



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

GRÁFICAS HIPOHAMILTONIANAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:

MARÍA TERESA IDSKJEN HOEKSTRA MENDOZA.

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA.



Ciudad Universitaria  
CIUDAD DE MÉXICO

FEBRERO, 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Gráficas hipohamiltonianas.

por

María Teresa Idskjen Hoekstra Mendoza.

Tesis presentada para obtener el grado de

Matemático

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Febrero, 2017

# Hoja de datos del jurado

## 1. Datos del alumno

Hoekstra

Mendoza

María Teresa Idskjen

36 03 87 28

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

309192310

## 2. Datos del tutor

Dra.

Zuazua

Vega

Rita Esther

## 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Llano

Pérez

Bernardo

## 4. Datos del sinodal 2

M. en C.

Javier

Nol

Nahid Yelene

5. Datos del sinodal 3

Mat.

García

Buendía

Karina

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Figueroa

Gutiérrez

Ana Paulina

7. Datos del trabajo escrito

Gráficas hipohamiltonianas

65. p

2017

# Agradecimientos

Agradezco a Rita por aceptar ser mi tutora, dirigir este trabajo y permitirme participar en los talleres que ella organiza donde tuve la oportunidad de avanzar con la tesis.

Agradezco a los sinodales: Dr. Bernardo, M. en C. Nahid, Mat. Karina y Dra. Paulina por revisar y corregir este trabajo.

También agradezco al proyecto Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica, PAPIIT IN-114415 por financiar esta tesis.

# Índice general

<b>1. Definiciones.</b>	<b>9</b>
<b>2. Gráficas hipohamiltonianas de orden mínimo.</b>	<b>13</b>
<b>3. Gráficas hipohamiltonianas grandes.</b>	<b>42</b>
3.1. Las gráficas $G_t(m)$ . . . . .	42
3.2. Las gráficas $G_t(m, n)$ . . . . .	45
3.3. Construcción de Thomassen. . . . .	54
<b>4. Contraejemplos para algunas conjeturas.</b>	<b>59</b>

# Introducción.

Una gráfica  $G$  es hamiltoniana si tiene un ciclo hamiltoniano, es decir, existe un ciclo que recorre todos sus vértices. En este trabajo estamos enfocados en el estudio de las gráficas hipohamiltonianas, gráficas que no son hamiltonianas, pero tienen la propiedad de que al remover cualquiera de sus vértices se vuelven hamiltonianas.

Los primeros estudios que conocemos sobre las gráficas hipohamiltonianas datan de los años sesenta, ver por ejemplo, Sousselier [S] y Gaudin, Herz y Rossi [GHR].

El trabajo consiste de cuatro capítulos.

En el primer capítulo daremos las definiciones básicas y resultados sobre teoría de las gráficas que consideramos conveniente recordar.

En el segundo capítulo presentamos pruebas completas de los siguientes resultados: Si  $G$  es una gráfica hipohamiltoniana de orden  $n$ , entonces  $n \geq 10$ . Además, salvo isomorfismo, la gráfica de Petersen es la única gráfica hipohamiltoniana de orden 10. También demostramos que no existen gráficas hipohamiltonianas de ordenes 11 y 12.

En el tercer capítulo, basándonos en el trabajo de Doyen y van Diest [DV], se da la construcción de tres familias infinitas de gráficas hipohamiltonianas de orden  $3k + 1$  ( $k \geq 3$ ),  $3k$  ( $k \geq 5$ ) y  $5k$  ( $k > 4$ ), respectivamente. Veremos también la construcción que dio Thomassen en [T1] para construir una nueva gráfica hipohamiltoniana a partir de otras dos. Se utiliza lo anterior para demostrar que existen gráficas hipohamiltonianas

de orden  $n$  para todo  $n \geq 13$  si  $n \neq 14, 17$ .

Por último, en el cuarto capítulo se ven los contraejemplos que Thomassen [T2] dio a tres conjeturas formuladas por Herz, Duby y Vigué [HDV], Chvátal [Ch] y Bondy [Bo].

# Capítulo 1

## Definiciones.

En este capítulo damos un breve recordatorio sobre las definiciones básicas de teoría de las gráficas que usaremos en el resto del trabajo.

**Definición 1.0.1** Una gráfica  $G$  consta de un conjunto no vacío  $V(G)$  cuyos elementos son llamados vértices, y un conjunto  $A(G) \subset V(G) \times V(G)$  de parejas no ordenadas de vértices llamadas aristas.

El orden de  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $V(G)$  y el tamaño de  $G$  es la cantidad de aristas que tiene  $G$ .

En este texto trabajamos con gráficas de orden finito y simples, esto quiere decir que dado  $v \in V(G)$ ,  $(v, v) \notin A(G)$ . En la siguiente figura se muestran un ejemplo de una gráfica simple y una gráfica no simple.

**Definición 1.0.2** La vecindad abierta de un vértice  $v$ , denotada por  $N(v)$ , es el conjunto de vértices adyacentes a él, i.e.  $N(v) = \{x \in V(G) | (x, v) \in A(G)\}$ . La vecindad cerrada de un vértice  $v$  es  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .

**Definición 1.0.3** El grado de un vértice  $v$ , denotado por  $\delta(v)$ , es la cardinalidad de su vecindad abierta,  $\delta(v) = |N(v)|$ .

Una gráfica es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado, es  $k$ -regular si todos sus vértices tienen grado  $k$ .

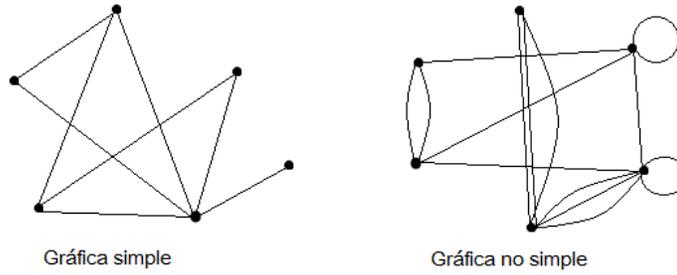


Figura 1-1: Gráfica simple y no simple

Se llaman gráficas cúbicas a las gráficas 3-regulares. Una gráfica de orden  $n$  se llama completa, y se denota como  $K_n$ , si es  $n - 1$ -regular, como se puede ver en en la siguiente figura.

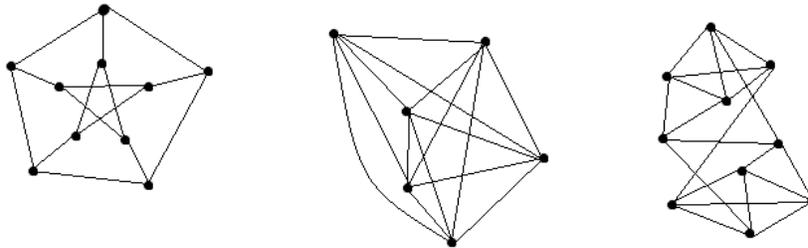


Figura 1-2: Gráficas regulares

**Definición 1.0.4** Una subgráfica  $H$  de una gráfica  $G$  es una gráfica tal que  $V(H) \subset V(G)$  y  $A(H) \subset A(G)$ .

Una subgráfica  $H$  de  $G$  es una subgráfica inducida de  $G$  si para todo  $x, y \in V(H)$ , la arista  $(x, y) \in A(H)$  si y sólo si  $(x, y) \in A(G)$ .

**Definición 1.0.5** Sea  $G$  una gráfica. Decimos que un conjunto de vértices  $B \subset V(G)$  es independiente si para todo  $x, y \in B$  la arista  $(x, y) \notin A(G)$ .

**Definición 1.0.6** Una trayectoria (de longitud  $k$ ), denotada,  $P_k$ , es una sucesión de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in V(G)$  tales que  $(v_i, v_{i+1}) \in A(G)$  para  $1 \leq i \leq k - 1$ . Donde la longitud de  $P_k$  el número de vértices que tiene la trayectoria.

Un ciclo  $(v_1v_2\dots v_k)$  (de longitud  $k$ ), denotado por  $C_k$ , es la gráfica que se obtiene al agregar la arista  $(v_k, v_1)$  a la trayectoria  $P_k$ .

El cuello de una gráfica  $G$  es la longitud del ciclo mas pequeño que contiene  $G$ .

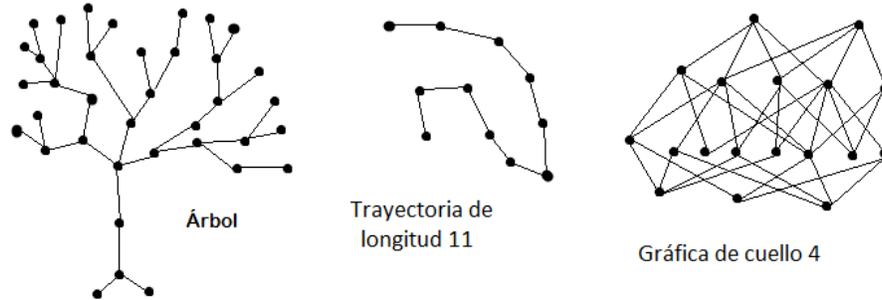


Figura 1-3: Árbol, trayectoria y gráfica de cuello 4

La gráfica de Petersen tiene dos ciclos de longitud 5 como subgráficas inducidas, y la completa  $K_6$  contiene como subgráficas inducidas todas las completas  $K_i$  con  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$  (veáanse los ejemplos de la figura 1).

**Definición 1.0.7** Una gráfica es conexa si para cualesquiera dos vértices existe una trayectoria entre ellos.

Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.

**Definición 1.0.8** Una gráfica  $G$  es  $n$ -partita si su conjunto de vértices  $V(G)$  se puede partir en  $n$  subconjuntos ajenos e independientes  $\{V_i\}_{i=1}^n$ , es decir, si  $x, y \in V_i$  entonces  $(x, y) \notin A(G)$ .

Una gráfica dos-partita se llama bipartita. La gráfica bipartita completa  $K_{p,q}$  es la gráfica bipartita de orden  $q + p$  y tamaño  $pq$ , cuyos vértices se parten en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$ , de cardinalidad  $p$  y  $q$  respectivamente y tal que para todo  $x \in V_1$  y  $y \in V_2$ , la arista  $(x, y) \in A(K_{p,q})$ .

**Definición 1.0.9** Un isomorfismo entre dos gráficas  $G$  y  $H$  es una función  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $(x, y) \in A(G)$ , si y sólo si  $(f(x), f(y)) \in A(H)$ .

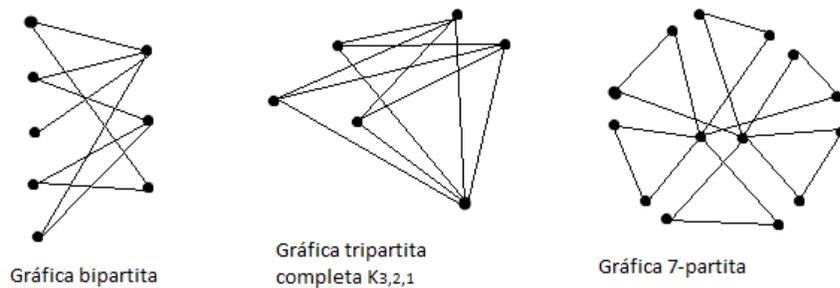


Figura 1-4: Gráficas n-partitas

**Definición 1.0.10** *Un ciclo Hamiltoniano en una gráfica  $G$  es un ciclo que pasa por todos los vértices de  $G$ .*

*Una gráfica Hamiltoniana es una gráfica que contiene como subgráfica un ciclo Hamiltoniano.*

Dado  $v \in V(G)$  denotamos por  $G - \{v\}$  a la subgráfica inducida por  $V(G) - \{v\}$ .

La siguiente definición la usaremos constantemente en los siguientes capítulos y es el objeto de estudio fundamental de este trabajo.

**Definición 1.0.11** *Una gráfica  $G = (V, A)$  es hipohamiltoniana si no es hamiltoniana pero para todo  $v \in V(G)$ , la gráfica  $G - \{v\}$  sí es hamiltoniana.*

En el capítulo 2 demostramos que la gráfica de Petersen es la gráfica hipohamiltoniana más pequeña (de orden 10) y es única salvo isomorfismo.

## Capítulo 2

# Gráficas hipohamiltonianas de orden mínimo.

En este capítulo se demuestra que no existen gráficas hipohamiltonianas de orden  $n$  con  $n \leq 9$  ni  $n = 11$  o  $12$ . Para el caso  $n = 10$  demostramos que salvo isomorfismo la única gráfica hipohamiltoniana es la gráfica de Petersen.



Figura 2-1: Gráfica no hamiltoniana y gráficas hipohamiltonianas

**Lema 2.0.12** *Sea  $G$  una gráfica hipohamiltoniana, entonces para todo  $v \in V(G)$  tenemos que  $\delta(v) \geq 3$ .*

Demostración: Supongamos que existe  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) \leq 2$  y sea  $x \in N(v)$ . Entonces en la gráfica inducida por  $V(G) - \{x\}$  tenemos que  $\delta(v) = 1$  o  $\delta(v) = 0$ , por

lo que la gráfica inducida por  $V(G) - \{x\}$  no puede ser hamiltoniana, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Observación 2.0.13** *Sea  $G$  una gráfica hipohamiltoniana,  $v \in V(G)$  y  $\gamma = (v_0v_1\dots v_p)$  un ciclo hamiltoniano en la gráfica inducida por  $V(G) - \{v\}$ , entonces  $v_i \in N(v)$  implica que  $v_{i-1}, v_{i+1} \notin N(v)$ .*

Si  $(v_{i-1}, v) \in A(G)$  entonces sustituyendo en  $\gamma$  la arista  $(v_{i-1}, v_i)$  por la trayectoria  $v_{i-1}vv_i$  obtenemos un ciclo hamiltoniano en  $G$ . Similarmente si  $(v, v_{i+1}) \in A(G)$ .

**Lema 2.0.14** *Si  $G$  es una gráfica hipohamiltoniana entonces  $\delta(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  para todo  $v \in V(G)$ .*

Demostración: Supongamos que existe un vértice  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) \geq \frac{n-1}{2}$ . Entonces  $G - \{v\}$  contiene un ciclo hamiltoniano  $\gamma$ . Como  $\delta(v) \geq \frac{n-1}{2}$ , tenemos que  $v$  es adyacente al menos a dos vértices consecutivos en  $\gamma$ , por lo que podemos extender  $\gamma$  a un ciclo hamiltoniano en  $G$  lo cual es una contradicción.  $\square$

**Lema 2.0.15** *Si  $G$  es una gráfica hipohamiltoniana cúbica entonces  $G$  no tiene triángulos.*

Demostración: Supongamos que  $G$  tiene un triángulo  $abc$ . Entonces como  $G$  es hipohamiltoniana  $G - \{a\}$  tiene un ciclo hamiltoniano  $\gamma$ . Como  $G$  es cúbica  $\gamma$  debe contener a la arista  $bc$ . Pero si la sustituimos por la trayectoria  $bac$  obtenemos un ciclo hamiltoniano en  $G$  lo cual es una contradicción.  $\square$

**Lema 2.0.16** *Si  $G$  es hipohamiltoniana entonces  $|V(G)| \geq 10$ .*

Demostración: Sea  $n = |V(G)|$ . Como ya vimos que todo vértice debe tener grado mayor o igual a 3, tenemos que  $n \geq 3$ .

Si  $n = 4$ , la única gráfica de orden 4 que cumple que  $\delta(v) \geq 3$  para todo  $v \in V(G)$  es la completa  $K_4$  que es hamiltoniana.

Si  $n = 5$ , como  $\delta(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 2$  y  $\delta(v) \geq 3$  para todo  $v \in V(G)$  claramente no existe dicha gráfica.

Si  $n = 6$ , como  $\delta(v) \leq \lfloor \frac{6-1}{2} \rfloor = 2$  y  $\delta(v) \geq 3$  para todo  $v \in V(G)$  dicha gráfica no existe.

Si  $n = 7$ , como  $\delta(v) \leq 3$  y  $\delta(v) \geq 3$  la gráfica tendría que ser cúbica pero no existe una gráfica cúbica de orden impar.

Si  $n = 8$ , tenemos que  $\delta(v) \leq 3$  por lo que  $G$  debe ser cúbica. Luego como  $G$  es hipohamiltoniana  $G - \{v\}$  tiene un ciclo hamiltoniano. Sea  $\gamma = (1234567)$  un ciclo hamiltoniano en la gráfica inducida por  $V(G) - \{8\}$ . Por la observación 2.0.13 podemos suponer que  $N(8) = \{1, 3, 5\}$ . Como  $G$  es cúbica, existe una arista incidente al vértice 2, tenemos los siguientes tres casos.

