, inducida, sobre todo, por el deterioro de los balances del sector bancario. La reacción habitual por parte de las autoridades del país es un intento de defender la moneda mediante la subida de las tasas de interés. Sin embargo, la subida de las tasas de interés junto con la caída del valor de la moneda provoca un empeoramiento aún mayor de los balances bancarios, dada la estructura de vencimientos y la denominación de los créditos. Esto, sumado a la escasa credibilidad de los gobiernos de este tipo de economías en su lucha contra la inflación hace que se disparen las expectativas de inflación de los inversores, con lo que las autoridades se ven forzadas a aumentar aún más las tasas de interés, que se sitúan en niveles desproporcionados. En cambio, en los países ricos, la devaluación o depreciación de la moneda no suele ser un factor de propagación de la inestabilidad financiera. Al tener contratos de deuda a largo plazo y al tener, habitualmente, una inflación controlada, la subida del tipo de cambio en un país industrializado no aumenta el riesgo de impago de los contratos de deuda ni altera las expectativas de inflación de la economía.

El siguiente paso en la propagación de la inestabilidad financiera es, para ambos tipos de países, una crisis bancaria. Las empresas y los particulares empiezan a tener problemas para pagar sus deudas, ya que se ha producido un enfriamiento de la actividad económica (consecuencia de la aparición de alguno de los cuatro factores) que redundo en una disminución de sus ingresos. En las economías emergentes, este problema se ve reforzado por

el aumento del peso de la deuda provocado por el incremento del tipo de cambio y de la tasa de interés. En cualquier caso, el inicio de una crisis bancaria redundaría en una menor capacidad de los bancos para seguir concediendo financiación. De esta manera, al disminuir la actividad bancaria, se ve también mermada su actividad de transmisión de información hacia los mercados financieros, con lo que empeoran la selección adversa y el riesgo moral. Una menor actividad bancaria significa asimismo una caída de la oferta monetaria y, por tanto, una subida aún mayor de las tasas de interés. Sin embargo, de acuerdo con Carmen Reinhart y Graciela Kaminsky⁹, en estudios presentados, indican que la relación causal entre problemas económicos y bancarios no es muy clara. En efecto, puede darse una sin la otra.

En la explicación de Mishkin (1998) del proceso de propagación de la inestabilidad financiera, dicho proceso parece detenerse aquí para los países subdesarrollados o las economías emergentes, pero la inestabilidad sigue propagándose en los países industrializados. En los países ricos, el aumento de las tasas de interés y la contracción de la oferta monetaria sumados a un pasado reciente de bajas tasas de inflación pueden dar lugar a que se reevalúen a la baja las expectativas de inflación. Este fenómeno redundaría, como ya se señaló, en un deterioro de los balances de la red empresarial debido a un aumento del peso de la deuda, lo cual tiene como consecuencia un agravamiento de los problemas de selección adversa y de riesgo moral.

2.1.4. Teoría de sobre Endeudamiento

Según Minsky (1977 y 1986), la vulnerabilidad financiera y, por tanto, el riesgo de sufrir una crisis aparece porque, bajo determinadas circunstancias, las unidades que forman la economía tienden a sobre endeudarse. Además, según el autor, el paso de un estado de salud financiera a uno de fragilidad financiera responde a la propia naturaleza del sistema capitalista. No es, pues, necesario un choque externo para que se deteriore la salud financiera de una economía y, en consecuencia, estalle una crisis. Minsky estudia la aparición de la fragilidad financiera en una economía cerrada. Es decir que analiza cómo se produce el sobreendeudamiento

⁹ Graciela Kaminsky, Saul Lizondo y Carmen Reinhart, 1998. "Leading Indicators of Currency Crisis," International Monetary Fund Staff Papers, vol. 45, pp. 1-48; Carmen M. Reinhart y Graciela L. Kaminsky, 1999. "The Twin Crises: The Causes of Banking and Balance-of-Payments Problems," American Economic Review, American Economic Association, vol. 89(3), pp 473-500. Morris Goldstein, Graciela Kaminsky y Carmen Reinhart, 2000. "Assesing Financial Volatility: An Early Warning System for Emerging Markets," Washington, D.C., Institute for International Economics.

respondiendo a la propia naturaleza del sistema capitalista sin necesidad de que la economía reciba flujos de capital del exterior.

La hipótesis central de la teoría de la inestabilidad financiera de Minsky indica que los sistemas económicos capitalistas son frágiles debido a la inestabilidad inherente a sus sistemas financieros. Dada esta fragilidad, es natural que las economías capitalistas con sistemas financieros modernos sufran crisis financieras recurrentes. Dicho de otro modo, la fragilidad financiera es *“(...) una característica del sistema financiero. En un sistema financiero frágil, el funcionamiento normal continuo puede verse interrumpido por algún acontecimiento no inusual”* (Minsky, 1977). El desarrollo de un sistema financiero frágil resulta del funcionamiento normal de la economía capitalista. Así, el estallido de una crisis financiera o la mera aparición de una estructura financiera débil no son el resultado de errores de política económica o de accidentes externos al sistema, sino que son el resultado lógico de los mecanismos de funcionamiento de los sistemas financieros capitalistas. El objetivo de la hipótesis de la fragilidad financiera de Minsky es, pues, explicar cómo se desarrollan estas estructuras financieras débiles en un entorno capitalista.

Además de la combinación de los tipos de financiación en la economía, Minsky (1977) sugiere (en uno de sus primeros estudios sobre fragilidad financiera) que existen otros dos determinantes del grado de fragilidad financiera de la economía. Uno de ellos es el grado de liquidez de los activos. Efectivamente, en caso de que surjan problemas, tanto en la economía real como en la financiera, las unidades económicas tendrán mayor facilidad para cubrir el desajuste entre flujos de caja de renta y flujos de caja de pasivo si pueden generar flujos de caja derivados de una cartera líquida de forma rápida. Esto sólo puede ocurrir si los activos que se venden para cubrir la brecha son líquidos. El segundo determinante del grado de fragilidad financiera es la medida en la que las operaciones de inversión de la economía en su conjunto se financian con fondos externos.

Las ideas principales que pueden extraerse de la hipótesis de la fragilidad financiera de Minsky son las siguientes. En primer lugar, la mayor o menor fragilidad del sistema financiero de una economía capitalista depende de los hábitos de financiación de las unidades económicas que forman la economía. Cuanto más se abuse de la financiación externa, sobre todo a corto plazo, para los proyectos de inversión, más frágil será el sistema financiero

fundamentalmente por los plazos de maduración entre la obtención del financiamiento y la materialización del proyecto de inversión. En segundo lugar, el paso de un sistema financiero robusto a uno frágil es un proceso natural dados los mecanismos de funcionamiento y el comportamiento de los agentes económicos en un sistema capitalista financiero moderno. Es decir, que no es necesario ningún choque externo al sistema para que una economía capitalista pase de una situación estable, en la que las unidades económicas son solventes y estables, a una situación de fragilidad y crisis financiera, debido al crecimiento del crédito en la etapa ascendente del ciclo que normalmente llega a rebasar la capacidad de recuperación de las inversiones y de guardar una proporción adecuada entre deuda e ingresos.

Ampliación de la hipótesis de la fragilidad financiera a una economía abierta

Kregel (1998) se basa en la hipótesis de la fragilidad financiera de Minsky para situar las causas de las crisis financieras asiáticas de 1997 en la fragilidad de los sistemas financieros. Si bien dicha hipótesis de la fragilidad financiera fue concebida para un mercado financiero exclusivamente nacional en una economía cerrada, el propio Kregel adapta la hipótesis a los mercados financieros internacionales y a las economías abiertas.

Según Kregel, en una economía abierta, las unidades especulativas no solamente se ven afectadas por las subidas y bajadas de las tasas de interés internos. Si las unidades que componen dicha economía mantienen relaciones comerciales y financieras con el exterior serán sensibles, además, a los movimientos de las tasas de interés internacionales por un lado y a los movimientos en el mercado de divisas, por otro. En lo que se refiere a los movimientos en las tasas de interés internacionales, las unidades especulativas se ven afectadas de la misma manera que si el movimiento se produce en las tasas de interés locales: un aumento de los tipos sobre la deuda contratada en el extranjero altera la estructura de activos y pasivos, provocando un aumento del coste del servicio de la deuda.

En definitiva, según Kregel (1998), en una economía abierta, las posibilidades de que una economía pase de un estado de salud financiera a otro de inestabilidad financiera no dependen únicamente de los movimientos en las tasas de interés locales, como en el caso de la hipótesis de Minsky, sino que además depende de los movimientos en las tasas de interés internacionales y de las variaciones del tipo de cambio. Puede decirse entonces que, siguiendo

las hipótesis de Minsky y de Kregel, en una economía abierta existen más factores que pueden incidir en el paso de una economía estable a una inestable que en una economía cerrada.

El paso de una economía estable a una inestable descrito por Kregel difiere de la explicación dada por Minsky. Ambos autores coinciden en que, ante unas buenas expectativas económicas, y un exceso de liquidez, las unidades económicas que forman la economía deciden endeudarse a corto plazo. Sin embargo, según Minsky, llegados a este punto, es la demanda de crédito la que presiona al alza las tasas de interés lo cual aumenta el riesgo de impago. Así, ante la imposibilidad de devolver la deuda, las unidades más endeudadas recurren a la venta de activos, lo cual acaba provocando una deflación de precios y un *crash* bursátil. En cambio, Kregel afirma que pueden ser factores externos los que provoquen la contracción de la oferta de crédito. Por ejemplo, en el caso de las crisis asiáticas, uno de los factores externos que desencadenaría dichas crisis pudo ser la volatilidad de las tasas de interés internacionales.

Para el caso de las crisis subprime y soberana europea, se parte desde una perspectiva anterior al 2007, donde la economía estadounidense experimentaba una bonanza fundada en dos booms económicos: el sector bursátil y el inmobiliario. De acuerdo al planteamiento clásico de Minsky y Kregel, al crecer la burbuja especulativa se presenta una elevación en los precios de los inmuebles y de los activos financieros; al principio no se valora el riesgo y hay una amplia expansión del crédito, la oferta de crédito aumenta su demanda, aumenta el apalancamiento de los bancos y la probabilidad de recurrir a la venta de activos al momento de cubrir sus deudas. El valor de los activos se aleja de sus fundamentos reales, por efecto de las titularizaciones y de la especulación. Entonces, un cambio en los mercados, una política monetaria contraccionista, un rápido aumento en tasas de interés, convierte en incobrables los créditos hipotecarios y hace estallar la burbuja. A esta fase sobreviene el contagio, que afecta el canal del crédito bancario y los balances empresariales. Empresarios y banqueros endeudados rezagados en los pagos, finalmente refinancian y capitalizan intereses, desencadenando sistemas de inversión que prometen beneficios sin un negocio real que lo sustente y reproduciendo comportamientos pro cíclicos.

2.1.5. Escuela Austriaca de Economía

Los economistas de la Escuela Austriaca, en especial Ludwig von Mises¹⁰, Friedrich A. Hayek¹¹ y Hans F. Sennholz¹², tienen un enfoque distinto de las crisis económicas. Para estos economistas la caída de la demanda global de Keynes y la contracción monetaria son la consecuencia y no la causa de las crisis. La causa está en una mala inversión que produce una mala asignación de los recursos productivos.

Los bancos captan depósitos sobre los que pagan intereses y los accionistas aportan capital que se transforma en patrimonio neto. Todo el dinero proveniente del aporte de capital y de depósitos tiene un destino. Una parte van a conformar las reservas del banco. Otra parte se tiene que invertir en activos fijos capital de trabajo, inmuebles, computadoras, efectivo del banco para operar, etc. El resto el banco lo debe invertir con una rentabilidad lo suficientemente alta como para pagar los intereses de los depósitos y el rendimiento que piden los accionistas.

El punto de Mises y Hayek es que cuando los gobiernos reducen artificialmente las tasas de interés provocan una mala inversión, alentando las inversiones de largo plazo a costa de las de corto plazo. Dice Mises:

“Pero ahora la caída en la tasa de interés falsea el cálculo del empresario, aunque la cantidad de bienes de capital disponible no se hayan incrementado, el cálculo empresarial usa números como si tal incremento hubiese tenido lugar. El resultado de tales cálculos es por lo tanto engañoso. Hacen que algunos proyectos aparezcan rentables y factibles debido a la manipulación del crédito, que no lo hubiesen sido factibles con un cálculo correcto.”(Mises, 1966)¹³

En términos de Hayek:

“... una transición a métodos más (o menos) capitalistas de producción tendrá lugar si la demanda total de bienes de producción (expresadas en dinero) aumenta (o disminuye) en relación a la demanda de bienes de consumo. Esto puede suceder de dos maneras: bien como

¹⁰ Entre sus obras más importantes están: (1) *The theory of Money and Credit* (1912), (2) *Nation. State and Economy* (1919) y *Socialism* (1922).

¹¹ Entre sus obras más importantes están: (1) *Prices and Production* (1931), (2) *Monetary Theory and the Trade Cycle* (1933) y (3) *Profits, Interest and Investment* (1939).

¹² Entre sus obras más importantes están: (1) *How can Europe Survive?* (1955), (2) *Gold is Money* (1975) y (3) *Age of Inflation* (1979).

¹³ Ludwig von Mises, *Human Action*, Henry Regnery, 1966, p. 553

resultado de cambios voluntarios en el volumen de ahorro (o su opuesto), o como resultado de un cambio en la cantidad de dinero que modifica los fondos a disposición de los empresarios para la compra de bienes de producción.”(Hayek,1967)¹⁴

Esto significa que los bancos tendrán en su poder una mayor cantidad de inversiones en bonos, acciones y créditos de inversiones erradas pero que *ex ante* se cree que son correctas. Cuando los resultados se conozcan mostrando un rendimiento inferior al esperado o quizás negativo el precio de los bonos y acciones en los que invirtieron bajarán y una parte relativamente importante de los créditos que otorgaron se transformarán en incobrables o morosos. Los bancos verán sus activos reducidos, el crédito se contraerá y la tasa de interés subirá.

Así, debido a inversiones erradas se desemboca en un problema de liquidez que provoca una caída de la producción de una magnitud superior a la que se hubiese producido por errores empresariales puros. La cantidad de errores se ve multiplicada por la reducción artificial de la tasa de interés que hacen los gobiernos. De esta manera los economistas de la escuela austriaca llegan a la conclusión de que fueron las malas inversiones las que provocaron el problema de liquidez que desemboca en una caída de la demanda agregada y de la oferta monetaria.

2.2. Modelos de Crisis Financiera

En este apartado se introducen las teorías y modelos que explican cómo y por qué se producen crisis financieras¹⁵ relacionadas de una u otra forma con el deterioro de alguno o de algunos parámetros fundamentales.

Desde finales de los años 70 del siglo pasado se han desarrollado diversos modelos teóricos que tratan de explicar por qué se origina una crisis financiera. Los modelos teóricos pueden clasificarse en primera generación y segunda generación, sin embargo, numerosos especialistas han aceptado la denominación de tercera generación para muchos modelos surgidos tras el estallido de las crisis asiáticas. Más adelante se argumenta que, los modelos

¹⁴ Friedrich A. Hayek, *Prices and Production*, Augustus M. Kelley Publishers, 1967, p. 50.

¹⁵ Sobre todo, pero no sólo, en economías en desarrollo.

de segunda y tercera generación sean englobados en la misma categoría ya que en ambos se consideran las crisis como acontecimientos contingentes.

La idea principal de los modelos de primera generación es que la crisis de balanza de pagos se produce indefectiblemente por la incompatibilidad de la política cambiaria con las políticas fiscal y monetaria del gobierno en cuestión. Además, estos modelos se encuentran asociados a las teorías del comercio internacional, cuyo momento de inflexión teórica se da cuando a las diferencias estructurales consideradas en los modelos de estabilización económica (Mundell, Kindleberger, Alexander e IS-FX-LM) se les suma la problemática derivada de la deuda externa y de su gestión por parte de los gobiernos. Un elemento adicional son los contratos o acuerdos de facilidad ampliada y los compromisos de políticas sectoriales asumidas por los países con el FMI y el BM. Ahí surgen los llamados modelos de segunda generación (matemáticamente distintos por la complejidad de las variables). Cabe mencionar, que los modelos de segunda generación consideran que las crisis cambiarias no se derivan directamente de la mala gestión de un gobierno, sino de las expectativas de devaluación de los agentes privados.

2.2.1. Modelos de Primera Generación

Es importante señalar que no se pretende ofrecer una explicación exhaustiva de los modelos de primera generación ni de sus modificaciones, sino simplemente mostrar algunos ejemplos del trabajo que diversos autores han realizado en este campo de estudio.

Entre los modelos teóricos desarrollados para explicar el por qué se origina una crisis de balanza de pagos en un país, los modelos de primera generación se definen como aquellos que explican las crisis de balanza de pagos por una incompatibilidad entre la política cambiaria de un gobierno y sus políticas fiscal y monetaria. La mayor profundidad teórica se da en razón de que la mayoría de los países hasta 1970 mantenían sistemas cambiarios de tipo de cambio fijo. La regla de competitividad estaba dada por la devaluación básicamente. La liberación de tasas, tipos de cambio y la desregulación económica replantearon las variables y los modelos explicativos de la inestabilidad estructural de las economías.

Los modelos iniciales de primera generación parten de que el tipo de cambio de un país se hace insostenible debido a una expansión del crédito interno, lo que da lugar a una disminución de las reservas de moneda extranjera del banco central de ese país. Antes de que las reservas del gobierno se agoten se produce un mayor movimiento especulativo (que en algunos casos es un ataque especulativo deliberado) contra su moneda obligando al gobierno a abandonar el tipo de cambio, dejando flotar libremente la moneda. Las crisis de balanza de pagos se asocian con los grandes movimientos de la balanza comercial y de la cuenta corriente que se producen durante los periodos precedentes a la crisis. Normalmente, en el periodo anterior a una crisis de balanza de pagos se suelen producir grandes déficits por cuenta corriente (Bustelo *et al.*, 2000). Lo que aquí se considera más concluyente de un modelo de primera generación es que presentan las crisis financieras como fenómenos inevitables y predecibles, y que ocurren como consecuencia de la incompatibilidad de unas políticas económicas con otras.

El modelo básico de Krugman (1979), adapta el modelo para explicar las crisis de balanza de pagos, en que él define una crisis de balanza de pagos como el momento en que “*el gobierno deja de ser capaz de defender la paridad fija a causa de las restricciones a las que están sometidas sus acciones*” (Krugman, 1979). El paralelismo entre ambos modelos es evidente: Henderson y Salant (1978) estudian el comportamiento de las reservas de un bien no renovable cuando existe un precio fijo para tal bien; y Krugman (1979) estudia el comportamiento de las reservas en moneda extranjera cuando hay un tipo de cambio fijo (cuando el precio de la divisa es fijo).

Krugman, elabora un modelo en el que considera que las causas de las crisis se encuentran en la incompatibilidad de la política monetaria con la política cambiaria; cuando dicha política cambiaria consiste en establecer un régimen de tipo de cambio fijo. El modelo se sustenta en los siguientes supuestos¹⁶:

1. Hay paridad de poder adquisitivo y los precios internacionales son constantes e iguales a uno, con lo que el nivel de precios nacional es igual al tipo de cambio, y la tasa de inflación esperada (p) es igual a la tasa de depreciación esperada (s);

¹⁶ Para este modelo hay algunos supuestos más que no se especifican en el texto. Sólo se enumeran los que son más necesarios para que se entienda esta breve explicación del modelo.

2. Hay dos activos financieros, dinero nacional (M) y dinero extranjero (F), y mientras que los agentes nacionales reparten su riqueza entre ambos activos en función de sus expectativas de inflación (p), los agentes extranjeros no pueden tener dinero nacional;
3. Las autoridades monetarias sólo pueden defender el tipo de cambio fijo mediante la intervención en el mercado de divisas;
4. El incremento de la oferta monetaria viene determinado exclusivamente por las necesidades de financiación del sector público, y nunca por un aumento del crédito concedido por las autoridades monetarias al sistema bancario;
5. La única manera de financiar el déficit público es precisamente acudiendo al banco central, y nunca mediante, la emisión de deuda pública;
6. La capacidad predictiva de los especuladores es sofisticada. Por tanto hay *perfect foresight* (previsión perfecta), lo que implica que $p = \frac{\Delta P}{P}$ (siendo p la inflación esperada y P el nivel de precios).

Dados los supuestos anteriores, cuando el gobierno lleva a cabo una política de tipo de cambio fijo a la vez que una política fiscal con déficit presupuestario. Por una parte, dado el supuesto 5, el déficit público ha de financiarse mediante la emisión de dinero, es decir, mediante el crecimiento de la oferta monetaria. Por otra parte, mientras los agentes privados crean que se va a mantener el tipo de cambio fijo, la tasa de devaluación esperada y la tasa de inflación esperada (que son iguales, dado el supuesto 1) son cero. Al ser cero la inflación esperada, la proporción de riqueza que se quiere mantener en dinero nacional (M) y la proporción que se quiere mantener en divisas (F) es constante, dado el supuesto 2.

Así pues, por una parte, la oferta monetaria está creciendo, debido a las necesidades de financiación del sector público y, por otra parte, la demanda de dinero se mantiene constante. Se genera, por tanto, un exceso de oferta de dinero que los agentes privados querrán cambiar parcialmente por divisas para mantener fijas las proporciones de riqueza que mantienen en uno y otro activo (M y F). Ello trae consigo la reducción de las reservas en moneda extranjera de las autoridades monetarias.

Si siguiera dándose una política fiscal deficitaria y siguiera monetizándose el déficit, llegaría un momento en que se agotarían las reservas en divisas del país. No obstante, antes

de que llegue ese momento, se produce un ataque especulativo contra las reservas del banco central. Si no se diera un ataque especulativo, las reservas se irían reduciendo progresivamente hasta su total agotamiento. Cuando se agotaran las reservas, los agentes privados no podrían seguir intercambiando el exceso de oferta monetaria por divisas, de forma que “*el equilibrio de cartera comenzaría a determinar el nivel de precios en vez de determinar la oferta monetaria*” (Krugman, 1979). Es decir, en ese momento los precios empezarían a crecer. Por el supuesto 6 (*perfect foresight*), ese crecimiento de los precios supondría el inmediato crecimiento de la inflación esperada (p), que a su vez supondría una reducción de la proporción de riqueza que los agentes privados nacionales están dispuestos a mantener en moneda nacional. Así, caería la demanda de moneda nacional y se produciría un salto discreto del tipo de cambio y del nivel de precios (que son iguales, dado el supuesto 1). Así pues, en ausencia de un ataque especulativo, se generaría una inflación de precios y la devaluación de la moneda nacional tras el agotamiento de las reservas en divisas.

Mientras los agentes consideran que la política cambiaria puede mantenerse, sus expectativas de inflación son cero, de manera que la demanda de dinero permanece constante. Pero llega un momento en que los agentes privados son conscientes de que se están perdiendo reservas, de que tales pérdidas pueden conducir al agotamiento total de las mismas, de que tras el agotamiento de las reservas viene la inflación y la devaluación de la moneda nacional, y de que ello traería consigo pérdidas para los agentes que aún mantuvieran parte de su riqueza en moneda nacional. En ese momento, se elevan las expectativas de inflación, cae la demanda de dinero, y se intercambia la moneda nacional por divisas para evitar las pérdidas que el agotamiento de las reservas implicaría. Así, se produce un ataque especulativo contra la moneda nacional que adelanta el agotamiento de las reservas del banco central.

En este modelo no sólo se considera que se produce un ataque especulativo antes del agotamiento total de las reservas, sino que se indica en qué momento concreto se produce dicho ataque. No obstante, esta cuestión (la determinación del momento del ataque) está tratada más extensamente en modelos posteriores. Krugman (1979) simplemente apunta que el ataque especulativo se produce cuando el tipo de cambio que se espera que prevalezca tras el abandono de la paridad fija es igual al tipo de cambio fijo. Siendo así, el ataque y el consiguiente abandono del ancla no traen consigo un salto discreto del nivel de precios ni del tipo de cambio, con lo que los agentes privados no sufren pérdidas. Asimismo señala que ese

momento del ataque llegará tan tarde cuanto mayor sea la cantidad de reservas del banco central.

Existen algunas extensiones del modelo básico de Krugman. Estas modifican supuestos o añaden variables o introducen mayor complejidad al modelo original, pero conservan el tipo de incompatibilidad de política económica de dicho modelo original. Por ejemplo, Flood y Garber (1984) desarrollan dos modelos cuyo objetivo es estudiar el momento en el cual se produce la caída de un régimen de tipo de cambio fijo. El primero de los modelos que plantean, es un modelo que parte de la hipótesis de previsión perfecta y que permite identificar el momento en el cual se produce el colapso del régimen, a partir de los movimientos observados en las reservas del banco central. El segundo modelo, es un modelo estocástico que permite conocer la probabilidad de que se produzca un colapso del régimen, así como determinar la devaluación que se producirá del tipo de cambio.

Los supuestos de los que parte el modelo de Flood y Garber (1984) coinciden bastante con los vistos anteriormente para el modelo de Krugman (1979). No obstante, existe entre ambos una diferencia importante, que consiste en que en Flood y Garber (1984) no se especifica que la tasa de crecimiento del crédito interno venga dada por las necesidades de financiar el déficit público, a pesar de lo cual el resultado del modelo es el mismo.

Otro modelo, desarrollado por Connolly y Taylor (1984), sostiene una diferencia importante con respecto al modelo básico, y es que en éste en vez de un tipo de cambio fijo plantea un tipo de cambio deslizante. Un tipo de cambio deslizante consiste en que las autoridades monetarias anuncian una tasa constante de depreciación del tipo de cambio. Dada la tasa anunciada de depreciación, los agentes privados mantienen su equilibrio de cartera mediante el incremento de la demanda de dinero a esa misma tasa. Así, cuando el crecimiento del crédito interno es mayor que el incremento del tipo de cambio, el crecimiento de la demanda de dinero no es suficiente como para absorber todo el incremento de la oferta monetaria. Como en los modelos anteriores, para evitar los efectos que el exceso de oferta de dinero tiene sobre el tipo de cambio, es necesario perder reservas, dada la ecuación de balance del banco central.

Al igual que en los otros modelos las reservas no llegan a agotarse mediante este proceso, sino que los agentes adelantan dicho agotamiento mediante un ataque especulativo. Según

este modelo el momento del ataque será antes cuanto mayor sea la sensibilidad de la demanda de dinero con respecto a la inflación esperada, cuanto mayor sea la diferencia entre la tasa de crecimiento del crédito interno con respecto a la tasa de depreciación del tipo de cambio, y cuanto menor sea el stock de reservas con respecto al crédito interno.

Una aportación interesante de este modelo es que además estudia el comportamiento de los precios relativos bajo el régimen de tipo de cambio deslizante. Para ello se supone (como en el modelo de Krugman), que el gobierno financia sus gastos mediante la creación de dinero. Su conclusión es que el precio relativo de los bienes no comercializables es creciente siempre que el crecimiento del crédito interno exceda la tasa de depreciación de la moneda. El incremento del precio relativo de los bienes no comercializables se frena súbitamente en el momento del colapso del régimen cambiario. Dicho incremento puede traer consigo el empeoramiento del saldo por cuenta corriente durante la existencia del tipo de cambio deslizante.

Estos modelos consideran que las crisis de balanza de pagos están causadas por la incompatibilidad de la política monetaria con la política cambiaria (fijación del tipo de cambio). La idea principal es que la política de tipo de cambio fijo es insostenible si las políticas fiscal y monetaria no se sujetan a los objetivos en materia cambiaria. Para ello, la política monetaria debe ser restrictiva. En concreto, los crecimientos del déficit público y de la masa monetaria deben ser siempre menores que las variaciones del tipo de cambio.

Krugman (1979) y Connolly y Taylor (1984) parten del supuesto de que los agentes privados tienen acceso a dos bienes sustitutos: moneda y divisa. Los agentes han elegido una determinada composición de sus carteras y tienen en su haber una proporción fija de cada uno de los dos bienes. Así, si aumentara la proporción de uno de los activos en manos del público, los agentes automáticamente cambiarán el exceso de tal activo por el otro en el Banco Central. Para demostrarlo, el análisis de primera generación parte del balance simplificado de un banco central:

$$M = R + C \tag{Ec. 2.1}$$

Dónde M es la masa monetaria, R representa las reservas en divisas del país y C es el crédito interno.

Si la política fiscal no es restrictiva, el déficit público crecerá y el gobierno acudirá al banco central en busca de financiación; esto es, se producirá un aumento de C (ΔC).¹⁷ Dada la igualdad $M = R + C$, el aumento del crédito deberá financiarse, bien con un aumento equivalente de la masa monetaria, o bien con una disminución de las reservas en divisas. Si hay masa monetaria, no se podrá mantener el tipo de cambio fijo ya que el aumento de la masa monetaria provocará una pérdida de valor de la moneda. Si, por el contrario, el déficit se financia con cargo a reservas, se irán agotando las divisas en manos del banco central. Según estos modelos, las autoridades monetarias descartarán la primera alternativa que redundaría en un abandono casi inmediato del ancla nominal de sus monedas. La elección de la segunda fuente de financiación (la venta de divisas) conducirá a un agotamiento paulatino de dichas reservas si el crecimiento del déficit público se mantiene.

A largo plazo, una situación de estas características desembocaría en el abandono del ancla porque, una vez agotadas las reservas, la financiación del déficit debería realizarse con masa monetaria por lo que no se podría mantener el tipo de cambio fijo (si $R = 0, \Delta C = \Delta M$). Sin embargo, esta situación no llegará a producirse debido a la capacidad predictiva de los agentes que operan en los mercados financieros¹⁸ y que tienen moneda local en sus carteras. En efecto, si estos agentes esperaran al agotamiento total de las reservas en divisas del banco central, empezaría a crecer la masa monetaria y sus carteras perderían valor. Por tanto, los agentes se adelantarán al agotamiento de las reservas, vendiendo sus activos de moneda local.

Cuando se produce el ataque especulativo, las autoridades monetarias tienen dos opciones. Pueden intervenir en los mercados de divisas para defender la paridad de su moneda (ya que todavía cuentan con cierto volumen de reservas) o bien dejarla flotar inmediatamente, abandonando la política de ancla. En definitiva, el colapso de un sistema cambiario de estas características se produce en tres fases (Krugman, 1979; Flood, Garber y Kramer, 1996). En la

¹⁷ En estos modelos, se considera que el gobierno no está capacitado para emitir deuda pública por lo que la única forma de financiar el déficit público es solicitando financiación al banco central. Asimismo, estos modelos consideran que el gobierno es la única institución que puede acudir a las autoridades monetarias en busca de este tipo de financiación; mientras que a la red bancaria local no le está permitido solicitar este tipo de financiación. En otras palabras, el aumento de C solamente puede responder a un aumento del déficit público y la aparición de un déficit público sólo puede traducirse en un aumento de C .

¹⁸ Otro supuesto de partida de estos modelos consiste en que los agentes que operan en los mercados financieros tienen una capacidad predictiva sofisticada, lo que en el modelo de Krugman (1979) se denomina *previsión perfecta* (*perfect foresight*).

primera fase, el aumento de C se cubre con una disminución de R , el crecimiento de $C + \Delta C$ son superiores a R y permanecen inalterables si y solo si $R + C = M$. En la segunda fase, cuando se produce el ataque especulativo, $C + \Delta C + R > M$, por lo tanto para que exista un equilibrio se debe cumplir $C + \Delta C + R = M + \Delta M$. El incremento de M es lo que influye sobre el incremento de precios o inflación. En la tercera fase, el valor de la moneda local se ha desplomado y el país ha abandonado la política de ancla.

Los modelos de primera generación sostienen que el momento del ataque especulativo puede ser calculado y, por lo tanto, predicho. El momento preciso del ataque es cuando el tipo de cambio esperado tras la flotación (tipo de cambio sombra) es igual al tipo de cambio fijo. Si el tipo sombra fuera mayor al tipo fijo, los especuladores procurarían obtener el beneficio potencial de cambiar moneda nacional por divisas, con lo que se adelantaría el ataque. Y si el tipo sombra fuera menor que el tipo fijo, las pérdidas en que se incurriría al cambiar moneda nacional por divisas, retrasarían el ataque. Así pues el momento del ataque es cuando el tipo esperado se iguala al tipo fijo. Según Krugman (1979), cuanto mayor sea el volumen de reservas en manos de las autoridades monetarias y menor sea el crecimiento del crédito interno, mayor será el tiempo que transcurra hasta el momento del ataque. Connolly y Taylor (1984) amplían este concepto y definen t , es decir el momento del ataque, en función de tres variables: la elasticidad de la demanda de dinero respecto de la inflación esperada; la diferencia entre la tasa de crecimiento del tipo de cambio y la tasa de crecimiento del crédito interno y la razón reservas entre crédito interno. Cuanto mayores sean las dos primeras variables y menor sea la tercera, menor será t y antes se producirá el colapso.

Resulta obvio que estos modelos de primera generación (Krugman, 1979; Flood y Garber, 1984 y Connolly y Taylor, 1984) solamente podrían servir para explicar aquellas crisis que se desencadenan en economías en las que previamente se han registrado un aumento del déficit público y la monetización de dicho déficit, ambas situaciones derivadas de un déficit en la cuenta corriente de la balanza de pagos. Sin embargo, algunos autores ortodoxos (Bordo y Schwartz, 1996) discuten que la hipótesis central de dichos modelos sirve para explicar el desencadenamiento de cualquier tipo de crisis financiera.

Tabla 2.1. Aplicación de los modelos de primera generación

Estudio, año y frecuencia	Países analizados	Descripción
1.- Bilson (1979) 1955-1977, anual	32 países con énfasis en Ecuador, México y Perú. Devaluaciones de al menos el 5%.	Se usa tipo de cambio sombra para evaluar el tamaño de la devaluación y reservas internacionales/ base monetaria como un indicador de la probabilidad de la devaluación
2.- Blanco y Garber (1986) 1973-1981, cuatrimestral	México	Se centra en adelantar la probabilidad de devaluación, el tipo de cambio esperado condicional en una devaluación, y el tipo de cambio incondicional.
3.- Cumby y Van Wijnbergen (1989) 1979-1980, mensual	Argentina	Se centra en adelantar la probabilidad de colapso.
4.- Edwards (1989) 1962-1982, datos de panel trimestrales y anuales	39 devaluaciones; 24 países en desarrollo con tipo de cambio fijo observados durante 10 años. Las devaluaciones son de al menos el 15% respecto al dólar después de haber tenido un tipo de cambio fijo de al menos 2 años	El objetivo es entender las causas de las devaluaciones. Se utilizan activos extranjeros del banco central/base monetaria, activos extranjeros netos/M1, crédito interno al sector público/crédito total, tipo de cambio real bilateral, interés del mercado paralelo para determinar la probabilidad de devaluación. El crecimiento del crédito, crecimiento del crédito al sector público, crecimiento del crédito al sector público/PIB, déficit fiscal/PIB, balanza por cuenta corriente/PIB, plazos de comercio, errores y omisiones más capital a corto plazo son utilizados para describir la situación en los tres años precedentes a la devaluación
5.- Edwards y Montiel (1989) 1962-82, anual	20 devaluaciones de al menos el 15% con respecto al dólar después de haber tenido un tipo fijo durante 2 años	Los hechos básicos de crédito interno al sector público/crédito total, activos extranjeros del banco central/base monetaria, y salarios reales manufacturados son descritos años antes de la devaluación.

Fuente: Elaboración propia basado en Kaminsky, Lizondo y Reinhart (1998)

Esto es, las crisis responden siempre a un determinado error de política económica. Lo que sí puede variar de una crisis a otra es el error en el que incurren los responsables de la política económica. O lo que es lo mismo, las crisis son siempre consecuencia de un deterioro de los

parámetros económicos fundamentales en el periodo previo al estallido de las crisis, pero estos parámetros fundamentales varían de una crisis a otra, y son atribuibles a los errores en el diseño o aplicación de políticas públicas, como el presupuesto, tratados internacionales, infraestructura, desarrollo social, entre otras. Es cierto que, siguiendo esta hipótesis central, se han elaborado otros modelos teóricos que tratan de mostrar cómo otros fallos por parte de las autoridades económicas conducen de forma irremediable al estallido de una crisis. En este sentido, cabe destacar la aportación de Dooley (1997) en la que la incompatibilidad de políticas surge entre una política de crédito restrictiva y la concesión, por parte del gobierno, de garantías institucionales a los agentes nacionales. Sin embargo, la mayoría de las más recientes aportaciones realizadas a la literatura teórica de crisis de tipo de cambio superan la hipótesis central de los modelos de primera generación y se engloban en los modelos de segunda generación. En la tabla 2.1 se muestran algunas aplicaciones de los modelos de primera generación.

2.2.2. Modelos de Segunda Generación

Los primeros modelos de segunda generación datan de mediados de la década de los ochenta, pero la mayoría de ellos se desarrollaron a raíz de las crisis del Sistema Monetario Europeo (SME) en 1992-1993 y de la de México en 1994-1995, donde las variables que tienen en cuenta los modelos de primera generación no eran las más relevantes en los nuevos episodios de crisis; y los mecanismos que dichos modelos describen resultaban demasiado rígidos, irreales, como para resultar explicativos de los nuevos acontecimientos.

La filosofía de los modelos de segunda generación se basa en considerar que en toda economía existe una interrelación entre el comportamiento del sector privado y las decisiones que toma el sector público o gobierno. Así, una crisis financiera puede tener lugar cuando los agentes privados comienzan a tener expectativas sobre una posible devaluación de la moneda, ya que esta situación se refleja en el tipo de interés que comienza a elevarse como medida para atraer moneda nacional frente a la extranjera, lo que puede llevar al gobierno a devaluar, preocupado por el control del costo del servicio de la deuda. Al contrario, si los agentes

privados no tienen expectativas de que se vaya a modificar el tipo de cambio de la moneda nacional, el tipo de interés se mantiene bajo y la devaluación es menos probable.¹⁹

Una característica de este tipo de modelos (basados en expectativas racionales) es que presentan soluciones múltiples. La existencia de expectativas por parte de los agentes económicos que participan en el mercado, pudiendo anticipar ataques con éxito contra la moneda que alteren la política económica del país, generan distintas situaciones de equilibrio:

1. la primera situación de equilibrio es aquella en la que no hay expectativas de ataque y no cambian los fundamentos económicos, por lo que se mantiene el tipo de cambio fijo de manera indefinida;
2. el segundo equilibrio es aquel en el que las expectativas sobre un ataque especulativo se acaban confirmando y terminan por provocar un cambio en los fundamentos que validan expost la variación en el tipo de cambio que los especuladores habían anticipado;
3. entre estas situaciones extremas de equilibrio, se dan otros equilibrios durante el tiempo en que el gobierno está defendiendo la paridad pero existen expectativas de devaluación por parte de los agentes económicos.

Además, es conveniente entender los dos conceptos básicos que aportan los modelos de segunda generación para entender la generación de una crisis financiera. Estos conceptos son (Bustelo et al., 2000): el autocumplimiento de las expectativas de los agentes privados y el equilibrio múltiple. En estos modelos el ataque especulativo y la consiguiente depreciación de la moneda se producen cuando el mercado espera que el gobierno devalúe su moneda. Es decir, se produce un ataque especulativo cuando los agentes privados consideran que los costos de mantener el ancla son demasiado elevados con respecto a los beneficios de mantenerla. Dichos costos de mantener el ancla (que al elevarse hacen que el gobierno decida devaluar) dependen, a su vez, de las expectativas del mercado.

En otras palabras, las expectativas de devaluación traen consigo modificaciones en determinados parámetros fundamentales, lo que conlleva el incremento de los costos de mantener el ancla. Al ser más costoso mantener el ancla, aumentan las expectativas de devaluación que tienen los agentes privados. Y así el proceso se retroalimenta hasta que se

¹⁹ Ver Obstfeld (1994 y 1996), Calvo (1998 y 2000), Chang y Velasco (1998) y Cole y Kehoe (1996 y 1998).

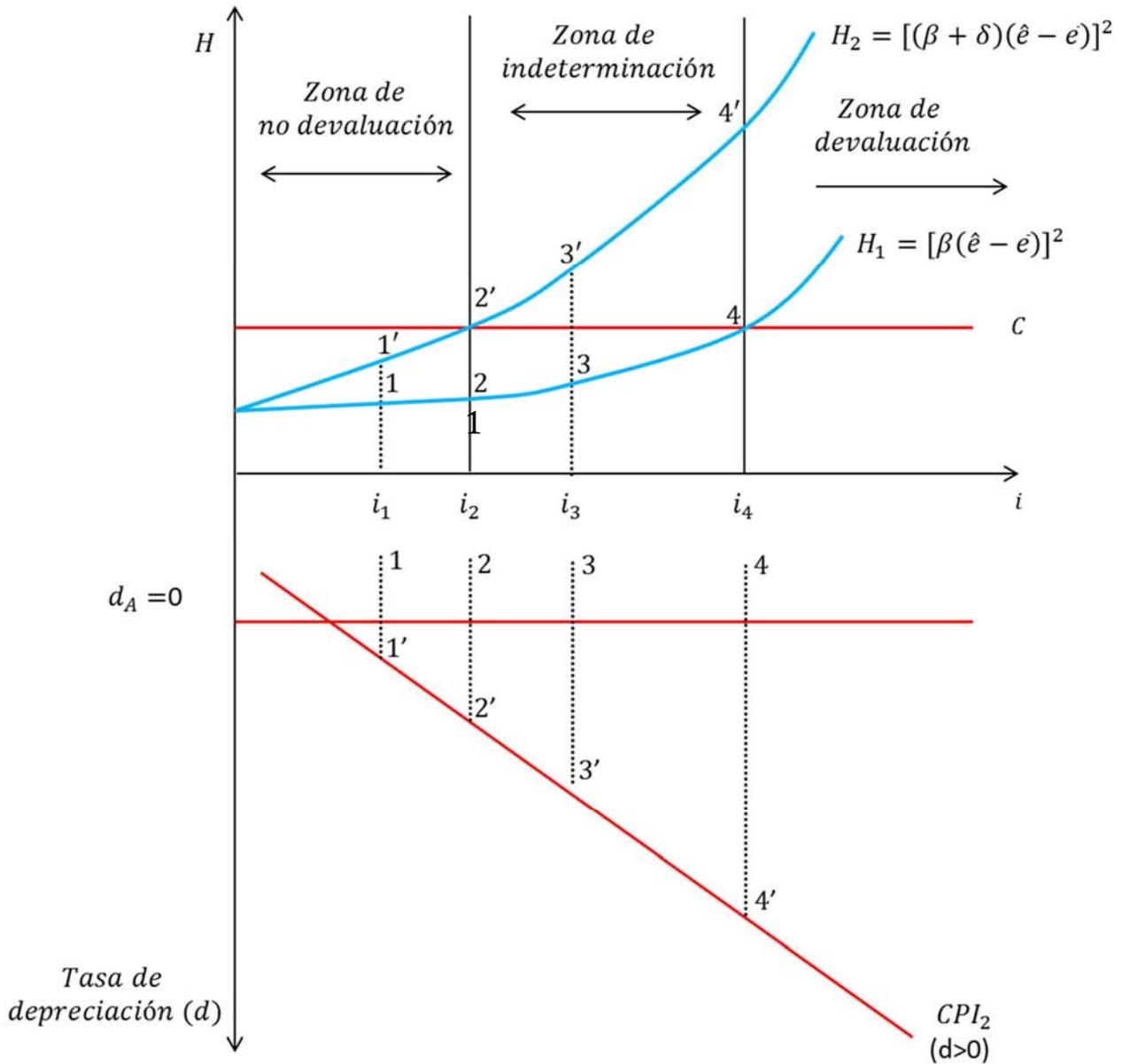
produce un ataque especulativo contra la moneda local, que culmina en la depreciación de la misma. Así pues, la decisión del gobierno de dejar flotar la moneda depende en última instancia de las expectativas de los agentes privados. De ahí que se diga que las expectativas se autocumplen: si los agentes privados esperan que se devalúe, se elevan los costos de mantener el tipo fijo, y finalmente habrá que devaluar. Si, en cambio, esperan que no se devalúe, el gobierno podrá mantener el tipo fijo. Así, hay crisis que “*no tendrían por qué haber ocurrido, sino que ocurren porque los agentes que participan en el mercado esperan que ocurran*” (Obstfeld, 1994).

Por todo esto, se puede concluir que unos parámetros fundamentales intermedios no son suficientes para que se produzca una crisis financiera, sino que ha de haber un proceso de retroalimentación entre las expectativas de devaluación y el empeoramiento de los parámetros fundamentales (incremento del costo de mantener el ancla) para que tal crisis ocurra. Dependiendo de cómo sean las expectativas, se mantiene un tipo de cambio u otro, ambos en equilibrio. Así, hay varios equilibrios posibles (equilibrio múltiple), y cuál de ellos se imponga depende de las expectativas de devaluación de los agentes privados. Obstfeld en su modelo prototipo (Obstfeld, 1996), Cole y Kehoe (1998) y Chang y Velasco (1998), entre otros, señalan que la existencia del equilibrio múltiple depende en última instancia de los parámetros fundamentales del país. Si las condiciones económicas de un país son muy buenas (i.e. no hay desempleo, no hay déficit público ni comercial, no hay problemas de liquidez en el sistema bancario) el mantenimiento del ancla apenas tiene costos, con lo que no hay expectativas de devaluación y no se desata el proceso de retroalimentación. En cambio, si las condiciones económicas del país son muy malas, no es posible el equilibrio sin devaluación, y ésta se produce indefectiblemente, como en los modelos de primera generación. Así, el equilibrio múltiple se da en una serie de valores intermedios de los parámetros fundamentales de la economía. Por ello se concluye que, aunque unos parámetros fundamentales no son condición suficiente para el estallido de una crisis financiera, sí son condición necesaria. En todos los casos, la materialización de las expectativas se encuentran en función de la ganancia esperada, las posibilidades de mantener el curso de la economía en recuperación o estable, y considerando ambas, la de mantener la estabilidad en los precios de los activos financieros nacionales e internacionales.

Antes de abordar el estudio más detallado de algunos modelos de segunda generación, conviene señalar que, aunque el grueso de la literatura sobre modelos de segunda generación está dedicado a explicar el estallido de crisis de tipo de cambio (Obstfeld, 1994), los mecanismos generales que describen estos modelos también pueden servir para explicar el estallido conjunto de crisis bancarias y cambiarias (Calvo, 2000; Chang y Velasco, 1998). Es más, existen algunos modelos de autocumplimiento de expectativas que explican el estallido de crisis exclusivamente bancarias. El más emblemático es, quizás, el de Diamond y Dybvig (1983). En este modelo de equilibrio múltiple se produce un pánico bancario si los agentes financieros, que en este caso son los depositantes de los bancos, deciden que se dé un mal equilibrio malo. En tal caso, se produce una retirada masiva de los depósitos bancarios.

Obstfeld (1994) presenta un modelo que analiza el papel que desempeña el encarecimiento de la deuda pública en el proceso de retroalimentación entre los costos de mantener el tipo de cambio fijo y las expectativas de devaluación de los agentes privados. La idea principal señala que la subida de los tipos de interés nominales (necesaria para defender el tipo de cambio ante una elevación de las expectativas de devaluación) dificulta el pago de la deuda pública, con lo que aumentan todavía más las expectativas de devaluación. Dado un régimen de tipo flexible, el gobierno, por un lado, y los agentes privados, por el otro, tienen sus respectivas funciones de la tasa de depreciación y el tipo de interés nominal: el gobierno utiliza la depreciación del tipo de cambio para compensar los efectos de las subidas de tipos de interés (con lo que se obtiene una función de la tasa de depreciación con respecto al tipo de interés); y los agentes privados elevan sus expectativas de depreciación a medida que se elevan los tipos de interés (con lo que se obtiene otra función de la tasa de depreciación en función del tipo de interés). El autor representa gráficamente ambas funciones (como se muestra en la figura 2.1) y observa que la intersección de las dos curvas da lugar a más de un equilibrio. Es decir, no hay un único par (tasa de depreciación, tipo de interés) que satisfaga al gobierno y al mercado, sino dos o más. Esto indica que puede haber un equilibrio con menores tipos de interés y menor depreciación y otro con mayores tipos de interés y mayor depreciación. Si en vez de haber un tipo de cambio flexible, hay un tipo de cambio fijo, se pasa de un equilibrio a otro (se devalúa la moneda) inclusive mediante un ataque especulativo.

Figura 2.1. Multiplicidad de equilibrios



Fuente: Joan Ripoll i Alcón a partir de Obstfeld (1996)

Por su parte, el objetivo de los modelos de Cole y Kehoe (1998) es determinar cómo deben ser el nivel de deuda pública y la estructura de vencimientos de ésta para que puedan darse crisis financieras como consecuencia de una pérdida de confianza en la política cambiaria del gobierno. El mismo objetivo del modelo indica que se trata de un modelo de expectativas que se autocumplen en un contexto de equilibrio múltiple, y que se considera que hay un estado de

los parámetros fundamentales de la economía (en este caso la deuda pública y su vencimiento) que hace posible la existencia de ese equilibrio múltiple. Estos autores llaman zona de crisis a ese estado de los parámetros fundamentales que permite el autocumplimiento de las expectativas.

La principal conclusión de estos modelos es que la zona de crisis se hace más pequeña si el gobierno consigue reducir su deuda o alargar el vencimiento de ésta (en definitiva, si consigue reducir el costo de mantenimiento del tipo de cambio fijo), con lo que el gobierno va a intentar cualquiera de los dos procedimientos para salir de la zona de crisis y evitar así estar a merced del autocumplimiento de las expectativas. En cambio, aquellas medidas de prevención que consistan en incrementar el costo de la devaluación pueden ser contraproducentes si no implican la salida de la zona de crisis. Es decir, si este segundo tipo de medidas de prevención no eliminan la posibilidad de que estalle una crisis, ésta, en caso de producirse, resultaría más grave.

Obstfeld (1996), al igual que Cole y Kehoe (1998), muestra la incidencia de la estructura de vencimientos de la deuda pública en la probabilidad de que se produzca una crisis financiera. Pero además señala que la estructura de denominaciones también es relevante. Cuanto menores sean los plazos de la deuda pública y cuanto mayor sea la proporción de ésta denominada en moneda extranjera (en dólares en su modelo), mayor es la probabilidad de que se salte de un equilibrio a otro desequilibrio mediante un ataque especulativo y una devaluación.

En Obstfeld (1994) hay un segundo modelo que analiza la interrelación entre el crecimiento de los salarios y la tasa de devaluación esperada. En este caso, las expectativas de devaluación conducen a un incremento del crecimiento de los salarios, y consiguientemente a una pérdida de competitividad. Por tanto, el crecimiento y el empleo pueden verse perjudicados, con lo que se eleva el costo de mantener el tipo fijo y las expectativas de devaluación crecen aún más, siempre y cuando el crecimiento de los sueldos y salarios se vean reflejados en un incremento generalizado de los precios.

Resumiendo, según estos modelos el parámetro fundamental que sitúa al país en cuestión en una zona de crisis es el nivel de deuda pública y su estructura de vencimientos y

denominaciones, las cuales no pueden ser satisfechas por el incremento en el ingreso fiscal, y conducen normalmente a mayores crecimientos de la deuda con un acortamiento en los plazos de pagos de la misma.

2.2.3. Modelos de Tercera Generación

Después del estallido de la crisis cambiaria y financiera del sureste asiático el verano de 1997, muchos analistas contemporáneos incursionaron en una nueva línea de modelos en virtud de la falta de adecuación en la explicación de las últimas crisis ante la teoría existente, como sucedió con las teorías de primera generación con las crisis de Chile (1982), Europa (1992-1993) y México (1994), estas encontraron explicación en los modelos de segunda generación desarrollados por Obstfeld (1994).

Así, Calvo (2000), elabora un modelo en el que los parámetros fundamentales intermedios pueden dar lugar al autocumplimiento de las expectativas de una situación de vulnerabilidad financiera. Esta situación es el resultado de dos fenómenos. Por una parte, en una economía liberalizada desde el punto de vista financiero, existe incertidumbre, para los inversores extranjeros, sobre el futuro de la economía del país en el que invierten. Dicha incertidumbre queda reflejada en la calificación o percepción de riesgo-país. Dado que los mercados de seguros son incapaces de cubrir un riesgo de esta magnitud y de estas características, los gobiernos de los países receptores de capital tratan de compensar la incertidumbre implícita en las operaciones financieras de los inversores extranjeros (y, por tanto, el riesgo-país) ofreciendo algún tipo de garantía de rentabilidad o de bajo riesgo a los inversores foráneos. De ahí que el gobierno ofrezca subsidios a las inversiones y a las entradas de capital o imponga controles a la salida de capitales. Las garantías institucionales son un ejemplo de los mecanismos de compensación de riesgo a que este modelo se refiere. Las garantías ofrecidas por el gobierno suelen conducir a la banca nacional a prestar para inversiones no líquidas. En otras palabras, como afirma el propio Calvo: *“si los depositantes creen que el banco central actuará como prestamista de último recurso, apenas tendrán incentivos para supervisar la calidad y las características de los préstamos bancarios. En particular, no se preocuparán por la existencia de un desajuste de vencimientos por el que los préstamos son a más largo plazo*

que los depósitos" (Calvo, 1998)²⁰. El segundo fenómeno que da lugar a la aparición de un estado de vulnerabilidad financiera es, desde el punto de vista del autor, la entrada masiva de capital extranjero. Esta provoca un aumento de la vulnerabilidad porque generalmente los capitales son a corto plazo y además hacen que haya más fondos disponibles para invertir en proyectos a largo plazo. Calvo (2000) asimismo sostiene que los inversores extranjeros son conscientes de que las entradas de capital pueden ser temporales, y que la caída de las entradas de capital traerá consigo una crisis cambiaria.

En el modelo de Chang y Velasco (1998), de nuevo, la falta de liquidez es la variable clave que conduce a una situación de fragilidad financiera que permite que se genere un ataque especulativo que puede conducir a una crisis. Según los autores, la falta de liquidez es fruto de la llegada de capital extranjero de corto plazo o capitales golondrinos y de la liberalización financiera local. También, al igual que en el modelo anterior, los bancos actúan como transformadores de préstamos (estos préstamos son los que realizan los bancos en el extranjero), por lo que está llegada masiva de préstamos a a corto plazo se traduce en un aumento de los préstamos a largo plazo concedidos por la red bancaria local en el interior del país. Según Chang y Velasco (1998), la combinación de un proceso de liberalización financiera y de la llegada de capital extranjero desemboca en un aumento de la vulnerabilidad financiera mediante tres vías. Por una parte, los inversores extranjeros pueden decidir no renovar su crédito si esperan que otros prestamistas no vayan a hacerlo. Por otra parte, el grado de vulnerabilidad de la economía está directamente relacionado con la estructura de los capitales que entran en el país. Cuanto más a corto plazo son los capitales que entran, lógicamente, más grave es el estado de vulnerabilidad financiera en el que se ve inmersa la economía. Por último, la liberalización financiera facilita, según Chang y Velasco (1998) el estallido de una crisis financiera por autocumplimiento de expectativas.

