UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

El Teorema del Cono

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Lilia Montserrat Vite Escobedo

DIRECTOR DE LA TESIS
Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta
Instituto de Matemáticas, UNAM

Ciudad de México, Diciembre, 2016

Históricamente, la clasificación de variedades algebraicas ha sido un problema fundamental de la geometria algebraica y su resolución ha sido el máximo sueño de los geómetras algebraicos.

On the work of Shigefumi Mori
-Heisuke Hironaka

Índice general

Introducción

Para clasificar una clase de equivalencia birracional de una variedad proyectiva desde el punto de vista de la geometría birracional se ha desarrollado el conocido *Programa de Mori* o *Programa del Modelo Mínimo*, Kenji Matsuki en su libro [Ma] menciona que este programa se basa en las siguientes 4 estrategias:

MP1 Encontrar un buen representante de la clase birracional.

MP2 Estudiar las propiedades del buen representante.

MP3 Estudiar la relación (birracional) entre las posibles elecciones de buenos representantes.

MP4 Construir un espacio de moduli (fijando algunos invariantes discretos como el género o las clases de Chern que varíen en las distintas clases de equivalencia).

Encontrar un buen representante de una clase de equivalencia fija se refiere a encontrar un representante que sea lo más simple posible, llamado minimal, en el sentido de que siempre existe un morfismo birracional de cualquier miembro de la clase de equivalencia a este elemento. En el caso de empezar con una variedad proyectiva suave, una manera de encontrar una variedad minimal dado un representante de la clase de equivalencia es contrayendo las curvas racionales de dicho representante cuya intersección con el divisor canónico sea negativo. Una de las herramientas para este propósito es el *Teorema del Cono*. El objetivo principal de este trabajo es probar este Teorema en el caso de variedades proyectivas suaves.

En el primer capítulo se dan algunas nociones que se utilizan a lo largo de todo el trabajo, en estas nociones no se incluye la definición de esquema o de sus propiedades básicas, estas pueden ser consultadas en [H1, II]. Al final de este capítulo se prueba uno de los tres criterios de amplitud tratados en este trabajo, el cual relaciona la amplitud de un divisor con la anulación de ciertas cohomologías.

En el capítulo dos se prueba el Criterio de Amplitud de Nakai-Moishezon el cual involucra los números de intersección de todos los subesquemas cerrados del esquema. Este criterio da la motivación para definir a los divisores numéricamente efectivos (*nef*) de los cuales enunciaremos algunas propiedades y daremos una caracterización en terminos de las intersecciones con subvariedades de dimensión uno. En el camino para dar el tercer criterio, conocido como el Criterio de Amplitud de Kleiman, definiremos el espacio de curvas asociado a una variedad algebraica $N_1(X)$ y el cono de curvas $\overline{NE}(X)$ los cuales juegan un papel muy importante en el Teorema del Cono. Por último se calculara el cono de curvas de una superficie reglada a modo de ejemplo.

En el capítulo tres mostraremos el porque un modelo minimal es una variedad proyectiva suave cuyo divisor canónico es nef. Posteriormente demostraremos los Lemas de Bend and Break I y II entre otros resultados importantes para finalizar con la demostración del Teorema del Cono en el caso suave.

En el último capítulo probaremos el Teorema de Contracción de Castelnuovo que es muy importante, ya que ayuda a resolver el Programa de Mori en dimensión dos. Este trabajo concluirá con un diagrama que describe el método para encontrar un modelo minimal en el caso de superficies suaves.

Algo que se debe de tener en cuenta al leer este texto es que siempre consideramos esquemas sobre campos algebraicamente cerrados. Cuando hablamos de variedades nos estamos refiriendo a esquemas enteros, noetherianos, separados y de tipo finito sobre un campo. Una variedad completa es una variedad propia sobre el campo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Divisores

En esta sección introduciremos algunos conceptos que son importantes para el desarrollo de este trabajo, empezando por las definiciones de divisor de Weil y de Cartier, así como algunas propiedades de estos y la relación que guardan entre si. Por último se hablará un poco sobre el divisor Canónico el cual tomará importancia en el capítulo tres y cuatro.