**Caso 1:** La arista  $(2, 4)$  esta en  $A(G)$ . Entonces obtenemos el ciclo hamiltoniano  $(243856712)$  en  $G$ .

**Caso 2:** La arista  $(2, 7) \in A(G)$ . Entonces tenemos el ciclo hamiltoniano  $(721834567)$  en  $G$ .

**Caso 3:** La arista  $(2, 6) \in A(G)$ . Pero esto implica que  $(4, 7) \in A(G)$ . Entonces tenemos que  $(265471832)$  es un ciclo hamiltoniano en  $G$ .

Por lo tanto, no existen gráficas hipohamiltonianas de orden 8.

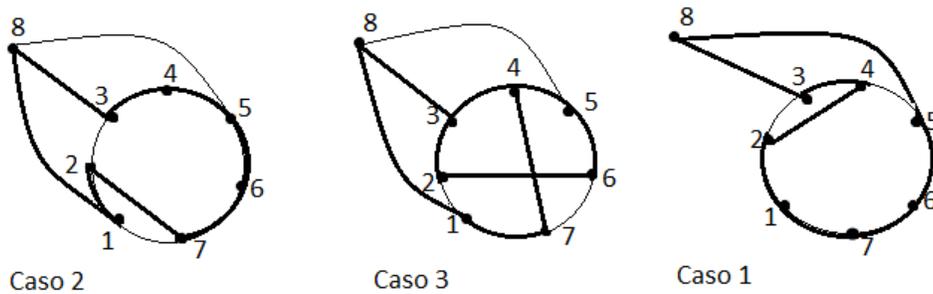


Figura 2-2: Casos  $n = 8$

Si  $n=9$  tenemos que  $\delta(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 4$ . Esto quiere decir que todo vértice tiene grado 3 o 4. Como la cantidad de vértices es impar,  $G$  no puede ser cúbica. Entonces existe un vértice  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 4$ . Sea  $\gamma = (12345678)$  un ciclo hamiltoniano en la gráfica inducida por  $V(G) - \{0\}$ .

Por la observación 2.0.13 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $N(0) = \{1, 3, 5, 7\}$ .

**Afirmación:** no hay aristas entre vértices pares. La tabla 2.1 nos muestra que todas las aristas entre vértices pares nos generan un ciclo hamiltoniano en  $G$ .

Arista que se agrega	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(2430567812)
(2, 6)	(2654307812)
(2, 8)	(8210345678)
(6, 4)	(4650781234)
(8, 4)	(8432105678)
(6, 8)	(6870123456)

Tabla 2-1: Ciclos hamiltonianos

Como los vértices pares deben tener grado al menos 3 deben ser adyacentes cada uno a un vértice impar. Como los vértices impares ya tenían grado 3, al ser adyacentes cada uno a un vértice par tendrían grado 4 por lo que ya no puede haber aristas entre los vértices impares.

En conclusión, la gráfica  $G$  debe ser bipartita, con conjuntos independientes  $V_1 = \{1, 3, 5, 7\}$  y  $V_2 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Entonces  $G - \{1\}$  es una subgráfica de  $K_{3,5}$  que no puede ser hamiltoniana, lo cual contradice que  $G$  sea hipohamiltoniana.

Por lo tanto, si  $G$  es hipohamiltoniana entonces tiene orden  $n \geq 10$ .  $\square$

Veamos ahora que existe una gráfica hipohamiltoniana de orden 10 y que es única salvo isomorfismo.

**Teorema 2.0.17** *La gráfica de Petersen es hipohamiltoniana.*

Demostración: Sea  $P$  la gráfica de Petersen, es claro que para todo  $v \in V(P)$ , la gráfica  $P - \{v\}$  tiene un ciclo hamiltoniano. Por lo tanto, para demostrar el teorema solo es necesario probar que  $P$  no es hamiltoniana.

Supongamos que  $P$  es hamiltoniana. Sea  $\gamma = (v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_{10})$  un ciclo hamiltoniano en  $P$ . Como  $P$  es cúbica  $v_1$  debe tener un tercer vecino. Como  $P$  tiene cuello 5, el tercer vecino de  $v_1$  debe ser  $v_5, v_6$  o  $v_7$ .

**Caso 1:** Supongamos que  $v_5$  o  $v_7$  es vecino de  $v_1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad, que es  $v_5$ . Como  $P$  tiene diámetro 2, los vértices  $v_7$  y  $v_8$  deben estar a distancia dos de  $v_1$ . Esto quiere decir que  $N(v_1) \cap N(v_7) \neq \emptyset$  y  $N(v_1) \cap N(v_8) \neq \emptyset$ . Luego  $v_7$  no puede ser adyacente a los vértices  $v_{10}$  y  $v_5$  ya que se formaría un ciclo de longitud menor a 5. Esto implica que  $v_8$  es adyacente a  $v_{10}$  pero nuevamente esto contradice que el cuello de  $P$  sea 5.

**Caso 2:** Si  $v_1$  es adyacente a  $v_6$ , como la distancia de  $v_4$  a  $v_1$  debe ser dos tenemos que  $v_4$  debe ser adyacente a un vecino de  $v_1$ . Pero solo puede ser adyacente a  $v_{10}$  ya que el cuello de  $P$  es 5. Análogamente  $v_2$  debe ser adyacente a  $v_8$ , luego la distancia de  $v_1$  a  $v_7$  también debe ser dos, pero todos los vecinos de  $v_2$  al ser adyacentes a  $v_5$  formarían un ciclo de longitud menor a 5. Por lo tanto  $P$  no es hamiltoniana.  $\square$

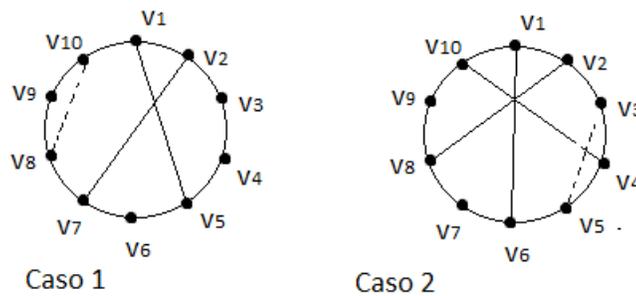


Figura 2-3: Casos para la gráfica de Petersen

**Teorema 2.0.18** Si  $G$  es una gráfica hipohamiltoniana de orden 10 entonces  $G$  es iso-

morfa a la gráfica de Petersen.

Demostración: Sea  $G$  una gráfica hipohamiltoniana de orden 10, por los lemas anteriores tenemos que  $\delta(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 4$ .

Supongamos que existe  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 4$ . Sin pérdida de generalidad sea  $v = 0$ , entonces la gráfica inducida por  $V(G) - \{0\}$  tiene un ciclo hamiltoniano  $\gamma = (123456789)$ . Por la observación 2.0.13, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $N(0) = \{1, 3, 5, 7\}$ .

**Afirmación:** El conjunto  $\{2, 4, 6, 8\}$  es un conjunto independiente. En la tabla 2.2 podemos ver que cualquier arista entre los vértices de este conjunto nos genera un ciclo hamiltoniano.

Arista que se agrega	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(42301987654)
(2, 6)	(62345019876)
(2, 8)	(82345670198)
(6, 4)	(64503219876)
(8, 4)	(84567032198)
(6, 8)	(86705432198)

Tabla 2-2: Ciclos hamiltonianos

**Afirmación:**  $N(9) \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{8\}$ .

La arista (2, 9) nos da el ciclo (92103456789) en  $G$ .

La arista (9, 4) nos da el ciclo (94321056789) en  $G$ .

La arista (6, 9) nos da el ciclo (96543210789) en  $G$ .

Como  $\delta(0) = 4$  y por ser  $G$  hipohamiltoniana el grado de  $v$  en  $G$  es mayor o igual que 3 para todo  $v$ , una cuenta simple nos demuestra que el número de aristas en  $G$  entre los conjuntos de vértices  $\{2, 4, 6, 8, 9\}$  y  $\{1, 3, 5, 7\}$  es mayor o igual que 14. Por lo tanto existe un vértice  $v \in \{1, 3, 5, 7\}$  con grado mayor o igual que 5 (contando a su vecino el vértice 0).

Por lo tanto, para todo  $v \in V(G)$ ,  $\delta(v) = 3$ , es decir,  $G$  es una gráfica cúbica.

Sea  $\gamma = (123456789)$  un ciclo hamiltoniano en la gráfica inducida por  $V(G) - \{0\}$ . Por la observación 2.0.13 el vértice 0 no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos en  $\gamma$ .

Entonces tenemos 3 casos.

**Caso 1:**  $N(0) = \{1, 3, 5\}$ .

Observemos que las siguientes aristas no pueden estar en  $G$ .

La arista  $(2, 4)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(24305678912)$  en  $G$ .

La arista  $(2, 6)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(26789105432)$  en  $G$ .

La arista  $(2, 9)$  implica que las aristas  $(6, 8)$  y  $(7, 4)$  también están en  $G$ . Pero con estas obtenemos el ciclo hamiltoniano  $(47689123054)$  en  $G$ .

Para la arista  $(2, 8)$  tenemos dos casos:

**1)** Las aristas  $(9, 7)$  y  $(6, 4)$  están en  $G$ , lo que nos da el ciclo hamiltoniano  $(64503219876)$  en  $G$ .

**2)** Las aristas  $(9, 6)$  y  $(7, 4)$  están en  $G$ , lo que nos da el ciclo hamiltoniano  $(28743056912)$  en  $G$ .

Para la arista  $(2, 7)$  también tenemos dos casos:

**1)** Las aristas  $(4, 9)$  y  $(6, 8)$  están en  $G$ , lo cual nos da el ciclo hamiltoniano  $(72194305687)$  en  $G$ .

**2)** Las aristas  $(9, 6)$  y  $(8, 4)$  están en  $G$ , con lo que obtenemos el ciclo hamiltoniano  $(7219650487)$  en  $G$ .

Como los vértices 1, 3 y 5 ya tienen grado 3 no pueden ser adyacentes a ningún otro vértice. Con esto hemos demostrado que el vértice 2 solo puede tener grado 2, lo cual es una contradicción.

**Caso 2:**  $N(0) = \{1, 3, 6\}$ .

Notemos que las siguientes aristas no pueden estar en  $G$ .

La arista  $(2, 4)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(42301987654)$  en  $G$ .

La arista  $(2, 5)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(25430678912)$  en  $G$ .

La arista  $(2, 9)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(92103456789)$  en  $G$ .

Para la arista  $(2, 8)$  tenemos dos casos:

1) Las aristas  $(5, 9)$  y  $(4, 7)$  están en  $G$ . Esto nos da el ciclo hamiltoniano  $(82195430678)$  en  $G$ .

2) Las aristas  $(7, 5)$  y  $(4, 9)$  están en  $G$ . Esto nos da el ciclo hamiltoniano  $(75603491287)$  en  $G$ .

Para la arista  $(2, 7)$  también tenemos dos casos:

1) Las aristas  $(8, 4)$  y  $(9, 5)$  están en  $G$ . Esto nos da el ciclo hamiltoniano  $(27843065912)$  en  $G$ .

2) Las aristas  $(8, 5)$  y  $(9, 4)$  están en  $G$ . Esto nos da el ciclo hamiltoniano  $(78560349127)$  en  $G$ .

Con esto hemos demostrado que el vértice 2 tiene grado 2, lo cual es una contradicción.

**Caso 3:**  $N(0) = \{1, 4, 7\}$ . Como los vértices que aún tienen grado 2 son 6, nos falta agregar 3 aristas. Veamos que sólo hay una única posibilidad. En la tabla 2.3 podemos ver cuáles combinaciones de 3 aristas nos generan un ciclo hamiltoniano.

Arista que se agrega	Ciclo hamiltoniano formado
$(2, 9), (3, 5), (8, 6)$	$(92104356789)$
$(2, 9), (3, 6), (8, 5)$	$(85670432198)$
$(2, 8), (3, 5), (9, 6)$	$(96534078219)$
$(2, 8), (9, 5), (3, 6)$	$(36540789123)$
$(2, 6), (3, 9), (8, 5)$	$(93456210789)$
$(2, 5), (3, 8), (6, 9)$	$(10432567891)$
$(2, 5), (3, 9), (8, 6)$	$(25678934012)$

Tabla 2-3: Ciclos hamiltonianos

Por lo tanto, la única opción es que las 3 aristas que faltaban sean  $(2, 6)$ ,  $(3, 8)$  y  $(5, 9)$ . Considerado todas las aristas que se encontraron con el análisis anterior, obtenemos la gráfica  $G$ , que claramente es isomorfa a la gráfica de Petersen.  $\square$

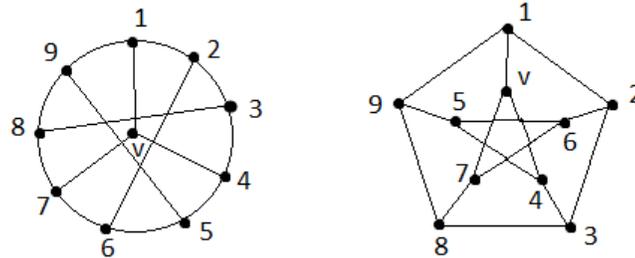


Figura 2-4: Gráfica obtenida  $G$  y la gráfica de Petersen

Los siguientes lemas serán de gran utilidad para la demostración de los teoremas 2.0.21 y 2.0.22.

**Lema 2.0.19** *Si  $G$  es una gráfica tal que  $V(G) = X \cup Y$  donde  $X$  es un subconjunto independiente de cardinalidad  $m$  y  $Y$  es de cardinalidad  $k$  con  $m > k$ , entonces  $G$  no es hamiltoniana.*

Demostración: Supongamos que  $G$  es hamiltoniana y sea  $\gamma$  un ciclo hamiltoniano en  $G$ . Como  $X$  es independiente tiene que haber  $2m$  aristas de  $X$  a  $Y$  en  $\gamma$ . Pero esto implica que existe un vértice  $z \in Y$  tal que  $\delta(z) > 2$  en  $\gamma$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $G$  no es hamiltoniana.  $\square$

**Lema 2.0.20** *Sea  $G$  una gráfica con  $V(G) = V_1 \cup V_2$  donde  $V_1$  y  $V_2$  son tales que  $|V_1| < |V_2| - |A(V_2)|$ . Entonces  $G$  no es hamiltoniana.*

Demostración: Supongamos lo contrario y sea  $\gamma$  un ciclo hamiltoniano en  $G$ . Sea  $k$  la cantidad de aristas del conjunto  $A(V_2)$  que están en  $\gamma$ . Sea  $t$  la cantidad de aristas entre

los conjuntos  $V_2$  y  $V_1$  que están en  $\gamma$ . Entonces  $t = 2|V_2| - 2k$ . Como  $k \leq |A(V_2)|$  tenemos que  $t \geq 2|V_2| - 2|A(V_2)| > |V_1|$ . Entonces como  $t$  es mayor que  $|V_1|$  tenemos que existe un vértice  $z \in V_1$  tal que  $\delta(z) \geq 3$  en  $\gamma$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $G$  no es hamiltoniana.  $\square$

**Teorema 2.0.21** *No existen gráficas hipohamiltonianas con 11 vértices.*

Demostración: Supongamos lo contrario y sea  $G$  una gráfica hipohamiltoniana de 11 vértices.

**Caso 1:** Existe un vértice  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 5$ . Sea  $v = v_0$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $N(v_0) = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9\}$ .

**Afirmación:** El subconjunto  $B = \{v_{10}, v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$  es un conjunto independiente en  $G$ . En la tabla 2.4 podemos ver que cualquier arista entre vértices del subconjunto  $B$  nos genera un ciclo hamiltoniano.

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
$(v_2, v_4)$	$(v_4v_2v_3v_0v_{10}v_9v_8v_7v_6v_5v_4)$
$(v_2, v_6)$	$(v_6v_2v_3v_4v_5v_0v_1v_{10}v_9v_8v_7v_6)$
$(v_2, v_8)$	$(v_8v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_0v_1v_{10}v_9)$
$(v_2, v_{10})$	$(v_{10}v_2v_1v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_{10})$
$(v_4, v_6)$	$v_6v_4v_5v_0v_3v_2v_1v_{10}v_9v_8v_7v_6)$
$(v_4, v_8)$	$(v_8v_4v_5v_6v_7v_0v_3v_2v_1v_{10}v_9v_8)$
$(v_4, v_{10})$	$(v_{10}v_4v_3v_2v_1v_0v_5v_6v_7v_8v_9v_{10})$
$(v_6, v_8)$	$(v_8v_6v_7v_0v_5v_4v_3v_2v_1v_{10}v_9v_8)$
$(v_6, v_{10})$	$(v_{10}v_6v_7v_8v_9v_0v_5v_4v_3v_2v_1v_{10})$
$(v_8, v_{10})$	$(v_8v_{10}v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_0v_9v_8)$

Tabla 2-4: Ciclos hamiltonianos

Por lo tanto, el conjunto  $B$  es independiente y como  $|B| = 6$  y  $|V(G) - \{1\}| = 10$ , por el lema 2.0.19 esto es una contradicción.