Adicionalmente, Graciela Kaminsky y Carmen Reinhart (1996) desarrollaron un modelo donde analizan una muestra de países desarrollados y emergentes, que abarca un período de (1970-1995) estudiando 76 crisis cambiarias y 26 bancarias. Los resultados obtenidos al sustentar dicha teoría, apuntan a que la probabilidad de que una economía incurra en una crisis cambiaria aumenta cuando ésta ha padecido una crisis bancaria. Estas conclusiones son el

²⁰ En este sentido Calvo simplemente confirma la hipótesis de "riesgo moral" o *moral hazard*, argumentada por el FMI y el BM por largo tiempo.

producto de su trabajo *"The Twin Crises"* (1996) donde, calculan la probabilidad incondicional de crisis tanto cambiarias como bancarias. Así mismo, calcularon la probabilidad de que una crisis cambiaria esté condicionada a una crisis bancaria en camino, es decir, una crisis bancaria incrementa la posibilidad que un país incurra en una crisis cambiaria. De aquí que podría argumentarse, como hizo Velasco (1987), sobre las crisis a principios de los 1980's, que en un importante número de casos la ruptura del sistema bancario contribuyó a la aceleración de creación de dinero, debilitando la totalidad del sistema financiero derivando en crisis cambiarias. Se puede observar que las crisis cambiarias en un sistema bancario débil pueden limitar las estrategias del Banco Central para defender la moneda, en virtud de que los recursos serán canalizados a la protección del ahorro. La crisis mexicana de 1994 comprueba esta afirmación, ya que los limitados recursos, una vez pagada la deuda en moneda extranjera, se destinaron al sector bancario, en lugar de formalizar programas de defensa del peso. Estos resultados mantienen el hecho de que lo más común es que el pico de la crisis bancaria viene después de la crisis cambiaria.

En resumen, de los modelos de tercera generación se extraen diversas lecciones sobre los parámetros fundamentales como causas de las crisis financieras. En primer lugar, se observa que el que existan deficiencias en estos parámetros puede no ser suficiente para que se produzca una crisis financiera. Unos parámetros fundamentales intermedios no conducen inevitable y predeciblemente a una crisis financiera, como consideraban los modelos de primera generación, sino que ésta se produce por la creencia de los agentes privados de que el gobierno tiene que devaluar su moneda. En segundo lugar, pese a que unos parámetros fundamentales no demasiado saneados no sean condición suficiente para el estallido de una crisis financiera, sí son una condición necesaria. En el caso en que el país en cuestión tuviera unos parámetros saneados, apenas habría costos de mantener el ancla, con lo que las expectativas de devaluación no se autocumplirían. En tercer lugar, los modelos de tercera generación demuestran que los parámetros fundamentales intermedios que abren la puerta al autocumplimiento de las expectativas pueden ser de cualquier naturaleza.

Seguramente sea discutible que los modelos presentados en este apartado sean considerados como modelos de segunda generación. En el siguiente apartado se tratará de justificar su inclusión y consideración como modelos de segunda generación o crisis contingentes.

2.2.4. Criterio de Clasificación

En este apartado resulta necesario explicitar cuál es el criterio de clasificación que en este trabajo se sigue, y que permite agrupar los modelos surgidos tras la crisis del SME y a los modelos surgidos tras las crisis asiáticas. Ya se ha dicho que son modelos de primera generación los que presentan las crisis como inevitables, predecibles y resultantes de la incompatibilidad entre unas políticas y otras. Siguiendo el mismo criterio, en esta tesis se considera que son modelos de segunda generación aquéllos para los que las crisis son fenómenos contingentes y por tanto, no predecibles, y que, cuando ocurren, son consecuencia del autocumplimiento de las expectativas de los agentes privados.

Un criterio a mencionar, discrimina los modelos con fragilidad financiera de los demás modelos de segunda generación en función de optimización del gobierno, si aparece explícitamente o no en los modelos en cuestión. Los modelos con variables de fragilidad financiera no incorporan el problema de optimización gubernamental que aparece en los otros modelos que se acaban de describir. Pero aquí se considera que el hecho de que no se haga explícito el problema de optimización del gobierno no implica que éste no exista: un gobierno siempre va a estar gestionando la posibilidad de devaluar para así lidiar con cualquier dificultad macroeconómica y/o financiera que se esté padeciendo (esté explícitamente formalizada en el modelo o no). Asimismo, el hecho de que estos modelos no pongan de manifiesto cómo la defensa del tipo de cambio - ante unas expectativas de devaluación - afecta a la salud del sistema financiero, no significa que dicha defensa no exista o que no tenga un costo. Imagínese simplemente el caso en que se elevan los tipos de interés en defensa del tipo de cambio, lo que supondría un encarecimiento de la deuda de las empresas nacionales y ello, a su vez, supondría un mayor riesgo de impago, incrementándose así el riesgo de crédito y, por tanto, la fragilidad del sistema financiero interno. De hecho, algunos autores (Obstfeld, 1996; Bensaid y Jeanne, 1997) insisten en que los mecanismos de los modelos de segunda generación son aplicables sea cual sea la naturaleza de los parámetros fundamentales que se deterioran. Es más, muestran explícitamente la posibilidad de que la fragilidad financiera, consecuencia de elevados tipos de interés, suponga un costo de mantenimiento del tipo de cambio, por el hecho de que encarece el futuro rescate de las instituciones financieras con dificultades.

Otro criterio que ha motivado la aplicación del término tercera generación para los modelos con fragilidad financiera es que algunos autores (Yoshitomi y Shirai, 2000; Krugman, 2001) consideran que estos modelos merecen distinguirse de los de segunda generación porque en ellos las crisis acarrearán graves consecuencias sobre la economía real; mientras que en los modelos de segunda generación tradicionales, las crisis pueden resultar beneficiosas para la economía que las padece (i.e. la devaluación frena el deterioro de la competitividad). La cuestión es que si los parámetros fundamentales que se han deteriorado son de naturaleza financiera, dicho deterioro no sólo implica una mayor probabilidad de que estalle una crisis financiera, sino que además implica problemas para la economía real tras el estallido de la crisis. Aquí no se va a negar que esto sea cierto, efectivamente los problemas financieros hacen que la crisis derive en una severa contracción del crédito y en los consiguientes problemas para la economía real, que no surgen si antes de la crisis lo que hay son problemas de otra naturaleza (comerciales, por ejemplo). Pero aquí se pretende clasificar los modelos en función de su explicación de las causas de las crisis y no de sus consecuencias o de su profundidad, por lo que se prefiere, en este trabajo, no separar los modelos con fragilidad financiera de los demás modelos de crisis contingentes.

Concluyendo, sin negar que hay motivos para considerar que los modelos de equilibrio múltiple y autocumplimiento de las expectativas que incorporan variables de fragilidad financiera constituyen una nueva generación de modelos, en esta tesis se ha preferido considerar que siempre que se presenten esas dos características (contingencia y papel relevante de las expectativas), cualquiera que sea la naturaleza de los parámetros fundamentales en deterioro, se puede hablar de segunda generación.

Conclusiones

En este capítulo se realizó un repaso a la literatura teórica desde la perspectiva de importantes economistas intentando dar una explicación de las causas que generan las crisis económicas.

Marx identificó tres tipos diferentes de crisis económicas. Las primeras ocasionadas a corto plazo por acontecimientos recientes, el segundo tipo se debe al incremento y decremento en el ciclo económico y el tercero, que se centra en las crisis a largo plazo, cuyas afirmaciones están

relacionadas con el comportamiento del sistema capitalista. Siendo esta última su contribución más importante respecto a las crisis económicas.

El centro de la explicación de la crisis del capitalismo, Marx la esbozó como la tendencia a la baja de la tasa de rendimiento, en la cual afirma que al aumentar la productividad a largo plazo, el precio de los productos tiende a caer. Si se disminuyen los precios, sería una solución temporal pero obligaría a los capitalistas a disminuir los salarios, lo que provocaría una disminución en la demanda y los beneficios desaparecerían. La tendencia de la tasa de rendimiento no explica por qué se produce la crisis económica, dado que la crisis económica se caracteriza por un exceso de oferta en general y alto desempleo involuntario, Marx explica esto como un problema de la sobreproducción.

Más adelante Keynes desarrolla una teoría de las crisis económicas donde afirma que existen salarios rígidos, y que la causa de la disminución de la demanda agregada está en función del ahorro. Para Keynes el problema de la crisis es una caída en demanda global que proviene de un incremento por la liquidez. Según Keynes, el ahorro que no es invertido provoca una caída en la demanda global, como consecuencia las empresas acumulan stocks, esto hace que bajen la producción para liquidar esos stocks y que, por lo tanto, despidan trabajadores. De esta manera se entra en un nivel de producción más bajo y un aumento del desempleo.

Mishkin por otro lado, elabora una teoría de la inestabilidad financiera basada en la información asimétrica donde señala que la labor de intermediación que ejerce el sistema bancario en un país es crucial para el buen funcionamiento de la economía. En el planteamiento de Mishkin, el problema de la asimetría de la información da lugar a otros dos tipos de problemas: la selección adversa y el riesgo moral. La selección adversa significa que la probabilidad de que el crédito sea concedido a prestatarios de baja calidad es mayor que la probabilidad de que dicho crédito sea concedido a deudores de alta calidad. El riesgo moral aparece una vez que se ha establecido el contrato financiero entre las dos partes, y se refiere a una manifestación del conflicto de intereses que existe entre prestamista y prestatario.

La inestabilidad financiera puede surgir por la aparición de alguno, o varios, de los siguientes cuatro factores: el aumento de las tasas de interés, el aumento de la incertidumbre, los efectos provocados por el mercado de activos en los balances y, por último, la aparición de

problemas en el sector bancario. Además, según el autor, si varios de estos factores aparecen de forma simultánea, esto puede dar lugar al estallido de una crisis financiera.

Según Minsky, el riesgo de sufrir una crisis aparece con el sobre endeudamiento. Minsky estudia la aparición de la fragilidad financiera en una economía cerrada, es decir, que analiza cómo se produce el sobreendeudamiento respondiendo a la propia naturaleza del sistema capitalista sin necesidad de que la economía reciba flujos de capital del exterior. La hipótesis central de la teoría de la inestabilidad financiera de Minsky es que los sistemas económicos capitalistas son frágiles debido a la inestabilidad inherente a sus sistemas financieros. Además, Minsky sugiere que existen tres determinantes del grado de fragilidad financiera: hábitos de financiación de las unidades económicas que forman la economía, el grado de liquidez de los activos y la medida en la que las operaciones de inversión de la economía en su conjunto se financian con fondos externos.

Kregel se basa en la hipótesis de la fragilidad financiera de Minsky y la adapta a los mercados financieros internacionales y a las economías abiertas. Según Kregel, en una economía abierta, las posibilidades de que una economía pase de un estado de salud financiera a otro de inestabilidad financiera no dependen únicamente de los movimientos en las tasas de interés locales, sino que además depende de los movimientos en las tasas de interés internacionales y de las variaciones del tipo de cambio.

Para los economistas de la Escuela Austriaca, las inversiones erradas desembocan en un problema de liquidez que provoca una caída de la producción de una magnitud superior a la que se hubiese producido por errores empresariales puros; llegan a la conclusión de que fueron las malas inversiones las que provocaron el problema de liquidez que desemboca en una caída de la demanda agregada y de la oferta monetaria.

Adicionalmente, se han desarrollado diversos modelos teóricos que tratan de explicar por qué se origina una crisis financiera, los cuales pueden clasificarse en primera generación, segunda generación y tercera generación. La idea principal de los modelos de primera generación es que la crisis de balanza de pagos se produce indefectiblemente por la incompatibilidad de la política cambiaria con las políticas fiscal y monetaria del gobierno en cuestión. Además, estos modelos señalan que las crisis son inevitables, predecibles, las

expectativas se adelantan a las crisis, los parámetros fundamentales deteriorados causan las crisis y las políticas gubernamentales conducen al deterioro de los parámetros fundamentales.

En los modelos de segunda generación consideran que las crisis cambiarias no se derivan directamente de la mala gestión de un gobierno, sino de las expectativas de devaluación de los agentes privados. Así mismo, estos modelos afirman que las crisis son contingentes e impredecibles, las expectativas se autocumplen (es decir, causan las crisis), los parámetros fundamentales no tan deteriorados permiten el autocumplimiento de las expectativas y el gobierno elige entre políticas dado el nivel de deterioro de los parámetros fundamentales.

Los modelos de tercera generación presentan características similares a los modelos de segunda generación. Sin negar que hay motivos para considerar que los modelos de equilibrio múltiple y autocumplimiento de las expectativas que incorporan variables de fragilidad financiera constituyen una nueva generación de modelos, en esta tesis se ha preferido considerar que siempre que se presenten esas dos características (contingencia y papel relevante de las expectativas), cualquiera que sea la naturaleza de los parámetros fundamentales en deterioro, se puede hablar de segunda generación.

Finalmente, se puede decir que la teoría marxista es la que más se acerca a la crisis contemporánea, ya que en la actualidad, podría decirse que hay una crisis de capitalismo explicado por la sobreproducción. Así mismo, podemos afirmar que se utilizarán modelos de segunda generación dadas las características de las crisis contemporáneas, siendo estas contingentes e impredecibles, con autocumplimiento de expectativas donde el gobierno desempeña un papel relevante determinando la política en base al deterioro de parámetros fundamentales.

Referencias

- Aglietta, Michel (1998), "La maîtrise du risque systémique international", *Économie Internationale*, n° 76, 4º trimestre, pp. 41-67.
- Aglietta, Michel y Christian de Boissieu (1999), "Le prêteur international en dernier ressort" en Fred Bergsten et al., *Architecture financière internationale*, La Documentation Française, París, cap. 3, pp. 97-128.

- Amin, Samir (2000), "The Political Economy of the Twentieth Century", *Monthly Review*, vol. 52, nº 2, junio, pp. 1-17.
- Bensaid, B., O. Jeanne (1997). "The instability of fixed exchange rate systems when raising the nominal interest rate is costly", *European Economic Review* 41, pp. 1461-1478.
- Bordo, Michael D. y Anna J. Schwartz (1996), "Why Clashes between Internal and External Stability Goals End in Currency Crises, 1797-1994", *NBER Working Papers*, nº 5710, agosto.
- Bustelo, Pablo, Clara García e Iliana Olivé (2000). "Crisis financieras en economías emergentes: enseñanzas de Asia oriental". Ediciones Cooperación al Desarrollo, Agencia Española de Cooperación Internacional, Madrid.
- Calvo, Guillermo A. (1998), "Varieties of Capital-Market Crises" en Guillermo A. Calvo y Mervyn A. King (comps.), *The Debt Burden and its Consequences for Monetary Policy*, Macmillan, Londres, cap. 7, pp. 181-202.
- Calvo, Guillermo A. (2000), "Balance of Payments Crises in Emerging Markets. Large Capital Inflows and Sovereign Governments" en Paul KRUGMAN (comp.), *Currency Crises*, University of Chicago Press, Chicago, cap. 3, pp. 71-104.
- Callinicos, Alex (1998), "World Capitalism at the Abyss", *International Socialism Journal*, nº 81, invierno.
- Chang, Roberto y Andrés Velasco (1998). "Financial Crises in Emerging Markets: A Canonical Model", *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Papers*, nº 98-10, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Chesnais, François (2000). "Crises de la finance ou premisses de crises économiques propres au régime d'accumulation actuel?" en François CHESNAIS et al., *Les pièges de la finance mondiale*, Syros, París, cap. 2, pp. 38-56.
- Cole, Harold L. y Timothy J. Kehoe (1998). "Self-Fulfilling Debt Crises", *Research Department Staff Reports*, nº 211, Federal Reserve Bank of Minneapolis, julio.
- Connolly, Michael B. y Dean Taylor (1984). "The Exact Timing of the Collapse of an Exchange Rate Regime and Its Impact on the Relative Price of Traded Goods", *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 16, nº 2, pp. 194-207.
- Diamond, Douglas W. y Philip H. Dybvig (1983). "Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity", *Journal of Political Economy*, vol. 91, nº 3, junio pp. 401-419.
- Dooley, Michael P. (1997). "A Model of Crises in Emerging Markets", *NBER Working Papers*, nº 6300.

- Duménil, Gérard y Dominique Lévy (2000). "Capital financiero y neoliberalismo: un análisis de clase" en Diego Guerrero (comp.), *Macroeconomía y Crisis Mundial*, Trotta, Madrid, cap. 3, pp. 67-91.
- Flood, Robert P. y Peter M. Garber (1984). "Collapsing Exchange Rate Regimes: Some Linear Examples", *Journal of International Economics*, vol. 29, nº 1, agosto, pp. 1-13.
- Flood, Robert P.; Garber, Peter M; Kramer, Charles (1996). "Collapsing Exchange Rate Regimes: Another Linear Examples", *Journal of International Economics*, vol. 41, nº3/4, pp. 223-234.
- Hahnel, Robin (1997). "Capitalist Globalism in Crisis. Part One: Boom and Bust", *Z Magazine*, diciembre.
- Kaminsky, Graciela; Reinhart, Carmen (1996). "The Twin Crises: The Causes of Banking and Balance of Payments Problems", *International Finance Discussion Paper No. 544*.
- Keynes, John Maynard. (1936). "The General Theory of Employment, Interest and Money", Macmillan Cambridge University Press, for Royal Economic Society.
- Kregel, Jan A. (1998). "Yes, 'It' Did Happen Again. A Minsky Crisis Happened in Asia", *Jerome Levy Institute Working Paper*, nº 234, The Jerome Levy Institute of Bard College, abril.
- Krugman, Paul (1979). "A Model of Balance-of-Payments Crises", *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 11, nº 3, agosto, pp. 311-325.
- Krugman, Paul (2001). "Crises: The Next Generation", *Mimeo*, marzo.
- Marx, Karl. (1863). "Theories of Surplus-Value". *Capital Volume IV*, Progress Publishers. Ed. en español: Marx, C., (1987). "Teorías sobre la plusvalía", Tomo II, Fondo de Cultura Económica, México.
- Marx, Karl. (1867). "The Process of Production of Capital". *Capital Volume I*, Progress Publishers. Ed. en español: Marx, C., (1987). Marx,C., (2001). *El Capital*, Tomo I, II, III. Fondo de Cultura Económica, México.
- Marx, Karl. (1894). "The Process of Capitalist Production as a Whole". *Capital Volume III*, New York: International Publishers. Ed. en español: Marx, C., (1987). Marx,C., (2001). *El Capital*, Tomo I, II, III. Fondo de Cultura Económica, México.
- Minsky, Hyman P. (1977). "A Theory of Systemic Fragility" en Edward I. Altman y Arnold W. Sametz (comps.), *Financial Crises: Institutions and Markets in a Fragile Environment*, Wiley and Sons, Nueva York, cap. 6, pp. 138-152.
- Minsky, Hyman, P. (1986). *Stabilizing an Unstable Economy*, Yale University Press, New Haven.

- Mishkin, Frederic S. (1996). "Understanding Financial Crises: a Developing Country Perspective", NBER Working Papers, nº 5600, mayo.
- Mishkin, Frederic S. (1998). "International Capital Movements, Financial Volatility and Financial Instability", NBER Working Papers, nº 6390, enero.
- Obstfeld, Maurice (1994). "The Logic of Currency Crises", NBER Working Papers, nº 4640, septiembre.
- Obstfeld, Maurice (1996). "Models of Currency Crises with Self-Fulfilling Features", *European Economic Review*, vol. 40, nº, 3, abril, pp. 1037-1047.
- Salant, Stephen; Henderson, D. (1978). "Market Anticipation of Government Policy and the Price of Gold", *Journal of Political Economy*, vol. 86, pp. 627-648.
- Yoshitomi, M. y S. Shirai (2000). "Policy Recommendations for Preventing another Capital Account Crisis", Technical Background Paper, Asian Development Bank Institute.

CAPÍTULO III

CONTAGIO FINANCIERO

Los mercados financieros de todo el mundo están cada vez más integrados. En este sistema integrado, cualquier impacto en un mercado puede pasar rápidamente a otros creando así un contagio. Los canales de transmisión de estos choques son los vínculos financieros, reales y políticos entre los países. En estudios empíricos de los eventos de contagio, los vínculos fundamentales entre las economías por sí solos no pueden explicar la fuerza de los efectos indirectos de un choque de un mercado a otro. Sin embargo, las teorías del comportamiento financiero ofrecen una explicación alternativa para esta anomalía. Efectivamente, los efectos indirectos de un choque pueden ser atribuidos a un comportamiento irracional de los inversores y a la mentalidad de rebaño entre ellos. Existen varias formas de medir y evaluar la transmisión de los choques. En este capítulo se discuten las teorías del contagio y los modelos existentes para su evaluación y medición.

3.1. Definiciones y Relevancia

Se puede observar empíricamente (Glick y Rose, 1998; Sachs et al., 1996; Kruger et al., 1998) que cuando estalla una crisis financiera es frecuente que otras crisis estallen en un corto período de tiempo. Sin embargo, es importante señalar, antes de resumir algunos modelos de contagio, que no siempre que las crisis coinciden en el tiempo se ha producido un contagio. Por este motivo, es especialmente importante discernir aquello que se considera un contagio de lo que no.

El contagio financiero es un término relativamente nuevo, y por tanto, no se ha incorporado al debate económico general. De hecho, no aparece en casi ninguna publicación de la literatura económica anterior a 1997. Es por ello que no existe unanimidad académica en torno al concepto, cuando se aplica a fenómenos económicos. La mayoría de publicaciones sobre el tema se remiten, como punto de partida, a algunas de las definiciones propuestas por el Banco Mundial, tomando aquélla que parece obedecer más fielmente al propósito del estudio del que se trate.

Antes de tratar de encontrar una explicación teórica de contagio, es importante definir claramente dicho término. El Banco Internacional de Reconstrucción y Desarrollo (BIRD) ofrece tres significados distintos del término contagio, de acuerdo con la mayor o menor amplitud que se pretende asignarle al concepto.

- A. En la definición más amplia, contagio se refiere a cualquier transmisión de fenómenos económicos de un país a otro, incluyendo efectos normales de desbordamiento. El contagio podría tener lugar tanto en épocas de bonanza económica, como en aquéllas de dificultad y desequilibrio, aunque previsiblemente el término se usaría con más frecuencia en períodos de crisis.
- B. Como segunda definición, el BIRD²¹ apunta la posibilidad de limitar el uso del término contagio al incremento de correlaciones económicas entre países durante períodos de crisis, en relación con las existentes en tiempos tranquilos. Entonces, el contagio tendería a cero en la medida en que las coyunturas fueran normales.
- C. Desde una definición más operativa, el banco considerara contagio, a cualquier transmisión de perturbaciones económicas de un país a otro, más allá de las atribuibles a vínculos fundamentales entre ellos. A tal efecto, considera el Banco Mundial tres tipos de vínculos fundamentales:
 - a. Vínculos financieros, cuando dos o más economías se conectan a través del mercado de capitales.
 - b. Vínculos reales, cuando proceden de relaciones ordinarias asociadas a transacciones internacionales. Así, países que comercian entre sí, o compiten en los mismos mercados exteriores, pueden verse afectados cuando la depreciación de una de sus monedas altera la posición competitiva de las restantes, propiciando una serie de devaluaciones destinadas a restablecer el equilibrio cambiario. Fenómenos similares podrían derivarse de vínculos asociados a los flujos de inversión directa extranjera.
 - c. Vínculos políticos, derivados de acuerdos especiales entre países. Entre estas circunstancias, el BIRD cita la posible existencia de asociaciones de países con acuerdos cambiarios, de forma que cualquier perturbación depreciatoria en uno de ellos conllevaría devaluación en todos los demás.

²¹ El BIRD fue creado en 1945 por 44 países, lidera el BM. Nació con el objetivo de facilitar financiación para la reconstrucción de los países devastados por la segunda guerra mundial.

El Banco Mundial²², propone restringir la expresión contagio económico a aquellas situaciones en las que la extensión e intensidad con que se transmite una perturbación, real o financiera, excede de cuanto era esperable.

Finalmente, antes de hacer una acepción general del concepto, faltaría mencionar que el término contagio está tomado de definiciones relativas a la epidemiología, donde se define como la transmisión de una enfermedad por contacto directo o indirecto. La causa de la enfermedad puede ser una bacteria o virus, pero los canales de estos determinan la intensidad del contagio. Para los mercados financieros, el equivalente de un virus es un choque a cierta parte de la economía, tales como el colapso del mercado inmobiliario en los Estados Unidos durante 2007 y 2008. Este choque trasladada a otros mercados financieros que resulten en pérdidas sustanciales en los mercados financieros de todo el mundo. Los resultados del contagio son obvios, pero no hay consenso acerca de los canales de transmisión de este choque. Sin embargo, los canales de transmisión de contagio financiero se pueden dividir en los vínculos fundamentales y comportamiento irracional.

Ahora bien, se puede decir que el contagio es considerado, pues, como algo variable, que supera cuanto podía ser razonablemente esperado por los participantes en los mercados y atribuible a los vínculos fundamentales.

3.1.1. Literatura Teórica

Los modelos teóricos que se enfocan al contagio financiero están basados en los vínculos fundamentales. Los vínculos entre los países existen debido a: relaciones comerciales, políticas macroeconómicas o choques externos comunes sobre las economías.

A. Vínculos Fundamentales

Las economías nacionales están vinculadas por los fundamentos económicos. Los primeros casos de vínculos entre los diferentes países provienen del comercio de bienes entre esos países. El siguiente nivel de vinculación se produjo cuando los individuos, las empresas, y

²² El BM está formado por dos instituciones de desarrollo: el Banco Internacional de Reconstrucción y Desarrollo (BIRD) y la Asociación Internacional de Fomento (AIF).

en algunos casos los países empezaron por prestar dinero a otros. Estos vínculos se hicieron más fuertes con las sociedades anónimas que mantienen una protección derivada de su responsabilidad limitada, lo que permitió a los individuos e instituciones invertir en activos reales y activos financieros de otros países. Estos vínculos se incrementaron aún más con los acuerdos comerciales multilaterales. En las secciones siguientes, estos vínculos se subdividen en enlaces financieros, reales y políticos.

Vínculos Financieros

Desde la generación de excedentes de liquidez que no podían operarse en los sistemas financieros de los países petroleros a principio y mediados de los años 70, grandes cantidades de inversiones directas e indirectas atravesaron las fronteras nacionales. Las empresas de un país pueden invertir en activos reales de otro país o adquirir empresas, así como también el acceso a los mercados de capitales del mundo se hizo más fácil para los países, principalmente las de economías subdesarrolladas, o emergentes. Con estas inversiones transfronterizas, los flujos de efectivo de la empresa matriz dependen de más de una unidad, que se extiende por diferentes países. Un choque negativo en los flujos de efectivo de una filial en un país afecta a los flujos de la matriz, que a su vez puede hacer que las acciones de la empresa matriz disminuyan. En este caso, el choque en un país se transmite a otro a través del canal financiero de la propiedad cruzada. Otra extensión de la integración de los mercados puede ocurrir cuando las empresas utilizan los mercados extranjeros para aumentar su capital, cuando se facilita el acceso a los mismos por un exceso de liquidez que no puede ser reciclado por los sistemas de los países que mantienen excedentes, como los petroleros en primer lugar, y recientemente China.

Otra situación observada en los últimos años, es que se produjo un gran aumento en el número de empresas que listan sus acciones en los mercados extranjeros, ya sea para la obtención de capital nuevo o simplemente para negociar posiciones de activos financieros que les representan y/o representarán ganancias derivado de la formación de precios en esos mercados. Así, es posible observar en los Estados Unidos, que más de 2,000 empresas extranjeras han listado sus acciones en forma de ADRs (*American Depositary Receipts*)²³. De

²³ La colocación de ADR's se realiza como una forma más rápida de obtener recursos e ir cumpliendo con la normatividad de las empresas públicas en el mercado 144-A, circunscrito a inversionistas institucionales, y como una primera etapa antes de ser listados en Bolsas.

esta forma, parte de los mecanismos de contagio se pueden derivar de la cantidad de activos financieros que se cotizan de forma simultánea en varios mercados. De acuerdo con un estudio realizado por Jaiswal-Dale y Jithendranathan (2009), los choques en los países mencionados afectan los rendimientos y volatilidades de los certificados de depósito y por tanto, puede transmitir choques de un mercado a otro de una manera relativamente rápida.

En efecto, como se muestra desde los estudios de Rudolf Hilferding, (1910) las características de los flujos de capitales entre mercados de valores, y en operaciones caracterizadas por el anonimato de la propiedad de los mismos, las inversiones indirectas son otro canal financiero a través del cual los choques pueden ser transmitidos. La mayoría de los mercados bursátiles importantes de todo el mundo están abiertos a los inversores extranjeros. Cuando se produce una crisis, los inversionistas de ese país pueden reevaluar sus carteras de inversiones y pueden decidir reasignar sus activos a otros más seguros. Si este reajuste incluye la reducción de las tenencias extranjeras, puede afectar negativamente a los mercados de valores de otros países.

Vínculos Reales

Las relaciones económicas, como el comercio, se consideran vínculos reales entre países. Cuando una cantidad sustancial de comercio bilateral se produce entre ellos, las crisis económicas de un país pueden ser fácilmente transmitidas a sus socios comerciales. Canadá y Estados Unidos son ejemplos de dos países que están unidos por el comercio bilateral. Dado que la economía de Estados Unidos es una economía más grande, los choques económicos de este país a menudo tienen un impacto importante en la economía canadiense, y esta misma situación es replicable a México. Los acuerdos comerciales bilaterales con frecuencia fortalecen los vínculos comerciales entre las economías que los celebran, ya que permiten un movimiento más fácil de bienes y servicios entre países. El Tratado de Libre Comercio (TLC) es un ejemplo de un acuerdo de esta naturaleza, lo que fortalece los lazos económicos entre Estados Unidos, Canadá y México.

Vínculos Políticos

Cuando un grupo de países está de acuerdo en formar una unión política, adicional a otro tipo de acuerdos monetarios como es el caso de la Unión Europea, puede resultar en una

mayor vinculación entre los mercados financieros de los países miembros. Estos vínculos se fortalecerán aún más si estos países están de acuerdo en unificar su divisa. En esas zonas monetarias comunes, los choques en cualquiera de las economías rápidamente pueden afectar a otros países como lo demuestra la reciente crisis financiera griega, que aunado a su limitada capacidad de producción, exceso de gasto público y error de información macro ofrecida al exterior, su imposibilidad de devaluar su moneda al haber perdido la soberanía por la Unión Europea, afecta su sistema bancario y cualquier incumplimiento de los bancos griegos afectará a los países en los que tenga una presencia importante, ya sea de manera negativo o positiva, como en el caso de Alemania y Francia e incluso España, quienes eran concentradores de la deuda externa de Grecia.

B. Comportamiento Irracional

Los estudios empíricos sobre el contagio, a menudo encuentran que los fundamentos económicos por sí solos no pueden explicar el movimiento conjunto de los mercados, especialmente durante un período que contiene uno o más choques financieros (Connolly y Wang, 2003). La asimetría de la información entre los inversores de los diferentes mercados puede ser una de las principales razones del llamado comportamiento irracional. El planteamiento básico de la Hipótesis del Mercado Eficiente (EMH) (Fama, 1970) señala que los precios que se negocian en un mercado financiero eficiente reflejan toda la información existente. Es decir, en un mercado eficiente todos los títulos están perfectamente valorados, por lo que no existen títulos sobre o infravalorados. El precio de los activos negociados en los mercados financieros refleja, toda la información conocida por los miembros del mercado y todas las creencias de los inversores sobre el futuro. Si la asimetría de información existe, la extensión de los efectos de los choques a los fundamentos de la economía de un país pueden ser desconocidos para los inversores. Por lo tanto, acuden al mercado externo y tratan de conseguir el contenido de la información de los cambios de precios en ese mercado. A través de este mecanismo, incluso un movimiento de precio equivocado, como sucedió en octubre de 1987 con el choque de los mercados bursátiles de Estados Unidos, se puede transmitir a otros mercados, dando lugar a un contagio (King y Wadhvani, 1990).

El comportamiento rebaño es otra explicación para el contagio del mercado financiero. Ocurre cuando existe asimetría de información entre los inversores informados y los desinformados. Los inversores desinformados pueden no tener los recursos para adquirir la

información y por lo tanto tratan de imitar la acción de los inversores informados. Si los inversores informados están valorando los activos basados en la información, este comportamiento de manada no debe crear un comportamiento irracional en el mercado. Según los investigadores, incluso entre los inversores informados existe incertidumbre acerca de los flujos de efectivo futuros de las acciones y la tasa de rendimiento ajustada al riesgo. Los precios de los activos financieros son a menudo resultado de un proceso inconsciente, la evaluación subjetiva, que depende del estado de ánimo general del mercado (Hirshleifer y Teoh, 2003). Cuando los participantes del mercado son optimistas sobre el futuro, como en la burbuja tecnológica de la década de 1990, los precios de las acciones tienden a aumentar y lo contrario ocurre cuando el estado de ánimo del mercado es pesimista.

C. Microestructura de Mercado

La creciente evidencia indica que las redes sociales transmiten información valiosa para las decisiones financieras (Hirshleifer y Teoh, 2009). Los inversionistas individuales e institucionales están influenciados por las declaraciones que escuchan de sus conocidos y los medios de comunicación. Uno de los cambios más importantes en los últimos años es la aparición de las telecomunicaciones y de internet móvil, que ha aumentado la velocidad a la que la información se difunde en todo el mundo. Una persona que tenga un ordenador con conexión a internet en cualquier lugar remoto del mundo puede acceder a la información más actualizada sobre lo que está pasando en el mundo y sus mercados, esto facilita y agiliza las transacciones, junto con la velocidad a la que la información puede ser transmitida puede posiblemente explicar el contagio en los mercados emergentes. Veldkamp (2006) encuentra evidencia empírica de que los mercados emergentes presentan comportamiento rebaño acompañados por la cobertura de los medios de comunicación.

En la microestructura de mercado²⁴ no solo se analizan los efectos macroeconómicos como inflación y tasa de interés, sino que considera los efectos de la configuración del mercado, la asimetría de información, la heterogeneidad de participantes y la racionalidad de obligaciones legales, entre otros. Estos efectos de la microestructura de mercado, a menudo se pierden cuando se utilizan datos de baja frecuencia como los movimientos de los precios diarios o mensuales. Utilizando los datos intradía se puede aliviar algunos de estos problemas.

²⁴ Según Madhavan (2000), la microestructura de mercado estudia el proceso por el cual las demandas latentes de los inversores se traducen en precios y volumen.

Por ejemplo, Chakrabarty y Zhang (2012) utilizan diversas variables de microestructura de mercado para estudiar los efectos de contagio después de la quiebra de Lehman Brothers en 2008.

La falta de sincronía en el comercio, puede crear un problema en la identificación de la direccionalidad del contagio. Por ejemplo, las bolsas europeas abren antes que las americanas. Por lo tanto, surge la pregunta de si el comercio europeo influye en los precios de Nueva York o viceversa. Frank (2009) utiliza datos de alta frecuencia para los fondos negociados en bolsa (ETF), divisas, renta fija, materias primas, y los valores de energía para identificar las interrelaciones entre estas clases de activos durante la crisis sub-prime. Los resultados de este estudio indican que los precios de las distintas clases de activos se volvieron más fuertemente relacionados entre sí durante el período de crisis.

3.1.2. Literatura Empírica

Las anteriores aproximaciones dan cuenta de la fuerza del contagio (modelos basados en los vínculos fundamentales), o bien de sus canales de propagación (modelos que explican el contagio). De cualquier forma, estos se deben contrastar con los datos. La literatura que persigue este fin se puede dividir en los estudios de una primera generación y los más recientes.

A. Primera Generación

Cuando se quiere modelar la fuerza del contagio los coeficientes de correlación de Pearson son las medidas predilectas (King y Wadhvani, 1990) y en este sentido también lo son los vectores autorregresivos y las funciones de impulso-respuesta (Baig y Goldfajn, 1999). No sólo porque son fáciles de implementar sino también porque son intuitivos. De esta forma, un incremento considerable en la correlación de los precios en dos mercados puede ser interpretado como contagio. El grado del contagio será qué tanto crece dicha correlación. El problema con esta metodología radica en las limitaciones estructurales que tiene un coeficiente de correlación de Pearson o la pendiente de una regresión, documentadas en los trabajos de McNeil *et al.* (2005), Rigobon (2001), y Becerra y Melo (2008).

Estas medidas sólo funcionan bien cuando las distribuciones asociadas en la estimación son normal multivariadas. Por otro lado, sólo son invariantes ante transformaciones afines positivas, las cuales no incluyen ciertas formas de heterocedasticidad comunes en las series financieras. Esto puede llevar a que se concluya que existe contagio en situaciones en las que nada ha cambiado en términos de dependencia (Rigobon, 2001).

Por otra parte, cuando lo que se quiere es observar la aparición de vínculos que no responden a los fundamentales (por ejemplo el comportamiento rebaño), las medidas más usadas son los eventos condicionales extremos. Si la probabilidad de que ocurra una pérdida muy grande en el mercado local es muy alta, dado que ha ocurrido una pérdida de igual o mayor magnitud en otro mercado, se puede decir que existe contagio. En este contexto, los modelos de elección discreta, *probit* o *logit*, así como los cálculos de probabilidades condicionales son los preferidos (Eichengreen et al., 1996). El problema, una vez más, es que ninguno de estos intentos es robusto ante la fuerte heterocedasticidad que acompaña a las series financieras.

Otros experimentos de la primera generación de literatura empírica fueron las regresiones estándares por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), las técnicas de componentes principales, los modelos de volatilidad GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) y las relaciones de cointegración. Específicamente, ante una varianza condicional que cambia marcadamente, las regresiones por MCO, las descomposiciones de los componentes principales y las probabilidades condicionales tienen una confianza muy baja en términos estadísticos. Por otro lado, los problemas de variables omitidas y de endogeneidad afectan bastante los resultados de los MCO, los GARCH y los *probit*. Sólo parecen sobrevivir los modelos de corrección de error, pero como el contagio es ante todo una consideración de muy corto plazo, no tiene mucho sentido incorporar restricciones de largo plazo en la estimación.

B. Segunda Generación

En planteamientos más recientes del problema empírico, Boyer *et al.* (1999) y Rigobon (2000) han propuesto ajustes sobre el coeficiente de correlación tradicional, los cuales tienen en cuenta el incremento de la varianza condicional cuando se calcula la correlación, eliminando el sesgo que existe cuando ésta se incrementa. También han desarrollado métodos alternativos

para la identificación de los parámetros de dependencia entre los mercados de dos economías. Las medidas propuestas son robustas ante la heterocedasticidad, las variables omitidas o los problemas de endogeneidad y simultaneidad (Rigobon, 2000), y en algunos casos, incluso se valen de la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas para identificar el modelo (Rigobon, 2003).

Una propuesta aún más reciente es la de las cópulas condicionales como forma alternativa de calcular dependencias y en este sentido de estimar el contagio, de una forma más amplia de la que impone la linealidad de un coeficiente de correlación. Un buen ejemplo de esta literatura se puede encontrar en Horta et al. (2008) y Rodríguez (2007). En ninguno de estos trabajos se utiliza el coeficiente de dependencia asintótica para la detección del contagio.

C. Tercera Generación

A finales de los años 1990's, cuando se comprobó que los vínculos fundamentales de los países afectados eran bastante sólidos, el estallido de las crisis continuó. Se desarrolló entonces una nueva generación de modelos teóricos que incluían indicadores del sector financiero derivados de los balances de los bancos. Después de las limitantes presentes en las dos generaciones de modelos anteriores, se presentaron dos enfoques: el comportamiento de rebaño y el problema del riesgo moral. Bajo el comportamiento del rebaño, los especuladores siguen el comportamiento con el supuesto de que refleja conjuntos de conocimientos de otros inversores, y que es probable que se produzcan múltiples equilibrios (Froot et al., 1992; Krugman, 1997). De acuerdo con el riesgo moral, las garantías implícitas otorgadas a las instituciones financieras que ya están mal reguladas y no son monitoreadas estrechamente llevaron a una excesiva expansión de la oferta de instrumentos financieros, incluyendo los derivados (Mckinnon y Pill, 1996; Krugman, 1998; Kaminsky y Reinhart, 1999).

Los modelos de tercera generación se enfocaron en los efectos de contagio como causa de las crisis monetarias. Gerlach y Smets (1995) y Kaminsky et al. (1998) presentaron modelos en los que la devaluación de un país llevó a sus socios comerciales a la devaluación para evitar una pérdida de competitividad. Calvo & Reinhart (1996) y Eichengreen et al. (1996) discutieron los canales para la transmisión del efecto contagio. En el contexto de las crisis monetarias contagiosas, Masson (1999a, 1999b) explicó la distinción entre crisis conjuntas del mercado cambiario como consecuencia de un choque macroeconómico común a los efectos de la crisis

de un país en otros países. Chang y Velasco (1998) explicaron a las crisis cambiarias como el subproducto de una corrida bancaria. Krugman (1999) argumentó que se habían omitido dos factores de los modelos formales: el papel de los balances de las empresas en la determinación de su capacidad de invertir y los flujos de capital que afectaban al tipo de cambio real. La literatura empírica de estos modelos utiliza la relación entre las deudas domésticas dominadas por la moneda extranjera y el tipo de cambio real como factores clave para predecir la crisis, específicamente en los mercados emergentes (Calvo et al., 2004, 2006a, 2006b, 2008).

En resumen, las crisis provocadas por los comportamientos rebaño pueden incluirse en cualquiera de las tres generaciones de modelos, en función de los mismos criterios utilizados anteriormente. Si el choque externo altera alguna de las variables de los modelos de primera generación, de forma que se genere una brecha entre la oferta y la demanda de dinero y, por tanto, la política monetaria se torne incompatible con el tipo de cambio fijo, se podría desarrollar un modelo de primera generación que explicara lo ocurrido. Por el contrario, si el choque externo provoca un cambio de expectativas que se autocumplen, los modelos de segunda y tercera generación resultarían más explicativos.

3.2. Tipos de Contagio

La revisión de la teoría ha identificado numerosos canales de contagio posibles (Eichengreen et al (1996), Kaminsky y Reinhart (2000), Forbes y Rigobon (2001), Dornbusch et al (2000)). A raíz de estos estudios, se identificó que un primer país afectado no tiene por qué ser la única causa de la crisis de los siguientes países afectados. Entre dicha primera crisis y las siguientes debe producirse un deterioro de los vínculos fundamentales y/o un cambio de las expectativas de los agentes privados. Es decir, la primera crisis por sí misma no puede desencadenar crisis en otros países. Desencadena, en cambio, ciertos mecanismos que pueden causar directamente esas crisis siguientes. Dependiendo de si la causa directa de la crisis (derivada, a su vez de la primera crisis) es un deterioro de los vínculos fundamentales de otros países, o un cambio de expectativas, Masson (1998) distingue entre derrame financiero y contagio puro.

3.2.1. Derrame Financiero

Sobre el derrame Masson afirma que una crisis en un mercado emergente puede afectar a los parámetros macroeconómicos fundamentales de otro mercado emergente (Masson, 1998) y ese deterioro de los parámetros fundamentales puede culminar en una crisis en ese otro mercado. Una crisis en un país puede afectar a los parámetros fundamentales de un segundo país por dos vías diferentes: comercial y financiera.

El derrame financiero de la crisis por la vía comercial puede producirse de diversas maneras. Según, Gerlach y Smets (1995), parten del modelo de Flood y Garber (1984), y suponen que hay dos países y que ambos tienen un crecimiento excesivo del crédito interno (como en el modelo de Flood y Garber, y de otros modelos de primera generación). Explican cómo el colapso del régimen cambiario de uno de los países del modelo acelera el colapso del régimen cambiario del otro país (adelanta un colapso inevitable, como los de los modelos de primera generación). No obstante, también analizan la posibilidad de que se produzca un contagio incluso cuando la paridad del segundo país es sostenible (es decir, cuando la crisis no es inevitable).

De acuerdo con Gerlach y Smets (1995) el mecanismo que conduce a una crisis en el segundo país es el siguiente. La devaluación de la moneda del primer país conlleva, en primer lugar, una reducción del precio de los bienes en el mercado del segundo país. Por tanto, cae el nivel de precios del segundo país. En segundo lugar, la devaluación del primer país, dado que se supone que los salarios no son flexibles, implica que el segundo país pierde competitividad. Ambos efectos (caída del nivel de precios y de la competitividad) provocan, en ese segundo país, presiones deflacionistas sobre los salarios y el crecimiento económico que, a su vez reducen la demanda de dinero. Como consecuencia de dicha reducción de la demanda de dinero, el crecimiento del crédito del banco central implica un exceso de oferta monetaria mayor al que se daba antes de la devaluación de la moneda del primer país. Entonces, los agentes privados intercambian dicho exceso de oferta monetaria por divisas, lo que implica la pérdida de reservas que conduce en último término a la crisis financiera. El contagio es más grave cuanto mayor sea la integración comercial de ambos países, cuanto menor sea la flexibilidad de los salarios, y cuanto menor sea la integración comercial entre ambos países y el país a cuya moneda están ancladas las monedas de dichos países. En tercer lugar, la crisis

normalmente trae consigo una disminución del crecimiento económico en el país que la sufre, lo que incide en una merma de su capacidad importadora, lo que, a su vez, puede empeorar la capacidad exportadora de sus socios comerciales.

El derrame financiero de la crisis por la vía financiera puede generarse de acuerdo al comportamiento de los inversores internacionales a través de los siguientes mecanismos (Caramazza et al., 2000). En primer lugar, la crisis de un país provoca la venta de activos de ese país por parte de los inversores, que a la vez comprarán activos de un segundo país y cubrirán el riesgo de la nueva compra con la venta de activos de un tercer país, de manera que se contagia la crisis del primer al tercer país (Kodres y Pritsker, 2002). En segundo lugar, los inversores pueden liquidar sus posiciones en un segundo país para cubrir las pérdidas que la crisis del primer país les ha generado (Goldfajn y Valdés, 1997). Y en tercer lugar, ante la crisis en un primer país los inversores pueden vender los activos que estén más representados en su cartera de activos, simplemente por su gran disponibilidad, con el ánimo de reajustar el riesgo de su cartera (sobre la teoría del common creditor véase Kaminsky y Reinhart, 2000).

Por otra parte, el comportamiento de los intermediarios financieros del país en crisis también puede provocar derrame financiero por vía financiera. En concreto, éstos pueden verse forzados a retirar capital de los mercados financieros de otros países para contar con la liquidez necesaria para hacer frente a los pagos a los inversores extranjeros que se están retirando de su mercado (Goldfajn y Valdés, 1997).

Cabría preguntarse si el derrame financiero tiene cabida en los modelos de primera, segunda y/o tercera generación. Cabe considerar que el agravamiento de los parámetros fundamentales puede, empeorar un problema de incompatibilidad de políticas económicas, de manera que se adelante una crisis que se habría producido en cualquier caso como consecuencia del deterioro de los parámetros fundamentales. En tal caso, un modelo de primera generación explicaría este tipo de contagio (como en Gerlach y Smets, 1995). Por otra parte, el empeoramiento del estado de los parámetros fundamentales puede simplemente situar al segundo país en lo que Cole y Kehoe (1996) denominan la zona de crisis. Es decir, dicho empeoramiento puede tan sólo abrir la puerta al autocumplimiento de las expectativas, en cuyo caso un modelo de segunda generación explicaría este tipo de contagio.

3.2.2. Contagio Puro

Una crisis en un país puede desencadenar una crisis en otro lugar por razones no explicadas por los parámetros fundamentales, quizá porque conduce a cambios en el sentimiento del mercado o a cambios en la interpretación que se hace de la información existente (Masson, 1998). En otras palabras, la crisis financiera que ocurre en un primer país afectado no trae consigo ningún cambio en los parámetros fundamentales de otros países, sino que cambia la tolerancia al riesgo de los agentes privados o su imagen del estado de esos parámetros fundamentales. Por tanto, las expectativas privadas se modifican, y ello conduce a una crisis por autocumplimiento de las expectativas. En tal caso se dice que existe contagio puro.

Masson (1998) formaliza esta posibilidad en un modelo de balanza de pagos en el que se muestra que para determinado estado de los parámetros fundamentales hay equilibrio múltiple. En dicho modelo la vulnerabilidad al contagio es mayor cuando hay una deuda (con tipo de interés variable), cuando las reservas son bajas, y cuando hay déficit comercial (Masson, 1998).

Goldstein (1998) presenta la idea del *wake up call*, que consiste en que la crisis en un país sirve de despertador para los mercados financieros que, ante dicha crisis, reevalúan los parámetros fundamentales de otros países. Así, países con parámetros fundamentales (comerciales o financieros) no perfectamente saneados pueden ser atacados aun cuando, en ausencia de ese ataque, no habrían sufrido una crisis financiera.

El modelo de Ahluwalia (2000) muestra un caso concreto del *wake up call* (y de contagio puro, por tanto), en el que se dice a la vista de qué parámetros se produce la reevaluación de la solvencia de los países prestatarios. En su modelo, el contagio se debe a la existencia de aparentes similitudes (económicas o geográficas) entre el primer país que entra en crisis y otros países. En sus palabras:

“una crisis en un país que presente ciertas características visibles –debilidades en variables económicas relevantes y localización en una región determinada– puede resultar en una crisis de confianza en otros países que presenten esas características, independientemente de si éstas han sido responsables de la crisis original” (Ahluwalia, 2000).

Este modelo resulta especialmente aplicable a las crisis en economías emergentes, dado que la información que de ellos se tiene es menor que la de los países desarrollados. En este mismo artículo se considera que, dado que todos los países son susceptibles de ser contagiados, aunque sus parámetros fundamentales estén saneados, la forma de evitar el contagio sería, en el corto plazo, los controles de capital y, en el largo plazo, el desarrollo de sistemas de información que permitan a los inversores internacionales conocer la realidad de cada una de las economías emergentes, de forma que no se juzgue la estabilidad del tipo de cambio de un país en función de la estabilidad del tipo de cambio de países similares.

Los modelos de contagio puro pueden inscribirse en el grupo de modelos de segunda generación, dado que en ellos se considera, por una parte, que las crisis son contingentes y consecuencia del autocumplimiento de las expectativas en un contexto de equilibrio múltiple. Por otra, que para que exista el equilibrio múltiple y, por tanto, para que se produzca un contagio puro, los parámetros fundamentales deben estar algo deteriorados.

Drazen (1998) identifica otro tipo de contagio, al que denomina contagio político. En su modelo las crisis dependen de una decisión gubernamental que obedece, también a factores políticos. Los modelos de segunda generación también consideran que las crisis dependen de una decisión gubernamental. Pero dicha decisión no depende, como en Drazen (1998), de beneficios y costos políticos, sino de beneficios y costos económicos (por ejemplo, en Obstfeld, 1994, el costo de la elevación de los tipos de interés se supone en términos de encarecimiento de la deuda pública). En Drazen (1998) abandonar el tipo de cambio fijo tiene un costo porque ello implica renunciar a los beneficios de pertenecer a una asociación (por ejemplo, un proceso de integración política económica) en el que el requisito para ser miembro es precisamente tener un tipo de cambio fijo. Por tanto, el contagio político se produce de la siguiente manera: cuando un miembro sufre una crisis cambiaria y, por tanto, se ve forzado a abandonar la asociación, disminuye el valor de ser miembro de esa asociación, especialmente si el país en cuestión era importante para la continuidad de la asociación.

Así, aumentan las expectativas de que los demás países miembros se devalúen también, y suben, por tanto, las probabilidades de contagio. El contagio político puede considerarse como un derrame financiero si los vínculos políticos se consideran vínculos fundamentales. En caso contrario, el contagio político es claramente un caso concreto de contagio puro.

3.3. Otros Tipos de Contagio

Forbes y Rigobon (2000) proponen dos tipos de teorías de contagio: teorías no contingentes y teorías contingentes. La primera asume que los mecanismos de transmisión después de un choque no son significativamente diferentes de los anteriores a la crisis, mientras que la segunda categoría estipula que los mecanismos durante o justo después del choque son significativamente diferentes de los de antes del choque.

3.3.1. Teorías Contingentes

Las teorías contingentes son las que explican los cambios de mecanismos durante los periodos de crisis. Sugiere que las crisis financieras siguen canales de transmisión básicamente diferentes de aquellas que prevalecen antes del choque, o que eran incluso inexistentes durante el periodo de inestabilidad financiera (Forbes y Rigobon (2000), Kodres y Pritsker (2002)). Las teorías contingentes a la crisis son clasificadas dentro de tres mecanismos de transmisión en: múltiples equilibrios, choques endógenos de liquidez y contagio político. En los tres casos las crisis son transmitidas por canales que no existían en periodos anteriores a la crisis; desde esta perspectiva, las teorías explican la existencia de un contagio cuando existe evidencia estadística de que un choque provoca un cambio en el indicador elegido. Puntualiza Rigobon (1999) que los mecanismos de transmisión son de corta duración y que los mismos se incrementan durante la crisis.

3.3.2. Teorías no Contingentes

Las teorías no contingentes suponen que los mecanismos de transmisión son los mismos durante los periodos de crisis que durante periodos más estables. Este enfoque asume que los mecanismos de transmisión seguidos de un choque no son significativamente diferentes de los anteriores a la crisis. En otras palabras, co-movimientos existentes entre los mercados representan sólo una continuación de las interdependencias pre-crisis. Por otra parte, Forbes y Rigobon (2000) revelan que estas teorías se pueden clasificar en cuatro categorías: comercio internacional, coordinación de políticas, aprendizaje o mecanismo de reevaluación de países y choques globales. Estos canales de transmisión son llamados vínculos del sector real. Estas teorías asumen que los mercados de valores están integrados, por lo que al instrumentar las

pruebas estadísticas se tendría que considerar la endogeneidad. Los mecanismos de transmisión son los mismos durante los periodos de crisis y en los de estabilidad, lo que implica que los choques positivos y negativos serán simétricos. Esta situación corresponde a lo que se ha definido como alta interdependencia.

La distinción entre las teorías contingentes y no contingentes a las crisis revela el papel crucial del comportamiento de los inversores en el proceso de transmisión y sobre todo con respecto al contagio financiero. Esto apunta al papel pesado de la integración financiera mayor, como los tratados Kodres y Pritsker (2002) y Dornbusch *et al.* (2000). En este sentido, los autores insisten en que los inversores puedan tomar decisiones que sean individualmente racionales *ex-ante*, lo que lleva a un exceso de co-movimientos.

3.4. Algunas Aplicaciones Contemporáneas

A. Uso de cópulas y teoría del valor extremo por Uribe (2011)

Propone una metodología para medir el contagio a través de coeficientes de dependencia asintótica. Parte de un modelo de valoración internacional de activos por factores, y hace uso de las fortalezas estadísticas de las cópulas y la teoría del valor extremo.

Se realiza una aplicación de la metodología propuesta en los mercados financieros colombianos más relevantes: renta fija pública, acciones, monetario y cambiario, en relación con su principal socio comercial y financiero: Estados Unidos. La idea es determinar si existe contagio y con qué probabilidad se pueden presentar eventos conjuntos y extremos en ambos mercados; se señala también cuáles tipos de títulos son más sensibles ante tales condiciones. El aporte sobre la literatura anterior, radica en el uso de modelos de valoración de activos para capturar las relaciones teóricas entre las series y los coeficientes de dependencia asintótica como indicador robusto de contagio financiero.

En términos generales, no se encuentra evidencia significativa de contagio en los mercados colombianos; los mercados más expuestos son el accionario y el cambiario, pero aún estos no lo están en gran proporción. La desintegración financiera de Colombia que se refleja en bajos niveles de contagio, en particular del mercado de acciones colombiano, responde en

gran medida al marco regulatorio existente en el país y es coherente con lo encontrado en trabajos anteriores (Uribe, 2011).

B. Uso del modelo GARCH y coeficientes de correlación ajustados por heterocedasticidad por Imen y Rim (2012)

El objetivo de este trabajo es contrastar empíricamente (posterior a la crisis financiera subprime) el contagio de los Estados Unidos, hacia un conjunto de mercados emergentes y en desarrollo. En primer lugar se examina el efecto de la crisis subprime en 12 mercados analizados utilizando un modelo GARCH-DCC (1,1), y posteriormente, intenta identificar la presencia de contagio puro mediante pruebas de la importancia estadística del aumento de coeficientes de correlación ajustados por heterocedasticidad en los períodos pre y post crisis.

