



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

“SOBRE LA DESAPARECIDA JAULA DE CUELLO 5”

EXAMEN POR TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:  
RICARDO JAVIER ANGELES CANUL

DIRECTOR DE LA TESIS: DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO  
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN: IMATE JURQUILLA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., ABRIL 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Resumen

En el siguiente trabajo se aborda el problema de la construcción de la  $(57,5)$ -jaula, que en caso de existir tendría 3250 vértices, el orden de su grupo de automorfismos sería a lo más 375 y no sería vértice transitiva. Este problema se atacó utilizando construcciones a partir de la gráfica bipartita  $B_q$ , reducciones y amalgamas utilizadas por varios autores (ver [14], [15], [1]) para incrementar el orden de la gráfica. A lo largo de esta tesis obtuvimos resultados interesantes utilizando este tipo de construcciones, tomando como base una gráfica de 3250 vértices 43-regular [12]. Además se utilizan algoritmos computacionales en C++ y Maple para hacer más sencillas algunas pruebas.

# Abstract

The topic of this thesis is about constructing maximal graphs with 3250 vertices with the goal of approaching the unknown  $(57;5)$ -cage that, in case of existing should have 3250 vertices, should not be vertex-transitive and their automorphism group should be of order at most 375. This open problem has been attacked using constructions from the bipartite graph  $B_q$ , reductions and amalgams developed in [14], [15], [1] in order to increase the graph order, starting from a graph with 3250 vertices [12]. Moreover, we use some programs in C++ and

Maple to prove some results.

*A mi familia*

# Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecer a mis padres Gregorio Angeles Aguilar y Francy Maria Canul Cob por haberme dado la vida, cariño, amor, estar conmigo en los momentos difíciles y apoyarme en cada una de mis decisiones.

Agradezco especialmente a mi hermano Jorge Alberto Angeles Canul por haber hecho mi vida muy alegre y siempre ayudando en lo que él podía.

Quiero agradecer a todos mis amigos y amigas que estuvieron conmigo en las buenas y las malas, en especial a José Alfredo, Martin, Pedro Jair, Jesús Guadalupe, Octavio, Guadalupe H., Elvira, Martha Araceli, Karina Joselyn, Mariel, Karen y Mónica que formaron parte importante de mi vida dándome consejos y ayudándome.

Quiero agradecer a todos mis profesores por creer en mi cuando a veces ya no podía, en especial y con todo mi respeto y admiración a Silvia, Norberta, Rolando, Rubén, Margarita,

Juancho y Eugenia.

También quiero agradecer a mi asesora Martha Gabriela Araujo Pardo por todos los consejos brindados y la paciencia que me tuvo y me sigue teniendo.

Quiero agradecer muy especialmente a Raquel Rosas Alcántara, mi esposa, por enojarse conmigo cuando no me apuraba en las cosas y me obligaba a hacerlas, además de darme muchos consejos para superarme y seguir adelante y a mi hija Pamela que si no fuera por ella, no le habría puesto el mismo empeño.

Por último y no menos importante, quiero agradecer a mis sinodales por la valiosa aportación realizada para mejorar en gran medida la forma de escribir esta tesis y aclarándome muchas dudas acerca de la buena redacción y en forma muy especial a la Dra. Adriana Hansberg por sus valiosos comentarios que me despejaron muchas dudas que no tenía previstas.

A lo largo de este camino he conocido a mucha gente que son parte importante de mi y que por falta de espacio sólo les diré que siempre estaré muy agradecido con todos ellos.

Gracias.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>4</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Teoría de Gráficas . . . . .	5
1.2. Espacios lineales parciales . . . . .	17
<b>2. Propiedades de <math>B_q</math> y sus variantes</b>	<b>22</b>
2.1. La gráfica de Levi $B_q$ . . . . .	22
2.2. Reducciones y amalgamas . . . . .	28
2.2.1. Reducciones . . . . .	29
2.2.2. Amalgamas . . . . .	31

---

<b>3. Construcciones maximales de orden 3250 a partir de <math>B_q</math></b>	<b>37</b>
3.1. Una gráfica regular de orden 3250 a partir de $B_{41}$ . . . . .	38
3.1.1. Las gráficas $H_1$ y $G_1$ . . . . .	42
3.1.2. Las gráficas $H_2$ y $G_2$ . . . . .	44
3.2. Maximalidad de $B_q$ . . . . .	47
3.2.1. Demostración de las condiciones de la gráfica . . . . .	48
3.2.2. Maximalidad de $B_{41}^*(S, T, 1)$ . . . . .	52
3.2.3. Una gráfica maximal regular . . . . .	53
3.2.4. No unicidad de $B_{41}^*(S, T, 1)$ . . . . .	55
3.2.5. Una gráfica birregular maximal por aristas . . . . .	59
<b>4. Conclusiones</b>	<b>72</b>
<b>5. Anexos</b>	<b>74</b>
5.1. Programa en C++ para determinar la regularidad máxima de $B_q^*(S, T, u)$ . . . . .	74
5.2. Programa en C++ para verificar si el cuello de $H_1$ es 5 . . . . .	75
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Introducción

En esta tesis trabajaremos en un problema clásico de gráficas extremales que se enmarca dentro del problema de jaulas y gráficas de Moore. Como se describirá a continuación, el cuello de una gráfica es el ciclo de longitud más pequeño contenido en ella y una gráfica es  $k$ -regular si todos los vértices tienen grado  $k$ . Una  $(k, g)$ -jaula es una gráfica  $k$ -regular de cuello  $g$  y de orden mínimo.

Nos concentraremos en el problema de la existencia de la  $(57, 5)$ -jaula. Esta gráfica, descrita en el Teorema 1.8, ha llamado fuertemente la atención de los matemáticos expertos en el área de gráficas extremales y es por esta razón que, dentro del grupo de los matemáticos interesados en las jaulas, ha sido llamada, de manera coloquial, "el monstruo".

Como se expresará en el Capítulo 1, donde se da una breve descripción del problema de la existencia de las jaulas, si el monstruo existiera tendría 3250 vértices. Su existencia sigue siendo una pregunta abierta en el área y, más aún, se ha realizado un extenso trabajo dedicado a estudiar ciertas propiedades que debería tener en caso de existir, como por ejemplo su simetría o su grupo de automorfismos.

Es frecuente que en este tema de la construcción de jaulas se relajen ciertas condiciones y se busque estudiar la existencia de ciertas gráficas con condiciones más relajadas, ver por ejemplo [5], [10] y [6]. Un ejemplo de esto es la existencia de jaulas birregulares con dos grados de cuello fijo y orden mínimo en lugar de estudiar la existencia de jaulas regulares, ver por ejemplo [3], [4] y [2].

Otra manera de relajar este problema es buscar una gráfica con un número fijo de vértices que se acerque en regularidad a la que sería la jaula cuyo orden es el número de vértices dado como condición inicial, ver [12]. Concretamente en esta tesis se fija 3250 como el orden de una gráfica regular que debe construirse y, como no se ha encontrado la gráfica 57-regular de cuello cinco y ese orden, se busca construir la gráfica de grado lo más cerca posible a 57 y de orden 3250.

Finalmente, como describiremos a continuación, también se aborda la existencia de una gráfica birregular con el máximo número de aristas y orden 3250. Este también es un problema importante en teoría extremal de gráficas: fijar un orden y encontrar una gráfica extremal de cuello fijo, donde una gráfica es extremal si al poner cualquier arista más el cuello decrece (en este tipo de problemas usualmente, a diferencia de los que se hace en esta tesis, el grado de los vértices no tiene importancia, es decir, no se pide regularidad ni birregularidad, ni ninguna condición en el grado).

A continuación, describiremos brevemente lo que se hace en cada capítulo de esta tesis. En el primer capítulo se enlistan una serie de definiciones que son indispensables para entender la estructura de la tesis. Además se prueban algunos resultados necesarios para resolver lemas importantes de capítulos posteriores, se describen resultados importantes de Teoría de

---

Jaulas y, por último, se hace una breve descripción de los espacios lineales parciales que nos lleva a la definición de un semiplano elíptico de tipo C, el cual es la base para la construcción de la gráfica  $B_q$  quien será la base para construir la gráfica regular que se acerca a la jaula.

El Capítulo 2 está basado en el artículo [1], el cual describe construcciones en base a la gráfica de Levi del semiplano elíptico de tipo C, denominado  $B_q$  para encontrar jaulas o gráficas de Moore. En este artículo se propone una partición de los vértices en conjuntos de la misma cardinalidad  $P_i$  y  $L_i$ , con  $i = 0, \dots, q - 1$ , llamados bloques. Además, se describen construcciones llamadas Reducción 1, Reducción 2 y Amalgama. La primera consiste en retirar cierto conjunto de vértices de  $P_0$  y  $L_0$  en  $B_q$ . La segunda consiste en retirar la misma cantidad de bloques a pares, comenzando por los bloques  $P_{q-1}$  y  $L_{q-1}$  en  $B_q$  y continuando con los siguientes  $P_{q-i}$  y  $L_{q-i}$  para  $i \in \{2, \dots, q - 1\}$  en caso de ser necesario.

El Capítulo 3 inicia con una gráfica 43-regular de orden 3250 construida en la tesis de licenciatura de la alumna C. de la Cruz Torres titulada "Un acercamiento a la  $(57, 5)$ -jaula". Esta gráfica fue construida a partir de las construcciones descritas en el Capítulo 2 y una generalización del Lema 9 del artículo [1], lema que demuestra también en esta tesis con técnicas distintas a las usadas en la tesis citada previamente. Además, se prueba que la construcción realizada por C. de la Cruz Torres cumple con las hipótesis del lema y por lo tanto la gráfica es 43-regular de orden 3250.

Más aún, en la presente tesis se demuestra que la gráfica encontrada es maximal regular partiendo de  $B_{41}$  y además no es posible encontrar una gráfica con mayor regularidad a partir de la misma. Se utilizan programas computacionales como una herramienta para poder demostrar lo que se requiere. Terminando estas demostraciones, se responde a la pregunta sobre

la unicidad de la gráfica descrita.

Sin embargo, como el objetivo de la tesis es buscar gráficas extremas maximales por aristas y de orden 3250 (gráficas que al añadirles cualquier arista, el cuello de la gráfica disminuye), para concluir la tesis se construye una gráfica maximal  $(43, 44)$ -regular con respecto a los pesos permitidos de orden 3250 con 73102 aristas.

# Preliminarios

## 1.1 Teoría de Gráficas

Una *gráfica*  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste en un conjunto no vacío  $V(G)$  llamado *vértices* y un conjunto  $E(G)$  de pares no ordenados de  $V(G)$  llamados *aristas*. Una gráfica es *simple*, si no tiene *lazos* (aristas de un sólo vértice) ni aristas múltiples (no hay dos aristas que pasan por el mismo par de vértices). El *orden* de una gráfica se define como  $|V(G)|$  y *tamaño* como  $|E(G)|$ . Si  $x \in V(G)$ , el *grado del vértice*  $x$  se define como el número de aristas que inciden en él y se denota como  $d_G(x)$ .

Una gráfica es *k-regular*, ver figura 1.1, si  $d_G(x) = k$  para todo  $x \in V(G)$ . La *vecindad de un vértice*  $x \in V(G)$  es el conjunto de vértices que son incidentes a  $x$  y se denota como  $N_G(x)$ . Dos vértices  $x, y \in V(G)$  son *vecinos* si existe la arista  $xy$ . A lo largo de esta tesis todas las gráficas que se consideran son simples.

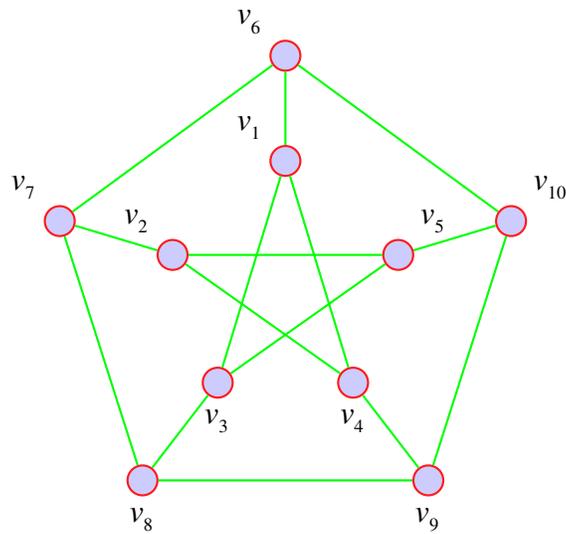


Figura 1.1: Gráfica 3-regular (Gráfica de Petersen)

Una gráfica es *bipartita* si el conjunto de vértices de la gráfica induce una partición  $(V_0, V_1)$  tal que toda arista de  $G$  tiene un extremo en  $V_0$  y el otro en  $V_1$ . Una gráfica es *bipartita completa*, ver figura 1.2, si es bipartita y todo vértice de  $V_0$  es vecino de todo vértice de  $V_1$ .

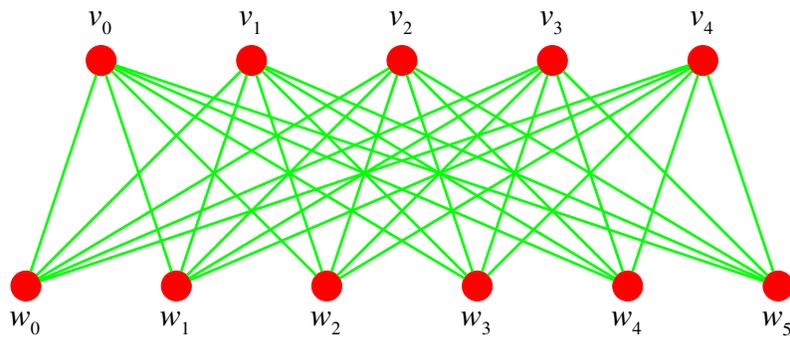


Figura 1.2:  $K_{5,6}$ .

Una *trayectoria*, ver figura 1.3, es una gráfica cuyos vértices pueden ser acomodados en una sucesión lineal tal que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la sucesión y son no adyacentes en otro caso. Si la trayectoria empieza en el vértice  $x$  y termina en el

vértice y nos referiremos a esta como una  $xy$ -trayectoria.

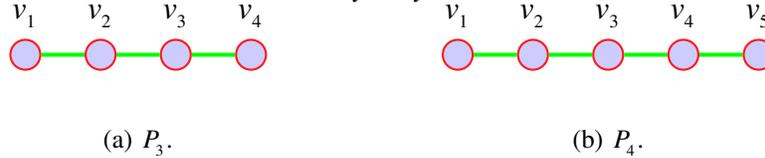


Figura 1.3: Gráficas de trayectorias.

Así mismo, un *ciclo* es una trayectoria donde el vértice inicial y el final es el mismo. La *longitud* de una trayectoria o de un ciclo es el número de aristas. Una trayectoria o un ciclo de longitud  $k$  se dice que es una  $k$ -trayectoria o un  $k$ -ciclo, respectivamente.

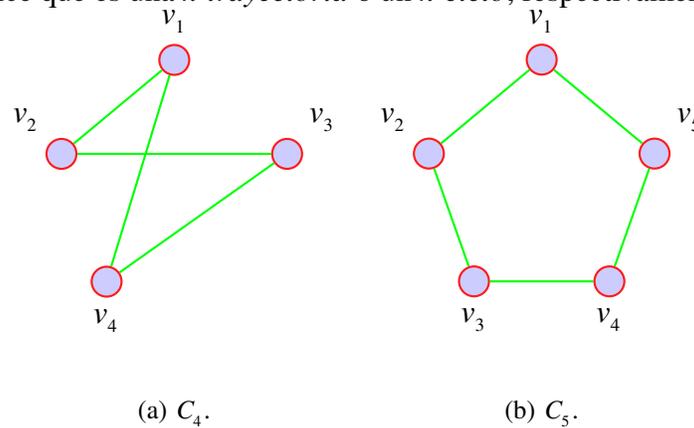


Figura 1.4: Gráficas de ciclos.

Una *gráfica completa*, ver figura 1.5, es aquella donde cualesquiera dos vértices distintos son vecinos.

Un *árbol* es una gráfica sin ciclos y entre cualesquiera dos vértices existe una trayectoria que los une, ver figura 1.7.

La *distancia* entre dos vértices  $x$  y  $y$  de una gráfica  $G$  se define como la longitud más corta entre todas las  $xy$ -trayectorias que pertenecen a  $G$  y es denotada por  $d_G(x, y)$ . El *diámetro* de una gráfica  $G$  se denota por  $diam(G)$  y se define como la máxima de las distancias que existe entre cualesquiera dos vértices de  $G$ . En cualesquiera de los casos anteriores es posible omitir

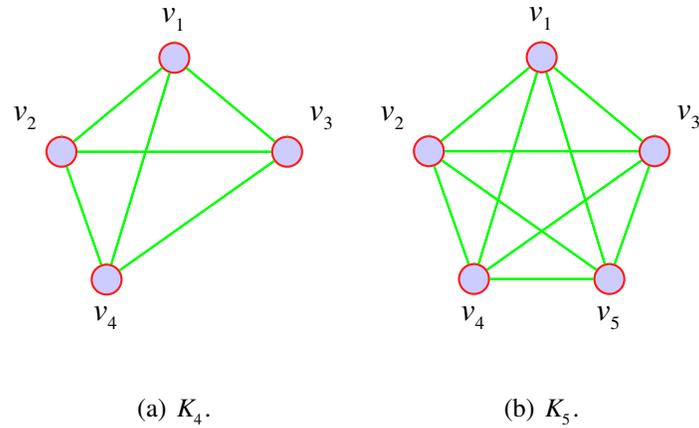


Figura 1.5: Gráficas completas.

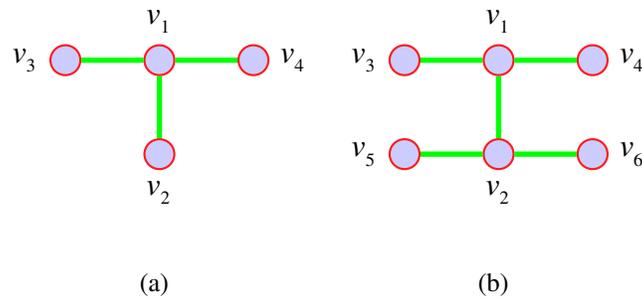


Figura 1.6: Árboles.

de la notación a  $G$  si no se cae en ambigüedades dentro del contexto.

Si  $G$  es una gráfica, se dice que  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$ . Una subgráfica de  $G$  es *generadora* si  $V(H) = V(G)$ . Si  $A \subset V(G)$ , entonces se dice que  $H$  es la *subgráfica inducida* por el conjunto  $A$  de vértices si  $V(H) = A$  y las aristas de  $H$  son las aristas de  $G$  con ambos extremos en  $A$ , en este caso  $H$  es denotada por  $\langle A \rangle$ . Si  $u$  y  $v$  son vértices no adyacentes de una gráfica  $G$ , entonces  $G + uv$  denota la gráfica con conjunto de vértices  $V(G)$  y conjunto de aristas  $E(G) \cup \{uv\}$ . En general, si  $S$  es un conjunto de aristas, se define  $G + S$  como la gráfica que resulta de añadir el conjunto de aristas  $S$  a  $E(G)$ . De igual forma se define  $G \setminus S$  para  $S \subset E(G)$ , como la gráfica que resulta de eliminar el conjunto de

Nombre de la gráfica	Número de vértices	Número de aristas	Notación
Trayectoria	$n + 1$	$n$	$P_n$
Ciclo	$n$	$n$	$C_n$
Completa	$n$	$\binom{n}{2}$	$K_n$
Bipartita completa	$n + m$	$mn$	$K_{m,n}$
Árbol	$n$	$n - 1$	$T_n$

Cuadro 1.1: Gráficas y sus notaciones

aristas  $S$  de  $E(G)$ . De forma similar se define  $G - v$  donde  $v \in V(G)$  y  $G - X$  donde  $X \subset V(G)$ . La unión de gráficas simples  $G$  y  $H$  es la gráfica  $G \cup H$  con conjunto de vértices  $V(G) \cup V(H)$  y conjunto de aristas  $E(G) \cup E(H)$ . Si  $G$  y  $H$  son ajenas por vértices, en ese caso se dirá que su unión es una unión disjunta y se denotará  $G + H$ .