**Caso 2:**  $G$  no tiene vértices de grado 5.

Como  $G$  no es cúbica, existe  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 4$ .

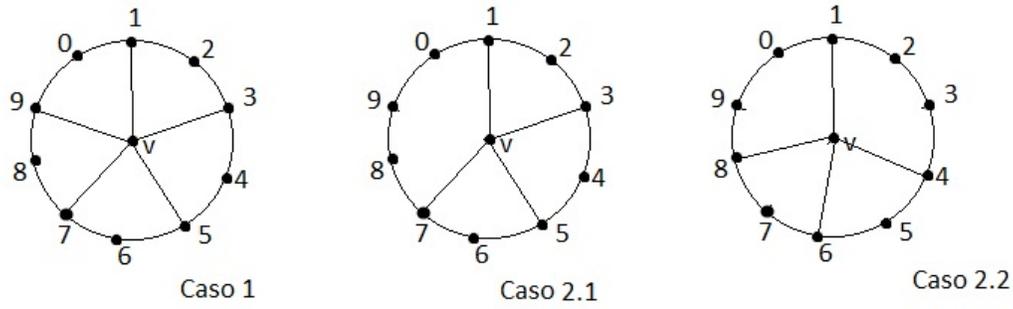


Figura 2-5: Casos  $n = 11$

Sea  $\gamma = (v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_{10})$  un ciclo hamiltoniano en  $G - \{v_0\}$ . Por la observación 2.0.13 tenemos que  $v$  no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos en  $\gamma$ . Entonces tenemos dos subcasos:

**Caso 2.1**  $N(v_0) = \{1, 3, 5, 7\}$ . Sea  $J = \{v_{10}, v_2, v_4, v_6, v_8, v_0\}$ , la tabla 2.5 nos demuestra que la única arista posible entre los vértices de  $J$  es  $(v_8, v_{10})$ .

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
$(v_2, v_4)$	$(v_4 v_2 v_3 v_0 v_1 v_{10} v_9 v_8 v_7 v_6 v_5 v_4)$
$(v_2, v_6)$	$(v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_0 v_7 v_8 v_9 v_{10} v_1 v_2)$
$(v_2, v_8)$	$(v_8 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_0 v_1 v_{10} v_9 v_8)$
$(v_2, v_{10})$	$(v_{10} v_2 v_1 v_0 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_{10})$
$(v_4, v_6)$	$(v_6 v_4 v_5 v_0 v_3 v_2 v_1 v_{10} v_9 v_8 v_7 v_6)$
$(v_4, v_8)$	$(v_8 v_4 v_5 v_6 v_7 v_0 v_3 v_2 v_1 v_{10} v_9 v_8)$
$(v_6, v_8)$	$(v_8 v_6 v_7 v_0 v_5 v_4 v_3 v_2 v_1 v_{10} v_9 v_8)$

Tabla 2-5: Ciclos hamiltonianos

Entonces tenemos que  $V(G) \setminus \{v_9\} = J \cup N(v_0)$  con  $4 = |N(v_0)| < |J| - 1 = 5$ , y por el lema 2.0.20 la gráfica  $G - \{v_9\}$  no es hamiltoniana lo cual contradice que  $G$  sea hipohamiltoniana.

**Caso 2.2**  $N(v_0) = \{v_1, v_4, v_6, v_8\}$ .

Veamos como pueden ser las vecindades de los vértices en  $G - N(v_0)$ .

- $N(v_2) \subset \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$  ya que:

La arista  $(v_2, v_5)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_5v_2v_3v_4v_0v_1v_{10}v_9v_8v_7v_6v_5)$  en  $G$ .

La arista  $(v_2, v_7)$  genera ciclo hamiltoniano  $(v_7v_2v_3v_4v_5v_6v_0v_1v_{10}v_9v_8v_7)$  en  $G$ .

La arista  $(v_2, v_9)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_2v_9v_{10}v_1v_0v_8v_7v_6v_5v_4v_3v_2)$  en  $G$ .

- $N(v_3) \subset \{v_2, v_4, v_1, v_6, v_8, v_9\}$  ya que:

La arista  $(v_3, v_5)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_3v_5v_4v_0v_6v_7v_8v_9v_{10}v_1v_2v_3)$  en  $G$ .

La arista  $(v_3, v_7)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_3v_7v_6v_5v_4v_0v_8v_9v_{10}v_1v_2v_3)$  en  $G$ .

La arista  $(v_3, v_{10})$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_{10}v_3v_2v_1v_0v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_{10})$  en  $G$ .

- $N(v_5) \subset \{v_4, v_6, v_1, v_8\}$  ya que:

La arista  $(v_5, v_7)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_7v_5v_6v_0v_4v_3v_2v_1v_{10}v_9v_8v_7)$  en  $G$ .

La arista  $(v_5, v_9)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_9v_5v_6v_7v_8v_0v_4v_3v_2v_1v_{10}v_9)$  en  $G$ .

La arista  $(v_5, v_{10})$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_5v_0v_9v_8v_7v_6v_0v_4v_3v_2v_1v_{10})$  en  $G$ .

- $N(v_7) \subset \{v_6, v_8, v_4, v_1\}$  ya que:

La arista  $(v_7, v_9)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_9v_7v_8v_0v_6v_5v_4v_3v_2v_1v_{10}v_9)$  en  $G$ .

La arista  $(v_7, v_{10})$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_7v_{10}v_9v_8v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7)$  en  $G$ .

**Afirmación:** La subgráfica inducida por  $V(G) - N(v_0)$  tiene únicamente dos aristas que pertenecen a  $\gamma$ .

Por como son las vecindades de los vertices de  $G - N(v_0)$ , las únicas dos aristas que pueden existir fuera de  $\gamma$  son  $(v_{10}, v_2)$  y  $(v_9, v_3)$ .

- Supongamos que existe la arista  $(v_{10}, v_2)$  y veamos cual puede ser el tercer vecino del vértice 9.

La arista  $(v_9, v_3)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(v_1v_{10}v_2v_3v_9v_8v_7v_6v_5v_4v_0v_1)$  en  $G$ .

La arista  $(v_9, v_4)$  implica que tenemos las aristas  $(v_7, v_1)$ ,  $(v_5, v_8)$  y  $(v_3, v_6)$  lo cual nos da el ciclo hamiltoniano  $(v_1v_7v_8v_9v_{10}v_2v_3v_4v_5v_6v_0v_1)$  en  $G$ .

Las aristas  $(v_9, v_5)$ ,  $(v_9, v_2)$  y  $(v_9, v_7)$  ya habíamos visto que nos producian ciclos hamiltonianos en  $G$ .

La arista  $(v_9, v_6)$  implica que tenemos las aristas  $(v_3, v_8)$ ,  $(v_1, v_5)$  y  $(v_7, v_4)$  lo cual nos da el ciclo hamiltoniano  $(v_1v_5v_4v_3v_2v_{10}v_9v_8v_7v_6v_0v_1)$  en  $G$ .

La arista  $(v_9, v_1)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(v_1v_9v_{10}v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_0v_1)$ .

Concluimos que no puede existir la arista  $(v_{10}, v_2)$ .

- Supongamos que tenemos la arista  $(v_9, v_3)$ . Ya vimos que no puede existir la arista  $(v_{10}, v_2)$  y tambien ya habiamos visto que las aristas  $(v_{10}, v_3)$ ,  $(v_{10}, v_5)$  y  $(v_{10}, v_7)$  nos daban ciclos hamiltonianos en  $G$ .

La arista  $(v_{10}, v_4)$  implica que tenemos las aristas  $(v_7, v_1)$ ,  $(v_5, v_8)$  y  $(v_2, v_6)$  pero esto nos da el ciclo hamiltoniano  $(v_1v_2v_3v_9v_{10}v_4v_5v_6v_7v_8v_0v_1)$  en  $G$ .

La arista  $(v_{10}, v_6)$  implica que tenemos las aristas  $(v_2, v_4)$ ,  $(v_7, v_1)$  y  $(v_8, v_5)$  en  $G$  lo cual nos da el ciclo hamiltoniano  $(v_6v_{10}v_9v_3v_2v_1v_7v_8v_5v_4v_0v_6)$  en  $G$ .

La arista  $(v_{10}, v_8)$  implica que tenemos las aristas  $(v_5, v_1)$ ,  $(v_7, v_4)$  y  $(v_2, v_6)$  en  $G$  lo cual nos da el ciclo hamiltoniano  $(v_2v_3v_9v_{10}v_8v_7v_6v_5v_4v_0v_1)$ .

En conclusión las únicas aristas que hay en  $G - N(v_0)$  son  $(v_2, v_3)$  y  $(v_9, v_{10})$ .

El conjunto  $G - N(v_0) = J$  tiene orden 7 y hay únicamente dos aristas ajenas entre sus vértices. Entonces tenemos que  $V(G) - \{v_1\} = J \cup \{v_4, v_6, v_8\}$  donde  $3 \leq |J| - 2 = 5$  y por el lema 2.0.20 la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no puede ser hamiltoniana lo cual contradice que  $G$  es hipohamiltoniana.  $\square$

Para finalizar este capítulo, veremos que no existen gráficas hipohamiltonianas de orden 12. Hemos dividido la prueba en dos teoremas, el caso en que  $G$  sea cúbica y el caso en que no.

**Teorema 2.0.22** *No existe una gráfica hipohamiltoniana cúbica de orden 12.*

Demostración: Supongamos que  $G$  es una gráfica hipohamiltoniana cúbica de orden 12, con  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 0', 1'\}$ .

Sea  $0' \in V(G)$ . Entonces existe un ciclo hamiltoniano  $\gamma$  en la gráfica inducida por  $V(G) - \{0'\}$ . Sea  $\gamma = (12345678901')$ . Entonces tenemos 5 casos:

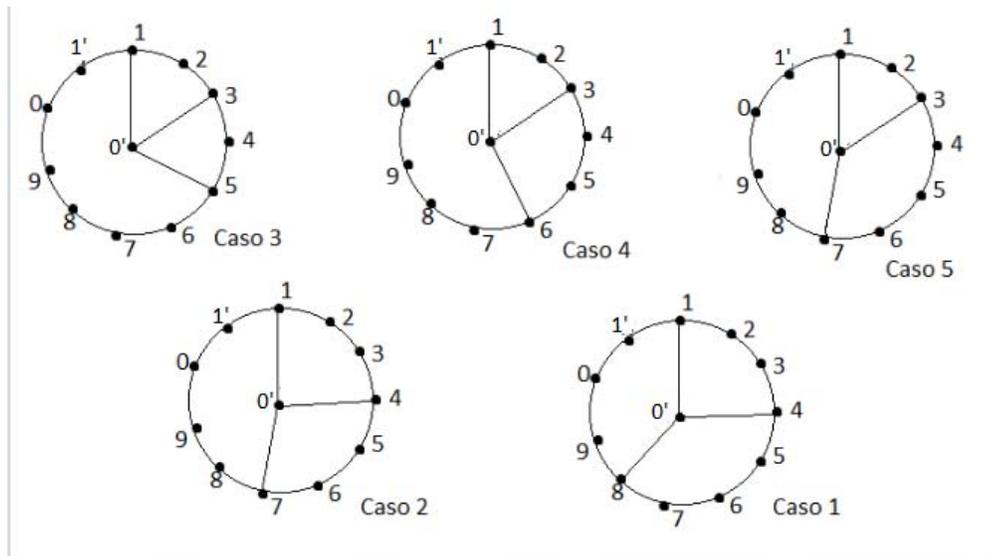


Figura 2-6: Los 5 casos para  $n=12$

**Caso 1:**  $N(0') = \{1, 4, 8\}$

Veamos como pueden ser las vecindades de los otros vértices para determinar cuales pueden ser las 4 aristas que faltan:

- $N(2) \subset \{1, 3, 6, 7, 0\}$  ya que:

La arista  $(2, 5)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(52340'11'098765)$ .

La arista  $(2, 9)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(2901'10'8765432)$ .

La arista  $(2, 1')$  genera el triángulo  $11'2$ .

- $N(3) \subset \{2, 4, 6, 9, 0\}$  ya que:

La arista  $(3, 5)$  genera un triángulo,

La arista  $(3, 7)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(376540'8901'123)$ .

La arista  $(3, 1')$  genera el ciclo hamiltoniano  $(1'3210'45678901')$ .

- $N(5) \subset \{4, 6, 0, 1'\}$  ya que:

La arista  $(5, 7)$  genera un triángulo

La arista  $(5, 9)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(956780'43211'09)$ .

- $N(6) \subset \{5, 7, 2, 3, 9, 0, 1'\}$ .

- $N(7) \subset \{6, 8, 2, 0\}$  ya que:

La arista  $(7, 9)$  genera un triángulo

La arista  $(7, 1')$  genera el ciclo hamiltoniano  $(1'76543210'8901')$ .

- $N(9) \subset \{8, 0, 3, 6, \}$  ya que la arista  $(9, 1')$  forma un triángulo.

- $N(0) \subset \{1', 9, 7, 6, 3, 2\}$ .

- $N(w) \subset \{1, 0, 5, 6\}$ .

Tenemos dos subcasos:

**Subcaso 1:** Existe la arista  $(2, 7)$ . Entonces pueden existir las aristas  $(1', 6)$  o  $(1', 5)$ . Si existe la arista  $(1', 6)$  tenemos que deben existir las aristas  $(9, 3)$  y  $(5, 0)$ . Pero esto nos da el ciclo hamiltoniano  $(1'6723450980'11')$  en  $G$  lo cual es una contradicción.

Si existe la arista  $(1', 5)$  tenemos dos opciones:

Existen las aristas  $(9, 3)$  y  $(0, 6)$  lo que da el ciclo hamiltoniano  $(93211'540'87609)$ .

Existen las aristas  $(9, 6)$  y  $(0, 3)$  lo que da el ciclo hamiltoniano  $(03211'540'87690)$ . ambas opciones son una contradicción y por lo tanto el subcaso 1 no es posible.

**Subcaso 2:** Existe la arista  $(0, 7)$  lo que implica que existe la arista  $(5, 1')$  y hay dos opciones:

Existen las aristas  $(9, 3)$  y  $(2, 6)$  lo que da el ciclo hamiltoniano  $(623451'10'89076)$ .

Existen las aristas  $(9, 2)$  y  $(3, 6)$  lo que da el ciclo hamiltoniano  $(51'123670980'45)$ .

Por lo tanto, el caso 1 no es posible.

**Caso 2:**  $N(0') = \{1, 4, 7\}$  Veamos como pueden ser las demás vecindades para ver cuales pueden ser las 4 aristas que faltan:

- $N(2) \subset \{1, 3, 6, 9, 0\}$  ya que:

La arista  $(2, 5)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(52340'11'098765)$ .

La arista  $(2, 8)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(28901'10'765432)$ .

La arista  $(2, 1')$  genera un triángulo.

- $N(3) \subset \{2, 4, 8, 9, 0\}$  ya que:

La arista  $(3, 5)$  forma un triángulo.

La arista  $(3, 6)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(36540'78901'123)$ .

La arista  $(3, 1')$  genera el ciclo hamiltoniano  $(1'3210'45678901')$ .

- $N(5) \subset \{4, 6, 9, 0, 1'\}$  ya que la arista  $(5, 8)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(85670'43211'098)$ .
- $N(6) \subset \{5, 7, 2, 9, 0\}$  ya que la arista  $(6, 8)$  forma un triángulo y la arista  $(6, 1')$  genera el ciclo hamiltoniano  $(1'6543210'78901')$ .
  
- $N(8) \subset \{7, 9, 3, 1'\}$  ya que la arista  $(8, 0)$  forma un triángulo.
- $N(9) \subset \{8, 0, 2, 3, 5, 6\}$  ya que la arista  $(9, 1')$  forma un triángulo.
- $N(0) \subset \{9, 1', 2, 3, 5, 6\}$ .
- $N(1') \subset \{1, 0, 5, 8\}$ .

Tenemos dos subcasos:

**Subcaso 1:** Existe la arista  $(1', 5)$  lo cual implica que existe la arista  $(8, 3)$ .

Entonces existen las aristas  $(9, 2)$  y  $(0, 6)$ , lo que nos daría el ciclo hamiltoniano  $(923876540'11'09)$  o existen las aristas  $(9, 6)$  y  $(2, 0)$  con las que obtendríamos el ciclo hamiltoniano  $(3890211'5670'43)$ . En ambas opciones obtenemos una contradicción por lo que el subcaso 1 es imposible.

**Subcaso 2:** Existe la arista  $(1', 8)$  lo cual implica que existe la arista  $(2, 6)$  y tenemos dos opciones:

**Opcion 1:** Existen las aristas  $(9, 5)$  y  $(0, 3)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(2659870'4301'12)$ .