1.1.1. Divisores de Weil

Empecemos introduciendo la noción de divisor de Weil, esta definición puede darse sobre un esquema arbitrario, sin embargo en este trabajo nos restringiremos a esquemas que cumplan una condición en particular que definiremos más adelante. Posteriormente introduciremos la definición de divisor de Cartier que además guarda una relación importante con las gavillas invertibles sobre el esquema dado.

No obstante, es importante hablar de los divisores de Weil, al ser una definición más manejable y que además nos ayudara a entender mejor la definición de t-ciclos, los cuales se definirán en el capítulo dos y son necesarios para poder definir el cono de curvas, que juega un papel muy importante para el programa de Mori.

Definición 1.1. *Decimos que un esquema X es* ***regular en codimensión uno*** *si todo anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X de dimensión uno es regular.*

Los ejemplos más importantes de este tipo de esquemas son las variedades no singulares sobre un campo y los esquemas noetherianos normales. En una variedad no singular el anillo local de todo punto cerrado es regular, por lo tanto todos los anillos locales son regulares ya que son la localización de anillos locales de puntos cerrados. En un esquema noetheriano normal, todo anillo local de dimensión uno es un dominio enteramente cerrado y por lo tanto regular.

En toda esta sección vamos a considerar esquemas con la siguiente condición:

(*) X un esquema entero, noetheriano y separable que es regular en codimensión uno.

Definición 1.2. *Sea X un esquema que satisface (*). Un* ***divisor primo*** *en X es un subesquema cerrado Y, entero y de codimensión uno. Un* ***divisor de Weil*** *es un elemento del grupo abeliano libre generado por los divisores primos (denotado por WDiv(X)). Denotaremos un divisor como $D = \Sigma n_i Y_i$, donde los Y_i son divisores primos, los n_i son enteros y sólo un numero finito de estos son distintos de cero. Si $n_i \geqslant 0$ para toda i decimos que D es* ***efectivo****.*

Si Y es un divisor primo en X, sea $\eta \in Y$ su punto genérico, entonces el anillo local $\mathcal{O}_{X,\eta}$ es un anillo de valuación discreta con campo de fracciones K, el campo de funciones de X. Llamaremos a la correspondiente valuación discreta ν_Y la valuación de Y. Dado que X es separado, Y está univocamente determinado por esta valuación. Sea $f \in K^*$ cualquier función racional no cero en X, entonces $\nu_Y(f)$ es un entero. Si es positivo, decimos que f es un cero a lo largo de Y de ese orden; si es negativo, decimos que es un polo a lo largo de Y de orden $-\nu_Y(f)$.

Lema 1.3. *Sea X que satisface (*), y sea $f \in K^*$ una función no cero en X. Entonces $\nu_Y(f) = 0$ para todos, salvo un numero finito de divisores primos Y.*

Demostración.
Sea $U = SpecA$ un abierto afín de X en el que f es regular, definimos $Z = X - U$ que es un subconjunto cerrado y propio de X, como X es noetheriano Z puede contener a lo más un número finito de divisores primos de X, por lo cual, los demás deben intersectar a U, así que es suficiente probar que existen un número finto de divisores primos en U tales que $\nu_Y(f) \neq 0$. Como f es regular en U se tiene que $\nu_Y(f) \geq 0$ para cualquier divisor primo Y de U, además $\nu_Y(f) > 0$ si y sólo si Y está contenido en el subconjunto cerrado de U definido por Af en A, pero este contiene sólo un numero finito de subconjuntos irreducibles de codimensión uno, lo cual prueba el lema.

Definición 1.4. *Sea X que satisface (*) y sea $f \in K^*$. Definimos el* ***divisor de*** *f denotado por (f), dado por*

$$(f) = \Sigma \nu_Y(f) \cdot Y$$

*donde la suma se toma sobre todos los divisores primos de X. Esta bien definido, ya que por el lema anterior, es una suma finita, y por lo tanto un divisor. Cualquier divisor de esta forma es llamado "**divisor principal**".*

Por las propiedades de la valuación tenemos lo siguiente: dados $f, g \in K^*$ se tiene que $(f/g) = (f) - (g)$, así la función que manda f en (f) es un homomorfismo del grupo multiplicativo K^* en el grupo aditivo $WDiv(X)$, y por tanto la imagen es un subgrupo de $WDiv(X)$.