Una definición que nos ayudará a programar en C++ es la *matriz de adyacencia* de una gráfica. Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$ , se define la matriz de adyacencia de  $G$ , como la matriz de  $n \times n$   $M_G := (m_{uv})$ , donde  $m_{uv}$  es el número de aristas que unen a los vértices  $u$  y  $v$ . Notemos que en el caso de gráficas simples, únicamente puede tomar valores 1 ó 0.

Si  $G$  es una gráfica con al menos un ciclo se define el *cuello* de  $G$ , denotado por  $g(G)$ , como la longitud del ciclo más pequeño contenido en ella. La primera aportación realizada en el campo de Teoría de Jaulas que se conoce, la hizo Tutte en 1947, preguntándose por el problema sobre la construcción de gráficas 3-regulares con cuello dado  $g$  y orden mínimo.

Esta idea se ha generalizado y actualmente existe mucho trabajo dedicado a la construcción de gráficas  $k$ -regulares con cuello dado  $g$  y orden mínimo.

**Definición 1.1.** Una  $(k, g)$ -jaula es una gráfica  $k$ -regular con cuello  $g$  y orden mínimo.

A continuación se presentan algunos resultados de Teoría de Gráficas que son esenciales a lo largo de esta tesis.

**Teorema 1.2** (Teorema del "Saludo de manos"). *Toda gráfica  $G$  cumple*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

*Demostración.* Consideremos la gráfica bipartita  $B$ , con partición  $(V(G), E(G))$  con la siguiente regla de correspondencia  $ue \in E(B)$  si y solo si  $u \in e$  con  $u \in V(G)$  y  $e \in E(G)$ . Entonces  $|E(B)| = \sum_{v \in V(G)} d(v)$  contando las aristas desde la partición  $V(G)$  de  $B$ . Por otro lado,  $|E(B)| = 2|E(G)|$  contando las aristas desde la partición  $E(G)$  de  $B$ . Por lo tanto,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

■

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.** *En cualquier gráfica  $G$ , el número de vértices de grado impar es par.*

*Demostración.* Sea  $v \in V(G)$  entonces  $d(v)$  es par o impar, tomando congruencias módulo 2 en la ecuación del teorema 1.2, se tiene que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) \equiv 0$$

$$\sum_{v \in \{x \in V(G) | d(x) \equiv 1 \pmod{2}\}} d(v) \equiv 0$$

De la última ecuación se tiene que el número de vértices de grado impar es par, de lo contrario la suma sería congruente con uno módulo 2.

■

**Teorema 1.4.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces  $G$  es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica bipartita con partición  $(V_0, V_1)$ , supongamos que  $G$  tiene un ciclo de longitud impar. Sea  $C = (v_1, \dots, v_n)$  el ciclo en  $G$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $v_1 \in V_0$ , entonces  $v_2 \in V_1$  y así sucesivamente. Como  $n$  es impar, entonces  $v_n \in V_0$  lo que es una contradicción pues  $v_0$  es adyacente a  $v_n$ .

Por otro lado, sea  $G$  una gráfica que no contiene ciclos de longitud impar. Sea  $x \in V(G)$ , definimos  $V_0 = \{y \in V(G) | d(x, y) \equiv 0 \pmod{2}\}$  y  $V_1 = \{y \in V(G) | d(x, y) \equiv 1 \pmod{2}\}$ .

Demostraremos que es una partición de los vértices. Sean  $z, w \in V_0$  supongamos que son vecinos, por definición  $d(x, z)$  y  $d(x, w)$  son pares y supongamos que las trayectorias son disjuntas por vértices, por lo tanto la  $xz$ -trayectoria, la  $xw$ -trayectoria y la arista  $zw$  forman un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción. Análogamente, si  $z, w \in V_1$ , tenemos que si  $zw$  es una arista entonces existe un ciclo de longitud impar. Ahora, supongamos que

existe al menos un vértice donde se intersectan las trayectorias, afirmación la distancia hasta la intersección es la misma, de lo contrario existe una trayectoria de longitud más corta, por lo tanto la paridad a partir de la última intersección es la misma, entonces aplicando el argumento de cualquier caso anterior se tiene que los vértices en una misma partición no son adyacentes. Es decir  $G$  es bipartita con partición  $(V_0, V_1)$ .

■

**Teorema 1.5.** *Toda gráfica simple  $G$  con  $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} > \binom{n}{2}$  contiene un ciclo de longitud 4.*<sup>1</sup>

*Demostración.* Sea  $p_2$  el número de estas trayectorias de longitud dos en  $G$  y  $p_2(v)$  el número de estas trayectorias cuyo vértice central es  $v$ . Entonces,  $p_2(v) = \binom{d(v)}{2}$ . Observamos que cada trayectoria de longitud dos tiene un único vértice central. Por lo tanto,  $p_2 = \sum_{v \in V} p_2(v) = \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2}$ . Por otro lado, cada una de esas trayectorias tienen dos únicos vértices como extremos. Por lo tanto, el conjunto de todas las trayectorias de longitud dos puede ser particionado en  $\binom{n}{2}$  subconjuntos de acuerdo a sus extremos. Como, por hipótesis  $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} > \binom{n}{2}$ , entonces por el principio de las casillas, existen dos o más trayectorias con los mismos extremos y por lo tanto la unión de estas trayectorias forma el ciclo de longitud 4.

■

El concepto de jaula da lugar a una nueva línea de investigación en la Teoría de Gráficas extremales conocida como la Teoría de Jaulas. Sin embargo, la existencia de una  $(k, g)$ -jaula para cualesquiera parámetros  $(k, g)$  no es inmediata. En 1963, Sachs demostró en [16] la

---

<sup>1</sup>Vea [9] página 43

existencia de  $(k, g)$ -jaulas para cualesquiera  $(k, g)$  parámetros. Casi inmediatamente, Erdős mejoró la cota superior dada por Sachs y publicó junto con él la siguiente cota cuya demostración puede ser encontrada en [13]:

**Teorema 1.6.** *Para todo  $k \geq 2, g \geq 3,$*

$$n(k, g) \leq 4 \sum_{t=1}^{g-2} (k-1)^t$$

donde  $n(k, g)$  denota el orden de la  $(k, g)$ -jaula.

Por otro lado, el orden de una  $(k, g)$ -jaula está acotado inferiormente por el número  $n_0(k, g)$  que se da en el teorema a continuación y el cual depende de la paridad del cuello de la gráfica.

**Teorema 1.7.** *Para todo  $k \geq 2, g \geq 3,$*

$$n_0(k, g) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=0}^{(g-3)/2} k(k-1)^i, & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2 \sum_{i=0}^{(g-2)/2} k(k-1)^i, & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

*Demostración.* Para entender esta cota, se realizan construcciones a partir de árboles.

Sea  $k \geq 2.$

*Caso 1.* Sea  $g$  impar. Consideremos la construcción del siguiente árbol.

Paso 1. Sea  $x$  un vértice.

Paso 2. Construimos  $k$  vértices vecinos diferentes a  $x$  ya que la gráfica es  $k$  regular.

Paso 3. Construimos  $k - 1$  vértices adyacentes para cada nuevo vértice creado en el paso anterior.

Paso 4. Repetir paso tres  $(g - 3)/2$  veces.

Observemos que si uno de los vértices creados cuando se aplicó el paso tres  $m$  veces es vecino de alguno de los anteriores, entonces la gráfica tiene un ciclo de longitud a lo más  $2m + 3$ .

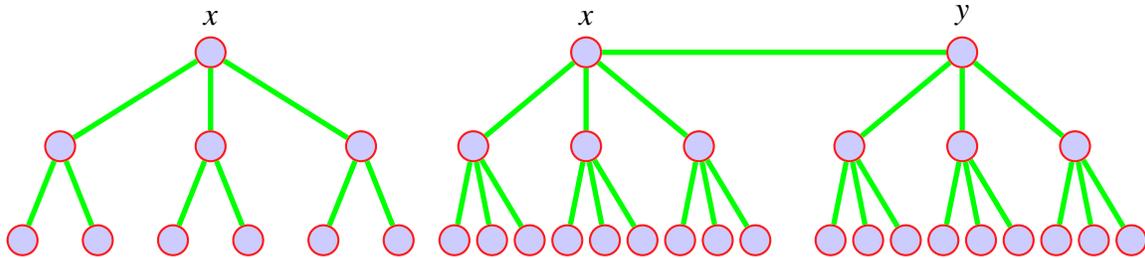
*Caso 2.* Si  $g$  es par. Consideremos la construcción del siguiente árbol.

Paso 1. Sea  $x$  y  $y$  dos vértices adyacentes.

Paso 2. Construimos  $k - 1$  vértices adyacentes distintos para cada uno de los últimos vértices ya creados.

Paso 3. Repetir paso dos  $(g - 2)/2$  veces.

Observemos que si uno de los vértices creados cuando se aplicó el paso dos  $m$  veces es vecino de alguno de los anteriores, entonces la gráfica tiene un ciclo de longitud a lo más  $2m + 2$ .



(a) Árbol asociado a la  $(3,5)$ -jaula.

(b) Árbol asociado a la  $(4,6)$ -jaula.

Figura 1.7: Ejemplos de árboles del caso  $g$  impar y par respectivamente.

Contando el número de vértices en cada caso, tenemos las fórmulas deseadas.

■

Por lo tanto,  $n(k, g) \geq n_0(k, g)$ . Existen gráficas que alcanzan la cota inferior, llamadas gráficas de Moore o jaulitas, como se les ha llamado coloquialmente en México. Estas gráficas son escasas, como lo muestra el siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en [7], [11] y [8].

**Teorema 1.8.** *Existe una gráfica de Moore  $k$ -regular y cuello  $g$  si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:*

1.  $k = 2$  y  $g \geq 3$ , que son los ciclos de orden  $g$ ;
2.  $g = 3$  y  $k \geq 2$ , que son las gráficas completas de orden  $k$ ;
3.  $g = 4$  y  $k \geq 2$ , que son las gráficas bipartitas completas  $K_{k/2, k/2}$  en el caso de que  $k$  sea par y gráficas bipartitas completas  $K_{(k+1)/2, (k-1)/2}$  en el caso de que  $k$  sea impar;
4.  $g = 5$  y
  - a)  $k = 2$  es el 5-ciclo,
  - b)  $k = 3$  es también llamada la gráfica de Petersen,
  - c)  $k = 7$  es también llamada la gráfica Hoffman-Singleton,
  - d) y posiblemente  $k = 57$  (donde la existencia de esta gráfica es un problema abierto);
5.  $g = 6, 8$  o  $12$  y existe un polígono generalizado simétrico<sup>2</sup> de orden  $k - 1$  que, al asociarle su gráfica de incidencia, es una gráfica bipartita con cuello  $6, 8$  o  $12$ .

---

<sup>2</sup>Para mayor información puede consultarse [13]

Como lo menciona el teorema anterior, un problema abierto en Teoría de Jaulas es la existencia de la  $(57, 5)$ -jaula de orden 3250. Inspirados en el problema, en esta tesis se construyen gráficas de orden 3250 con la mayor regularidad posible, como se expone en los siguientes capítulos. Además, se construyen gráficas maximales por aristas de orden 3250.

A continuación presentaremos una tabla donde se muestran algunas jaulas de cuello 5 (las conocidas hasta el momento). Solo la  $(3, 5)$ -jaula, llamada gráfica de Petersen, y la  $(7, 5)$ -jaula, llamada gráfica de Hoffman-Singleton, son gráficas de Moore.

$k$	3	4	5	6	7
$n(k, 5)$	10	19	30	40	50
número de jaulas	1	1	4	1	1

En [13], puede consultarse la siguiente tabla:

$k$ Regular	Cota Inferior	Cota Superior	Construida Por
3	10	10	Petersen
4	19	19	Robertson
5	30	30	Robertson-Wegner-Wong
6	40	40	Wong
7	50	50	Hoffman-Singleton
8	67	80	Royle
9	86	96	Jorgensen
10	103	124	Exoo
11	124	154	Exoo
12	147	203	Exoo
13	174	230	Exoo
14	199	288	Jorgensen
15	230	312	Jorgensen
16	259	336	Jorgensen
17	294	448	Schwenk
18	327	480	Schwenk
19	364	512	Schwenk
20	403	576	Jorgensen

Figura 1.8: Cotas de gráficas de cuello 5.

## 1.2 Espacios lineales parciales

Un *espacio*  $S$  es un par ordenado de dos conjuntos  $S = (P, L)$  donde  $P$  es un conjunto finito no vacío cuyos elementos son llamados *puntos* mientras que los elementos de  $L$  son subconjuntos no vacíos de elementos de  $P$  denominados *líneas*, los cuales cumplen ciertas condiciones o axiomas. Un *espacio lineal parcial* es un espacio  $S = (P, L)$  que cumple los siguientes axiomas:

- a) Toda línea tiene al menos dos puntos y
- b) dos puntos están en a lo más en una línea.

Dado que las líneas son un subconjunto de puntos, vamos a decir que dos puntos son colineales si son elementos de una línea y decimos que dos líneas se intersectan si existe un punto en el espacio lineal parcial que pertenece a las dos líneas.

Hay que observar que el axioma dos implica que si  $p$  y  $q$  son puntos tal que  $p, q \in l \in L$  y además  $p, q \in m \in L$ , entonces  $l = m$ , es decir, no hay dos líneas que contengan más de dos puntos en común. Entonces tenemos los siguientes lemas:

**Lema 1.9.** *Dos líneas distintas de un espacio lineal parcial se intersectan en a lo más un punto.*

*Demostración.* Supongamos que dos líneas distintas  $l_1$  y  $l_2$  se intersectan en dos puntos distintos  $p_1$  y  $p_2$  entonces,  $p_1, p_2 \in l_1$ . Por la observación anterior, la línea  $l_1$  es única, entonces  $l_1 = l_2$ , lo cual no es posible ya que supusimos que eran distintas. Por lo tanto, las dos líneas se intersectan en a lo más un punto. ■

**Lema 1.10.** *Sean  $l_1, l_2 \in L$  tal que  $l_1 \subseteq l_2$ , entonces  $l_1 = l_2$ .*

*Demostración.* Por el axioma 1, la línea  $l_1$  tiene al menos dos puntos. Sean  $p_1, p_2 \in l_1$  puntos distintos, como  $l_1 \subseteq l_2$  entonces,  $p_1, p_2 \in l_2$ . Por la observación anterior, la línea  $l_1$  es única y por lo tanto  $l_1 = l_2$ . ■

En un espacio lineal parcial, una *bandera* es una pareja línea y punto incidente en la línea, se denota como  $p_1 | l_1$ . Una *antibandera* es una pareja línea y punto no incidente en la línea, se denota como  $p_1 \not| l_1$ . Dos líneas son paralelas si no existe un punto incidente con ambas. Análogamente, dos puntos son paralelos si no existe una línea que sea incidente a ellos.

Una  $v_k$ -*configuración* o una *configuración del tipo  $v_k$*  es un espacio lineal parcial que consiste de  $v$  puntos y  $v$  líneas tal que cada punto y cada línea son incidentes con  $k$  líneas y  $k$  puntos, respectivamente. Un *semiplano elíptico finito de orden  $k - 1$*  es una  $v_k$ -configuración que satisface los siguientes axiomas de paralelas:

- a) Por cada antibandera  $p_1 \not| l_1$  existe a lo más una línea  $l_2$  incidente con  $p_1$  y paralela a  $l_1$ .
- b) Hay a lo más un punto  $p_2$  incidente con  $l_1$  y paralelo a  $p_1$ .

Un *plano proyectivo finito  $P$*  es un espacio tal que:

- Cualesquiera dos puntos distintos son incidentes en exactamente una línea.
- Cualesquiera dos líneas distintas son incidentes en exactamente un punto.
- Existe un conjunto de cuatro puntos tal que cualesquiera tres puntos no son colineales.

En un plano proyectivo  $P$  existe un entero positivo  $n$  tal que cualquier línea de  $P$  tiene exactamente  $n + 1$  puntos, este número se denomina el orden de  $P$ . Denotamos al plano proyectivo de orden  $q$  como  $PG(2, q)$ . Notemos que un plano proyectivo es un espacio lineal parcial, pero no todo espacio lineal parcial es un plano proyectivo.

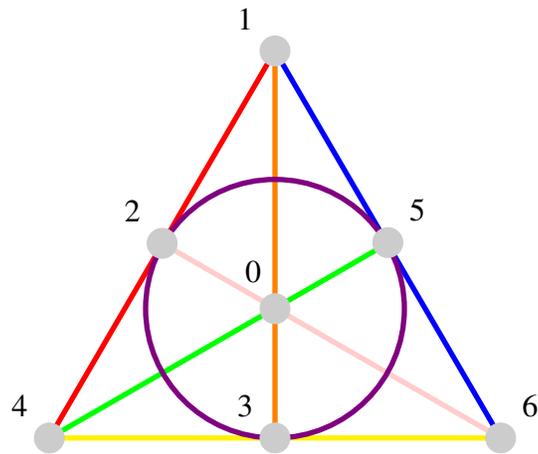


Figura 1.9: Único plano proyectivo de orden 2 (Plano de Fano)

Un *subconjunto de Baer* de un par específico punto-línea  $(p, l)$  de un plano proyectivo  $P$ , denotado como  $B(p|l)$ , es el conjunto de todas las líneas y puntos incidentes con  $p$  y  $l$ . Dembowski demostró que los semiplanos elípticos pueden obtenerse al eliminar un subconjunto de Baer de un plano proyectivo. Además clasifica los semiplanos elípticos en 5 tipos. Esta tesis sólo se enfoca en los semiplanos elípticos del tipo  $C$ , específicamente  $C_q = PG(2, q) - B(p|l)$  con  $q$  primo. Notemos que el semiplano elíptico  $C_q$  es una configuración del tipo  $q_q^2$ .

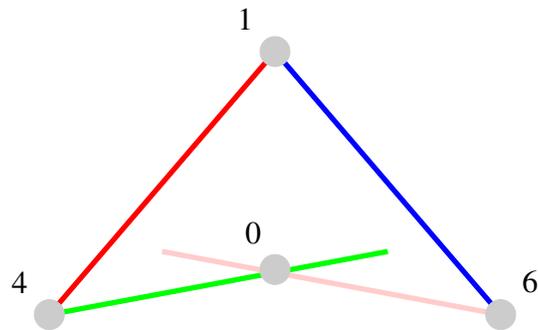


Figura 1.10:  $C_2$  asociado al plano de Fano, escogiendo el subconjunto  $B(\{3\}|\{2,3,6\})$

En  $C_q$  es posible escoger coordenadas  $(x,y)$  afines para los puntos y  $[m,b]$  para las líneas con  $x,y,m,b \in \mathbb{Z}_q$ , tal que las incidencias entre los puntos y las líneas están dada por la ecuación:

$$y = mx + b \quad (1.1)$$

La *gráfica de Levi* o *gráfica de incidencia*  $G$  de un espacio lineal parcial  $S = (P,L)$  es una gráfica bipartita con  $V(G) = V_1 \cup V_2$  donde  $V_1 = P$  y  $V_2 = L$  y dos vértices son vecinos si y sólo si el punto y la línea correspondientes son incidentes. En particular, la gráfica de Levi de  $C_q$  se denomina  $B_q$ . En el siguiente capítulo definiremos formalmente  $B_q$  y estudiaremos ciertas propiedades.