**Opcion 2:** Existen las aristas  $(9, 3)$  y  $(5, 0)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(1'8905670'43211')$ .

Por lo tanto, el caso 2 no es posible.

**Caso 3:**  $N(v) = \{1, 3, 5\}$ .

Veamos como pueden ser las demas vecindades.

- $N(2) \subset \{1, 3, 7, 8, 9, 0\}$  ya que las aristas  $(2, 4)$  y  $(2, 1')$  forman triángulos y la arista  $(2, 6)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(623450'11'09876)$ .
- $N(4) \subset \{3, 5, 7, 8, 9, 0\}$  ya que la arista  $(4, 6)$  forma un triángulo y la arista  $(1', 4)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(1'43210'5678901')$ .
- $N(6) \subset \{5, 7, 9, 0, 1'\}$  ya que la arista  $(6, 8)$  forma un triángulo.
- $N(7) \subset \{6, 8, 2, 4, 0, 1'\}$  ya que la arista  $(7, 9)$  forma un triángulo.
- $N(8) \subset \{7, 9, 2, 4, 1'\}$  ya que la arista  $(8, 0)$  forma un triángulo.
- $N(9) \subset \{8, 0, 2, 4, 6\}$  ya que la arista  $(9, 1')$  forma un triángulo.
- $N(0) \subset \{9, 1', 2, 4, 6, 7\}$ .
- $N(1') \subset \{1, 0, 6, 7, 8\}$ .

Tenemos 3 subcasos:

**Subcaso 1:** Existe la arista  $(1', 6)$  lo que implica que existe la arista  $(0, 7)$  y tenemos dos opciones:

**Opcion 1:** Las dos aristas que faltan son  $(8, 2)$  y  $(9, 4)$  lo cual genera el ciclo hamiltoniano  $(945678230'11'09)$ .

**Opcion 2:** Las dos aristas que faltan son  $(8, 4)$  y  $(9, 2)$  lo cual genera el ciclo hamiltoniano  $(1'67098450'3211')$ .

**Subcaso 2:** Existe la arista  $(1', 7)$ . Entonces hay 4 opciones para las 3 aristas que faltan:

**Opción 1:** Tenemos las aristas  $(9, 6)$ ,  $(8, 2)$  y  $(4, 0)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(8210'345671'098)$ .

**Opción 2:** Tenemos las aristas  $(9, 6)$ ,  $(8, 4)$  y  $(2, 0)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(69871'0210'3456)$ .

**Opción 3:** Tenemos las aristas  $(0, 6)$ ,  $(8, 2)$  y  $(4, 9)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(8211'09430'5678)$ .

**Opción 4:** Tenemos las aristas  $(0, 6)$ ,  $(8, 4)$  y  $(2, 9)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(0671'1230'54890)$ .

**Subcaso 3:** Existe la arista  $(1', 8)$ .

Si existe la arista  $(9, 2)$  tenemos el ciclo hamiltoniano  $(81'09210'345678)$ .

Si existe la arista  $(9, 4)$  tenemos el ciclo hamiltoniano  $(81'0943210'5678)$ .

Si tenemos las aristas  $(9, 6)$ ,  $(0, 2)$  y  $(4, 7)$  existe el ciclo hamiltoniano  $(698743201'10'56)$ .

Si tenemos las aristas  $(9, 6)$ ,  $(7, 2)$  y  $(4, 0)$  existe el ciclo hamiltoniano  $(1'8904567230'11')$ .

Concluimos que el caso 3 no es posible ya que todos los subcasos nos llevan a una contradicción.

**Caso 4:**  $N(v) = \{1, 3, 6\}$ .

Veamos como pueden ser las demas vecindades.

■  $N(2) \subset \{1, 3, 8, 9, 0\}$  ya que:

Las aristas  $(2, 4)$  y  $(2, 1')$  forman triángulos.

La arista  $(2, 5)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(25430'678901'12)$ .

La arista  $(2, 7)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(7234560'11'0987)$ .

■  $N(4) \subset \{5, 3, 8, 9, 0, 1'\}$  ya que la arista  $(4, 7)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(74560'3211'0987)$ .

- $N(5) \subset \{4, 6, 8, 9, 0\}$  ya que:  
 La arista  $(5, 7)$  forma un triángulo.  
 La arista  $(5, 1')$  forma el ciclo hamiltoniano  $(1'543210'678901')$ .
- $N(7) \subset \{6, 8, 0, 1'\}$  ya que la arista  $(7, 9)$  forma un triángulo.
- $N(8) \subset \{7, 9, 2, 4, 5, 1'\}$  ya que la arista  $(8, 0)$  forma un triángulo.
- $N(9) \subset \{8, 0, 2, 4, 5\}$  ya que la arista  $(9, 1')$  forma un triángulo.
- $N(0) \subset \{9, 1', 2, 4, 5, 7\}$ .
- $N(1') \subset \{1, 0, 4, 7, 8\}$ .

Entonces tenemos dos subcasos:

**Subcaso 1:** Existe la arista  $(7, 0)$ . Esto implica que existe la arista  $(4, 1')$  y tenemos dos opciones:

Si las otras dos aristas son  $(9, 2)$  y  $(8, 5)$  tenemos el ciclo hamiltoniano  $(856701'430'1298)$ .

Si las dos aristas que faltan son  $(9, 5)$  y  $(8, 2)$  tenemos el ciclo hamiltoniano  $(1'43210'6598701')$ .

**Subcaso 2:** Existe la arista  $(1', 7)$ .

La arista  $(8, 5)$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(71'098543210'67)$ .

Si existe la arista  $(8, 2)$  tenemos el ciclo hamiltoniano  $(71'098210'34567)$ .

Entonces debe existir la arista  $(8, 4)$ . Si tenemos la arista  $(0, 2)$  existe el ciclo hamiltoniano  $(1'7890234560'11')$ .

Por lo tanto las dos aristas que faltaban deben ser  $(0, 5)$  y  $(2, 9)$  lo cual nos da el ciclo hamiltoniano  $(9234501'10'6789)$ .

Concluimos que ambos subcasos implican una contradicción y por lo tanto el caso 4 no es posible.

**Caso 5:**  $N(v) = \{1, 3, 7\}$ .

Para las vecindades de los demas vértices tenemos que:

- $N(2) \subset \{1, 3, 5, 9, 0\}$  ya que:

Las aristas  $(2, 4)$  y  $(1', 2)$  forman triángulos;

La arista  $(2, 6)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(265430'78901'12)$ .

La arista  $(2, 8)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(28901'10'765432)$ .

- $N(4) \subset \{3, 5, 9, 0, 1'\}$  ya que:

La arista  $(4, 6)$  forma un triángulo;

La arista  $(4, 8)$  genera el ciclo hamiltoniano  $(48901'1230'7654)$ .

- $N(5) \subset \{4, 6, 2, 8, 9, 0, 1'\}$  ya que la arista  $(5, 7)$  forma un triángulo.

- $N(6) \subset \{5, 7, 9, 0\}$  ya que la arista  $(8, 6)$  forma un triángulo y la arista  $(6, 1')$  nos da el ciclo hamiltoniano  $(61'09870'123456)$ .

- $N(8) \subset \{7, 9, 5, 1'\}$  ya que la arista  $(8, 0)$  forma un triángulo.

- $N(9) \subset \{8, 0, 2, 4, 5, 6\}$  ya que la arista  $(9, 1')$  forma un triángulo.

- $N(0) \subset \{1', 9, 2, 4, 5, 6\}$ .

- $N(w) \subset \{0, 1, 4, 5, 8, \}$ .

Entonces tenemos dos subcasos:

**Subcaso 1:** Existe la arista  $(8, 5)$ , lo cual implica que también existe la arista  $(4, 1')$  con lo que tendríamos el ciclo hamiltoniano  $(1'43210'7658901')$ .

**Subcaso 2:** Existe la arista  $(8, 1')$ . Esto implica que existe la arista  $(2, 5)$ . Entonces hay dos posibilidades:

- 1) Existen las aristas  $(9, 6)$  y  $(4, 0)$  lo que genera el ciclo hamiltoniano  $(523401'10'78965)$ .

2) Existen las aristas (9, 4) y (0, 6) lo que genera el ciclo hamiltoniano (1'890670'345211').

Por lo tanto ningun caso es posible y no existe una gráfica cúbica hipohamiltoniana de orden 12.  $\square$

**Teorema 2.0.23** *No existe una gráfica hipohamiltoniana de orden 12.*

Supongamos que sí existe una gráfica hipohamiltoniana de orden 12. Por los lemas anteriores tenemos que  $3 \leq \delta(v) \leq 5$  para todo  $v \in V(G)$ .

**Caso 1:** Existe  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 5$ . Sea  $v = 0'$ , como  $G$  es hipohamiltoniana existe un ciclo hamiltoniano en la gráfica inducida por  $V(G) - \{0'\}$ , y sea  $\Gamma = (12345678901')$  dicho ciclo.

Entonces como  $0'$  no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos en  $\gamma$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $N(v) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

**Afirmación:** El conjunto  $\{2, 4, 6, 8, 0, 0'\} \subset V(G)$  es un conjunto independiente. En la tabla 2.6 podemos ver que cualquier arista entre los vértices de este conjunto nos produce un ciclo hamiltoniano.

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(2430'5678901'12)
(2, 6)	(265430'78901'12)
(2, 8)	(82345670'11'098)
(2, 0)	(0234567890'11'0)
(4, 6)	(4650'78901'1234)
(4, 8)	(845670'3211'098)
(4, 0)	(04567890'3211'0)
(6, 8)	(8670'543211'098)
(6, 0)	(067890'543211'0)
(8, 0)	(0890'76543211'0)

Tabla 2-6: Ciclos hamiltonianos

Entonces la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no puede tener un ciclo hamiltoniano lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $G$  no puede tener vértices de grado 5.

**Caso 2:** Como ya vimos que  $G$  no puede tener vértices de grado 5, y por el teorema anterior  $G$  tampoco puede ser cúbica tenemos que existe un vértice  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 4$ . Sea  $v = 0'$  y sea  $\Gamma = (12345678901')$  un ciclo hamiltoniano en la gráfica inducida por  $V(G) - \{0'\}$ .

Entonces tenemos 4 casos:

**Caso 2.1**  $N(v) = \{1, 3, 5, 7\}$ .

Afirmamos que el conjunto  $J = \{2, 4, 6, 8, 0', 1'\}$  es un conjunto independiente. En la tabla 2.7 podemos ver que cualquier arista entre vértices del conjunto  $J$  nos genera un ciclo hamiltoniano.

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(4230'11'0987654)
(2, 6)	(265430'78901'12)
(2, 8)	(82345670'11'098)
(2, 1')	(1'210'345678901')
(4, 6)	(4650'78901'1234)
(4, 8)	(48901'1230'7654)
(4, 1')	(1'43210'567890)
(6, 8)	(8670'543211'098)
(6, 1')	(61'123450'78901')

Tabla 2-7: Ciclos hamiltonianos

Entonces la única arista que podría existir en  $J$  es la arista  $(8, 1')$

Supongamos que existe la arista  $(8, 1')$ .

**Afirmación:** el conjunto  $\{2, 4, 6, 9, 0, 0'\}$  es independiente. En la tabla 2.8 podemos ver que cualquier arista entre los vértices de este conjunto nos genera un ciclo hamiltoniano. Pero esta afirmación implica que en la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no podría haber un ciclo hamiltoniano.

Concluimos que no existe la arista  $(1', 8)$  y por lo tanto  $J$  es independiente, pero nuevamente esto quiere decir que en la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no puede haber

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(0, 4)	(1'89045670'3211')
(0, 2)	(1'8902345670'11')
(0, 6)	(1'890670'543211')
(9, 2)	(81'09210'345678)
(9, 4)	(81'0943210'5678)
(9, 6)	(81'096543210'78)

Tabla 2-8: Ciclos hamiltonianos

un ciclo hamiltoniano lo cual es un contradicción. Por lo tanto el caso 2.1 no es posible.

**Caso 2.2**  $N(0') = \{1, 3, 5, 8\}$ . Afirmamos que la subgráfica inducida por el conjunto  $J = \{2, 4, 6, 7, 9, 0', 1'\}$  tiene a lo más 2 aristas. En la tabla 2.9 se encuentra la lista de las aristas entre vértices del conjunto  $J$  que nos generan ciclos hamiltonianos.

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(2430'5678901'12)
(2, 6)	(623450'11'09876)
(2, 7)	(2765430'8901'12)
(2, 9)	(923456780'11'09)
(2, 1')	(21'098765430'12)
(4, 6)	(4650'78901'1234)
(4, 7)	(743211'0980'567)
(4, 9)	(9456780'3211'09)
(4, 1')	(1'43210'5678901')
(6, 9)	(96780'543211'09)
(7, 1')	(71'0980'1234567)

Tabla 2-9: Ciclos hamiltonianos

Entonces las únicas aristas que podrían existir entre el conjunto  $J$  son  $(1', 6)$ ,  $(7, 9)$  y  $(1', 9)$  además de la arista  $(6, 7)$  que sabemos que existe.

Primero tenemos que no pueden existir  $(1', 6)$  y  $(9, 7)$  al mismo tiempo ya que obtendríamos el ciclo hamiltoniano  $(61'09780'123456)$ .

Por lo tanto existen a lo más 3 aristas entre los vértices de  $J$ .

**Afirmación** La arista  $(9, 1')$  no puede existir. Supongamos que existe la arista  $(9, 1')$ . En consecuencia tenemos que  $\{2, 4, 6, 7\} \subset V(G) - N(0)$  como se puede ver en la tabla 2.10.

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
$(0, 2)$	$(91'0210'3456789)$
$(0, 4)$	$(91'043210'56789)$
$(0, 6)$	$(1'906780'543211')$
$(0, 7)$	$(91'076543210'89)$

Tabla 2-10: Ciclos hamiltonianos

Entonces tenemos que el tercer vecino del vértice  $w$  debe estar en el conjunto  $\{1, 3, 5, 8\}$  para  $w = 0, 2, 4, 6, 7$ .

Como  $\delta(0') = 4$  y por ser  $G$  hipohamiltoniana el grado de  $v$  es mayor o igual a 3 para todo vértice en  $G$ . Una cuenta simple nos demuestra que el número de aristas entre los conjuntos  $\{1, 3, 5, 8\}$  y  $\{0, 2, 4, 6, 7\}$  es al menos 14, por lo que existe un vértice  $z \in \{1, 3, 5, 8\}$  tal que  $\delta(z) \geq 5$  (contando a su vecino el vértice  $0'$ ) lo cual es una contradicción.

Por lo tanto la arista  $(9, 1')$  no existe y concluimos que existen a lo mas dos aristas entre los vértices de  $J$ .

Entonces  $V(G) - \{1\} = J \cup \{3, 5, 8, 0\}$  con  $4 \leq |J| - 2 = 5$  y por el lema 2.0.20 la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no es hamiltoniana lo que contradice que  $G$  sea hamiltoniana.

Concluimos que el caso 2.2 no es posible.

**Caso 2.3:**  $N(v) = \{1, 3, 6, 8\}$ .

En la subgráfica inducida por el conjunto  $J = \{2, 4, 5, 7, 9, 0', 1'\}$  la única arista que existe es las  $(4, 5)$ . En la tabla 2.11 podemos ver que cualquier otra arista entre vértices del conjunto  $J$  crea un ciclo hamiltoniano.

Entonces las únicas aristas aparte de  $(4, 5)$  que pueden existir entre los vértices de  $J$  son:  $(5, 9)$ ,  $(4, 1')$  y  $(9, 1')$ .

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(2430'5678901'12)
(2, 5)	(25430'678901'12)
(2, 7)	(7234560'11'0987)
(2, 9)	(923456780'11'09)
(2, 1')	(21'098765430'12)
(4, 7)	(74560'3211'0987)
(4, 9)	(9456780'3211'09)
(5, 7)	(5760'8901'12345)
(5, $w$ )	(1'543210'678901')
(7, 9)	(9780'6543211'09)
(7, 1')	(71'0980'123456)

Tabla 2-11: Ciclos hamiltonianos

Notemos que el tercer vecino del 2 únicamente puede ser 6, 8 o 0 y el tercer vecino del 7 únicamente puede ser 1,3 o 0.

En la tabla 2.12 podemos ver que las aristas (5, 9) y (4, 1') en combinación con alguna de las otras posibles aristas nos forman ciclos hamiltonianos.