Los datos retenidos son los índices bursátiles, considerados como índices de referencia para los diferentes mercados de la muestra. Se tomaron precios en dólares de Estados Unidos para eliminar cualquier problema relacionado con la variación del tipo de cambio. La muestra considerada incluye 13 bolsas de valores de los cuales 7 son mercados desarrollados y 6 emergentes,

El estudio llevó a cabo dos pruebas, la primera aplicando un modelo DCC-GARCH (1,1) y las pruebas de correlación ajustadas. La aplicación de un DCC-GARCH (1,1) permitió detectar un aumento significativo de las correlaciones dinámicas entre países emergentes y desarrollados (México, Argentina, Alemania, Francia, Gran Bretaña, Italia, Japón, Malasia, China y Singapur), con el mercado de los Estados Unidos. Usando este modelo, se identificó contagio. Por otra parte, la adopción de una definición contagio puro como el significativo aumento de los vínculos entre los mercados durante un período de crisis, ha sido capaz de detectar a través de los coeficientes de correlación ajustados por la presencia de contagio puro entre el mercado de los Estados Unidos y los siguientes mercados: Argentina, Gran Bretaña, Malasia y Japón.

Los resultados obtenidos en el estudio demuestran el alto grado de integración financiera internacional de los países y en especial, la vulnerabilidad de los mercados financieros. La segunda parte de la investigación, se centró en identificar los medios por los cuales los

países puedan reducir su vulnerabilidad a los choques externos. De hecho, el estudio revela la importancia de la intervención de las autoridades monetarias y financieras para absorber choques resultantes de las crisis financieras, así como la necesidad de la instalación de los métodos más satisfactorios de supervisión con el fin de limitar los riesgos financieros de la inestabilidad de los mercados, especialmente en los países emergentes. (Imen y Rim, 2012)

C. Uso de logística multinomial y simulaciones de Monte Carlo para medir el contagio financiero por Bae, Karolyi y Stulz (2001)

En este trabajo, se propone un nuevo enfoque para el estudio de contagio. El supuesto clave del enfoque es que el contagio es un fenómeno no lineal: si hay contagio, los pequeños choques en las utilidades se propagan de manera diferente de los grandes choques. Este estudio, se centra en investigar la propagación de los grandes choques en las utilidades dentro de las regiones y entre las regiones. Tal enfoque se enfrenta a dos problemas. En primer lugar, se centra en grandes choques en las utilidades, por definición, disminuye el tamaño de la muestra y limita el alcance.

Por lo que, se han centrado en cargos de co-incidencia de rendimientos extremos en lugar de en correlaciones de rendimientos extremos conjuntos. Este enfoque de modelado emplea el enfoque de regresión de la logística multinomial. Además, se emplearon simulaciones de Monte Carlo para calibrar los resultados con diferentes escenarios de acuerdo a lo que uno podría encontrar si los rendimientos satisfechos a multivariante Normal, t de Student, y hasta distribuciones GARCH. Algunos de los resultados encontrados son demasiados casos en los que se producen grandes rendimientos negativos en la mayoría de los países de una región, en particular para América Latina. Además, se encontró que el número de grandes resultados negativos en una región es más útil para predecir el número de grandes rendimientos negativos en otra región que si los rendimientos de las dos regiones se distribuyen normal multivariante, t de Student o GARCH. También se encontró que el número de apariciones conjuntas de rendimientos extremos dentro de una región puede explicarse por la volatilidad condicional regional, el nivel de las tasas de interés, y los tipos de cambio.

En conclusión, se obtuvieron los siguientes resultados: el contagio es más importante en América Latina que en Asia, el contagio de América Latina con otras regiones del mundo es

más importante que el contagio de Asia, los E.U.A. están aislados en gran parte del contagio de Asia y, el contagio es condicionado a la información previa. (Bae, Karolyi y Stulz, 2001).

La literatura encontrada sobre la medición del contagio financiero, puede rescatarse el empleo de los índices bursátiles como variables representativas y descriptivas de la economía de un país. Así también el empleo de modelos de segunda generación como herramientas capaces de cuantificar la existencia del efecto contagio.

Conclusiones

El contagio financiero es un término relativamente nuevo, y por tanto, no se ha incorporado al debate económico general. Para el propósito de este estudio, se puede decir que el contagio financiero es considerado, pues, como algo atípico, que supera cuanto podía ser razonablemente esperado por los participantes en los mercados y atribuible a los vínculos fundamentales.

Los modelos presentados en la literatura teórica que se enfocan al contagio financiero están basados en los vínculos fundamentales, comportamiento irracional y microestructura de mercado. Los vínculos fundamentales se clasifican en financieros, reales o políticos. Los vínculos financieros involucran inversiones transfronterizas directas e indirectas. Mientras que los vínculos reales comprenden relaciones económicas, como el comercio. Así cuando una cantidad sustancial de comercio bilateral que se produce entre ellos, las crisis económicas de un país pueden ser fácilmente transmitidas a sus socios comerciales. Y hablamos de vínculos políticos, cuando un grupo de países está de acuerdo en formar una unión política, adicional a otro tipo de acuerdos monetarios, como es el caso de la Unión Europea, y puede resultar en una mayor vinculación entre los mercados financieros de los países miembros.

El comportamiento irracional está basado en la asimetría de la información entre los inversores de los diferentes mercados y el comportamiento rebaño, en el cual los inversores desinformados pueden no tener los recursos para adquirir la información y por lo tanto tratan de imitar la acción de los inversores informados.

En la microestructura de mercado no solo se analizan los efectos macroeconómicos como inflación y tasa de interés, sino que considera los efectos de la configuración del mercado, la

asimetría de información, la heterogeneidad de participantes y la racionalidad de obligaciones legales, entre otros. Estos efectos de la microestructura de mercado, a menudo se pierden cuando se utilizan datos de baja frecuencia como los movimientos de los precios diarios o mensuales. Utilizando los datos intradía se puede aliviar algunos de estos problemas.

En la literatura empírica se han clasificado los modelos en primera generación y segunda generación. Los modelos de primera generación presentan ciertas limitantes, ya que sólo funcionan bien cuando las distribuciones asociadas en la estimación son normal multivariadas. Además, estos modelos no son robustos ante la fuerte heterocedasticidad que acompaña a las series financieras. Esto puede llevar a que se concluya que existe contagio en situaciones en las que nada ha cambiado en términos de dependencia.

Los modelos de segunda generación, han propuesto ajustes sobre el coeficiente de correlación tradicional, los cuales tienen en cuenta el incremento de la varianza condicional cuando se calcula la correlación, eliminando el sesgo que existe cuando ésta se incrementa; además, son robustos ante la heterocedasticidad, las variables omitidas o los problemas de endogeneidad y simultaneidad.

En la basta literatura se han podido identificar algunos tipos de contagio, como los que menciona Masson (1998), quien distingue entre derrame financiero y contagio puro. El derrame financiero se asemeja al comportamiento irracional y el contagio puro a los vínculos fundamentales.

Forbes y Rigobon (2000) proponen dos tipos de teorías de contagio: teorías no contingentes y teorías contingentes. La primera asume que los mecanismos de transmisión después de un choque no son significativamente diferentes de los anteriores a la crisis, mientras que la segunda categoría estipula que los mecanismos durante o justo después del choque son significativamente diferentes de los de antes del choque.

Para el desarrollo de este trabajo se hace uso de los modelos de segunda generación, siendo estos lo suficientemente robustos para eliminar sesgos y heterocedasticidad que acompaña a las series financieras. Propuestas más recientes incluyen el uso de cópulas como forma de calcular dependencias y en este sentido estimar el contagio, de una forma más amplia de la que impone la linealidad de un coeficiente de correlación.

Referencias

- Ahluwalia, Pavan. (2000). "Discriminating Contagion: An Alternative Explanation of Contagious Currency Crises in Emerging Markets", Working Paper 00/14, FMI, febrero.
- Bae, Kee-Hong; Karolyi, G. Andrew y Stulz, René M. (2001). "New approach to measuring financial contagion". Ohio State University, Fisher College of Business. *Journal of Economic Geography*. Volume 16, pp. 717-763. Disponible en: <http://rfs.oxfordjournals.org/content/16/3/717.abstract>
- Baig, Taimur y Goldfajn, Ilan. (1999). "Financial market contagion in the Asian crisis, IMF Staff Papers, Vol. XLVI, No. 2, pp. 167-195.
- Becerra, Oscar y Melo, Luis Fernando. (2008). "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones," Borradores de Economía 489, Banco de la Republica de Colombia.
- Boyer, Brian; Gibson, Michael y Loretan, Mico. (1999). "Pitfalls in Test for Changes in Correlations", IFS Discussion Paper, No. 597R, Federal Reserve Board.
- Calvo, S. & Reinhart, C.M. (1996). "Capital Flows to Latin America: Is There Evidence of Contagion Effects? In Private Capital Flows to Emerging Markets After the Mexican Crisis," ed. by Guillermo A. Calvo, Morris Goldstein, and Eduard Hochreiter, Washington: Institute for International Economics, p. 151-71
- Calvo, G.A. Izquierdo, A. & Mejia, L.F. (2004). "On the Empirics of Sudden Stops: The Relevance of Balancesheet Effects," NBER Working Paper No. 10520, Cambridge: National Bureau of Economic Research.
- Calvo, G.A. Izquierdo, A. & Loo-King, R. (2006a). "Relative Price Volatility Under Sudden Stops: The Relevance of Balance Sheet Effects," *Journal of International Economics*, Vol. 69, p. 231–254.
- Calvo, G.A. Izquierdo, A. & Talvi, E. (2006b). "Sudden Stops and Phoenix Miracles in Emerging Markets," *American Economic Review*, Vol. 96, p. 405–410.
- Calvo, G.A. Izquierdo, A. & Mejia, L. (2008). "Systematic Sudden Stops: The Relevance of Balance-sheet Effects and Financial Integration," NBER Working Paper No. 14026, Cambridge: National Bureau of Economic Research.
- Caramazza, Francesco; Ricci, Luca y Salgado, Ranil. (2000). "Trade and Financial Contagion in Currency Crises", Working Paper 00/55, FMI, marzo.
- Chakrabarty, B, y Gaiyan Zhang (2012). "Credit contagion channels: Market microstructure evidence from Lehman Brothers' Bankruptcy". *Financial Management* 41(2), pp. 320-343.

- Chang, R. y Velasco, A. (1998). "Financial Crises in Emerging Markets: A Canonical Model," NBER Working Paper No. 6606.
- Cole, H. y T. Kehoe. (1996). "A self-fulfilling model of Mexico's 1994-1995 debt crisis", *Journal of International Economics*, 41, pp. 309-330.
- Connolly, Robert y F. Albert Wang (2003). "International equity market comovements: Economic fundamentals or contagion?". *Pacific-Basin Finance Journal*, vol. 11, issue 1, pp. 23-43.
- Dornbusch, R.C.; Park, and S. Claessens. (2000). "Contagion: How it Spreads and How it can be Stopped". *World Bank Research Observer*, 15, pp. 177-97.
- Drazen, Allan. (1998). "Political Contagion in Currency Crisis". Working Paper, No.7211, National Bureau of Economic Research, julio.
- Eichengreen, Barry; Andrew K. Rose y Charles Wyplosz. (1996). "Contagious Currency Crises: First Tests". *The Scandinavian Journal of Economics*, vol. 98, nº 4, diciembre, pp. 463-484.
- Fama, Eugene F. (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work.". *Journal of Finance*, Volume 25, Issue 2, Papers and Proceedings of the Twenty-Eight Annual Meeting of the American Finance Association New York, pp. 383-417.
- Flood, Robert y Peter Garber. (1984). "Gold monetization and gold discipline". *Journal of Political Economy*, February.
- Forbes, Kristin y Rigobon, Roberto. (2000). "Contagion in Latin America: Definitions, Measurement, and Policy Implications". Working Papers 7885, National Bureau of Economic Research, Inc.
- Frank, Mark W. (2009). "inequality and growth in the united states: evidence from a new state-level panel of income inequality measures". *Economic Inquiry*. Vol. 47, No. 1, pp. 55-68.
- Froot, K., Scharfstein, D.S. & Stein, J. (1992). "Herd on the Street: Information Inefficiencies in a Market with Short Term Speculation." *Journal of Finance*, Vol. 47, p. 1461-1484.
- Gerlach, Stefan y Smets, Frank. (1995). "Contagious Speculative Attacks". *European Journal of Political Economy*, Vol. XI, No.1, pp. 45-63.
- Glick, Reuven y Andrew K. Rose. (1998). "Contagion and Trade: Why Are Currency Crises Regional?", Working Paper nº 6806, National Bureau of Economic Research, noviembre.
- Goldfajn, I. y R. Valdés. (1997). "Capital flows and the twin crises: the role of liquidity". FMI Working Paper nº 87.
- Goldstein, Morris. (1998). " The Asian Financial Crisis: Causes, Cures and Systemic Implications". Peterson Institute Press: Policy Analyses in International Economics, Peterson Institute for International Economics, number 55, Spring.

- Hilferding, Rudolf. (1910). "Das Finanzkapital", Munich, Willi Weismann Verlag Primera edición en castellano: "El Capital Financiero", Ed. Tecnos, 1963.
- Hirshleifer, David y Teoh, Siew Hong. (2003). "Herd Behaviour and Cascading in Capital Markets: A Review and Synthesis". European Financial Management Association, pp. 25-66.
- Hirshleifer, David y Teoh, Siew Hong. (2009). "Systemic risk, coordination failures, and preparedness externalities: Applications to tax and accounting policy". Journal of Financial Economic Policy, Emerald Group Publishing, vol. 1(2), pp. 128-142.
- Horta, Paulo; Mendes, Carlos y Vieira, Isabel. (2008). "Contagion Effects of the US Subprime Crisis on Developed Countries", Working Paper, No. 2008/08, Centro de Estudos e Formação Avanzada en Gestão y Economía.
- Imen, Gallali Mohamed y Rim, Abidi. (2012). "A Dynamic Analysis of Financial Contagion: The Case of the Subprime Crisis". Journal of Business Studies Quarterly, Vol. 4, No. 2, pp. 11-27. Disponible en: http://jbsq.org/wp-content/uploads/2012/12/Dec_2012_2.pdf
- Jaiswal-Dale, A. y Jithendranathan, T. (2009). "Transmission of shocks from cross-listed markets to the return and volatility of domestic stocks". Journal of Multinational Financial Management, 19, pp. 395-408.
- Kaminsky, G., Lizondo, S. & Reinhart, C. (1998). "Leading Indicators of Currency Crises," Staff Papers, International Monetary Fund, Vol. 45, p. 1-48.
- Kaminsky, G. y Reinhart, C. (1999). "The Twin Crises: The Causes of Banking and Balance-of-Payments Problems," American Economic Review, Vol. 89, p. 473-500.
- Kaminsky, G. y Reinhart, C. (2000). "On Crises, Contagion, and Confusion". Journal of International Economics, Vol. LI, No 1, pp. 145-168.
- King, Mervyn A y Wadhwani, Sushil, (1990). "Transmission of Volatility between Stock Markets". Review of Financial Studies, Society for Financial Studies, vol. 3(1), pp. 5-33.
- Kodres, Laura y Pritsker, Matt. (2002). "A Rational Expectations Model of Financial Contagion". Journal of Finance, Vol. LVII, No. 2, pp. 769-799.
- Kruger, Mark; Osakwe, Patrick N. y Page, Jennifer. (1998). "Fundamentals, Contagion and Currency Crises: An Empirical Analysis". Working Paper 98-10, Bank of Canada, julio.
- Krugman, P. (1997), "Currency Crises", mimeo prepared for NBER conference, Available on www.mit.edu/krugman/www.
- Krugman, P. (1998) "What Happened to Asia? ," Mimeo, MIT, Cambridge, MA
- Krugman, P. (1999). "Balance Sheets, the Transfer Problem, and Financial Crises." Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, mimeo.

- Madhavan, Ananth. (2000). "Market microstructure: A survey". Journal of Financial Markets, Elsevier, vol. 3(3), pages 205-258, August.
- Masson, Paul (1998). "Monsoonal Effects, Spillovers, and Contagion" Working Paper, International Monetary Fund.
- Masson, P. (1999a) "Contagion: Macroeconomic Models with Multiple Equilibria," Journal of International Money and Finance, Vol. 18, p. 587-602
- Masson, P. (1999b) "Contagion: Monsoonal Effects, Spillovers, and Jumps between Multiple Equilibria," in The Asian Financial Crisis: Causes, Contagion and Consequences, ed. by P.R. Agenor, M. Miller, D. Vines, A.A. Weber, Cambridge, UK: Cambridge University Press, p. 265-280
- McKinnon, R. & Pill, H. (1996). "Credible Liberalization and International Capital Flows: The Over borrowing Syndrome," In Financial Deregulation and Integration in East Asia, ed. Takatoshi Ito and Anne Krueger, Chicago: Chicago University press, p. 7-42.
- McNeil, A.J.; Frey, R. y Embrechts, P. (2005). "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools". Princeton University Press.
- Obstfeld, Maurice. (1994). "The Logic of Currency Crises", Working Paper nº 4640, National Bureau of Economic Research, septiembre.
- Rigobon, Roberto (1999). "Identification Through Heteroskedasticity". Mimeo, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.
- Rigobon, Roberto. (2000). "A Simple test for Stability of Linear Models under Heteroskedasticity, Omitted Variable, and Endogenous Variable Problems", Working Paper, Massachusetts Institute of Technology.
- Rigobon, Roberto. (2001). "Contagion: How to Measure it?", Working Paper, No 8118, National Bureau of Economic Research.
- Rigobon, Roberto. (2003). "Identification through Heteroskedasticity", Review of Economics and Statistics, Vol. LXXXIV, No.4, pp. 777-792.
- Rodríguez, Juan Carlos. (2007). "Measuring Financial Contagion: A Copula Approach". Journal of Empirical Finance, Vol. XIV, No. 3, pp. 401-423.
- Sachs, Jeffrey D.; Tornell, Aarón y Velasco, Andrés. (1996): "Financial Crises in Emerging Markets: The Lessons from 1995", Brookings Papers on Economic Activity, nº 1, pp. 147-215.
- Uribe Gil, Jorge Mario. (2011). "Contagio financiero: una metodología para su evaluación mediante coeficientes de dependencia asintótica en Colombia". Lecturas de

Economía ISSN: 0120-2596 ed: Universidad De Antioquia v.75 fasc.n/a pp. 29 – 57.

Disponible en: http://www.sci.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-25962011000200003&lng=es&nrm=iso

Veldkamp, Laura L. (2006). "Information Markets and the Comovement of Asset Prices".
Review of Economic Studies, Wiley Blackwell, vol. 73(3), pp. 823-845.

CAPÍTULO IV

FRACTALES – CÓPULAS: ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA LA MEDICIÓN DE CONTAGIO FINANCIERO

El componente empírico de este trabajo se basa en los adelantos metodológicos de la segunda generación de estudios, expuesta anteriormente en la literatura empírica; más específicamente en los estudios que hacen uso de las cópulas para medir los cambios en las relaciones de dependencia entre distintos mercados. Dentro de los modelos de segunda generación, los últimos estudios se han centrado en los efectos contagio como el detonante de las crisis financieras que están teniendo lugar en los últimos tiempos. El primer desarrollo teórico que trata esta cuestión es el presentado por Gerlach y Smets (1995). En su modelo consideran dos países unidos por el comercio, en el cual, una depreciación de una de las monedas se contagia al otro país a través de diferentes canales: el incremento de la competitividad de las exportaciones del país, que producen un déficit en el comercio del segundo país y una gradual disminución de las reservas internacionales de su banco central; adicionalmente, una reducción en el precio de las importaciones del segundo país que conduce a una disminución del índice de precios al consumo y de la demanda de dinero nacional por parte de los residentes, lo que genera un incentivo para cambiar moneda nacional por moneda extranjera reduciéndose las reservas del banco central.

El propósito de este capítulo es presentar las metodologías Fractales y Cópulas que se utilizarán como método para medir el contagio financiero. Mandelbrot (1982) introduce un modelo que denomina multifractal basado en el movimiento browniano fraccional y los procesos estocásticos multifractales. El movimiento browniano fraccionario es proceso gaussiano obtenido mediante una transformación a través de una integral estocástica del movimiento browniano unidimensional. Desde los últimos 20 años se desarrolla esta novedosa forma de abordar problemas con la complejidad que representan las series financieras. En México, autores como Braun (1994), Schifter (1998) y Talanquer (1999) destacan que muchos fenómenos completamente distintos, como la turbulencia, el clima, el índice de la bolsa, las señales electrónicas, ciertas reacciones químicas y otras más, tienen comportamientos que, vistos desde perspectivas apropiadas, pueden estudiarse con modelos fractales.

El estudio de las cópulas se inició con los trabajos pioneros de Hoeffding (1940, 1947, 1948) y Sklar (1959). Años más tarde, comienzan a aplicarse dentro de la literatura estadística en diversos trabajos como los de Clayton (1978), Schweizer et al. (1981) y Genest et al. (1986). Sin embargo, en economía y finanzas el uso de las cópulas es más reciente, encontrando numerosas investigaciones que ayudan a entender con claridad su funcionamiento y aplicación, como los trabajos Embrechts et al. (2002, 2003a, 2003b, 2006) en los que se presentan ejemplos interesantes de aplicación de la función cópula. En el contexto financiero, también cabe señalar el trabajo de Patton (2006) en el que se introduce el concepto de cópula condicional que tiene una gran relevancia para la modelización de las series financieras. Asimismo, en el ámbito financiero las cópulas permiten modelar las diferentes estructuras de dependencia de un conjunto de factores de riesgos (Días et al., 2010) considerando distribuciones marginales arbitrarias.

A continuación se describen los fractales, sus características, el Conjunto de Mandelbrot y la dimensión fractal, así como, las cópulas y sus propiedades básicas, los diferentes tipos de funciones cópula y la estimación de los parámetros de las mismas.

4.1. Los Fractales: La Geometría de la Naturaleza

La creatividad de la naturaleza se expresa en los procedimientos aparentemente simples e iterativos. Los recientes estudios biológicos muestran que organismos vivos están estructurados de un modo fractal: su metabolismo, respiración, circulación de sangre y otras funciones vitales, son perfeccionadas por estructuras fractales. El organismo humano produce los procesos catalizadores similares a aquéllos de un birreactor. La función de bombeo del corazón que provoca el flujo de sangre como reactor natural, es debida a la estructura fractal del organismo. (Talanquer, 1996)

La geometría fractal supera al paradigma de la geometría euclidiana como medio de representación. Mientras que con la premisa euclidiana no es posible dar respuesta a muchas preguntas sobre fenómenos irregulares tales como la forma de las nubes, de las plantas, las siluetas de las montañas y del perímetro de las costas, sólo es posible representar el orden a través de figuras basadas en cuerpos regulares (conos, cubos, esferas, etc.). Con la geometría fractal es posible representar infinita cantidad de formas irregulares, no lineales, siendo apta

para representar objetos rugosos. Por esta razón, la geometría fractal es el medio idóneo en el estudio de fenómenos caracterizados por la complejidad. Según Campbell (1997), la geometría fractal permite analizar cuatro puntos principales:

1. Provee dimensiones adicionales y más cercanas a la realidad en comparación con la geometría euclidiana.
2. La mayoría de los sistemas complejos son caóticos, y éstos exhiben conductas extrañas asociadas con límites o campos que no pueden ser representados en dimensiones enteras.
3. Los sistemas dinámicos pueden ser representados en series de tiempo y sus dimensiones son importantes si se busca estudiarlos.
4. Los fractales son escalables, esto es, se puede reducir o ampliar su análisis para observar detalles, mientras que las formas básicas se conservan en cada escala.

Los fractales son una rama de la teoría del caos y a su vez de la complejidad debido a sus características. Tienen su origen en una geometría que trata de acercarse más a las formas de la naturaleza, en contraste con la geometría euclidiana, que simplifica la realidad a formas sencillas y exactas. Se diferencia de ésta principalmente en que los fractales presentan mayores características y complejidad a medida que se analizan en partes, ante la simplicidad de los cuerpos geométricos regulares, que se hacen aún más simples al ser analizados en sus partes.

Los fractales no son un concepto nuevo, de hecho, tienen sus raíces más antiguas en 1875 por Henry Smith, cuya investigación fue empleada más tarde en 1883 por Cantor quien diseñó el conjunto de Cantor o polvo de Cantor. Años más tarde, en 1904 Niels Fabian Helge Von Koch creó la curva de Koch y en 1919 Waclaw Sierpinski creó el triángulo de Sierpinski. (Véase Apéndice A. Los Fractales Clásicos).

4.1.1. Definición

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras

naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número no entero. (Mandelbrot, 1977)

Hausdorff (1919) planteó la idea de que los objetos tuviesen más de dos dimensiones pero menos que tres, lo cual dio origen al término dimensión fractal. A partir de ese momento se intentó demostrar que dichos objetos puedan darse en la realidad. En 1982, el mismo Mandelbrot propone la definición que sigue: un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.

Benoît Mandelbrot, considera fractal a aquellos objetos con tamaño y orientación variables y que en cada instante tiene un aspecto similar al anterior.

Sin embargo, se está ante un concepto geométrico para el que aún no existe una definición precisa, ni una teoría única y comúnmente aceptada, razón por la cual es difícil encontrar una definición satisfactoria del concepto fractal, aunque se pueden extraer algunas características fundamentales que de cumplirse una o todas, se podría hablar de un conjunto fractal. Así, un conjunto fractal sería, de acuerdo con Mas, Mach, Trigueros, Claret y Sagués (1996):

- Un conjunto que es suficientemente irregular por no poder ser descrito con el lenguaje geométrico habitual, tanto localmente como globalmente;
- Un conjunto que tiene una estructura fina, es decir, que tiene detalles en cualquier escala en que se le observa;
- Un conjunto que presenta alguna forma de autosemejanza, que puede ser aproximada o estadística; y
- Usualmente, la dimensión fractal es más grande que su dimensión topológica, y no tiene por qué ser entera.

Intentando integrar los aspectos que tienen más relevancia en una gran cantidad de definiciones, se propone la siguiente definición: los fractales son formas, que poseen una irregularidad, expresada en una dimensión no entera, que se mantiene y que es característica a distintas escalas de análisis, cumpliendo así con una de sus cualidades más notables, la autoafinidad, que significa que la parte es semejante al todo. En general los fractales están caracterizados por la presencia de infinito detalle, longitud infinita y la ausencia de suavidad o

diferenciabilidad. Como se observa más adelante los fractales son la geometría adecuada para las formas irregulares de la naturaleza.

4.1.2. Características de los Fractales

Existen, además, algunas características adicionales propias de las estructuras fractales. De este modo, una estructura fractal satisface alguna(s) de las propiedades siguientes (Falconer, 1990):

- Autosimilitud. Existe similitud entre detalles a gran escala y a pequeña escala.
- Complejidad. No se puede representar por medio de la geometría clásica.
- Su dimensión es fraccionaria, es decir, no es entero.
- Una estructura fractal posee alguna clase de autosemejanza, posiblemente estadística.
- El algoritmo que sirve para describir una estructura fractal es muy simple, y posiblemente de carácter recursivo.
- Su dimensión fractal (enunciada por Mandelbrot como la dimensión de Hausdorff-Besicovitch), es mayor a la dimensión topológica.

Autosimilitud

Se dice que una estructura es autosimilar si puede ser cortada arbitrariamente en trozos pequeños, y cada uno de los cuales es una pequeña réplica de la estructura completa (Peitgen, Jürgens & Saupe, 1992). En estricto rigor, el concepto de autosemejanza o autosimilitud se aplica sólo en fractales matemáticos (que surgen de la iteración de fórmulas sencillas pero que llevan a estructuras muy complejas, por ejemplo, Polvo de Cantor, Curva de Peano, Copo de Nieve de Koch, etc.), mientras que en los fractales naturales o físicos (aquellos que se encuentran en la naturaleza, por ejemplo una hoja de helecho, una arborización bronquial, los capilares sanguíneos, etc.) se aplica el concepto de autoafinidad, ya que su fractalidad es solamente estadística y poseen, en consecuencia, un escalamiento anisotrópico (que no tiene las mismas propiedades en todas dimensiones de análisis), lo que no permite que una parte ampliada de una figura mantenga exactamente las características de la figura como un todo (Hinojosa & Chávez, 2001).

Según Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar

ligeramente deformadas (Mandelbrot, 1977). Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

1. Autosimilitud exacta: este es el tipo más restrictivo de autosimilitud, ya que exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo se encuentra en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas.
2. Cuasi-autosimilitud: exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente, Sullivan (1978) definió el concepto de conjunto cuasi-auto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo.
3. Autosimilitud estadística: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo.

Entonces, se dice que hay autosimilitud cuando se cambia de escala en la representación de algún fractal y la imagen que resulta es de gran similitud a la imagen de origen. Por tanto, se puede decir que los fractales son autorecurrentes. Ejemplos de fractales con esta característica son el Copo de nieve de Koch o el Conjunto de Julia.

Autoafinidad

Un objeto fractal se dice que es autoafin cuando permanece invariante bajo una escala de transformación anisotrópica (diferentes escalas en todas las direcciones). A pesar de sus diferencias, en una escala de transformación, las direcciones no son completamente independientes. Si al hacer un *zoom*, uno de los ejes de coordenadas se transforma en un factor $b, x \rightarrow bx$, el resto de los ejes coordenados deben ser reescalados en un factor $ba_i, x_i \rightarrow ba_i x_i$, con el objeto de preservar el conjunto invariante. Los exponentes α, i son llamados exponentes de Hurst y nos indican cuál es el grado de anisotropía del conjunto. (Morales, 2004)

La autoafinidad estadística nos ayuda para describir los procesos que presentan características fractales, al ser ésta propiedad equivalente a la auto-similitud característica de los grafos fractales. Entonces, un proceso estocástico autoafin es un proceso en el que al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso cuyas distribuciones finito-dimensionales sólo difieren de las del proceso original en la escala espacial (Muñoz, 2005):

Definición 4.1: Un proceso estocástico $\{X(t): t \in T\}$ que comienza en el origen (casi seguro) es un proceso autoafin si:

$$\forall a > 0 \exists b > 0 \text{ tal que } \{X(at)\} \cong \{bX(t)\} \forall t: t, at \in T$$

En todo lo que sigue se supone, para eliminar los procesos que no son más que una tendencia, que el proceso es no trivial y, por razones técnicas, que el proceso es estocásticamente continuo, en t para todo $t \in T$. Bajo estas hipótesis, el cambio de escala espacial a , y el cambio de escala temporal b , verifican una relación de tipo exponencial, $b = a^H$ (Lamperti, 1962).

Teorema 4.1: Sea $\{X(t): t \in T\}$ un proceso estocástico autoafin que comienza en el origen (casi seguro), no trivial y estocásticamente continuo (en $t \forall t \in T$). Existe un único $H > 0$, que recibe el nombre de exponente de autoafinidad del proceso, tal que:

$$\forall a > 0 \{X(at)\} \cong \{a^H X(t)\} \forall t: t, at \in T$$

Para hacer explícito el valor de H , se dice que es proceso H -autoafin. “En una función autoafin, en la cual la autoafinidad es determinística, al cambiar la escala temporal se obtiene una función que sólo difiere de la original en la escala espacial y cuyo grafo es el mismo. Sin embargo, al cambiar la escala temporal en un proceso autoafin, en el cual la autoafinidad es estadística, aunque el proceso sólo difiere del original en la escala espacial, los grafos son distintos, es decir tienen el mismo aspecto en un sentido estadístico ya que los incrementos siguen la misma distribución” (Muñoz, 2005).

4.1.3. El Conjunto de Mandelbrot

Los Conjuntos de Julia

Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gaston Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa. Los conjuntos de Julia se definen a través de una función racional definida en el plano complejo Z .

$$z \rightarrow f(z) \rightarrow f(f(z)) \rightarrow \dots$$

Analizando el caso particular de funciones polinómicas de grado mayor que uno. Al aplicar sucesivas veces una función polinómica es muy posible que el resultado tienda a ∞ . Al conjunto de valores de $z \in \mathbb{C}$ que no escapan al infinito mediante esta operación se le denomina conjunto de Julia relleno, y a su frontera, simplemente conjunto de Julia.

Estos conjuntos se representan mediante un algoritmo de tiempo de escape²⁵, en que cada pixel se colorea según el número de iteraciones necesarias para escapar. Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos que no han escapado tras un número grande y prefijado de iteraciones.

Figura 4.1. Conjuntos de Julia (en negro, conjunto de Julia relleno asociado a f_c , $c = \varphi - 1$, donde φ es el número áureo)



Fuente: fractales.org

Posteriormente Mandelbrot a partir de un proceso bastante complicado consiguió componer una figura constituida por todos los conjuntos de Julia mediante una serie de funciones trigonométricas. En conclusión, el conjunto de Mandelbrot se obtiene a partir de números complejos que cumplen una determinada propiedad. Para cada número complejo se tiene que cumplir que sea igual a la raíz de menos uno, de la forma siguiente: $2 + 3i$. Y para comenzar se toma un número aleatorio P y se calcula su cuadrado, a este número obtenido se suma P y entonces se vuelve a elevar al cuadrado y así se continúa infinitamente con dicho proceso:

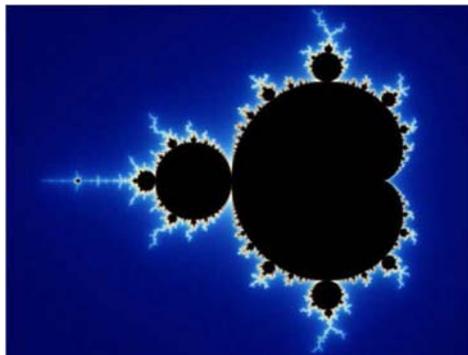
$$z = z^2 + P$$

Ec. 4.1

²⁵ El algoritmo de tiempo de escape puede ser considerado como una medida no euclidiana de la distancia de un punto cualquiera z_0 a la frontera del conjunto. Este algoritmo está basado en el número de iteraciones necesario para determinar si la secuencia iterada por el sistema dinámico tiende a infinito o no. Puede demostrarse estrictamente que, cuando la órbita de cualquier valor $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ excede una región frontera, R siempre diverge hacia el infinito. La forma y el tamaño mínimo de la región R son, por supuesto, diferentes para cada fórmula fractal. La secuencia iterada es interrumpida tan pronto como z_n rebasa la región frontera R , entonces el valor de coloreado para el algoritmo de tiempo de escape es simplemente la longitud de la secuencia, esto es n .

La familia de conjuntos de Julia $\{f_c\}$, asociadas a la reiteración de funciones de la forma $f_c(z) = z^2 + c$ presenta conjuntos de una variedad sorprendente. Dicha familia tiene especial relevancia al quedar parametrizada en un mapa de fractales, popularizado en los años 1980 llamado conjunto de Mandelbrot. Este conjunto representa un mapa en que cada pixel, correspondiente a un valor del parámetro $c \in \mathcal{C}$, se colorea de modo que refleje una propiedad básica del conjunto de Julia asociado a $\{f_c\}$. En concreto, $c \in M$ si el conjunto de Julia asociado a $\{f_c\}$ es conexo.

Figura 4.2 El Conjunto de Mandelbrot



Fuente: fractales.org

El conjunto de Mandelbrot, que es probablemente la imagen fractal más conocida y asociada con el término fractal y cuya función compleja es la siguiente: $f_c(z) = z^2 + c$. Donde si f_c^n es la n -ésima iteración de $\{f_c\}$, la figura mostrada se obtiene al pintar de colores de acuerdo a las velocidades de escape, los complejos c para los cuales la sucesión, $\{f_c^n(0)\}_n$ diverge al infinito (Romero, 1992).

4.1.4. Teoría del Caos

Se acepta la premisa de Diebols (1999) y Makridakis (1998), quienes sostienen que para investigar el comportamiento de un fenómeno complejo, es obligado utilizar modelos de sistemas dinámicos no lineales y complejos.

En la actualidad, desde los años 60 del siglo pasado, se cuentan con dos grandes apoyos en la investigación: la teoría de sistemas dinámicos no lineales y el desarrollo de las

computadoras que hacen posible el manejo de miles y millones de datos necesarios para la experimentación y modelación (Rojas, 1999).

La base formal de la teoría del caos se inicia con Edward Lorenz (meteorólogo), quién publicó en 1963 *Deterministic Nonperiodic Flow* sobre el comportamiento no lineal de un sistema de tres ecuaciones correspondiente a un modelo simplificado utilizado para predecir las condiciones climáticas. A partir de Lorenz, se inician estudios sistemáticos en diversos campos de la ciencia con el concepto del caos (Petters, 1996).

A diferencia de lo que muchas personas piensan, la teoría del caos tiene que ver con una revalorización del orden, es decir, una nueva concepción de la naturaleza, que trata con términos deterministas y aleatorios, y en pocas palabras menciona que el orden y el caos coexisten. Es decir que muchos de los fenómenos en la naturaleza son deterministas en lo general y aleatorios en lo particular, pero siguen algunos patrones que permiten modelarlos, en algunos casos (Coles, 2006). Además, contrariamente a lo que podría esperarse, al aumentar la cantidad de información disponible, disminuye la dificultad de conocer el resultado futuro del sistema (Monroy, 1999 y Sametband, 1997).

La teoría del caos permite superar la visión de linealidad que predomina en los modelos que estudian el comportamiento de los mercados con resultados limitados. Sin embargo, al enfocar mercados como sistemas dinámicos no lineales, permite captar las respuestas no proporcionales de una variable dependiente ante cambios de la variable independiente. En sistemas no lineales, cada estado está determinado por sus estados anteriores (iteración). Un pequeño cambio en valores iniciales tiene grandes efectos en el resultado del sistema. (Chorafas ,1999)

Un sistema dinámico se considera caótico si presenta un comportamiento aperiódico, resultado de un modelo totalmente determinista y que es muy sensible a las condiciones iniciales. Además son sistemas adaptativos y que se retroalimentan. Son sistemas también caracterizados por su alta complejidad (Petters, 1996).

Para comprender la linealidad y no linealidad del comportamiento de los índices de mercados financieros, se requiere de un contexto geométrico: la linealidad se refiere a los

objetos geométricos euclidianos tales como el punto, las líneas, planos, etc. (Mandelbrot, 1997). En tanto que la no linealidad se refiere a aquellos objetos que varían en su forma si se observan con diferentes escalas, como el caso de una esfera, por ejemplo, que parece ser plana a poca distancia pero se percibe como un punto desde lejos (Talanquer, 1996). Los modelos fractales permiten estudiar los fenómenos no lineales.

Sin duda los mercados financieros son sistemas dinámicos complejos, que bien podrían ser modelados por las técnicas del caos, son también sistemas que evolucionan y se adaptan para lograr lo que cualquier estructura pretende, la sobrevivencia (Petters, 1996). Es por ello que la forma determinista y frecuentista que se ha adoptado para medir estos sistemas parece abrir el camino a un enfoque un tanto más real a través de la modelación de esta complejidad.

Así pues la Teoría del Caos permite alejar los supuestos de linealidad y adentrarse un poco más en la complejidad de la naturaleza, además menciona que ése caos natural puede presentar un orden, o que más bien se ha definido orden en base a antiguos conceptos y formas de pensar que se han heredado de los antiguos griegos, es decir que se trata de simplificar todo a formas exactas y a verdades simples, sin embargo como decía el mismo Mandelbrot: *“las montañas no son conos, ni las nubes esferas”*. La realidad y la naturaleza son complejas, es hora de tratar de entender esa complejidad.

Por otra parte, los mercados de capitales en el mundo siempre se han comportado de manera impredecible. Al parecer, cada vez es menor la relación entre el valor de las acciones de una compañía y su desempeño real, a tal punto que los mercados se han convertido en un juego fuera de control de los participantes. De ellos emergen patrones inesperados, es por esto que la teoría del caos viene siendo estudiada por quienes operan en las bolsas de valores, por su capacidad para analizar el valor de una sola variable que evoluciona a lo largo del tiempo y promete ayudar a descubrir un orden dentro del caos de los mercados (Braun, 1998).

Teóricos como Lorenz, Braun, Schroeder y otros, señalan las siguientes características que definen a los sistemas caóticos (Gálvez, 2005):

1. Son deterministas en tanto que existe alguna ecuación que gobierna su conducta.

2. Son altamente sensibles a las condiciones iniciales, ya que un pequeño cambio en el punto de inicio puede causar un resultado enormemente diferente.
3. Parecen desordenados y fortuitos, pero no lo son porque existe implícito un cierto patrón y sentido de orden.

Precisamente esta sensibilidad respecto de las condiciones iniciales es la característica más importante de los fenómenos caóticos. Se percibió, desde el siglo pasado, como causante del azar en ciertos fenómenos físicos. Pero en aquel momento, los estudios de dinámica estaban más orientados hacia los sistemas estables, esto es, los sistemas que en pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales no producen más que pequeñas modificaciones en la evolución futura (Gordon y Greenspan, 1988).

4.1.5. La Teoría del Caos y los Atractores

Con el rompimiento de los paradigmas lineales en los mercados financieros, nuevas alternativas como el caos encontraron seguidores, siendo uno de los pioneros en el tema Mandelbrot, quien inicialmente se apasionó por el estudio de los procesos económicos al estudiar las fluctuaciones en los precios del algodón en los años 60, indicando así las posibles fallas de las teorías de los mercados eficientes, sin embargo para entonces los postulados de esta teoría eran ampliamente aceptados por la comunidad científica de la época, situación por la cual Mandelbrot dirigió sus esfuerzos a otra de sus grandes pasiones, encontrando así una formalización a la geometría de la naturaleza a través de los fractales.

Entonces, lo que interesa conocer es si este mercado tiene algún atractor, es decir, si existen algunas pautas o fórmulas que permitan determinar el estado final al que son atraídas las cotizaciones. En realidad todas las teorías de análisis, son los primeros pasos en la búsqueda de un atractor que nos permita conocer, con antelación, el estado final de las cotizaciones.

Un atractor es una condición que tiende a hacer confluir el movimiento hacia él. En un movimiento aparentemente caótico, a veces se logra encontrar pautas o fórmulas que permitan predecir el estado final al que es atraído el movimiento; esta ecuación es el atractor. Se puede

decir que todos los movimientos caóticos tienen sus atractores, pero la complejidad de los mismos hace imposible descubrirlos en la mayoría de los casos.

Los últimos estudios sobre la teoría del caos en los mercados financieros, llevan a la determinación de cuatro tipos de atractores:

1. El atractor puntual se presenta, según la posición las fuerzas de la oferta y de la demanda, en un punto matemáticamente equidistante entre ambos. Es un atractor lineal, que constituye el punto de equilibrio entre ambas fuerzas.
2. El atractor cíclico responde a la naturaleza cíclica de los mercados financieros. La teoría de las ondas de Elliot se expresa a través de pautas, es una aproximación elemental en este sentido, es el primer paso hacia el atractor cíclico.
3. El atractor teórico es un paso más en la abstracción del sistema y toma su nombre de la figura geométrica formada por la oferta y demanda de mercado.
4. El atractor extraño es el caos propiamente dicho, pues es la suma de factores pequeños, diversos y variables que en última instancia determina el sentimiento de los inversores sobre los precios de las acciones. Este atractor se estudia en economía dentro del campo de las expectativas racionales, nueva modalidad de análisis bursátil que no considera el análisis fundamental ni el análisis técnico y se concentra sólo en el agente activo del mercado: los inversionistas.

4.1.6. Los Fractales y la Teoría del Caos

Los fractales aparecen como el atractor extraño en los sistemas caóticos. Pero no deben confundirse los fractales con el caos. Las palabras claves para el caos son dependencia sensible y no predictibilidad. Las palabras claves para el fractales son: autosimilitud e invariancia a escala.

Una similitud importante entre caos y fractales es que ambos son sistemas no lineales y de iteración. Estos sistemas dinámicos no lineales tienen un elemento de memoria. En un sistema dinámico, el elemento temporal juega un papel crucial. Respecto a los mercados financieros, es este elemento de memoria que permite tener en cuenta los eventos pasados.

Una conclusión que resulta del estudio de la ecuación logística es que las bifurcaciones periódicas son una de las rutas hacia el caos, dicho mecanismo es válido para cualquier ecuación que tenga un solo valor K . La universalidad de este proceso se reproduce sin importar el objeto de estudio o la descripción del modelo teórico que se estudie. Más aún, la dinámica de fenómenos que transitan de la estabilidad al caos por el mecanismo de la bifurcación se realiza de una manera que puede evaluarse cuantitativamente.

Otra conclusión que se deriva del estudio del caos fue descrita por Henri Poincaré en 1908, al sostener que una causa muy pequeña determina un efecto notable que no se puede ver y que esto se debe al azar.

4.1.7. El Movimiento Browniano Fraccionario

El movimiento browniano es uno de los modelos más utilizados para describir la evolución de una serie financiera, considerando a la serie como una realización de este proceso estocástico.

Definición 4.2: El movimiento browniano estándar es un proceso estocástico con trayectorias continuas que satisface las siguientes propiedades (Venegas, 2008):

1. $B(0) = 0$
2. Los incrementos $B(t) - B(s)$ para $t > s$ son independientes del comportamiento pasado, independiente de $B(u)$ con $0 \leq u \leq s$.
3. Los incrementos $B(t) - B(s)$ para $t > s$ se distribuyen normalmente con media 0 y varianza $(t - s)$.

El movimiento browniano, que trabaja con los logaritmos de los precios, se caracteriza por los siguientes supuestos (Venegas, 2008):

- Incrementos estacionarios e independientes.
- La varianza en intervalos de duración constante está equidistribuida.
- La distribución de sus incrementos.

Aun cuando el movimiento browniano es uno de los modelos más utilizados en la descripción del comportamiento de series financieras, éstas no necesariamente se ajustan a los supuestos que implica, ya que los mercados no siempre son normales, completos, eficientes y libres de arbitraje. De acuerdo con la evidencia presentada por diversos autores, los supuestos que generalmente no se cumplen del movimiento browniano son los siguientes (Domínguez, Ardila y Moreno, 2010):

- No estacionalidad. Volatilidad de las series no constante en el tiempo.
- Dependencia a largo plazo. En general los datos financieros presentan dependencia en el tiempo.
- Colas pesadas. Las distribuciones de los rendimientos o variaciones de las series financieras son leptocúrticas.
- Discontinuidad en el comportamiento. La sensibilidad de los datos financieros a información externa, permite la presencia de saltos.

Como alternativa para superar las debilidades al modelar asumiendo los supuestos que implica el movimiento geométrico browniano, Mandelbrot (1997) propone un modelo denominado multifractal basado en el movimiento browniano fraccional y los procesos estocásticos multifractales, específicamente en su trabajo lo hizo con los precios del algodón (Mandelbrot, 1982), y fueron los movimientos brownianos fraccionarios y los movimientos L-estables o también llamados procesos estables de Pareto-Lévy.

El movimiento browniano fraccionario es la generalización del movimiento browniano obtenida cuando se suprime la independencia de sus incrementos y se mantiene la normalidad de la distribución que siguen, de forma que la varianza en vez de ser proporcional al incremento temporal h , lo es a una potencia suya h^{2H} , donde el exponente H , $0 < H < 1$, recibe el nombre de índice del proceso (Muñoz, 2005).

Definición 4.3: Un movimiento browniano fraccionario de índice H , $0 < H < 1$, es un proceso estocástico $\{B_H(t): t \geq 0\}$ en algún espacio de probabilidad, tal que (Sierra, 2007):

1. El proceso comienza en el origen, es decir, con probabilidad 1, $B_H(t)$ es continuo y $B_H(t) = 0$.
2. $E[B_H(t)] = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$
3. La covarianza del proceso para dos instantes $s, t \in \mathbb{R}$ está dada por la expresión:

$$C_H(t,s) = E[B_H(s)B_H(t)] = \frac{1}{2}[|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}]$$

4. $\forall t > 0, \forall h > 0$ el incremento $B_H(t+h) - B_H(t)$ se distribuye $N(0, \sigma^2 h^{2H})$. Para $\sigma^2 = 1$ se dice que es un movimiento browniano fraccionario estándar.

El índice H es llamado parámetro de Hurst en honor del científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978); se trata de una medida de independencia de las series de tiempo y una forma de caracterizar series fractales. Cuando el índice H del proceso toma el valor de $\frac{1}{2}$ el proceso coincide con el movimiento browniano clásico, único caso con incrementos independientes. En el resto de los casos, los incrementos son dependientes y según el tipo de dependencia se clasifican en: persistentes cuando $\frac{1}{2} < H < 1$ y anti-persistentes cuando $0 < H < \frac{1}{2}$.

El movimiento browniano fraccional presenta varianza cíclica no periódica en todas las escalas temporales y tiene en cuenta la dependencia estadística a largo plazo, además de tener dos características típicas de los conjuntos fractales que le confieren una mayor variabilidad de comportamientos (Sierra, 2007):

- La autoafinidad o autosimilitud estadística. Al reducir la escala temporal para representar trayectorias del proceso, la apariencia de la serie es semejante a la de la serie en la escala original.
- Valor no entero de la dimensión. Al caracterizar el proceso la dimensión está relacionada con las variaciones que se experimentan entre puntos próximos, por lo que cuanto mayor es el valor de la dimensión mayor será la variación.

De acuerdo con esto, si una serie temporal tiene la propiedad de una alta dependencia, su modelación debería hacerse mediante movimientos brownianos fraccionales que, a diferencia del movimiento browniano tradicional, incorpora las características de independencia o dependencia propias de las series financieras, partiendo de los mismos supuestos de los modelos desarrollados con el movimiento browniano tradicional.

Otra característica fractal que el movimiento browniano fraccionario comparte con el clásico es la dimensión no entera de su gráfica, dado que siendo $\{B_H(t): t \geq 0\}$ un movimiento browniano fraccionario de índice H . La gráfica en el intervalo $[0, 1]$, casi seguro, tiene

dimensión fractal de $D = 2 - H$ ($1 < D < 2$) (Falconer, 1990). En estos procesos el índice H es conocido como el exponente de Hurst (Peters, 1996).

4.1.8. Coeficiente de Hurst y Análisis R/S

Hurst derivó un método de su propia invención cuya principal relevancia es que permite estimar el factor de escala H asociado al ruido de un movimiento browniano fraccional a partir de una muestra temporal del mismo. Es por ello, que el factor de escala H , ha pasado a denominarse exponente de Hurst. La estimación del exponente de Hurst se deriva del análisis Rango Reescalado (R/S) que trata de estimar cual es el rango estandarizado de variación para distintos intervalos de tiempo de una serie temporal (Hurst, 1951).

$$\left(\frac{R}{S}\right) n = cnH \quad \text{Ec. 4.2}$$

Donde $\left(\frac{R}{S}\right)$ es el Rango reescalado, c constante de proporcionalidad, n número de datos por intervalo y H Coeficiente de Hurst.

El rango reescalado es un estadístico con media cero, expresado en términos de desviación estándar, cuyo análisis es de tipo no paramétrico. El punto clave en este análisis es la determinación del coeficiente de Hurst. A continuación se describe brevemente la metodología utilizada para su cálculo:

1. Dada una serie temporal $\{x_t\}$ estacionaria en media de tamaño N , se divide el periodo temporal N en A subperiodos contiguos de tamaño p de forma que $A \cdot p = N$ identificando a cada submuestra de tamaño p , como l_a , con $a = 1 \dots A$ y a sus elementos como $N_{k,a} \in l_a$ con $a = 1 \dots A$, $k = 1 \dots p$.

2. Se calcula el valor medio para cada bloque l_a :

$$e_a = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p N_{k,a} \quad \text{Ec. 4.3}$$

3. Se construye una nueva serie temporal a partir de la distancia acumulada a la media para cada bloque l_a es decir:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a); k = 1 \dots p \quad \text{Ec. 4.4}$$

4. Se define el Rango como la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la serie $X_{k,a}$ para cada bloque l_a :

$$R_{l_a} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}); 1 \leq k \leq p \quad \text{Ec. 4.5}$$

5. Se reescala (estandariza) el rango por la desviación típica muestral, calculada para cada bloque l_a :

$$\frac{R_{l_a}}{S_{l_a}}; \text{ con } S_{l_a} = \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (N_{k,a} - e_a)^2 \right)^{1/2} \quad \text{Ec. 4.6}$$

6. De esta forma se obtiene A rangos normalizados (R/S), cuyo valor medio para un tamaño p será:

$$(R/S)_p = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \left(\frac{R_{l_a}}{S_{l_a}} \right) \quad \text{Ec. 4.7}$$

A partir de este rango estandarizado puede estimarse el exponente de Hurst asociado a la serie temporal. Para ello se hace uso de la relación entre el R/S y el exponente de Hurst que vendrá dada por la siguiente ley de potencia o de escala (Mandelbrot, 1997):

$$(R/S)_p \propto p^H \quad \text{Ec. 4.8}$$

Con el propósito de obtener una estimación robusta del exponente de Hurst se repiten las etapas 1 a 6 para distintos valores del entero p (por conveniencia $10 \leq p \leq N/2$). De esta forma se tendrá un $(R/S)_p$ para cada p , y la estimación del exponente de Hurst puede obtenerse a partir de la regresión logarítmica por mínimos cuadrados ordinarios de la ley de escala. En esta ecuación c representa una constante de proporcionalidad relacionada con el factor de escala.

$$\ln \left(\frac{R}{S} \right) = \ln(c) + H \ln(p) \quad \text{Ec. 4.9}$$

En particular, cabría preguntarse si la serie original x , es efectivamente un ruido blanco ($\hat{H} = 0.5$), cuestión que resultará especialmente relevante para el análisis de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a la serie temporal. Para analizar el ruido blanco gaussiano se utiliza el siguiente estadístico para el contraste de significación:

$$\frac{\hat{H} - E(\hat{H})}{\text{var}(E(\hat{H}))} \sim N(0,1) \quad \text{Ec. 4.10}$$

Características del coeficiente Hurst

El valor del coeficiente Hurst estará en el intervalo $[0,1]$, y según el valor que tome el coeficiente en el intervalo es posible determinar algunas características particulares del proceso al que corresponde dicho coeficiente.

1. Si $0 \leq H < \frac{1}{2}$ se tienen series antipersistentes, a las que con frecuencia se les denomina con reversión a la media. Es decir, si la serie ha estado arriba de un determinado valor que hace las veces de media de largo plazo en el período anterior, es más probable que esté abajo en el período siguiente y viceversa. Se considera que esta serie tiene ruido rosa, que es común en la naturaleza y está relacionado con procesos de relajación (equilibrio dinámico) y turbulencia.
2. Si $H = \frac{1}{2}$ los datos son independientes y se considera que no hay memoria. Se trata de una serie aleatoria que cumple con todas las características del movimiento browniano estándar y presenta ruido blanco.
3. Si $\frac{1}{2} \leq H \leq 1$ la serie es persistente, refuerza la tendencia. Es decir, si la serie estaba arriba (o abajo) de su media de largo plazo en el periodo anterior, lo más probable es que continúe arriba (o abajo) en el periodo siguiente, por lo que se considera que la serie presenta ruido negro y esto aparece generalmente en procesos cíclicos de largo plazo.
4. Si $H = 1$ la serie es determinística. En este intervalo el color de ruido es negro y aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como el nivel de los ríos, el número de manchas solares, entre otros.

Para analizar una serie de tiempo se considera recomendable primero establecer el valor del coeficiente Hurst, el cual permitirá conocer si se cumple con el supuesto de independencia de los modelos tradicionales. Es decir, si el valor del coeficiente Hurst es aproximadamente 0.5, indica un movimiento browniano estándar y la serie no tiene memoria de largo plazo; en caso contrario, cualquier evento futuro se verá afectado por los datos anteriores.

4.1.9. La Dimensión Fractal

Uno de los procedimientos para caracterizar e incluso para clasificar los objetos fractales consiste en atribuir a cada uno de ellos una cantidad numérica, la dimensión fractal. Por medio de este índice matemático se puede cuantificar la geometría de los objetos o de los fenómenos fractales. Existen varios métodos para calcular la dimensión fractal, tales como el exponente de Hurst, Conteo de Cajas, Ondoletas, entre otros.