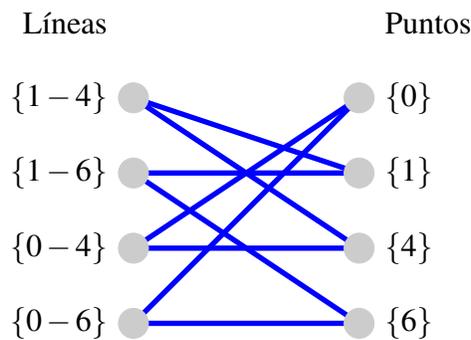


Figura 1.11:  $B_2$  asociado  $C_2$  de la Figura 1.10

# Capítulo 2

## Propiedades de $B_q$ y sus variantes

Este capítulo está basado en el artículo [1], en el cual se construyen gráficas regulares de cuello cinco y orden más pequeño conocido hasta el momento. La gráfica de Levi  $B_q$  es una gráfica bipartita con propiedades muy singulares que nos va a ayudar a construir gráficas maximales de orden 3250 y cuello 5. En este capítulo vamos a construir  $B_q$  y demostrar las propiedades que esta gráfica posee.

### 2.1 La gráfica de Levi $B_q$

**Definición 2.1.** Sea  $GF(q)$  un campo finito de orden  $q \geq 2$  primo<sup>1</sup>. La *gráfica de Levi  $B_q$*  de un plano semielíptico de tipo  $C$  es una gráfica bipartita con conjunto de vértices  $(V_0, V_1)$  donde  $V_r = GF(q) \times GF(q)$ ,  $r = 0, 1$ , y con el siguiente conjunto de aristas:

---

<sup>1</sup>En general  $B_q$ , se puede definir con  $q$  potencia de un primo.

$$(x, y) \in V_0 \text{ es adyacente a } [m, b] \in V_1 \text{ si y sólo si } y = mx + b. \quad (2.1)$$

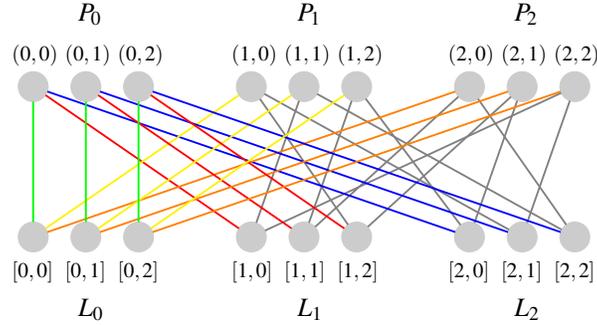


Figura 2.1:  $B_3$ .

Esta gráfica tiene propiedades muy interesantes que nos serán útiles a lo largo de las construcciones. Es por ello que presentamos la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.** *Sea  $B_q$  la gráfica de Levi. Sea  $P_x = \{(x, y) | y \in GF(q)\}$  para  $x \in GF(q)$  y  $L_m = \{[m, b] | b \in GF(q)\}$  para  $m \in GF(q)^2$ . Entonces la gráfica  $B_q$  tiene las siguientes propiedades:*

- a) *Es vértice transitiva.*
- b) *Es  $q$ -regular de orden  $2q^2$  y tiene cuello 6 para  $q \geq 3$ .*
- c) *Admite una partición  $V_0 = \bigcup_{x=0}^{q-1} P_x$  y  $V_1 = \bigcup_{m=0}^{q^2-1} L_m$  de su conjunto de vértices.*
- d) *La gráfica inducida entre cada par de bloques  $P_x$  y  $L_m$  con  $x, m \in GF(q)$  es un emparejamiento perfecto.*

---

<sup>2</sup> $P_x$  y  $L_m$  también son llamados bloques

- e) En particular los emparejamientos en  $P_0$  con cualquier  $L_m$  están conectados de forma lineal a todos sus vecinos en  $B_q$ , es decir,  $N((0,y)) = \{[i,y] | i \in GF(q)\}$  con  $y, m \in GF(q)$  y los emparejamientos en  $L_0$  con cualquier  $P_x$  están conectados de forma lineal a todos sus vecinos en  $B_q$ , es decir,  $N([0,b]) = \{(j,b) | j \in GF(q)\}$ , con  $x, b \in GF(q)$ .
- f) Los emparejamientos entre  $P_x$  y  $L_m$  obedecen la regla algebraica en  $GF(q)$  acorde a la ecuación (2.1).
- g) Tiene diámetro 4 y cualesquiera dos puntos distintos en  $P_x$  (o  $L_m$ ) están a distancia 4 para  $x, m \in GF(q)$ .

*Demostración.* Sea  $B_q$  la gráfica de Levi, y  $P_x$  y  $L_m$  como se definieron anteriormente.

- a) Mostraremos que  $B_q$  es vértice transitiva. Consideremos los siguientes automorfismos:

$$\begin{aligned} & \phi_1 \\ (x,y) & \longmapsto (x+l, y+k) \\ [m,b] & \longmapsto [m, b+k-ml] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi_2 \\ [m,b] & \longmapsto [m+l, b+k] \\ (x,y) & \longmapsto (x, y+k+xl) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi_3 \\ (x,y) & \longmapsto [x,y] \\ [m,b] & \longmapsto (-m,b) \end{aligned}$$

$$\phi_4$$

$$[m, b] \mapsto (m, b)$$

$$(x, y) \mapsto [-x, y]$$

Notemos que el primer automorfismo manda un vértice de  $P_x$  a cualquier otro vértice en  $P_r$  con  $x, r \in \{0, \dots, q-1\}$  donde  $l, k$  son tal que si  $(x, y) \in P_x$  y  $(r, s) \in P_r$  entonces  $l = r - x$  y  $k = s - y$ . El segundo automorfismo manda un vértice de  $L_m$  a cualquier otro vértice de  $L_v$  con  $m, i \in \{0, \dots, q-1\}$  donde  $l, k$  son tal que si  $[m, b] \in L_m$  y  $[v, h] \in L_v$  entonces  $l = v - m$  y  $k = h - b$ . El tercer automorfismo manda un vértice de  $P_x$  al vértice respectivo de  $L_x$ . Por último el cuarto automorfismo manda un vértice de  $L_m$  al vértice respectivo de  $P_m$ . Para finalizar, notemos que cualquier automorfismo es composición de los cuatro automorfismos descritos anteriormente.

- b) Mostraremos que  $B_q$  es  $q$ -regular. Sea  $(x_0, y_0) \in V_0$  y sea  $m \in GF(q)$ . Entonces existe un único  $[m, b] \in L_m$  tal que  $(x_0, y_0)$  es adyacente a  $[m, b]$  pues  $b = y_0 - mx_0$ . Como, para cada  $m \in GF(q)$ ,  $(x_0, y_0)$  es adyacente a un único  $[m, b_m]$ , entonces  $(x_0, y_0)$  tiene exactamente  $q$  vecinos. Análogamente cada  $[m_0, b_0] \in V_1$  tiene exactamente  $q$  vecinos. Por lo tanto,  $B_q$  es  $q$ -regular. Por otro lado,  $|P_x| = |L_m| = q$  con  $x, m = 0, \dots, q-1$ , por lo que,  $|B_q| = 2q^2$ .
- Ahora demostraremos que el cuello de la gráfica es 6 si  $q \geq 3$ . Sea  $B_q$  con  $q$  primo. Por construcción  $B_q$  es bipartita, por lo que no tiene ciclos de longitud impar. Ahora supongamos que el cuello de la gráfica es 4. Como  $B_q$  es bipartita, entonces el ciclo de longitud cuatro tiene dos vértices en  $V_0$  y dos vértices en  $V_1$ . Sea  $(x, y) \in V_0$ . Entonces,  $(x, y)$  tiene dos vecinos en  $V_1$  con coordenadas  $[m_1, y - m_1x]$  y  $[m_2, y - m_2x]$ . Supongamos

que existe  $(k, l) \in V_0$  tal que es vecino de  $[m_1, y - m_1x]$  y  $[m_2, y - m_2x]$ . Entonces, por ser adyacentes, cumplen con la ecuación 2.1. Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:  $l = m_1k + y - m_1x$  y  $l = m_2k + y - m_2x$  que deben satisfacerse simultáneamente, lo que implica  $m_1k + y - m_1x = m_2k + y - m_2x$  si y solo si  $m_1(k - x) = m_2(k - x)$ .

Hay dos casos. Si  $k = x$ , entonces  $l = y$ , por lo tanto,  $(x, y) = (k, l)$ , lo cual es una contradicción pues deben ser distintos. Si  $k \neq x$  entonces  $k - x$  y  $q$  son primos relativos, por lo que podemos cancelar  $(k - x)$  de ambas ecuaciones. Esto implica que  $m_1 = m_2$ , con lo cual  $[m_1, y - m_1x] = [m_2, y - m_2x]$ , que es una contradicción. Por lo tanto, no existe un ciclo de longitud cuatro. Entonces  $B_q$  tiene al menos cuello 6.

Para finalizar la prueba basta con exhibir un ciclo de longitud 6 en  $B_q$ , que es el siguiente:  $(0, 0) - [0, 0] - (2, 0) - [q - 1, 2] - (1, 1) - [1, 0]$ , ya que los vértices cumplen, en sus respectivos casos, con la ecuación  $y = mx + b$ .

- c) Se sigue inmediatamente de la definición de bipartita.
- d) Sea  $x, m \in GF(q)$ . Por el inciso a), para cada  $(x, y) \in P_x$  existe un único  $[m, b] \in L_m$  con  $mx + b = y$  y, recíprocamente, para cada  $[m, b] \in L_m$  existe un único  $(x, y) \in P_x$  con  $mx + b = y$ . Como  $|P_x| = |L_m| = q$ , entonces el emparejamiento es perfecto.
- e)  $N((0, y)) = \{[m, b] \in V_1 | y = m(0) + b\} = \{[m, b] \in V_1 | y = b\} = \{[i, y] | i \in GF(q)\}$ , pues  $m \in GF(q)$ .  $N([0, b]) = \{(x, y) \in V_0 | y = (0)x + b\} = \{(x, y) \in V_0 | b = y\} = \{(j, b) | j \in GF(q)\}$ , pues  $x \in GF(q)$ .
- f) Se sigue inmediatamente de la definición de  $B_q$ .

g) Como la gráfica es vértice transitiva, basta con demostrar que la distancia de  $(0,0) \in V_0$  a cualquier otro vértice es menor o igual a 4. Sea  $A \in V(B_q)$ , entonces  $A \in P_x$  o  $A \in L_m$  para algún  $x, m \in GF(q)$ .

Si  $A \in P_x$  entonces hay dos casos,  $A \in P_0$  o  $A \in P_x$  con  $x \in GF(q) \setminus \{0\}$ .

Caso 1. Si  $A \in P_0$  entonces  $A = (0, y)$  con  $y \in GF(q) \setminus \{0\}$ . Como  $B_q$  es bipartita y los dos vértices pertenecen a la misma partición entonces la distancia entre ellos es par. Si  $d((0,0)(0,y)) = 2$ , implica que existe un vértice  $[m, b] \in V_1$  tal que  $(0,0)[m, b]$  y  $(0,y)[m, b]$  son aristas en  $B_q$ , por lo que cumplen la ecuación 2.1, es decir,  $b = 0$  y  $y = b$ , por lo tanto  $y = 0$ , lo que implica una contradicción, pues  $(0,0) \neq (0,y)$ . Ahora observemos que  $(0,0)[0,0](-y,0)[1,y](0,y)$  es una trayectoria que une los vértices  $(0,0)$  y  $A$ . Por lo tanto, la distancia entre ellos es 4.

Caso 2. Si  $A \in P_x$  con  $x \in GF(q) \setminus \{0\}$  entonces existe la trayectoria  $(0,0)[m,0](x,y)$  tal que  $y = mx$  existe, ya que  $GF(q) \setminus \{0\}$  es un campo y  $x$  tiene un único inverso multiplicativo. Por lo tanto, la distancia entre ellos es dos.

Por otro lado, si  $A \in L_m$ , entonces hay dos casos,  $A \in E(B_q)$  o  $A \notin E(B_q)$ .

Caso 1. Si  $A \in E(B_q)$  entonces  $d((0,0), A) = 1$ .

Caso 2. Si  $A \notin E(B_q)$  entonces  $A = [m, b]$  con  $m, b \in GF(q)$  y  $b \neq 0$  ya que todos los vecinos de  $(0,0)$  tienen segunda coordenada 0. Consideremos la siguiente trayectoria  $(0,0)[b+m,0](1,b+m)[m,b]$ , que existe en  $B_q$  ya que cumplen con la ecuación 2.1. Entonces,  $d((0,0), A) = 3$ .

Por lo tanto, el diámetro de la gráfica es 4 y más aún, si dos vértices pertenecen al mismo bloque, entonces estos están a distancia cuatro.

■

## 2.2 Reducciones y amalgamas

En la proposición de la última sección observamos que  $B_q$  tiene cuello al menos 6, lo que nos va ayudar a poder agregar aristas, pero no es posible agregar cualquier arista ya que queremos garantizar que el cuello de la gráfica sea cinco. Es por ello que proponemos la siguiente observación:

**Observación 2.3.** Notemos que en la demostración del inciso g) de la propocisión 2.2, sólo es posible agregar aristas en cada uno de los conjuntos  $L_i$  o  $P_i$  con  $i = 0, \dots, q - 1$ , ya que de lo contrario se formaría un ciclo de longitud menor a cinco.

Gracias a esta observación, se construirán variantes de  $B_q$  a partir de dos reducciones y una amalgama.

## 2.2.1 Reducciones

En esta subsección describiremos dos tipos de reducciones. La primera de ellas consiste en eliminar un conjunto de vértice de los conjuntos  $P_0$  y  $L_0$  tal que si se elimina el vértice  $[0, i]$  de  $L_0$  entonces es obligatorio eliminar el vértice  $(0, i)$  de  $P_0$ . La segunda reducción consiste en retirar la misma cantidad de bloques a pares, comenzando por los bloques  $P_{q-1}$  y  $L_{q-1}$  en  $B_q$  y continuando con los siguientes  $P_{q-i}$  y  $L_{q-i}$  para  $i \in \{2, \dots, q-1\}$  en caso de ser necesario.

**Reducción 1.** Remover vértices de  $P_0$  y  $L_0$ .

Sea  $T \subseteq S \subseteq GF(q)$ ,  $S_0 = \{(0, y) | y \in S\} \subseteq P_0$ ,  $T_0 = \{[0, b] | b \in T\} \subseteq L_0$  y  $B_q(S, T) = B_q - S_0 - T_0$ .

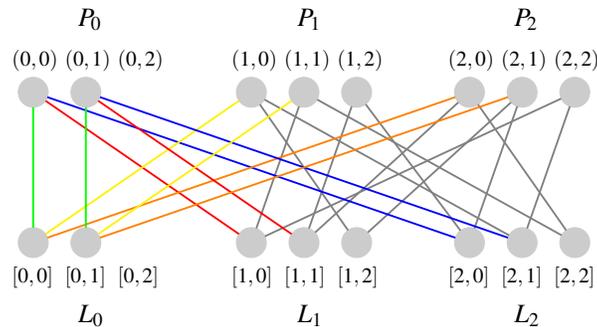


Figura 2.2:  $B_3(S, T)$ , con  $S = T = \{2\}$ .

**Lema 2.4.** Sea  $T \subseteq S \subseteq GF(q)$ . Entonces  $B_q(S, T)$  es  $(q-1, q)$ -regular de orden  $2q^2 - |S| - |T|$ . Más aún, los vértices  $(i, t) \in V_0$  y  $[j, s] \in V_1$ , para cada  $i, j \in GF(q) - \{0\}$ ,  $s \in S$  y  $t \in T$

son los únicos vértices de grado  $q - 1$  en  $B_q(S, T)$ , junto con  $[0, s] \in V_1$  para  $s \in S - T$  si  $T \subsetneq S$ .

*Demostración.* Esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2 a) y d). ■

**Reducción 2.** Remover parejas de bloques  $(P_i, L_i)$  de  $B_q$  o de  $B_q(S, T)$ .

Sea  $u \in \{1, \dots, q - 1\}$ . Definimos  $B_q(u) = B_q - \bigcup_{i=1}^u (P_{q-i} \cup L_{q-i})$  la gráfica obtenida de  $B_q$  al eliminar los últimos pares de bloques de vértices  $P_i$  y  $L_i$  y sea  $B_q(S, T, u) = B_q(S, T) - \bigcup_{i=1}^u (P_{q-i} \cup L_{q-i})$ . Para  $u = 0$  definimos,  $B_q(0) = B_q$  y  $B_q(S, T, 0) = B_q(S, T)$ .

La Reducción 2 quita pares de bloques  $(P_i, L_i)$  iniciando con  $i = q - 1$  y de forma decreciente, dependiendo de el número  $u$ .

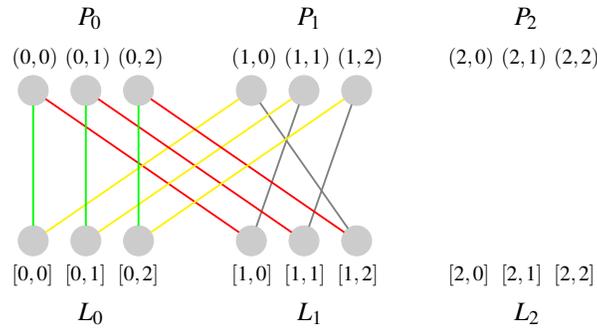


Figura 2.3:  $B_3(1)$ .

**Lema 2.5.** Sea  $u \in \{0, \dots, q - 1\}$ . entonces, la gráfica  $B_q(u)$  es  $(q - u)$ -regular de orden  $2(q^2 - qu)$  y la gráfica  $B_q(S, T, u)$  es  $(q - u - 1, q - u)$ -regular de orden  $2(q^2 - qu) - |S| - |T|$ .

Más aún, los vértices  $(i, t) \in V_0$  y  $[j, s] \in V_1$ , para cada  $i, j \in GF(q) - \{q-u, q-u+1, \dots, q-1\}$ , si  $u \geq 1$ ,  $s \in S$  y  $t \in T$  son los únicos vértices de grado  $q-u-1$  en  $B_q(S, T)$ , junto con  $[0, s] \in V_1$  para  $s \in S - T$  si  $T \subsetneq S$ .

*Demostración.* Esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2 a), d) y el Lema 2.4. ■

La Reducción 2 ha sido usada previamente por varios autores y se usará junto con la Reducción 1 y la Amalgama para la construcción de la gráfica con 3250 vértices. Observemos que, para nuestro propósito, no importa si la Reducción 2 se hace antes o después. De hecho, lo único que sí se debe preservar es que la operación de Amalgama, la cual presentaremos a continuación, se haga después de la Reducción 1.