Aristas agregadas	Ciclo hamiltoniano formado
(5, 9), (2, 6)	(6245901'10'876)
(5, 9), (2, 8)	(8211'095430'678)
(5, 9), (2, 0)	(4598760'11'0234)
(4, 1'), (7, 1)	(178901'4560'321)
(4, 1'), (7, 3)	(376541'0980'123)
(4, 1'), (7, 0)	(541'1230'890765)

Tabla 2-12: Ciclos hamiltonianos

Por lo que no pueden existir las aristas (9, 5) y (4, 1'). Ahora supongamos que existe la arista (9, 1') veamos cual puede ser el tercer vecino del vértice 0. En la tabla 2.13 podemos ver que  $\{2, 4, 5, 7\} \subset V(G) - N(0)$ .

Concluimos que el tercer vecino del vértice 0 debe estar en el conjunto  $\{1, 3, 6, 8\}$ . Pero el tercer vecino de  $w$  debe estar en el conjunto  $\{1, 3, 6, 8\}$  para  $w = 0, 2, 4, 5, 7$ .

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(0, 2)	(01'0210'345789)
(0, 4)	(1'90456780'3211')
(0, 5)	(91'0543210'6789)
(0, 7)	(91'076543210'89)

Tabla 2-13: Ciclos hamiltonianos

Como  $\delta(0') = 4$  y por ser  $G$  hipohamiltoniana el grado de  $v$  en  $G$  es mayor o igual que 3 para todo  $v$ , una cuenta simple nos demuestra que el número de aristas en  $G$  entre los conjuntos de vértices  $\{0, 2, 4, 5, 7\}$  y  $\{1, 3, 6, 8\}$  es mayor o igual que 14. Por lo tanto existe un vértice  $v \in \{1, 3, 6, 8\}$  con grado mayor o igual que 5 (contando a su vecino el vértice  $0'$ ), lo cual es una contradicción.

Por lo tanto la arista  $(9, 1')$  no puede existir. Entonces tenemos que  $J$  es un conjunto de cardinalidad 7 con una única arista entre sus vértices. Entonces por el lema 2.0.20 tenemos que la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no puede ser hamiltoniana ya que  $V(G) - \{1\} = J \cup \{0, 3, 6, 8\}$  con  $4 \leq |J| - 1 = 6$ .

**Caso 2.4:**  $N(0') = \{1, 3, 6, 9\}$ .

Veamos cuales aristas pueden existir entre los vértices del conjunto  $J = V(G) - N(v)$ . En la tabla 2.14 se muestran las aristas que nos generan ciclos hamiltonianos.

Entonces las únicas aristas que pueden existir fuera de  $\Gamma$  son:  $(5, 0)$ ,  $(5, 7)$ ,  $(4, 8)$ ,  $(4, 1')$ ,  $(7, 1')$  y  $(8, 0)$ .

Observemos que las dos únicas posibilidades para el tercer vecino del vértice 2 son los vértices 9 y 6.

La arista  $(5, 0)$  no puede existir ya que junto con el tercer vecino del dos nos daría los ciclos hamiltonianos  $(9211'05430'6789)$  y  $(6234501'10'9876)$ .

Entonces las aristas que pueden existir entre los vértices del conjunto  $V(G) - N(0')$  son  $M = \{(8, 4), (8, 0), (7, 1'), (7, 5), (4, 1')\}$ . Afirmamos que sólo puede existir una de ellas ya que cada que nos tomemos dos de ellas obtenemos una contradicción. En la tabla 2.15

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado
(2, 4)	(4230'11'0987654)
(2, 5)	(25430'678901'12)
(2, 7)	(7234560'11'0987)
(2, 8)	(28765430'901'12)
(2, 0)	(0234567890'11'0)
(2, 1')	(1'210'345678901')
(4, 7)	(74560'3211'0987)
(4, 0)	(401'1230'987654)
(5, 8)	(58760'901'12345)
(5, 1')	(1'543210'678901')
(7, 0)	(07890'6543211'0)
(8, 1')	(81'090'12345678)

Tabla 2-14: Ciclos hamiltonianos

podemos ver los ciclos hamiltonianos que nos generan las parejas de aristas.

Aristas agregadas	Ciclo hamiltoniano formado
(8, 4), (7, 5)	(845760'3211'098)
(4, 1'), (8, 0)	(41'1230'9087654)
(4, 1'), (7, 5)	(41'0987560'1234)
(8, 0), (7, 1')	(1'78090'6543211')
(8, 0), (7, 5)	(5760'9801'12345)

Tabla 2-15: Ciclos hamiltonianos

Si existen las aristas (8, 4) y (7, 1') tenemos 3 casos: Primero observemos que hay 3 posibles vértices que pueden ser el tercer vecino del vértice 5.

**Caso 2.4.1** Existe la arista (5, 1). Entonces obtenemos el ciclo hamiltoniano (4871'090'654321).

**Caso 2.4.2** Existe la aristas (5, 9). Entonces obtenemos el ciclo hamiltoniano (71'09560'123487).

**Caso 2.4.3** Existe la arista (5, 3). Entonces obtenemos el ciclo hamiltoniano (3548760'901'123).

Concluimos que existe a lo más una arista del conjunto  $M$ . Entonces entre los vértices del conjunto  $J = V(G) - N(0')$  hay a lo más 4 aristas.

Entonces  $V(G) - \{1\} = V(G) - N(0') \cup \{3, 6, 9\}$  con

$$3 \leq |V(G) - N(0')| - 4 = 4$$

. Entonces por el lema 2.0.20 la gráfica inducida por  $V(G) - \{1\}$  no es hamiltoniana lo que contradice que  $G$  es hipohamiltoniana.

Por lo tanto no existe una gráfica hipohamiltoniana de orden 12.  $\square$

## Capítulo 3

# Gráficas hipohamiltonianas grandes.

Vamos a construir 3 nuevas familias infinitas de gráficas hipohamiltonianas que tengan  $3k + 1$  ( $k \geq 3$ ),  $3k$  ( $k \geq 5$ ) y  $5k$  ( $k \geq 4$ ) vértices respectivamente, utilizando las construcciones que dieron Doyen y van Diest en 1975 en [DV].

También daremos la construcción de Thomassen, ver [T1], que permite dadas dos gráficas hipohamiltonianas con propiedades adicionales construir una nueva gráfica hipohamiltoniana de orden  $n$  para  $n \geq 15$  excepto para  $n = 14, 17$  y  $19$ .

### 3.1. Las gráficas $G_t(m)$ .

Vamos a definir las gráficas  $G_t(m)$ . Empecemos por el caso  $t = 3$ . Las gráficas  $G_3(m)$  tienen orden  $3m + 4$  y su conjunto de vértices es:

$$V(G_3(m)) = \{b, u_1, u_2, u_3, a_1, a_2, \dots, a_{3m}\}$$

y su conjunto de aristas es:

$$A(G_3(m)) = \begin{cases} (a_i, a_{i+1}), (a_{3m}, a_1) & \text{si } i = 1, 2, \dots, 3m - 1 \\ (u_i, b) & \text{si } i = 1, 2, 3 \\ (a_i, u_j) & \text{si } i \equiv j \pmod{3} \end{cases}$$

Ejemplo: la gráfica  $G_3(2)$  es isomorfa a la gráfica de Petersen.

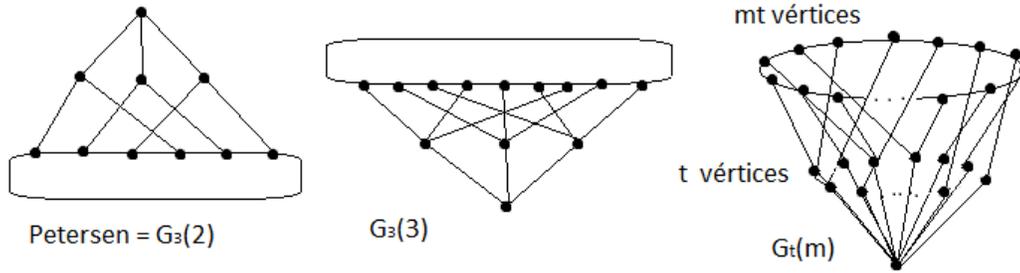


Figura 3-1: Las gráficas  $G_m(t)$

**Teorema 3.1.1** *Todas las gráficas  $G_3(m)$  son hipohamiltonianas.*

Demostración: Primero demostraremos que  $G_3(m)$  no es hamiltoniana. Supongamos lo contrario y sea  $\Gamma$  un ciclo hamiltoniano en  $G_3(m)$  y tomemos el ciclo  $\gamma = (a_1 a_2 \dots a_{3m})$ . Como  $\Gamma$  debe pasar por  $b$ ; tenemos que

$$|A(\Gamma) \cap \{(b, u_1), (b, u_2), (b, u_3)\}| = 2$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $(b, u_1), (b, u_2) \in A(\Gamma)$ . Entonces tenemos que  $u_2 b u_1 a_j a_{j+1} \dots a_k \in \Gamma$  con  $j \equiv 1 \pmod{3}$  y  $k \equiv 0 \pmod{3}$ , ya que si  $k \equiv 1, 2 \pmod{3}$  tendríamos que  $\Gamma$  se cerró sin pasar por  $u_3$ .

Afirmamos que  $\Gamma$  no contiene al vértice  $a_{k+1}$ . Como  $N(a_{j+1}) = \{a_j, a_{j+2}, u_1\}$  entonces si  $\Gamma$  pasara por  $a_{j+1}$ ,  $A(\Gamma)$  debería de contener a dos de las tres aristas  $\{(a_j, a_{j+1}), (a_{j+1} a_{j+2}), (a_{j+1}, u_1)\}$  pero sólo puede contener a  $(a_{j+1}, a_{j+2})$  ya que  $\Gamma$  pasó por  $u_1$  y  $a_j$  sin utilizar dichas aristas. Por lo tanto  $\Gamma$  no es hamiltoniano.

Ahora falta demostrar que  $G - \{v\}$  es hamiltoniana para todo  $v \in V(G)$ .

$$G_3(m) - b: a_{3m}u_3a_3a_4u_1a_1a_2u_2a_5a_6 \dots a_{3m}$$

$$G_3(m) - u_i: bu_ja_ja_{j+1} \dots a_{3m}a_1a_2 \dots a_{j-1}u_{j-1}b$$

$G_3(m) - a_i$  con  $i = 3n + k$ ,  $k = 1, 2, 3$  contiene el ciclo hamiltoniano:

$$bu_{k-1}a_{i-1}a_{i-2} \dots a_1a_{3m}a_{3m-1} \dots a_{i+4}u_{k+1}a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}u_kb.$$

Aquí estamos tomando  $i + 1$  y  $i - 1 \pmod 3$ .

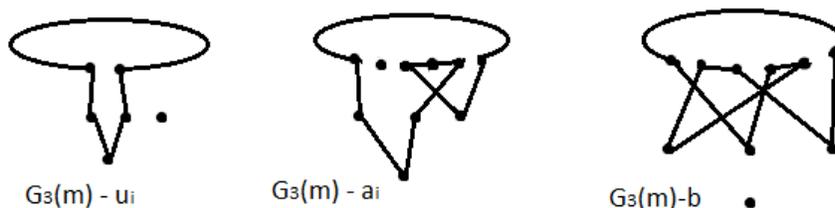


Figura 3-2: ciclos hamiltonianos en  $G_3(t) - \{v\}$

Por lo tanto  $G_3(m)$  no es hamiltoniana.  $\square$

Concluimos que hemos construido una familia de gráficas hipohamiltonianas de orden  $3m + 4$  para todo  $m \geq 2$ . Esta familia incluye gráficas de ordenes 10, 13, 16, 19 y 22.

Así como construimos estas gráficas también podemos definir gráficas de la misma manera pero con  $t$  vértices en lugar de 3.

Vamos a definir las gráficas  $G_t(m)$ . Dados dos enteros  $m \geq 2$  y  $t \geq 3$ , denotamos por  $G_t(m)$  la gráfica de orden  $mt + t + 1$  cuyos vértices son:

$$V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_{mt}, u_1, u_2, \dots, u_t, b\}$$

y cuyas aristas son:

$$A(G) = \begin{cases} (a_i, a_{i+1}), (a_{mt}, a_1) & \text{si } i = 1, \dots, mt \\ (u_h, b) & \text{si } h = 1, 2, \dots, t \\ (u_h, a_{h+it}), & \text{si } i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

**Teorema 3.1.2** *Todas las gráficas  $G_t(m)$  con  $t \geq 3$  son hamiltonianas.*

Demostración: Si  $t \geq 4$  es par,  $G_t(m)$  contiene al ciclo hamiltoniano

$$\Gamma = a_1 u_1 a_{t+1} a_{t+2} u_2 a_2 a_3 u_3 a_{t+3} a_{t+4} \dots u_{2h} a_{2h} a_{2h+1} a_{2h+t+1} a_{2h+t+2} \dots u_{t-2} a_{t-2} a_{t-1} a_t u_t b u_{t-1} a_{2t-1} a_{2t} \dots a_r a_{r+1} \dots a_{mt-1} a_{mt} a_1.$$

Si  $t \geq 5$  es impar,  $G_t(m)$  tiene el ciclo hamiltoniano

$$\Gamma = a_1 u_1 a_{t+1} a_t a_{t-1} u_{t-1} a_{2t-1} a_{2t-2} u_{t-2} a_{t-2} a_{t-3} u_{t-3} \dots u_{2h} a_{2h+1} a_{2h+t-1} u_{2h-1} a_{2h-1} a_{2h-2} u_{2h-2} \dots u_4 a_{t+4} a_{t+3} a_{t+2} u_2 a_2 a_3 u_3 b u_t a_{2t} \dots a_r a_{r-1} \dots a_{mt-1} a_{mt} a_1. \quad \square$$

## 3.2. Las gráficas $G_t(m, n)$ .

Primero vamos a definir estas gráficas para el caso  $t = 3$ . Definimos  $G_3(m, n)$  como la gráfica de orden  $3(m + n + 1)$  cuyos vértices son:

$$V(G_3(m, n)) = \{u_1, u_2, u_3, a_1, a_2, \dots, a_{3m}, b_1, b_2, \dots, b_{3n}\}$$

y cuyas aristas son:

$$A(G) = \begin{cases} (a_i, a_{i+1}), (a_{3m}, a_1) & \text{para } i \in \{1, \dots, 3m-1\} \\ (b_i, b_{i+1}), (b_{3n}, b_1) & \text{para } i \in \{1, \dots, 3n-1\} \\ (u_i, a_j), (u_i, b_j) & \text{si } i \equiv j \pmod{3} \end{cases}$$

Observemos que estas gráficas son muy parecidas a las anteriores, sólo que, en lugar del vértice  $b$  tenemos un ciclo de longitud  $3n$  con las aristas acomodadas de forma análoga al otro ciclo. Entonces varios de los resultados obtenidos para  $G_3(m)$  se pueden generalizar

para  $G_3(m, n)$ . Por ejemplo, si en  $G_3(m)$  teníamos algún ciclo que contuviera a  $b$ , aquí podemos tener el mismo ciclo pero recorriendo todos los vértices de la forma  $b_i$ .

**Teorema 3.2.1** *Las gráficas  $G_3(m, n)$  no son hamiltonianas.*

Demostración: Supongamos lo contrario. Sea  $\Gamma$  un ciclo hamiltoniano en  $G_3(m, n)$ . Debido a la estructura de la gráfica, el ciclo debe contener dos segmentos del tipo  $a_i u_j b_k$  y un segmento de la forma  $a_i u_j a_k$  o  $b_i u_j b_k$ , ya que de lo contrario el ciclo empezaría en un vértice  $a_i$  y acabaría en un vértice  $b_j$ .