Definición 1.5. *Sea X que satisface (*). Dos divisores D y $D\prime$ se dice que son linealmente equivalentes (denotado por $D \sim D\prime$), si $D - D\prime$ es un divisor principal. El grupo $WDiv(X)$ de todos los divisores dividido por el subgrupo de los divisores principales el llamado "**grupo de clases de divisores de** X", y es denotado por $Cl(X)$.*

Ejemplo 1.1. *Sea X el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$ sobre un campo k. Para cualquier divisor $D = \Sigma n_i Y_i$, definimos el grado de D por $grad(D) = \Sigma n_i grad(Y_i)$, donde $grad(Y_i)$ es el grado de la hipersuperficie Y_i. Dado H el hiperplano $x_0 = 0$. Entonces se tiene que:*

(a) Si D es cualquier divisor de grado d entonces $D \sim dH$

(b) Para cualquier $f \in K^*$, $grad(f) = 0$

(c) La función de grado es un isomorfismo $grad : Cl(X) \to \mathbb{Z}$

Es conveniente extender la noción de divisor de Weil cambiando los coeficientes a los racionales y en algunos casos a los reales, es estos casos los llamaremos $\mathbb{Q}$-divisor y $\mathbb{R}$-divisor, respectivamente.

1.1.2. Divisores de Cartier

Dado un esquema X, para cada abierto afín $U = SpecA$, sea S el conjunto de todos los elementos de A que no son divisores de cero, y sea $K(U)$ la localización de A por el conjunto multiplicativo S. Al anillo $K(U)$ se le conoce como el anillo total de fracciones de A y comúnmente es denotado por A_{tot}. Para cada U conjunto abierto, sea $S(U)$ el conjunto de todos los elementos de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ que no son divisores de cero en cada anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ para todo $x \in U$. Entonces $U \mapsto S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ es una pregavilla, a la gavilla asociada la denotamos por $\mathscr{K}_X$ y la llamamos **"la gavilla de el anillo total de fracciones de $\mathcal{O}_X$"** . En un esquema arbitrario, esta gavilla reemplaza el concepto de campo de funciones en un esquema entero. Denotamos por $\mathscr{K}_X^*$ a la gavilla (de grupo multiplicativo) de los elementos invertibles en $\mathscr{K}_X$. De forma similar, definimos $\mathcal{O}_X^*$ como la gavilla de los elementos invertibles de $\mathcal{O}_X$.

Si X es un esquema reducido se cumple que $\mathscr{K}_X = j_*(\mathcal{O}_X|_{Ass(X)})$ donde $Ass(X)$ denota al subconjunto de puntos en $x \in X$ tales que el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ es asociado al ideal 0, y j es la inclusión de $Ass(X)$ en X. Además $\mathscr{K}_X$ resulta ser una gavilla cuasi-coherente, desafortunadamente esto último no es necesariamente cierto si el esquema no es reducido, por ejemplo el esquema $X = Spec(k[x,y] \oplus (k[x,y]/\langle x,y\rangle))$, ya que se tiene un mapeo natural de $k[x,y]_{tot}[s^{-1}]$ en $(k[x,y][s^{-1}])_{tot}$ que es inyectivo pero no suprayectivo por lo cual $\mathscr{K}_X$ no es cuasi-coherente.

Definición 1.6.