## 2.2.2 Amalgamas

Es esta sección describiremos la operación *Amalgama* introducida por Funk [14] y Jorgensen [15] donde gráficas bipartitas regulares son transformadas en gráficas regulares con un mayor número de aristas agregando pesos a las aristas.

Dado que aplicaremos la Reducción 1 antes de incrementar el grado de los vértices en  $B_q$ , se describirá la operación amalgama con la gráfica  $B_q(S, T, u)$  con  $0 \leq u \leq q-1$ . La etiquetación de  $B_q$  en la Sección 2 será esencial para la selección de las gráficas que serán

amalgamadas, con lo que garantizaremos la regularidad y el cuello 5 de la gráfica resultante.

Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos gráficas del mismo orden y con la misma etiquetación de sus vértices.

Una *amalgama* de  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$  es la gráfica  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Sean  $P_i$  y  $L_i$  subconjuntos de vértices de la gráfica  $B_q$  como se definieron en la Sección 2. Considera la gráfica  $B_q(S, T, u)$ , con  $T \subseteq S \subseteq GF(q)$  y  $u \in \{0, \dots, q-1\}$ . Sea  $S_0 \subseteq P_0$ ,  $T_0 \subseteq L_0$  como en la Reducción 1 y definimos  $P'_0 := P_0 - S_0$  y  $L'_0 := L_0 - T_0$  los bloques en  $B_q(S, T, u)$  de orden  $q - |S|$  y  $q - |T|$ , respectivamente.

Sean  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  gráficas de cuello al menos cinco y orden  $q - |S|$ ,  $q - |T|$ ,  $q$  y  $q$  respectivamente. Sea  $H_1$  una gráfica  $k$ -regular. Si  $|S| = |T|$ , sea  $H_2$  una gráfica  $k$ -regular, de otro modo, sea  $(k, k+1)$ -regular con  $|S - T|$  vértices de grado  $k+1$ . Si  $T = \emptyset$ , sea  $G_1$  una gráfica  $k$ -regular, de otro modo, sea  $(k, k+1)$ -regular con  $|T|$  vértices de grado  $k+1$ . Finalmente, sea  $G_2$  una gráfica  $(k, k+1)$ -regular con  $|S|$  vértices de grado  $k+1$ . Notemos que no siempre existen estas gráficas, pues si consideramos la gráfica  $G_1$  con  $|T|$  vértices de grado  $k+1$  y estos números son impares, entonces por el Teorema del Saludo de Manos, no puede existir tal gráfica.

Definimos  $B_q^*(S, T, u)$  como la amalgama de  $H_1$  en  $P'_0$ ,  $H_2$  en  $L'_0$ ,  $G_1$  en  $P_i$  y  $G_2$  en  $L_i$ , para  $i = 1, \dots, q-u-1$  y  $u \in \{0, \dots, q-2\}$ . También definimos  $B_q^*(S, T, q-1)$  como la amalgama de  $H_1$  en  $P'_0$  y  $H_2$  en  $L'_0$ .

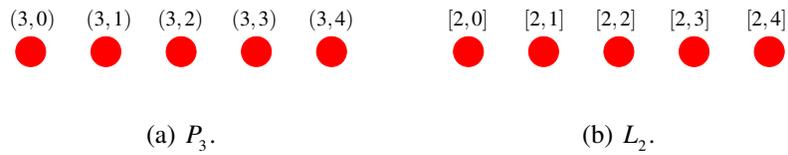


Figura 2.4: Etiquetación de los vértices de los conjuntos  $P_3$  y  $L_2$  de la gráfica  $B_5(\{4\}, \{4\}, 1)$

Para simplificar la notación en los resultados, etiquetaremos  $P_i$  y  $L_i$  como en la Sección 2, pero asumiremos que la etiquetación de  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  corresponde a la segunda coordenada de  $P'_0, L'_0, P_i$  y  $L_i$ , respectivamente para  $i = 1, \dots, q - u - 1$  y  $u \in \{0, \dots, q - 2\}$ . Supongamos que los vértices de grado  $k + 1$  de cualesquiera de las gráficas  $H_2, G_1$  y  $G_2$  son etiquetados en correspondencia con los elementos de  $S - T, T$  y  $S$ , respectivamente.

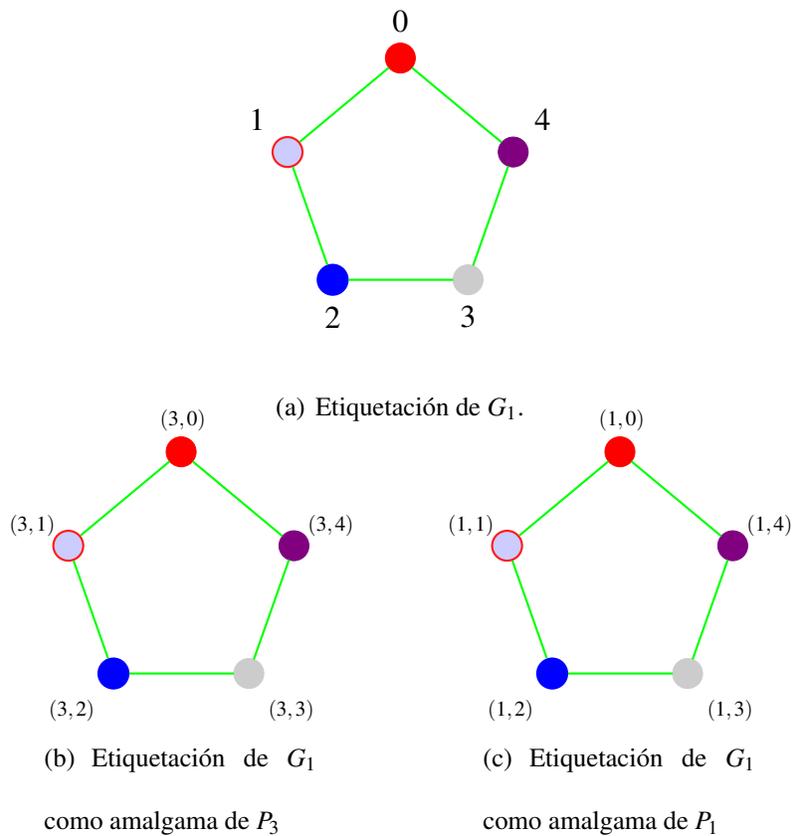


Figura 2.5: Asignación de las etiquetas de la gráfica  $G_1$  para amalgamar en  $B_5(\{4\}, \{4\}, 1)$ .

**Definición 2.6.** Sea  $G$  una gráfica etiquetada en  $GF(q)$  para algún  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha\beta \in E(G)$ , con  $\alpha, \beta \in V(G)$ , definimos el *peso* o *color de Cayley* de  $\alpha\beta$  como  $\pm(\beta - \alpha) \in GF(q) - \{0\}$ .

Sea  $\mathcal{P}_w$  el conjunto de pesos en  $H_1$  y  $G_1$ , y sea  $\mathcal{L}_w$  el conjunto de pesos en  $H_2$  y  $G_2$ .

Considerar los pesos de una gráfica para construir  $(k, 5)$ -gráficas a partir de semiplanos elípticos fue un método usado por Funk en [14]. El siguiente resultado es una generalización de un caso especial [[14], Teorema 2.8] tomando en cuenta la etiquetación escogida para  $B_q$  (cf. Sección 2), donde eliminamos vértices de  $P_0$  y  $L_0$ , pares de bloques  $P_i - L_i$  y amalgamamos gráficas que no son regulares, pero que escogemos estas gráficas de tal manera que, al amalgamar, la gráfica resultante sea regular.

La clave importante en la construcción para mejorar los órdenes de las  $(k, g)$ -gráficas es aplicar la Reducción 1 antes de aplicar la Amalgama para incrementar el grado de  $B_q$ .

**Teorema 2.7.** Sea  $T \subseteq S \subseteq GF(q)$ ,  $u \in \{0, \dots, q-1\}$ . Sean  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  gráficas como anteriormente definidas y supongamos que los pesos  $\mathcal{P}_w \cap \mathcal{L}_w = \emptyset$ . Entonces la amalgama  $B_q^*(S, T, u)$  es una gráfica  $(q+k-u)$ -regular de cuello al menos 5 y orden  $2q(q-u) - |S| - |T|$ .

*Demostración.* El orden y la regularidad de  $B_q^*(S, T, u)$  se sigue del lema 4 y las elecciones de  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$ . Observemos que los vértices de  $L_i$ , con grado  $q-u-1$  en  $B_q(S, T, u)$  tienen grado  $k+1$  en  $G_2$ , por lo tanto en  $B_q^*(S, T, u)$  esos vértices tienen grado  $q+k-u$  para

$i = 1, \dots, q - u - 1$ . Análogamente sucede con los vértices de  $L_0$  y  $P_i$ , para  $i = 0, \dots, q - u - 1$ .

A continuación, probaremos que el cuello de la gráfica es al menos 5. Sea  $C$  el ciclo de longitud mínima en  $B_q^*(S, T, u)$  y supongamos, por contradicción, que  $|C| \leq 4$ . Por lo tanto,  $C = (xyz)$  o  $C = (wxyz)$ . Como  $B_q$  tiene cuello 6 y  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  tienen cuello al menos 5, entonces  $C$  no puede estar completamente contenido en  $B_q$  o en algún  $H_i$  o  $G_i$  para  $i = 1, 2$ . Sin pérdida de generalidad, sea la  $xyz$ -trayectoria en  $C$  tal que  $x, y \in P_i$  y  $z \in L_m$  para algún  $i, m \in GF(q)$ . Dado que las aristas entre  $P_i$  y  $L_m$  forman un emparejamiento, por la Proposición 2.2, entonces dos vértices distintos en  $P_i$  van a vértices distintos en  $L_m$ . Entonces  $xz \notin E(B_q)$  y, por lo tanto,  $xz \notin E(B_q^*(S, T, u))$ . Así que  $|C| > 3$  y podemos asumir que  $|C| = 4$ , es decir,  $C = (wxyz)$ .

Sea  $x, y \in P_i$  y  $z \in L_m$ . Si  $w \in P_i$ , aplicando el argumento anterior,  $wz \notin E(B_q^*(S, T, u))$  y tenemos una contradicción. Dado que no hay aristas entre  $P_i$  y  $P_j$  en  $B_q^*(S, T, u)$ ,  $w \notin P_j$  con  $j \in GF(q) - \{i\}$ , tenemos que  $w \in L_n$  para algún  $n \in GF(q)$ . Si  $n \neq m$ , tenemos una contradicción pues no hay aristas entre  $L_m$  y  $L_n$  en  $B_q^*(S, T, u)$ . Por lo tanto,  $x, y \in P_i$  y  $w, z \in L_m$ . Sea  $x = (i, \alpha)$ ,  $y = (i, \beta)$ ,  $z = [m, \gamma]$  y  $w = [m, \delta]$ , como en la etiquetación de la Sección 2. Entonces,  $wx, yz \in E(B_q^*(S, T, u))$ , lo cual implica que  $\alpha = m \cdot i + \delta$  y  $\beta = m \cdot i + \gamma$ , respectivamente, lo que implica que  $\beta - \alpha = \gamma - \delta$ . Por otro lado,  $xy, wz \in E(B_q^*(S, T, u))$  por lo que  $\alpha\beta \in E(H_1) \cup E(G_1)$  y  $\gamma\delta \in E(H_2) \cup E(G_2)$ , así que  $\pm(\beta - \alpha) \in \mathcal{P}_w$  y  $\pm(\gamma - \delta) \in \mathcal{L}_w$ , que es una contradicción, pues por hipótesis  $\mathcal{P}_w \cap \mathcal{L}_w = \emptyset$ . Por lo tanto, no existen ciclos de longitud cuatro y la gráfica tiene cuello al menos 5.



**Observación 2.8.** La gráfica  $B_q^*(S, T, u)$  tiene cuello exactamente 5 ya que  $B_q$  tiene diámetro 4 y cualquier arista en  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , crea un ciclo de longitud 5 entre vértices a distancia 4.

# Capítulo 3

## Construcciones maximales de orden 3250 a partir de $B_q$

En el capítulo anterior se analizaron distintas posibilidades de modificar  $B_q$ , logrando que, después de realizar las operaciones de reducción y amalgama, el cuello de la gráfica resultante es exactamente 5. Inspirados en estos resultados, en este capítulo construiremos una gráfica 43-regular de cuello cinco y orden 3250 (una gráfica con estas características fue construida en la tesis de licenciatura de C. de la Cruz Torres titulada "Un acercamiento a la  $(57,5)$ -jaula"), esto con el objetivo de aportar las herramientas para construir una gráfica del mismo orden y con regularidad máxima. Además, en este capítulo, demostraremos que no existe una gráfica de mayor regularidad que 43 y de orden 3250 a partir de  $B_q$  y sus modificaciones, es decir, que la gráfica construída por C. de la Cruz Torres es la mejor que se puede hacer usando los métodos utilizados por la autora.

Observemos que, al aplicar una reducción, se disminuye el número de vértices. Como el objetivo es construir una gráfica de orden 3250 a partir de reducciones, entonces  $q \geq 41$ , ya que, por un lado, el orden de  $B_{41}$  es 3362, y por el otro lado, el orden de  $B_{40}$  es 3200, por lo que tomar  $q \leq 40$  no es suficiente para construir una gráfica con 3250 vértices.

### 3.1 Una gráfica regular de orden 3250 a partir de $B_{41}$

Una de las hipótesis principales para garantizar que el cuello de la gráfica modificada a partir de  $B_q$  sea 5, es que los pesos de las aristas de las gráficas que se amalgaman a los conjuntos  $P_x$  con respecto de los conjuntos  $L_m$  con  $x, m \in GF(q)$ , sean disjuntos (ver Teorema 2.7). Por lo tanto, las gráficas  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  que serán descritas en la siguiente subsecciónes serán construidas mediante un método muy específico.

Tomaremos como punto de partida la gráfica construida en la tesis de C. de la Cruz [12] y analizaremos su construcción. Notemos que para construir una gráfica regular de orden 3250 a partir de  $B_{41}$ , es necesario construir la gráfica  $B_{41}^*(S, T, 1)$ , con  $S = T = \{26, 27, \dots, 40\}$ , por lo que las gráficas  $H_1$  y  $H_2$  descritas en el capítulo anterior tienen que ser regulares de orden 26. Ella propone que sean 3-regulares. Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  tienen que ser birregulares de orden 41, tiene que contar con 26 vértices del mismo grado que las gráficas  $H_1$  y  $H_2$  y 15 vértices de grado exactamente mayor en uno que los otros vértices. Así que, para construir las gráficas  $G_1$  y  $G_2$ , lo que se plantea es tomar como base las gráficas  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente,

para reutilizar los pesos de dichas gráficas. Por consiguiente, propone crear nuevos vértices utilizando la idea del lema 9 de [1], lo cual permite crear un vértice de grado 4 conservando el grado de los demás vértices. Sin embargo, el conjunto de vértices que se va a crear es de cardinalidad mayor que uno (exactamente 15 vértices), por lo que en [12] se propone un lema que satisface los requerimientos que a continuación presentaremos. Es importante notar que la prueba que aparece en [12] no es la prueba realizada en esta tesis.

**Lema 3.1.** *Sea  $G$  una gráfica de cuello al menos 5. Sea  $m \in \mathbb{N}$ , con  $x_i y_i, w_i z_i \in E(G)$  tal que  $\{x_i y_i, w_i z_i\}$  son aristas independientes; es decir,  $N(x_i y_i) \cap N(w_i z_i) = \emptyset$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ . Sean  $v_1, \dots, v_m \notin V(G)$  y definimos  $G'$  la gráfica tal que  $V(G') = V(G) \cup \{v_i | i = 1, \dots, m\}$  y  $E(G') = E(G) - \{x_i y_i, w_i z_i | i = 1, \dots, m\} \cup \{v_i x_i, v_i y_i, v_i w_i, v_i z_i | i = 1, \dots, m\}$ . Si  $|\{x_i, y_i, w_i, z_i\} \cap \{x_j, y_j, w_j, z_j\}| \leq 1$  para cada  $i \neq j$ , es decir, a lo más hay un vértice en común entre cualesquiera dos parejas de aristas independientes distintas. Entonces  $G'$  tiene cuello al menos 5.*

*Demostración.* Se demostrará que  $G'$  no tiene ciclos de longitud 3 y 4 y por lo tanto su cuello será al menos 5.

Para demostrar que no existen ciclos de longitud 3, demostraremos que la vecindad de los vértices de cualquier arista es vacía.

Sean  $a, b \in V(G')$  tal que  $ab \in E(G')$  entonces pueden ocurrir dos casos o ambos vértices de la arista pertenecen a los vértices de  $G$  o un vértice de la arista es un  $v_i$  para algún  $i = 1, \dots, m$ .

Caso 1) Si  $a, b \in V(G)$ , entonces  $N(a) \cap N(b) = \emptyset$ , ya que de lo contrario existiría un vértice  $c \in V(G')$  tal que  $ac, bc \in E(G')$  pero entonces o  $c \in V(G') - V(G)$  o  $c \in V(G)$ . Claramente, por definición de  $G'$  no existe un vértice  $c \in V(G') - V(G)$ . Por otro lado, si  $c \in V(G)$  esto implicaría que  $G$  tiene cuello 3, lo que es una contradicción, por lo que no existen ciclos de longitud tres.

Caso 2) Si  $a = v_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$  entonces por construcción no es posible que dos vecinos de  $v_i$  sean adyacentes y el cuello de  $G'$  no puede ser tres.

Ahora demostraremos que no existen ciclos de longitud cuatro, para ello podemos demostrar que la vecindad de dos vértices no adyacentes es a lo más un vértice.

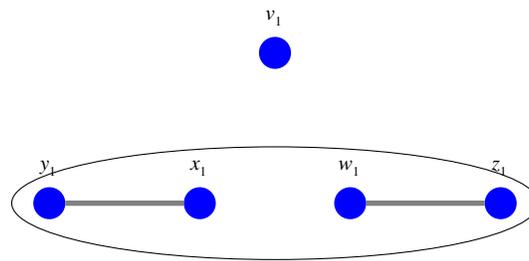
Sean  $a, b \in V(G')$  tal que  $ab \notin E(G')$  entonces puede ocurrir tres casos: o ambos vértices pertenecen a los vértices de  $G$  o ambos vértices pertenecen a los vértices de  $G'$  pero no a los de  $G$  o un vértice pertenece a  $G$  y el otro a  $V(G') - V(G)$ .

Caso 1) Si  $a, b \in V(G)$  y no eran adyacentes en  $G$  no pueden tener dos vecinos en común en  $G$  (porque  $G$  tiene cuello 5) entonces al menos uno de sus vecinos es un  $v_i$ , pero esto no es posible por construcción de  $G'$ . Si eran adyacentes en  $G$ , entonces, también por construcción, no pueden ser ambos vecinos de dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  distintos y por lo tanto sus vecindades coinciden en a lo más un vértice.

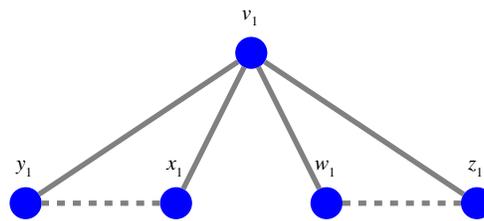
Caso 2) Si  $a, b \in V(G') - V(G)$  observamos que por hipótesis sus vecindades se intersecan en a lo más un vértice.