Una de las interpretaciones de la dimensión, posiblemente la más natural, se relaciona con la capacidad de los objetos para ocupar el espacio euclidiano en el que se encuentran ubicados. Es decir, la dimensión ayuda en la determinación del contenido o medida de un conjunto, en particular de los conjuntos fractales.

Así, cuantificar fractales es definir, por algún procedimiento, la proporción del espacio físico que es llenado por ellos. Un objeto fractal llena su espacio de una manera dispareja, y además su dimensión es producto de todos los factores que influyen en el sistema que lo produce, debido a su naturaleza compleja. Por lo anterior, la dimensión fractal de una curva provee una manera de medir qué tan rugosa es una curva. En la topología, se considera que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. Sin embargo, puede haber una curva rugosa que recorra una superficie que casi llene la superficie en la que se encuentra. Se puede, entonces, pensar en la rugosidad como un incremento en la dimensión; por lo que una curva rugosa tendría una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tendría entre 2 y 3 (Villazcan y Torres, 2007).

Entonces, la dimensión fractal es un número entre 1 y 2. Se reconoce que no es 1, ya que sino se estaría frente a una unidimensión euclidiana clásica. Y se sabe que no es 2, porque no se trata de cuerpos que cubran en su totalidad el plano. En definitiva, la dimensión fractal por lo general es mayor o igual que la dimensión topológica.

La medición de formas fractales han obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido. Cuando se quiere medir una línea fractal con una unidad, o con un instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escapan a la sensibilidad de la regla o el instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la longitud de la línea.

Como la longitud de la línea fractal depende de la longitud de instrumento, o de la unidad de medida que se tome, la noción de longitud en estos casos, carece de sentido. Para ello se ha ideado otro concepto: el de dimensión fractal. Que en el caso de las líneas fractales nos va

a indicar de qué forma o en qué medida una línea fractal llena una porción de plano. Y que además sea una generalización de la dimensión euclidiana.

Se entiende que en la geometría euclidiana podemos tener objetos con dimensión 1, 2 ó 3. Para que sea coherente con lo dicho anteriormente, una línea fractal tiene que tener dimensión menor que dos (no llena toda la porción de plano). Y en los casos del conjunto de Cantor y de la curva de Koch menor que uno y mayor que uno, respectivamente. En el primer caso no llena todo el segmento de recta, y en el segundo es más largo. Sin embargo el caso del conjunto de Cantor es excepcional y no se puede considerar propiamente un fractal, en general lo que sucede es que la longitud de la curva fractal es superior al del segmento de recta que lo genera, y por tanto en general la dimensión fractal será un número comprendido entre uno y dos.

Como precedente a la dimensión fractal se encuentra la dimensión definida por Felix Hausdorff en 1919, perfeccionada más tarde por Besicovitch. La dimensión Hausdorff $H(X)$ de un objeto fractal X mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L .

Si se parte de un segmento de longitud 1, y posteriormente, se parte en segmentos de longitud L se obtienen $N(L)$ partes, de manera que $N(L)L = 1$ cualquiera que sea L .

Si el objeto inicial es un cuadrado de superficie 1, y se compara con unidades cuadradas, cuyo lado tenga de longitud L , el número de unidades que es necesario para recubrirlo $N(L)$, cumple $N(L)L^2 = 1$ cualquiera que sea L .

Si, por último, el objeto que se toma es tridimensional, como, por ejemplo, un cubo de volumen 1, y se mide en relación con unidades que sean cubos de arista L , entonces se cumple que $N(L)L^3 = 1$ cualquiera que sea L .

De todo esto, se puede generalizar que la dimensión fractal de un objeto geométrico es D si $N(L)L^D = 1$ donde $N(L)$ es el número de objetos elementales, o de unidades, de tamaño L que recubren, o que completan, el objeto.

De donde, despejando D , se obtiene

$$D = \frac{\log N(L)}{\log\left(\frac{1}{L}\right)} \quad \text{Ec. 4.11}$$

De aquí se puede deducir las dimensiones del conjunto de Cantor como:

$$D = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309 \quad \text{Ec. 4.12}$$

Y la de la curva de Koch como:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618 \quad \text{Ec. 4.13}$$

Sin embargo se suele aceptar, e incluso definir, que un objeto es fractal solo cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión euclidiana: $D > DE$. Así por ejemplo no se considera fractal el conjunto de Cantor.

Anteriormente se ha entregado una definición matemática de la dimensión fractal. No obstante, en la práctica generalmente resulta imposible la realización del límite δ , debido a la inexistencia, en la mayoría de los casos, de una expresión analítica que proporcione $N(\delta)$ en función de δ , situación que impide el cálculo teórico de dicho límite. A continuación se presenta uno de los métodos comúnmente empleados para la obtención de dicho límite.

La Dimensión Fractal y el Coeficiente de Hurst

A partir del exponente Hurst (H) se obtiene la dimensión fractal como: $D = 2 - H$. En particular esta forma de establecer la dimensión permite que en una gráfica de retornos de cualquier serie pueda visualizarse la dimensión fractal, lo que dará una idea del valor del coeficiente Hurst.

El movimiento browniano tiene una dimensión fractal de 1.5, es decir $H = 0.5$. Si $H > 0.5$ la dimensión fractal disminuirá y la representación gráfica de la serie asociada tenderá a acercarse a una recta, en el caso contrario si $H < 0.5$ la dimensión fractal aumentará y la representación gráfica se acercará a una superficie.

La Dimensión Fractal y el Conteo de Cajas

El método por Conteo de Cajas surge cuando al estudiar el comportamiento del número mínimo de conjuntos de diámetro δ necesarios para recubrir a un conjunto se observa que para valores decrecientes de δ este número crece proporcionalmente a δ^{-D} .

De forma general, si se tiene que (X, d) es un espacio métrico y $F \subseteq X$ un compacto no vacío en dicho espacio, y denotando por $N(\delta, F)$ el número de conjuntos de diámetro δ necesarios para recubrir a F , se define la dimensión por recuento de cajas como:

$$dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \quad \text{Ec. 4.14}$$

En el caso particular de un subconjunto plano (cuya representación se puede contener en un espacio 2 dimensional), se obtiene una definición de dimensión equivalente si se considera que $N(\delta, F)$ es el número de cuadrados de una δ -malla que intersecan al conjunto, lo que hace que el procedimiento para el cálculo empírico de la dimensión comience por su representación gráfica en un rectángulo. A continuación se consideran sucesiones de la forma $S_k = \frac{B}{2^k}$ y se toman los valores de δ comprendidos dentro de un rango de escalas que queda determinado al elegir unos valores mínimos y máximos para k .

Para cada uno de estos valores se divide el rectángulo en cajas de lado δ formando una δ -malla sobre la que se cuenta el número de cajas que cortan al conjunto, $N(\delta, F)$. Si este conjunto tiene dimensión D , cuando δ tiende a cero el número de cajas de la δ -malla que cortan al conjunto crece proporcionalmente a δ^{-D} , es decir, $N(\delta, F) \approx c\delta^{-D}$, al tomar logaritmos en esta expresión:

$$\ln(N(\delta, F)) \approx \ln(c) - D \ln(\delta) \quad \text{Ec. 4.15}$$

Se puede entonces obtener la dimensión como la pendiente de la recta que aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los pares $(\ln(\delta), \ln(N(\delta, F)))$.

4.1.10. Espectro Multifractal

Considérese una proporción de cajas no vacías en una δ -partición de Ω que tienen masa en el rango de $R^D(\delta^{\alpha+d\alpha}, \delta^\alpha)$. Esta proporción está dada por:

$$\frac{\text{Número de cajas con masa en } (\delta^{\alpha+d\alpha}, \delta^\alpha)}{\text{Número de cajas no vacías}} \quad \text{Ec. 4.16}$$

Donde el denominador es δ^D y D es la dimensión de conjunto donde la masa se encuentra distribuida (Peitgen et al., 1992). Se define una medida multifractal como aquella para la cual el numerador obedece: *Número de cajas con masa en* $(\delta^{\alpha+d\alpha}, \delta^\alpha) \sim \delta^{f(\alpha)}$. El exponente varía con α y se conoce como el espectro multifractal.

Aunque todavía no existe una definición estándar de lo que es un multifractal, podría decirse que una medida multifractal es aquella que tiene una curva $f(\alpha)$ bien definida. La curva $f(\alpha)$ puede entenderse en términos de la noción familiar de una densidad, aunque las medidas multifractales en sí mismas son demasiado singulares para tener densidades.

A continuación se presentan algunos de los métodos para la estimación del espectro $f(\alpha)$ de una medida multifractal.

Método del análisis multifractal de fluctuaciones

La descripción de estas metodologías está basada en el trabajo realizado por Kantelhart y otros, en torno a las propiedades de escalamiento de registros históricos de las series de caudal (Kantelhardt et al., 2003; Koscielny-Bunde et al., 2006). El objetivo fundamental de estas metodologías es la detección de correlaciones temporales de largo plazo y comportamiento multifractal en presencia de tendencias para series temporales.

En los últimos años se han desarrollado métodos como el análisis de fluctuaciones sin tendencias, para detectar correlaciones de largo plazo en presencia de tendencias. Sin embargo, para poder caracterizar la compleja dinámica involucrada, se hace necesario el análisis de todos los momentos estadísticos y así captar completamente la distribución de las fluctuaciones (análisis multifractal).

Sea W_i el registro correspondiente al tiempo i , $i = 1, 2, \dots, N$. La nueva serie, sin tendencias estacionales se genera como:

$$\phi_i = W_i - \bar{W}_i \quad \text{Ec. 4.17}$$

Donde \bar{W}_i corresponde a la media sobre todos los días i . En el análisis de fluctuaciones, se encuentra el perfil:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \phi_i, \quad n=1, 2, \dots, N \quad \text{Ec. 4.18}$$

Y se estudiarán las fluctuaciones del perfil, en una ventana de tiempo de tamaño s . El perfil Z_n se puede considerar como la posición de una caminata aleatoria de n pasos (Koscielny-Bunde et al., 2006).

Análisis multifractal de fluctuaciones (MF-FA)

En el caso análisis multifractal de fluctuaciones se obtienen funciones de fluctuación a partir de los valores del perfil en los extremos de cada segmento v (Kantelhardt et al., 2003; Koscielny-Bunde et al., 2006).

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{v=1}^{N_s} |Z_{vs} - Z_{(v-1)s}|^q \right\}^{1/q} \quad \text{Ec. 4.19}$$

En este caso q puede tomar cualquier valor real excepto el cero. La diferencia de este análisis de fluctuaciones, respecto al análisis estándar radica en la variación de la función de fluctuaciones con q , lo cual es un reflejo del comportamiento multifractal en los registros. En general, la aproximación multifractal se introduce en la función de partición:

$$Z_q(s) = \sum_{v=1}^{N_s} |Z_{vs} - Z_{(v-1)s}|^q \sim s^{\tau(q)} \quad \text{Ec. 4.20}$$

Donde $\tau(q)$ es el exponente de escalamiento de Renyi $\tau: R \rightarrow R$. La ecuación anterior implica:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad \text{Ec. 4.21}$$

Donde

$$h(q) = \frac{[\tau(q)+1]}{q} \quad \text{Ec. 4.22}$$

El exponente $h(q)$ está directamente relacionado con el exponente multifractal de escalamiento clásico, $\tau(q)$. Este exponente es denominado Hurst generalizado, que en el caso de $h(1)$ es idéntico al conocido exponente de Hurst (Mesa & Poveda. 1993).

Finalmente, es posible obtener el espectro de singularidades o multifractal a partir de $\tau(q)$ vía la transformada de Legendre (Mandelbrot, 1989).

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq} = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq} \quad \text{Ec. 4.23}$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) = q[\alpha - h(q)] + 1 \quad \text{Ec. 4.24}$$

Análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencias (MF-DFA)

Es posible identificar diferentes órdenes de MF-DFA, los cuales se caracterizan por la forma en la cual se remueven las tendencias de los datos. En el orden más bajo (MF-DFA1) se determinan, para cada segmento v , el mejor ajuste lineal del perfil, y se identifican las fluctuaciones por medio de la varianza $F^2(v, s)$ del perfil respecto a la línea recta. De esta forma, se elimina la posible influencia de tendencias lineales a escalas mayores a la del segmento. Es importante notar que al eliminar las tendencias en el perfil, se están eliminando en los datos.

En general, en el MF-DFA de orden n , se calculan las varianzas del perfil, respecto al mayor ajuste polinomial de orden n , lo cual elimina la influencia de posibles tendencias de orden n a escalas mayores que el tamaño del segmento. Explícitamente, se ajusta el mejor polinomio $y_v(i)$ al perfil en cada uno de los N_s segmentos v y se determina la varianza

$$F^2(v, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [Z_{(v-1)s+i} - y_v(i)]^2 \quad \text{Ec. 4.25}$$

Finalmente, para estimar la fluctuación media se utiliza:

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{v=1}^{N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad \text{Ec. 4.26}$$

A partir de este punto el procedimiento es similar al utilizado en el MF-FA, donde se estima el exponente de Hurst generalizado a partir de la relación mostrada en la ecuación $F_q(s)$ definida en el análisis de fluctuaciones y, con este y la transformada de Legendre, se hace posible el cálculo del espectro multifractal.

4.1.11. Fractales y los Mercados Financieros

Los ejemplos de la aplicabilidad de los fractales también se han apreciado en fenómenos propios de las ciencias sociales. Por la naturaleza y características de los datos, las

aproximaciones a la descripción fractal de fenómenos sociales se ha iniciado en la economía. La aplicación de los fractales en la volatilidad de precios y cambios de escala en economía la da el mismo Mandelbrot, analizando las variaciones de precios del algodón y determinando las características estacionarias de la serie (Mandelbrot, 1977/1987). Posteriormente ahonda en temas financieros relativos a la variabilidad temporal de precios especulativos en *Fractals and Scaling in Finance* (Mandelbrot, 1997). Importantes aplicaciones fractales en economía se encuentran en una nueva rama denominada Econofísica, que se caracteriza por utilizar herramientas de la Física, en particular, un área específica de ella llamada Física Estadística, obteniendo gran éxito en la explicación del comportamiento colectivo de grandes conglomerados de partículas. Es así que muchos econofísicos han comenzado a trabajar en el mundo de la economía, concretamente en el área de las finanzas, y entre sus herramientas de trabajo buena parte están ligadas a la geometría fractal (Mansilla, 2003; Lacasa & Luque, 2005). Dentro de estas herramientas se encuentra el exponente de Hurst, una técnica para estimar la dimensión fractal en series de tiempo. Empleando esta metodología se busca proponer una alternativa viable de investigación que ayude a explicar el comportamiento de las series que muestran ser complejas, dependientes y variantes.

4.2. Cópulas

Siguiendo a Nelsen (2006), de manera informal se dice que las cópulas son funciones que juntan funciones de distribución multivariadas a sus funciones de distribución marginales univariadas, las cuales son uniformes. Como ejemplo, se consideran dos variables aleatorias X e Y con funciones de distribución $F(x) = P[X \leq x]$ y $G(y) = P[Y \leq y]$, respectivamente y una función de distribución conjunta $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Así, para cada par de números reales (x, y) se puede asociar tres números: $F(x)$, $G(y)$ y $H(x, y)$. Dado que estos números son valores de funciones de distribución que pertenecen al intervalo $[0,1]$, entonces cada par (x, y) de números reales lleva a un punto $(F(x), G(y))$ en el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$, el cual a su vez corresponde a un número $H(x, y)$ en $[0,1]$. De esta manera, el elemento que asigna el valor de la función de distribución a cada par ordenado de valores de las funciones de distribución individuales es una función, la cual es llamada una cópula. Un estudio detallado de la metodología de las funciones cópula véase Cherubini et al. (2004), Nelsen (2006) y Schweizer (2007).

Para presentar formalmente la definición de cópula así como sus propiedades, se requiere previamente desarrollar ciertos conceptos.

Definición 4.4. Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $R = [-\infty, +\infty]$ y sea H una función real n -dimensional tal que $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$. Sea $B = [a, b]$ un punto n -dimensional cuyos vértices están en $DomH$. Entonces el H -volumen de B está dado por

$$V_H(B) = \sum \sin(c)H(c),$$

donde la suma es tomada sobre todos los vértices c de B y $\sin(c)$ está dado por

$$\sin(c) = \begin{cases} 1, & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número par de } k \\ -1, & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número impar de } k \end{cases}$$

Definición 4.5. Una función real H es n -creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todos los n -puntos de B cuyos vértices se encuentran en el $DomH$.

4.2.1. Definición de Cópulas

Definición 5.3. Una cópula d -dimensional es una función de distribución multivariada $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ donde sus distribuciones marginales (individuales) son uniformes estándar $U_i \sim U(0,1) \ i = 1, 2, \dots, d$. La cópula posee las siguientes propiedades:

- i. $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i .
- ii. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, d\}, u_i \in [0, 1]$.
- iii. Para todo $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ se tiene que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

La primera propiedad es propia de cualquier función de distribución multivariada. La segunda está asociada con el hecho que las funciones de distribución marginales son uniformes estándar (Joe, 1997). En la tercera propiedad, es llamada desigualdad triangular; que asegura que si el vector aleatorio $(U_1, \dots, U_d)^t$ tiene como función de distribución C , entonces $P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq U_d \leq b_d)$ no es negativa. Estas tres propiedades caracterizan una cópula: si una función C las satisface, entonces C es una cópula.

4.2.2. El Teorema de Sklar

El teorema de Sklar es de suma importancia en la teoría de cópulas, básicamente dice que todas las funciones de distribución multivariadas contienen cópulas y que éstas se pueden utilizar en conjunto con funciones de distribución univariadas para construir distribuciones multivariadas.

Definición 4.6. Una función de distribución es una función F con $DomF = \bar{\mathbb{R}}$ tal que

- i. F es no decreciente;
- ii. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

Definición 4.7. Una función de distribución n -dimensional es una función H con dominio en $\bar{\mathbb{R}}^n$ tal que

- i. H es n -creciente;
- ii. $H(t) = 0$ para todo t en $\bar{\mathbb{R}}^n$ tal que $t_k = -\infty$ para al menos un k y $H(-\infty, \dots, \infty) = 1$.

Teorema 4.2. (Teorema de Sklar). Sea H una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n . Entonces existe una n -cópula C tal que $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}^n$

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

C es única, si F_1, \dots, F_n son continuas. De manera inversa, si C es una n -cópula y F_1, \dots, F_n son funciones de distribución, entonces la función H es una función de distribución conjunta n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n .

De esta manera, a través del teorema de Sklar, la probabilidad conjunta de los datos se puede separar entre sus marginales y la cópula, la cual representa la estructura de dependencia de los datos. Lo interesante del teorema radica en que la expresión anterior puede ser invertida para expresar la cópula en términos de la función de distribución conjunta y las inversas de las marginales. Sin embargo, si una marginal no es estrictamente creciente, entonces ésta no posee inversa en el sentido usual. Así que se debe definir la cuasi-inversa de una función de distribución.

Definición 4.8. Sea F una función de distribución. Entonces una función cuasi-inversa de F es cualquier función $F^{(-1)}$ con dominio en I tal que

- i. Si t está en $RanF$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es cualquier número x en $\bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, es decir, $\forall t \in RanF$,

$$F(F^{(-1)}(t)) = t;$$

- ii. Si t no está en $RanF$, entonces

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x|F(x) \geq t\} = \sup\{x|F(x) \leq t\}.$$

Si F es estrictamente creciente, entonces F tiene una sola cuasi-inversa, la cual es la inversa ordinaria, para la cual se usará la notación usual $F^{(-1)}$.

Corolario 4.1. Sean H, C, F_1, \dots, F_n definidos en el teorema anterior y sean $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F_1, \dots, F_n , respectivamente. Entonces para cualquier $u \in I^n$,

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Definición 4.9. (Cópula densidad). Sea C una cópula n -dimensional n -diferenciable, entonces la función $c : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ con

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{(\partial^n C(u_1, \dots, u_n))}{(\partial u_1, \dots, \partial u_n)}$$

es llamada la cópula densidad de la cópula C .

4.2.3. Medidas de Dependencia

Existen una variedad de formas de medir la dependencia entre variables, la más conocida es el coeficiente de correlación de Pearson. Sin embargo, ésta es una medida de dependencia lineal y, lo más importante, es una medida no invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de las variables. Por ello, se mostrarán las medidas de dependencia invariantes por traslación más conocidas como el tau de Kendall y el rho de Spearman, las cuales son las medidas de dependencia más conocida dentro de las medidas de asociación. Estas medidas de asociación se basan en los conceptos de concordancia y discordancia. Siguiendo a Nelsen (2006), de manera informal se dice que dos variables aleatorias son concordantes si grandes valores de una de ellas tienden a estar asociados con grandes valores de la otra y viceversa. En forma más formal, sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector aleatorio (X, Y) de variables aleatorias continuas. Se dice que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. De manera similar, se dice que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos discordantes si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$.

Definición 4.10. Una medida numérica de asociación δ entre dos variables aleatorias X e Y cuya cópula es C es una medida de dependencia si satisface las siguientes propiedades:

1. δ está definida para cualquier par de variables aleatorias X e Y .
2. $\delta_{(X,Y)} = \delta_{(Y,X)}$.
3. $0 \leq \delta_{(X,Y)} \leq 1$.
4. $\delta_{(X,Y)} = 0$ si y solo si X e Y son independientes.
5. $\delta_{(X,Y)} = 1$ si y solo si X e Y son función estrictamente monótona no decreciente *c.s.* una de la otra.
6. Si α y β son funciones monótonas no decrecientes *c.s.* sobre $RanX$ y $RanY$, respectivamente, entonces $\delta_{(\alpha(X),\beta(Y))} = \delta_{(X,Y)}$.
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias con cópulas C_n y si $\{C_n\}$ converge a C , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{C_n} = \delta_C$.

Tau de Kendall

Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos (iid) con funciones de distribución conjunta $H1$ y $H2$. El tau de Kendall es definido como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia:

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad \text{Ec. 4.27}$$

Nelsen (2006) demostró que el tau de Kendall se puede expresar en términos de cópulas mediante el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas cuya cópula es C . Entonces el tau de Kendall de X e Y está dado por:

$$\tau(X, Y) = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Rho de Spearman

Así como el tau de Kendall, el rho de Spearman es otra medida de asociación basada en la discordancia y concordancia. La representación de esta medida en función de la cópula se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.4. Sean X e Y variables aleatorias continuas cuya cópula es C . Entonces el rho de Spearman de X e Y está dado por:

$$\rho(X, Y) = 12 \iint_{I^2} C(u, v) du dv - 3 = 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3.$$

Coeficiente de dependencia de colas

Las medidas de dependencia introducidas hasta ahora (tau de Kendall y rho de Spearman) están diseñadas para describir cuán grande o pequeño los valores de una variable aleatoria están asociados con valores grandes o pequeños de otra variable aleatoria. No obstante, otras medidas están centradas en determinar la asociación entre las variables cuando estos toman valores extremos. A estas medidas se les conocen como medidas de dependencia de las colas.

Definición 4.11. Sean X e Y variables aleatorias continuas con funciones de distribución F e G , respectivamente. El parámetro de dependencia de cola superior λ_U es el límite (si éste existe) de la probabilidad condicional que Y sea mayor que el percentil 100 de G dado que X es mayor que el percentil 100 de F cuando t se aproxima a 1, es decir,

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)].$$

De forma similar, el parámetro de dependencia de cola inferior λ_L es el límite (si éste existe) de la probabilidad condicional que Y sea menor o igual al percentil 100 de G dado que X es menor o igual al percentil 100 de F cuando t se aproxima a 0, es decir,

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)].$$

Según Joe (1997), las definiciones del parámetro de dependencia de cola superior e inferior en términos de cópulas son las siguientes:

Definición 4.12. Sean X e Y variables aleatorias continuas con funciones de distribución F y G , respectivamente y cópula C . Si los límites de

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1 - 2t + C(t, t))}{(1 - t)}$$

y

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}$$

existen, entonces si $\lambda_U \in (0,1]$, se dice que C tiene dependencia de cola superior. Si $\lambda_U = 0$, diremos que C no tiene dependencia de cola superior. De manera similar, si $\lambda_L \in (0,1]$, diremos que C tiene dependencia de cola inferior. Si $\lambda_L = 0$, indica que C no tiene dependencia de cola inferior.

4.2.4. Tipos de Funciones Cópulas

En este apartado se presentan algunas consideraciones y propiedades generales que las familias de cópulas multivariadas. Siguiendo los criterios de Embrechts (2009); McNeil et al. (2009) y Embrechts et al. (2010) se detallan tres propiedades que resumen el análisis.

1. La interpretabilidad: Todos los miembros de la familia cópula deben tener una interpretación probabilística que sugiere naturales situaciones en las que se puede considerar esta familia. Las cópulas son adecuadas para modelar situaciones en donde una perturbación común tiene consecuencias en un sistema de varios componentes (por ejemplo, carteras de crédito, vida útil del sistema, etc.).
2. El amplio y flexible rango de dependencia: Los miembros de la familia cópula deben describir los diferentes tipos de dependencia, así como la independencia cópula y uno de los límites de Fréchet-Hoeffding (caso límite en relación con el parámetro). Una propiedad deseable es tener miembros con una variedad de dependencias de colas y asimetrías (Embrechts et al., 2003b).
3. Fácil de manejar: Los miembros de la familia cópula deben ser expresados en una forma cerrada o, al menos, deben ser fácilmente simulados por medio de algún algoritmo conocido. De hecho, varios procedimientos de bondad de ajuste se basan en el hecho de que la familia cópula puede ser ajustada fácilmente a la muestra (Berg, 2010).

Se pueden destacar dos grandes grupos de cópulas, la familia de cópulas elípticas y las cópulas arquimedianas. Las cópulas elípticas son las cópulas de distribuciones elípticas que constituyen una fuente de distribuciones multivariantes que poseen muchas propiedades de la distribución normal multivariante. La familia de cópulas arquimedianas captura una gran variedad de estructuras de dependencia. La representación arquimediana de cópulas permite reducir el estudio de una cópula multivariante a una única función univariante. A continuación, se hace una descripción de las cópulas más importantes.

4.2.4.1. Cópulas Elípticas

Una de las principales clases de cópulas son las elípticas, las cuales son generadas por distribuciones elípticas. Además, este tipo de cópulas son obtenidas directamente al invertir el teorema de Sklar.

Definición 4.12. (Distribución elíptica). El vector aleatorio n -dimensional X tiene una distribución elíptica si y solo si la función de densidad $f_X(x)$ tiene la siguiente representación:

$$f_X(x) = c_n |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g((x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)),$$

donde $c_n \in \mathbb{R}^n$, el vector de media $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva definida y g es alguna función independiente de n .

Los ejemplos más conocidos de distribuciones elípticas son la distribución normal multivariada y la t -student multivariada. Dado que estas cópulas se obtienen al invertir el teorema de Sklar, la cópula normal multivariada es la siguiente:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad \text{Ec. 4.28}$$

donde Φ_ρ representa la función de distribución normal estándar con parámetro de correlación ρ (matriz de correlación simétrica es positiva definida) y Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución normal estándar. La cópula densidad de la cópula normal multivariada es la siguiente:

$$c(u_1, \dots, u_n) = |\rho|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x'(\rho^{-1} - I)x\right), \quad \text{Ec. 4.29}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ con $x_i = \Phi^{-1}(u_i), i = 1, \dots, n$.

Por otro lado, la t -cópula multivariada es la siguiente:

$$C(u_1, \dots, u_n) = t_{\rho, v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)), \quad \text{Ec. 4.30}$$

donde $t_{\rho, v}$ es la distribución t -student multivariada con matriz de correlaciones ρ y v grados de libertad. t_v^{-1} representa la inversa de la función de distribución univariada. La cópula densidad de la t -cópula multivariada es la siguiente:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)|\rho|^{1/2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\right)^n \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{v} x' \rho^{-1} x\right)^{-\frac{v+n}{2}}}{\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{x_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}\right), \quad \text{Ec. 4.31}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ con $x_i = t_v^{-1}(u_i), i = 1, \dots, n$.

4.2.4.2. Cópulas Arquimedianas

Otra importante clase de cópulas son las arquimedianas, las cuales tienen una gran variedad de aplicaciones, debido a la facilidad en su construcción, la gran variedad de familias y sus propiedades, tales como su simetría y asociatividad. Para definir a las cópulas arquimedianas es necesario definir la pseudo inversa de una función.

Definición 4.13. (pseudo inversa). Sea $\varphi : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(1) = 0$. La pseudo inversa de la función φ es la función $\varphi^{[-1]}$ con $Dom\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ y $Ran\varphi^{[-1]} = [0,1]$ dado por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Teorema 4.5. (Cópula arquimediana). Sea $\varphi : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi^{[-1]}$ la pseudo inversa de φ . Entonces $C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$ es una cópula.

Teorema 4.6. (Propiedades de las cópulas arquimedianas). Sea C una cópula arquimediana con generador φ . Entonces:

1. C es simétrica, es decir, $C(u, v) = C(v, u)$ para todo u, v en $[0,1]$.
2. C es asociativa, es decir, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para todo u, v, w en $[0,1]$.
3. Si $c > 0$ es cualquier constante, entonces $c\varphi$ es también un generador de C .

4.2.4.3. Cópulas Bivariadas

Familia de cópulas bivariadas elípticas

Dentro de las cópulas bivariadas elípticas, las más conocidas son la gaussiana y la t -student.

Cópula gaussiana

La cópula gaussiana bivariada con parámetro de correlación $\rho \in (-1,1)$ es la siguiente:

$$C(u_1, u_2) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad \text{Ec. 4.32}$$

donde Φ_ρ representa la función de distribución normal estándar bivariada con parámetro de correlación ρ y Φ^{-1} representa la inversa de la función de distribución normal estándar univariada. La correspondiente cópula densidad es la siguiente:

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{\rho^2(x_1^2+x_2^2)-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} \right], \quad \text{Ec. 4.33}$$

donde $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ y $x_2 = \Phi^{-1}(u_2)$. Finalmente, el tau de Kendall de la cópula gaussiana es $\frac{2}{n} \arcsin(\rho)$.

t-cópula

La t -cópula bivariada es la siguiente:

$$C(u_1, u_2) = t_{\rho, v}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2)), \quad \text{Ec. 4.34}$$

donde $t_{\rho, v}$ representa la función de distribución t -student bivariada con parámetro de correlación ρ y v grados de libertad. Además, t_v^{-1} es la inversa de la función de distribución univariada t -student con v grados de libertad. La correspondiente cópula densidad es la siguiente:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})/\Gamma(\frac{v}{2})}{v\pi dt_v(x_1)dt_v(x_2)\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{v(1-\rho^2)} \right]^{-\frac{v+2}{2}}, \quad \text{Ec. 4.35}$$

donde $x_1 = t_v^{-1}(u_1)$, $x_2 = t_v^{-1}(u_2)$ y dt_v es la densidad de probabilidad de la distribución estándar t con v grados de libertad. El tau de Kendal de la t -cópula es $\frac{2}{n} \arcsin(\rho)$.

Familias de cópulas bivariadas arquimedianas

Las cópulas bivariadas arquimedianas están definidas de la siguiente manera:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1), \varphi(u_2)), \quad \text{Ec. 4.36}$$

donde $\varphi : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ es una función convexa estrictamente decreciente y continua tal que $\varphi(1) = 0$ y $\varphi^{[-1]}$ es la pseudo inversa:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad \text{Ec. 4.37}$$

φ es llamada la función generadora de la cópula C . Por otro lado, para las cópulas arquimedianas, el tau de Kendall se expresa en función de la función generadora de la siguiente forma:

$$\tau(X, Y) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt, \quad \text{Ec. 4.38}$$

donde X e Y son variables aleatorias y φ es la función generadora definida anteriormente.

A continuación se presentarán algunas de la cópulas bivariadas arquimedianas más conocidas.

Cópula Clayton

Con función generadora $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ y cópula dada por:

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad \text{Ec. 4.39}$$

para $\theta > 0$, la cópula Clayton es una cópula arquimediana asimétrica que muestra una mayor dependencia en la cola negativa. La cópula densidad de la cópula Clayton es la siguiente:

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta)(u_1 u_2)^{-1-\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2} \quad \text{Ec. 4.40}$$

El tau de Kendall de la cópula Clayton es el siguiente:

$$\tau(\theta) = \frac{\theta}{\theta+2} \quad \text{Ec. 4.41}$$

Cópula Gumbel

Con función generadora $\varphi(t) = (-\log(t))^\theta$ y cópula dada por

$$C(u_1, u_2) = \exp \left[-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \quad \text{Ec. 4.42}$$

para $\theta \geq 1$, la cópula Gumbel es una cópula arquimediana asimétrica que muestra una mayor dependencia en la cola positiva. La cópula densidad de la cópula Gumbel es la siguiente:

$$c(u_1, u_2) = \frac{C(u_1, u_2)}{u_1 u_2} \frac{(\log(u_1) \log(u_2))^{\theta-1}}{((-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta)^{2-\frac{1}{\theta}}} \left[((-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}} + \theta - 1 \right] \quad \text{Ec. 4.43}$$

El tau de Kendall de la cópula Gumbel es el siguiente:

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{1}{\theta} \quad \text{Ec. 4.44}$$

Cópula Frank

Con función generadora $\varphi(t) = -\log \left(\frac{\exp(\theta t) - 1}{\exp(t) - 1} \right)$ y cópula dada por

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \log \left[\frac{(\exp(\theta u_1) - 1)(\exp(\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right], \quad \text{Ec. 4.45}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, la cópula Frank es una cópula arquimediana simétrica. La cópula densidad de la cópula Frank es la siguiente:

$$C(u_1, u_2) = \frac{\theta(\exp(-\theta)-1)(\exp(-\theta)(u_1+u_2))}{[\exp(-\theta)-1+(\exp(\theta u_1)-1)(\exp(\theta u_2)-1)]}, \quad \text{Ec. 4.46}$$

El tau de Kendall de la cópula Frank es el siguiente:

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{4}{\theta} + 4 \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{c/\theta}{\exp(x)-1} dx \quad \text{Ec. 4.47}$$

Cópula Joe

Con función generadora $\varphi(t) = -\log[1 - (1+t)^\theta]$ y cópula dada por:

$$C(u_1, u_2) = 1 - [(1-u_1)^\theta + (1-u_2)^\theta - (1-u_1)^\theta(1-u_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{Ec. 4.48}$$

para $\theta > 1$, la cópula Joe es una cópula arquimediana asimétrica. La cópula densidad de la cópula Joe es la siguiente:

$$c(u_1, u_2) = [(1-u_1)^\theta + (1-u_2)^\theta - (1-u_1)^\theta(1-u_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}-2} \quad \text{Ec. 4.49}$$

$$\times (1-u_1)^{\theta-1}(1-u_2)^{\theta-1} \quad \text{Ec. 4.50}$$

$$\times [\theta - 1 + (1-u_1)^\theta + (1-u_2)^\theta - (1-u_1)^\theta(1-u_2)^\theta]. \quad \text{Ec. 4.51}$$

El tau de Kendall de la cópula Joe es el siguiente:

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{4}{\theta^2} \int_0^1 t \log(t) (1-t)^{\frac{2(1-\theta)}{\theta}} dt \quad \text{Ec. 4.52}$$

Cópula Clayton-Gumbel

Introducida por Joe (1997), la cópula Clayton-Gumbel es una cópula arquimediana de dos parámetros, la cual puede ser considerada como la generalización de las familias Clayton y Gumbel. Con función generadora $\varphi(t) = [t^{-\theta} - 1]^\delta$ y cópula dada por:

$$C(u_1, u_2) = \left[1 + \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad \text{Ec. 4.53}$$

para $\theta > 0$ y $\delta \geq 1$. La cópula densidad de la cópula CCG es la siguiente:

$$c(u_1, u_2) = \left[1 + \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad \text{Ec. 4.54}$$

$$\times \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{2}{\delta}-2} \quad \text{Ec. 4.55}$$

$$\times \left[\theta\delta + 1 + \theta(\delta - 1) \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right] \quad \text{Ec. 4.56}$$

$$\times (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta-1} u_1^{-\theta-1} (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta-1} u_2^{-\theta-1} \quad \text{Ec. 4.57}$$

El tau de Kendall de la cópula CCG es el siguiente:

$$\tau(\theta, \delta) = 1 - \frac{2}{\delta(\theta+2)} \quad \text{Ec. 4.58}$$

Cópula Joe-Gumbel

Introducida por Joe (1997), la cópula Joe-Gumbel es una cópula arquimediana de dos parámetros, la cual puede ser considerada como la generalización de las familias Joe y Gumbel. Con función generadora $\varphi(t) = (-\log[1 - (1-t)^\theta])^\delta$ sus parámetros son $\theta > 0$ y $\delta \geq 1$.

El tau de Kendall de la cópula CJG es el siguiente:

$$\tau(\theta, \delta) = 1 + 4 \int_0^1 \left(-\log(-(1-t)^\theta + 1) \frac{(1-t-(1-t)^\theta + t(1-t)^{-\theta})}{\delta\theta} \right) dt \quad \text{Ec. 4.59}$$

Cópula Joe-Clayton

Introducida también por Joe (1997), la cópula Joe-Clayton es una cópula arquimediana de dos parámetros, la cual puede ser considerada como la generalización de las familias Joe y Clayton. Con función generadora $\varphi(t) = [1 - (1-t)^\theta]^{-\delta}$ y cópula dada por

$$C(u_1, u_2) = 1 - \left[1 - \left[(1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} + (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right]^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{Ec. 4.60}$$

para $\theta \geq 1$ y $\delta > 0$. La cópula densidad de la cópula CJC es la siguiente:

$$c(u_1, u_2) = \left(-\frac{1}{\theta} \right) \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \cdot h^{\frac{1}{\theta}-2} du_2 h \cdot du_1 h - \frac{1}{\theta} \cdot h^{\frac{1}{\theta}-1} du_1 u_2 h \quad \text{Ec. 4.61}$$

$$h = 1 - \left((1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} + (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} \quad \text{Ec. 4.62}$$

$$du_1 h = -\theta \left((1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} - (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}-1} \quad \text{Ec. 4.63}$$

$$\times (1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta-1} (1 - u_1)^{\theta-1} \quad \text{Ec. 4.64}$$

$$du_2 h = -\theta \left((1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} - (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}-1} \quad \text{Ec. 4.65}$$

$$\times (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta-1} (1 - u_2) \quad \text{Ec. 4.66}$$

$$du_1 u_2 h = \frac{1}{\delta} \left(-\frac{1}{\delta} - 1 \right) \left((1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta} - (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}-2} \cdot du_1 S \cdot du_2 S \quad \text{Ec. 4.67}$$

$$du_1 S = -\theta \delta (1 - (1 - u_1)^\theta)^{-\delta-1} (1 - u_1)^{\theta-1} \quad \text{Ec. 4.68}$$

$$du_2 S = -\theta \delta (1 - (1 - u_2)^\theta)^{-\delta-1} (1 - u_2)^{\theta-1} \quad \text{Ec. 4.69}$$

El tau de Kendall de la cópula CJC es el siguiente:

$$\tau(\theta, \delta) = 1 - \frac{2}{\delta(\theta+2)} + \frac{4}{\theta^2 \delta} B\left(1 - \frac{2-2\theta}{\theta} + 1, \delta + 2\right) \quad \text{Ec. 4.70}$$

donde

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x+1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{Ec. 4.71}$$

Cópula Joe-Frank

Introducida por Joe (1997), la cópula Joe-Frank es una cópula arquimediana de dos parámetros, la cual puede ser considerada como la generalización de las familias Joe y Frank.

Con función generadora $\varphi(t) = -\log\left[\frac{1-(1-\delta t)^\theta}{1-(1-\delta)^\theta}\right]$ para $\theta \geq 1$ y $\delta \leq 1$, el tau de Kendall de la cópula CJF es el siguiente:

$$\tau(\theta, \delta) = 1 + 4 \int_0^1 \left(-\log\left[\frac{1-(1-\delta t)^\theta}{1-(1-\delta)^\theta}\right]\right) \frac{1-t\delta-(1-t\delta)^\theta+t\delta(1-t\delta)^{-\theta}}{\theta\delta} dt \quad \text{Ec. 4.72}$$

4.2.5. Estimación de Parámetros de las Cópulas

Los métodos de estimación de parámetros de una cópula han sido discutidos extensamente en Genest y Rivest (1995), Joe (1997) y Genest y Favre (2007). En este estudio sólo se van a presentar las principales diferencias de esos métodos, los cuales dependerán si se han hecho supuestos acerca de la marginal.

- i. *Inversión de la tau de Kendall, τ , o el rho de Spearman, ρ .* Para aquellas familias de cópulas bivariadas que tienen una forma cerrada de tau de Kendall, τ , o el rho de Spearman, ρ , se pueden invertir estos parámetros para obtener un estimado de parámetro de la cópula, las cuales son consistentes bajo ciertas condiciones (Genest y Favre, 2007). Además, para las cópulas elípticas de mayor dimensión, el tau de Kendall, τ , o el rho de Spearman, ρ , puede ser usados para estimar los parámetros de la matriz de correlación.

- ii. *Máxima verosimilitud (MV)*. Cuando se conoce que las marginales pertenecen a una específica familia paramétrica, se puede utilizar la función de verosimilitud

$$l_{MV}(\theta, \delta) = \sum_{i=1}^n \log[c(F_{(\delta,1)}(X_{(i,1)}), \dots, F_{(\delta,1)}(X_{(i,d)}))], \quad \text{Ec. 4.73}$$

donde $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)'$ y $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})$, $i = 1, \dots, n$ son muestras del vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$.

- iii. *Inferencia de las marginales (IM)*. Dado que no se suele conocer las marginales, Joe (1997) sugirió realizar la maximización en dos etapas. En la primera, estimar separadamente las marginales y, en la segunda, introducir esos estimados en el logaritmo de la función de verosimilitud:

$$l_{IFM}(\theta, \delta) = \sum_{i=1}^n \log[c(F_{(\delta,1)}(X_{(i,1)}), \dots, F_{(\delta,1)}(X_{(i,d)}))] \quad \text{Ec. 4.74}$$

No obstante, a pesar de ser computacionalmente más eficiente, Joe (2005) mostró que este procedimiento en dos etapas pierde eficiencia en algunos casos. Más, Silvapulle y Silvapulle (2007) mostró que los dos últimos métodos no son robustos frente a malas especificaciones de las marginales.

- iv. *Pseudo máxima verosimilitud (PMV)*. Debido a que las distribuciones de las marginales son casi siempre desconocidas, el método de estimación natural de las marginales sería la estimación no paramétrica Genest y Rivest (1995). Con este método se reemplaza la función de distribución desconocida por su versión empírica

$$\hat{F}_j(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1[X_{i,j} \leq t]. \quad \text{Ec. 4.75}$$

Esta versión empírica de la función de distribución se introduce en el logaritmo de la función de verosimilitud

$$l_{IFM}(\theta) = \sum_{i=1}^n \log[c_{\theta}(\hat{F}_{(n,1)}(X_{(i,1)}), \dots, \hat{F}_{(n,d)}(X_{(i,d)}))]. \quad \text{Ec. 4.76}$$

Kim, Silvapulle y Silvapulle (2007) comparó los estimados obtenidos a través de las metodologías MV, IM y PMV y mostró que el estimado obtenido a través de PMV es la mejor alternativa en la mayoría de casos. En particular, sobre la base de simulaciones, los métodos MV y IM no son robustos frente a malas especificaciones de las marginales. En cambio, este autor mostró que cuando las marginales no son conocidas, los parámetros estimados con el método PMV es la mejor alternativa.

De esta manera, tomando en cuenta lo visto en las cópulas en pares así como la mejor forma de estimar los parámetros de las cópulas, el logaritmo de la función a maximizar es la siguiente: sea $u = (u'_1, \dots, u'_N)'$ observaciones d -dimensional con $u'_i = (u'_{i,1}, \dots, u'_{i,d})' \in [0,1]^d, i = 1, \dots, N$. Entonces el logaritmo de la función de verosimilitud de una C -vine es el siguiente:

$$\text{loglik} := l_{CV\text{ine}}(\theta|u) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=1}^{d-j} \ln[c_{j,j+k|1,\dots,j-1}], \quad \text{Ec. 4.77}$$

donde

$$c_{j,j+k|1,\dots,j-1}(F(u_{i,j}|u_{i,1}, \dots, u_{i,j-1}), F(u_{i,j+k}|u_{i,1}, \dots, u_{i,j-1})|\theta_{j,j+k|1,\dots,j-1})$$

denota las cópulas en pares con parámetros $\theta_{j,j+k|1,\dots,j-1}$. De manera similar, el logaritmo de la función de verosimilitud de una D -vine es el siguiente:

$$\text{loglik} := l_{DV\text{ine}}(\theta|u) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=1}^{d-j} \ln[c_{k,k+j|k+1,\dots,k+j-1}], \quad \text{Ec. 4.78}$$

donde

$$c_{k,k+j|k+1,\dots,k+j-1} := c_{k,k+j|k+1,\dots,k+j-1}(F(u_{i,k}|u_{i,k+1}, \dots, u_{i,k+j-1}), F(u_{i,k+j}|u_{i,k+1}, \dots, u_{i,k+j-1})|\theta_{k,k+j|k+1,\dots,k+j-1}) \quad \text{Ec. 4.79}$$

Las funciones de distribución condicional en ambas expresiones son obtenidas recursivamente usando la función h :

$$h(u|v, \theta) := F(u|v) = \frac{\partial C_{uv_j|v_{-j}}(F(u_j|v_{-j}), F(v_j|v_{-j}))}{\partial F(v_j|v_{-j})}, \quad \text{Ec. 4.80}$$

donde $C_{uv_j|v_{-j}}$ es la función de distribución de una cópula bivariada arbitraria con parámetros θ y v_{-j} representa un vector con el j -ésimo componente v_j , ver Aas, Czado, Frigessi, y Bakken (2009).

4.2.6. Selección del Modelo

Una vez estimado los parámetros de varias cópulas para un mismo par de variables el siguiente paso es determinar cuál de las cópulas candidatas es la elegida. Para ello, existen algunos criterios de selección de modelos (Véase Apéndice B. Otros Modelos de Selección de Cópulas). A continuación se muestran los modelos empleados en el presente trabajo.

AIC

El criterio de información del Akaike (AIC, por sus siglas en inglés), desarrollado por Akaike (1974), es uno de los criterios de selección más utilizados. Dado un conjunto de datos, varios modelos son comparados de acuerdo al AIC siendo el mejor el que tenga el menor AIC. El AIC es definido de la siguiente manera:

$$AIC = -2l(\hat{\theta}|x) + 2k, \quad \text{Ec. 4.81}$$

donde $l(\cdot)$ es el logaritmo de la función de verosimilitud, $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados del modelo, x son los datos y k el número de parámetros del modelo. La primera parte del criterio es una medida de la bondad de ajuste del modelo; mientras que la segunda parte es un término de penalidad. Sin embargo, una desventaja del término de penalidad es que no considera el número de observaciones.

BIC

A diferencia del AIC, el criterio de información bayesiano (BIC) o el criterio de Schwarz, desarrollado por Schwarz (1978), toma en cuenta el número de observaciones en el término de penalidad. El BIC es definido de la siguiente manera:

$$BIC = -2l(\hat{\theta}|x) + k(n), \quad \text{Ec. 4.82}$$

donde $l(\cdot)$ es el logaritmo de la función de verosimilitud, $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados del modelo, x son los datos, k el número de parámetros del modelo y n es el número de observaciones. Así como en el caso del AIC, la primera parte del criterio es una medida de la bondad de ajuste del modelo; mientras que la segunda parte es un término de penalidad.

Conclusiones

El propósito de este capítulo es presentar las metodologías Fractales y Cópulas, cuya vinculación se utilizará como método para medir el contagio financiero. Es de aceptación general que las series financieras no siguen una distribución normal, varios estudios recientes (Sun et al., 2001a y Sun et al., 2001b) han encontrado que el espectro multifractal para fluctuaciones de precios contiene información valiosa sobre la volatilidad.

Entonces, los fractales son formas geométricas, que poseen una irregularidad, expresada en una dimensión fraccionaria, que se mantiene y que es característica a distintas escalas de análisis, cumpliendo así con una de sus características más importantes, la autoafinidad, que significa que la parte es semejante al todo. En general, los modelos fractales permiten estudiar los fenómenos no lineales como lo son las series financieras.

Sin duda, los mercados financieros son sistemas dinámicos complejos, de ellos emergen patrones inesperados, es por esto que la teoría del caos viene siendo estudiada por quienes operan en las bolsas de valores, por su capacidad para analizar el valor de una sola variable que evoluciona a lo largo del tiempo y promete ayudar a descubrir un orden dentro del caos de los mercados. Una similitud importante entre el caos y los fractales, es que ambos son sistemas dinámicos no lineales y de iteración que tienen un elemento de memoria. Respecto a los mercados financieros, es este elemento de memoria que permite tener en cuenta los eventos pasados.

El movimiento browniano es uno de los modelos más utilizados para describir el comportamiento de series financieras, sin embargo, estas no necesariamente se ajustan a los supuestos que implica, ya que los mercados son volátiles, presentan dependencia a largo plazo y colas pesadas. Como alternativa para superar estas debilidades Mandelbrot propone el movimiento browniano fraccionario que presenta varianza cíclica no periódica en todas las escalas temporales y tiene en cuenta la dependencia estadística a largo plazo, además de tener dos características típicas de los conjuntos fractales que le confieren una mayor variabilidad de comportamientos: autoafinidad y valor no entero de la dimensión.

El coeficiente de Hurst es una medida de independencia de las series de tiempo, el cual está asociado al ruido de un movimiento browniano fraccional. La estimación del exponente de Hurst se deriva del análisis R/S, el cual trata de estimar el rango estandarizado de variación para distintos intervalos de tiempo de una serie temporal. El rango reescalado o R/S, es un estadístico con media cero, expresado en términos de desviación estándar, cuyo análisis es de tipo no paramétrico.

Para analizar las series de financieras se considera recomendable primero establecer el valor del coeficiente Hurst, el cual nos permitirá conocer si se cumple con el supuesto de independencia de los modelos tradicionales. Es decir, si el valor del coeficiente Hurst es

aproximadamente 0.5, indica un movimiento browniano estándar y la serie no tiene memoria de largo plazo; en caso contrario, cualquier evento futuro se verá afectado por los datos anteriores.

A partir del exponente Hurst se obtiene la dimensión fractal. En particular, esta forma de establecer la dimensión permite que en una gráfica de rendimientos de cualquier serie pueda visualizarse su dimensión fractal, lo que dará una idea del valor del coeficiente Hurst.

Ahora bien, al trabajar con series financieras se reconoce una compleja dinámica involucrada, lo cual hace necesario el análisis de todos los momentos estadísticos y así captar completamente la distribución de las fluctuaciones (análisis multifractal), para obtener el espectro multifractal. Existen diversos métodos para obtenerlo, sin embargo, para este estudio se empleó el análisis multifractal de fluctuaciones, cuyo objetivo fundamental es la detección de correlaciones temporales de largo plazo y comportamiento multifractal en presencia de tendencias para series temporales. Esta metodología es muy similar a la de R/S y sencilla de implementar, y ayuda a eliminar el sesgo de las series financieras.

En este capítulo, además de mostrar la metodología empleada para obtener el espectro multifractal de las series financieras, se introduce la metodología de cópulas basada en la segunda generación de estudios del contagio financiero, debido a que es robusta a la heterocedasticidad, autocorrelación, no normalidad y colas pesadas, características típicas de las series financieras.

Las cópulas son funciones que juntan funciones de distribución multivariadas a sus funciones de distribución marginales univariadas, las cuales son uniformes. Se pueden destacar dos grandes grupos de cópulas, la familia de cópulas elípticas y las cópulas arquimedianas. Las cópulas elípticas son las cópulas de distribuciones elípticas que constituyen una fuente de distribuciones multivariantes que poseen muchas propiedades de la distribución normal multivariante. La familia de cópulas arquimedianas captura una gran variedad de estructuras de dependencia. La representación arquimediana de cópulas permite reducir el estudio de una cópula multivariante a una única función univariante.

Una vez estimados los parámetros de varias cópulas para un mismo par de variables el siguiente paso es determinar cuál de las cópulas candidatas es la elegida. Para ello, se

emplearon algunos criterios de selección de modelos como el criterio de información del Akaike (AIC) y el criterio de información bayesiano (BIC).

Para poder determinar el contagio financiero hace falta conocer la dependencia entre las series financieras. Para lo cual, existen una variedad de formas de medir la dependencia entre dos variables. El indicador más utilizado ha sido el coeficiente de correlación; el principal problema de éste es que sólo muestra la dependencia lineal y además, al ser una medida escalar, un solo número debe expresar la estructura de dependencia y por lo tanto no permite hacer análisis adecuados. Así, durante épocas de crisis, si el coeficiente de correlación aumenta, no es posible saber si dicho incremento se debe a que existe una mayor volatilidad en los rendimientos de los activos o a que ha cambiado el nivel de dependencia entre éstos.

Mientras que un coeficiente de dependencia asintótica es una medida de gran relevancia en el análisis financiero, por lo general se está interesado en analizar si la dependencia entre los factores de riesgo cambia en épocas de crisis, tanto para decisiones de inversión como de regulación. Estas medidas son importantes no solo porque permiten determinar la dependencia entre dos variables, sino porque permiten determinar si en eventos extremos la dependencia entre las series es mayor.

El contagio y la dirección del mismo, se cuantifican mediante el cambio en el coeficiente entre un período de crisis y un período de pre crisis. De esta manera se conforman pares entre los índices de los mercados de valores de cada uno de los países seleccionados, y se estima si los coeficientes de dependencia presentan o no cambios durante la crisis. Así por ejemplo, si se obtiene que el coeficiente de dependencia entre un país desarrollado y uno emergente cambió significativamente durante la crisis, se interpretaría como que el país desarrollado transmite los choques negativos hacia el país emergente.

Referencias

- Akaike, H. (1974). "A New Look at Statistical Model Identification". *IEEE Trans. Automatic Control*, 19, pp. 716-723.
- Braun E. (1994). "Caos, fractales y cosas raras, Colección la Ciencia en México". N° 150 Fondo de Cultura Económica, México, pp. 36,51.

- Campbell, A. W. & Mackinlay, A. C. (1997). "The Econometrics of Financial Markets".
Princeton University Press, Princeton.
- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W., (2004). "Copula methods in finance". Wiley Finance
Series. John Wiley & Sons Ltd. Chichester.
- Chorafas, D. (1999). "Chaos Theory in The Financial Markets". IRWIN. Professional Publishing,
Chicago, pp. 62,73
- Clarke, K. (2007). "A Simple Distribution-Free Test for Nontested Model Selection". Political
Analysis (2007) 15 (3), pp. 347-363.
- Clayton, D.G., (1978). "A model for association in bivariate life tables and its application in
epidemiological studies of familial dependency in chronic disease incidence". Biometrika
65, pp. 141-151.
- Dias, A., Embrechts, P., (2010). "Modeling exchange rate dependence dynamics at different
time horizons". Journal of International Money and Finance 29, pp. 1687-1705.
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D., (2002). "Correlation and dependence in risk
management: properties and pitfalls In: Risk Management: Value at Risk and Beyond". Ed.
M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 176-223.
- Embrechts, P., Hoeing, A., Juri, A., (2003a). "Using Copulae to bound the Value-at-Risk for
functions of dependent risks". Finance & Stochastics 7(2), pp. 145-167.
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A., (2003b). "Modelling Dependence with Copulas and
Applications to Risk Management In: Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance".
Ed. S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, pp. 329-384.
- Embrechts, P. (2006). "Discussion of: Copulas: tales and facts". T. Mikosch [Extremes 9, (1), 3-
20]. Extremes 9 (1): 45-47.
- Falconer, K. (1990). "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications". New
York: John Wiley and Sons.
- Fisher, N. I., and Switzer, P. (1985). "Chi-plots for assessing dependence". Biometrika, 72 2, pp.
253-265.
- Fisher, N. I., and Switzer, P. (2001). "Graphical assessment of dependence: Is a picture worth
100 tests?" Am. Stat., 55 3, pp. 233-239.
- Gálvez Medina, Ernesto Teobaldo (2005). "Análisis Fractal del Mercado de Valores de México
(1978-2004)". Instituto Politécnico Nacional.
- Genest, C., MacKay, R.J., (1986). "The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform
Marginals". The American Statistician 40, pp. 280-283.