- *Un* ***divisor de Cartier*** *en un esquema X es una sección global de la gavilla $\mathscr{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$.*
- *Un divisor de Cartier es* ***principal*** *si está en la imagen del mapeo natural $\Gamma(X, \mathscr{K}_X^*) \to \Gamma(X, \mathscr{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.*
- *Dos divisores de Cartier son* ***linealmente equivalentes*** *si su diferencia es un divisor principal.*

Pensando en las propiedades del cociente de gavillas, podemos ver que un divisor de Cartier en X puede ser descrito por una cubierta abierta $\{U_i\}$ de X, y para cada i un elemento $f_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{K}_X^*)$, tal que, para cualesquiera i, j se tiene que $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$, denotaremos por $D = \{(U_i, f_i)\}$ a un divisor de Cartier.

Observación 1.7. *Al hablar de la diferencia de dos divisores de Cartier nos estamos refiriendo a la operación multiplicativa de $\mathscr{K}_X^*$ pero se usa la notación aditiva para tener una analogía con los divisores de Weil.*

Definición 1.8.

- *Un divisor de Cartier D es* ***efectivo*** *si puede ser representado por una colección $\{(U_i, f_i)\}$ donde todos los elementos f_i están en $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$.*
- *El* ***soporte*** *de un divisor de Cartier D es el subconjunto cerrado de X definido por*

$$Sop(D) := \{x \in X | 1 \quad no \quad es \quad ecuación \quad local \quad de \quad D \quad en \quad x\}$$

Dado un divisor de Cartier efectivo $D = \{(U_i, f_i)\}$ le podemos asociar un subesquema cerrado de codimensión uno, dado por la gavilla de ideales generada localmente por los elementos $f_i \in \Gamma(U_i, f_i)$.

La siguiente proposición nos da condiciones necesarias para que los grupos de divisores de Weil y de Cartier sean isomorfos y más aún nos dice que este isomorfismo preserva la equivalencia lineal.

Proposición 1.9. *Sea X un esquema entero, separado, noetheriano y localmente factorial (todo anillo local es dominio de factorización única). Entonces el grupo $WDiv(X)$ de divisores de Weil en X es isomorfo al grupo de divisores de Cartier $\Gamma(X, \mathscr{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$, más aún, un divisor principal de Weil se corresponde bajo este isomorfismo con un divisor principal de Cartier.*

Demostración.

Como dominio de factorización única implica dominio enteramente cerrado, se tiene que X es normal y por lo tanto esta bien definido el concepto de divisor de Weil. Además como X es un esquema entero la gavilla $\mathscr{K}_X$ es la gavilla constante correspondiente al campo de funciones K de X.

Dado un divisor de Cartier $D = \{(u_i, f_i)\}$, donde $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de X y $f \in \Gamma(U_i, \mathscr{K}_X^*) = K^*$, se define el divisor de Weil asociado como sigue; para cada divisor primo Y de X tomamos el coeficiente $\nu_Y(f_i)$ donde i es un indice que cumple que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, está bien definido, ya que si j es otro indice con esta propiedad, se tiene que f_i/f_j es invertible en $U_i \cap U_j$ por lo cual $0 = \nu_Y(f_i/f_j) = \nu_Y(f_i) - \nu_y(f_j)$ y así $\nu_Y(f_i) = \nu_Y(f_j)$. Entonces obtenemos un divisor de Weil bien definido $W_D := \Sigma\nu_Y(f_i)Y$ (la suma es finita porque X es noetheriano).

Inversamente, dado W un divisor de Weil en X y $x \in X$ un punto, W induce un divisor de Weil W_x en el esquema local $Spec(\mathcal{O}_{X,x})$. Como $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio de factorización única se tiene que cualquier ideal primo de altura 1 es principal. Así dado $Z \subsetneq Spec(\mathcal{O}_{X,x})$ divisor primo, le corresponde un ideal primo de altura uno, que por lo anterior es ideal principal, es decir, es generado por un elemento $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. Por lo tanto el divisor principal determinado por (f) queda determinado por $(f) = 1 \cdot Z$, es decir, cualquier divisor primo de $Spec(\mathcal{O}_{X,x})$ es principal, se sigue entonces que $W_x = (f_x)$ para algún $f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \subseteq \mathscr{K}_X = K$. Consideremos el divisor de Weil principal (f_x) en X que restringido a x coincide con W_x, por lo tanto, W y (f_x) difieren por divisores primos que no pasan por x y además son una cantidad finita; así, existe una vecindad abierta de x, U_x en X en la que W y (f_x) coinciden; definimos $D_W := \{(U_x, f_x)\}$. Observemos que si f, f' definen el mismo divisor de Weil en un abierto U entonces $f/f' \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$ ya que X es normal, lo que nos dice que D_W está bien definido.