Caso 3) Si  $a \in V(G') - V(G)$  y  $b \in V(G)$  y suponemos que su intersección es al menos dos entonces en  $G$  originalmente había un ciclo de longitud 3, lo que no es posible por hipótesis.

Por lo tanto  $G'$  es de cuello al menos 5.



(a) Antes de aplicar el lema



(b) Después de aplicar el lema

Figura 3.1: Caso  $m = 1$ 

■

**Lema 3.2.** *Dados  $S = T = \{26, \dots, 40\}$  y  $u = 1$ , entonces  $|B_{41}(S, T, 1)| = 3250$ .*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del Lema 2.5.

■

En [12], se definen las gráficas  $H_1, G_1, H_2$  y  $G_2$  como sigue a continuación:

### 3.1.1 Las gráficas $H_1$ y $G_1$

Empezaremos describiendo  $H_1$ . Sea  $V(H_1) = W_1 \cup W_2$  tal que  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$  y  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  con  $E(H_1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , donde,

$$A_1 = \{(i, i+1) | i = 0, \dots, 11\} \cup \{(0, 12)\}$$

$$A_2 = \{(i, i+2) | i = 13, \dots, 23\} \cup \{(13, 24), (14, 25)\}$$

$$A_3 = \{(i, i+13) | i = 0, \dots, 12\}$$

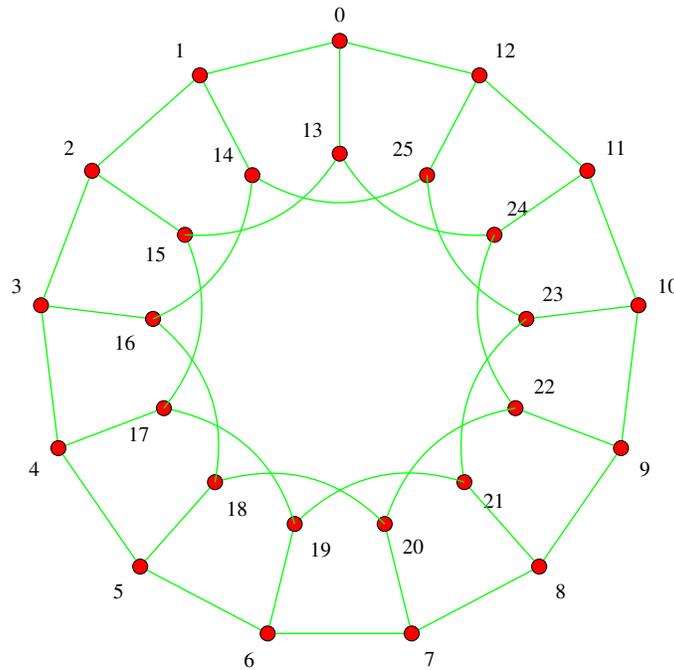


Figura 3.2: La gráfica  $H_1$

Ahora describiremos la gráfica  $G_1$  que se construye a partir de  $H_1$ .

Primero definimos  $G'_1$  a partir de  $H_1$ . Sea  $V(G'_1) = \{0, \dots, 40\}$  con conjunto de aristas definidas de la siguiente manera:

$$E(G'_1) = E(H_1) - (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2), \text{ donde,}$$

$$B_1 = \{(i, i+2), (i-6, i+7) | i = 13, \dots, 18\}$$

$$B_2 = \{(i, i+2), (i-17, i-16) | i = 19, \dots, 23\}$$

$$C_1 = \{(i, i+13), (i+2, i+13), (i-6, i+13), (i+7, i+13) | i = 13, \dots, 18\}$$

$$C_2 = \{(i, i+13), (i+2, i+13), (i-17, i+13), (i-16, i+13) | i = 19, \dots, 23\}$$

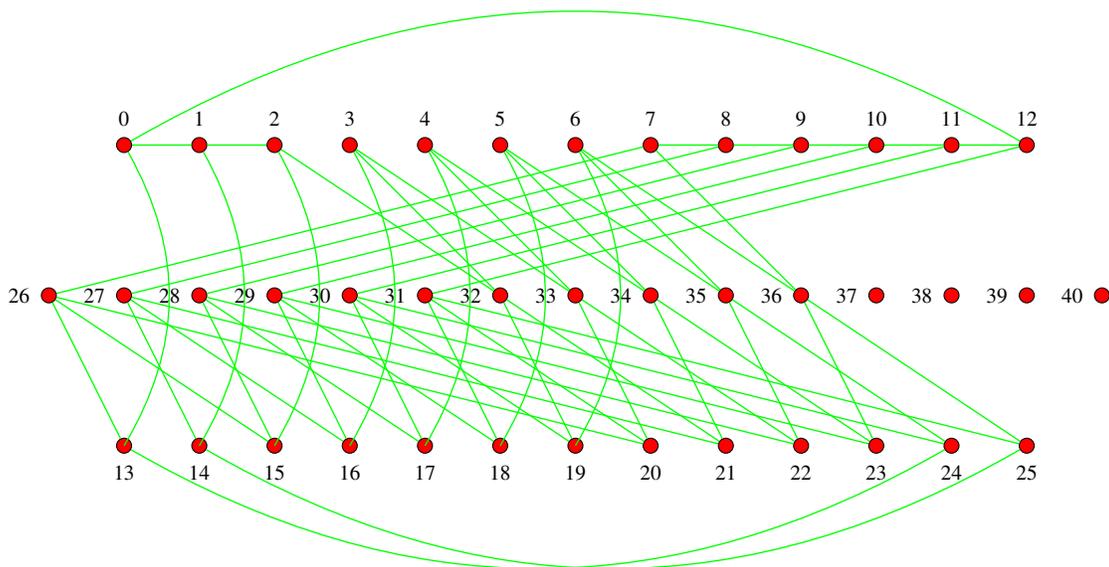


Figura 3.3: La gráfica  $G'_1$

Para finalizar la construcción de  $G_1$  haremos lo siguiente:

Sea  $G_1$  la gráfica tal que  $V(G_1) = V(G'_1)$  y  $E(G_1) = (E(G'_1) - B_3) \cup C_3$ , donde,

$$B_3 = \{(i, i + 13), (i - 11, i - 10) | i = 18, \dots, 21\}$$

$$C_3 = \{(i, i + 19), (i + 13, i + 19), (i - 11, i + 19), (i - 10, i + 19) | i = 18, \dots, 21\}$$

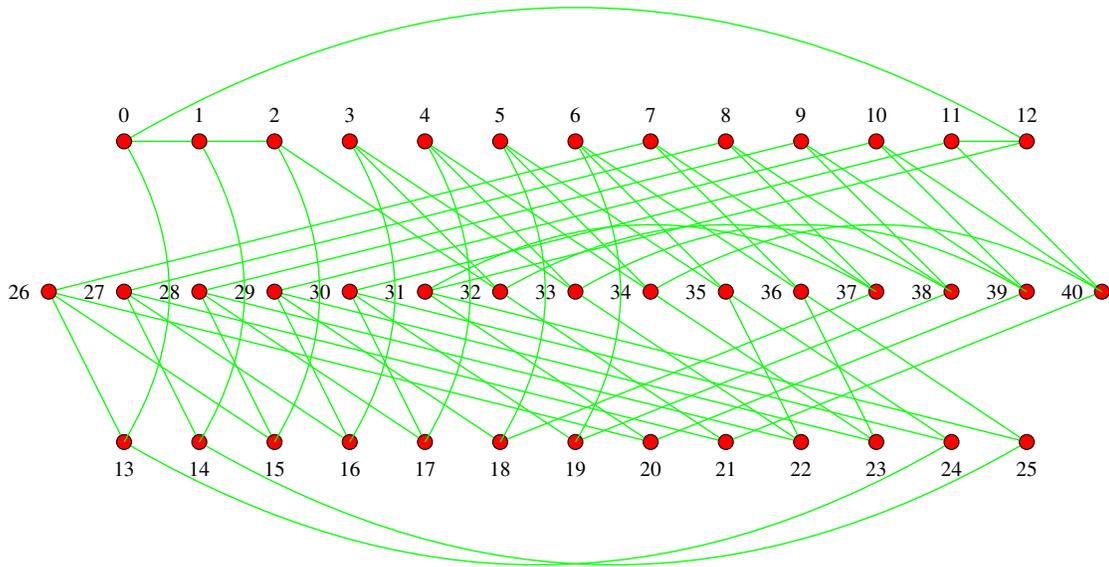


Figura 3.4: La gráfica  $G_1$

### 3.1.2 Las gráficas $H_2$ y $G_2$

Al igual que se construyeron  $H_1$  y  $G_1$ , ahora se describirán las construcciones de  $H_2$  y  $G_2$ .

Sea  $H_2$  tal que  $V(H_2) = W_1 \cup W_2$  donde  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$  y  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  con  $E(H_2) = A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3$ , donde,



$$B'_1 = \{(i, i-3), (i+12, i-5) | i = 5, \dots, 12\}$$

$$B'_2 = \{(i, i+4), (i-3, i+1) | i = 13, 14, 15\}$$

$$C'_1 = \{(i, i+21), (i-3, i+21), (i+12, i+21), (i-5, i+21) | i = 5, \dots, 12\}$$

$$C'_2 = \{(i, i+21), (i+4, i+21), (i-3, i+21), (i+1, i+21) | i = 13, 14, 15\}$$

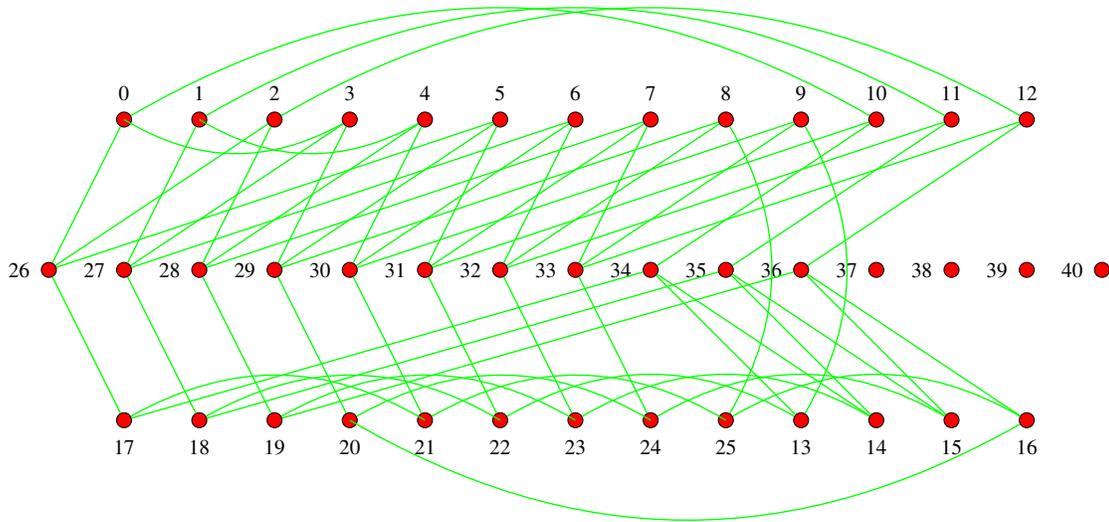


Figura 3.6: La gráfica  $G'_2$

Para finalizar la construcción de  $G_2$  haremos lo siguiente:

Sea  $G_2$  la gráfica tal que  $V(G_2) = V(G'_2)$  y  $E(G_2) = E(G'_2) - B'_3 \cup C'_3$ , donde,

$$B'_3 = \{(i, i+4), (i+18, i+1) | i = 16, \dots, 19\}$$

$$C'_3 = \{(i, i+21), (i+4, i+21), (i+18, i+21), (i+1, i+21) | i = 16, \dots, 19\}$$

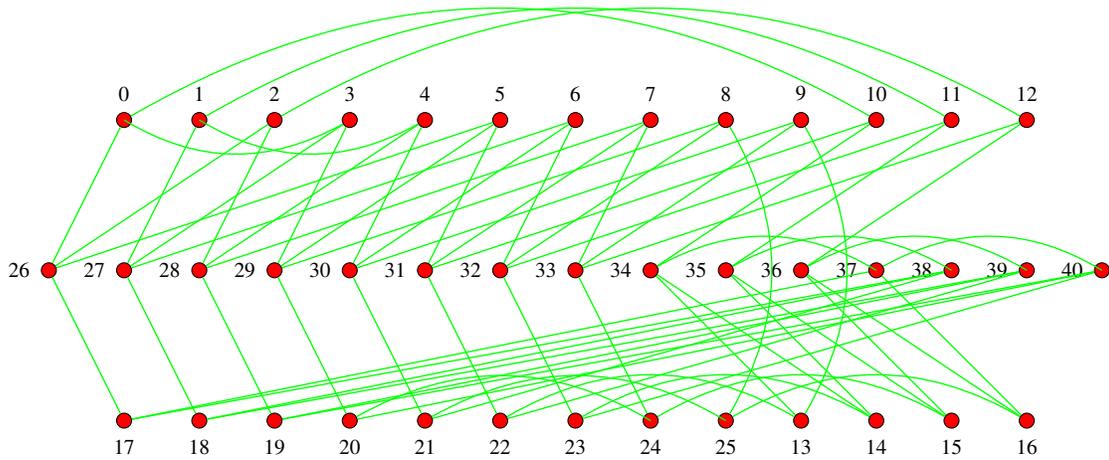


Figura 3.7: La gráfica  $G_2$

## 3.2 Maximalidad de $B_q$

Una vez expuesta la gráfica  $B_{41}^*(S, T, 1)$ , con  $S = T = \{26, 27, \dots, 40\}$ , es natural hacernos varias preguntas al respecto tales como, asumiendo que cumple con las características de ser de cuello 5, si es posible construir una gráfica de mayor regularidad a partir de  $B_{41}$  o de cualquier otro  $B_q$  para algún  $q > 41$ , o si es única. Así que a lo largo de esta sección demostraremos este tipo de cuestiones.

Presentamos resultados originales, es decir, si bien nos basamos en la construcción dada en [12], demostramos que dicha gráfica es la óptima con las características requeridas que se puede construir con los métodos descritos de reducción y amalgama y no es única.

### 3.2.1 Demostración de las condiciones de la gráfica

La primera pregunta que contestaremos es: ¿La gráfica  $B_{41}^*(S, T, 1)$ , con  $S = T = \{26, 27, \dots, 40\}$  descrita anteriormente, es realmente de cuello 5?

Para ello demostraremos que las gráficas  $H_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  descritas en [12] cumplen con las características descritas en el Teorema 2.7 y el Lema 3.1.

**Proposición 3.3.** *La gráfica  $H_1$  es 3-regular de cuello 5.*

*Demostración.* Sea  $H_1$  la gráfica descrita anteriormente. Por construcción  $H_1$  es tres regular, (ver Figura 3.2). Ahora, sea  $C$  el ciclo de longitud más pequeña en  $H_1$ . Si  $C$  es una subgráfica de alguna de las subgráficas inducidas por  $\langle W_1 \rangle$  o  $\langle W_2 \rangle$ , entonces  $|C| = 13$  pues son ciclos de esa longitud. Supongamos que existe una  $xyz$  trayectoria en  $C$ , entonces puede ocurrir cualquiera de los siguientes casos:  $x, y \in W_1$  y  $z \in W_2$  o  $x \in W_1$  y  $y, z \in W_2$ . Basta con demostrar que si  $z \notin N(x)$  implicaría que  $|C| \neq 3$  y que si  $N(x) \cap N(z) = \{y\}$  implicaría que  $|C| \neq 4$ , es decir, no tiene ciclos de longitud tres o cuatro. Notemos que en  $H_1$  existe un automorfismo entre cualesquiera dos vértices de  $W_1$  y otro automorfismo entre cualesquiera dos vértices de  $W_2$  por lo tanto basta demostrar las condiciones para dos casos específicos.

En el primer caso tenemos:

1)  $x = 0, y = 12, z = 25$ . Notemos que  $N(x) = \{1, 12, 13\}$  y  $N(z) = \{12, 14, 23\}$ .

En el segundo caso tenemos los siguientes subcasos:

1)  $x = 13, y = 15, z = 2$ . Notemos que  $N(x) = \{0, 15, 24\}$  y  $N(z) = \{1, 3, 15\}$ .

En todos los casos, se cumplen las dos condiciones, por lo tanto, tenemos que  $|C| \neq 3, 4$ . Para finalizar basta con mostrar un ciclo de longitud 5, que es el siguiente:  $(0, 1, 2, 15, 13)$ . Por lo tanto,  $H_1$  tiene cuello 5.

■

**Observación 3.4.** Los pesos de  $H_1$  son  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 12, \pm 13\}$ .

**Proposición 3.5.** La gráfica  $G_1$  es  $(3,4)$ -regular de cuello al menos 5. Más aún, los únicos vértices de grado 4 son  $\{26, \dots, 40\}$ .

*Demostración.* Sea  $G_1$  la gráfica definida anteriormente, como  $G_1$  está definida a partir de  $H_1$ , basta demostrar que los conjuntos de aristas  $B_i$  son independientes y cumplen con las condiciones del lema 3.1. Probaremos en cada conjunto las condiciones:

- a) independencia del par de aristas escogidas,
- b) vecindad vacía del par de aristas escogidas e,
- c) intersección de a lo más un vértice de entre cualesquiera extremos del par de aristas escogidas con respecto de cualesquier otro par de aristas escogido.

Probaremos primero para  $G'_1$ . Para  $B_1 = \{(i, i+2), (i-6, i+7) | i = 13, \dots, 18\}$ . Sea  $x_i = i, y_i = i+2, z_i = i-6, w_i = i+7$ . Observamos que sus vecindades son:  $N(x_i) = \{i-13, i-2, i+2\}$ ,  $N(y_i) = \{i-11, i, i+4\}$ ,  $N(z_i) = \{i-7, i-5, i+7\}$ ,  $N(w_i) = \{i-6, i+5, i+9\}$ . Por lo tanto, cumple las condiciones a) y b).

Para  $B_2 = \{(i, i+2), (i-17, i-16) | i = 19, \dots, 23\}$ . Sea  $x'_i = i$ ,  $y'_i = i+2$ ,  $z'_i = i-17$ ,  $w'_i = i-16$ . Observamos que sus vecindades son:  $N(x'_i) = \{i-13, i-2, i+2\}$ ,  $N(y'_i) = \{i-11, i, i+4\}$ ,  $N(z'_i) = \{i-18, i-16, i-4\}$ ,  $N(w'_i) = \{i-17, i-15, i-3\}$ . Por lo tanto, cumple las condiciones a) y b).