- Genest, C. y Favre, A. C. (2007). "Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask". *J. Hydrol. Eng.* 12(4), pp. 349-368.
- Genest Ghoudi y Rivest (1995). "A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions". *Biometrika* (1995) 82 (3), pp. 543-552.
- Genest, Ch. y Rivest, L. (1993). "Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas". *Journal of the American Statistical Association* Vol. 88, No. 423, pp. 1034-1043.
- Gordon, T. y Greenspan, D. (1988). "Chaos and fractals: new tools for technological and social forecasting". *Technological Forecasting & Social Change*, v43 n1 p.25.
- Hinojosa, M. & Chávez, L. (2001). "Autoafinidad de superficies de fractura del vidrio, Ingenierías". 4 (13), pp. 50-54.
- Hoeffding, W., (1940). "Masstabinvariante korrelationstheorie". *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* 5, pp. 179-233.
- Hoeffding, W., (1947). "On the distribution of the rank correlation coefficient τ when the variates are not independent". *Biometrika* 34, pp. 183-196.
- Hoeffding, W., (1948). "A class of statistics with asymptotically normal distribution". *Annals of Mathematical Statistics* 19, pp. 293-325.
- Joe, H. (1997). "Multivariate Models and Dependence Concepts". London: Chapman & Hall.
- Joe (2005). "Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models". *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 94, No. 2. (June 2005), pp. 401-419.
- Kim, Silvapulle y Silvapulle (2007). "Semiparametric estimation of the dependence parameter of the error terms in multivariate regression". Monash University, Department of Econometrics and Business Statistics.
- Kullback y Leiber (1951). "On information and sufficiency". *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 22, N° 1, pp. 79-86.
- Makridakis, S. (1998). "Métodos de Pronósticos", Limusa, México.
- Mandelbrot, B. (1997). "Fractals and Scaling in Finance". Springer, New York.
- Mandelbrot, B. (1986). "Fractals in Physics". Holland, Amsterdam, p. 3.
- Mandelbrot, B. (1977). "The Fractal Geometry of Nature". W.H. Freeman, N. York.
- Mandelbrot, B. (1969). "Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence & Wallis". *J. Water Resources, Research* 5.
- Mandelbrot, B. (1963). "The variation of certain speculative prices". *J. Business* 36, pp.394-419.

- Mas, F., Mach, J., Trigueros, P. P., Claret, J. & Sagués, F. (1996). Creixement fractal: als límits de la modelització. En E. Casassas & M. Esteban (Eds.). Modelització macroscòpica en Ciències Experimentals. (pp. 115-135). Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- Monroy, O. (1999). "Teoría del Caos". Alfaomega, México.
- Morales, O. (2004). "Dinámica de la mecánica fractal de precios del petróleo", IPN Tesis de doctorado.
- Muñoz San Miguel, Jesús. (2005). "Movimiento Browniano y Geometría Fractal: El Ibex35". XIII Jornadas de ASEPUMA. Universidad de Sevilla.
- Nelsen, R. (2006). "An Introduction to Copulas". Springer Series in Statistics, New York.
- Patton, A.J., (2006). "Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence". International Economic Review 47(2), pp. 527-556.
- Peitgen, H-O., Jürgens, H. & Saupe, D. (1992). "Fractal for the classroom". Part One, Introduction to Fractal and Chaos. New York: Springer-Verlag.
- Petters, E. (1996). "Chaos and Order in Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility". Wiley, New York.
- Rojas, G. (1999). "Métodos de Simulación en modelos estocásticos dinámicos". Tópicos en Economía Matemática y econometría, Serie Economía Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco.
- Romero Meléndez, Guillermo. (1992). "Modelación de Gráficas Económicas por medio de la Geometría Fractal". Aportaciones Matemáticas. Comunicaciones 11, pp. 187-206.
- Sametband, M. (1997). "Entre el orden y el caos". La complejidad, FCE, La ciencia para todos/167, pp. 31-38.
- Schroeder, M. (1999). "Fractals, chaos, power laws Minutes from an Infinite Paradise". Seventh printing, W.H.Freeman and Company, New York, pp. 78-91.
- Schwarz, G. (1978). "Estimating the dimension of a model". The Annals of Statistics, Vol. 6, No. 2, pp. 461-464.
- Schweizer, B., Wolff, E.F., (1981). "On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables". Annals of Statistics. Vol. 9(4), pp. 879-885.
- Schweizer, B., (2007). "Introduction to copulas". Journal of Hydrologic Engineering 12 (4), pp. 346-346.
- Sklar A. (1959). "Fonctions de répartition à n dimensions et leurs margen". Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris 8, pp. 229-231.

- X. Sun, H. Chen, Z. Wu, Y. Yuan, (2001a). "Multifractal analysis of Hang Seng index in Hong Kong stock market", *Physica A* 291, pp. 553–562.
- X. Sun, H. Chen, Y. Yuan, Z. Wu, (2001b). "Predictability of multifractal analysis of Hang Seng stock index in Hong Kong", *Physica A* 30,1 pp.473–482.
- Talanquer Vicente. (1996). "Fractus, Fracta, Fractal- Laberintos de espejos". Colección la Ciencia en México N° 147, Fondo de Cultura Económica, México.
- Vuong, Q. (1989). "Likelihood ratio test for model selection and non-nested hypotheses". *Econometrica* Vol. 57, No. 2, pp. 307-333

CAPITULO V

DESARROLLO DEL MODELO

Para medir el efecto contagio, se han desarrollado numerosos métodos. En estudios anteriores, una gran variedad de artículos (Makridakis et al., 1974, Bennett et al., 1988, Kaplanis, 1988 y Koch et al., 1991) encontraron que las correlaciones han cambiado con el tiempo, tienden a aumentar durante períodos inestables. Por otra parte, King y Wadhvani (1990) y Bertero y Mayer (1990) encontraron que la correlación internacional tiende a aumentar durante los períodos de crisis de mercado. Sin embargo, el coeficiente de correlación es sesgado en regímenes de alta volatilidad (Boyer et al., 1995) y puede ser engañoso si la volatilidad es un factor importante para el contagio (Forbes *et al.*, 2002).

Para evitar este sesgo, un método común es usar un modelo del tipo GARCH para estimar la correlación condicional, y luego probar si se producen incrementos significativos o no, después del choque. Por ejemplo, Longin y Solnik (1995) utilizaron un modelo bivariado GARCH y encontraron que las correlaciones entre los principales mercados bursátiles suben en períodos de alta volatilidad. Ramchand y Susmel (1998) utilizaron una conmutación del modelo ARCH y encontraron que las correlaciones entre el mercado de valores de E.U.A. y otros mercados, son en promedio de 2 a 3.5 veces más altas cuando el mercado de E.U.A. se encuentra en un estado de alta varianza. Muchos otros estudios (por ejemplo, Caporale et al., 2005, Chiang et al., 2007, Tai, 2007, Wang et al., 2007 y Choe et al., 2012) también han utilizado los modelos de tipo GARCH para investigar el fenómeno de contagio. Sin embargo, la correlación es sólo una medida lineal de dependencia.

Para medir la dependencia no lineal, existe otro método, el enfoque de cópulas. Recientemente, las cópulas han sido ampliamente utilizadas en investigaciones de contagio (por ejemplo, Rodríguez, 2007, Ning et al., 2009, Ning, 2010, Reboredo, 2011 y Wen et al., 2012). Las cópulas pueden contener toda la información sobre la estructura de dependencia de un vector de variables aleatorias. Ellas pueden capturar la dependencia no lineal, mientras que la correlación es sólo una medida lineal de la dependencia. En particular, las cópulas contienen información sobre el comportamiento conjunto de las variables aleatorias en las colas de la distribución, lo que debería ser de interés primario en un estudio de contagio durante las crisis

financieras (Rodríguez, 2007). Se sabe que, cuando se hace uso del enfoque de cópula, se puede emplear un procedimiento de dos pasos para la estimación del modelo:

1. Transformar los datos en bruto a variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (vaid) y estimar las distribuciones marginales; y
2. Ajustar los parámetros de la función de cópula.

Pero existe heteroscedasticidad en series de tiempo financieras, así que es necesario filtrar la heteroscedasticidad y hacer que los datos se transforman en válidos para aplicar el método de cópula. El método más popular para filtrar la heteroscedasticidad es el modelo tipo GARCH, seguido de un segundo paso que se conoce como el modelo cópula-GARCH. Una serie de documentos (Wei et al., 2008, Chuang et al., 2013, Wei et al. 2011, Chen et al., 2011 y Weiet al., 2013) han encontrado que las medidas de volatilidad basadas en métodos multifractales pueden obtener una mejor precisión de los pronósticos que los modelos de tipo GARCH o RV. Por tanto, en este trabajo, se emplea un método para filtrar la heteroscedasticidad de las series de tiempo financieras, los multifractales, tal como lo propone Wei y Wang (2008), en combinación con el segundo paso se le denomina el modelo de copula-multifractales.

Desde los estudios originales de Mandelbrot (1997 y 1999), han surgido una serie de estudios que revelan que muchas series de tiempo del mercado financiero presentan características fractales (Bouchaud et al., 1999, Bonanno et al., 2001, Mantegna et al., 1995, Mantegna et al., 1999 y Stanley et al., 1999). Las herramientas multifractales también se utilizan para tener en cuenta algunos hechos importantes que no pueden ser descritos por métodos tradicionales (Bacry et al., 2001, Cont, 2001 y Mandelbrot et al., 1997), y otras investigaciones financieras, tales como la predicción de volatilidad (Eisler et al., 2004, Lux, 2003, Calvet et al., 2001 y Calvet, 2004), la eficiencia del mercado (Cajueiro et al., 2004, Tabak et al., 2007 y Zunino et al., 2008), y la asignación de carteras (Calvet et al., 2006 y Muzy et al., 2001). Las características multifractales no se han limitado a mercados financieros desarrollados, sino también en mercados de valores emergentes, como se han observado en estudios recientes sobre China (Jiang et al., 2007, Wei et al., 2005 y Yuan et al., 2008).

En este trabajo se estudia el contagio financiero entre los mercados desarrollados y mercados emergentes utilizando los índices bursátiles de los siguientes países: Alemania

(DAX), España (IBEX 35), E.U.A. (S&P500), Francia (CAC 40), Inglaterra (FTSE 100), Argentina (MERVAL), Brasil (BOVESPA), Chile (IPSA), México (IPC) y Perú (IGBVL). Se analiza la variación de dependencia de 2004 a 2015 usando el enfoque de cópula con el fin de detectar el efecto contagio después de las crisis mencionadas. Para empezar, se cuenta con un modelo multifractal para estimar la volatilidad para cada mercado, y transformar los rendimientos a una distribución normal (0,1) por la probabilidad integral de transformación. Por último, con el fin de probar el efecto de contagio, se utilizan las cópulas para analizar la variación de la dependencia de la cola entre los mercados de valores antes mencionados.

5.1. Análisis de Datos

Los datos empleados en el presente estudio consisten en los índices de precios más representativos, por ejemplo: Alemania (DAX), España (IBEX 35), E.U.A. (S&P500), Francia (CAC40), Inglaterra (FTSE 100), Argentina (Merval), Brasil (Ibovespa), Chile (IPSA), México (IPC) y Perú (IGBL); durante el período de tiempo enero de 2004 a diciembre de 2015.²⁶

Con el fin de excluir las correlaciones incorrectas entre estos mercados, se eliminaron las observaciones en las que la información no está disponible para alguno de los mercados a comparar, debido a días festivos u otras razones. Para la muestra de países seleccionados se obtuvieron 2,596 observaciones, coincidentes. Las cotizaciones se indican como I_t para $t = 1, 2, \dots, N$ donde $N = 2,596$.

Tabla 5.1 Número de observaciones por país

País	Observaciones
DAX	3,064
IBEX 35	3,059
S&P 500	3,021
CAC 40	3,075
FTSE 100	3,116
Merval	2,955
Ibovespa	2,986
IPSA	2,996
IPC	3,025
IGBL	2,988

Fuente: Elaboración propia

²⁶ Ver Apéndice C para detalles sobre los índices de precios.

Posteriormente, se dividen las muestras de los índices de los mercados financieros en dos períodos: uno de pre crisis y otro de crisis; para realizar esta división es necesario fechar el inicio de la crisis subprime. Según Philips y Yu (2010) la crisis se hizo oficial a partir de agosto de 2007. Por tanto, se consideraron las observaciones comprendidas entre enero 2004 a julio 2007 para el periodo de pre crisis y a partir de agosto de 2007 hasta diciembre 2015 para el periodo de crisis.

En el Apéndice D. Estadística Descriptiva de los Índices de Precios, se muestran las estadísticas del período total de estudio (enero de 2004- diciembre de 2015), el período de pre crisis (enero de 2004- julio de 2007) y el período de crisis (agosto de 2007- diciembre de 2011). En cada uno de los períodos y para el período total las series presentan raíces unitarias, razón por la cual se obtienen los rendimientos logarítmicos de éstas.

Para obtener estos rendimientos logarítmicos diarios expresados como R_t se aplicó la siguiente fórmula:

$$R_t = 100 * (\ln I_t - \ln I_{t-1}) \quad \text{Ec. 5.1}$$

El Apéndice E. Rendimiento diario y rendimiento al cuadrado, se muestran las gráficas de rendimientos diarios de estos mercados y los rendimientos diarios cuadrados, durante el periodo que abarca del 1 de enero de 2004 al 31 de diciembre de 2015. En estas gráficas, se puede encontrar fácilmente que estos mercados de valores tienen fluctuaciones fuertes después de un choque intenso a finales de 2008.

A continuación, en la tabla 5.2, presentan algunos estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del periodo total, periodo de pre crisis y periodo de crisis. Las series de tiempo que se muestran en la tabla 5.2 son estacionarias de acuerdo a la prueba ADF (Dickey et al., 1979) y las distribuciones muestran diferentes grados de asimetría y leptocurticidad. La asimetría y curtosis son significativos al nivel del 1% en las distribuciones, por lo tanto rechaza firmemente la hipótesis nula de la normalidad de acuerdo con la prueba de Jarque- Bera (Jarque et al., 1987). Mientras, las series de tiempo no son series iid de acuerdo con la prueba de BDS (Brock et al., 1987). Por otra parte, bajo la hipótesis nula de no autocorrelación, las pruebas Q de Ljung-Box muestran que todas las series son significativamente autocorrelacionadas.

En resumen, estos estadísticos muestran una desviación estándar pequeña y una curtosis muy elevada, lo cual indica una aglomeración de los datos alrededor de la media. Por otro lado se muestra un valor de asimetría positivo, lo que indica que la distribución de los datos cuenta con una cola más larga hacia la derecha.

Tabla 5.2. Estadística Descriptiva de los Rendimientos

Periodo Total										
	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
Media	0.0325	0.0076	0.0202	0.0086	0.0107	0.0808	0.0224	0.0303	0.0524	0.0468
Mediana	0.0929	0.0654	0.0699	0.0474	0.0153	0.1239	0.0409	0.0473	0.0915	0.0423
Máximo	10.7975	10.4458	10.9572	10.5946	9.3842	10.4316	13.6766	11.8034	10.4407	12.8156
Mínimo	-7.4335	-9.7665	-9.4695	-9.4715	-9.2645	-12.9516	-12.0961	-7.2363	-7.2661	-13.2908
Desviación Estándar	1.3667	1.4989	1.2261	1.4039	1.1526	2.0251	1.7768	1.0185	1.2671	1.5569
Sesgo	-0.0052	-0.2833	-0.3335	0.0159	-0.1654	-0.5091	-0.0299	0.0024	0.0745	-0.4795
Curtosis	6.2991	4.8721	11.4529	6.5684	8.9279	3.7610	5.1786	10.7743	6.2604	9.7564
ADF	-13.5150	-13.1050	-12.1730	-12.8740	-12.8700	-12.6260	-11.9340	-13.7490	-12.6590	-13.0150
Jarque-Bera	3098.8000	3018.6000	12617.0000	3222.6000	7561.4000	1785.4000	2040.9000	3609.3000	2839.1000	8664.9000
BDS	13.0941	13.5722	18.4149	12.1891	15.6863	13.3879	12.9723	18.4089	14.8999	22.8080
Q(10)	18.1600	27.6240	119.9000	19.3930	31.7400	26.4820	35.1300	66.6840	61.7310	129.4900

Periodo de Precrisis										
	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
Media	0.0707	0.0720	0.0300	0.0508	0.0430	0.0705	0.0941	0.0856	0.1318	0.2349
Mediana	0.1238	0.0999	0.0779	0.0804	0.0494	0.1572	0.1588	0.1074	0.2244	0.2131
Máximo	2.6051	2.6151	2.4270	2.5047	2.6046	6.0860	5.1643	2.9595	6.5101	8.2050
Mínimo	-3.5162	-4.0524	-3.5343	-3.2272	-2.9633	-8.7367	-6.8565	-5.0985	-5.9775	-7.8929
Desviación Estándar	0.9262	0.8129	0.7036	0.8436	0.6705	1.6895	1.6357	0.8487	1.1737	1.3125
Sesgo	-0.4174	-0.6141	-0.3374	-0.4092	-0.3964	-0.4763	-0.2861	-0.7480	-0.2343	-0.3212
Curtosis	0.8403	2.3428	1.5210	1.0646	1.7654	2.5387	0.8616	3.8409	2.7725	5.7727
ADF	-9.2059	-8.2854	-8.9122	-9.1702	-8.8502	-8.9093	-9.0254	-8.3169	-8.6738	-9.2645
Jarque-Bera	46.8690	238.3300	52.6470	56.2450	141.4400	314.1300	34.4930	680.7100	148.3600	944.3000
BDS	3.9944	5.1352	1.9655	4.4407	6.3672	5.6965	2.9618	6.3224	5.6323	13.5477
Q(10)	7.5813	3.2089	12.0350	14.1480	30.0380	9.7373	9.4958	12.6780	10.1970	43.1350

Periodo de Crisis

	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
Media	0.0162	-0.0199	0.0159	-0.0095	-0.0020	0.0854	-0.0094	0.0059	0.0180	-0.0364
Mediana	0.0746	0.0420	0.0636	0.0377	0.0046	0.1069	0.0000	0.0170	0.0369	-0.0105
Máximo	10.7975	10.4458	10.9572	10.5946	9.3842	10.4316	13.6766	11.8034	10.4407	12.8156
Mínimo	-7.4335	-9.7665	-9.4695	-9.4715	-9.2645	-12.9516	-12.0961	-7.2363	-7.2661	-13.2908
Desviación Estándar	1.5160	1.7096	1.3937	1.5841	1.3081	2.1593	1.8353	1.0841	1.3044	1.6469
Sesgo	0.0553	-0.2071	-0.3002	0.0651	-0.1214	-0.5091	0.0610	0.1867	0.1871	-0.4579
Curtosis	5.5462	3.5170	9.3035	5.3145	7.2608	3.6592	6.3118	11.3817	7.2263	10.0491
ADF	-12.0480	-11.7200	-10.7850	-11.4470	-11.2500	-10.8810	-10.5440	-11.9560	-10.7130	-10.5530
Jarque-Bera	1760.5000	1134.8000	5698.0000	1513.7000	3681.9000	1123.5000	2114.6000	2319.0000	2695.9000	6311.8000
BDS	10.5397	10.1656	15.4569	9.2108	12.9020	11.3179	12.8205	16.0058	13.8632	18.6071
Q(10)	18.7190	23.6450	93.3740	16.5450	26.8530	22.8520	31.7190	64.3750	54.1030	103.3900

Notas: ADF es Argumented Dickey-Fuller test; Q(.) es el estadístico Ljung-Box

Fuente: Elaboración Propia

5.2. Modelo Multifractal

Un número de estudios recientes han encontrado que el espectro multifractal de las fluctuaciones de precios y cotizaciones contiene valiosa información sobre la volatilidad del mercado (Sun, Chen, Wu y Yuan 2001 y Sun et al., 2001). Por lo tanto, en esta sección, se discute cómo construir una medida de la volatilidad de un espectro multifractal y cómo modelar la serie multifractal de acuerdo con el método del análisis multifractal de fluctuaciones. En contraste con la medición de volatilidad realizada por Andersen y Bollerslev, (1998), la medida de volatilidad es construida tomando como base los datos de precios de cotizaciones en lugar de los datos de rentabilidad. Siguiendo los pasos de Wei y Wang, (2008), primero se calcula el espectro multifractal utilizando datos de los precios de cotizaciones antes de calcular la volatilidad del espectro multifractal.

Se emplea el método de análisis multifractal de fluctuaciones para calcular el espectro multifractal de las series de tiempo. A continuación se presenta el algoritmo para el cálculo del espectro multifractal de series de tiempo a partir de MF-FA, el cual está basado en la teoría descrita en el capítulo anterior.

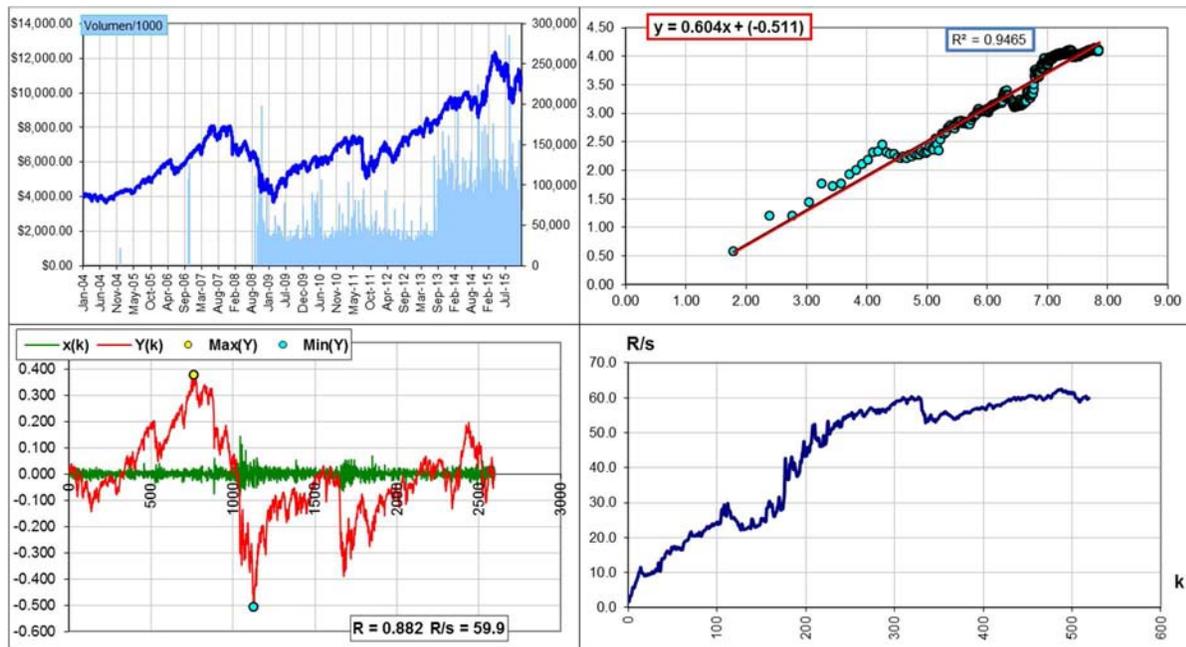
1. Se remueven las tendencias estacionarias de la series de tiempo. Este procedimiento conduce a la generación de una nueva serie denominada ϕ_i .
2. Se genera el perfil de la serie de tiempo a partir de la ecuación Z_n .
3. Con el perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones, definiendo un q constante y evaluando la función de fluctuaciones $F_q(s)$ para varias resoluciones s .
4. Con los valores encontrados de $F_q(s)$ y s se realiza un ajuste lineal entre $\ln(F_q(s))$ vs $\ln(s)$, donde la pendiente de dicho ajuste corresponde al exponente de Hurst generalizado para el momento de orden q , $h(q)$.
5. Se repiten los pasos 3 y 4 para varios valores de q , obteniendo la curva $h(q)$.
6. Posterior al cálculo de la curva del exponente de Hurst generalizado, $h(q)$, se procede a utilizar la transformada de Legendre para la estimación del espectro multifractal $f(\alpha)$.

El análisis de espectro multifractal se aplicó en los 3 periodos de estudio. Para el periodo total tenemos cotizaciones de precios $l(t)$ donde t va de 1 hasta 2,596. Las variaciones de precios en el periodo de estudio pueden estar divididas en varios intervalos de tiempo de

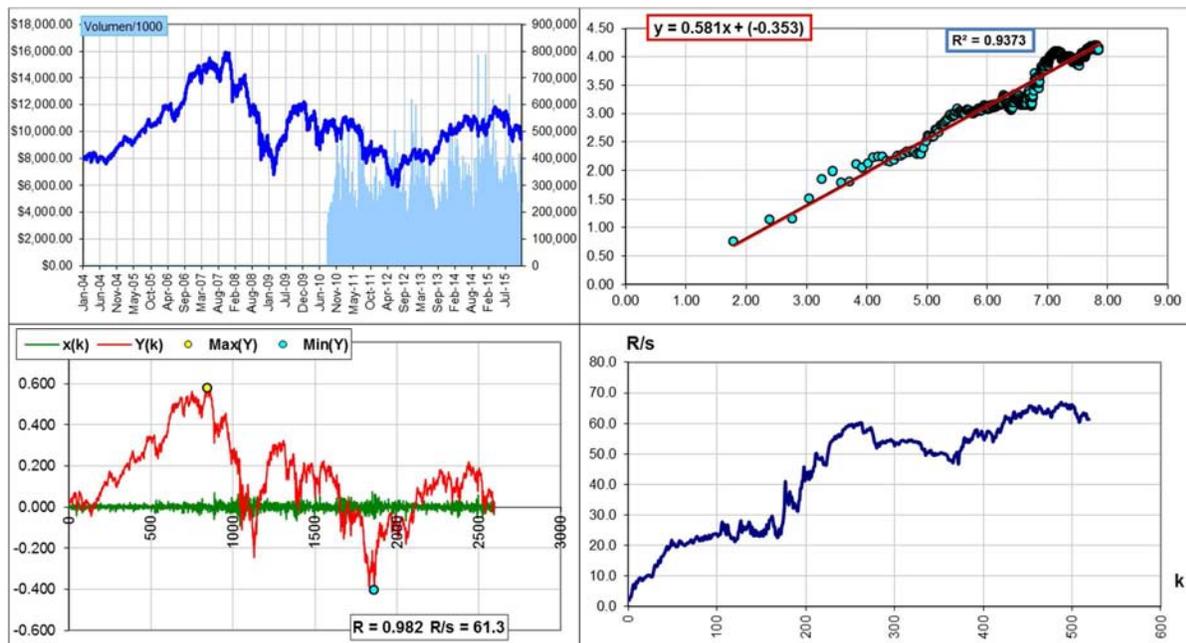
tamaño A . En este caso, el tamaño de A es 519 considerando n igual 5, tal que satisfaga la ecuación $A \cdot n = N$, donde N es el número de observaciones 2,596. Aplicando el algoritmo anterior, se puede apreciar en la figura 5.1 los rendimientos y su volumen, el coeficiente de Hurst, las tendencias estacionarias, así como su perfil, y el rango reescalado (R/S).

Figura 5.1. Análisis Multifractal – Periodo Total

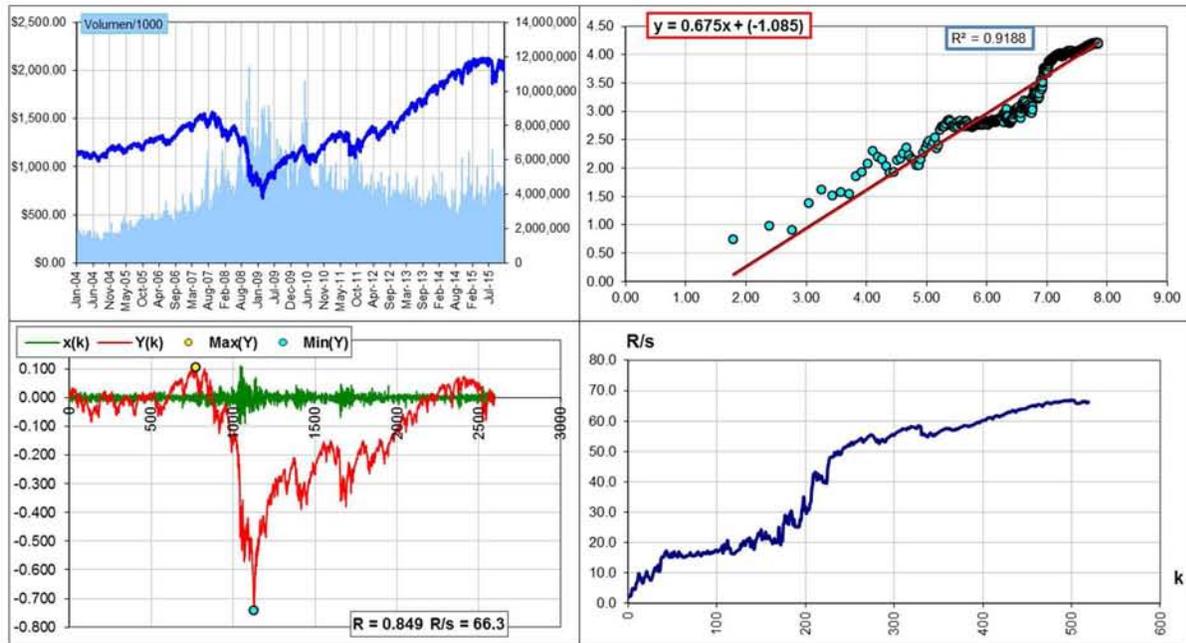
DAX



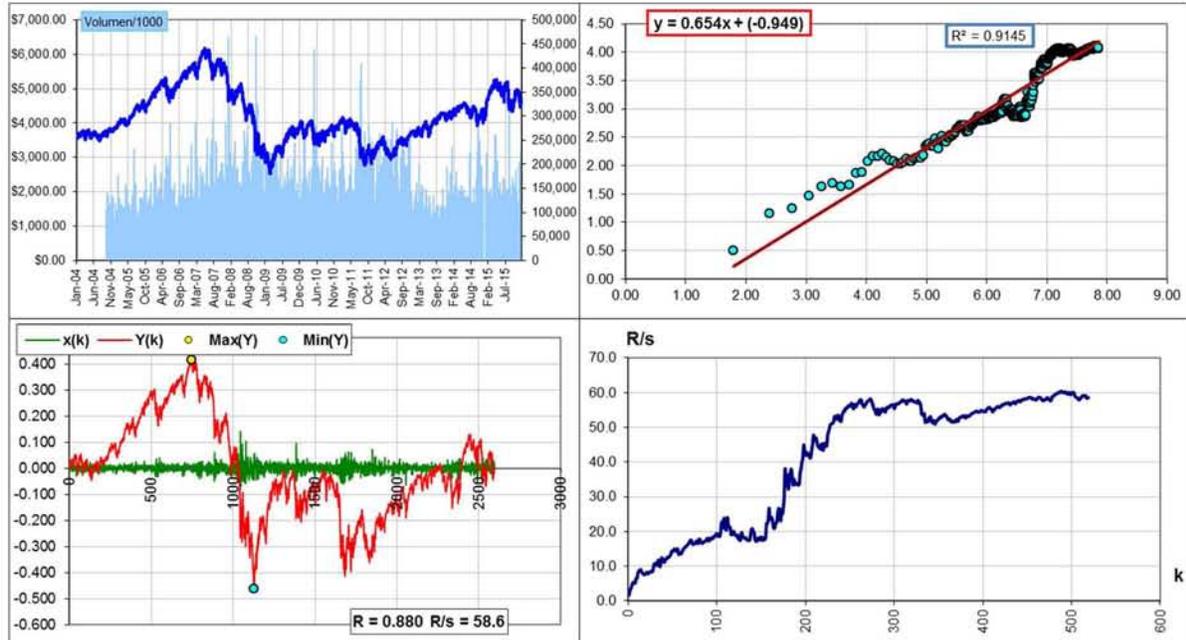
IBEX 35



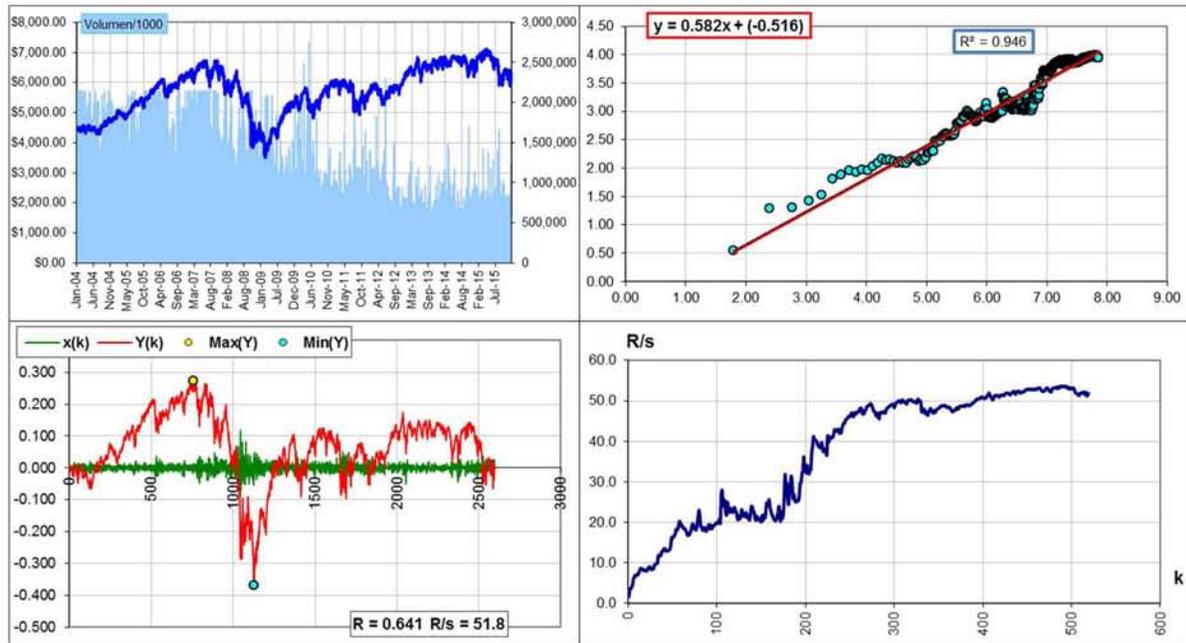
S&P 500



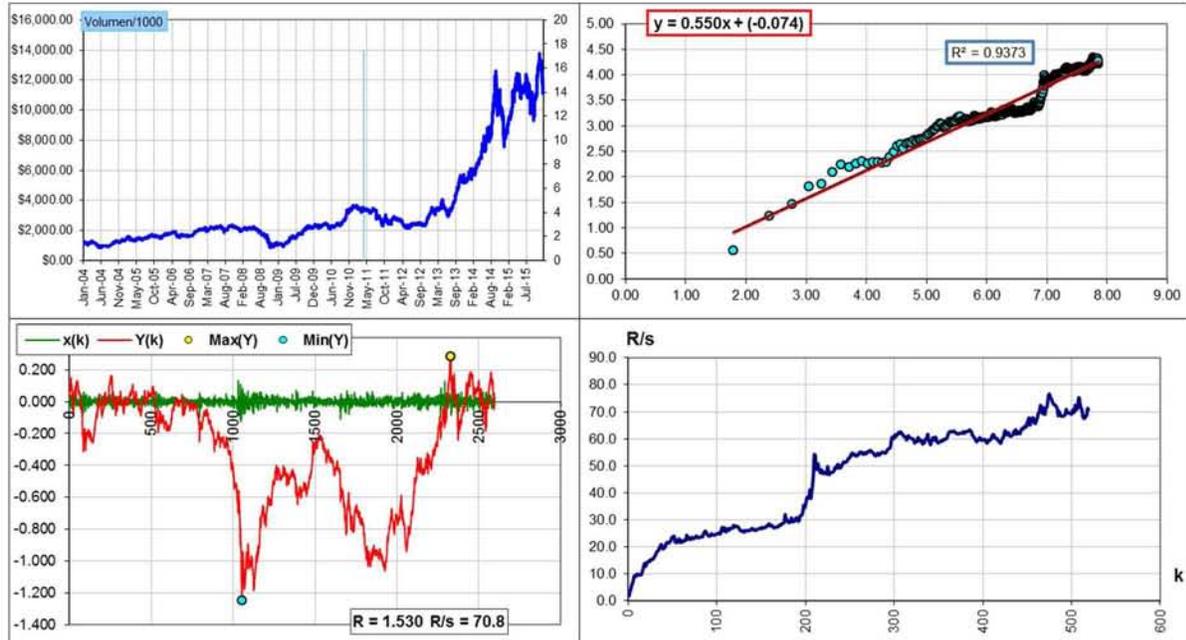
CAC 40



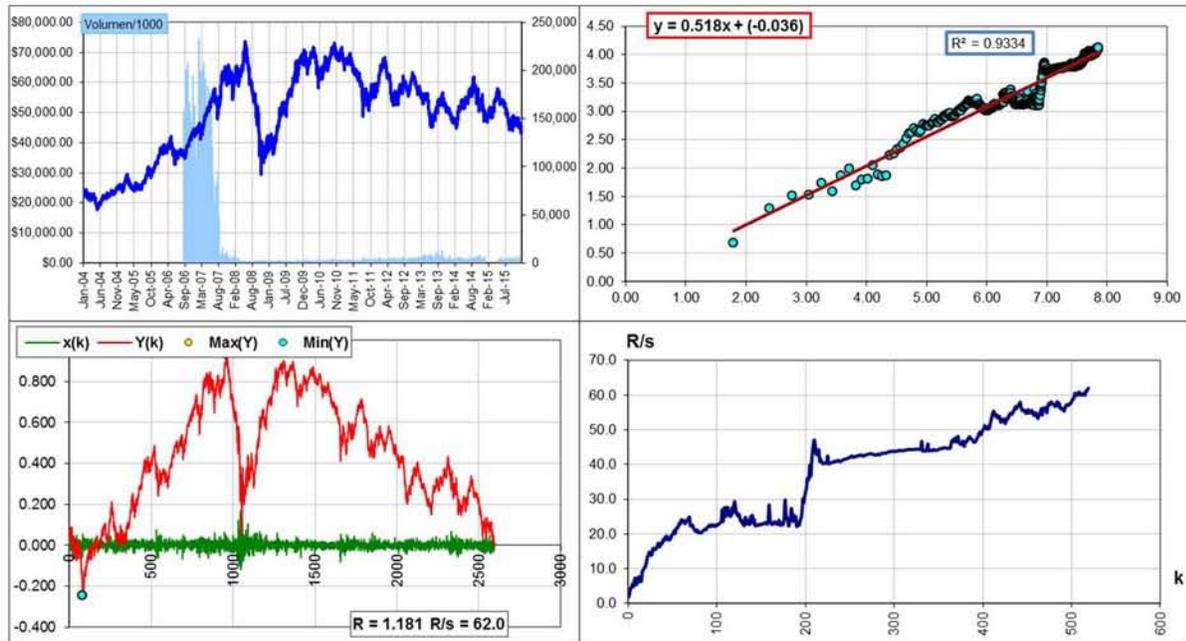
FTSE 100



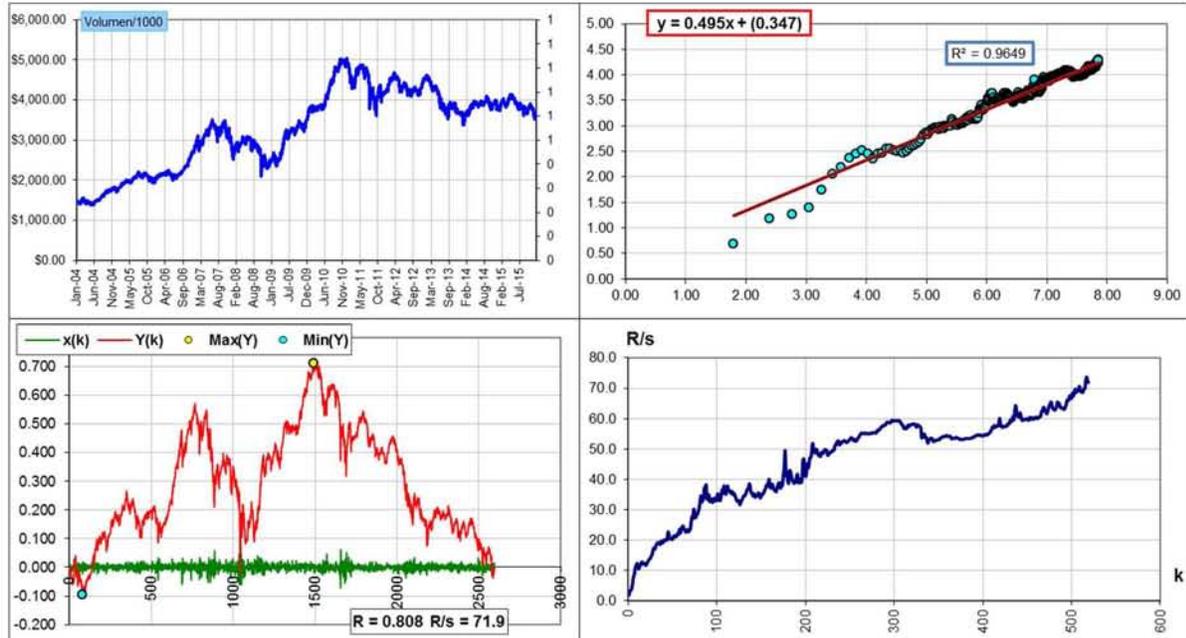
Merval



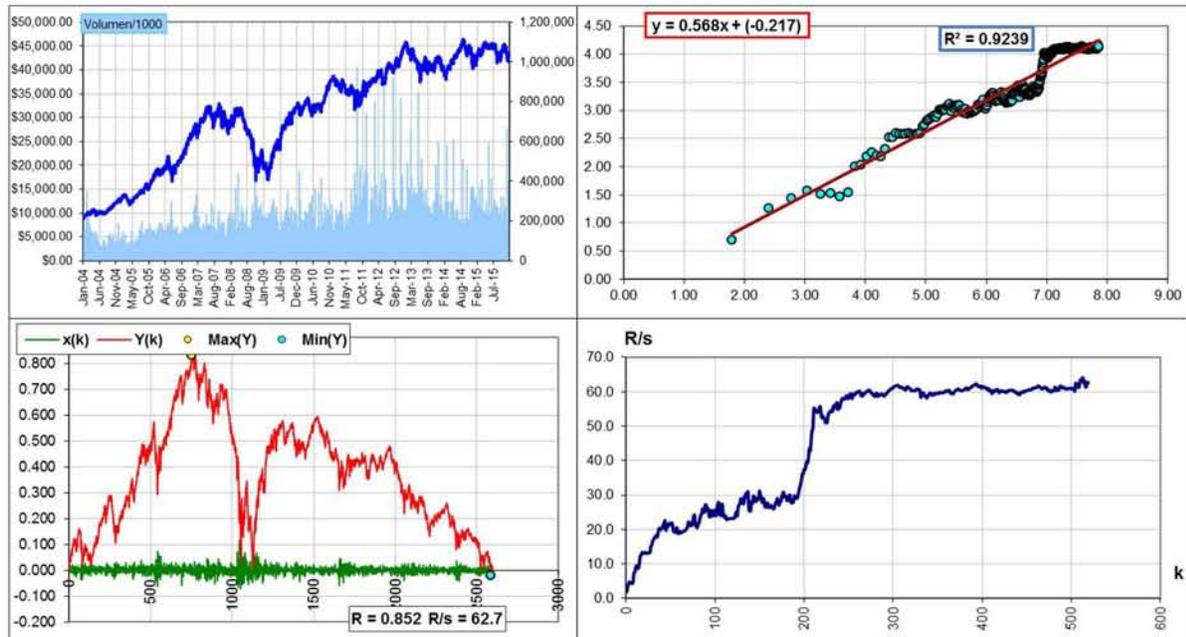
Ibovespa



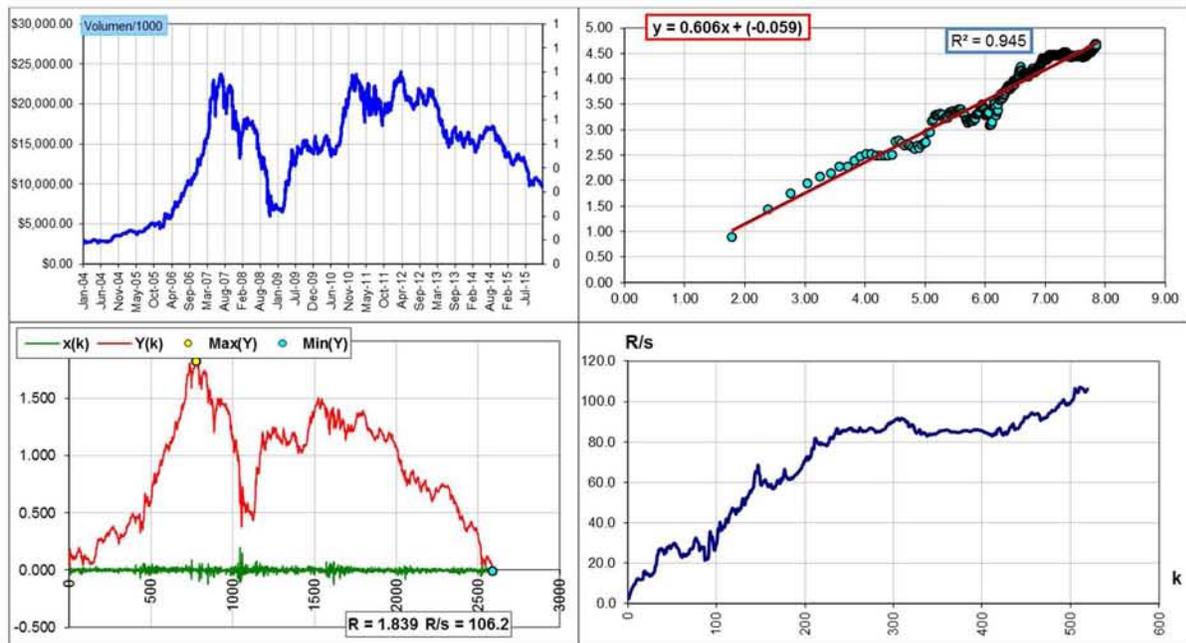
IPSA



IPC



IGBL



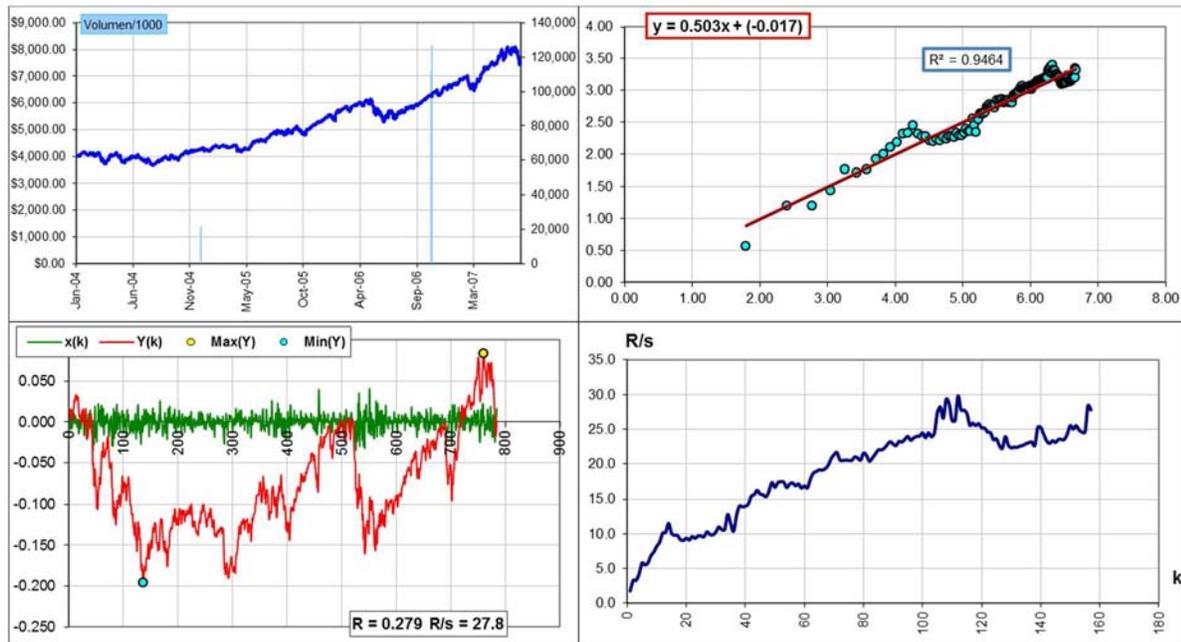
Fuente: Elaboración propia

Para el periodo pre crisis, el tamaño de A es 157 considerando n igual 5, y el número de observaciones es de 486. En la figura 5.2 se muestran los rendimientos y su volumen, el

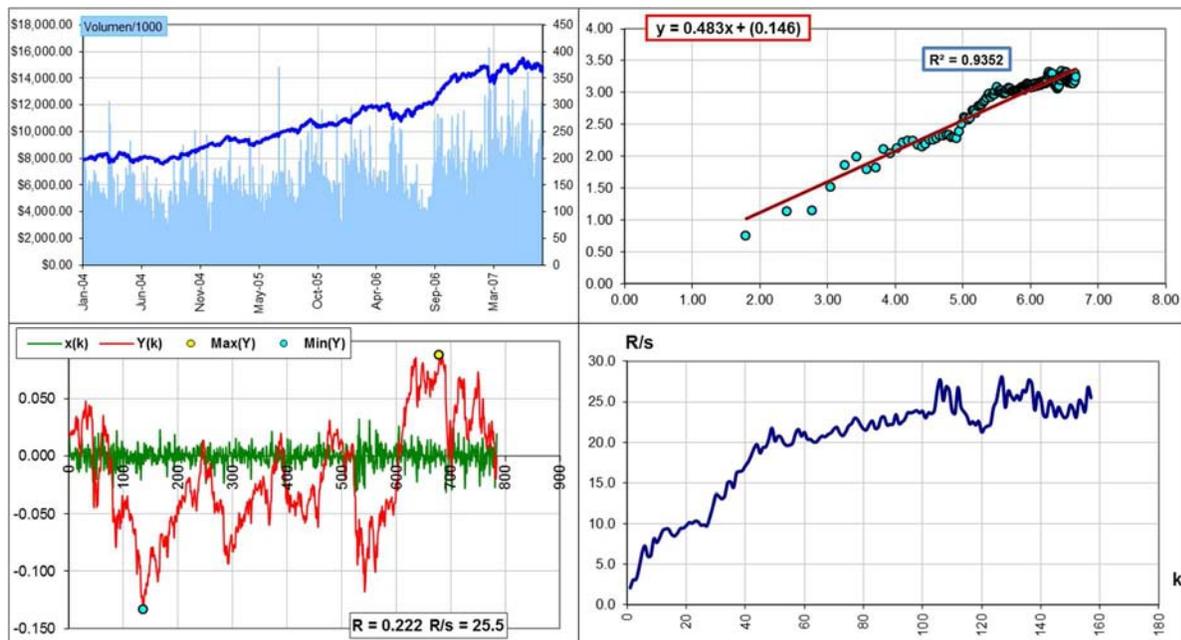
coeficiente de Hurst, las tendencias estacionarias, así como su perfil, y el rango reescalado (R/S).