Estas dos construcciones son inversas una de la otra y por la forma en la que se construyen, la segunda afirmación es clara.

$\mathfrak{D}$

Recordemos que grupo de Picard de un esquema X, denotado por Pic(X), esta dado por el grupo de clases de isomorfismo de gavillas invertibles $\mathscr{L}$ (es decir gavillas de $\mathcal{O}_X$- módulos localmente libres de rango 1) con la operación dada por el producto tensorial.

Definición 1.10. *Sea D un divisor de Cartier en un esquema X, representado por $\{(U_i, f_i)\}$. Definimos la subgavilla $\mathcal{O}_X(D)$ de la gavilla de el anillo total de fracciones $\mathscr{K}_X$, como el $\mathcal{O}_X$-submódulo de $\mathscr{K}_X$ generado por f_i^{-1} en U_i. Está bien definido, ya que f_i/f_j es invertible en $U_i \cap U_j$, por lo cual f_i^{-1} y f_j^{-1} generan el mismo submódulo. Decimos que $\mathcal{O}_X(D)$ es la gavilla asociada al divisor D.*

Proposición 1.11. *Sea X un esquema, entonces:*

(a) Para cualquier divisor de Cartier D, $\mathcal{O}_X(D)$ es una gavilla invertible en X. El mapeo $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ es una correspondencia 1 a 1 entre los divisores de Cartier en X y las subgavillas invertibles de $\mathscr{K}_X$.

(b) $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$.

(c) D_1 y D_2 son linealmente equivalentes si y sólo si $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$.

Demostración.

(a)
Si $D = \{(U_i, f_i)\}$ es un divisor de Cartier, entonces el mapeo de $\mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{O}_X(D)|_{U_i}$ definido por $1 \mapsto f_i^{-1}$ es un isomorfismo (por como se definió $\mathcal{O}_X(D)$) como $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de X se tiene que $\mathcal{O}_X(D)$ es localmente libre de rango uno, es decir, gavilla invertible. Para la segunda parte, dado un divisor de Cartier D, este puede ser recuperado con $\mathcal{O}_X(D)$ y un encaje en $\mathscr{K}_X$ tomando como f_i en U_i el inverso del generador local de $\mathcal{O}_X(D)$. Además para cualquier subgavilla invertible de $\mathscr{K}_X$ está construcción nos determina un divisor de Cartier que nos da la correspondencia $1-1$.

(b)
Supongamos que D_1 es generado localmente por f_i y que D_2 es generado localmente por g_i, así $D_1 - D_2$ es generado localmente por $f_i g_i^{-1}$, entonces $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2)$ es localmente generado por $(f_i g_i^{-1})^{-1} = f_i^{-1} g_i$ por lo cual $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) = \mathcal{O}_X(D_1)\mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$ que es una subgavilla de $\mathscr{K}_X$ isomorfa a $\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$.

(c)
Dado un divisor principal D , entonces está definido por $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}_X^*)$, lo cual implica que $\mathcal{O}_X(D)$ es generado globalmente por f^{-1}; mandando $1 \mapsto f^{-1}$ obtenemos un isomorfismo $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D)$. Inversamente, si tenemos un isomorfismo $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D)$ entonces la imagen del 1 vía este isomorfismo nos da un elemento de $\Gamma(X, \mathscr{K}_X^*)$ cuyo inverso define un divisor principal D. Por lo tanto, un divisor D es principal si y sólo si $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D)$. Ahora, D_1 es linealmente equivalente con D_2 si y sólo si $D_1 - D_2$ es un divisor principal, por lo anterior esto pasa si y sólo si $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \cong \mathcal{O}_X$ y por el inciso (b) tenemos que $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$ que es equivalente a que $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$.