Para finalizar, definamos  $X = \{x_i | i = 13, \dots, 18\} \cup \{x'_i | i = 19, \dots, 23\}$ ,  $Y = \{y_i | i = 13, \dots, 18\} \cup \{y'_i | i = 19, \dots, 23\}$ ,  $Z = \{z_i | i = 13, \dots, 18\} \cup \{z'_i | i = 19, \dots, 23\}$  y  $W = \{w_i | i = 13, \dots, 18\} \cup \{w'_i | i = 19, \dots, 23\}$ . Entonces,

$$X = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\},$$

$$Y = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\},$$

$$Z = \{07, 08, 09, 10, 11, 12, 02, 03, 04, 05, 06\} \text{ y}$$

$$W = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, 03, 04, 05, 06, 07\}.$$

Notemos que si comparamos dos columnas (que corresponden al conjunto de vértices que se tienen que comparar), estas se intersectan en a lo más un elemento y eso implica que se cumple la última condición del Lema 3.1 y por lo tanto  $G'_1$  es de cuello al menos 5 y los vértices 26, 27, ..., 36 son de grado 4. Para finalizar consideremos el conjunto  $B_3$  que son las aristas por pares  $(18, 31) - (7, 8)$ ,  $(19, 32) - (8, 9)$ ,  $(20, 33) - (9, 10)$ ,  $(21, 34) - (10, 11)$ , observemos que las aristas cumplen las condiciones a) y c) sobre  $G'_1$ . Con respecto a la condición b), consideremos la vecindad de cada uno de los vértices:  $N(7) = \{8, 26, 36\}$ ,  $N(8) = \{7, 9, 27\}$ ,  $N(9) = \{8, 10, 28\}$ ,  $N(10) = \{9, 11, 29\}$ ,  $N(11) = \{10, 12, 30\}$ ,  $N(18) = \{5, 29, 31\}$ ,  $N(19) = \{6, 30, 32\}$ ,  $N(20) = \{26, 31, 33\}$ ,  $N(21) = \{27, 32, 34\}$ ,  $N(31) = \{18, 20, 12, 25\}$ ,  $N(32) = \{19, 21, 2, 3\}$ ,  $N(33) = \{3, 4, 20, 22\}$ ,  $N(34) = \{4, 5, 21, 23\}$ . Observamos que cumple la condición b). Aplicando de nuevo el lema 3.1, tenemos que  $G_1$  es de cuello al menos 5 y los

vértices que se agregan de grado cuatro son: 37, 38, 39 y 40.

■

**Observación 3.6.** Los pesos de la gráfica  $G_1$  son  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 6, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 19\}$ . Por lo tanto, los pesos  $\mathcal{P}_w = \{1, 2, 6, 11, 12, 13, 19, 22, 28, 29, 30, 35, 39, 40\}$  son los únicos en  $H_1$  y  $G_1$ .

**Proposición 3.7.** *La gráfica  $H_2$  es 3-regular de cuello al menos 5.*

*Demostración.* Para verificar que es 3-regular ver Figura 3.5. La demostración de que  $H_2$  tiene cuello al menos 5 es análoga al caso de  $H_1$ .

■

**Observación 3.8.** Los pesos de  $H_2$  son  $\{\pm 3, \pm 4, \pm 9, \pm 10, \pm 17\}$ .

**Proposición 3.9.** *La gráfica  $G_2$  es (3,4)-regular de cuello al menos 5. Más aún, los únicos vértices de grado 4 son  $\{26, \dots, 40\}$ .*

*Demostración.* La demostración de que  $G_2$  es de cuello al menos 5 es análoga al caso de  $G_1$ .

■

**Observación 3.10.** Los pesos de la gráfica  $G_2$  son  $\{\pm 3, \pm 4, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 17, \pm 20\}$ . Por lo tanto, los pesos de  $H_2$  y  $G_2$  son  $\mathcal{L}_w = \{3, 4, 9, 10, 15, 17, 20, 21, 24, 26, 31, 32, 37, 38\}$ .

**Teorema 3.11.** *La Amalgama  $B_{41}^*(S, T, 1)$  anteriormente descrita, es una gráfica 43-regular de orden 3250 y cuello 5.*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del Teorema 2.7 ya que  $\mathcal{L}_w \cap \mathcal{P}_w = \emptyset$ .

■

### 3.2.2 Maximalidad de $B_{41}^*(S, T, 1)$

La segunda pregunta que responderemos es la siguiente: ¿Cuál es la gráfica con la mayor regularidad posible a partir de  $B_{41}$  y orden 3250?

Antes de responder esta pregunta, haremos una conjetura:

*Conjetura:* La mayor regularidad que puede alcanzar  $B_q^*(S, T, u)$  es  
cuando  $|S| = |T|$

Asumiremos que  $|S| = |T|$ , creyendo firmemente que la conjetura es cierta, sin embargo, no pude demostrar que es cierta, ni que es falsa.

**Teorema 3.12.** *Si  $M$  es una gráfica de cuello 5 y orden 3250 construida a partir de  $B_{41}$ , entonces la máxima regularidad de  $M$  es 43.*

*Demostración.* Sea  $M$  una gráfica de orden 3250 construida a partir de  $B_{41}$  y  $H$  una gráfica que se amalgama en  $P_0$  de  $M$  entonces  $H$  es de orden 26, ya que al aplicar las reducciones

es necesario quitar 30 vértices de  $P_0$  y  $L_0$ . Por el Lema 1.5, la máxima regularidad de  $H$  es 5, ya que si  $k = 6$  entonces  $\sum_{v \in V} \binom{6}{2} = 390 > \binom{26}{2} = 325$ , por lo tanto tendría un ciclo de longitud cuatro. Entonces,  $H$  puede ser 4-regular o 5-regular.

Si  $H$  es 4-regular, entonces la gráfica  $G$  que se amalgama en los  $P_i$  con  $i \in GF(41) - \{0\}$  debe ser  $(4, 5)$ -regular con exactamente 26 vértices de grado par y 15 vértices de grado impar, la cual no existe, pues la suma de los grados de una gráfica siempre es par. Por lo tanto,  $H$  no puede ser 4-regular.

Si  $H$  es 5-regular, entonces por la tabla del capítulo 1, el mínimo número de vértices que se necesita para una  $(5, 5)$ -jaula es 30, Entonces, no existe una gráfica 5 regular con cuello 5 y orden 26. Por lo tanto la máxima regularidad de  $M$  es cuando  $H$  es 3-regular.

■

### 3.2.3 Una gráfica maximal regular

La siguiente pregunta que nos podemos hacer es si existe una gráfica de orden 3250 y cuello 5 con una mayor regularidad que 43 para algún  $B_q$  con  $q \geq 43$ .

**Lema 3.13.** *Sea  $B_q^*(S, T, u)$  una gráfica de cuello 5 y orden 3250 construida a partir de  $B_q$  con  $q > 43$ . Entonces la regularidad de  $B_q^*(S, T, u)$  es a lo más 43.*

Este lema fue probado por computadora, ya que fue necesario calcular los pisos de algunas funciones. A continuación se dará una breve explicación de qué se programó para su

resolución<sup>1</sup>.

Por definición el orden de  $B_q$  es  $2q^2$ . Entonces el número de vértices por quitar es  $2q^2 - 3250$  por lo que al efectuar la división entre  $2q$  y sacar su piso obtenemos el número  $u$  que depende de  $q$ , es decir

$$u(q) = \left\lfloor \frac{2q^2 - 3250}{2q} \right\rfloor. \quad (3.1)$$

Entonces, el número de vértices de  $B_q(u)$  es:

$$|B_q(u)| = 2q^2 - 2q \left\lfloor \frac{2q^2 - 3250}{2q} \right\rfloor. \quad (3.2)$$

De modo que el número de vértices por quitar en  $P_0$ , es decir  $|S|$ , que depende de  $q$ , es:

$$|S(q)| = \frac{2q^2 - 2q \left\lfloor \frac{2q^2 - 3250}{2q} \right\rfloor - 3250}{2}. \quad (3.3)$$

Por lo tanto, el número de vértices disponibles para amalgamar una gráfica  $H$  en  $P_0$  es:

$$q - \frac{2q^2 - 2q \left\lfloor \frac{2q^2 - 3250}{2q} \right\rfloor - 3250}{2}. \quad (3.4)$$

Por el Teorema 1.5, si  $H$  es  $k$ -regular, entonces:

$$k(k-1) < q - \frac{2q^2 - 2q \left\lfloor \frac{2q^2 - 3250}{2q} \right\rfloor - 3250}{2} - 1, \quad (3.5)$$

pues de lo contrario  $H$  tendría un ciclo de longitud 4. Por lo tanto,

$$k < \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left( q - \frac{2q^2 - 2q \left\lfloor \frac{2q^2 - 3250}{2q} \right\rfloor - 3250}{2} - 1 \right)}}{2}. \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>Ver anexo: Programa

Por el Lema 2.7, tenemos que la regularidad máxima de  $B_q^*(S, T, u)$  se calcula como:

$$|B_q^*(S, T, u)| = q - u(q) + k. \quad (3.7)$$

Dividamos en dos casos el lema:

**Caso 1.** Si  $q \leq 1625$ . Se demostró por computadora.<sup>2</sup>

**Caso 2.** Si  $q \geq 1625$ , entonces  $u(q) = q - 1$  ya que hay los suficientes vértices en  $P_0$  y en  $L_0$  para poder formar los 3250. Por lo tanto, por el Lema 1.5, la regularidad máxima de  $H_1$  y  $H_2$  al realizar la operación de amalgama, debe cumplir que  $k \leq 41$ .

Por otro lado, al solo existir  $P_0$  y  $L_0$ ,  $B_q(q - 1)$  es 1-regular y por lo tanto la gráfica resultante al amalgamar en  $B_q(q - 1)$  y formar  $B_q^*(S, T, q - 1)$  es a lo más 42-regular y por lo anterior dicha gráfica no existe.

### 3.2.4 No unicidad de $B_{41}^*(S, T, 1)$

Después de haber estudiado el orden de la gráfica construída, abordaremos la pregunta sobre si dicha gráfica es única o no lo es. Para responderla es necesario enunciar las siguientes proposiciones.

**Proposición 3.14.** *Todo vértice en  $H_1$  pertenece a un ciclo de longitud 5.*

*Demostración.* En  $H_1$  los vértices  $\{i, i + 1, i + 2, i + 15, i + 13\}$ , para  $i = 0, \dots, 10$  forman el ciclo de longitud cinco, ya que  $(i, i + 1)$ ,  $(i + 1, i + 2)$ ,  $(i + 2, i + 15)$ ,  $(i + 15, i + 13)$  y

<sup>2</sup>Ver anexo 4.1

$(i, i + 13)$  son aristas de la gráfica. Observamos que todos los vértices son de alguna de las formas descritas para los vértices, por lo tanto, todo vértice en  $H_1$  pertenece a un ciclo de longitud 5. ■

Definamos la siguiente gráfica  $\hat{H}_1$ :

Sea  $V(\hat{H}_1) = W_1 \cup W_2$  tal que  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$  y  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  con  $E(\hat{H}_1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , donde,

$$A_1 = \{(i, i + 2) | i = 0, \dots, 10\} \cup \{(0, 11), (1, 12)\}$$

$$A_2 = \{(i, i + 6) | i = 13, \dots, 19\} \cup \{(13, 20), (14, 21), (15, 22), (16, 23), (17, 24), (18, 25)\}$$

$$A_3 = \{(i, i + 13) | i = 0, \dots, 12\}$$

**Proposición 3.15.** *La gráfica  $\hat{H}_1$  es tres regular de cuello 6.*

*Demostración.* Es tres regular, (ver Figura 3.8). La demostración del cuello 6 es la siguiente: Consideremos los siguientes diagramas de vecindades de los vértices de  $\hat{H}_1$ . El mínimo ciclo que contiene al vértice cero es de orden 6. Notemos de la Figura 3.8 que los vértices  $0, \dots, 12$  pueden ser mandados a través de un isomorfismo uno al otro, por lo tanto, en los vértices  $0, \dots, 12$  el mínimo ciclo en el que están contenidos es de orden 6 (ver Figura 3.9). Análogamente, el vértice 13 está contenido en un ciclo de longitud al menos 6 y dado que los vértices  $13, \dots, 25$  pueden ser enviados uno al otro a través de un isomorfismo, entonces estos

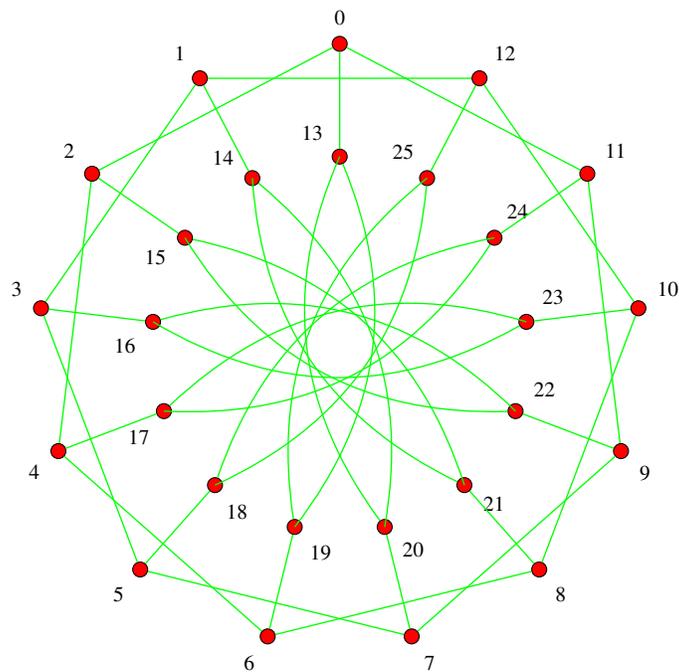


Figura 3.8: La gráfica  $\hat{H}_1$

vértices están contenidos en ciclos de al menos longitud 6 (ver Figura 3.10). Por lo tanto, la gráfica tiene cuello seis.

■

**Observación 3.16.** Los pesos de la gráfica  $\hat{H}_1$  son  $\{\pm 2, \pm 6, \pm 7, \pm 11, \pm 13\}$

Contestando a la pregunta con la que se inicia la sección tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.17.** *Existe una gráfica 43-regular de cuello 5, no isomorfa a  $B_{41}^*(S, T, 1)$  de orden 3250 a partir de  $B_{41}$ .*

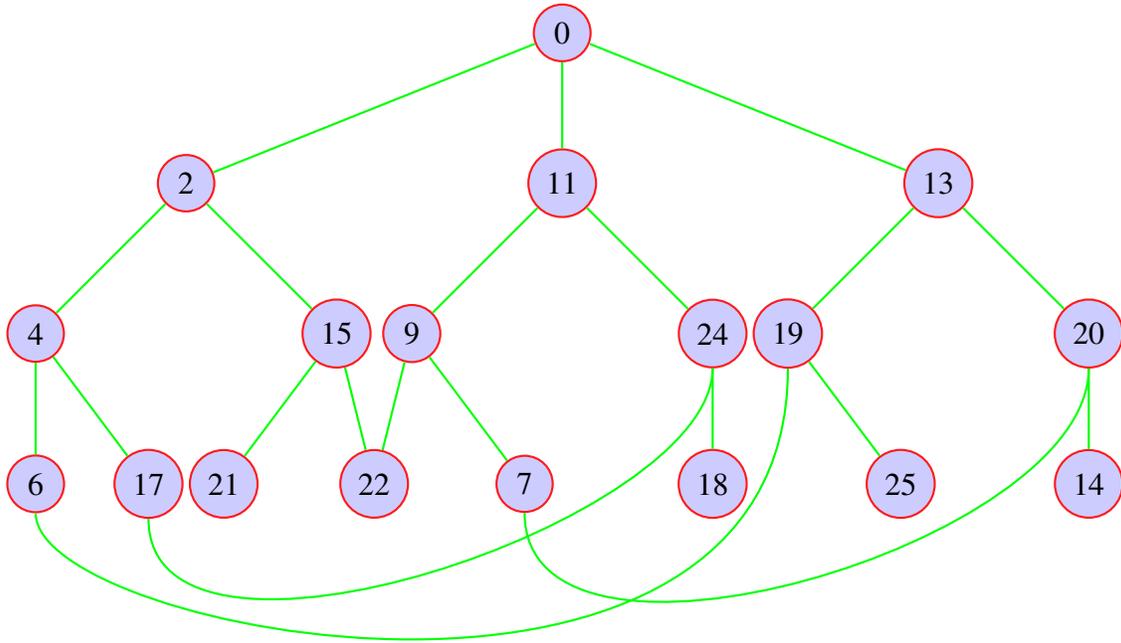


Figura 3.9: Diagrama de vecindades de  $V_0$  de  $\hat{H}_1$

*Demostración.* Sea  $\hat{B}_{41}^*(S, T, 1)$ , tal que  $|S| = |T| = 26$  asignemos las gráficas  $\hat{H}_1, H_2, G_1$  y  $G_2$  definidas anteriormente. Observamos que

$$\mathcal{L}_w = \{3, 4, 9, 10, 15, 17, 20, 21, 24, 26, 31, 32, 37, 38\}$$

y

$$\mathcal{P}_w = \{1, 2, 6, 7, 11, 12, 13, 19, 22, 28, 29, 30, 34, 35, 39, 40\},$$

por lo tanto,  $\mathcal{L}_w \cap \mathcal{P}_w = \emptyset$ , entonces por el Teorema 2.7, la Amalgama  $\hat{B}_{41}^*(S, T, 1)$  es una gráfica 43-regular de orden 3250 y cuello 5.

Para probar que no son isomorfas, se sigue inmediatamente de la Proposición 3.15 ya que el número de ciclos de una longitud fija es invariante bajo isomorfismos, dado que  $\hat{H}_1$  no tiene ciclos de longitud 5 y  $H_1$  si tiene.

Para finalizar, es necesario mostrar un ciclo de longitud 5, que es el siguiente:  $(0, 0) - [2, 0] - (2, 4) - [1, 2] - (0, 2)$  ya que al amalgamar  $\hat{H}_1$  se agrega la arista  $(0, 0) - (0, 2)$ .

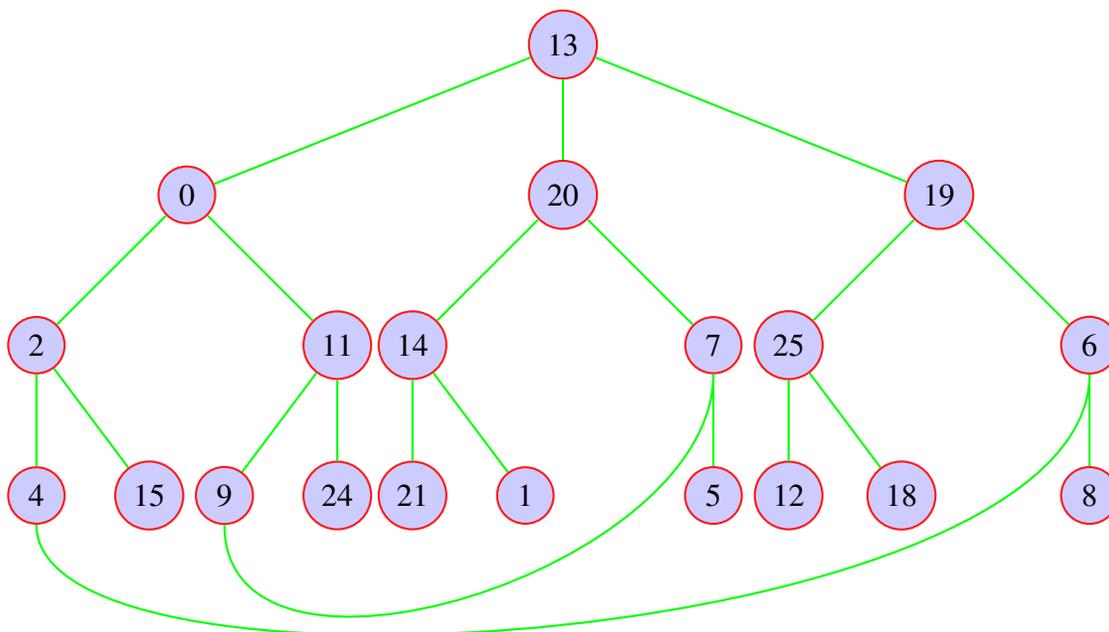


Figura 3.10: Diagrama de vecindades de  $V_{13}$  de  $\hat{H}_1$

■

### 3.2.5 Una gráfica birregular maximal por aristas

El objetivo de esta tesis es construir gráficas maximales por aristas. Por lo tanto lo que resta del capítulo se tratará de construcciones de gráficas maximales por aristas.