Figura 5.2. Análisis Multifractal – Periodo Pre crisis

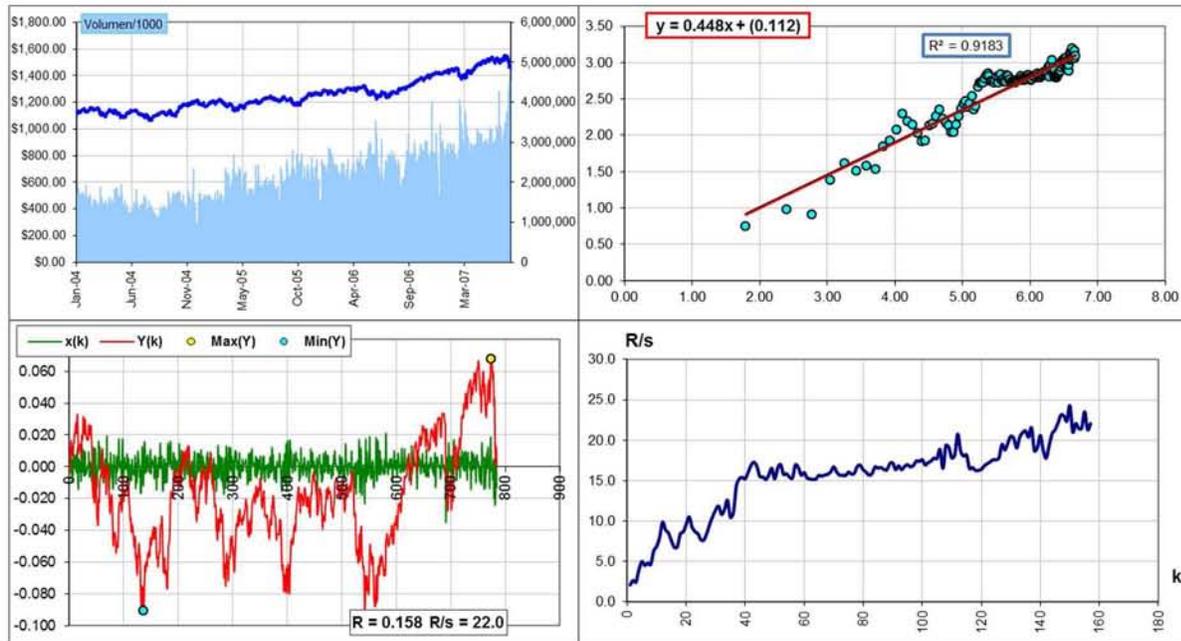
DAX



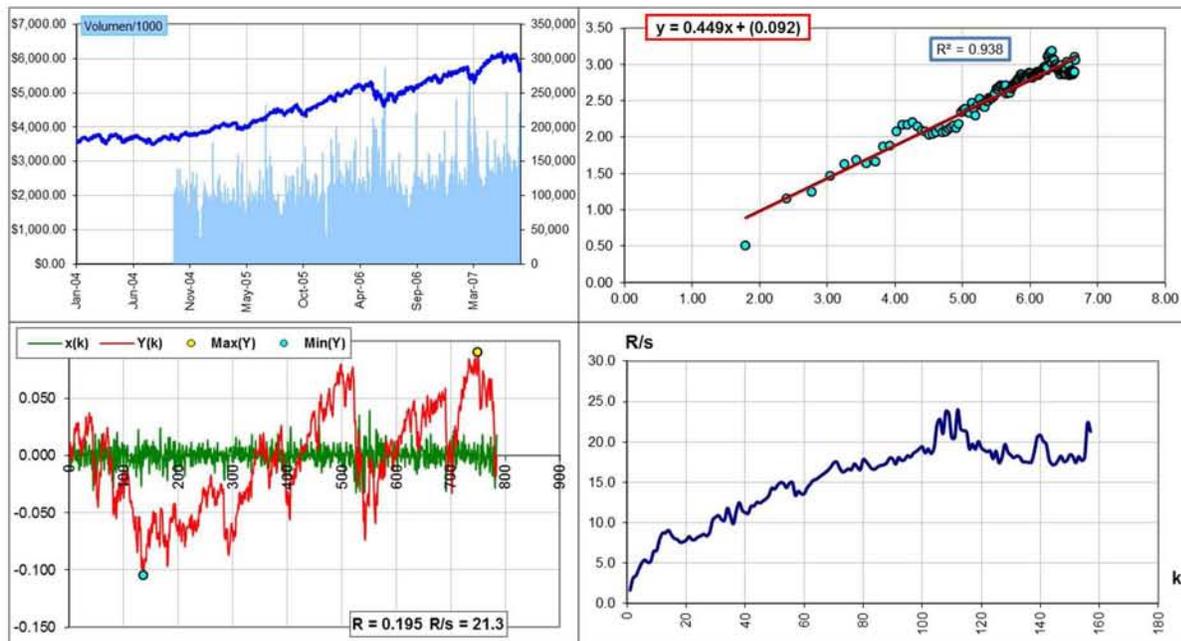
IBEX 35



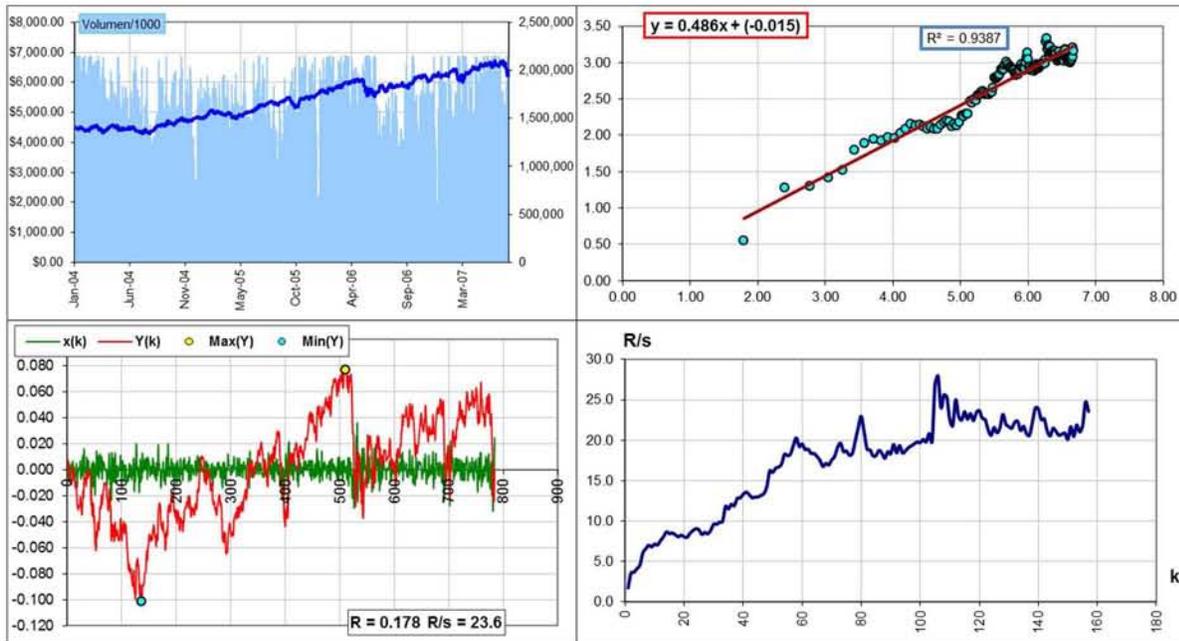
S&P 500



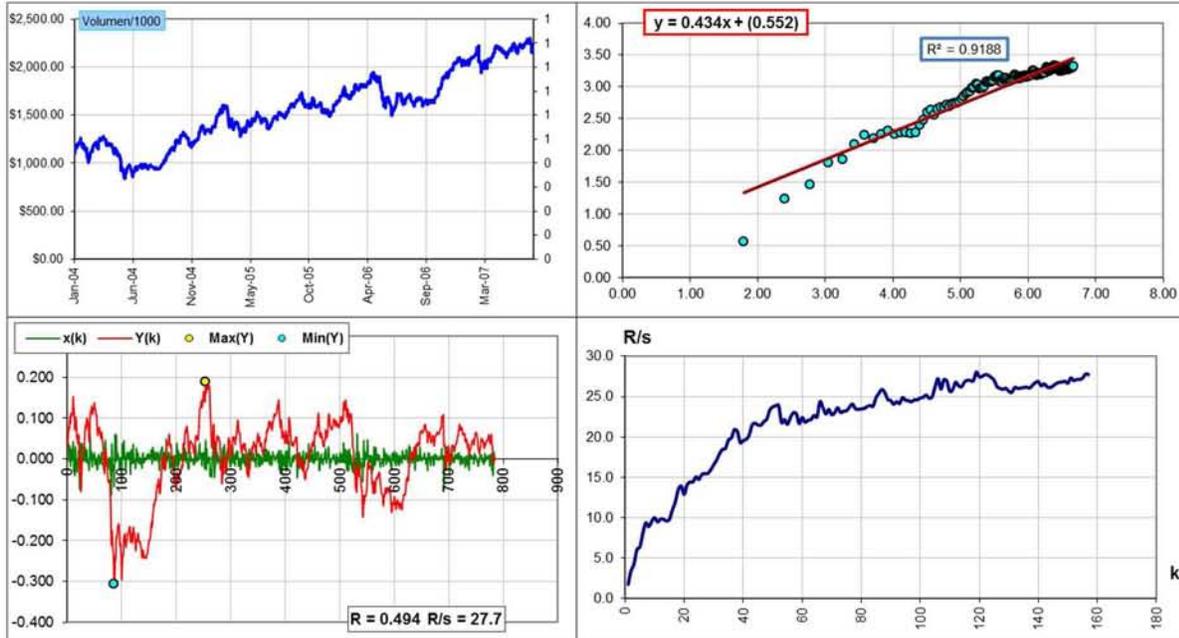
CAC 40



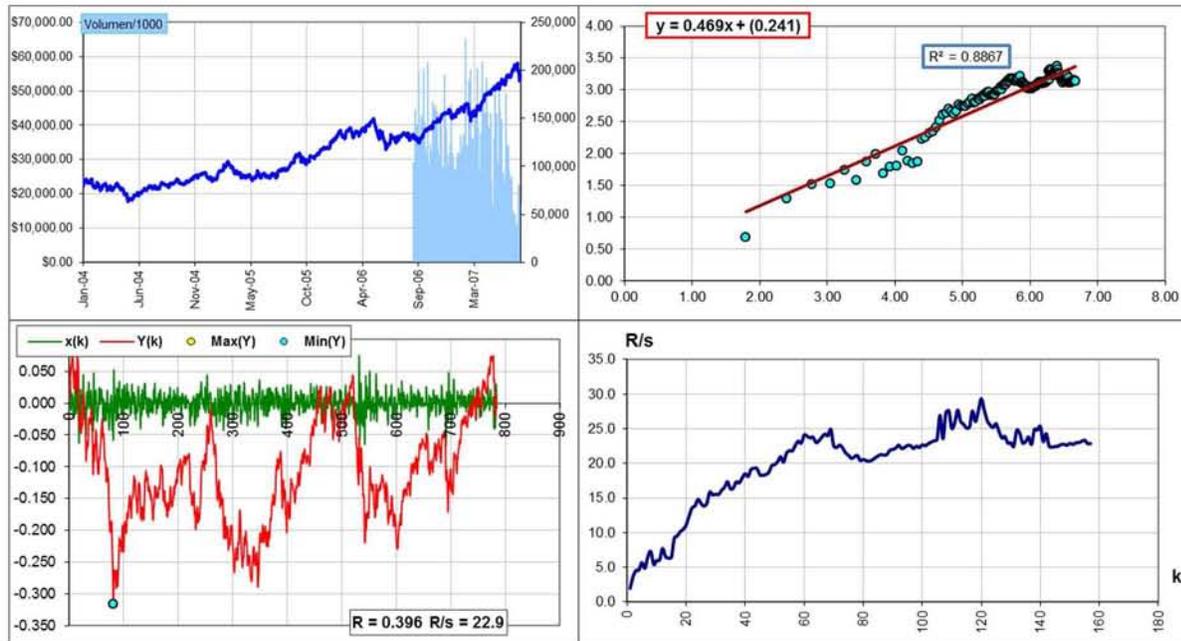
FTSE 100



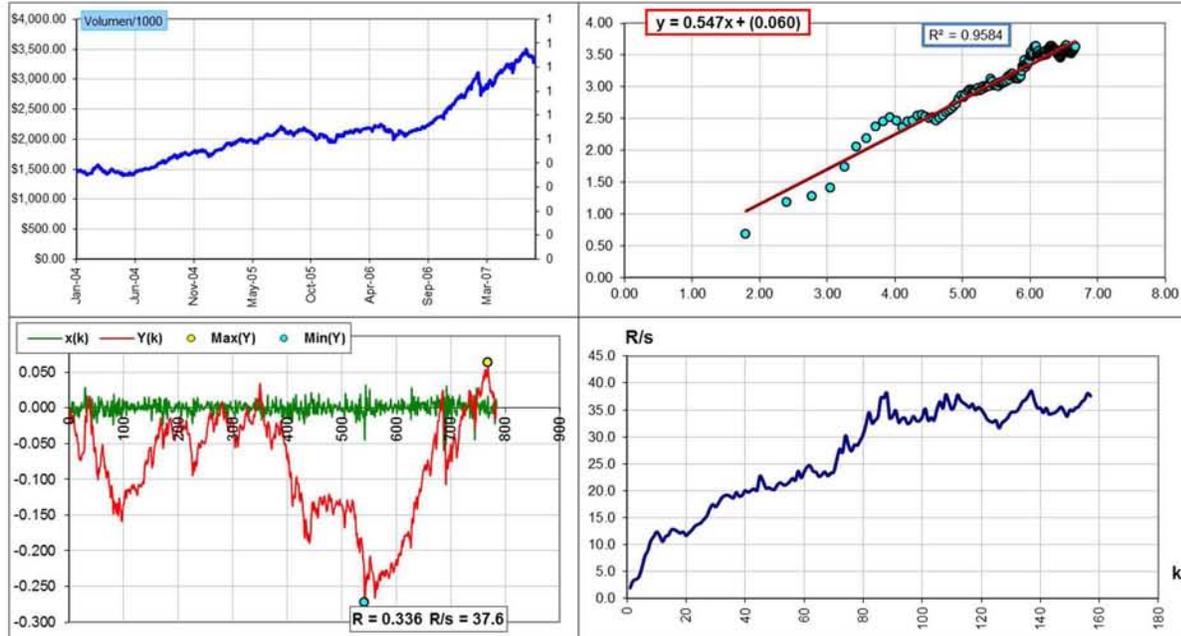
Merval



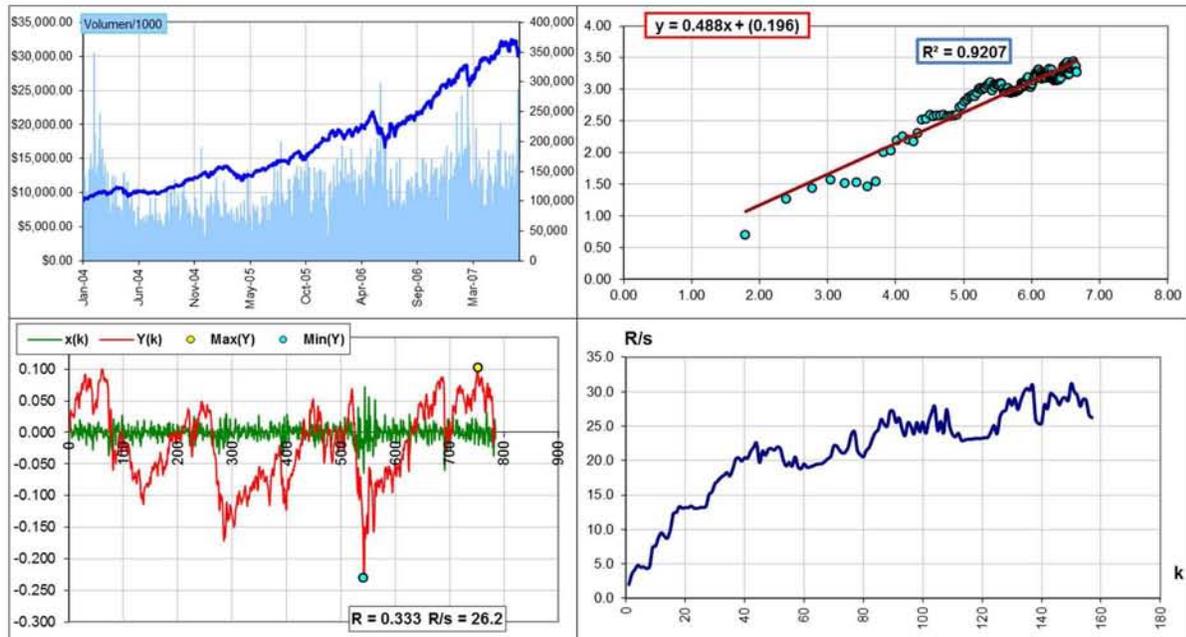
Ibovespa



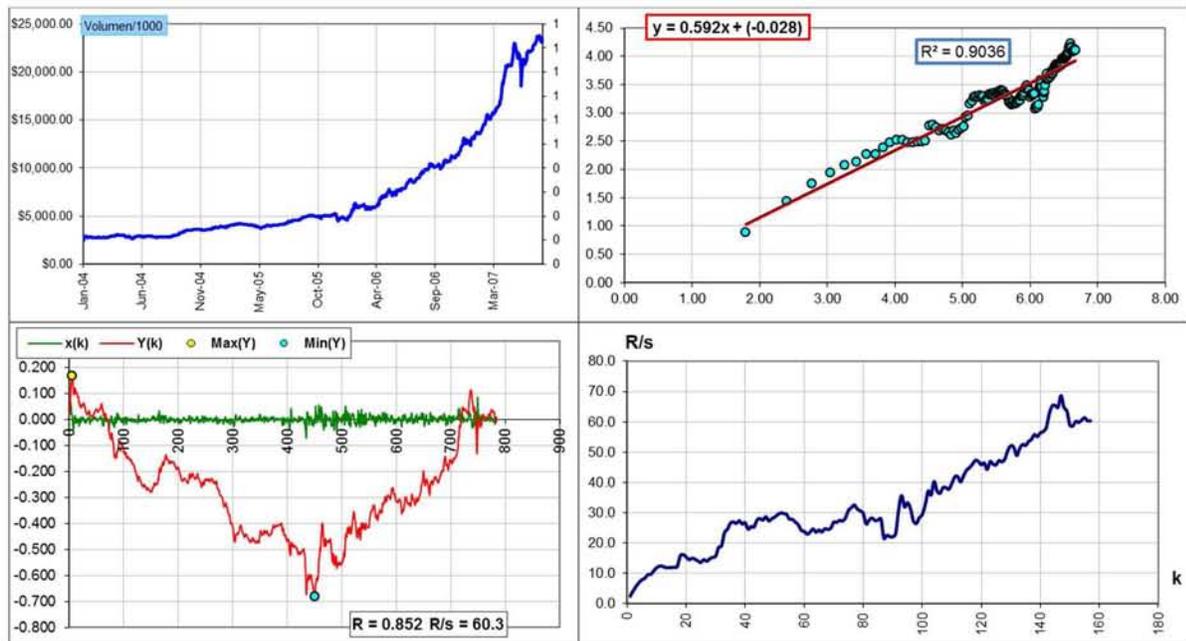
IPSA



IPC



IGBL



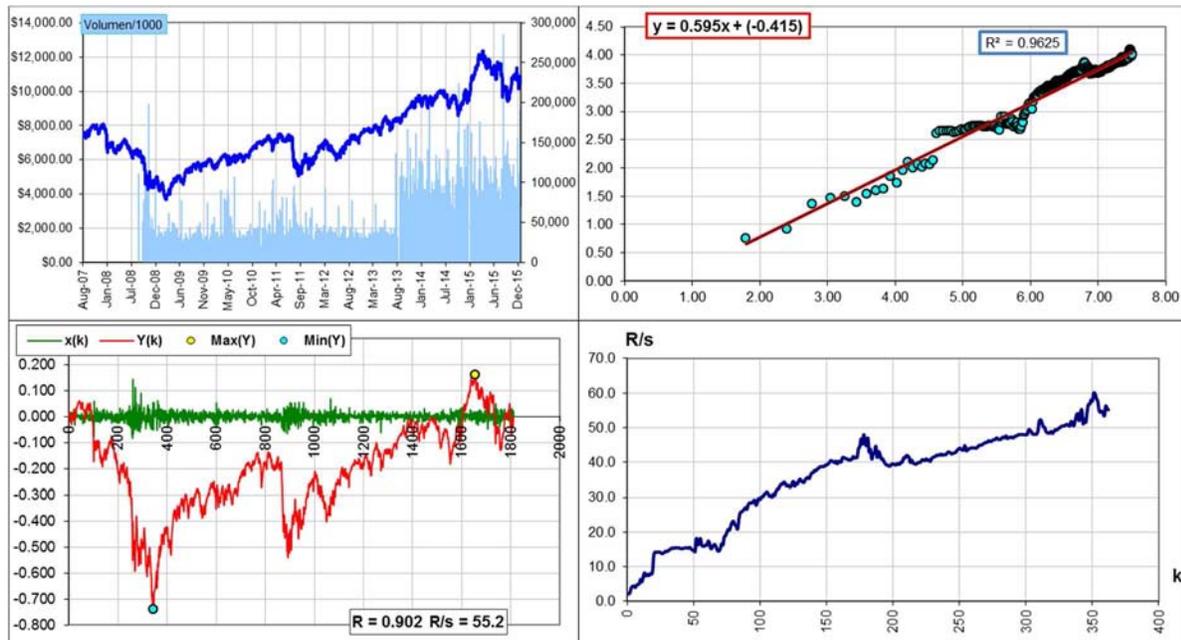
Fuente: Elaboración propia

Para el periodo crisis, el tamaño de A es 362 considerando n igual 5, y el número de observaciones es de 1812. En la figura 5.3 se muestran los rendimientos y su volumen, el

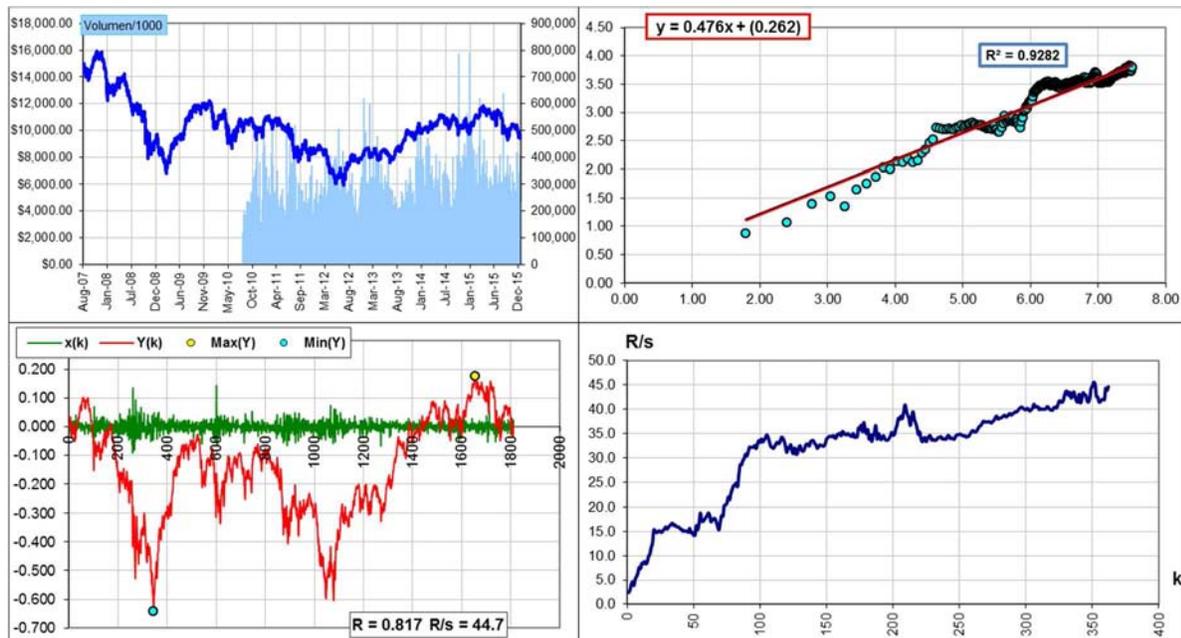
coeficiente de Hurst, las tendencias estacionarias, así como su perfil, y el rango reescalado (R/S).

Figura 5.3. Análisis Multifractal – Periodo Crisis

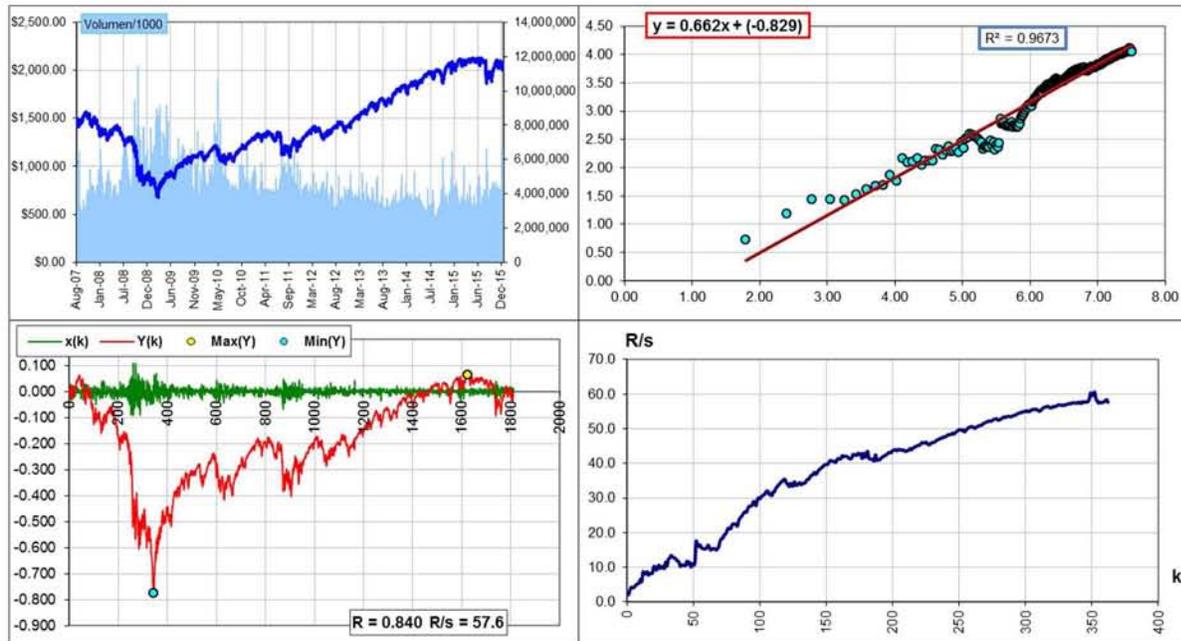
DAX



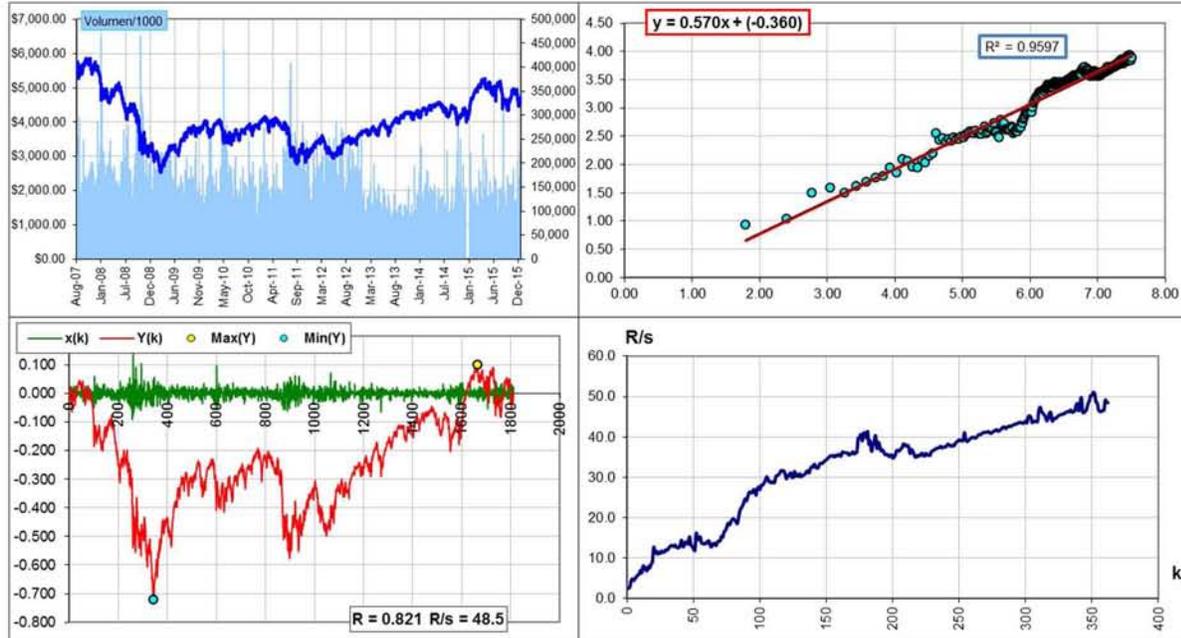
IBEX 35



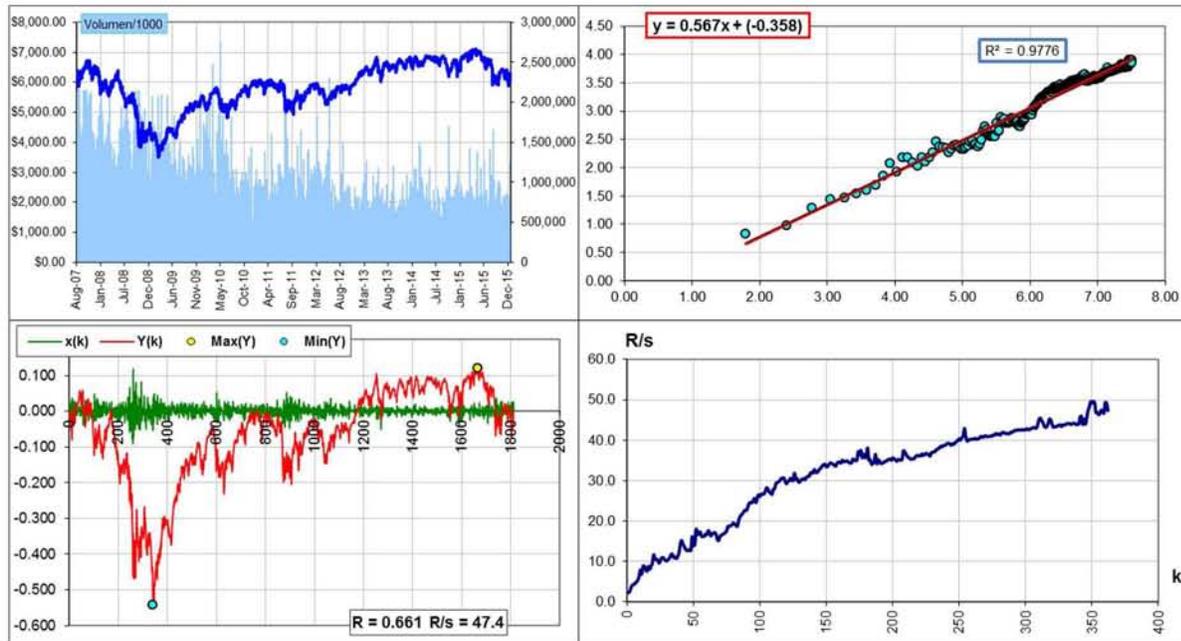
S&P 500



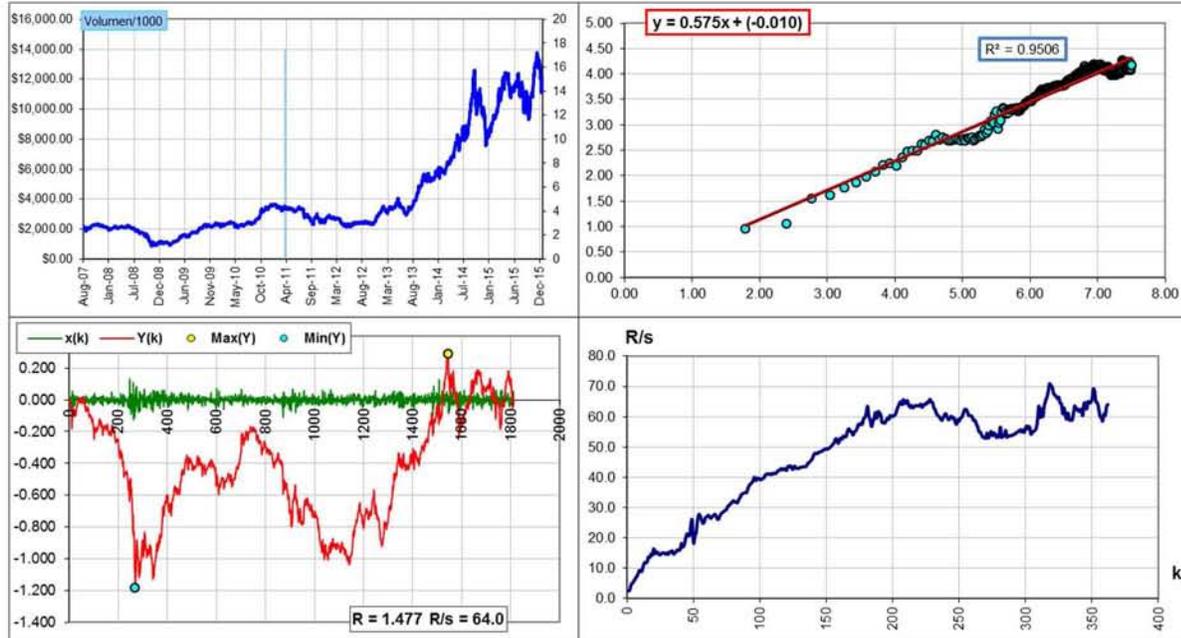
CAC 40



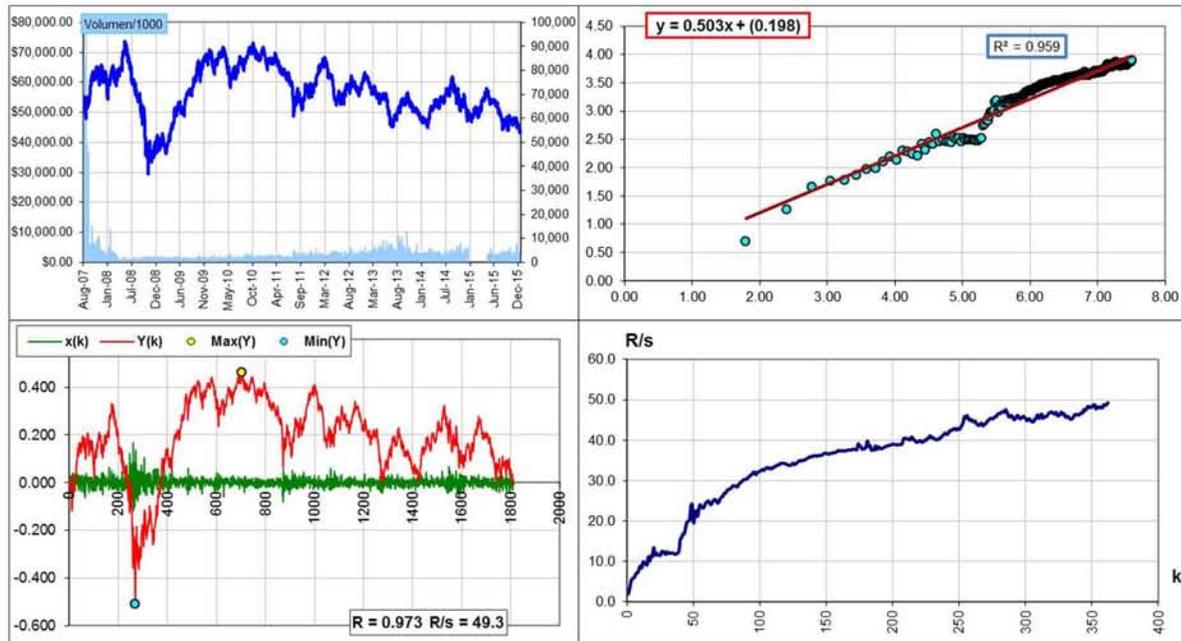
FTSE 100



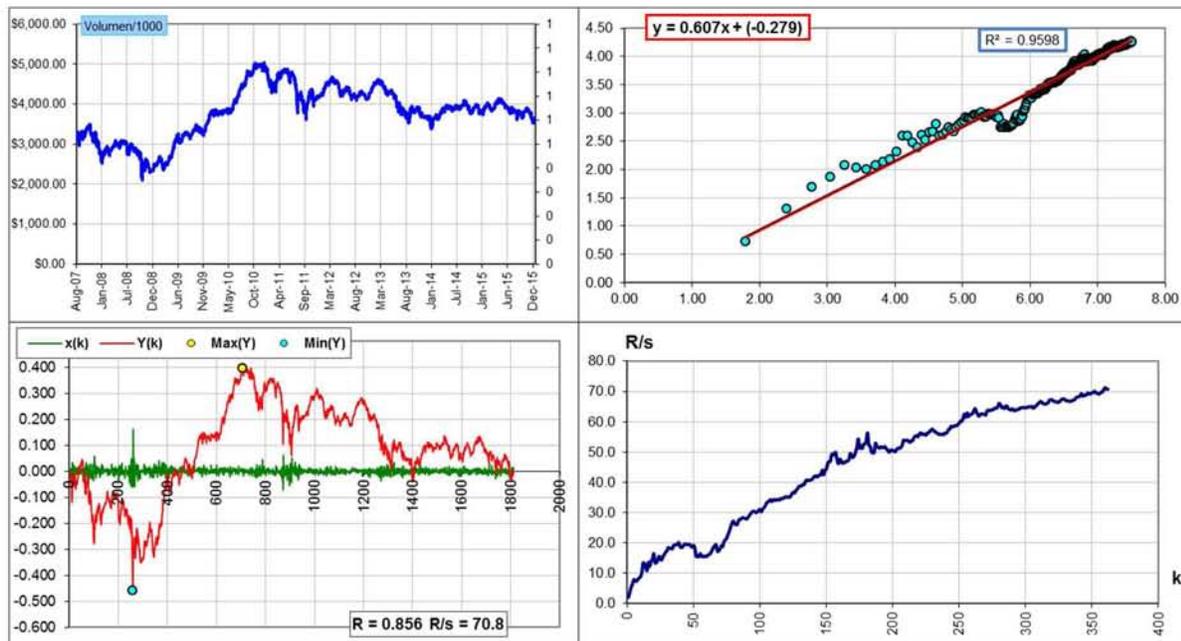
Merval



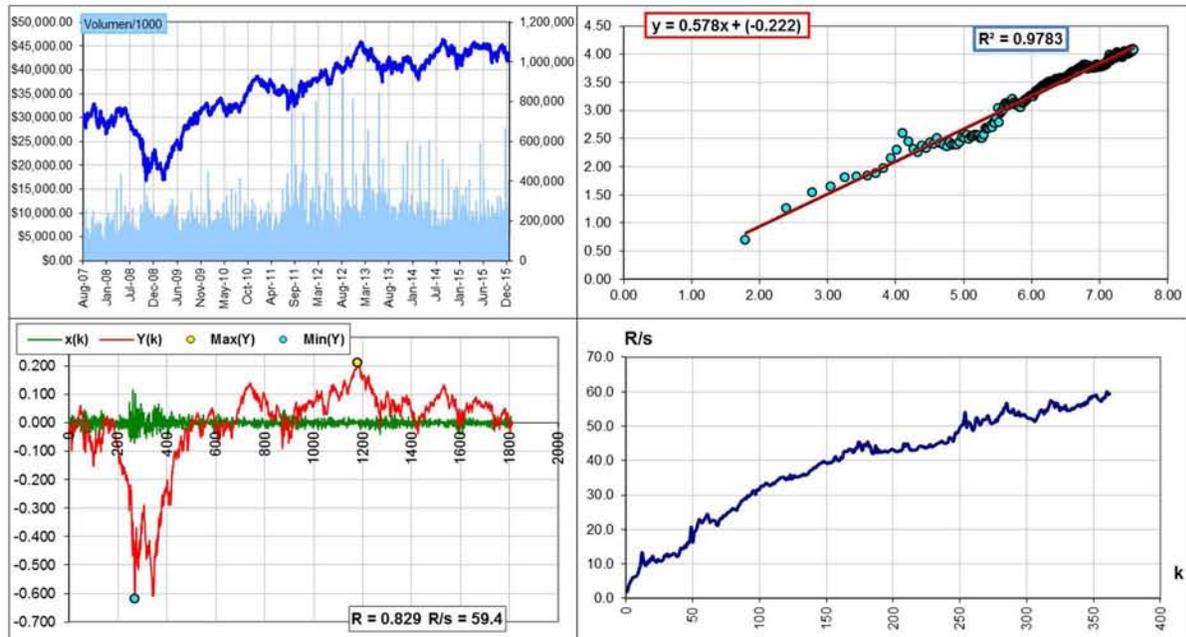
Ibovespa



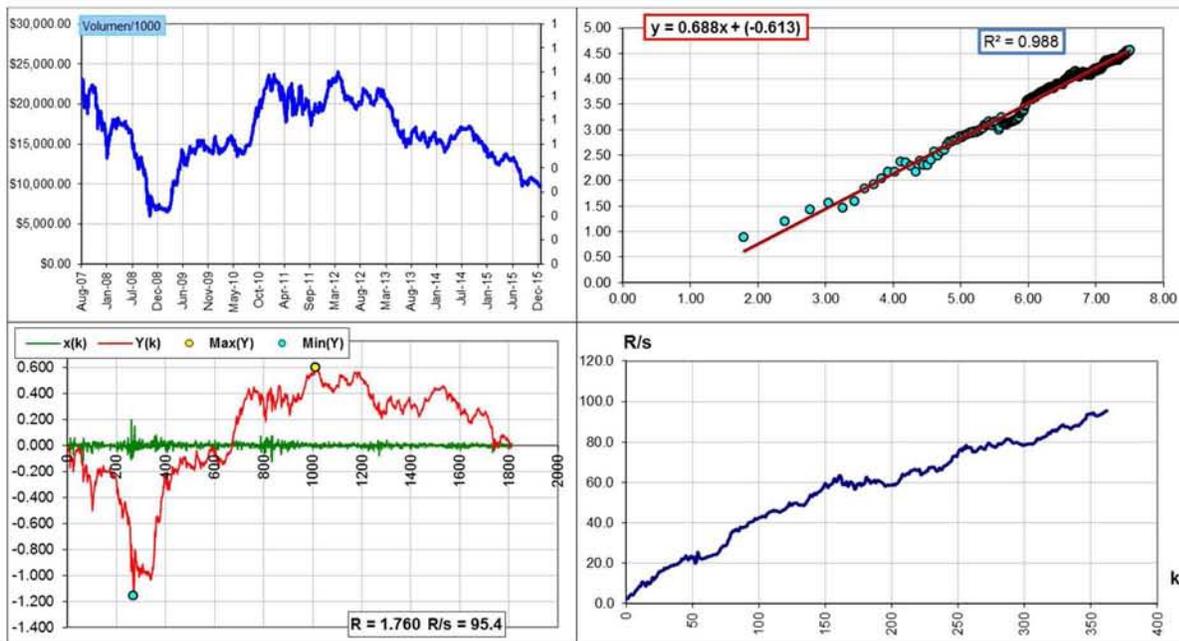
IPSA



IPC



IGBL



Fuente: Elaboración propia

Debe tenerse en cuenta que el objetivo principal del desarrollo del análisis de reescalamiento, es detectar persistencia mediante un fenómeno de memoria larga en la serie,

típico de las series con dinámica no lineal e incluso caos (Peters, 1994 y Díaz, 2000). El sesgo que se genera en el resultado puede ser reducido, según (Peters, 1994), mediante el un procedimiento llamado *detrending* o método de análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencias, el cual consiste en la aplicación de un filtrado sobre la serie a analizar. De esta forma se espera eliminar gran parte del sesgo generado por estos procesos.

En el caso en que el residuo del filtrado de la serie fuese un proceso aleatorio antipersistente, quiere decir que la totalidad de la dinámica era lineal y/o con memoria únicamente de corto plazo, lo cual es perfectamente modelable mediante las estructuras AR, MA, ARMA y ARIMA. En la tabla 5.3, se puede observar, que los datos muestran persistencia para los 3 periodos de estudio.

Tabla 5.3. Coeficiente de Hurst y Dimensión Fractal

Índice	Periodo Total		Periodo de Pre crisis		Periodo de Crisis	
	Coeficient e de Hurst	Dimensión Fractal	Coeficient e de Hurst	Dimensión Fractal	Coeficient e de Hurst	Dimensión Fractal
DAX	0.59	1.40	0.54	1.50	0.61	1.41
IBEX 35	0.56	1.42	0.55	1.52	0.54	1.52
S&P 500	0.58	1.32	0.51	1.55	0.62	1.34
CAC 40	0.59	1.35	0.50	1.55	0.55	1.43
FTSE 100	0.55	1.42	0.52	1.51	0.57	1.43
Merval	0.52	1.45	0.56	1.57	0.62	1.43
Ibovespa	0.51	1.48	0.56	1.53	0.55	1.50
IPSA	0.55	1.51	0.60	1.45	0.57	1.39
IPC	0.56	1.43	0.57	1.51	0.58	1.42
IGBL	0.62	1.39	0.57	1.41	0.68	1.31

Fuente: Elaboración propia

5.3. Las Cópulas y su Estructura de Dependencia

En este capítulo, se utilizan cópulas para investigar el fenómeno de contagio financiero después de obtener rendimientos normalizados utilizando el análisis multifractal. Sin embargo, lo primero que se realiza es la identificación del grado de relación lineal entre los mercados financieros entre los países muestra, haciendo uso de una matriz de correlación como se muestra en la tabla 5.4. Lo anterior se hace con el fin de obtener una primera aproximación a la

dependencia existente entre los mercados y contrastarla con los resultados obtenidos mediante el uso de cópulas.

Los coeficientes de correlación para los países de la muestra son todos positivos. Estos coeficientes estarían reflejando el comportamiento de manada (*herding behavior*) de los mercados financieros al salir de toda la región cuando un choque adverso afecta a un país dentro de ésta, incluso cuando no presentan los mismos fundamentos.

Tabla 5.4. Coeficientes de correlación

	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
DAX	1									
IBEX 35	0.81897	1								
S&P 500	0.647288	0.578312	1							
CAC 40	0.924019	0.888626	0.637384	1						
FTSE 100	0.85086	0.797635	0.629332	0.903114	1					
Merval	0.486491	0.469391	0.560161	0.497964	0.50245	1				
Ibovespa	0.538945	0.501737	0.684376	0.549766	0.565704	0.599922	1			
IPSA	0.528846	0.484209	0.5449	0.548682	0.562308	0.466459	0.579505	1		
IPC	0.586494	0.516059	0.730971	0.582638	0.590632	0.537274	0.706559	0.579983	1	
IGBL	0.467793	0.445717	0.440888	0.488093	0.516308	0.436587	0.482133	0.468782	0.461179	1

Fuente: Elaboración propia

Para cada una de las submuestras de los países, se filtran las series de los retornos logarítmicos para considerar algunos de los hechos estilizados de las series financieras, como la heterocedasticidad y autocorrelación, haciendo uso del método de análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencias, como se mostró anteriormente.

Posteriormente, se hace uso de las cópulas, las cuales contienen toda la información sobre la estructura de dependencia de un vector de variables aleatorias. De acuerdo con el teorema de Sklar, una función de distribución conjunta bi-dimensional D con marginales continuos F_X y F_Y tienen una representación cópula única, $D(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$, y para una función de distribución conjunta, las distribuciones marginales y la estructura de dependencia descritas por una cópula se pueden separar. Presentaciones más detalladas de las aplicaciones de las cópulas en finanzas se pueden encontrar en los estudios de Malevergne et al., 2006 y Patton, 2002. Para capturar los diferentes patrones de la dependencia de cola, en este trabajo se utilizan las cópulas bivariadas que se han estudiado a menudo en la literatura: t -Student, Joe, Clayton, Gumbel y Frank.

Los marginales u_1 y u_2 son variables aleatorias uniformes iid (0,1). El primer paso es realizar una transformación integral de probabilidad (PIT), de la siguiente forma:

$$u_i = F_i(z_i), \quad i = 1, 2 \quad \text{Ec. 5.2}$$

Donde z_i denota los rendimientos estandarizados del mercado i .

De acuerdo a la ecuación 4.34 para la cópula t -Student, la ecuación 4.48 para la cópula Joe, la ecuación 4.39 para la cópula Clayton, la ecuación 4.42 para la cópula Gumbel y la ecuación 4.45 para la cópula Frank, desarrolladas en el capítulo 4, se procede a determinar si las relaciones de dependencia entre los mercados cambiaron durante el periodo de estudio. Para realizar lo anterior se estima para cada una de las submuestras las cópulas mencionadas. Los pares se conforman de la siguiente manera: entre un país desarrollado y cada uno de los índices de los países emergentes, adicionalmente se incluyó el análisis entre E.U.A. y cada uno de los países desarrollados.

En el Apéndice F. Resultados Estimados para 5 Cópulas, se presentan las tablas resumen de las cópulas t -Student, Clayton, Gumbel, Frank y Joe para cada uno de los pares y periodos de muestra. En éstas se encuentra información acerca de la cópula estimada, el parámetro estimado, el logaritmo de la verosimilitud y los criterios de información (AIC y BIC).

Después de estimar las cópulas para cada una de las submuestras se estiman los coeficientes de dependencia asintótica en las colas, para determinar si en eventos extremos la dependencia entre las series es mayor. Las cópulas y los coeficientes de dependencia asintótica en las colas se estiman mediante el método de máxima verosimilitud. Un coeficiente de dependencia asintótica en las colas como su nombre lo indica, es una medida de dependencia en las colas de una distribución bivariada. Es una medida de gran relevancia en el análisis financiero pues por lo general se está interesado en analizar si la dependencia entre los factores de riesgo cambia en épocas de crisis, tanto para decisiones de inversión como de regulación. Este coeficiente también está definido para pares de vectores aleatorios. Cuando éstos tienen distribuciones marginales continuas el coeficiente depende sólo de la cópula del par de vectores.

En el Apéndice G. Resultados de los Coeficientes de Dependencia Asintótica se encuentran los resultados de la estimación de los coeficientes de dependencia estimados para

cada uno de los períodos y para cada una de las cópulas. En el Apéndice H. Resumen de Coeficientes de Dependencia entre Periodos se muestran los resultados de los coeficientes de dependencia durante el periodo de pre crisis y el periodo de crisis.

Una vez que se revisaron estos resultados, se puede observar que la cópula t-Student se ajusta mejor a la serie de tiempo, es por ello que se eligió esta cópula para determinar si las relaciones de dependencia cambiaron en cada uno de los pares de las submuestras; si el coeficiente de dependencia asintótica en las colas presenta un cambio significativo en el período de crisis en comparación con el período de pre crisis. En la tabla 5.5 se pueden encontrar los resultados.

Según el modelo teórico, los choques en los índices de las bolsas de valores deben ser mayor en épocas de crisis si los mercados tienen fricciones. Los resultados obtenidos confirman lo expuesto por el modelo para la crisis subprime y soberana europea, puesto que durante el período de crisis el coeficiente de dependencia fue mayor que durante el período de pre crisis para la mayoría de las parejas.

Tabla 5.5. Resumen Coeficientes de Dependencia

	<i>Coeficiente de dependencia</i>	
	<i>Precrisis</i>	<i>Crisis</i>
DAX - Merval	0.18	0.44
DAX - Ibovespa	0.06	0.07
DAX - IPSA	0.24	0.11
DAX - IPC	0.07	0.76
DAX - IGBL	0.11	0.66
IBEX 35 - Merval	0.5	0.1
IBEX 35 - Ibovespa	0.61	0.54
IBEX 35 - IPSA	0.29	0.02
IBEX 35 - IPC	0.4	0.14
IBEX 35 - IGBL	0.18	0
S&P 500 - Merval	0.4	0.58
S&P 500 - Ibovespa	0.1	0.58
S&P 500 - IPSA	0.18	0.1
S&P 500 - IPC	0.49	0.62
S&P 500 - IGBL	0.16	0.5
CAC 40 - Merval	0.31	0.32
CAC 40 - Ibovespa	0	0.13
CAC 40 - IPSA	0.36	0.19
CAC 40 - IPC	0.15	0.54
CAC 40 - IGBL	0.13	0.44
FTSE 100 - Merval	0.2	0.33
FTSE 100 - Ibovespa	0.09	0.13
FTSE 100 - IPSA	0.14	0.03
FTSE 100 - IPC	0.13	0.72
FTSE 100 - IGBL	0.13	0.83
S&P 500 - DAX	0.13	0.45
S&P 500 - IBEX 35	0.44	0
S&P 500 - CAC 40	0.22	0.69
S&P 500 - FTSE 100	0.05	0.6

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

El propósito de este capítulo es presentar los resultados obtenidos al utilizar las metodologías Fractales y Cópulas, mencionadas en el capítulo anterior. Para la obtención de los resultados se utilizaron los índices bursátiles de los siguientes países: Alemania (DAX), España (IBEX 35), E.U.A. (S&P500), Francia (CAC 40), Inglaterra (FTSE 100), Argentina (MERVAL), Brasil (BOVESPA), Chile (IPSA), México (IPC) y Perú (IGBVL).

La frecuencia de los datos es diaria, y el contagio financiero es un fenómeno de corto plazo. Por tanto, el período de estudio está comprendido entre el primero de enero de 2004 hasta el 31 de diciembre de 2015. Se eligió este período con el fin de tener en cuenta un período de pre crisis y toda la realización de ésta.

Después se excluyeron las correlaciones incorrectas entre estos mercados, eliminando observaciones en las que la información no está disponible para alguno de los mercados a comparar y se obtuvieron los retornos logarítmicos para los tres periodos de estudio para cada uno de los índices bursátiles.

A continuación, se obtuvieron los residuales estandarizados de los retornos logarítmicos de los índices bursátiles de cada uno de los períodos utilizando el espectro multifractal mediante el método de fluctuaciones para lograr que los datos sean estables en media y varianza, se procedió a construir la pseudo muestra.

Se trabajó con 5 cópulas, t- Student, Clayton, Gumbel, Frank y Joe, a fin de determinar cuál de ellas se ajusta mejor a la muestra, además para determinar las relaciones de dependencia entre los mercados se conformaron pares entre un país desarrollado y cada uno de los índices de los países emergentes, adicionalmente se incluyó el análisis entre E.U.A. y cada uno de los países desarrollados.

Seguidamente, se estiman los coeficientes de dependencia en las colas, para determinar si en eventos extremos la dependencia entre las series es mayor. Las cópulas y los coeficientes de dependencia en las colas se estiman mediante el método de máxima verosimilitud con los paquetes estadísticos *copulae* y *fcopula* desarrollados por el software estadístico R *cran*.

Según el modelo teórico, los choques entre los índices bursátiles deben ser mayor en épocas de crisis si los mercados tienen fricciones. Los resultados obtenidos confirman lo expuesto por el modelo para la crisis subprime y soberana europea, puesto que durante el período de crisis el coeficiente de dependencia fue mayor que durante el período de pre crisis para cada uno de los pares excepto para España y Chile, quienes muestran una menor dependencia después de la crisis. Con este resultado se puede sugerir que el mecanismo de transmisión de estos dos países no fue a través de la bolsa de valores, lo que indica que se trata de otro vínculo fundamental.

El mercado alemán y brasileño presentaron el menor nivel de dependencia: 0.07%, lo que significa que si un evento extremo se presenta en Alemania o Chile, las repercusiones entre estos mercados no serán tan significativos.

Por último, cabe mencionar que los coeficientes de dependencia para cada período (pre crisis y crisis) no son altos, por lo que al analizar cada uno de estos períodos por separado se llegaría a concluir erróneamente que no existe contagio entre los mercados estudiados, pues sólo se estaría teniendo en cuenta el nivel del coeficiente en cada caso y no el cambio de éste.

Referencias

- Andersen, T.G., T. Bollerslev, (1998). Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts, *Internat. Econom. Rev.* 39, pp 885–905.
- Bacry, E.m J. Delour, J.F. Muzy, (2001). Modelling financial time series using multifractal random walks, *Physica A* 299, pp 84–92.
- Baig, T., I. Goldfajn, (1999). Financial market contagion in the Asian crisis, *IMF Staff Pap.* , pp 46, pp 167–195.
- Barunik, J., T. Aste, T.D. Matteo, R. Liu, (2012). Understanding the source of multifractality in financial markets, *Physica A* 391, pp 4234–4251.
- Bennett, P., J. Kelleher, (1988). The international transmission of stock price disruption in October 1987, *Federal Reserve Bank New York Q. Rev.* 12, pp 17–33.
- Bertero, E., C. Mayer, (1990). Structure and performance: global interdependence of stock markets around the crash of October 1987, *Eur. Econ. Rev.* 34, pp 1155–1180.
- Bonanno, G., F. Lillo, R.N. Mantegna, (2001). Levels of complexity in financial markets, *Physica A* 299, pp 16–27.

- Bouchaud, J.P., M. Potters, (1999). *Theory of Financial Risk: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boyer, B.H., M.S. Gibson, M. Loretan, (1997). Pitfalls in tests for changes in correlations, in: *International Finance Discussion Papers*, No. 597.
- Brock, W.A., W.D. Dechert, J.A. Scheinkman, (1987). A Test for Independence Based on the Correlation Dimension, Department of Economics, University of Wisconsin at Madison, University of Houston, and University of Chicago.
- Cajueiro, D.O., B.M. Tabak, (2004). Ranking efficiency for emerging markets, *Chaos Solitons Fractals* 22, pp 349–352.
- Calvet, L.E., A.J Fisher, (2001). Forecasting multifractal volatility, *J. Econometrics* 105, pp 27–58.
- Calvet, L.E., A.J. Fisher, (2004). How to forecast long-run volatility: regime-switching and the estimation of multifractal processes, *J. Financ. Econometrics* 2, pp 49–83.
- Calvet, L.E., A.J. Fisher, S.B. Thompson, (2006). Volatility comovement: a multifrequency approach, *J. Econometrics* 131, pp 179–215.
- Caporale, G.M., A. Cipollini, N. Spagnolo, (2005). Testing for contagion: a conditional correlation analysis, *J. Empirical Financ.* 12, pp 476–489.
- Chiang, T.C., B.N. Jeon, H. Li, (2007). Dynamic correlation analysis of financial contagion: evidence from Asian markets, *J. Int. Money Financ.* 26, pp 1206–1228.
- Chen, H., C. Wu, (2011). Forecasting volatility in Shanghai and Shenzhen markets based on multifractal analysis, *Physica A* 390, pp 2926–2935.
- Choe, K., P. Choi, K. Nam, F. Vahid, (2012). Testing financial contagion on heteroscedastic asset returns in time-varying conditional correlation, *Pac.-Basin Financ. J.* 20, pp 271–291.
- Chuang, W.I., T.C. Huang, B.H. Lin, (2013). Predicting volatility using the Markov-switching multifractal model: evidence from S&P 100 index and equity options, *North Am. J. Econ. Financ.* 25, pp 168–187.
- Cont, R.m (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quant. Finance* 1, pp 223–236.
- Dickey, D.A., W.A. Fuller, (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *J. Amer. Statist. Assoc.* 74, pp 427–431.
- Eisler, Z., J. Kertesz, (2004). Multifractal model of asset returns with leverage effect, *Physica A* 343, pp 603–622.