Como  $G_3(m, n) \cong G_3(n, m)$  podemos suponer que el tercer segmento es de la forma  $a_i u_j a_k$ . Entonces  $\Gamma$  debe pasar por todos los  $b_i$ 's seguidos: esto quiere decir que  $\Gamma$  debe contener un segmento de la forma:

$$a_i u_j b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{nt} b_1 b_2 \dots b_{k-1} u_h a_l.$$

Debido a que dentro de  $\Gamma$  todos los  $b_i$ 's forman un segmento, podemos contraer este segmento a un sólo vértice y obtenemos un ciclo hamiltoniano en la gráfica  $G_3(m)$  lo cual es una contradicción.  $\square$

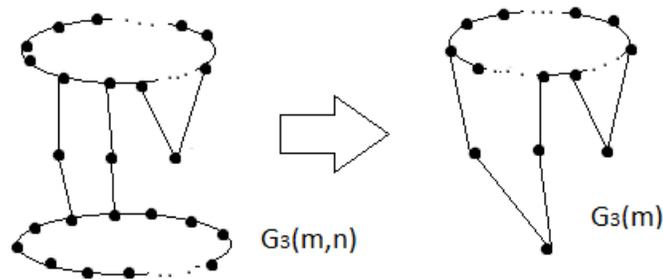


Figura 3-3: Contracción de un ciclo en  $G_3(m, n)$  a un sólo vértice en  $G_3(t)$

**Teorema 3.2.2** *Todas las gráficas  $G_3(m, n)$  son hipohamiltonianas si  $m \neq 1$  y  $n \neq 1$ .*

Ya sabemos que  $G_3(m, n)$  no es hamiltoniana. Falta ver que si  $m, n \geq 2$  al quitarle cualquier vértice a  $G_3(m, n)$  obtenemos una gráfica hamiltoniana. Si el vértice removido era un  $u_i$ , digamos  $u_1$ , nuestro ciclo hamiltoniano sería:

$$u_3 b_3 b_4 \dots b_{3n} b_1 b_2 u_2 a_2 a_1 a_{3m} a_{3m-1} \dots a_4 a_3 u_3.$$

Si el vértice removido era un  $a_i$ , supongamos sin pérdida de generalidad  $a_1$  el ciclo hamiltoniano sería:

$$a_2 u_2 b_2 b_3 \dots b_{3n-1} b_{3n} b_1 u_1 a_4 a_5 \dots a_{3m-1} a_{3m} u_3 a_3 a_2.$$

El caso en el que quitamos un vértice de la forma  $b_i$ , es análogo ya que  $G_3(m, n) \cong G_3(n, m)$ .  $\square$

**Lema 3.2.3**  $G_3(1, n)$  no es hipohamiltoniana.

Demostración:  $G_3(1, 1)$  claramente no es hipohamiltoniana ya que contiene 3 vértices de grado dos. Ahora tomemos  $n \geq 2$  y supongamos lo contrario. Esto es, la gráfica inducida por  $V(G_3(1, m)) - \{b_1\}$  debe contener un ciclo hamiltoniano  $\Gamma$ .

Como los vértices  $b_2$  y  $b_3$  eran de grado 3 y vecinos de  $b_1$ , en la gráfica inducida por  $V(G_3(1, m)) - \{b_1\}$  tienen grado dos. Entonces  $\Gamma$  debe contener al segmento  $u_2 b_2 b_3 u_3$ .

Si ahora identificamos los vértices  $b_2$  y  $b_3$  en un sólo vértice  $b$ ,  $\Gamma$  contiene el segmento  $u_2 b u_3$  y pasa por todos los demás vértices, i.e. pasa por  $u_1$  y por todos los  $a'_i$ s.

Entonces  $\Gamma$  sería un ciclo hamiltoniano de  $G_3(m)$ , lo cual es una contradicción ya que  $G_3(m)$  es hipohamiltoniana.  $\square$

Vamos a definir las gráficas  $G_t(m, n)$ .

Dados tres enteros  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  y  $t \geq 3$  definimos la gráfica  $G_t(m, n)$  de orden  $(m + 1 + n)t$  como:

$$V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_{mt}, u_1, u_2, \dots, u_t, b_1, b_2, \dots, b_{nt}\}.$$

$$A(G) = \begin{cases} (a_i, a_{i+1}), (a_{mt}, a_1) & \text{para } i \in \{1, \dots, mt - 1\} \\ (b_i, b_{i+1}), (b_{nt}, b_1) & \text{para } i \in \{1, \dots, nt - 1\} \\ (u_i, a_j), (u_i, b_j) & \text{si } i \equiv j \pmod{3} \end{cases}$$

Podemos ver que  $G_t(m, n)$  y  $G_t(n, m)$  son iguales.

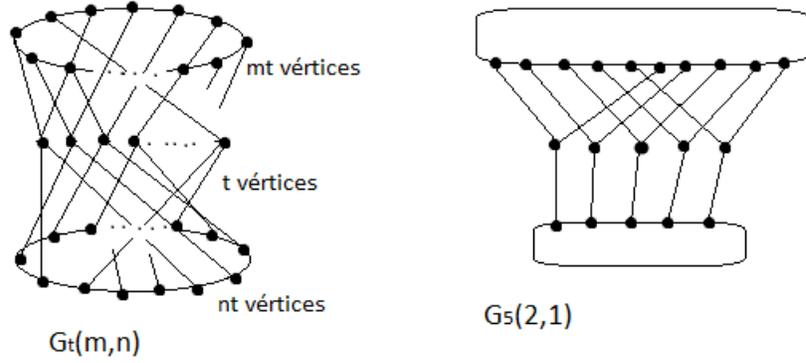


Figura 3-4: Las gráficas  $G_t(m, n)$

**Teorema 3.2.4** *Las gráficas  $G_5(m, n)$  no son hamiltonianas.*

Demostración: Supongamos lo contrario y sea  $\Gamma$  un ciclo hamiltoniano de  $G_5(m, n)$ .

Llamaremos de tipo A a los segmentos de  $\Gamma$  que estén contenidos en el ciclo  $(a_1 a_2 \dots a_{5m})$  y cuyos puntos iniciales y finales sean adyacentes a algún  $u_i$  en  $\Gamma$ , para  $i \in \{1 \dots 5\}$ . Análogamente definimos los segmentos de tipo B.

Como tenemos 5 vértices de la forma  $u_i$  y cada uno tiene dos vecinos en  $\Gamma$ . Tenemos que en total  $\Gamma$  contiene 5 segmentos de tipo A o B. Supongamos sin pérdida de generalidad que contiene más de tipo A.

Entonces tenemos dos casos:

**Caso 1:**  $\Gamma$  contiene 4 segmentos de tipo A y uno de tipo B.

Como hay un único segmento de tipo B, este debe contener a todos los vértices  $b_i$ .

Esto quiere decir, que el segmento de tipo B es de la forma:

$\beta = b_i b_{i+1} \dots b_{5n} b_1 b_2 \dots b_{i-1}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $i = 2$ , entonces  $\beta = b_2 b_3 \dots b_{nt} b_1$ .

Esto también quiere decir que  $\Gamma$  pasa por las aristas  $(b_1, u_1)$  y  $(b_2, u_2)$ . El siguiente vértice en el ciclo debe ser algún vértice  $a_i$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que la arista  $(u_1, a_1)$  está en  $\Gamma$ .

Tenemos dos subcasos:

**Caso 1.1:**  $\Gamma$  pasa por la arista  $(a_1, a_{5m})$ . Esto implica que  $\Gamma$  contiene al segmento  $u_2 a_2 a_3$ . Entonces los 4 segmentos de tipo A son:  $a_2 \dots a_i$ ,  $a_{i+1} \dots a_j$ ,  $a_{j+1} \dots a_k$  y  $a_{k+1} \dots a_{5m} a_1$ .  
 $i, j, k \equiv 1, 2 \pmod{5} \Rightarrow u_1$  o  $u_2$  tiene grado 3 en  $\Gamma$ .

Luego si  $i, j, k \equiv 0 \pmod{5}$  entonces el siguiente vértice tendría que ser adyacente a  $u_1$ , lo cual no se puede.

Entonces  $i, j, k \equiv 3$  o  $4 \pmod{5}$  pero esto implica que tres de los vértices  $a_1$ ,  $a_{i+1}$ ,  $a_j a_{j+1}$ ,  $a_k a_{k+1}$  deberían ser adyacentes a  $u_4$  en el ciclo, lo cual es una contradicción.

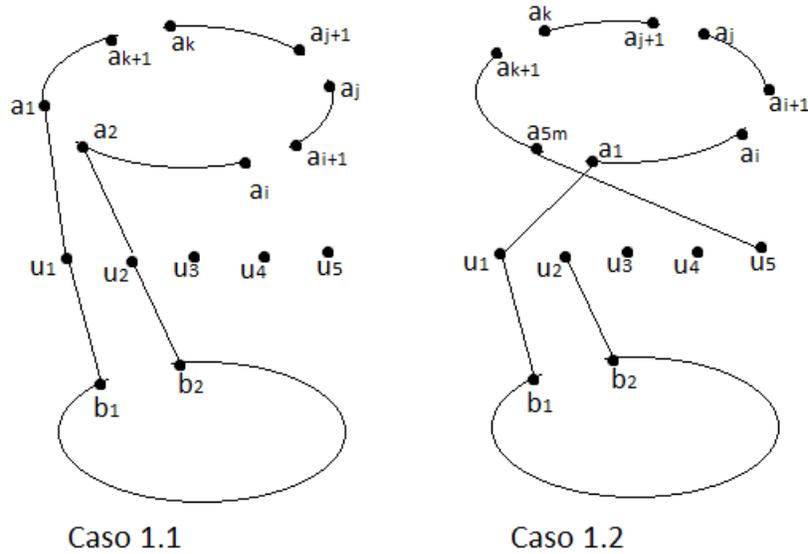


Figura 3-5: Caso 1

**Caso 1.2:**  $\Gamma$  pasa por la arista  $(a_1, a_2)$ .

Entonces  $\Gamma$  contiene al segmento  $u_5 a_{5m} a_{5m-1}$ . Esto quiere decir que los 4 segmentos de tipo A son:

$a_1 \dots a_i$ ,  $a_{i+1} \dots a_j$ ,  $a_{j+1} \dots a_k$  y  $a_{k+1} \dots a_{5m}$ .

Si  $i \equiv 2 \pmod{5}$  tenemos el ciclo  $u_2 b_2 b_3 \dots b_{5n} b_1 u_1 a_1 a_2 \dots a_i u_2 \subsetneq \Gamma$ .

Luego dos de los números  $i, j$  y  $k$  no pueden ser congruentes con el mismo número módulo 5, ya que una debe ser congruente con 2 para cerrar el ciclo de un lado. Otra debe ser congruente con 4, para cerrar el ciclo de otro lado, y la tercera sólo puede ser 3 ya que  $u_2$  y  $u_5$  ya tendrían grado dos en  $\Gamma$ .

Notemos que si  $i \equiv l \pmod{5}$ , entonces  $j$  no puede ser congruente con  $l + 1$  módulo 5 y lo mismo pasa para  $j$  y  $k$ , ya que tendríamos el ciclo  $u_{l+1}a_{i+1}\dots a_j a_{l+1}$  contenido en  $\Gamma$ .

Si  $i \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow j \equiv 2 \pmod{5}$  y  $k \equiv 4 \pmod{5}$  pero si  $k \equiv 4 \pmod{5}$  se forma el ciclo  $u_5 a_{k+1} \dots a_{5m} u_5 \subsetneq \Gamma$ .

Por lo tanto  $i \equiv 4 \pmod{5}$ , lo que implica  $j \equiv 3 \pmod{5}$  y  $k \equiv 2 \pmod{5}$  pero esto nos da el ciclo  $u_3 a_{k+1} \dots a_{5m} u_5 a_{i+1} \dots a_j u_3$ , lo cual es una contradicción.

**Caso 2:** Hay 3 segmentos de tipo A y 2 segmentos de tipo B.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los dos segmentos de tipo B son:  $b_2 b_3 \dots b_r$  y  $b_{r+1} \dots b_{5n} b_1$ . Tenemos que  $\Gamma$  pasa por las aristas  $(u_2, b_2)$  y  $(b_1, u_1)$ .

A partir de  $u_1$  el ciclo debe irse a algún vértice  $a_i$  y nuevamente podemos suponer que es  $a_1$  y tenemos dos subcasos:

**Caso 2.1:**  $\Gamma$  pasa por la arista  $(a_{5m}, a_1)$ .

En este caso los 3 segmentos de tipo A son:  $a_2 a_3 \dots a_i$ ,  $a_{i+1} \dots a_j$  y  $a_j a_{j+1} \dots a_{5m} a_1$ .

Notemos que  $i, j \equiv 3, 4 \pmod{5}$  ya que  $u_1$  y  $u_2$  tienen orden 2 en  $\Gamma$ .

Por los mismos argumentos también  $r \equiv 3, 4 \pmod{5}$ .

Si  $i \equiv 3 \pmod{5}$ , entonces  $j$  no puede ser congruente con 4 módulo 5 ya que se formaría el ciclo  $u_4 a_{i+1} \dots a_j u_4$ .

Esto quiere decir que  $i \equiv 4 \pmod{5}$  y  $j \equiv 3, 4 \pmod{5}$ . Pero esto implica que los únicos vértices que están disponibles para ser adyacentes con  $b_r$  y  $b_{r+1}$ , son  $u_3$  y  $u_5$ , lo cual es una contradicción.

**Caso 2.2:**  $\Gamma$  pasa por la arista  $(a_1, a_2)$

Esto implica que los 3 segmentos de tipo A son:  $a_1 a_2 \dots a_i$ ,  $a_{i+1} \dots a_j$  y  $a_{j+1} \dots a_{5m}$ .

Nuevamente tenemos que  $r \equiv 3, 4 \pmod{5}$ ,  $j \equiv 3, 2 \pmod{5}$  ya que  $j \equiv 4 \pmod{5}$

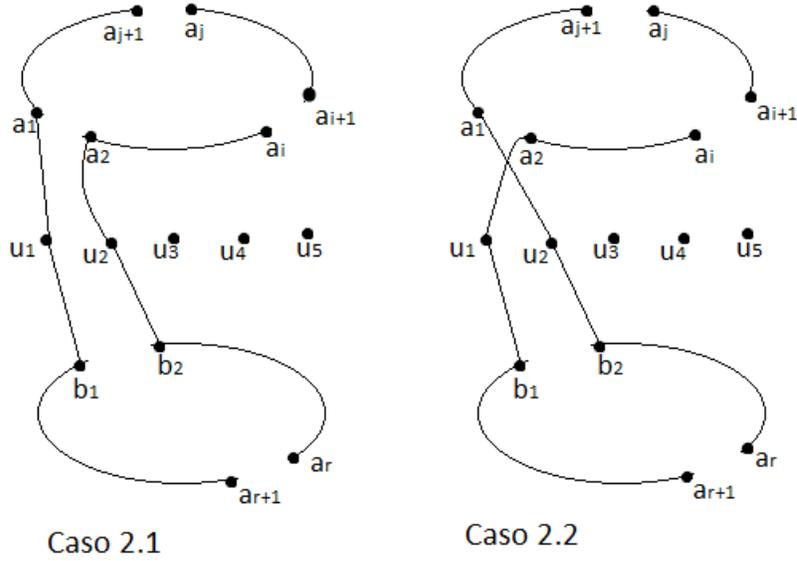


Figura 3-6: Caso 2

nos da el ciclo  $u_5 a_{j+1} \dots a_{5m} u_5$ .

Pero esto también implica que  $i$  no puede ser congruente con dos módulo 5. Por lo tanto  $i \equiv 3, 4 \pmod{5}$ .

También tenemos que  $i$  y  $j$  no pueden ser congruentes con el mismo número módulo 5, ya que esto implicaría que  $r \equiv 2 \pmod{5}$ .

Entonces si  $i \equiv 4 \pmod{5}$  tenemos  $j \equiv 3 \pmod{5}$  y  $r \equiv 2 \pmod{5}$  lo cual no es posible.

Por lo tanto la única opción es  $i \equiv 3 \pmod{5}$ ,  $j \equiv 2 \pmod{5}$  y  $r \equiv 3, 4 \pmod{5}$ , pero esto nos da el ciclo  $u_2 a_j a_{j-1} \dots a_{i+1} u_4 b_r b_{r-1} \dots b_2 u_2$  contenido en  $\Gamma$ .

Concluimos que no puede existir un ciclo hamiltoniano.  $\square$

**Teorema 3.2.5** *Las gráficas  $G_5(m, n)$  son hipohamiltonianas si  $m \neq 1$  o  $n \neq 1$ .*

Como ya demostramos que no son hamiltonianas, sólo falta ver que  $G_5(m, n) - \{v\}$  es hamiltoniana para todo  $v \in V(G)$ . También, como  $m$  o  $n \neq 1$  y como  $G_5(m, n) \cong$

$G_5(n, m)$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $m \neq 1$ . Tomemos  $v \in V(G)$  y consideremos  $G_5(m, n) - \{v\}$ .

Si  $v = a_i$  para alguna  $i = 1, 2, \dots, 5m$  tenemos que  $G_5(m, n) - \{v\}$  tiene el ciclo hamiltoniano:

$$a_{i+4}a_{i+3}a_{i+2}a_{i+1}u_{i+1}b_{i+1}b_{i+2}u_{i+2}a_{i+7}a_{i+6}a_{i+5}u_i b_i b_{i-1} b_{i-2} \dots b_{i+3} u_{i+3} a_{i+8} a_{i+9} \dots a_{i-1} u_{i-1} a_{i+4}.$$

Notemos que aquí estamos tomando  $u_{i+j} \pmod 5$ .