Corolario 1.12. *En cualquier esquema X, el mapeo $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ induce un homomorfismo inyectivo entre el grupo $CaCl(X)$ de divisores de Cartier módulo equivalencia lineal y $Pic(X)$.*

Si X es un esquema entero, el homomorfismo $CaCl(X) \to Pic(X)$ de el corolario es un isomorfismo. Si además es noetheriano, separado y localmente factorial existe un isomorfismo natural $Cl(X) \cong Pic(X)$.

1.1.3. El Divisor Canónico

Para definir este divisor requerimos el concepto del módulo de diferenciales sobre un esquema. Dado un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ se tiene un isomorfismo entre X y la imagen del morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$, que es un subesquema localmente cerrado del producto fibrado, es decir, un subesquema cerrado de un subconjunto abierto $W \subseteq X \times_Y X$ el cual tiene asociado una gavilla de ideales $\mathcal{I}$ que nos permite definir una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos dada por:

$$\Omega_{X/Y} := \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

Si X es variedad no singular (un esquema separado y de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k tal que todos sus anillos locales son regulares) y $n = dim(X)$ se tiene que la gavilla $\omega_X := \bigwedge^n \Omega_{X/k}$ es una gavilla invertible que recibe el nombre de **la gavilla canónica de X**.

Definición 1.13. *Sea X una variedad no singular. Un divisor de Cartier K sobre X que cumple que $\mathcal{O}_X(K) \cong \omega_X$ es llamado **divisor canónico de** X.*

El tercer inciso de la Proposición 1.11 nos dice que si K es un divisor canónico, entonces cualquier elemento de su clase de equivalencia lineal es también un divisor canónico, por lo tanto escribiremos K_X como el divisor canónico y nos estaremos refiriendo a cualquier elemento de la clase de equivalencia.

1.2. Divisores Amplios

En toda la sección, cuando digamos divisor, nos estamos refiriendo a divisores de Cartier.

1.2.1. Sistemas Lineales

En esta sección tiene como propósito ver como las secciones globales de una gavilla invertible se corresponden con los divisores efectivos de una variedad. De esta manera, si X es un esquema noetheriano, entero y completo; se tiene que una gavilla invertible y el conjunto de sus secciones globales se corresponde con cierto conjunto de divisores efectivos todos linealmente equivalentes.

Esto lleva a la noción de sistema lineal, que es históricamente una noción vieja.

Sea X un esquema noetheriano, entero, localmente factorial y completo sobre un campo algebraicamente cerrado k (en particular es separado y de tipo finito sobre k). En este caso las nociones de divisor de Cartier y Weil son equivalentes. Más aún, se tiene una correspondencia uno a uno entre las clases de divisores módulo equivalencia lineal y las clases de isomorfismo de gavillas invertibles. Otro dato útil en esta situación es que, para cualquier gavilla invertible $\mathscr{L}$ sobre X, las secciones globales $\Gamma(X, \mathscr{L})$ forman un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Sea $\mathscr{L}$ es una gavilla invertible en X. Supongamos que existe una sección global $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ distinta de cero, esto define un divisor efectivo $D = (s)_0$ como sigue: sobre cualquier abierto $U \subset X$ donde $\mathscr{L}$ es trivial, sea $\varphi : \mathscr{L}|_U \to \mathcal{O}_U$ el isomorfismo trivializador, entonces $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$; como U se extiende sobre una cubierta de X, la colección $\{U, \varphi(s)\}$ determina un divisor de Cartier D en X llamado el *divisor de ceros de s*. De hecho φ está bien definida salvo la multiplicación por elementos de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ por lo cual define bien un divisor de Cartier.

Observación 1.14. *Para el resto de la sección supondremos (al menos de que se indique lo contrario) que X es un esquema noetheriano, entero y completo sobre un campo algebraicamente cerrado k.*

Proposición 1.15. *Sea D un divisor en X y sea $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ la correspondiente gavilla invertible. Entonces:*

(a) Para toda sección global no cero $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, el divisor de ceros $(s)_0$ es un divisor efectivo linealmente equivalente a D

(b) Todo divisor efectivo linealmente equivalente a D es el divisor de ceros $(s)_0$ para alguna $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$

(c) Dos secciones $s, t \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ tienen el mismo divisor de ceros si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que $s = \lambda t$.