Para esta última parte, se creó un programa para determinar si las aristas que se agregan crean un ciclo de longitud tres o cuatro. En la primera sección del programa se define la gráfica y en la segunda parte se proponen dos algoritmos que permiten determinar si la gráfica tiene cuello al menos 5. Por lo tanto, describiremos lo que se programó<sup>3</sup>. En los anexos,

<sup>3</sup>Ver anexo 4.2

sólo se describe  $H_1$ . Sin embargo, este mismo algoritmo se utiliza para construir  $H_2$ ,  $G_2$ ,  $G_1$  y  $\hat{H}_1$ .

Las gráficas se definen a partir de su matriz de adjacencia, donde la asignación cero es cuando no existe arista entre los vértices y uno si existe.

Lo que hace el siguiente fragmento del programa es escoger tres vértices distintos y checar las aristas entre estos tres vértices. Si estos cumplen que las tres aristas tienen el valor de uno, entonces despliega un mensaje de existencia de un ciclo de longitud tres.

```
for (i=0;i<aux;i++)
{
    for (j=i+1;j<aux;j++)
    {
        for (k=j+1;k<aux;k++)
        {
            if(aristaH1[i][j] == 1 && aristaH1[j][k] == 1
                && aristaH1[i][k] == 1)
            {
                cout<< "Hay un triangulo";
                cont=1;
                cout<< endl << i << " " << j << " " << k <<endl;
            }
        }
    }
}
```

En el siguiente fragmento de programa se sigue la misma línea, primero se escogen cuatro vértices de la gráfica y sobre esos vértices, se consideran algunos casos, ya que los vértices escogidos son vértices etiquetados. En la Figura 3.2.5, se muestran las 15 formas de escoger cuatro aristas de vértices etiquetados, ya que las aristas disponibles que pueden ser escogidas para formar un 4-ciclo con cuatro vértices son 6, por lo tanto hay  $\binom{6}{4} = 15$  formas de escogerlas, de las cuales sólo 3 forman un ciclo de longitud 4.

```
for (i=0;i<aux;i++)
{
    for (j=i+1;j<aux;j++)
```

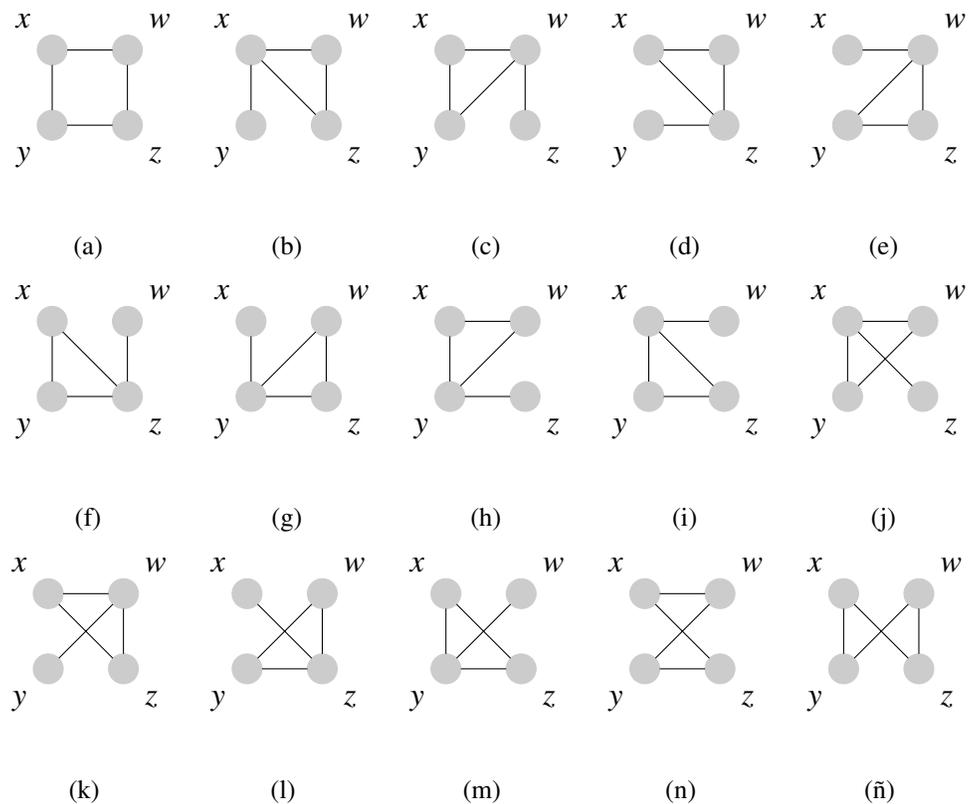


Figura 3.11: Formas de escoger 4 aristas de 4 vértices etiquetados

```

{
    for (k=j+1;k<aux;k++)
    {
        for(l=k+1;l<aux;l++)
        {
            if(aristaH1[i][j] == 1 && aristaH1[j][k] == 1
                && aristaH1[k][l] == 1 && aristaH1[i][l] == 1)
            {
                cout<< "Hay un cuadrado";
                cont=1;
                cout<<endl<<i<<" "<<j<<" "<<k<<" "<<l<<endl;
            }
            else if(aristaH1[i][j] == 1 && aristaH1[l][k] == 1
                && aristaH1[j][l] == 1 && aristaH1[i][k] == 1)
            {
                cout<< "Hay un cuadrado";
                cont=1;
                cout<<endl<<i<<" "<<j<<" "<<l<<" "<<k<<endl;
            }
            else if(aristaH1[i][l] == 1 && aristaH1[j][k] == 1
                && aristaH1[i][k] == 1 && aristaH1[j][l] == 1)
            {
                cout<< "Hay un cuadrado";
                cont=1;
                cout<<endl<<i<<" "<<l<<" "<<j<<" "<<k<<endl;
            }
        }
    }
}

```



Una vez expuesto el programa, vamos a construir una gráfica birregular maximal por aristas. No solo se tiene que considerar encontrar gráficas de cuello cinco para amalgamar sino se tienen que cuidar los pesos para que se siga cumpliendo la condición necesaria expuesta en el teorema descrito en [12] y así garantizar una amalgama correcta, obteniendo entonces una gráfica de cuello 5. Notemos que esta gráfica utiliza como base a  $B_{41}$ , es decir, se utilizan los métodos expuestos en [1] y se construye usando los mismos métodos que se utilizan en [12]. Es importante notar que probablemente es posible encontrar, mediante otros métodos, otras gráficas birregulares extremales de orden 3250. Es decir, la gráfica que se expone a continuación es extremal si se utiliza como base los métodos de esta tesis.

Para iniciar, construyamos  $H_1$  de la siguiente forma:

Sea  $V(H_1) = W_1 \cup W_2$  tal que  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$  y  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  con  $E(H_1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ , donde,

$$A_1 = \{(i, i+1) | i = 0, \dots, 11\} \cup \{(0, 12)\}$$

$$A_2 = \{(i, i+2) | i = 13, \dots, 23\} \cup \{(13, 24), (14, 25)\}$$

$$A_3 = \{(i, i+13) | i = 0, \dots, 12\}$$

$$A_4 = \{(i, i+18) | i = 0, \dots, 7\}$$

$$A_5 = \{(i, i+5) | i = 8, \dots, 12\}$$

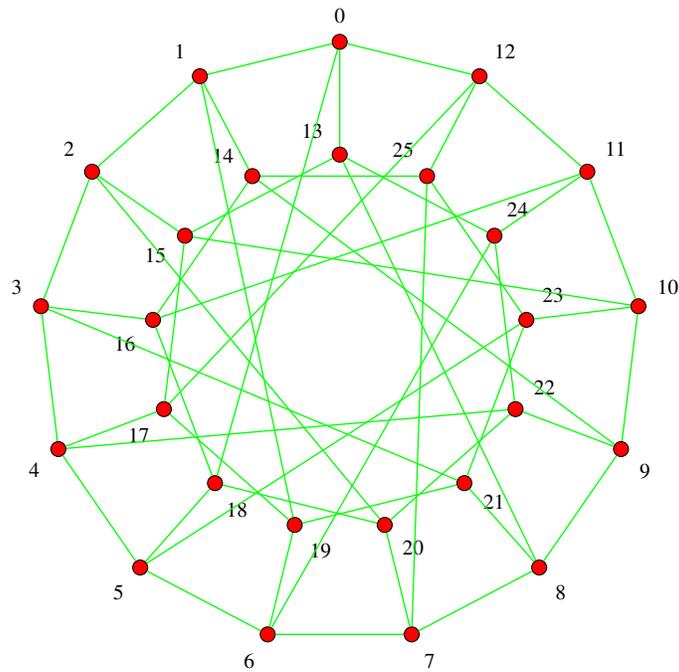


Figura 3.12: La gráfica  $H_1$

**Proposición 3.18.** *La gráfica  $H_1$  es 4-regular de cuello 5 y pesos  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 18\}$*

*Demostración.* La regularidad se sigue inmediatamente (ver Figura 3.12). La demostración de que el cuello es al menos 5 se realiza por computadora y los pesos se siguen inmediatamente de la definición. Y finalmente notemos que  $(0, 1, 2, 15, 13)$  es un ciclo de longitud cinco.

■

**Observación 3.19.** La gráfica  $H_1$  es maximal regular, ya que para ser 5-regular se necesitan al menos 30 vértices (ver Figura 1.8).

Ahora construyamos la gráfica  $H_2$ :

Sea  $H_2$  tal que  $V(H_2) = W_1 \cup W_2$  donde  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$  y  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  con  $E(H_2) = A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \cup A'_4$ , donde,

$$A'_1 = \{(i, i+3) | i = 0, \dots, 9\} \cup \{(0, 10), (1, 11), (2, 12)\}$$

$$A'_2 = \{(i, i+4) | i = 13, \dots, 21\} \cup \{(13, 22), (14, 23), (15, 24), (16, 25)\}$$

$$A'_3 = \{(i, i+17) | i = 0, \dots, 8\} \cup \{(9, 13), (10, 14), (11, 15), (12, 16)\}$$

$$A'_4 = \{(i, i+15) | i = 0, \dots, 10\}$$

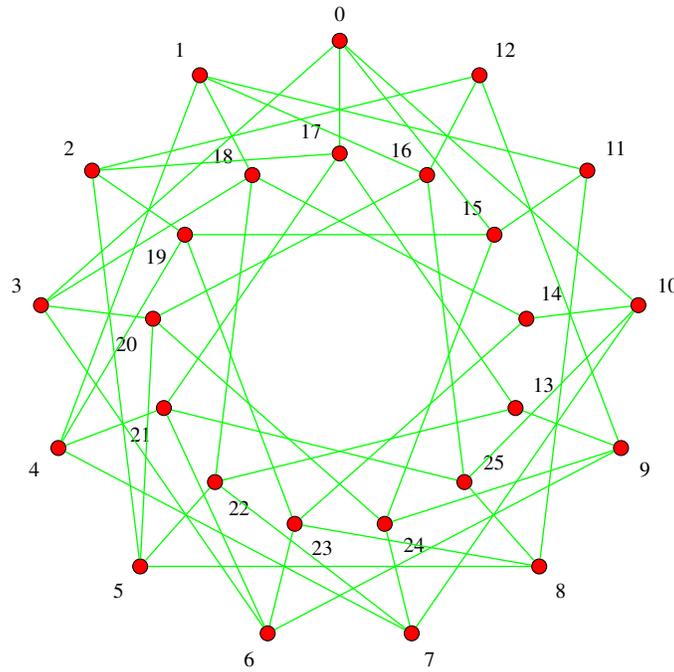


Figura 3.13: La gráfica  $H_2$

**Proposición 3.20.** *La gráfica  $H_2$  es  $\{3, 4\}$ -regular de cuello al menos 5 con 22 vértices de grado 4. Es maximal con respecto a los pesos que se pueden ocupar. Además los pesos de la*

gráfica son:  $\{\pm 3, \pm 4, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 17\}$

*Demostración.* La birregularidad se sigue inmediatamente (ver Figura 3.13). La demostración del cuello al menos 5 es por computadora y los pesos se siguen inmediatamente de la definición. Con respecto a la maximalidad, cualquier otro peso escogido (de los disponibles) al definir estas aristas en el programa dejaba más de tres aristas sin poder acomodar, y como en esta construcción sólo se dejaron de acomodar dos, entonces es maximal por aristas. ■

Este resultado nos obliga a que, si empezamos tomando como base las gráficas descritas al inicio del capítulo, la gráfica birregular maximal por aristas debe ser  $\{43, 44\}$ -regular. Por lo tanto, basta con aumentar a lo más un grado a cada vértice de  $G_1$  y  $G_2$ . En este caso hay una cota superior que es de 40 vértices, ya que  $G_1$  y  $G_2$  son  $\{3, 4\}$ -regulares con 15 vértices de grado 4. Ahora, para definir  $G_1$ , definiremos antes dos gráficas  $G'_1$  y  $G''_1$ .

Sea  $V(G'_1) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$  tal que  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$ ,  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  y  $W_3 = \{26, 27, \dots, 40\}$  con  $E(G'_1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 - (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2)$ , donde

$$A_1 = \{(i, i+1) | i = 0, \dots, 11\} \cup \{(0, 12)\},$$

$$A_2 = \{(i, i+2) | i = 13, \dots, 23\} \cup \{(13, 24), (14, 25)\},$$

$$A_3 = \{(i, i+13) | i = 0, \dots, 12\},$$

$$B_1 = \{(i, i+2), (i-6, i+7) | i = 13, \dots, 18\},$$

$$B_2 = \{(i, i+2), (i-17, i-16) | i = 19, \dots, 23\},$$

$$C_1 = \{(i, i+13), (i+2, i+13), (i-6, i+13), (i+7, i+13) | i = 13, \dots, 18\},$$

$$C_2 = \{(i, i+13), (i+2, i+13), (i-17, i+13), (i-16, i+13) | i = 19, \dots, 23\}.$$

Para continuar definimos  $G_1''$  tal que  $V(G_1'') = V(G_1')$  y  $E(G_1'') = E(G_1') - B_3 \cup C_3$ , donde

$$B_3 = \{(i, i+13), (i-11, i-10) | i = 18, \dots, 21\},$$

$$C_3 = \{(i, i+19), (i+13, i+19), (i-11, i+19), (i-10, i+19) | i = 18, \dots, 21\}.$$

Para finalizar la construcción, sea  $G_1$  tal que  $V(G_1) = V(G_1'')$  y  $E(G_1) = E(G_1'') \cup A$ , donde

$$A = \{(i+19, i+26) | i = 0, \dots, 6\} \cup \{(i+3, i+37) | i = 0, \dots, 3\} \cup \{(i, i+33) | i = 0, \dots, 2\} \cup$$

$$\{(7, 9), (8, 13), (10, 15), (11, 16), (17, 18)\}.$$

**Proposición 3.21.** *La gráfica  $G_1$  es  $\{3, 4, 5\}$ -regular de cuello al menos 5, consta de 2 vértices de grado tres, 25 vértices de grado cuatro y 14 vértices de grado cinco. Además, maximal con respecto a los pesos que se pueden ocupar. Los pesos de la gráfica son:*

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 19\}$$

*Demostración.* La triregularidad se sigue inmediatamente (ver Figura 3.14). La demostración del cuello al menos cinco es por computadora y los pesos se siguen inmediatamente de la definición. Con respecto a la maximalidad, los únicos vértices a los que no pudieron agregarse aristas son los vértices: 12, 14 y 36, ya que se forma un ciclo de longitud tres o cuatro al tratar de unirlos.



**Observación 3.22.** A todos los vértices de  $G_1$ , excepto los vértices 12, 14 y 36 se les aumentó en uno su grado. Además, originalmente los vértices 12 y 14 son de grado 3 y el vértice 36 es de grado cuatro, por lo tanto, al amalgamar la gráfica, esos tres vértices tendrán grado 43 y todos los demás 44.

**Observación 3.23.** Los pesos de las gráficas  $H_1$  y  $G_1$  son

$$\mathcal{P}_w = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 18, 19, 22, 23, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 39, 40\}$$

.

Por último definiremos  $G_2$ . Para ello definiremos como antes las gráficas  $G'_2$  y  $G''_2$ .

Sea  $V(G'_2) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$  tal que  $W_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$ ,  $W_2 = \{13, 14, \dots, 25\}$  y  $W_3 = \{26, 27, \dots, 40\}$  con  $E(G'_2) = A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 - (B'_1 \cup B'_2) \cup (C'_1 \cup C'_2)$ , donde

$$A'_1 = \{(i, i+3) | i = 0, \dots, 9\} \cup \{(0, 10), (1, 11), (2, 12)\},$$

$$A'_2 = \{(i, i+4) | i = 13, \dots, 21\} \cup \{(13, 22), (14, 23), (15, 24), (16, 25)\},$$

$$A'_3 = \{(i, i+17) | i = 0, \dots, 8\} \cup \{(9, 13), (10, 14), (11, 15), (12, 16)\},$$

$$B'_1 = \{(i, i-3), (i+12, i-5) | i = 5, \dots, 12\},$$

$$B'_2 = \{(i, i+4), (i-3, i+1) | i = 13, 14, 15\},$$

$$C'_1 = \{(i, i+21), (i-3, i+21), (i+12, i+21), (i-5, i+21) | i = 5, \dots, 12\},$$

$$C'_2 = \{(i, i+21), (i+4, i+21), (i-3, i+21), (i+1, i+21) | i = 13, 14, 15\}.$$

Para continuar, definimos  $G''_2$  tal que  $V(G''_2) = V(G'_2)$  y  $E(G''_2) = E(G'_2) - B'_3 \cup C'_3$ , donde

$$B'_3 = \{(i, i+4), (i+18, i+1) | i = 16, \dots, 19\},$$

$$C'_3 = \{(i, i+21), (i+4, i+21), (i+18, i+21), (i+1, i+21) | i = 16, \dots, 19\}.$$

Para finalizar la construcción, sea  $G_2$  tal que  $V(G_2) = V(G''_2)$  y  $E(G_2) = E(G''_2) \cup A$ , donde

$$A = \{(i+6, i+26) | i = 0, \dots, 6\} \cup \{(i+17, i+33) | i = 0, \dots, 2\} \cup$$

$$\{(0, 15), (1, 25), (2, 22), (3, 23), (4, 20), (5, 36), (21, 24)\}.$$

**Proposición 3.24.** *La gráfica  $G_2$  es  $\{3, 4, 5\}$ -regular de cuello al menos 5. Consta de 3 vértices de grado 3, 27 vértices de grado 4 y 11 vértices de grado 5. Además, maximal con respecto a los pesos que se pueden ocupar. Los pesos de la gráfica son:*

$$\{\pm 3, \pm 4, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 16, \pm 17, \pm 20\}.$$

*Demostración.* La triregularidad se sigue inmediatamente (ver Figura 3.15). La demostración del cuello al menos cinco es por computadora y los pesos se siguen inmediatamente de la definición. Con respecto a la maximalidad, los únicos vértices a los que no pudieron agregarse aristas son los vértices, son 13, 14, 16, 37, 38, 39 y 40 ya que se forma un ciclo de longitud tres o cuatro al tratar de unirlos.