Si  $v = b_i$  para alguna  $i = 1, 2, \dots, 5n$  tenemos que  $G_5(m, n) - \{v\}$  tiene el ciclo hamiltoniano:

$$a_{i+4}a_{i+3}a_{i+2}a_{i+1}u_{i+1}b_{i+1}b_{i+2}u_{i+2}a_{i+7}a_{i+6}a_{i+5}u_i a_i a_{i-1} \dots a_{i+9} a_{i+8} u_{i+3} b_{i+3} b_{i+4} \dots b_{i-1} u_{i-1} u_{i-1} a_{i+4}.$$

Si  $v = u_i$ , para alguna  $i = 1, 2, \dots, 5$  tenemos que  $G_5(m, n) - \{v\}$  tiene el ciclo hamiltoniano:

$$a_{i+1}u_{i+1}b_{i+1}b_i b_{i-1} \dots b_{i+2}u_{i+2}a_{i+2}a_{i+3}u_{i+3}a_{i+8}a_{i+7}a_{i+6}a_{i+5}a_{i+4}u_{i+4}a_{i+9} a_{i+10} \dots a_{i+1}. \quad \square$$

**Teorema 3.2.6** *Todas las gráficas  $G_t(m, n)$  con  $t$  par, son hamiltonianas.*

Demostración: Si  $t = 2$ . Sean los ciclos  $\alpha = \{a_1 a_2 \dots a_{mt}\}$  y  $\beta = \{b_1 b_2 \dots b_{nt}\}$ . Consideremos las trayectorias  $P_1 = \alpha - (a_1, a_2)$  y  $P_2 = \beta - (b_1, b_2)$ . Entonces  $\Gamma = P_1 \cup (a_1, u_1) \cup (u_1, b_1) \cup P_2 \cup (b_2, u_2) \cup (u_2, a_2)$  es un ciclo hamiltoniano.

Si  $t \geq 4$  es par,  $G_t(m, n)$  contiene el ciclo hamiltoniano  $\Gamma = a_1 u_1 b_1 b_2 u_2 a_2 a_3 u_3 b_3 b_4 \dots u_{2h} a_{2h} a_{2h+1} u_{2h+1} b_{2h+1} b_{2h+2} \dots u_{t-1} b_{t-1} b_t \dots b_j b_{j+1} \dots b_{nt} u_t a_t \dots a_i a_{i+1} \dots a_{mt} a_1. \quad \square$

En general las gráficas  $G_t(m, n) - \{v\}$  con  $t \geq 3$  impar, son hamiltonianas para todo  $v \in V(G_t(m, n))$ . En [DV] se muestran dichos ciclos hamiltonianos.

**Corolario 3.2.7** *La cantidad de gráficas hipohamiltonianas no isomorfas  $H(n)$  de orden  $v$  satisfacen las desigualdades  $H(3k) \geq \lfloor \frac{1}{2}(k-3) \rfloor$  y  $H(5k) \geq \lfloor \frac{1}{2}(k-1) \rfloor$  para toda  $k \in \mathbb{Z}^+$ .*

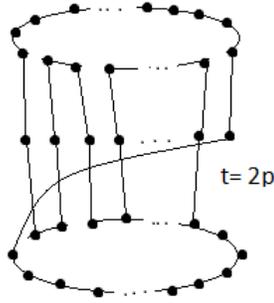


Figura 3-7: Ciclo hamiltoniano en  $G_t(m, n)$  para  $t$  par.

Demostración: Empecemos por la primera desigualdad. Primero veamos que para  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $3k$  sería respectivamente 3,6,9 y 12; y ya sabemos que para esos valores de  $n$ ,  $H(n) = 0$ , si  $k \leq 4$  tenemos que  $k - 3 \leq 1$  y por lo tanto

$$\lfloor \frac{1}{2}(k - 3) \rfloor \leq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$$

y se satisface la desigualdad.

**Observación:** Si  $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$  pero  $m_i \neq n_j$  para  $i, j = 1, 2$  las gráficas  $G_t(m_1, n_1)$  y  $G_t(m_2, n_2)$  son no isomorfas ya que la primera contiene como subgráficas inducidas un ciclo de longitud  $m_1$  y uno de longitud  $n_1$  y la segunda no.

Luego, para  $k \geq 5$  tenemos que la gráfica  $G_3(m, k - m - 1)$  es una gráfica hipohamiltoniana de orden  $3(m + k - m - 1 + 1) = 3k$ .

**Caso 1:** si  $k$  es impar tenemos que  $k = 2p + 1$  entonces en las gráficas  $G_3(m, k - m - 1) = G_3(m, 2p - m)$  al variar  $m$  y tomarnos las parejas  $(m, 2p - m)$  estamos considerando parejas que siempre suman  $2p$ .

Entonces si tomamos  $m = 2, 3, \dots, p$  estamos obteniendo parejas distintas y por lo tanto gráficas no isomorfas. Podemos notar que si  $m = p - 1$  tenemos la pareja  $(p - 1, p + 1)$ ,

si  $m = p$  tenemos la pareja  $(p, p)$  y si  $m = p + 1$  volvemos a tener la pareja  $(p + 1, p - 1)$ , en otras palabras  $m = p + 1$  es el primer valor de  $m$  para el cual obtenemos una pareja repetida. Por lo tanto tenemos  $p - 1 = \lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor$  gráficas no isomorfas de orden  $3k$ .

**Caso 2:** si  $k$  es par tenemos  $k = 2p$ , al variar  $m = 2, 3, \dots, p - 1$  tenemos que las parejas  $(m, 2p - 1 - m)$  suman siempre  $2p - 1$  y son distintas ya que el primer valor de  $m$  que nos da una pareja repetida es  $p$ ;  $m = p - 1$  nos da la pareja  $(p - 1, p)$  y  $m = p$  nos da la pareja  $(p, p - 1)$ . Por lo tanto tenemos  $p - 2 = \lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor$  gráficas no isomorfas de orden  $3k$ .

Para la segunda desigualdad tenemos, que para  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $5k$  vale 5, 10 y 15. Sabemos que no hay gráficas hipohamiltonianas de orden 5 y que hay una única de orden 10. Para  $k = 1$   $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor = 0$ , para  $k = 2$   $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor = 0$  y para  $k = 3$   $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor = 1$ . Por lo tanto se cumple para  $k \leq 3$ .

Para  $k \geq 4$  sabemos que  $G_5(m, k - m - 1)$  es una gráfica hipohamiltoniana y tiene orden  $5m + 5 + 5(k - m - 1) = 5k$ . Entonces análogamente a la desigualdad anterior tenemos que para cada  $m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  se tienen gráficas hipohamiltonianas no isomorfas de orden  $5k$  y por lo tanto se satisface la desigualdad.  $\square$

### 3.3. Construcción de Thomassen.

**Teorema 3.3.1** Sean  $x, y \in \mathbb{N}$  definimos la operación  $*$  :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  como  $x * y = x + y - 5$ . Sea  $A = \{10, 13, 16, 19, 22\}$ , entonces dado  $x \geq 10 \in \mathbb{N} - \{11, 12, 14, 17\}$  existen  $x_1, x_2, \dots, x_j \in A$ , tales que  $x = x_1 * x_2 * \dots * x_j$ .

Demostración: Primero notemos que:  $15 = 10 * 10$ ,

$$18 = 10 * 13,$$

$$20 = 10 * 10 * 10,$$

$$21 = 10 * 16.$$

Procederemos por inducción tomando como base  $n = 22$ . Sea  $k \in \mathbb{N}, k \geq 23$  y supongamos que para todo  $m$  tal que  $23 \leq m \leq k$ , se cumple la hipótesis de inducción. En particular tenemos que existen  $x_1, x_2, \dots, x_j \in A$  tales que  $k - 2 = x_1 * x_2 * \dots * x_j$ .

**Caso 1:**  $x_1 \neq 22$ . En este caso tenemos que  $x_1 + 3 \in A$ . Entonces  $k + 1 = x_1 + 3 * x_2 * \dots * x_j$ .

**Caso 2:**  $x_1 = 22$ . Observemos que  $25 = 10 * 10 * 10 * 10$ . Entonces  $x_1 + 3 = 25$  y tenemos que  $k + 1 = 10 * 10 * 10 * 10 * x_2 * \dots * x_j$ .  $\square$

Vamos a mostrar ahora la construcción de Thomassen para obtener una gráfica hipohamiltoniana  $G = G_1 * G_2$  a partir de dos gráficas hipohamiltonianas  $G_1$  y  $G_2$ .

Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas hipohamiltonianas que contienen cada una un vértice  $x_0, y_0$  de grado 3 respectivamente. Sean  $N(x_0) = \{x_1, x_2, x_3\}$  y  $N(y_0) = \{y_1, y_2, y_3\}$ .

**Afirmación:** la vecindad cerrada de  $x_0$ ,  $N[x_0] = K_{1,3}$ .

Demostración: Supongamos que existe una arista entre algunos de los vértices  $x_1, x_2, x_3$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es entre  $x_1$  y  $x_2$ . Como  $G_1$  es hipohamiltoniana;  $G_1 - \{x_1\}$  contiene un ciclo hamiltoniano  $C$ . Como en  $G_1 - \{x_1\}$  el vértice  $x_0$  tiene grado 2, las aristas  $(x_3, x_0)$  y  $(x_0, x_2)$  deben pertenecer al ciclo  $C$ . Entonces si en  $G_1$  consideramos al ciclo  $C$  y sustituimos la arista  $(x_0, x_2)$  por la trayectoria  $\{x_0, x_1, x_2\}$  obtenemos un ciclo hamiltoniano en  $G_1$  lo cual es una contradicción. Similarmente  $N[y_0] = K_{1,3}$ .  $\square$

Ahora prosigamos con nuestra construcción. Sean  $H_1 = G_1 - \{x_0\}$  y  $H_2 = G_2 - \{y_0\}$ , definimos a  $G$  como la gráfica obtenida al identificar los vértices  $x_i$  con  $y_i$  en un vértice  $z_i$  para  $i = 1, 2, 3$  como se puede ver en la figura 3.3

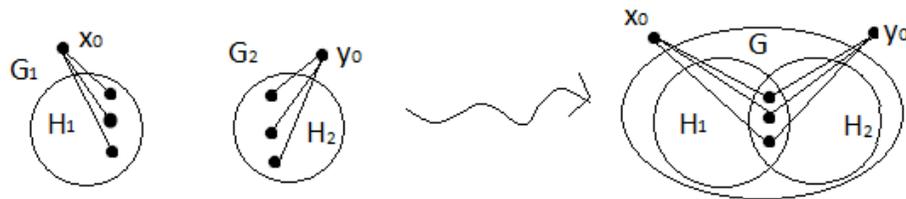


Figura 3-8: La construcción de Thomassen

En resumen la gráfica  $G_1 * G_2$  queda definida como:

$$V(G_1 * G_2) = V(G_1 - N[x]) \cup V(G_2 - N[y]) \cup \{z_1, z_2, z_3\}$$

donde  $x$  y  $y$  eran los vértices de grado 3 de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente, y

$$A(G_1 * G_2) = A(G_1 - N[x]) \cup A(G_2 - N[y]) \cup Z$$

donde

$$(z_i, v) \in Z \Leftrightarrow v \in N[x_i] \cup N[y_i], i = 1, 2, 3$$

donde  $N[x] = \{x_1, x_2, x_3\}$  y  $N[y] = \{y_1, y_2, y_3\}$ .

**Lema 3.3.2** *La gráfica  $G = G_1 * G_2$  es hipohamiltoniana si  $G_1$  y  $G_2$  son hipohamiltonianas.*

Demostración: Primero demostraremos que  $G$  no es hamiltoniana. Supongamos que existe un ciclo hamiltoniano  $C$  en  $G$  que pasa por  $z_1$   $z_2$  y  $z_3$ .

Luego  $C = P_1P_2P_3$  donde  $P_1$  es una  $z_1 - z_2$  trayectoria  $P_2$  es una  $z_2 - z_3$  trayectoria y  $P_3$  es una  $z_3 - z_1$  trayectoria. Observemos que entre las subgráficas  $H_1, H_2$  de  $G$  no existen aristas. Por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $P_1$  y  $P_2$  están contenidas en  $H_1$  y  $P_3$  está contenida en  $H_3$ .

Entonces  $P_1P_2$  es una trayectoria hamiltoniana en  $G_1 - \{x_0\}$ . Esto implica que  $P_1P_2 \cup \{(x_0, x_1), (x_0, x_3)\}$  es un ciclo hamiltoniano de  $G_1$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $G$  no es hamiltoniana.

Ahora veamos que para todo vértice  $v \in V(G)$ , la gráfica  $G - \{v\}$  es hamiltoniana.

**Caso 1:** el vértice  $v \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v$  está en  $H_1$ . Como  $G_1$  es hipohamiltoniana, sea  $C$  un ciclo hamiltoniano en  $G_1 - \{v\}$ . Entonces  $(G_1 - \{v\}) - \{x_0\} = H_1 - \{v\}$  tiene una  $x_i, x_j$ - trayectoria hamiltoniana para  $\{x_i, x_j\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que es una  $x_1x_2$ -trayectoria llamada  $P_1$ .

Similarmente, en  $(G_2 - \{y_3\}) - \{y_0\}$  se tiene una  $y_1y_2$ -trayectoria hamiltoniana llamada  $P_2$ . Consideremos  $H_2 - \{y_3\}$ . Es claro que  $P_1P_2$  es un ciclo hamiltoniano en  $G - \{v\}$ .

**Caso 2:** el vértice  $v \in \{z_1, z_2, z_3\}$ . Supongamos  $v = z_3$ . Entonces  $G_1 - \{v\}$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C_1$  y  $(G_1 - \{v\}) - \{x_0\}$  tiene una  $x_1, x_2$  trayectoria que es hamiltoniana en  $H_1 - \{v\}$ . Análogamente  $(G_2 - \{v\}) - \{y_0\}$  tiene una  $y_1y_2$  trayectoria que es hamiltoniana en  $H_2 - \{v\}$ . La unión de ambas trayectorias nos da un ciclo hamiltoniano en  $G - \{v\}$ .  $\square$

Con este método de construcción, si las dos gráficas iniciales  $G_1$  y  $G_2$  tenían ordenes  $p$  y  $q$  respectivamente, la gráfica  $G = G_1 * G_2$  tiene orden  $p + q - 5$ . Si una de las dos gráficas tiene dos vértices de grado 3 ajenos, la gráfica resultante también tiene un vértice de grado 3 y podemos repetir este proceso, tantas veces como queramos siempre y cuando la gráfica nueva tenga dos vértices distintos de grado 3. En la figura 3.3 se muestra la gráfica  $G$  construida a partir de dos gráficas de Petersen.

Si en particular una de las dos gráficas, digamos  $G_1$  es la gráfica de Petersen, y el vértice que eliminamos de  $G_2$  es  $v_0$  diremos que a  $v_0$  le aplicamos una sustitución de Thomassen.

De la sección anterior, sabemos que existen gráficas hipohamiltonianas de ordenes 10, 13, 16, 19 y 22 que tienen dos vértices de grado 3 ajenos, las cuales nos sirven para construir nuevas gráficas hipohamiltonianas.

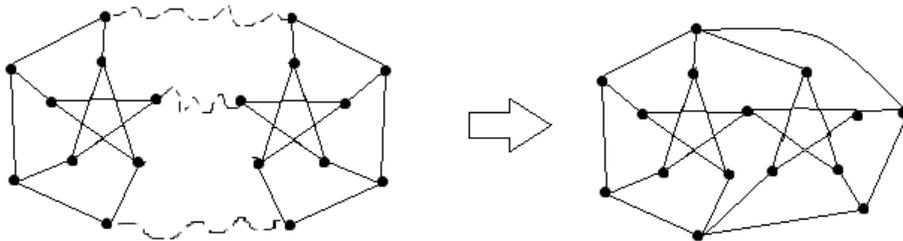


Figura 3-9: La gráfica  $G$  construida a partir de dos gráficas de Petersen.

**Teorema 3.3.3** *Para todo entero  $n \geq 13$  excepto tal vez, 14 o 17, existe una gráfica hipohamiltoniana de orden  $n$ .*

Demostración: Sabemos que existen gráficas hipohamiltonianas de ordenes 10, 13, 16 y 22 que cumplen las hipótesis del lema anterior. El lema nos dice, que apartir de estas gráficas, si tomamos dos, de ordenes  $n$  y  $m$  respectivamente, podemos construir una gráfica hipohamiltoniana de orden  $m + n - 5$ .

Luego por el teorema de teoría de los números 3.3.1, podemos construir gráficas hipohamiltonianas de orden  $n$ , para todo entero  $n \geq 13$  excepto 14 y 17.  $\square$

En 1978 Collier y Schmeichel [CS] probaron que no existen gráficas hipohamiltonianas de orden 14. Por último en 1997 Mc Key y compañía en [AB] probaron que tampoco existen gráficas hipohamiltonianas de orden 17. Así la conclusion es:

**Teorema 3.3.4** *Para todo entero  $n \geq 10$  existen gráficas hipohamiltonianas de orden  $n$  excepto para  $n \in \{11, 12, 14, 17\}$ .*

# Capítulo 4

## Contraejemplos para algunas conjeturas.

En esta sección daremos los contraejemplos que construyó Thomassen en [T2] a 3 conjeturas:

(1) Toda gráfica hipohamiltoniana tiene cuello mayor o igual a 5 (Herz, Duby y Vigué) [HDV].