- Engle, R.F., (2002). Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *J. Bus. Econom. Statist.* 20, pp 339–350.
- Forbes, K.J., R. Rigobon, (2002). No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements, *J. Financ.* 57, pp, pp 2223–2261.
- Hansen, P.R., A. Lunde, (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1, 1)? *J. Appl. Econometrics* 20, pp 873–889.
- Jarque, C.M., A.K. Bera, (1987). A test for normality of observations and regression residuals, *Int. Stat. Rev.* 55, pp 163–172.
- Jiang, Z.Q., W.X. Zhou, (2007). Scale invariant distribution and multifractality of volatility multipliers in stock markets, *Physica A* 381, pp 343–350.
- Jiang, Z.Q., W.X. Zhou, (2008). Multifractal analysis of Chinese stock volatilities based on the partition function approach, *Physica A* 387, pp 4881–4888.
- Jiang, Z.Q., W.X. Zhou, (2008). Multifractality in stock indexes: fact or fiction? *Physica A* 387, pp 3605–3614.
- Kaplanis, E.C., (1988). Stability and forecasting of the co-movement measures of international stock market return, *J. Int. Money Financ.* 8, pp 63–75.
- King, M.A., S. Wadhvani, (1990). Transmission of volatility between stock markets, *Rev. Financ. Stud.* 3, pp 5–33.
- Koch, P.D., T.W. Koch, (1991). Evolution in dynamic linkages across daily national stock indexes, *J. Int. Money Financ.* 10, pp 231–251.
- Longin, F., B. Solnik, (1995). Is the correlation in international equity returns constant: 1960–1990? *J. Int. Money Financ.* 14, pp 3–26.
- Lux, T., (2003). The multi-fractal model of asset returns: its estimation via GMM and its use for volatility forecasting, University of Kiel, Working Paper.
- Makridakis, S.G., S.C. Wheelwright, (1974). An analysis of the interrelationships among the major world stock exchanges, *J. Bus. Financ. Account.* 1, pp 195–216.
- Malevergne, Y., D. Sornette, (2006). *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer, Heidelberg.
- Mandelbrot, B.B., (1997). *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, New York.
- Mandelbrot, B.B., (1999). A multifractal walk down Wall Street, *Sci. Am.* 280, pp 70–73.
- Mandelbrot, B.B., A.J. Fisher, L.E. Calvet, (1997). A multifractal model of asset returns, in: *Cowles Foundation Discussion Paper* 1164.

- Mantegna, R.N., H.E. Stanley, (1995). Scaling behavior in the dynamics of an economic index, *Nature* 376, pp 46–49.
- Mantegna, R.N., H.E. Stanley, (1999). *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Muzy, J.F., D. Sornette, J. Delour, A. Arneodo, (2001). Multifractal returns and hierarchical portfolio theory, *Quant. Finance* 1, pp 131–148.
- Nelsen, R., (1999). *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
- Ning, C., T.S. Wirjanto, (2009). Extreme return–volume dependence in east-Asian stock markets: a copula approach, *Finance Res. Lett.* 6, pp 202–209.
- Ning, C., (2010). Dependence structure between the equity market and the foreign exchange market—a copula approach, *J. Int. Money Financ.* , pp 29 743–759.
- Patton, A.J., (2002). *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*, ProQuest Information and Learning Company.
- Patton, A.J., (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence, *Internat. Econom. Rev.* 47, pp 527–556.
- Podobnik, B., H.E. Stanley, (2008). Detrended cross-correlation analysis: a new method for analyzing two nonstationary time series, *Phys. Rev. Lett.* 100, pp 084102.
- Ramchand, L., R. Susmel, (1998). Volatility and cross correlation across major stock markets, *J. Empirical Financ.* 4, pp 397–416.
- Reboredo, J.C., (2011). How do crude oil prices co-move? A copula approach, *Energy Econ.* 33, pp 948–955.
- Rodriguez, J.C., (2007). Measuring financial contagion: a Copula approach, *J. Empirical Financ.* 14, pp 401–423.
- Stanley, H.E., L.A.N. Amaral, D. Canning, P. Gopikrishnan, Y. Lee, Y. Liu, (1999). Econophysics: can physicists contribute to the science of economics? *Physica A* 269, pp 156–169.
- Sun, X., H. Chen, Z. Wu, Y. Yuan, (2001). Multifractal analysis of Hang Seng index in Hong Kong stock market, *Physica A* 291, pp 553–562.
- Sun, X., H. Chen, Y. Yuan, Z. Wu, (2001). Predictability of multifractal analysis of Hang Seng stock index in Hong Kong, *Physica A* 301, pp 473–482.
- Tabak, B.M., D.O. Cajueiro, (2007). Are the crude oil markets becoming weakly efficient over time? A test for time-varying long-range dependence in prices and volatility, *Energy Econ.* 29, pp 28–36.

-
- Tai, C.S., (2007). Market integration and contagion: evidence from Asian emerging stock and foreign exchange markets, *Emerging Mark. Rev.* 8, pp 264–283.
- Wang, K.M., T.B.N. Thi, (2007). Testing for contagion under asymmetric dynamics: evidence from the stock markets between US and Taiwan, *Physica A* 376, pp 422–432.
- Wei, Y., D. Huang, (2005). Multifractal analysis of SSEC in Chinese stock market: a different empirical result from Heng Seng index, *Physica A* 355, pp 497–508.
- Wei, Y., P. Wang, (2008). Forecasting volatility of SSEC in Chinese stock market using multifractal analysis, *Physica A* 387, pp 1585–1592.
- Wei, Y., Y. Wang, D. Huang, (2011). A copula–multifractal volatility hedging model for CSI 300 index futures, *Physica A* 390, pp 4260–4272.
- Wei, Y., W. Chen, Y. Lin, (2013). Measuring daily value-at-risk of SSEC index: a new approach based on multifractal analysis and extreme value theory, *Physica A* 392, pp 2163–2174.
- Wen, X., Y. Wei, D. Huang, (2012). Measuring contagion between energy market and stock market during financial crisis: a copula approach, *Energy Econ.* 34, pp 1435–1446.
- Yuan, Y., X. Zhuang, (2008). Multifractal description of stock price index fluctuation using a quadratic function fitting, *Physica A* 387, pp 511–518.
- Zhou, W.X., (2009). The components of empirical multifractality in financial returns, *Europhys. Lett.* 88, pp 28004.
- Zhou, W.X., (2012). Finite-size effect and the components of multifractality in financial volatility, *Chaos Solitons Fractals* 45, pp 147–155.
- Zunino, L., B.M. Tabak, A. Figliola, D.G. Pérez, M. Garavaglia, O.A. Rosso, (2008). A multifractal approach for stock market inefficiency, *Physica A* 387, pp 6558–6566.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

En este documento se determinó la existencia de contagio financiero durante la crisis subprime y soberana europea entre los mercados accionarios de Alemania, España, E.U.A., Francia, Inglaterra, Argentina, Brasil, Chile, México y Perú. Para determinar este efecto contagio se formaron pares de países desarrollados con cada uno de los países emergentes, adicionalmente, se examinó el caso de E.U.A. con cada uno de los países desarrollados.

El análisis se realizó para dos períodos, uno de pre crisis y otro de crisis. El primer período está comprendido entre enero de 2004 y julio de 2007, y el segundo período entre agosto de 2007 y diciembre de 2015.

Según la definición de contagio financiero, es el cambio en la dependencia entre los mercados durante eventos extremos lo que se considera contagio y no el nivel de dependencia en sí. De esta manera, en el presente trabajo se calculó los cambios entre el coeficiente de dependencia del período de crisis y del período de pre crisis, y se determinó la existencia de contagio para los mercados en los cuales se presentó un cambio positivo en éste. Además, se estimó el cambio en el coeficiente de correlación.

El uso del coeficiente de correlación para la eliminación del riesgo puede ser limitado en los periodos de turbulencia; los eventos extremos resultan un instrumento más adecuado debido a que muestran las probabilidades de que un evento extremo originado en otro mercado afecte el mercado local y, en este sentido, permitiría cuantificar mejor las pérdidas esperadas o tomar una adecuada cobertura ante la realización de los mismos.

En la mayoría de las parejas estimadas, la magnitud en el cambio del coeficiente de correlación no coincide con el cambio en el coeficiente de dependencia; en algunas ocasiones sobreestima el nivel de dependencia entre los mercados y en otras la subestima.

Metodológicamente se utilizó una aproximación de la segunda generación de estudios del contagio financiero, la cual se basa en la estimación de cópulas para posteriormente estimar coeficientes de dependencia en las colas.

Primeramente, se calculó el espectro multifractal a través del método de fluctuaciones para obtener resultados estandarizados. Posteriormente, para determinar la dependencia se hizo uso de las cópulas, cuya metodología es robusta a la heterocedasticidad, autocorrelación, no normalidad y colas pesadas, características típicas de las series financieras.

Mediante esta metodología se encontró que para la mayoría de los pares, la cópula t-Student se ajusta mejor que las demás cópulas calculadas. Para ser consistentes con los resultados, se empleó la cópula t-Student para obtener la dependencia de colas para todos los pares. Los resultados muestran durante el periodo de crisis el coeficiente de dependencia es mayor que en el periodo pre crisis, por ello se puede afirmar que existe contagio y que si existe un evento extremo en algún país desarrollado se dará un contagio en los países desarrollados.

También se puede observar que el caso de España y Chile, presentan resultados contrarios, lo que nos indica que el efecto contagio no está dado por los mercados de valores, sino que se encuentra en algún otro vínculo fundamental. Así mismo, para el caso de E.U.A. con el resto de países desarrollados existe una relación importante, que indica alta dependencia entre ellos excepto para el caso de España.

Finalmente, se encontró que los mayores niveles de contagio se presentaron entre E.U.A. y los países emergentes, lo cual tiene efectos negativos sobre la diversificación de portafolios de los inversionistas en el mercado internacional, pues si se presenta nuevamente una crisis global en los mercados financieros, como la subprime o la deuda soberana europea, la dependencia lineal y no lineal entre los mercados aumentaría generando una mayor incertidumbre derivada de su tenencia de activos financieros.

6.1. Otras líneas de estudio

Esta investigación puede ser extendida en algunos otros aspectos. El primero sería determinar la independencia de los rendimientos esperados, aquí se han supuesto independientes; si no fuera así, la técnica de estimación de la distribución Pareto generalizada tendría que variar; esto implicaría un cambio en los parámetros estimados y en los valores que puedan tomar los rendimientos ante situaciones de choque.

El segundo sería utilizar otros indicadores como el tipo de cambio y tasa de interés para determinar el efecto contagio y concluir cuál de los canales es el que sirve mejor para determinar el contagio. Inclusive, determinar la dependencia entre ellos y observar si el contagio se debe a más de uno de estos indicadores.

El tercero sería extender la muestra de países, incluyendo otros continentes y determinar que tan lejos se ha propagado la crisis y encontrar que países han sido los más afectados. Adicionalmente, se podría agregar tiempo de estudio y verificar si esto modifica de alguna manera los resultados obtenidos.

El cuarto sería incluir un ciclo adicional de estudio, es decir el periodo durante la crisis, y observar cómo se relacionan los periodos de pre crisis, durante la crisis y después de la crisis.

Por último, se recomienda seguir esta línea de investigación utilizando otras metodologías como MCO, VAR, GARCH, entre otros; y comparar con los resultados obtenidos en este documento y posiblemente identificar un método más robusto y exacto para determinar el efecto contagio.

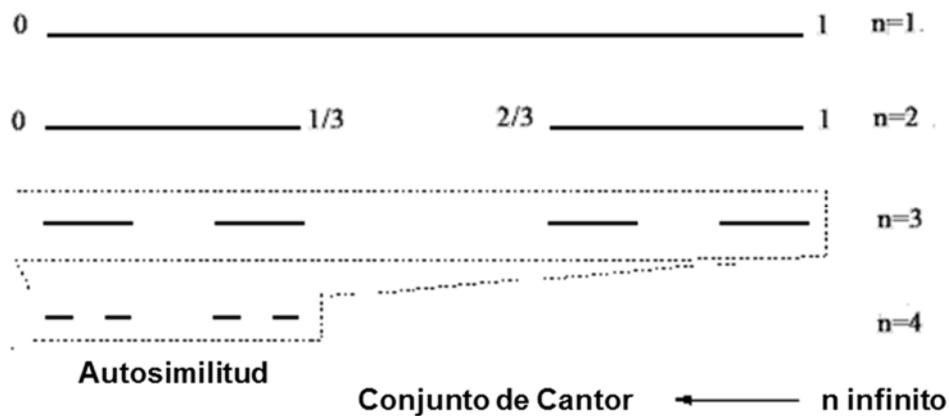
APENDEICE

Apéndice A. Los Fractales Clásicos

El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor toma su nombre de Georg F. L. P. Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo. Su verdadero creador fue Henry Smith, un profesor de geometría de Oxford, en 1875. Es uno de los fractales más antiguos. Para obtenerlo se procede del siguiente modo. Se parte de un segmento de tamaño unidad, tal y como se muestra en el paso $n = 1$ de la figura inferior. Se divide el segmento en tres subsegmentos de tamaño $1/3$ cada uno. Se elimina el central y se obtienen intervalos cerrados restantes. Así se consigue el resultado del paso $n = 2$ de la figura inferior. Repitiendo la división en tres partes cada uno de estos segmentos y borrando de nuevo el fragmento central de cada uno, se obtienen los cuatro intervalos siguientes ($n = 3$ en la figura inferior) donde cada uno posee longitud $1/9$:

Figura 1. Conjunto de Cantor



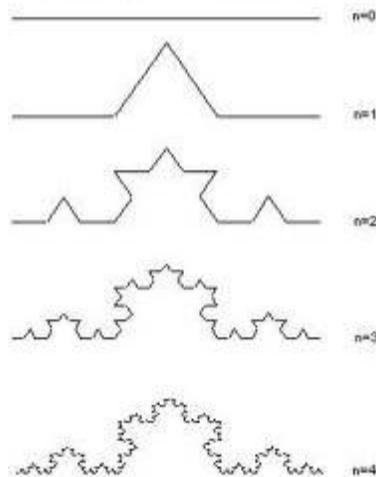
Fuente: fractales.org

Después de un número infinito pasos se obtiene el subconjunto de los números reales que se denomina conjunto de Cantor o polvo de Cantor.

La Curva de Koch

El creador en 1904 fue Niels Fabian Helge von Koch un matemático sueco. Si se parte de un triángulo equilátero de lado unidad y se divide en tres partes iguales de longitud $1/3$ cada lado. Se sustituye el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un diente como se muestra en la figura, en la iteración $n = 1$. Se obtiene una curva poligonal P_1 de longitud $3 \cdot 4 \cdot 1/3 = 4$. Se repite la operación ($n = 2$) con cada uno de los cuatro nuevos segmentos de cada uno de los lados. Se consigue así la curva P_2 de longitud $3 \cdot 4^2 \cdot 1/3^2 = 16/3$. La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch o copo de nieve de Koch.

Figura 2. Curva de Koch



Fuente: fractales.org

En la operación n -ésima la curva estará formada por $3 \cdot 4^n$ trozos, de perímetro $4^n / 3^n - 1$. La curva de Von Koch resulta del paso al límite de la sucesión de curvas P_n cuando n tiende a infinito.

El Triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclaw Sierpinski introdujo este fractal en 1919. Se parte (iteración $n = 0$) de la superficie de un triángulo equilátero de lado unidad. Seguidamente (iteración $n = 1$) se toman los puntos medios de cada lado y se construye a partir de ellos un triángulo

equilátero invertido de lado $\frac{1}{2}$ y se recorta. Ahora (iteración $n = 2$) se repite el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado $\frac{1}{2}$ que nos quedan. Así que se recorta, esta vez, tres triángulos invertidos de lado $\frac{1}{4}$. En la figura animada se observa hasta cinco iteraciones sucesivas. Si se repite infinitamente el proceso se logrará una figura fractal denominada triángulo de Sierpinski.



Sierpinski diseñó este triángulo para demostrar, entre otras cosas, que era posible construir una curva que se cruzaba consigo misma en todos sus puntos.

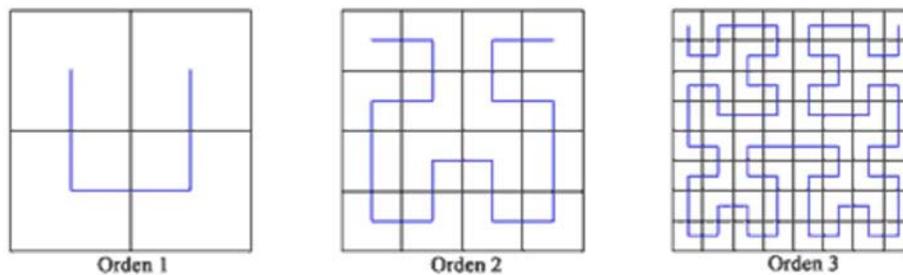
El triángulo de Sierpinski se puede descomponer en tres figuras congruentes. Cada una de ellas con exactamente la mitad de tamaño de la original. Si se dobla el tamaño de una de las partes se recupera el triángulo inicial. El triángulo de Sierpinski está formado por tres copias autosimilares de él mismo, entonces se dice que es autosimilar. En realidad la autosimilaridad es más profunda. Cada una de las copias puede descomponerse a su vez de tres copias autosimilares (un total de nueve). Y a partir de cualquiera de ellas, aumentando su tamaño en un factor 4 se recupera el original. En general, se puede dividir el triángulo en 3^n piezas autosimilares que aumentadas en un factor 2^n nos devuelven la figura inicial. Este tipo de autosimilaridad a todas las escalas es el sello identificativo de un fractal.

La Curva de Hilbert

Si se dibuja un cuadrado de lado unidad y se divide en cuatro partes iguales. Se unen los centros de los cuatro cuadrados como muestra la figura inferior. Se vuelve a dividir cada

cuadrado en cuatro cuadrados idénticos y se unen de nuevo los centros de todos los cuadrados mediante una sola curva siguiendo el patrón mostrado en el segundo paso de la figura inferior (orden 2). Se observa cómo la curva serpentea comenzando en el cuadrado superior izquierdo y acabando en el cuadrado superior derecho. En la figura se alcanza la tercera iteración. Con paciencia, se repite el procedimiento infinitamente. En el límite se obtiene la curva de Hilbert.

Figura 4. Curva de Hilbert



Fuente: fractales.org

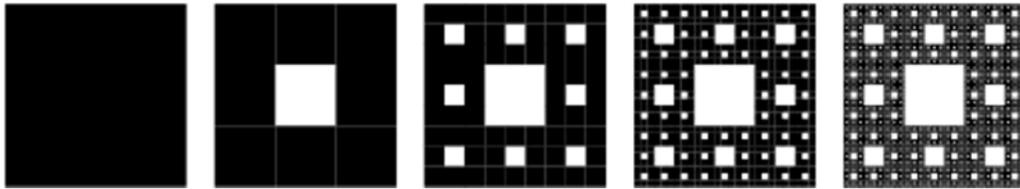
La curva tiene la curiosa propiedad de ser una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad.

Alfombra de Sierpinski y Esponja de Menger

El proceso de elaboración de la alfombra de Sierpinski es muy semejante a su triángulo. Se divide un cuadrado de lado unidad inicial en nueve cuadrados idénticos y se recorta el central. Se repite el proceso en cada iteración. En la iteración n -ésima persisten: $N_n = 8n$, cuadrados. Cada uno con un lado de longitud: $L_n = (1/3)n$.

El área total en la n -ésima iteración será: $A_n = L_n^2 N_n = (8/9)n$. Así que en el límite de iteraciones tendiendo a infinito, la alfombra de Sierpinski está tan apolillada que su superficie es nula. Esto no parece sorprendente. Al menos hasta que no se calcula su perímetro, que efectivamente es infinito.

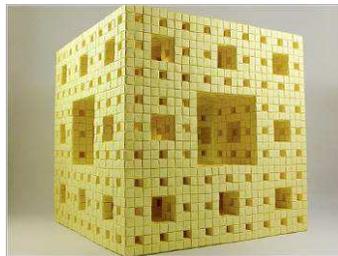
Figura 5. Alfombra de Sierpinski



Fuente: fractales.org

Si se parte de un cubo en tres dimensiones y se aplica un proceso semejante al de la alfombra de Sierpinski, se obtiene la esponja de Menger. En vez de eliminar pequeños cuadrados, se eliminan pequeños cubos. Esta esponja posee superficie es infinita y volumen nulo.

Figura 6. Esponja de Menger



Fuente: fractales.org

Apéndice B. Otros Modelos de Selección de Cópulas

KLIC

El criterio de información Kullback-Leiber (KLIC, por sus siglas en inglés), desarrollado por Kullback y Leiber (1951), mide la distancia entre dos modelos estadísticos. El KLIC está definido de la siguiente manera:

$$KLIC := E_0[\log h_0(Y_i|x_i)] - E_0[\log f(Y_i|x_i, \hat{\beta})]$$

donde $h_0(\cdot | \cdot)$ es la verdadera, pero desconocida, función de probabilidad condicional de Y_i dado x_i . E_0 es el valor esperado bajo el verdadero modelo y $\hat{\beta}$ es el estimador del parámetro β en el modelo $f(Y_i|x_i, \hat{\beta})$. De esta manera, el modelo con la menor distancia KLIC será el mejor. Los test de Vuong y Clarke se basan en el KLIC.

El test de Vuong

Sean dos modelos $f_1(\cdot | \hat{\theta}_1)$ y $f_2(\cdot | \hat{\theta}_2)$ con parámetros estimados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, respectivamente. El test de desarrollado por Vuong (1989) utiliza el criterio de información Kullback-Leiber (KLIC) para estimar la hipótesis nula

$$KLIC(h_0, f_1, \hat{\theta}_1) = KLIC(h_0, f_2, \hat{\theta}_2),$$

$$E_0[\log f_1(X | \hat{\theta}_1)] = E_0[\log f_2(X | \hat{\theta}_2)].$$

Si $E_0[\log f_1(X | \hat{\theta}_1)] > E_0[\log f_2(X | \hat{\theta}_2)]$, el modelo 1 es el preferido. De esta manera, para observaciones $x_i, i = 1, \dots, n$, se define las diferencias en logaritmos de las funciones de verosimilitud $m_i := \log \left[\frac{f_1(x_i | \hat{\theta}_1)}{f_2(x_i | \hat{\theta}_2)} \right]$. Bajo la verdadera distribución $h_0, m = (m_1, \dots, m_n)'$ es un vector aleatorio con media $\mu_0^m = (\mu_1^m, \dots, \mu_n^m)'$. Dado que μ_0^m no es conocido, no es posible someter a prueba directa que ambos modelos sean igualmente buenos en términos de sus aproximaciones a la verdadera distribución. No obstante, Vuong (1989) mostró que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right) = \mu_0^m.$$

Además, Vuong (1989) mostró que la distribución asintótica de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$ se distribuye como una normal estándar. Así, la hipótesis nula del test de Vuong es la siguiente:

$$H_0 = E_0[m_i] = 0 \text{ versus } H_1: E_0[m_i] \neq 0, \forall i=1, \dots, n.$$

Se puede rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia α si

$$|v| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

donde Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución normal estándar. Si $v < \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, se elige el modelo 2. Si $v > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, se prefiere el modelo 1 frente al 2.

El test de Clarke

El test propuesto por Clarke (2007), así como el test de Vuong, también utiliza el criterio de información Kullback-Leiber (KLIC). La diferencia entre ellos es la hipótesis nula. Ésta es la siguiente:

$$H_0 = P(m_i > 0) = 0.5, \forall i = 1, \dots, n,$$

donde $m_i = \log \left[\frac{f_1(x_i|\hat{\theta}_1)}{f_2(x_i|\hat{\theta}_2)} \right]$. La hipótesis nula establece que los logaritmos de los ratios de verosimilitud deben de estar igualmente distribuidos alrededor del cero. De esta manera, la mitad de los ratios de verosimilitud deberían ser mayores a cero y la mitad menores a cero. El estadístico es el siguiente:

$$B = \sum_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(d_i),$$

donde I es la función indicadora y

$$d_i = \log f_1(x_i|\hat{\theta}_1) - \log f_2(x_i|\hat{\theta}_2).$$

Clarke (2007) demostró que B tiene una distribución binomial con parámetros n y $p = 0.5$. De esta manera, si el modelo 1 es mejor que el modelo 2, B será significativamente mayor que su valor esperado bajo la hipótesis nula $\left(\frac{n}{2}\right)$.

Apéndice C. Índices de Precios

CAC 40: Índice representativo del mercado de bursátil de Francia.

DAX 30: El DAX 30, Deutschen Aktien Index, es el índice de referencia de la bolsa de Frankfurt. Selecciona a los 30 principales valores negociados en la Bolsa de Frankfurt. Pondera por capitalización. El Dax 30 tiene base en los 1000 puntos y arranca el 31 de diciembre de 1987. A partir del 18 de junio de 1999, sólo se toman para calcular el DAX aquellas empresas cotizadas en el XETRA.

FTSE 100: Conocido como el Footsie, es el índice de referencia de la bolsa de Londres. Pondera por capitalización y recoge las 100 empresas con mayor capitalización negociadas en la Bolsa de Londres. El índice se calcula con base en los 1000 puntos en el 3 de enero de 1984.

IPC: El Índice de Precios y Cotizaciones es el principal indicador de la Bolsa Mexicana de Valores, expresa el rendimiento del mercado accionario, en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de acciones cotizadas en la Bolsa. El tamaño de la muestra es actualmente de 36 acciones (ha oscilado entre 35 y 50). Este indicador, aplicado en su actual estructura desde 1978, expresa en forma fidedigna la situación del mercado bursátil y su dinamismo operativo.

Ibex-35: Índice oficial de la Bolsa de España compuesto por los 35 valores más líquidos y de mayor capitalización.

Ibovespa: Índice representativo del mercado de bursátil de San Pablo, Brasil. Es una cartera teórica compuesto por las acciones que representaron el 80% del volumen negociado durante los últimos 12 meses. La composición del índice es revisada cuatrimestralmente.

S&P 500: El S&P 500 es el índice más seguido para tener una idea del desempeño general de las acciones estadounidenses. Este índice consiste de las acciones de 500 empresas que fueron seleccionadas por su tamaño, liquidez (qué tan fácil es comprar o vender sus títulos) y representatividad por actividad económica, incluyendo 400 industriales, 20 del sector transporte, 40 de servicios y 40 financieras. Sólo se toman en cuenta empresas estadounidenses. Vale la pena destacar que el peso de cada acción dentro del índice corresponde a la proporción que representa el valor de mercado de la empresa dentro del total de las 500 empresas que conforman el índice. El valor de mercado del capital es igual al precio por acción multiplicado por el número total de acciones.

MERVAL: Es el principal índice de la bolsa de valores de Argentina. Está compuesto por las empresas más líquidas y este se actualiza cada tres meses.

IPSA: Significa Índice Selectivo de Acciones, es el principal índice de Chile. Dentro de él están las 40 empresas más importantes del país . Este índice modifica la lista de sus empresas cada año.

IGBL: Es el índice general de la bolsa de valores de Lima. Está conformado por las empresas más importantes del Perú de distintos sectores como: Industria, el agro, minería, servicios públicos, etc.

Apéndice D. Estadística Descriptiva de los Índices de Precios

Periodo Total

	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
Media	8883.9025	13669.9977	1393.0192	5497.2833	9719.9762	666.8685	24263.8057	6.2186	2416.8638	4730.0728
Mediana	8758.5665	12835.3695	1313.0100	5302.3214	9553.2085	619.2144	23655.9064	6.2699	2664.8938	5090.9946
Máximo	13889.3975	23341.3157	2130.8201	8482.9288	14009.9525	1497.0138	45198.2516	10.5589	3640.5587	9049.4698
Mínimo	4441.3044	7328.6315	676.5300	3339.5709	5043.3757	249.0286	5520.6144	2.1858	807.2260	719.9480
Desviación Estándar	2452.0338	3372.4050	330.4915	1116.2362	1659.1919	246.8151	10398.3994	2.1875	764.8097	2347.5097
Sesgo	0.0196	0.9011	0.7130	0.8536	0.0649	1.0729	0.0909	0.0429	-0.6617	-0.2082
Curtosis	-1.0337	0.1318	-0.2428	0.1914	0.0132	0.9089	-1.0970	-0.9037	-0.7962	-1.1156
ADF	-2.2501	-2.1401	-1.2070	-2.0926	-1.9732	-2.6197	-1.0743	-0.7272	-1.8379	-0.7324
Jarque-Bera	116.5300	343.5300	233.7600	307.6300	1.5696	579.8500	140.5200	89.1000	257.0000	153.5900
BDS	187.5034	115.3569	126.9626	110.9768	131.9047	96.6739	189.3409	188.6821	147.6263	189.4435
Q(10)	25383.0000	25283.0000	25526.0000	25236.0000	25228.0000	25133.0000	25451.0000	25637.0000	25493.0000	25593.0000

Periodo de Precrisis

	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
Media	6659.5650	13807.7615	1260.3004	5816.6056	10013.0532	521.0848	14613.9149	3.8763	1598.0673	2379.1983
Mediana	6018.8021	12573.6601	1232.5300	5418.8472	9517.6895	528.6194	13964.7429	3.8586	1452.7002	1471.1827
Máximo	11082.9099	20989.0310	1553.0800	8375.5330	13538.3855	739.9815	30881.8125	6.7365	2998.7434	7523.0326
Mínimo	4441.3044	9228.8537	1063.2300	4243.8383	7753.0236	287.7955	5520.6144	2.1858	807.2260	719.9480
Desviación Estándar	1727.2944	3470.5307	123.6849	1154.6086	1581.2210	113.5132	6435.0843	1.1607	631.8104	1904.3052
Sesgo	0.8597	0.6391	0.6368	0.6041	0.5147	-0.0530	0.6463	0.6236	0.6422	1.3995
Curtosis	-0.2198	-0.8556	-0.6057	-0.7533	-0.8889	-0.7283	-0.4768	-0.3182	-0.7251	0.7839
ADF	-1.9158	-2.2136	-2.6780	-2.6855	-2.9067	-3.0468	-1.3820	-1.2036	-2.0137	0.4313
Jarque-Bera	97.3030	79.1340	69.3890	65.8220	61.2860	15.8750	63.4390	56.9210	70.9710	349.9100
BDS	68.5069	78.7347	74.1299	79.1592	82.2751	97.7185	70.4792	66.9745	78.0133	46.3891
Q(10)	7517.4000	7573.1000	7447.4000	7556.8000	7541.1000	7434.1000	7441.5000	7489.6000	7539.0000	7388.7000

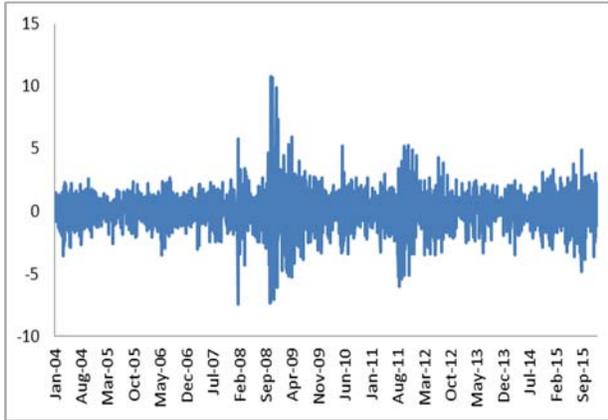
Periodo de Crisis

	DAX	IBEX 35	S&P 500	CAC 40	FTSE 100	Merval	Ibovespa	IPSA	IPC	IGBL
Media	9832.4562	13611.1122	1450.7723	5363.3028	9602.9045	732.3603	28533.9989	7.2501	2772.4909	5769.3590
Mediana	10059.2248	12989.3222	1367.5300	5247.4548	9593.6789	667.5247	28612.7725	6.9927	2874.3947	5656.3198
Máximo	13889.3975	23341.3157	2130.8201	8482.9288	14009.9525	1497.0138	45198.2516	10.5589	3640.5587	9049.4698
Mínimo	4860.1930	7328.6315	676.5300	3339.5709	5043.3757	249.0286	10908.0000	3.3828	1155.4081	1972.5646
Desviación Estándar	2072.4541	3328.6646	372.9857	1073.6934	1694.6251	262.0479	8843.8469	1.6789	497.9788	1679.5779
Sesgo	-0.1539	1.0246	0.3042	0.9792	-0.0758	0.7538	-0.1166	0.0478	-1.1341	-0.2145
Curtosis	-0.7965	0.6463	-0.9353	0.8089	0.0959	0.0869	-1.1147	-0.7141	1.1758	-0.6342
ADF	-2.2855	-2.2450	-2.4741	-2.1545	-2.3482	-2.5102	-2.1839	-0.9648	-1.8731	-1.0105
Jarque-Bera	54.8240	315.7300	91.6420	330.9100	7.6651	177.0200	99.0590	39.0650	512.7400	44.2890
BDS	143.1899	83.9348	147.7296	76.6765	104.3970	98.1871	153.3119	143.8285	72.8603	140.5497
Q(10)	17579.0000	17396.0000	17874.0000	17262.0000	17376.0000	17531.0000	17510.0000	17726.0000	17569.0000	17548.0000

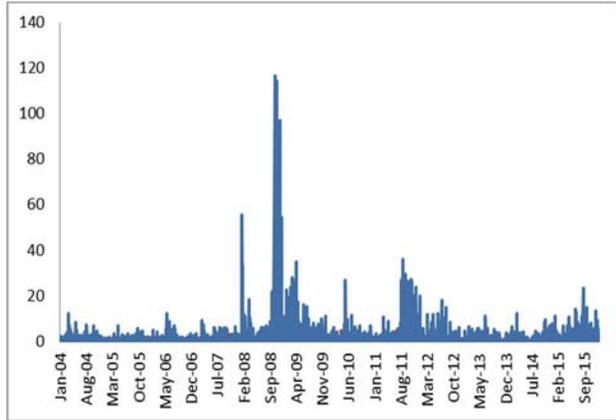
Notas: ADF es Argumented Dickey-Fuller test; Q(.) es el estadístico Ljung-Box

Apéndice E. Rendimiento diario y rendimiento al cuadrado

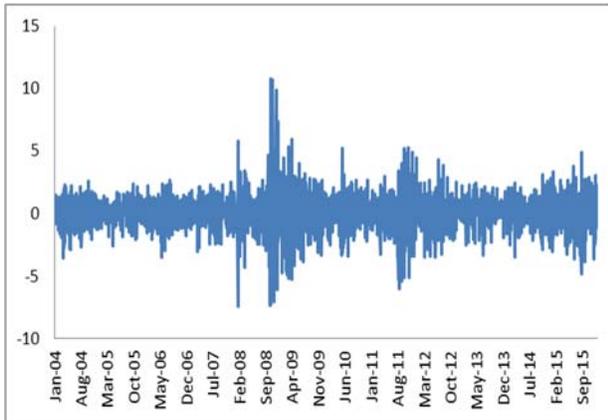
Rendimiento DAX



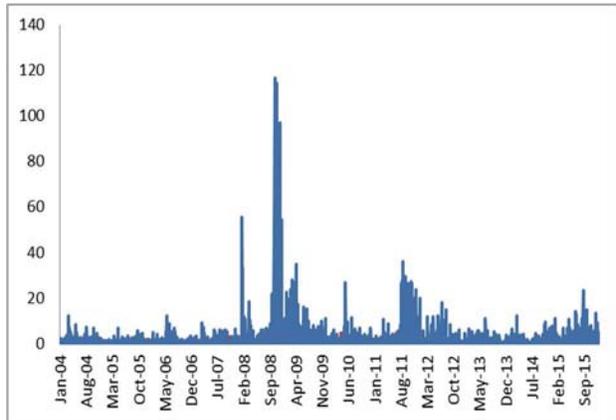
Rendimiento al cuadrado DAX



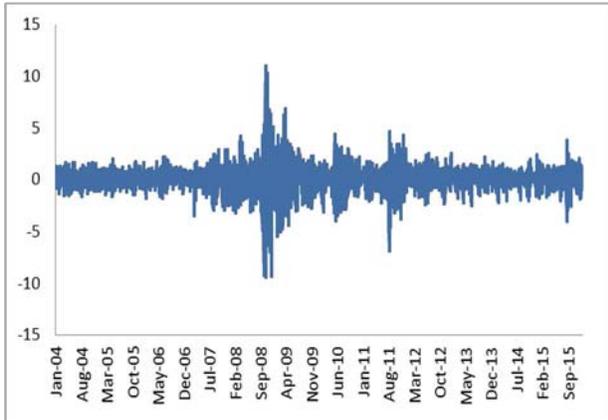
Rendimiento IBEX 35



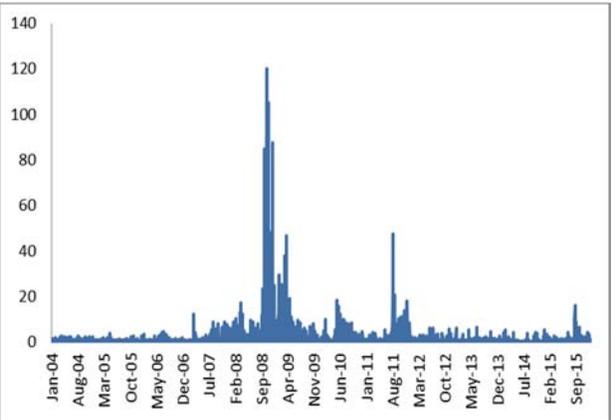
Rendimiento al cuadrado IBEX 35



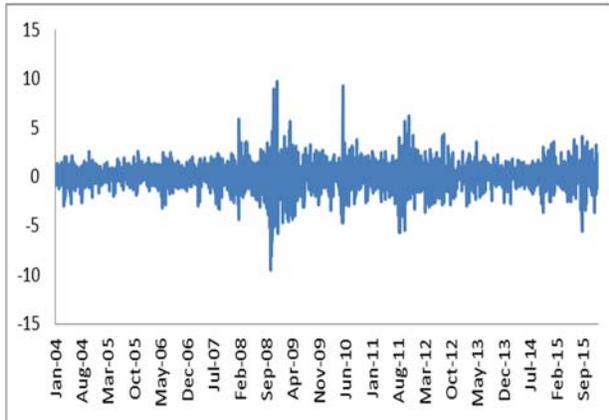
Rendimiento S&P 500



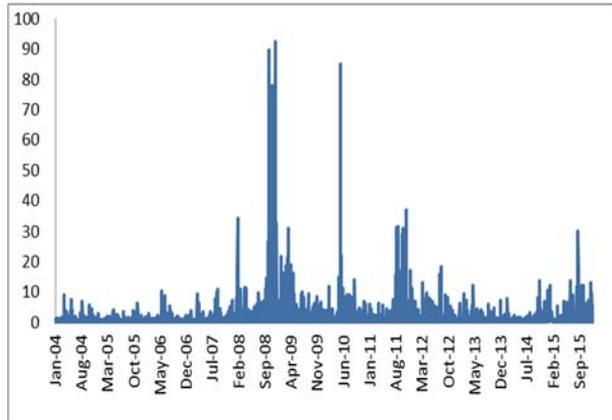
Rendimiento al cuadrado S&P 500



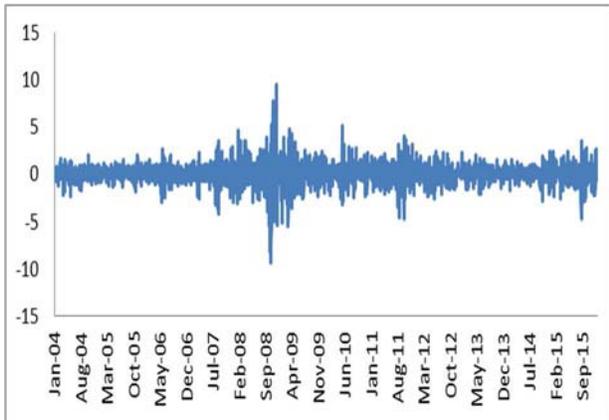
Rendimiento CAC 40



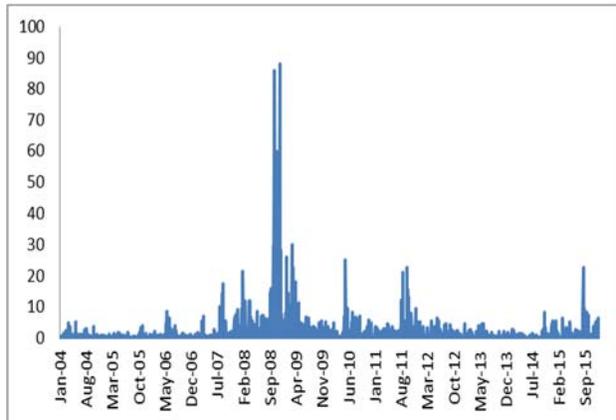
Rendimiento al cuadrado CAC 40



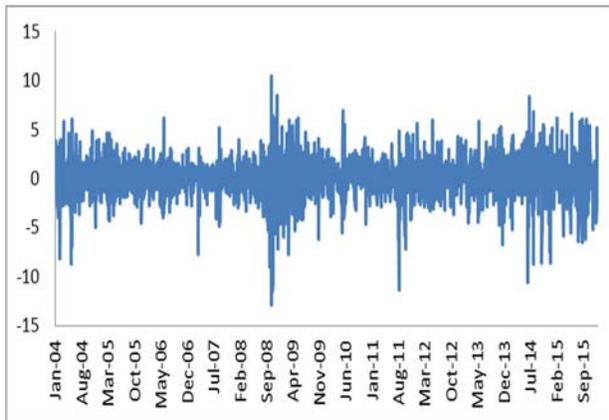
Rendimiento FTSE 100



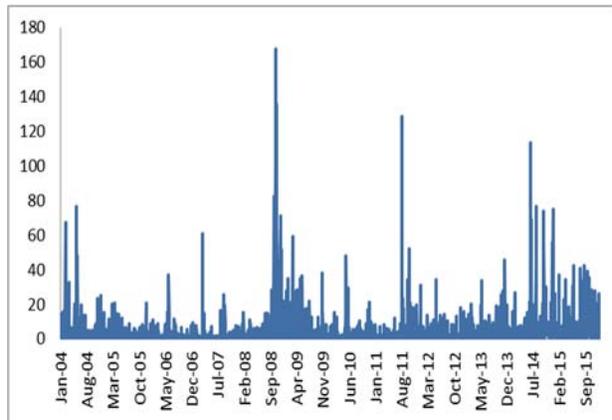
Rendimiento al cuadrado FTSE 100



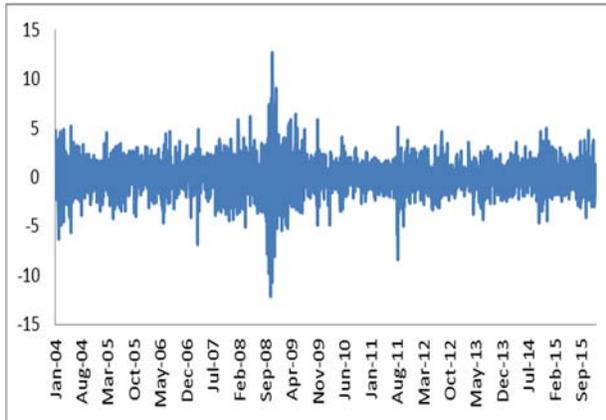
Rendimiento Merval



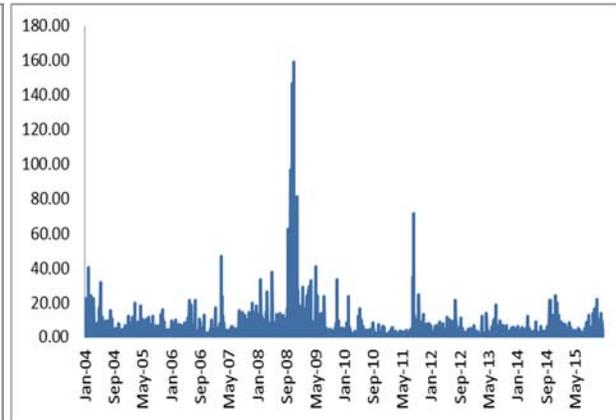
Rendimiento al cuadrado Merval



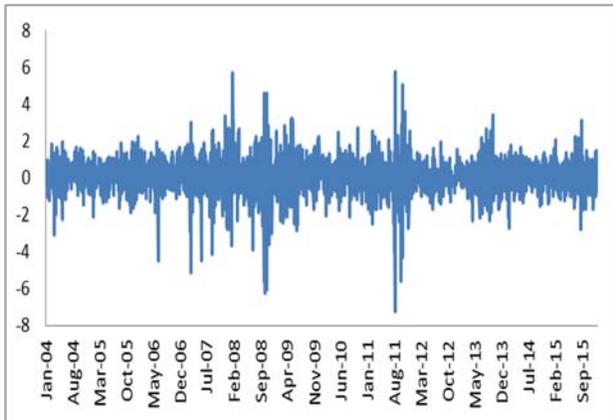
Rendimiento Ibovespa



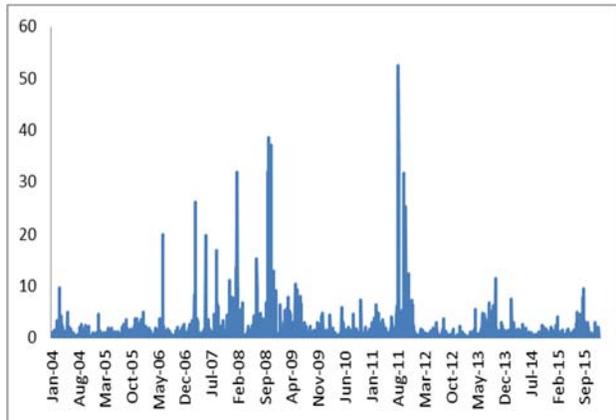
Rendimiento al cuadrado Ibovespa



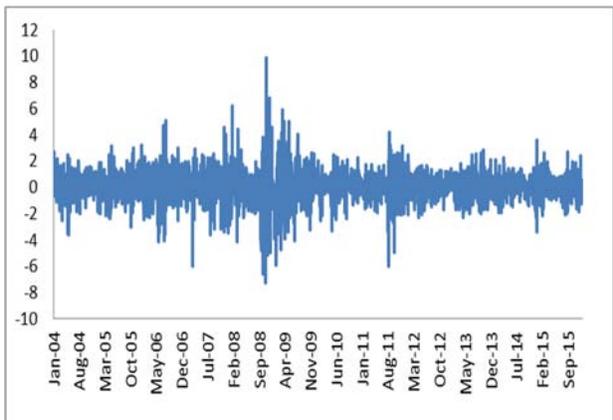
Rendimiento IPSA



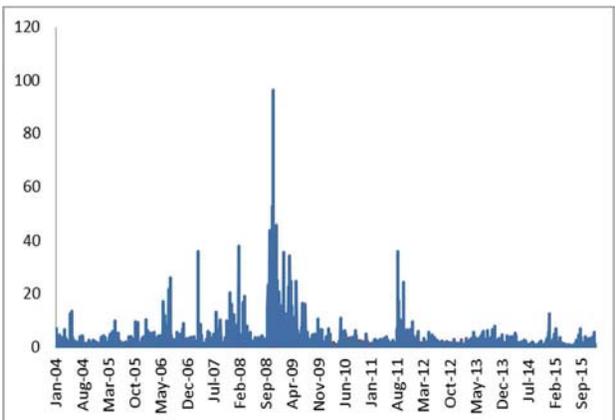
Rendimiento al cuadrado IPSA



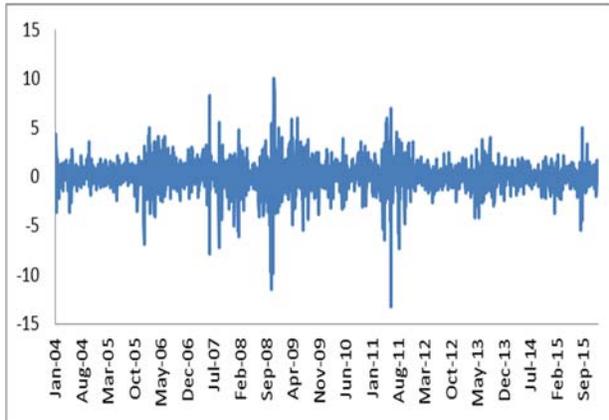
Rendimiento IPC



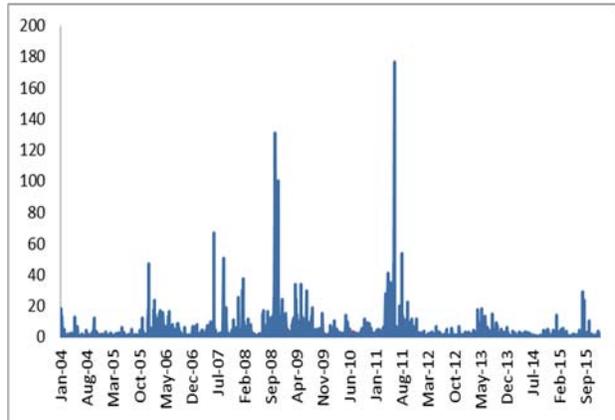
Rendimiento al cuadrado IPC



Rendimiento IGBL



Rendimiento al cuadrado IGBL



Fuente: Elaboración propia

Apéndice F. Resultados Estimados para 5 Cópulas

Periodo Total

	Cópula	Parámetro	Error Estándar	Log-likelihood	AIC	BIC
DAX - Merval	<i>Student t</i>	0.31	0.05	52.8	-101.61	-93.11
	<i>Clayton</i>	0.38	0.07	21.6	-41.19	-36.94
	<i>Gumbel</i>	1.22	0.04	30.38	-58.75	-54.5
	<i>Frank</i>	1.83	0.29	20.37	-38.74	-34.49
	<i>Joe</i>	1.26	0.06	26.04	-50.07	-45.82
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.17	0.05	26.6	-49.2	-40.7
	<i>Clayton</i>	-0.41	0.08	28.91	-55.82	-51.57
	<i>Gumbel</i>	-1.2	0.04	23.43	-44.86	-40.61
	<i>Frank</i>	-1.04	0.28	7	-12	-7.75
	<i>Joe</i>	-1.36	0.07	34.47	-66.94	-62.69
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	-0.32	0.04	28.89	-53.79	-45.29
	<i>Clayton</i>	-0.32	0.08	31.23	-60.46	-56.21
	<i>Gumbel</i>	-1.16	0.05	26.62	-51.24	-46.99
	<i>Frank</i>	-2.08	0.28	29.23	-56.47	-52.22
	<i>Joe</i>	-1.28	0.08	33.54	-65.07	-60.82
DAX - IPC	<i>Student t</i>	0.62	0.04	129.44	-254.88	-246.38
	<i>Clayton</i>	0.52	0.08	23.04	-44.08	-39.83
	<i>Gumbel</i>	1.38	0.05	38.56	-75.12	-70.87
	<i>Frank</i>	3.64	0.34	60.47	-118.95	-114.7
	<i>Joe</i>	1.5	0.07	29.89	-57.78	-53.53
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	0.73	0.02	194.03	-384.05	-375.55
	<i>Clayton</i>	1.67	0.1	190.36	-378.73	-374.48
	<i>Gumbel</i>	2.02	0.07	199.18	-396.35	-392.1
	<i>Frank</i>	6.76	0.35	214.93	-427.85	-423.6
	<i>Joe</i>	2.48	0.1	180	-357.99	-353.74
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.5	0.04	96.31	-188.62	-180.12
	<i>Clayton</i>	1.25	0.1	127.81	-253.62	-249.37
	<i>Gumbel</i>	1.63	0.06	112.28	-222.56	-218.31
	<i>Frank</i>	3.37	0.3	64.53	-127.07	-122.82
	<i>Joe</i>	2.13	0.09	136.54	-271.08	-266.83
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.12	0.05	14.15	-24.3	-15.8
	<i>Clayton</i>	0.52	0.07	42.75	-83.5	-79.25
	<i>Gumbel</i>	1.21	0.03	27.5	-53	-48.75
	<i>Frank</i>	0.65	0.27	2.9	-3.79	0.46
	<i>Joe</i>	1.44	0.06	47.03	-92.06	-87.81

	Cópula	Parámetro	Error Estándar	Log- likelihood	AIC	BIC
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.12	0.05	2.66	-1.33	7.17
	<i>Clayton</i>	-0.17	0.08	4.2	-6.4	-2.15
	<i>Gumbel</i>	-1.07	0.04	2.35	-2.7	1.55
	<i>Frank</i>	-1.14	0.25	10.31	-18.61	-14.36
	<i>Joe</i>	-1.07	0.07	1.55	-1.1	3.15
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.66	0.03	133.3	-262.6	-254.1
	<i>Clayton</i>	1.5	0.11	143.77	-285.55	-281.3
	<i>Gumbel</i>	1.77	0.07	128.02	-254.05	-249.8
	<i>Frank</i>	4.83	0.35	108.48	-214.95	-210.7
	<i>Joe</i>	2.38	0.11	155.44	-308.89	-304.64
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.66	0.02	144.55	-285.1	-276.6
	<i>Clayton</i>	1.94	0.12	212.05	-422.1	-417.85
	<i>Gumbel</i>	1.97	0.07	187.21	-372.41	-368.16
	<i>Frank</i>	5.31	0.32	150.09	-298.17	-293.92
	<i>Joe</i>	2.72	0.12	212.44	-422.88	-418.63
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.6	0.03	109.26	-214.52	-206.02
	<i>Clayton</i>	1.26	0.1	130.11	258.21	253.96
	<i>Gumbel</i>	1.71	0.06	122.32	-242.63	-238.38
	<i>Frank</i>	4.93	0.32	126.03	-250.06	-245.81
	<i>Joe</i>	2.11	0.09	128.27	-254.55	-250.3
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.26	0.04	18.02	-32.05	-23.55
	<i>Clayton</i>	0.49	0.07	36.01	-70.03	-65.78
	<i>Gumbel</i>	1.22	0.04	24.96	-47.91	-43.66
	<i>Frank</i>	1.51	0.26	16.62	-31.24	-26.99
	<i>Joe</i>	1.39	0.06	31.7	-61.4	-57.15
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.71	0.02	167.26	-330.51	-322.01
	<i>Clayton</i>	-2.23	0.13	310.33	-618.66	-614.41
	<i>Gumbel</i>	-2.11	0.08	244.38	-486.76	-482.51
	<i>Frank</i>	-5.82	0.35	163.8	-325.6	-321.35
	<i>Joe</i>	-3.08	0.13	320.59	-639.18	-634.93
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.53	0.03	70.43	-136.86	-128.36
	<i>Clayton</i>	1.17	0.09	118.72	-235.43	-231.18
	<i>Gumbel</i>	1.59	0.06	95.74	-189.48	-185.23
	<i>Frank</i>	4.1	0.32	91.96	-181.93	-177.68
	<i>Joe</i>	2.06	0.09	120.99	-239.99	-235.74
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.27	0.04	15.93	-27.85	-19.35
	<i>Clayton</i>	0.47	0.06	32.36	-62.73	-58.48
	<i>Gumbel</i>	1.2	0.04	17.44	-32.87	-28.62
	<i>Frank</i>	1.9	0.26	28.24	-54.49	-50.24
	<i>Joe</i>	1.36	0.06	20.51	-39.01	-34.76