■

**Observación 3.25.** A todos los vértices de  $G_1$ , excepto los vértices 13, 14, 16, 37, 38, 39 y 40 se les aumentó en uno su grado, además originalmente los vértices 13, 14 y 16 son de grado 3 y los vértices 37, 38, 39 y 40 son de grado cuatro, por lo tanto al amalgamar la gráfica, esos siete vértices tendrán grado 43 y los demás 44.

**Observación 3.26.** Los pesos de las gráficas  $H_2$  y  $G_2$  son

$$\mathcal{P}_w = \{3, 4, 9, 10, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 26, 31, 32, 37, 38\}$$

.

**Teorema 3.27.** *La amalgama  $B_{41}^*(S, T, 1)$  es una gráfica  $\{43, 44\}$ -regular de orden 3250 y cuello 5, maximal por aristas. Además la cantidad de vértices de grado 44 son 2928 y 322 son de grado 43*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del Teorema 2.7 y las observaciones anteriores, ya que  $\mathcal{L}_w \cap \mathcal{P}_w = \emptyset$ .

■

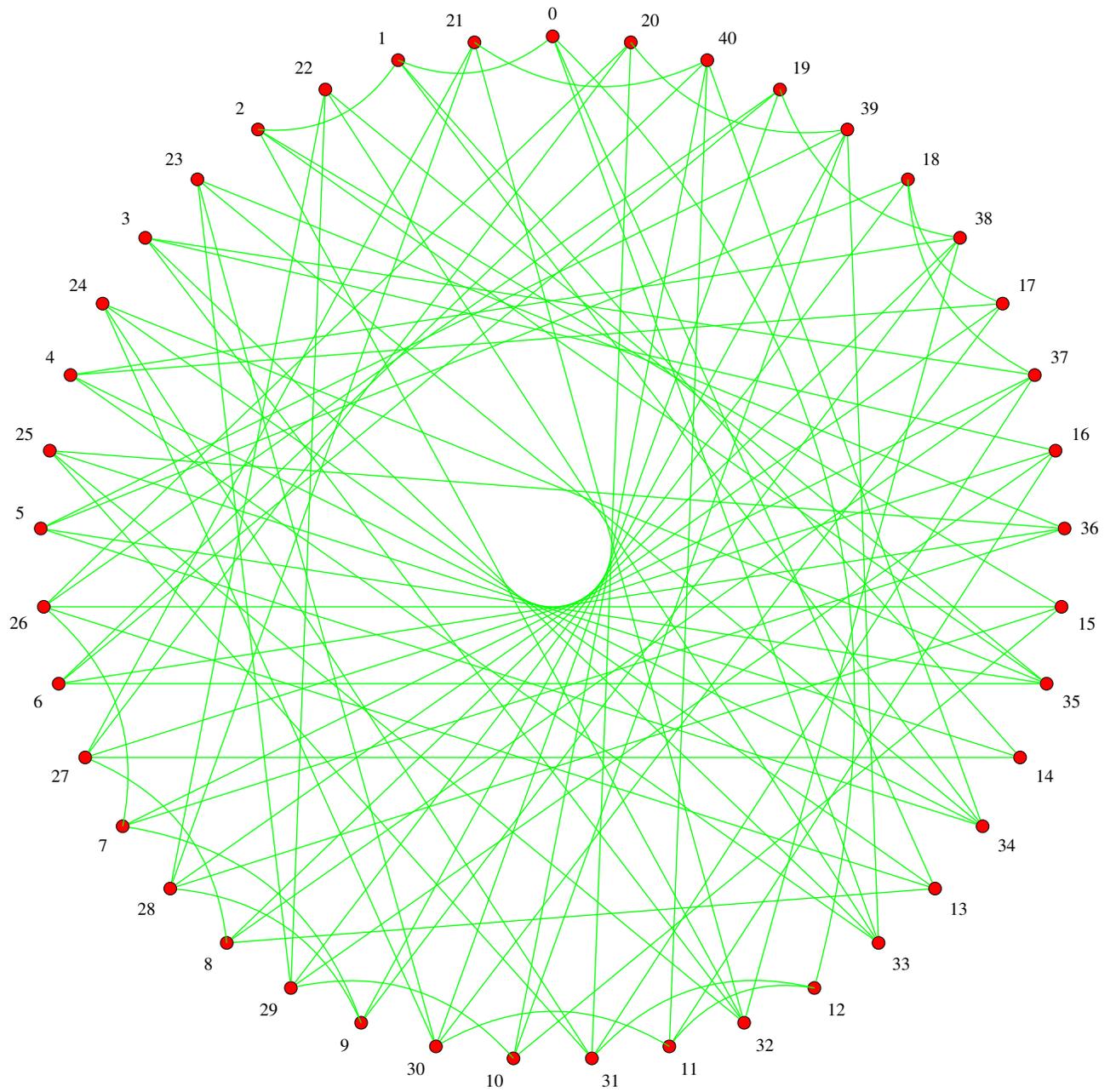


Figura 3.14: La gráfica  $G_1$

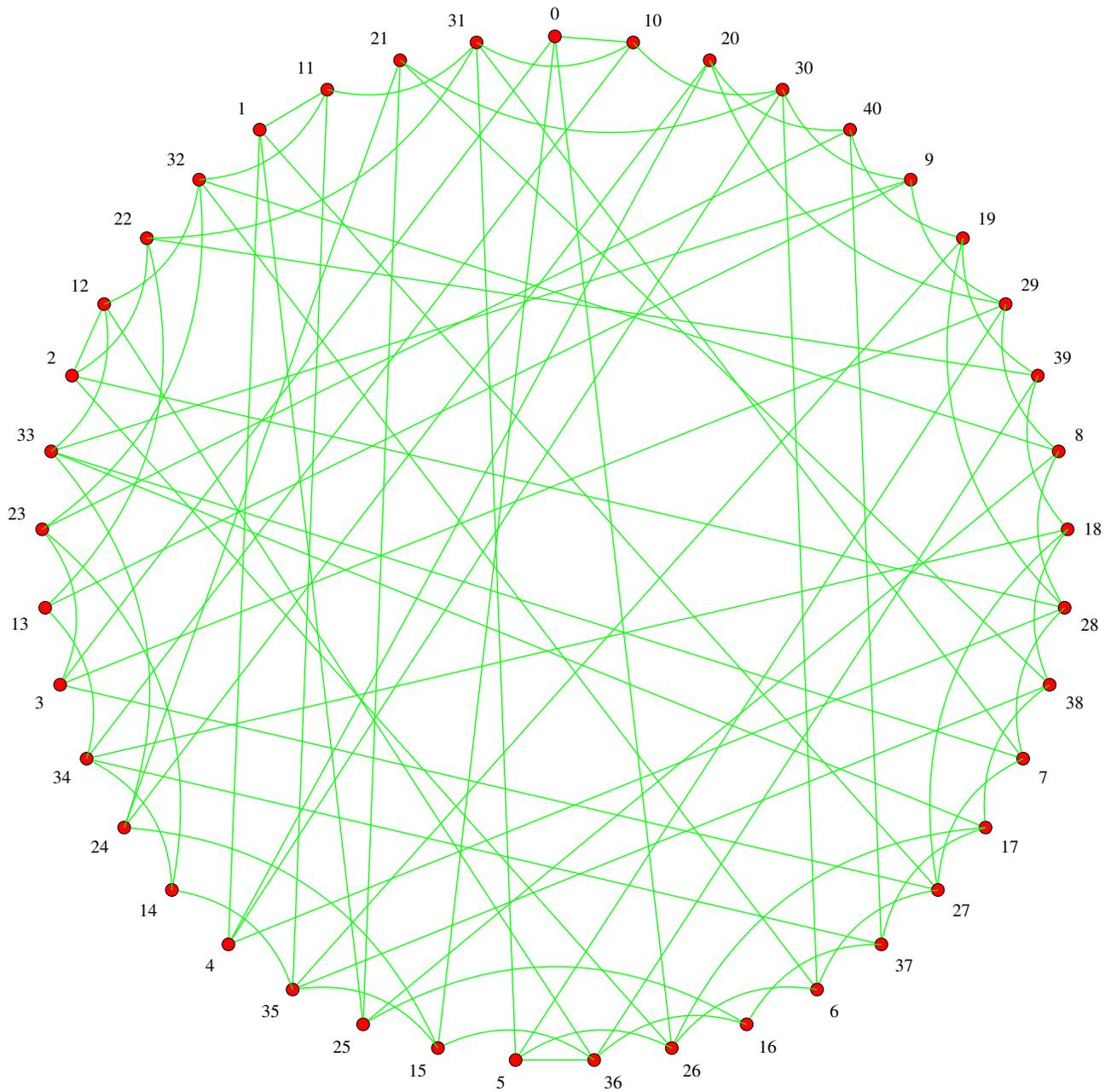


Figura 3.15: La gráfica  $G_2$

## Conclusiones

A lo largo de esta tesis, realizamos distintas construcciones y pruebas asociadas con la familia de gráficas  $B_q$  con el objetivo de encontrar gráficas maximales de orden 3250 que nos llevarán a entender un poco más acerca de la existencia de la  $(57,5)$ -jaula.

Como se probó en esta tesis, atacar este problema con esta familia de gráficas culmina con que la gráfica encontrada por C. de la Cruz Torres en [12] es regular y maximal pero no es única. Por otro lado, construimos una gráfica birregular de orden 3250 con el objetivo de acercarnos al número de aristas de la  $(57,5)$ -jaula, sin embargo aún hay una gran brecha entre el número de aristas de estas dos gráficas.

Haciendo referencia a la conjetura, me gustaría mucho que alguien la pudiera demostrar o en su defecto encontrar un contraejemplo para así dar por finalizada la tesis.

Sería interesante buscar nuevos métodos, usando planos elípticos o alguna otra geometría finita, que nos permita encontrar gráficas con mayor regularidad y 3250 vértices, sin embargo en este momento el problema continúa y no se tienen avances al respecto.

# Capítulo 5

## Anexos

### 5.1 Programa en C++ para determinar la regularidad

máxima de  $B_q^*(S, T, u)$

```
#include <iostream>
using namespace std;
#include <conio.h>
#include <fstream>
#include <stdlib.h>
#include <iomanip>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main(){

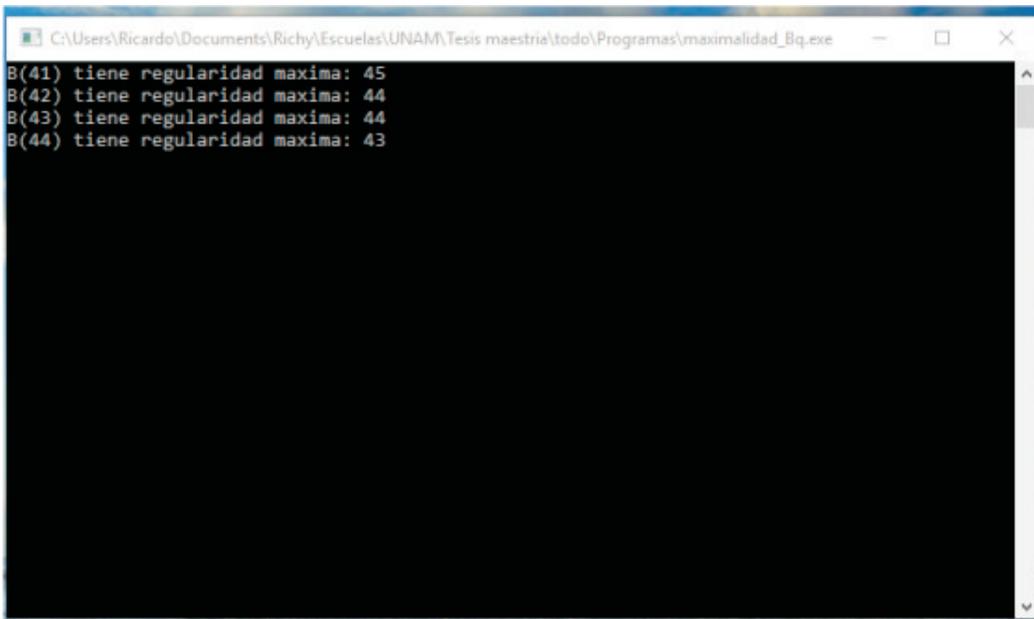
    int i;
    double maxregular_B[1626] , regular_B[1626] ;

    for(i=41;i<=1625;i++)
    {
        maxregular_B[i] = floor ( ( 1 + sqrt( 1 + 4 *
        ( i - (( 2*i*i - 2*i*floor ( (2*i*i - 3250) / (2*i) )
        - 3250) / 2) - 1 ) ) ) / 2 );

        regular_B[i] = i - floor ( (2*i*i - 3250) / (2*i) ) + maxregular_B[i];
    }
}
```

```
        if (regular_B[i] >= 43)
        {
            cout<< "B(" << i << ") tiene regularidad maxima: " <<
            regular_B[i] << endl;
        }
    }

    getch();
}
```



```
C:\Users\Ricardo\Documents\Richy\Escuelas\UNAM\Tesis maestria\todo\Programas\maximalidad_Bq.exe
B(41) tiene regularidad maxima: 45
B(42) tiene regularidad maxima: 44
B(43) tiene regularidad maxima: 44
B(44) tiene regularidad maxima: 43
```

## 5.2 Programa en C++ para verificar si el cuello de $H_1$ es 5

```
#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <fstream.h>
#include <stdlib.h>
#include <iomanip.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main(){
```

```
//----- Creacion de la grafica H1 para B_41 -----  
  
double **aristaH1;  
int i,j;  
  
aristaH1 = new double * [26];  
  
for (i=0;i<26;i++)  
{  
aristaH1[i]= new double[26];  
}  
  
for (i=0;i<26; i++)  
{  
for (j=0;j<26;j++)  
    {  
        aristaH1[i][j]=0;  
    }  
}  
  
//-----  
//----- Conjunto A1 de H1 -----  
//-----  
  
for (i=0; i<=11; i++)  
{  
aristaH1[i][i+1] = 1;  
    aristaH1[i+1][i] = 1;  
}  
  
aristaH1[12][0]=1;  
aristaH1[0][12]=1;  
  
//-----  
//----- Conjunto A2 de H1 -----  
//-----  
  
for (i=13; i<=23; i++)  
{  
aristaH1[i][i+2] = 1;  
    aristaH1[i+2][i] = 1;  
}
```

```
aristaH1[24][13]=1;
aristaH1[13][24]=1;

aristaH1[14][25]=1;
aristaH1[25][14]=1;

//-----
//----- Conjunto A3 de H1 -----
//-----

for (i=0; i<=12; i++)
{
j=i+13;
aristaH1[i][j]=1;
    aristaH1[j][i]=1;
}

//-----
//----- otras aristas
//-----

for (i=0; i<=7; i++)
{
aristaH1[i][i+18]=1;
    aristaH1[i+18][i]=1;
}

for (i=8; i<=12; i++)
{
aristaH1[i][i+5]=1;
    aristaH1[i+5][i]=1;
}

//-----
//----- Checar el cuello 5 de la grafica -----
//-----

int aux=26,k,cont=0;

for (i=0;i<aux;i++)
{
```

```
for (j=i+1;j<aux;j++)
{
    for (k=j+1;k<aux;k++)
    {
        if(aristaH1[i][j] == 1 && aristaH1[j][k] == 1
            && aristaH1[i][k] == 1)
        {
            cout<< "Hay un triangulo";
            cont=1;
            cout<< endl << i << " " << j << " " << k <<endl;
        }
    }
}

if (cont == 0)
{
    cout<<" No hay triangulos en H1";
}

int l;

aux=26;
cont=0;

for (i=0;i<aux;i++)
{
    for (j=i+1;j<aux;j++)
    {
        for (k=j+1;k<aux;k++)
        {
            for(l=k+1;l<aux;l++)
            {
                if(aristaH1[i][j] == 1 && aristaH1[j][k] == 1
                    && aristaH1[k][l] == 1 && aristaH1[i][l] == 1)
                {
                    cout<< "Hay un cuadrado";
                    cont=1;
                    cout<<endl<<i<<" "<<j<<" "<<k<<" "<<l<<endl;
                }
                else if(aristaH1[i][j] == 1 && aristaH1[l][k] == 1
                    && aristaH1[j][l] == 1 && aristaH1[i][k] == 1)
                {
```

```
        cout<< "Hay un cuadrado";
        cont=1;
        cout<<endl<<i<<" "<<j<<" "<<l<<" "<<k<<endl;
    }
    else if(aristaH1[i][l] == 1 && aristaH1[j][k] == 1
            && aristaH1[i][k] == 1 && aristaH1[j][l] == 1)
    {
        cout<< "Hay un cuadrado";
        cont=1;
        cout<<endl<<i<<" "<<l<<" "<<j<<" "<<k<<endl;
    }
    }
}

if (cont == 0)
{
    cout<<endl<<" No hay cuadrados en H1";
}

getch();

}
```

# Bibliografía

- [1] ABREU, M., ARAUJO-PARDO, G., BALBUENA, C., LABBATE, D. (2012). *Families of small regular graphs of girth 5*. Discrete Mathematics. 312, pp. 2832-2842.
- [2] ABREU, M., ARAUJO-PARDO, G., BALBUENA, C., LABBATE, D., LÓPEZ-CHÁVEZ, G. (2013). *Birregular cages of girth 5*. Electronic Journal of Combinatorics Vol. 20, Issue 1, pp. 71.
- [3] ARAUJO-PARDO, G., BALBUENA, C., GARCÍA-VAZQUEZ, P., MARCOTE, X., VALENZUELA, J. C. (2008). *On the order of  $(\{r, m\}; g)$ -cages of even girth*. Discrete Mathematics 308 pp. 2484-2491.
- [4] ARAUJO-PARDO, G., BALBUENA, C., VALENZUELA, J. C. (2009). *Construccions of birregular cages*. Discrete Mathematics 309 pp. 1409-1416.
- [5] ARAUJO-PARDO, G., VILLAROEL-FLORES, R. (2007). *Almost regular cages*. International Mathematical Forum 2, no. 59, pp. 2911-2917.

- 
- [6] BALBUENA, C., SALAS, J. (2015). *On a conjecture on the order of cages with given girth pair* Discrete Applied Math Vol. 190-191, pp. 24-33.
- [7] BANNAI, E., ITO, T. (1973). *On finite Moore graphs*. J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. 1A, 20, pp. 191-208.
- [8] BIGGS, N. (1996). *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, New York.
- [9] BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. Springer.
- [10] CHARTRAND, G., GOULD, R. J., KAPOOR, S. F. (1981). *Graphs with prescribed degree set and girth*. Period Math Hungar 6, pp. 261 - 266.
- [11] DAMERELL, R. M. (1973). *On Moore graphs*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 74, pp. 227-236.
- [12] DE LA CRUZ TORRES, C. *Tesis de licenciatura Un acercamiento a la (57,5)-jaula*. México, D.F.
- [13] EXOO, G., JAJCAY, R. (2013). *Dynamic Cage Survey. Version 3*. The electronic journal of combinatorics, vol. 15
- [14] FUNK, M. (2009). *Girth 5 graphs from elliptic semiplanes*. Note Mat. 29 (suppl. 1), pp. 91-114.
- [15] JORGENSEN, L. (2005). *Girth 5 graphs from difference set*. Discrete Math. 293, pp. 177-184.

- [16] SACHS, H. (1963). *Regular graphs with given girth and restricted circuits*. J. London Math. Soc. 38, pp. 423-429.