(2) Si al eliminar una arista de una gráfica hipohamiltoniana no se crea un vértice de grado 2, entonces la gráfica obtenida también es hipohamiltoniana (Chvátal) [Ch].

(3) Si al añadirle una arista a una gráfica hipohamiltoniana de cuello 5 no se modifica el cuello de la gráfica, entonces tampoco se crea un ciclo hamiltoniano (Bondy) [Bo].

Vamos a construir una gráfica que nos servirá para construir los contraejemplos. Definimos la gráfica  $R_2$  de orden 12 como:

$$V(R_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, z, w\}$$



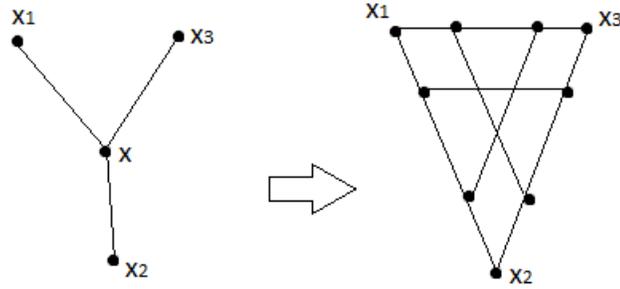


Figura 4-2: La sustitución de Thomassen aplicada al vértice  $x$

Definimos a la gráfica  $G_{R_2}$  como la gráfica obtenida a partir de la gráfica  $R_2$  aplicándole una sustitución de Thomassen a cada uno de los vértices  $x_1, x_3, y_1, y_3$ .

La gráfica que obtuvimos (ver figura 4-2) nos sirve como contraejemplo para las conjeturas (1) y (2). Para demostrarlo necesitamos primero varios lemas.

**Lema 4.0.7** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas ajenas, cada una de ellas con al menos un vértice de grado tres,  $x$ ,  $y$  respectivamente. Supongamos que  $G_2$  es hipohamiltoniana y consideremos la construcción de Thomassen  $G = G_1 * G_2$  con la notación del capítulo anterior. Entonces:

(a) La gráfica  $G = G_1 * G_2$  es hamiltoniana si y sólo si  $G_1$  es hamiltoniana.

(b) Sea  $H_1 = G_1 - \{x\}$ . Para todo  $v \in V(H_1)$ ,  $G - \{v\}$  es hamiltoniana si y sólo si  $G_1 - \{v\}$  es hamiltoniana.

(c) Sea  $N(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Si  $G_1 - \{x_i\}$  es hamiltoniana para todo  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $G - \{v\}$  es hamiltoniana para todo  $v \in V(H_2)$ .

**Demostración de (a):** Supongamos que  $G$  es hamiltoniana y sea  $\Gamma$  un ciclo hamiltoniano en  $G$ . Entonces  $\Gamma$  se puede ver como la unión de tres trayectorias  $\Gamma = P_1 \cup P_2 \cup P_3$  donde cada  $P_i$  es una  $z_i z_{i+1}$  trayectoria con  $i = 1, 2, 3$ . Como los vértices de  $G_1$  y  $G_2$  son ajenos podemos afirmar que dos de las tres trayectorias se quedan contenidas en  $G_1$  o en  $G_2$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que dichas trayectorias son  $P_1$  y  $P_2$ .

Si tuvieramos que  $P_1 \cup P_2 \subset G_2$ , entonces  $P_1 \cup P_2 \cup (y, z_1) \cup (z_3, y)$  es un ciclo

hamiltoniano en  $G_2$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $P_1 \cup P_2 \subset G_1$  y concluimos que  $P_1 \cup P_2 \cup (x, z_1) \cup (z_3, x)$  es un ciclo hamiltoniano en  $G_1$ .

Ahora supongamos que  $G_1$  es hamiltoniana y sea  $\Gamma_1$  un ciclo hamiltoniano en  $G_1$ . Entonces  $\Gamma_1 - \{x\} = P_1$  es una  $z_i z_j$  trayectoria hamiltoniana en  $H_1$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $i = 1, j = 2$ . Luego como  $G_2$  es hipohamiltoniana,  $G_2 - \{z_3\}$  tiene un ciclo hamiltoniano  $\Gamma_2$ . Esto quiere decir que  $\Gamma_2 - \{y\} = P_2$  es una  $z_1 z_2$  trayectoria hamiltoniana en  $H_2$  por lo que  $P_1 \cup P_2$  es un ciclo hamiltoniano en  $G$ .  $\square$

**Demostración de (b):** Sea  $v \in V(H_1)$ . Supongamos que  $G_1 - \{v\}$  es hamiltoniana y sea  $\Gamma_1$  un ciclo hamiltoniano en  $G_1 - \{v\}$ . Entonces  $P_1 = \Gamma_1 - \{x\}$  es una  $z_i z_j$  trayectoria hamiltoniana en  $H_1$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $i = 1, j = 2$ . Luego como  $G_2$  es hipohamiltoniana,  $G_2 - \{z_3\}$  tiene un ciclo hamiltoniano  $\Gamma_2$ . Observemos que  $P_2 = \Gamma_2 - \{y\}$  es una  $z_1 z_2$  trayectoria hamiltoniana en  $H_2$  por lo que  $P_1 \cup P_2$  es un ciclo hamiltoniano en  $G - \{v\}$ .

Ahora supongamos que  $G - \{v\}$  es hamiltoniana y sea  $\Gamma$  un ciclo hamiltoniano en  $G - \{v\}$ .

**Caso 1:** Si  $v \notin \{z_1, z_2, z_3\}$ . Entonces a  $\Gamma$  lo podemos ver como la unión de tres trayectorias  $P_1, P_2$  y  $P_3$  donde cada  $P_i$  es una  $z_i z_{i+1}$  trayectoria con  $i = 1, 2, 3$ . Dos de esas tres trayectorias, supongamos  $P_1$  y  $P_2$ , se quedan contenidas en  $G_1$ . Esto se debe a que si estuvieran contenidas en  $G_2$  podríamos extender a  $P_1 \cup P_2$  a un ciclo hamiltoniano en  $G_2$  lo cual sería una contradicción. Por lo tanto  $P_1 \cup P_2 \subset G_1$ . Con esto concluimos que  $P_1 \cup P_2 \cup (x, z_1) \cup (x, z_3)$  es un ciclo hamiltoniano en  $G_1 - \{v\}$ .

**Caso 2:** Si  $v \in \{z_1, z_2, z_3\}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v = z_1$ . Entonces  $\Gamma = P_1 \cup P_2$  donde  $P_1$  es una  $z_3 z_2$  trayectoria y  $P_2$  es una  $z_2 z_3$  trayectoria. Cada una de las trayectorias se queda contenida en  $G_1$  o  $G_2$ . Supongamos que  $P_1 \subset G_1$ . Entonces  $P_1 \cup (x, z_2) \cup (x, z_3)$  es un ciclo hamiltoniano en  $G_1 - \{v\}$ .  $\square$

**Demostración de (c):** Supongamos que  $G_1 - \{x_i\}$  es hamiltoniana para toda  $i = 1, 2, 3$ , y tomemos un vértice  $v \in V(H_2) \subset V(G_2)$ .

Como  $G_2$  es hipohamiltoniana y  $v \in V(G_2)$ ,  $G_2 - \{v\}$  contiene un ciclo hamiltoniano  $\Gamma_2$ . Entonces  $P = \Gamma_2 - \{y\}$  es una  $z_i z_j$  trayectoria hamiltoniana en  $H_2 - \{v\}$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $i = 1, j = 2$ .

Como  $G_1 - \{x_3\}$  es hamiltoniana, contiene un ciclo hamiltoniano  $\Gamma_1$ . Luego  $\Gamma_1 - \{x\} = P_1$  es una  $z_1 z_2$  trayectoria hamiltoniana en  $H_1$ . Por lo tanto  $P_1 \cup P$  es un ciclo hamiltoniano en  $G - \{v\}$ .  $\square$

**Teorema 4.0.8** *Sea  $G$  una gráfica no hamiltoniana y sea  $B \subset V(G)$ . Supongamos que para todo  $v \in B$ ,  $\delta(v) = 3$  y que si  $x, y \in B$  entonces  $(x, y) \notin A(G)$ . Sea  $H$  la gráfica obtenida a partir de  $G$  aplicándole una sustitución de Thomassen a cada uno de los vértices de  $B$ . Si para todo vértice  $w \in V(G) - B$ ,  $G - \{w\}$  es hamiltoniana, entonces  $H$  es una gráfica hipohamiltoniana que contiene a  $G - B$  como subgráfica.*

*Además, si para toda arista  $a \in A(G - B)$  existe un vértice  $z_a \in V(G) - B$  tal que  $G - \{z_a\} - a$  no es hamiltoniana, entonces  $H$  cumple que para toda arista  $a \in A(H)$ ,  $H - a$  no es hipohamiltoniana.*

Demostración: Como  $G$  no es hamiltoniana, por el inciso (1) del lema 4.0.7 cada que aplicamos una sustitución de Thomassen a alguno de los vértices, la gráfica resultante no es hamiltoniana por lo que  $H$  no es hamiltoniana.

Luego como  $G - \{v\}$  es hamiltoniana para todo  $v \in V(G) - B$  por el inciso (2) del lema 4.0.7,  $H - \{v\}$  es hamiltoniana para todo  $v \in V(G) - B$ .

Finalmente, consideremos  $N$  el conjunto de vértices añadidos en el proceso. Por el inciso (3) del lema 4.0.7, como los vértices de  $B$  son ajenos entre si, tenemos que para todo  $v \in N$ , la gráfica  $H - \{v\}$  es hamiltoniana.

Por lo tanto la gráfica construida  $H$  es hipohamiltoniana y contiene a  $G - B$  como subgráfica.

Para demostrar la segunda parte del teorema tomemos  $a \in A(H)$ .

**Caso 1.** Si  $a \in A(G - B)$ . En este caso, como existe  $z_a$  tal que  $G - a - \{z_a\}$  no es hamiltoniana, tenemos que por el lema 4.0.7, la gráfica  $H - a - \{z_a\}$  tampoco es hamiltoniana por lo que  $H - a$  no es hipohamiltoniana.

**Caso 2.** Si  $a$  es una de las aristas que se añadieron en el proceso de sustituir los vértices de  $B$  mediante una sustitución de Thomassen. En este caso tenemos que  $H - a$  contiene al menos un vértice  $v$  tal que  $\delta(v) = 2$ , por lo que  $H - a$  no puede ser hipohamiltoniana.

□

**Teorema 4.0.9** *La gráfica  $H = G_{R_2}$  es hipohamiltoniana, contiene a  $R_2 - \{x_1, x_3y_1, y_3\}$  como subgráfica y cumple que para toda arista  $(x, y)$ , la gráfica  $H - (x, y)$  no es hipohamiltoniana.*

Demostración: Sea  $G = R_2$ . Ya demostramos anteriormente que  $G$  no es hamiltoniana.

**Afirmación:** Para todo  $v \in V(G)$  tal que  $v \neq x_1, x_3, y_1y_3$ , la gráfica  $G - \{v\}$  es hamiltoniana:

**Caso 1.** Si  $v \in \{w, z\}$ . Si  $v = z$  tenemos el ciclo hamiltoniano

$$\{x_3wy_3y_2y_1y_5y_4x_4x_5x_1x_2x_3\}.$$

Si  $v = w$  tenemos el ciclo hamiltoniano

$$\{x_1zy_1y_2y_3y_4y_5x_5x_4x_3x_2x_1\}.$$

**Caso 2** Si  $v = x_i$  o  $v = y_i$  para alguna  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $v = x_i$ . En este caso tenemos que existe una cantidad par de aristas de la forma  $(x_j, y_j)$  en  $G - \{v\}$ . Entonces el ciclo

$$\{x_1y_1y_2x_2x_3y_3 \dots x_{i-1}y_{i-1}y_iy_{i+1}x_{i+1}x_{i+2}y_{i+2} \dots y_5x_5x_1\}$$

es hamiltoniano en  $G - \{x_i\}$ . Por lo tanto podemos aplicar el teorema 4.0.8 y concluimos que  $H$  es un contraejemplo para la conjetura (1).

Para demostrar la segunda parte del teorema, sea  $a \in A(R_2 - \{x_1, x_3, y_1, y_3\})$ . Queremos encontrar un vértice  $z_a \in V(R_2) - \{x - 1, x_3, y_1, y_3\}$  tal que  $G - z_a - a$  no es hamiltoniana.

Notemos que  $a \in \{(x_2, y_2), (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_4, x_5)(y_4, y_5)\}$ . En la siguiente tabla podemos ver cuales son dichos vértices.

a	$z_a$
$(x_2, y_2)$	$x_5$
$(x_4, x_5)$	$y_2$
$(y_4, y_5)$	$x_2$
$(x_4, y_4)$	$y_2$
$(x_5, y_5)$	$x_2$

Tabla 4-1: Vértices  $z_a$  que cumplen que  $R_2 - \{z_a\} - a$  no es hamiltoniana.

Nuevamente por el teorema 4.0.8 tenemos que  $H$  cumple que al remover cualquier arista, deja de ser hipohamiltoniana. Podemos observar que  $H$  contiene vértices de grado mayor a 3 por lo que este contraejemplo también sirve para la conjetura (2).  $\square$

Una generalización de la gráfica  $R_2$  es una familia infinita de gráficas  $R_k$  para  $k \geq 2$  definida como:

$$V(R_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, y_1, y_2, \dots, y_{2k+1}, z, w\}.$$

$$A(R_k) = \begin{cases} (x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+1}), i = 1, 2, \dots, 2k \\ (x_{2k+1}, x_1)(y_{2k+1}, y_1) \\ (z, x_1)(z, y_1) \\ (w, x_3), (w, y_3) \\ (x_i, y_i), i = 2, 4, 5, 6, \dots, 2k + 1. \end{cases}$$

En [T2] Thomassen demostró que las gráficas  $R_k$  no son hamiltonianas y que a partir de ellas mediante el mismo procedimiento que le aplicamos a la gráfica  $R_2$  se obtiene una familia infinita de gráficas hipohamiltonianas de cuello 4.

Vamos a dar ahora un contraejemplo de la conjetura (3).

Sea  $P$  la gráfica de Petersen y sea  $G = P * P * P$ . Entonces  $G$  tiene cuello 5 y en la siguiente figura podemos ver que las aristas remarcadas forman una trayectoria hamiltoniana. Observar que si añadimos la arista que cierra este ciclo, no se forman ciclos de longitudes 3 o 4, pero sí se forma un ciclo hamiltoniano.

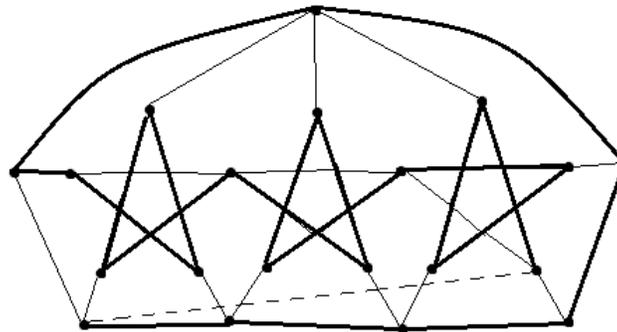


Figura 4-3: Un contraejemplo para la conjetura (3).

# Bibliografía

[AB] R.E.L Alred, McKay, D. Brendan, N.C. Wormald, Small hypohamiltonian graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput. 23 (1997), 143 - 152

[Bo] J.A. Bondy, Variations on the hamiltonian theme, Can. Math. Bull, 15 (1972) 57-62

[Ch] V. Chvátal, Flip-flops in hypohamiltonian graphs, Can. Math. Bull, 16 (1973) 33-41

[CS] J. B. Collier and E.F. Schmeichel, Systematic searches for hypohamiltonian graphs, Networks 8 (1978), no. 3 193 - 20

[DV] Jean Doyen and Viviane van Diest, New families of hypohamiltonian graphs, Discrete mathematics 13 (1975) 225-236

[GHR] Gaudin, T., Herz, J.C. and Rossi, P., Solution du problème no. 29, Rev. Franc. Rech. Operat. 8 (1964) 214-218

[HDV] J.C. Herz and J.J. Duby, F. Vigué, Recherche systematique des graphes hypohamiltoniens, Proc. 1966 Internl. Symp. in Rome P. Rosenthal, ed., Dunod, Paris (1967) 153 - 160

[S] Sousselier, R., Problème no. 29: Le cercle des irascibles, Rev. Franc. Rech. Operat. 7 (1963) 405-406

[T1] Carlsen Thomassen, Hypohamiltonian and hypotraceable graphs, Discrete mathematics 9 (1974) 91-96

[T2] Carlsen Thomassen, On hypohamiltonian graphs, Discrete mathematics 10 (1974) 383-390