Demostración.

(a)
Identificando $\mathscr{L}$ con la subgavilla $\mathcal{O}_X(D)$ de $\mathscr{K}_X$ se tiene que s se corresponde con una función racional $f \in K$. Si $D = \{(U_i, f_i)\}$ con $f_i \in K^*$ entonces $\mathcal{O}_X(D)$ es generado localmente por f_i^{-1}, considerando el isomorfismo $\varphi : \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X$ dado por multiplicar por f_i, entonces $(s)_0$ está definido localmente por $f_i f$ y así $(s)_0 = D + (f)$ lo cual prueba que $(s)_0$ es linealmente equivalente a D.

(b)
Si H es un divisor efectivo linealmente equivalente con D se tiene que $H = D + (f)$ por lo cual $(f) \geq -D$, así f da una sección global de $\mathcal{O}_X(D)$ cuyo divisor de ceros es H.

(c)
Si $(s)_0 = (s')_0$ entonces s y s' se corresponden con dos funciones racionales $f, f' \in K^*$ tales que $(f/f') = 0$ (usando el mismo razonamiento del inciso uno) lo cual implica que $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$.

Definición 1.16. *Dado un divisor D sobre X, un* ***sistema lineal completo*** *es definido por el conjunto (puede ser vacio) de todos los divisores efectivos linealmente equivalentes a D y se denota por $|D|$.*

La proposición anterior nos da una correspondencia uno a uno entre el conjunto $|D|$ y $(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) - \{0\})/k^*$. Esto le da a $|D|$ la estructura de un conjunto de puntos cerrados de un espacio proyectivo sobre k.

Como $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$ y $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ es de dimensión finita [H1, II, Teorema 5.19, pág. 122], $|D|$ está en correspondencia $1-1$ con el espacio proyectivo $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))/k^*$ y definimos:

$$dim|D| = dim\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) - 1$$

Definición 1.17.

1) *Un* ***sistema lineal*** *en X es un conjunto $\mathbb{D}$ de divisores efectivos tales que:*

   a) *Cualesquiera dos elementos de $\mathbb{D}$ son linealmente equivalentes (es decir, $\mathbb{D} \subseteq |D|$ para algún divisor D)*

   b) *Existe un subespacio $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ tal que $\mathbb{D} = \{(s)_0 | s \in V\}$*

   La dimensión del sistema lineal es $dim\mathbb{D} = dimV - 1$

2) *Decimos que un punto $x \in X$ es un* ***punto base*** *para un sistema lineal $\mathbb{D}$ si $x \in Sop(D)$ para todo $D \in \mathbb{D}$. Si $\mathbb{D}$ no tiene puntos base, se dice que $\mathbb{D}$ es* ***libre de puntos base****.*

Proposición 1.18. *Un sistema lineal completo $|D|$ es libre de puntos base si y sólo si $\mathcal{O}_X(D)$ es generado por secciones globales.*

Demostración.
Por definición $|D|$ es libre de puntos base si y sólo si para cualquier $x \in X$ existe $D' \in |D|$ tal que $x \notin Sop(D')$ y esto ocurre si y sólo si $s'(x) \neq 0$ donde $s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ es tal que $D' = (s')_0$ pero esto es equivalente a que s' genere a $\mathcal{O}_X(D)$ en x.

Ahora veamos la relación entre los sistemas lineales en X y los mapeos racionales de X en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$.