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.29	0.04	23.74	-43.47	-34.97
	<i>Clayton</i>	0.49	0.07	34.15	-66.31	-62.06
	<i>Gumbel</i>	1.26	0.04	28.27	-54.54	-50.29
	<i>Frank</i>	1.91	0.28	23.73	-45.47	-41.22
	<i>Joe</i>	1.42	0.06	30.98	-59.95	-55.7
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.03	0.05	1.93	0.15	8.65
	<i>Clayton</i>	-0.13	0.08	5.49	-8.97	-4.72
	<i>Gumbel</i>	-1.07	0.04	3.7	-5.4	-1.15
	<i>Frank</i>	-0.3	0.26	0.64	0.73	4.98
	<i>Joe</i>	-1.12	0.07	7.89	-13.78	-9.53
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.43	0.04	45.98	-87.97	-79.47
	<i>Clayton</i>	-0.66	0.08	50.74	-99.47	-95.22
	<i>Gumbel</i>	-1.36	0.05	49.28	-96.56	-92.31
	<i>Frank</i>	-3.43	0.29	75.84	-149.69	-145.44
	<i>Joe</i>	-1.63	0.08	46.34	-90.68	-86.43
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	0.59	0.03	102.17	-200.34	-191.84
	<i>Clayton</i>	0.66	0.08	47.98	-93.96	-89.71
	<i>Gumbel</i>	1.5	0.06	64.74	-127.48	-123.23
	<i>Frank</i>	4.27	0.34	84.63	-167.26	-163.01
	<i>Joe</i>	1.63	0.08	46.25	-90.5	-86.25
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	0.65	0.02	140.42	-276.84	-268.34
	<i>Clayton</i>	1.02	0.08	105.18	-208.35	-204.1
	<i>Gumbel</i>	1.66	0.06	116.87	-231.73	-227.48
	<i>Frank</i>	5.14	0.31	152.83	-303.67	-299.42
	<i>Joe</i>	1.84	0.08	86.84	-171.68	-167.43
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.53	0.04	109.11	-214.22	-205.72
	<i>Clayton</i>	0.82	0.09	56.07	-110.14	-105.89
	<i>Gumbel</i>	1.5	0.05	68.86	-135.71	-131.46
	<i>Frank</i>	3.35	0.32	58.22	-114.44	-110.19
	<i>Joe</i>	1.77	0.08	68.15	-134.3	-130.05
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.13	0.05	19.65	-35.3	-26.8
	<i>Clayton</i>	0.33	0.07	15.79	-29.57	-25.32
	<i>Gumbel</i>	1.16	0.04	14.11	-26.21	-21.96
	<i>Frank</i>	0.66	0.27	2.93	-3.85	0.4
	<i>Joe</i>	1.33	0.06	22.35	-42.71	-38.46
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.45	0.04	53.89	-103.77	-95.27
	<i>Clayton</i>	-0.68	0.08	48.74	-95.49	-91.24
	<i>Gumbel</i>	-1.34	0.05	51.08	-100.16	-95.91
	<i>Frank</i>	-3.19	0.29	63.73	-125.45	-121.2
	<i>Joe</i>	-1.54	0.08	46.81	-91.61	-87.36

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	0.78	0.02	235.14	-466.28	-457.78
	<i>Clayton</i>	0.95	0.1	58.78	-115.56	-111.31
	<i>Gumbel</i>	1.66	0.07	86.09	-170.18	-165.93
	<i>Frank</i>	5.28	0.38	103.97	-205.94	-201.69
	<i>Joe</i>	1.9	0.09	76.04	-150.09	-145.84
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	0.56	0.03	97.93	-191.86	-183.36
	<i>Clayton</i>	0.86	0.08	82.79	-163.59	-159.34
	<i>Gumbel</i>	1.49	0.05	84.83	-167.65	-163.4
	<i>Frank</i>	3.61	0.27	90.14	-178.28	-174.03
	<i>Joe</i>	1.66	0.07	67.71	-133.41	-129.16
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	0.54	0.03	75.09	-146.18	-137.68
	<i>Clayton</i>	1.11	0.09	104.38	-206.76	-202.51
	<i>Gumbel</i>	1.6	0.06	94.66	-187.32	-183.07
	<i>Frank</i>	4.45	0.32	111.19	-220.39	-216.14
	<i>Joe</i>	2.01	0.09	103.83	-205.65	-201.4
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	0.66	0.02	135.43	-266.87	-258.37
	<i>Clayton</i>	2.59	0.14	280.83	-559.67	-555.42
	<i>Gumbel</i>	2.09	0.08	209.75	-417.51	-413.26
	<i>Frank</i>	5.61	0.35	155.67	-309.33	-305.08
	<i>Joe</i>	3.36	0.14	287.35	-572.71	-568.46
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.68	0.02	146.01	-288.02	-279.52
	<i>Clayton</i>	1.7	0.11	183.5	-365	-360.75
	<i>Gumbel</i>	1.94	0.07	170.57	-339.14	-334.89
	<i>Frank</i>	6.49	0.37	186.98	-371.95	-367.7
	<i>Joe</i>	2.55	0.11	181.94	-361.88	-357.63
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.67	0.02	129.04	-254.08	-245.58
	<i>Clayton</i>	1.3	0.1	125.58	-249.16	-244.91
	<i>Gumbel</i>	1.82	0.07	133.53	-265.06	-260.81
	<i>Frank</i>	6.91	0.4	195.45	-388.9	-384.65
	<i>Joe</i>	2.22	0.1	123.89	-245.78	-241.53

Periodo de Precrisis

	Cópula	Parámetro	Error Estándar	Log-likelihood	AIC	BIC
DAX - Merval	<i>Student t</i>	-0.02	0.15	12.48	-20.95	-14.85
	<i>Clayton</i>	0	1.05	0	2	5.05
	<i>Gumbel</i>	-1	0.09	0	2	5.05
	<i>Frank</i>	0.68	0.52	0.83	0.35	3.4
	<i>Joe</i>	-1	0.14	0	2	5.05
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.46	0.08	25.76	-47.52	-41.42
	<i>Clayton</i>	-0.67	0.14	13.24	-24.49	-21.44
	<i>Gumbel</i>	-1.41	0.09	17.26	-32.52	-29.47
	<i>Frank</i>	-3.15	0.56	16.1	-30.2	-27.15
	<i>Joe</i>	-1.57	0.13	15.05	-28.1	-25.05
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	0.37	0.08	15.6	-27.2	-21.1
	<i>Clayton</i>	0.96	0.16	27	-52	-48.96
	<i>Gumbel</i>	1.44	0.09	21.92	-41.85	-38.8
	<i>Frank</i>	2.42	0.53	10.38	-18.75	-15.7
	<i>Joe</i>	1.82	0.15	28.85	-55.71	-52.66
DAX - IPC	<i>Student t</i>	-0.43	0.09	22.02	-40.04	-33.94
	<i>Clayton</i>	-0.63	0.15	15.01	-28.02	-24.97
	<i>Gumbel</i>	-1.31	0.09	13.9	-25.8	-22.75
	<i>Frank</i>	-2.33	0.58	8.4	-14.81	-11.76
	<i>Joe</i>	-1.56	0.16	17.97	-33.93	-30.88
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	-0.27	0.11	9.37	-14.74	-8.64
	<i>Clayton</i>	0	0.14	0	2	5.05
	<i>Gumbel</i>	-1	0.07	0	2	5.05
	<i>Frank</i>	-0.99	0.54	1.72	-1.44	1.61
	<i>Joe</i>	-1	0.13	0	2	5.05
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.67	NaN	60.84	-117.68	-111.58
	<i>Clayton</i>	1.76	0.22	47.82	-93.64	-90.59
	<i>Gumbel</i>	1.99	0.13	52.25	-102.49	-99.44
	<i>Frank</i>	4.8	0.59	34.5	-67.01	-63.96
	<i>Joe</i>	2.54	0.21	51.02	-100.04	-6.99
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.73	0.04	48.44	-92.88	-86.78
	<i>Clayton</i>	0.74	0.16	14.28	-26.56	-23.51
	<i>Gumbel</i>	1.57	0.11	21.17	-40.34	-37.29
	<i>Frank</i>	4.27	0.64	23.99	-45.99	-42.94
	<i>Joe</i>	1.75	0.16	16.99	-31.98	-28.93
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	0.29	0.1	31.56	-59.12	-53.02
	<i>Clayton</i>	0.67	0.16	13.56	-25.12	-22.07
	<i>Gumbel</i>	1.39	0.09	18.6	-35.19	-32.14
	<i>Frank</i>	1.76	0.54	5.18	-8.36	-5.31
	<i>Joe</i>	1.57	0.14	18.08	-34.15	-31.1

	Cópula	Parámetro	Error Estándar	Log- likelihood	AIC	BIC
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.52	0.08	30.18	-56.36	-50.26
	<i>Clayton</i>	0.95	0.19	18.27	-34.54	-31.49
	<i>Gumbel</i>	1.48	0.1	19.26	-36.51	-33.46
	<i>Frank</i>	2.82	0.57	12.6	-23.19	-20.14
	<i>Joe</i>	1.89	0.17	24.72	-47.44	-44.39
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.37	0.08	12.45	-20.9	-14.8
	<i>Clayton</i>	1.01	0.16	28.29	-54.58	-51.53
	<i>Gumbel</i>	1.42	0.09	20.91	-39.82	-36.77
	<i>Frank</i>	2.14	0.5	9.11	-16.23	-13.18
	<i>Joe</i>	1.86	0.15	30.73	-59.45	-56.4
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.8	0.03	78.99	-153.98	-147.88
	<i>Clayton</i>	2.46	0.28	67.41	-132.82	-129.77
	<i>Gumbel</i>	2.44	0.17	71.93	-141.86	-138.81
	<i>Frank</i>	8.71	0.8	76.6	-151.19	-148.14
	<i>Joe</i>	3.31	0.28	71.35	-14.71	-137.66
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.78	0.04	68.72	-133.45	-127.35
	<i>Clayton</i>	0.88	0.19	12.79	-23.58	-20.53
	<i>Gumbel</i>	1.61	0.12	20.56	-39.11	-36.06
	<i>Frank</i>	5.21	0.71	29.49	-56.99	-53.94
	<i>Joe</i>	1.86	0.17	18.55	-35.09	-32.04
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	0.49	0.07	22.94	-41.89	-35.79
	<i>Clayton</i>	0.74	0.14	17.59	-33.18	-30.13
	<i>Gumbel</i>	1.46	0.09	20.67	-39.33	-36.28
	<i>Frank</i>	3.12	0.52	17.88	-33.76	-30.71
	<i>Joe</i>	1.61	0.13	16.75	-31.5	-28.45
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.82	0.03	70.01	-136.02	-129.92
	<i>Clayton</i>	1.8	0.24	43.49	-84.99	-81.94
	<i>Gumbel</i>	2.13	0.15	51.17	-100.34	-97.29
	<i>Frank</i>	7.85	0.8	62.72	-123.43	-120.38
	<i>Joe</i>	2.7	0.23	48.49	-94.99	-91.94
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.37	0.08	11.19	-18.38	-12.28
	<i>Clayton</i>	0.79	0.15	18.25	-34.51	-31.46
	<i>Gumbel</i>	1.37	0.09	14.64	-27.29	-24.24
	<i>Frank</i>	2.47	0.52	11.71	-21.41	-18.36
	<i>Joe</i>	1.71	0.14	19.74	-37.48	-34.43
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.35	0.09	42.59	-81.19	-75.09
	<i>Clayton</i>	1.04	0.17	27.54	-53.09	-50.04
	<i>Gumbel</i>	1.54	0.1	30.12	-58.24	-55.19
	<i>Frank</i>	2.27	0.52	8.83	-15.65	-12.6
	<i>Joe</i>	1.83	0.15	30.99	-59.98	-56.93

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.19	0.1	21.52	-39.03	-32.93
	<i>Clayton</i>	-0.19	0.16	2.54	-3.08	-0.03
	<i>Gumbel</i>	-1.1	0.08	3.24	-4.48	-1.43
	<i>Frank</i>	-0.91	0.55	1.41	-0.83	2.22
	<i>Joe</i>	-1.17	0.13	4.53	-7.07	-4.02
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	0.45	0.08	37.27	-70.54	-64.44
	<i>Clayton</i>	0.86	0.15	22.32	-42.64	-39.59
	<i>Gumbel</i>	1.52	0.1	26	-50	-46.95
	<i>Frank</i>	2.82	0.54	13.22	-24.44	-21.39
	<i>Joe</i>	1.72	0.14	23.64	-45.29	-42.24
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	-0.11	0.11	24.57	-45.15	-39.05
	<i>Clayton</i>	-0.05	0.1	0.14	1.73	4.78
	<i>Gumbel</i>	-1.04	0.05	0.62	0.75	3.8
	<i>Frank</i>	-0.35	0.56	0.2	1.6	4.65
	<i>Joe</i>	-1.08	0.08	0.91	0.18	3.23
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	-0.11	0.1	6.58	-9.15	-3.05
	<i>Clayton</i>	0	0.16	0	2	5.05
	<i>Gumbel</i>	-1	0.08	0	2	5.05
	<i>Frank</i>	-0.5	0.52	0.47	1.06	4.11
	<i>Joe</i>	-1	0.13	0	2	5.05
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.1	0.1	10.21	-16.43	-10.33
	<i>Clayton</i>	0.74	0.15	18.51	-35.01	-31.96
	<i>Gumbel</i>	1.28	0.07	14.92	-27.84	-24.79
	<i>Frank</i>	0.86	0.51	1.4	-0.8	2.25
	<i>Joe</i>	1.6	0.13	22.88	-43.75	-40.71
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.01	0.1	5.7	-7.39	-1.29
	<i>Clayton</i>	0.21	0.1	2.81	-3.63	-0.58
	<i>Gumbel</i>	1.08	0.05	2.75	-3.51	-0.46
	<i>Frank</i>	-0.24	0.51	0.11	1.78	4.83
	<i>Joe</i>	1.17	0.08	4.81	-7.62	-4.57
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.13	0.11	11.91	-19.82	-13.72
	<i>Clayton</i>	-0.06	0.17	0.43	1.14	4.19
	<i>Gumbel</i>	-1.03	0.08	0.22	1.55	4.6
	<i>Frank</i>	-0.38	0.55	0.24	1.52	4.57
	<i>Joe</i>	-1.05	0.13	0.47	1.06	4.11
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	-0.19	0.1	14.87	-25.74	-19.64
	<i>Clayton</i>	-0.11	0.11	4.77	-7.54	-4.49
	<i>Gumbel</i>	-1.26	0.08	9.26	-16.53	-13.48
	<i>Frank</i>	-1.44	0.52	3.86	-5.72	-2.67
	<i>Joe</i>	-1.12	0.08	6.19	-10.37	-7.32

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	-0.06	0.11	5.34	-6.69	-0.59
	<i>Clayton</i>	0.54	0.13	12.72	-23.43	-20.38
	<i>Gumbel</i>	1.2	0.06	10.69	-19.38	-16.33
	<i>Frank</i>	0.14	0.5	0.04	1.92	4.97
	<i>Joe</i>	1.44	0.11	17.02	-32.04	-28.99
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	-0.17	0.1	7.89	-11.77	-5.67
	<i>Clayton</i>	-0.04	0.09	0.13	1.74	4.79
	<i>Gumbel</i>	-1.04	0.07	0.82	0.35	3.4
	<i>Frank</i>	-0.54	0.52	0.54	0.91	3.96
	<i>Joe</i>	-1.06	0.11	0.82	0.36	3.41
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	0.76	0.03	63.52	-123.04	-116.94
	<i>Clayton</i>	1.71	0.21	51.94	-101.88	-98.83
	<i>Gumbel</i>	2.15	0.14	60.86	-119.72	-116.67
	<i>Frank</i>	7.26	0.7	65.21	-128.41	-125.36
	<i>Joe</i>	2.56	0.21	51.43	-100.86	-97.81
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.11	0.12	16.41	-28.81	-22.71
	<i>Clayton</i>	0.38	0.12	6.13	-10.26	-7.21
	<i>Gumbel</i>	1.21	0.07	6.66	-11.31	-8.26
	<i>Frank</i>	1.26	0.51	2.91	-3.82	-0.77
	<i>Joe</i>	1.31	0.1	6.65	-11.3	-8.25
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.1	0.09	2.27	-0.54	5.56
	<i>Clayton</i>	0.22	0.12	2.24	-2.49	0.56
	<i>Gumbel</i>	1.1	0.06	1.93	-1.86	1.19
	<i>Frank</i>	0.64	0.49	0.86	0.28	3.32
	<i>Joe</i>	1.19	0.09	2.81	-3.63	-0.58

Periodo de Crisis

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
DAX - Merval	<i>Student t</i>	0.62	0.04	67.57	-131.13	-123.35
	<i>Clayton</i>	0.6	0.1	20.7	-39.39	-35.5
	<i>Gumbel</i>	1.44	0.07	32.4	-62.79	-58.9
	<i>Frank</i>	4.38	0.42	60.84	-119.69	-115.8
	<i>Joe</i>	1.56	0.1	22.68	-43.36	-39.47
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.02	0.07	11.44	-18.87	-11.1
	<i>Clayton</i>	0	0.12	-0.01	2.01	5.9
	<i>Gumbel</i>	1	0.05	-0.01	2.02	5.9
	<i>Frank</i>	-0.2	0.32	0.2	1.59	5.48
	<i>Joe</i>	1	0.08	-0.01	2.01	5.9
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	-0.14	0.06	20.43	-36.87	-29.09
	<i>Clayton</i>	-0.24	0.1	17.73	-33.45	-29.57
	<i>Gumbel</i>	-1.12	0.05	16.35	-30.7	-26.82
	<i>Frank</i>	-0.75	0.34	2.5	-3	0.89
	<i>Joe</i>	-1.21	0.09	24.32	-46.65	-42.76
DAX - IPC	<i>Student t</i>	0.93	0.01	221.47	-438.95	-431.17
	<i>Clayton</i>	0.94	0.14	31	-60.01	-56.12
	<i>Gumbel</i>	1.63	0.08	48.84	-95.68	-91.79
	<i>Frank</i>	5.26	0.5	62.63	-123.26	-119.37
	<i>Joe</i>	1.97	0.12	50.83	-99.65	-95.76
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	0.85	0.02	221.94	-439.88	-432.1
	<i>Clayton</i>	2.21	0.16	154.84	-307.67	-303.78
	<i>Gumbel</i>	2.48	0.11	175.75	-349.5	-345.61
	<i>Frank</i>	8.86	0.54	175.69	-349.37	-345.49
	<i>Joe</i>	3.02	0.16	157.4	-312.79	-308.9
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.36	0.05	23.66	-43.32	-35.54
	<i>Clayton</i>	0.57	0.09	24.71	-47.41	-43.52
	<i>Gumbel</i>	1.31	0.05	25.7	-49.39	-45.5
	<i>Frank</i>	2.4	0.33	26.31	-50.61	-46.73
	<i>Joe</i>	1.48	0.08	24.89	-47.78	-43.89
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.8	0.02	148.39	-292.78	-285
	<i>Clayton</i>	0.87	0.12	33.09	-64.19	-60.3
	<i>Gumbel</i>	1.57	0.08	48.24	-94.47	-90.58
	<i>Frank</i>	4.72	0.45	60.98	-119.95	-116.06
	<i>Joe</i>	1.83	0.11	45.59	-89.19	-85.3
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.6	0.04	48.96	-93.92	-86.14
	<i>Clayton</i>	-0.91	0.11	56.91	-111.81	-107.92
	<i>Gumbel</i>	-1.52	0.07	54	-105.99	-102.1
	<i>Frank</i>	-4.13	0.41	58.93	-115.85	-111.96
	<i>Joe</i>	-1.88	0.11	60.69	-119.38	-115.49

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error</i> <i>Estándar</i>	<i>Log-</i> <i>likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.23	0.06	11.82	-19.64	-11.87
	<i>Clayton</i>	0.03	0.1	0.06	1.88	5.77
	<i>Gumbel</i>	1.06	0.05	0.69	0.63	4.51
	<i>Frank</i>	1.47	0.33	9.93	-17.86	-13.97
	<i>Joe</i>	1	0.09	0	2	5.89
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.12	0.06	2.83	-1.65	6.12
	<i>Clayton</i>	0.18	0.07	4.64	-7.29	-3.4
	<i>Gumbel</i>	1.07	0.03	4.92	-7.84	-3.95
	<i>Frank</i>	0.74	0.31	2.89	-3.79	0.1
	<i>Joe</i>	1.09	0.04	5.08	-8.16	-4.27
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.65	0.03	101.05	-198.1	-190.32
	<i>Clayton</i>	1.08	0.11	66.94	-131.88	-127.99
	<i>Gumbel</i>	1.71	0.07	80.8	-159.6	-155.71
	<i>Frank</i>	5.07	0.38	90.79	-179.58	-175.69
	<i>Joe</i>	1.92	0.11	65.25	-128.49	-124.6
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.01	0.06	2.1	-0.2	7.57
	<i>Clayton</i>	0.13	0.06	2.78	-3.55	0.33
	<i>Gumbel</i>	1.04	0.03	0.88	0.24	4.13
	<i>Frank</i>	-0.26	0.31	0.35	1.31	5.2
	<i>Joe</i>	1.09	0.05	2.06	-2.12	1.77
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	0.33	0.05	20.57	-37.13	-29.35
	<i>Clayton</i>	0.61	0.09	32.34	-62.68	-58.79
	<i>Gumbel</i>	1.29	0.05	24.56	-47.12	-43.23
	<i>Frank</i>	2.11	0.33	20.82	-39.64	-35.75
	<i>Joe</i>	1.52	0.08	30.87	-59.74	-55.85
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.68	0.04	141.86	-279.71	-271.93
	<i>Clayton</i>	1.45	0.13	94.32	-186.65	-182.76
	<i>Gumbel</i>	1.94	0.08	114.27	-226.53	-222.64
	<i>Frank</i>	5.52	0.39	103.59	-205.17	-201.28
	<i>Joe</i>	2.29	0.12	97.78	-193.55	-189.66
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.82	0.02	191.84	-379.68	-371.91
	<i>Clayton</i>	2.1	0.16	150.88	-299.75	-295.87
	<i>Gumbel</i>	2.47	0.11	180.95	-359.91	-356.02
	<i>Frank</i>	9.75	0.56	212.7	-423.4	-419.51
	<i>Joe</i>	2.98	0.16	152.15	-302.3	-298.41
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.66	0.03	93.13	93.13	-174.49
	<i>Clayton</i>	1.1	0.11	65.72	-129.45	-125.56
	<i>Gumbel</i>	1.75	0.08	82.15	-162.31	-158.42
	<i>Frank</i>	5.8	0.41	109.94	-217.87	-213.98
	<i>Joe</i>	2	0.11	65.93	-129.87	-125.98

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.01	0.05	-1.41	6.83	14.6
	<i>Clayton</i>	0	0.06	0	2	5.89
	<i>Gumbel</i>	1	0.04	0	2.01	5.9
	<i>Frank</i>	0.1	0.3	0.05	1.9	5.79
	<i>Joe</i>	1	0.07	0	2.01	5.9
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	0.22	0.06	21.13	-38.25	-30.47
	<i>Clayton</i>	0.75	0.1	41.05	-80.09	-76.2
	<i>Gumbel</i>	1.1	0.03	20.58	-39.15	-35.26
	<i>Frank</i>	1.14	0.33	6.11	-10.23	-6.34
	<i>Joe</i>	1.66	0.09	52.25	-102.5	-98.61
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	0.75	0.03	144.51	-285.02	-277.24
	<i>Clayton</i>	1.47	0.13	87	-172	-168.11
	<i>Gumbel</i>	1.98	0.09	110	-217.99	-214.1
	<i>Frank</i>	7.08	0.46	135.41	-268.81	-264.92
	<i>Joe</i>	2.33	0.13	92.36	-182.73	-178.84
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	0.91	0.01	311.53	-619.07	-611.29
	<i>Clayton</i>	3.52	0.23	245.24	-488.47	-484.58
	<i>Gumbel</i>	3.6	0.16	303.34	-604.69	-600.8
	<i>Frank</i>	19.61	0.96	408.97	-815.94	-812.05
	<i>Joe</i>	4.38	0.23	247.07	-492.15	-488.26
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.73	0.02	124.38	-244.75	-236.98
	<i>Clayton</i>	1.71	0.13	128.22	-254.45	-250.56
	<i>Gumbel</i>	2.04	0.09	133.22	-264.45	-260.56
	<i>Frank</i>	6.92	0.44	144.18	-286.36	-282.47
	<i>Joe</i>	2.54	0.13	124.85	-247.7	-243.81
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.19	0.06	14.02	-24.04	-16.27
	<i>Clayton</i>	0.4	0.08	15.58	-29.16	-25.27
	<i>Gumbel</i>	1.18	0.04	13.85	-25.69	-21.8
	<i>Frank</i>	1.21	0.32	7.22	-12.45	-8.56
	<i>Joe</i>	1.3	0.07	17.08	-32.17	-28.28
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	0.09	0.06	4.5	-4.99	2.79
	<i>Clayton</i>	-0.01	0.09	0.41	1.19	5.07
	<i>Gumbel</i>	-1	0.05	0.93	0.14	4.03
	<i>Frank</i>	0.59	0.31	1.79	-1.59	2.3
	<i>Joe</i>	-1.01	0.08	1.61	-1.22	2.67
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	0.9	0.01	298.95	-593.9	-586.12
	<i>Clayton</i>	2.42	0.18	154.4	-306.8	-302.92
	<i>Gumbel</i>	2.76	0.13	195.9	-389.8	-385.91
	<i>Frank</i>	11.25	0.63	227.2	-452.4	-448.52
	<i>Joe</i>	3.24	0.18	161.5	-320.99	-317.1

	<i>Cópula</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Error Estándar</i>	<i>Log-likelihood</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	0.97	0	394.59	-785.17	-777.39
	<i>Clayton</i>	5.44	0.33	325.1	-648.2	-644.31
	<i>Gumbel</i>	4.65	0.22	373.19	-744.38	-740.49
	<i>Frank</i>	28.56	1.89	495.46	-988.92	-985.03
	<i>Joe</i>	6.25	0.33	331.21	-660.41	-656.52
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	0.62	0.04	108.8	-213.6	-205.82
	<i>Clayton</i>	1.05	0.11	64.64	-127.27	-123.38
	<i>Gumbel</i>	1.71	0.07	79.52	-157.04	-153.16
	<i>Frank</i>	4.51	0.37	73.65	-145.3	-141.42
	<i>Joe</i>	1.89	0.1	64.72	-127.43	-123.54
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	-0.16	0.05	2.73	-1.45	6.33
	<i>Clayton</i>	-0.04	0.07	2.75	-3.51	0.38
	<i>Gumbel</i>	-1.03	0.03	1.87	-1.75	2.14
	<i>Frank</i>	-0.97	0.3	5.32	-8.64	-4.75
	<i>Joe</i>	-1.03	0.04	1.71	-1.42	2.47
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.92	0.01	328.25	-652.51	-644.73
	<i>Clayton</i>	4.37	0.27	287.19	-572.38	-568.49
	<i>Gumbel</i>	3.87	0.18	324.2	-646.39	-642.5
	<i>Frank</i>	16.29	0.84	346.08	-690.17	-686.28
	<i>Joe</i>	5.17	0.27	290.47	-578.95	-575.06
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.87	0.01	261.86	-519.73	-511.95
	<i>Clayton</i>	2.57	0.18	186.72	-371.45	-367.56
	<i>Gumbel</i>	2.85	0.13	229.5	-457	-453.12
	<i>Frank</i>	10.75	0.59	240.41	-478.83	-474.94
	<i>Joe</i>	3.38	0.18	187.08	-372.17	-368.28

Apéndice G. Resultados de los Coeficientes de Dependencia Asintótica**Periodo Total**

	Cópula	Tau de Empirical		Coeficiente de dependencia		
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
DAX - Merval	<i>Student t</i>	0.2	0.16	<0.01	0.27	0.27
	<i>Clayton</i>	0.16	0.16	<0.01	0.16	0
	<i>Gumbel</i>	0.18	0.16	<0.01	0.24	0
	<i>Frank</i>	0.2	0.16	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.13	0.16	<0.01	0.27	0
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.11	-0.17	<0.01	0.07	0.07
	<i>Clayton</i>	-0.17	-0.17	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.17	-0.17	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.11	-0.17	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.11	-0.17	<0.01	0	0
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	-0.21	-0.14	<0.01	0.02	0.02
	<i>Clayton</i>	-0.14	-0.14	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.14	-0.14	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.22	-0.14	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.14	-0.14	<0.01	0	0
DAX - IPC	<i>Student t</i>	0.43	0.39	<0.01	0.46	0.46
	<i>Clayton</i>	0.2	0.39	<0.01	0	0.26
	<i>Gumbel</i>	0.28	0.39	<0.01	0	0.35
	<i>Frank</i>	0.36	0.39	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.22	0.39	<0.01	0	0.41
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	0.52	0.6	<0.01	0.04	0.04
	<i>Clayton</i>	0.46	0.6	<0.01	0.66	0
	<i>Gumbel</i>	0.51	0.6	<0.01	0.59	0
	<i>Frank</i>	0.55	0.6	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.45	0.6	<0.01	0.68	0
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.34	0.29	<0.01	0.35	0.35
	<i>Clayton</i>	0.39	0.29	<0.01	0	0.58
	<i>Gumbel</i>	0.39	0.29	<0.01	0	0.47
	<i>Frank</i>	0.34	0.29	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.38	0.29	<0.01	0	0.62
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.08	0.02	0.48	0.07	0.07
	<i>Clayton</i>	0.21	0.02	0.48	0	0.26
	<i>Gumbel</i>	0.17	0.02	0.48	0	0
	<i>Frank</i>	0.07	0.02	0.48	0	0
	<i>Joe</i>	0.2	0.02	0.48	0	0.38

	Cópula	Tau de Empirical		Coeficiente de dependencia		
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.08	-0.08	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.08	-0.08	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.07	-0.08	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.13	-0.08	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.04	-0.08	<0.01	0	0
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.46	0.44	<0.01	0.48	0.48
	<i>Clayton</i>	0.43	0.44	<0.01	0	0.63
	<i>Gumbel</i>	0.44	0.44	<0.01	0	0.52
	<i>Frank</i>	0.45	0.44	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.43	0.44	<0.01	0	0.66
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.46	0.52	<0.01	0.14	0.14
	<i>Clayton</i>	0.49	0.52	<0.01	0.7	0
	<i>Gumbel</i>	0.49	0.52	<0.01	0.58	0
	<i>Frank</i>	0.48	0.52	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.48	0.52	<0.01	0.71	0
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.41	0.53	<0.01	0.23	0.23
	<i>Clayton</i>	0.39	0.53	<0.01	0	0.58
	<i>Gumbel</i>	0.41	0.53	<0.01	0	0.5
	<i>Frank</i>	0.45	0.53	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.38	0.53	<0.01	0	0.61
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.26	0.32	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	0.2	0.32	<0.01	0	0.24
	<i>Gumbel</i>	0.18	0.32	<0.01	0	0.23
	<i>Frank</i>	0.16	0.32	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.18	0.32	<0.01	0	0.35
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.5	-0.53	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.53	-0.53	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.53	-0.53	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.5	-0.53	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.53	-0.53	<0.01	0	0
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.36	0.36	<0.01	0.21	0.21
	<i>Clayton</i>	0.37	0.36	<0.01	0	0.55
	<i>Gumbel</i>	0.37	0.36	<0.01	0	0.45
	<i>Frank</i>	0.4	0.36	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.37	0.36	<0.01	0	0.6
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.17	0.14	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	0.19	0.14	<0.01	0	0.23
	<i>Gumbel</i>	0.17	0.14	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	0.2	0.14	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.17	0.14	<0.01	0	0

	Cópula	Tau de Empirical			Coeficiente de dependencia	
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.19	0.19	<0.01	0.05	0.05
	<i>Clayton</i>	0.2	0.19	<0.01	0	0.24
	<i>Gumbel</i>	0.2	0.19	<0.01	0	0.26
	<i>Frank</i>	0.2	0.19	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.19	0.19	<0.01	0	0.37
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.02	-0.06	0.03	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.06	-0.06	0.03	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.06	-0.06	0.03	0	0
	<i>Frank</i>	-0.03	-0.06	0.03	0	0
	<i>Joe</i>	-0.06	-0.06	0.03	0	0
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.28	-0.27	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.25	-0.27	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.27	-0.27	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.34	-0.27	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.26	-0.27	<0.01	0	0
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	0.4	0.48	<0.01	0.44	0.44
	<i>Clayton</i>	0.25	0.48	<0.01	0	0.35
	<i>Gumbel</i>	0.33	0.48	<0.01	0.41	0
	<i>Frank</i>	0.41	0.48	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.26	0.48	<0.01	0	0
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	0.45	0.54	<0.01	0.02	0.02
	<i>Clayton</i>	0.34	0.54	<0.01	0.51	0
	<i>Gumbel</i>	0.4	0.54	<0.01	0.48	0
	<i>Frank</i>	0.47	0.54	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.32	0.54	<0.01	0.54	0
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.36	0.34	<0.01	0.41	0.41
	<i>Clayton</i>	0.29	0.34	<0.01	0	0.43
	<i>Gumbel</i>	0.33	0.34	<0.01	0	0.41
	<i>Frank</i>	0.34	0.34	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.3	0.34	<0.01	0	0.52
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.08	0.05	0.08	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	0.14	0.05	0.08	0	0.12
	<i>Gumbel</i>	0.14	0.05	0.08	0	0.18
	<i>Frank</i>	0.07	0.05	0.08	0	0
	<i>Joe</i>	0.16	0.05	0.08	0	0.31
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.3	-0.25	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.25	-0.25	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.25	-0.25	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.32	-0.25	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.23	-0.25	<0.01	0	0

	Cópula	Tau de Empirical		Coeficiente de dependencia		
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	0.57	0.53	<0.01	0.58	0.58
	<i>Clayton</i>	0.32	0.53	<0.01	0	0.48
	<i>Gumbel</i>	0.4	0.53	<0.01	0	0.48
	<i>Frank</i>	0.47	0.53	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.33	0.53	<0.01	0	0.56
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	0.38	0.44	<0.01	0.01	0.01
	<i>Clayton</i>	0.3	0.44	<0.01	0.44	0
	<i>Gumbel</i>	0.33	0.44	<0.01	0.41	0
	<i>Frank</i>	0.36	0.44	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.27	0.44	<0.01	0.48	0
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	0.36	0.37	<0.01	0.09	0.09
	<i>Clayton</i>	0.36	0.37	<0.01	0	0.53
	<i>Gumbel</i>	0.37	0.37	<0.01	0	0.46
	<i>Frank</i>	0.42	0.37	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.36	0.37	<0.01	0	0.59
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	0.46	0.49	<0.01	0.26	0.26
	<i>Clayton</i>	0.56	0.49	<0.01	0	0.77
	<i>Gumbel</i>	0.52	0.49	<0.01	0	0.61
	<i>Frank</i>	0.49	0.49	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.56	0.49	<0.01	0	0.77
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.48	0.49	<0.01	0.26	0.26
	<i>Clayton</i>	0.46	0.49	<0.01	0	0.66
	<i>Gumbel</i>	0.48	0.49	<0.01	0	0.57
	<i>Frank</i>	0.54	0.49	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.46	0.49	<0.01	0	0.69
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.46	0.53	<0.01	0.26	0.26
	<i>Clayton</i>	0.39	0.53	<0.01	0	0.59
	<i>Gumbel</i>	0.45	0.53	<0.01	0	0.54
	<i>Frank</i>	0.56	0.53	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.4	0.53	<0.01	0	0.63

Periodo de Precrisis

	Cópula	Tau de Empirical			Coeficiente de dependencia	
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
DAX - Merval	<i>Student t</i>	-0.01	-0.03	0.63	0.18	0.18
	<i>Clayton</i>	0	-0.03	0.63	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	-0.03	0.63	0	0
	<i>Frank</i>	0.07	-0.03	0.63	0	0
	<i>Joe</i>	0	-0.03	0.63	0	0
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.3	-0.31	<0.01	0.06	0.06
	<i>Clayton</i>	-0.25	-0.31	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.29	-0.31	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.32	-0.31	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.32	-0.31	<0.01	0	0
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	0.24	0.3	<0.01	0.24	0.24
	<i>Clayton</i>	0.32	0.3	<0.01	0.49	0
	<i>Gumbel</i>	0.31	0.3	<0.01	0.38	0
	<i>Frank</i>	0.25	0.3	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.31	0.3	<0.01	0.54	0
DAX - IPC	<i>Student t</i>	-0.28	-0.24	<0.01	0.07	0.07
	<i>Clayton</i>	-0.24	-0.24	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.24	-0.24	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.25	-0.24	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.24	-0.24	<0.01	0	0
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	-0.18	-0.18	<0.01	0.11	0.11
	<i>Clayton</i>	0	-0.18	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	-0.18	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.11	-0.18	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0	-0.18	<0.01	0	0
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.47	0.54	<0.01	0.5	0.5
	<i>Clayton</i>	0.47	0.54	<0.01	0	0.67
	<i>Gumbel</i>	0.5	0.54	<0.01	0	0.58
	<i>Frank</i>	0.44	0.54	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.46	0.54	<0.01	0	0.69
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.52	0.45	<0.01	0.61	0.61
	<i>Clayton</i>	0.27	0.45	<0.01	0.39	0
	<i>Gumbel</i>	0.36	0.45	<0.01	0	0.44
	<i>Frank</i>	0.41	0.45	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.29	0.45	<0.01	0	0.51
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	0.18	0.15	<0.01	0.29	0.29
	<i>Clayton</i>	0.25	0.15	<0.01	0	0.35
	<i>Gumbel</i>	0.28	0.15	<0.01	0	0.36
	<i>Frank</i>	0.19	0.15	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.24	0.15	<0.01	0	0.45

	Cópula	Tau de Empirical		Coeficiente de dependencia		
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.35	0.38	<0.01	0.4	0.4
	<i>Clayton</i>	0.32	0.38	<0.01	0	0.48
	<i>Gumbel</i>	0.32	0.38	<0.01	0	0.4
	<i>Frank</i>	0.29	0.38	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.33	0.38	<0.01	0	0.56
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.24	0.21	<0.01	0.18	0.18
	<i>Clayton</i>	0.34	0.21	<0.01	0.5	0
	<i>Gumbel</i>	0.29	0.21	<0.01	0.37	0
	<i>Frank</i>	0.23	0.21	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.32	0.21	<0.01	0.55	0
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.59	0.68	<0.01	0.4	0.4
	<i>Clayton</i>	0.55	0.68	<0.01	0	0.75
	<i>Gumbel</i>	0.59	0.68	<0.01	0	0.67
	<i>Frank</i>	0.63	0.68	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.55	0.68	<0.01	0	0.77
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.57	0.5	<0.01	0.1	0.1
	<i>Clayton</i>	0.3	0.5	<0.01	0	0.45
	<i>Gumbel</i>	0.38	0.5	<0.01	0	0.46
	<i>Frank</i>	0.47	0.5	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.32	0.5	<0.01	0	0.55
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	0.33	0.33	<0.01	0.18	0.18
	<i>Clayton</i>	0.27	0.33	<0.01	0.39	0
	<i>Gumbel</i>	0.32	0.33	<0.01	0	0.39
	<i>Frank</i>	0.32	0.33	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.25	0.33	<0.01	0	0.46
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.61	0.63	<0.01	0.49	0.49
	<i>Clayton</i>	0.47	0.63	<0.01	0	0.68
	<i>Gumbel</i>	0.53	0.63	<0.01	0	0.62
	<i>Frank</i>	0.6	0.63	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.48	0.63	<0.01	0	0.71
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.24	0.27	<0.01	0.16	0.16
	<i>Clayton</i>	0.28	0.27	<0.01	0.41	0
	<i>Gumbel</i>	0.27	0.27	<0.01	0.34	0
	<i>Frank</i>	0.26	0.27	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.28	0.27	<0.01	0.5	0
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.23	0.17	<0.01	0.31	0.31
	<i>Clayton</i>	0.34	0.17	<0.01	0.51	0
	<i>Gumbel</i>	0.35	0.17	<0.01	0.43	0
	<i>Frank</i>	0.24	0.17	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.32	0.17	<0.01	0.54	0

	Cópula	Tau de Empirical			Coeficiente de dependencia	
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.12	-0.09	0.11	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.09	-0.09	0.11	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.09	-0.09	0.11	0	0
	<i>Frank</i>	-0.1	-0.09	0.11	0	0
	<i>Joe</i>	-0.09	-0.09	0.11	0	0
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	0.29	0.27	<0.01	0.36	0.36
	<i>Clayton</i>	0.3	0.27	<0.01	0.45	0
	<i>Gumbel</i>	0.34	0.27	<0.01	0	0.42
	<i>Frank</i>	0.29	0.27	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.29	0.27	<0.01	0.5	0
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	-0.07	-0.04	0.43	0.15	0.15
	<i>Clayton</i>	-0.03	-0.04	0.43	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.04	-0.04	0.43	0	0
	<i>Frank</i>	-0.04	-0.04	0.43	0	0
	<i>Joe</i>	-0.04	-0.04	0.43	0	0
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	-0.07	-0.09	0.1	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	0	-0.09	0.1	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	-0.09	0.1	0	0
	<i>Frank</i>	-0.06	-0.09	0.1	0	0
	<i>Joe</i>	0	-0.09	0.1	0	0
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.06	0.17	<0.01	0.2	0.2
	<i>Clayton</i>	0.27	0.17	<0.01	0.39	0
	<i>Gumbel</i>	0.22	0.17	<0.01	0.28	0
	<i>Frank</i>	0.09	0.17	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.25	0.17	<0.01	0.46	0
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.01	0.05	0.37	0.09	0.09
	<i>Clayton</i>	0.09	0.05	0.37	0.04	0
	<i>Gumbel</i>	0.07	0.05	0.37	0.1	0
	<i>Frank</i>	-0.03	0.05	0.37	0	0
	<i>Joe</i>	0.09	0.05	0.37	0.19	0
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.09	-0.03	0.59	0.14	0.14
	<i>Clayton</i>	-0.03	-0.03	0.59	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.03	-0.03	0.59	0	0
	<i>Frank</i>	-0.04	-0.03	0.59	0	0
	<i>Joe</i>	-0.03	-0.03	0.59	0	0
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	-0.12	-0.04	0.41	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	-0.05	-0.04	0.41	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.21	-0.04	0.41	0	0
	<i>Frank</i>	-0.16	-0.04	0.41	0	0
	<i>Joe</i>	-0.07	-0.04	0.41	0	0

	Cópula	Tau de Empirical		Coeficiente de dependencia		
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	-0.04	0.01	0.84	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	0.21	0.01	0.84	0.28	0
	<i>Gumbel</i>	0.17	0.01	0.84	0.22	0
	<i>Frank</i>	0.02	0.01	0.84	0	0
	<i>Joe</i>	0.2	0.01	0.84	0.38	0
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	-0.11	-0.08	0.12	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	-0.02	-0.08	0.12	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.04	-0.08	0.12	0	0
	<i>Frank</i>	-0.06	-0.08	0.12	0	0
	<i>Joe</i>	-0.03	-0.08	0.12	0	0
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	0.55	0.63	<0.01	0.44	0.44
	<i>Clayton</i>	0.46	0.63	<0.01	0	0.67
	<i>Gumbel</i>	0.53	0.63	<0.01	0	0.62
	<i>Frank</i>	0.57	0.63	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.46	0.63	<0.01	0.69	0
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.07	0.13	0.02	0.22	0.22
	<i>Clayton</i>	0.16	0.13	0.02	0.16	0
	<i>Gumbel</i>	0.18	0.13	0.02	0	0.23
	<i>Frank</i>	0.14	0.13	0.02	0	0
	<i>Joe</i>	0.15	0.13	0.02	0	0.3
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.06	0.14	0.01	0.05	0.05
	<i>Clayton</i>	0.1	0.14	0.01	0.04	0
	<i>Gumbel</i>	0.09	0.14	0.01	0.12	0
	<i>Frank</i>	0.07	0.14	0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.1	0.14	0.01	0.21	0

Periodo de Crisis

	Cópula	Tau de Empirical			Coeficiente de dependencia	
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
DAX - Merval	<i>Student t</i>	0.43	0.43	<0.01	0.44	0.44
	<i>Clayton</i>	0.23	0.43	<0.01	0	0.31
	<i>Gumbel</i>	0.3	0.43	<0.01	0	0.38
	<i>Frank</i>	0.42	0.43	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.24	0.43	<0.01	0	0.44
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.02	0.06	0.1	0.07	0.07
	<i>Clayton</i>	0	0.06	0.1	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0.06	0.1	0	0
	<i>Frank</i>	-0.02	0.06	0.1	0	0
	<i>Joe</i>	0	0.06	0.1	0	0
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	-0.09	-0.11	<0.01	0.11	0.11
	<i>Clayton</i>	-0.11	-0.11	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.11	-0.11	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.08	-0.11	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.11	-0.11	<0.01	0	0
DAX - IPC	<i>Student t</i>	0.75	0.5	<0.01	0.76	0.76
	<i>Clayton</i>	0.32	0.5	<0.01	0.48	0
	<i>Gumbel</i>	0.39	0.5	<0.01	0.47	0
	<i>Frank</i>	0.47	0.5	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.35	0.5	<0.01	0.58	0
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	0.65	0.67	<0.01	0.66	0.66
	<i>Clayton</i>	0.52	-0.03	<0.01	0	0.73
	<i>Gumbel</i>	0.6	-0.03	<0.01	0	0.68
	<i>Frank</i>	0.63	-0.03	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.52	-0.03	<0.01	0	0.74
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.24	0.25	<0.01	0.1	0.1
	<i>Clayton</i>	0.22	0.25	<0.01	0	0.3
	<i>Gumbel</i>	0.24	0.25	<0.01	0	0.3
	<i>Frank</i>	0.25	0.25	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.21	0.25	<0.01	0	0.4
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.59	0.48	<0.01	0.54	0.54
	<i>Clayton</i>	0.3	0.48	<0.01	0	0.45
	<i>Gumbel</i>	0.36	0.48	<0.01	0	0.45
	<i>Frank</i>	0.44	0.48	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.31	0.48	<0.01	0	0.54
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	-0.41	-0.4	<0.01	0.02	0.02
	<i>Clayton</i>	-0.31	-0.4	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.34	-0.4	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	-0.4	-0.4	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	-0.33	-0.4	<0.01	0	0

	Cópula	Tau de Empirical		Coeficiente de dependencia		
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.15	0.22	<0.01	0.14	0.14
	<i>Clayton</i>	0.02	0.22	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	0.05	0.22	<0.01	0.07	0
	<i>Frank</i>	0.16	0.22	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0	0.22	<0.01	0	0
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.07	0.18	<0.01	0	0
	<i>Clayton</i>	0.08	0.18	<0.01	0	0.02
	<i>Gumbel</i>	0.07	0.18	<0.01	0	0.09
	<i>Frank</i>	0.08	0.18	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.05	0.18	<0.01	0	0.11
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.45	0.51	<0.01	0.58	0.58
	<i>Clayton</i>	0.35	0.51	<0.01	0	0.53
	<i>Gumbel</i>	0.42	0.51	<0.01	0	0.5
	<i>Frank</i>	0.46	0.51	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.34	0.51	<0.01	0	0.56
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.01	0.09	<0.01	0.58	0.58
	<i>Clayton</i>	0.06	0.09	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	0.04	0.09	<0.01	0	0.05
	<i>Frank</i>	-0.03	0.09	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.05	0.09	<0.01	0	0.11
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	0.21	0.17	<0.01	0.1	0.1
	<i>Clayton</i>	0.23	0.17	<0.01	0	0.32
	<i>Gumbel</i>	0.23	0.17	<0.01	0	0.29
	<i>Frank</i>	0.22	0.17	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.23	0.17	<0.01	0	0.42
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.48	0.58	<0.01	0.62	0.62
	<i>Clayton</i>	0.42	-0.03	<0.01	0	0.62
	<i>Gumbel</i>	0.49	-0.03	<0.01	0	0.57
	<i>Frank</i>	0.49	-0.03	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.41	-0.03	<0.01	0	0.65
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.62	0.71	<0.01	0.5	0.5
	<i>Clayton</i>	0.51	0.71	<0.01	0	0.72
	<i>Gumbel</i>	0.6	0.71	<0.01	0	0.68
	<i>Frank</i>	0.66	0.71	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.52	0.71	<0.01	0	0.74
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.46	0.55	<0.01	0.32	0.32
	<i>Clayton</i>	0.36	0.55	<0.01	0.53	0
	<i>Gumbel</i>	0.43	0.55	<0.01	0.51	0
	<i>Frank</i>	0.5	0.55	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.36	0.55	<0.01	0.59	0

	Cópula	Tau de Empirical			Coeficiente de dependencia	
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	-0.01	0.13	<0.01	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	0	0.13	<0.01	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0.13	<0.01	0	0
	<i>Frank</i>	0.01	0.13	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0	0.13	<0.01	0	0
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	0.14	0.09	0.01	0.19	0.19
	<i>Clayton</i>	0.27	0.09	0.01	0	0.4
	<i>Gumbel</i>	0.09	0.09	0.01	0	0.12
	<i>Frank</i>	0.13	0.09	0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.27	0.09	0.01	0	0.48
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	0.54	0.61	<0.01	0.54	0.54
	<i>Clayton</i>	0.42	0.61	<0.01	0.62	0
	<i>Gumbel</i>	0.5	0.61	<0.01	0.58	0
	<i>Frank</i>	0.57	0.61	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.42	0.61	<0.01	0.65	0
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	0.73	0.84	<0.01	0.44	0.44
	<i>Clayton</i>	0.64	0.84	<0.01	0	0.82
	<i>Gumbel</i>	0.72	0.84	<0.01	0	0.79
	<i>Frank</i>	0.81	0.84	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.64	0.84	<0.01	0	0.83
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.52	0.6	<0.01	0.33	0.33
	<i>Clayton</i>	0.46	0.6	<0.01	0	0.67
	<i>Gumbel</i>	0.51	0.6	<0.01	0	0.6
	<i>Frank</i>	0.56	0.6	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.45	0.6	<0.01	0	0.68
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.12	0.24	<0.01	0.13	0.13
	<i>Clayton</i>	0.17	0.24	<0.01	0	0.17
	<i>Gumbel</i>	0.15	0.24	<0.01	0	0.2
	<i>Frank</i>	0.13	0.24	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.14	0.24	<0.01	0	0.29
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	0.06	0	0.92	0.03	0.03
	<i>Clayton</i>	0	0	0.92	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0	0.92	0	0
	<i>Frank</i>	0.7	0	0.92	0	0
	<i>Joe</i>	0	0	0.92	0	0
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	0.71	0.74	<0.01	0.72	0.72
	<i>Clayton</i>	0.55	0.74	<0.01	0	0.75
	<i>Gumbel</i>	0.64	0.74	<0.01	0	0.71
	<i>Frank</i>	0.7	0.74	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.54	0.74	<0.01	0	0.76

	Cópula	Tau de Empirical			Coeficiente de dependencia	
		Kendall	Tau	P-valor	Superior	Inferior
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	0.83	0.87	<0.01	0.83	0.83
	<i>Clayton</i>	0.73	0.87	<0.01	0.88	0
	<i>Gumbel</i>	0.79	0.87	<0.01	0.84	0
	<i>Frank</i>	0.87	0.87	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.73	0.87	<0.01	0.88	0
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	0.42	0.5	<0.01	0.45	0.45
	<i>Clayton</i>	0.34	0.5	<0.01	0	0.52
	<i>Gumbel</i>	0.41	0.5	<0.01	0.5	0
	<i>Frank</i>	0.42	0.5	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.33	0.5	<0.01	0	0.56
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	-0.1	-0.02	0.58	0	0
	<i>Clayton</i>	-0.02	-0.02	0.58	0	0
	<i>Gumbel</i>	-0.03	-0.02	0.58	0	0
	<i>Frank</i>	-0.11	-0.02	0.58	0	0
	<i>Joe</i>	-0.02	-0.02	0.58	0	0
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.75	0.82	<0.01	0.69	0.69
	<i>Clayton</i>	0.69	0.82	<0.01	0.85	0
	<i>Gumbel</i>	0.74	0.82	<0.01	0.8	0
	<i>Frank</i>	0.78	0.82	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.69	0.82	<0.01	0.86	0
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.67	0.75	<0.01	0.6	0.6
	<i>Clayton</i>	0.56	0.75	<0.01	0	0.76
	<i>Gumbel</i>	0.65	0.75	<0.01	0	0.72
	<i>Frank</i>	0.68	0.75	<0.01	0	0
	<i>Joe</i>	0.56	0.75	<0.01	0	0.77

Apéndice H. Resumen de Coeficientes de Dependencia entre Periodos

	Cópula	Coeficiente de dependencia	
		Precrisis	Crisis
DAX - Merval	<i>Student t</i>	0.18	0.44
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
DAX - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.06	0.07
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
DAX - IPSA	<i>Student t</i>	0.24	0.11
	<i>Clayton</i>	0.49	0
	<i>Gumbel</i>	0.38	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.54	0
DAX - IPC	<i>Student t</i>	0.07	0.76
	<i>Clayton</i>	0	0.48
	<i>Gumbel</i>	0	0.47
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0.58
DAX - IGBL	<i>Student t</i>	0.11	0.66
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
IBEX 35 - Merval	<i>Student t</i>	0.5	0.1
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
IBEX 35 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.61	0.54
	<i>Clayton</i>	0.39	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0

	Cópula	Coeficiente de dependencia	
		Precrisis	Crisis
IBEX 35 - IPSA	<i>Student t</i>	0.29	0.02
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
IBEX 35 - IPC	<i>Student t</i>	0.4	0.14
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0.07
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
IBEX 35 - IGBL	<i>Student t</i>	0.18	0
	<i>Clayton</i>	0.5	0
	<i>Gumbel</i>	0.37	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.55	0
S&P 500 - Merval	<i>Student t</i>	0.4	0.58
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
S&P 500 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.01	0.58
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
S&P 500 - IPSA	<i>Student t</i>	0.18	0.1
	<i>Clayton</i>	0.39	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
S&P 500 - IPC	<i>Student t</i>	0.49	0.62
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
S&P 500 - IGBL	<i>Student t</i>	0.16	0.5
	<i>Clayton</i>	0.41	0
	<i>Gumbel</i>	0.34	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.5	0

	Cópula	Coeficiente de dependencia	
		Precrisis	Crisis
CAC 40 - Merval	<i>Student t</i>	0.31	0.32
	<i>Clayton</i>	0.51	0.53
	<i>Gumbel</i>	0.43	0.51
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.54	0.59
CAC 40 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0	0.13
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
CAC 40 - IPSA	<i>Student t</i>	0.36	0.19
	<i>Clayton</i>	0.45	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.5	0
CAC 40 - IPC	<i>Student t</i>	0.15	0.54
	<i>Clayton</i>	0	0.62
	<i>Gumbel</i>	0	0.58
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0.65
CAC 40 - IGBL	<i>Student t</i>	0.13	0.44
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
FTSE 100 - Merval	<i>Student t</i>	0.2	0.33
	<i>Clayton</i>	0.39	0
	<i>Gumbel</i>	0.28	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.46	0
FTSE 100 - Ibovespa	<i>Student t</i>	0.09	0.13
	<i>Clayton</i>	0.04	0
	<i>Gumbel</i>	0.1	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.19	0
FTSE 100 - IPSA	<i>Student t</i>	0.14	0.03
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0

	Cópula	Coeficiente de dependencia	
		Precrisis	Crisis
FTSE 100 - IPC	<i>Student t</i>	0.13	0.72
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
FTSE 100 - IGBL	<i>Student t</i>	0.13	0.83
	<i>Clayton</i>	0.28	0.88
	<i>Gumbel</i>	0.22	0.84
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.38	0.88
S&P 500 - DAX	<i>Student t</i>	0.13	0.45
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0.5
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0
S&P 500 - IBEX 35	<i>Student t</i>	0.44	0
	<i>Clayton</i>	0	0
	<i>Gumbel</i>	0	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.69	0
S&P 500 - CAC 40	<i>Student t</i>	0.22	0.69
	<i>Clayton</i>	0.16	0.85
	<i>Gumbel</i>	0	0.8
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0	0.86
S&P 500 - FTSE 100	<i>Student t</i>	0.05	0.6
	<i>Clayton</i>	0.04	0
	<i>Gumbel</i>	0.12	0
	<i>Frank</i>	0	0
	<i>Joe</i>	0.21	0