Sea $\mathbb{D} \subseteq |D|$ un sistema lineal en X, $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(D)$ y $V \subseteq \Gamma(X, \mathscr{L})$ el subespacio asociado a $\mathbb{D}$. Dadas secciones $s_0, \dots s_n \in V$ que generen a V podemos definir un mapeo racional $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$ como sigue.
Dado $U = X - \{\text{puntos base de } \mathbb{D}\}$. Para un punto cerrado $x \in U$ definimos $\varphi(x) = (s_0(x), \dots s_n(x))$ donde $s_i(x)$ es la imagen de s_i en $\mathscr{L}_x/\mathfrak{M}_x\mathscr{L}_x$. Como los s_i generan a V, se tiene que al menos uno de ellos es distinto de cero, además $\mathscr{L}_x/\mathfrak{M}_x\mathscr{L}_x \cong k$ por lo cual $\varphi(x)$ define un punto en $\mathbb{P}^n_k$. De esta forma se tiene que $s_i = \varphi^*(x_i)$ donde x_i son las secciones canónicas de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$.

Observemos que φ es morfismo si $\mathbb{D}$ es libre de puntos base. Inversamente; dado un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_k$, tomemos la gavilla invertible $\mathscr{L} = \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$ y $s_i = \varphi^*(x_i)$ para $0 \leq i \leq n$, que cumplen que para cualquier $x \in X$ existe algún i con $s_i(x) \neq 0$. Si V es el subespacio de $\Gamma(X, \mathscr{L})$ generado por $s_0, \dots s_n$, se tiene un sistema lineal $\mathbb{D} = \{(s)_0 | s \in V\}$ sin puntos base. Además el morfismo definido por $\mathbb{D}$ y $s_0, \dots, s_n$ es φ. En resumen, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.19. *Existe una correspondencia* $1-1$ *entre los morfismos de* X *en* $\mathbb{P}^n_k$ *y sistemas lineales* $\mathbb{D} \subseteq |D|$ *sin puntos base, junto con* $n+1$ *secciones que generan al subespacio de* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ *asociado a* $\mathbb{D}$.

Demostración.
Es la discusión anterior.

$\mathfrak{D}$

Dado $x \in X$, definimos **el espacio tangente de Zariski en x** como el espacio vectorial $T_x := Hom_{k(x)}(\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2, k(x))$, donde $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$.

Definición 1.20. *Dado un sistema lineal completo* $|D|$ *en* X

1) *Decimos que* $|D|$ ***separa puntos de X*** *si dados* $x, y \in X$ *existe* $D' \in |D|$ *tal que* $x \in Sop(D')$ *y* $y \notin Sop(D')$.

2) *Decimos que* $|D|$ ***separa puntos infinitamente cerca de X*** *si para cualquier* $x \in X$ *punto cerrado y cualquier vector tangente no cero* $t \in T_x$, *existe* $D' \in |D|$ *tal que* $x \in Sop(D')$ *y* $t \notin D'$, *es decir, si* f *es la ecuación local de* D' *en* x ($f_x \in \mathfrak{M}_x$), *se tiene que* $t(\bar{f}_X) \neq 0$ *donde* $\bar{f}_x$ *es el residuo de* f_x *módulo* $\mathfrak{M}_x^2$.

El siguiente lema es un resultado de Álgebra Conmutativa pero que es muy importante para la prueba del último teorema de esta sección.

Lema 1.21. *Sea* $f : A \to B$ *un homomorfismo local, de anillos noetherianos locales, tal que:*

1) f *es inyectivo*

2) $\mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_A^2 \to \mathfrak{M}_B/\mathfrak{M}_B^2$ *es suprayectivo*

3) B *es un* A*-módulo finito*

4) *Los campos residuales de* A *y de* B *son iguales*

Entonces, f *es isomorfismo.*

Demostración. Por el inciso 2 y el lema de Nakayama tenemos que $B\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B$, así por el inciso 3, $B/B\mathfrak{M}_A = B/\mathfrak{M}_B$ es un $A/\mathfrak{M}_A$ espacio vectorial de dimensión finta y por el inciso 4 es de dimensión uno. El conjunto $\{\bar{1}\}$ es una base de $B/B\mathfrak{M}_A$ y nuevamente por el lema de Nakayama, $1 \in \bar{1}$ es un generador de B como A módulo, es decir, para cualquier $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = a \cdot 1 := f(a)1 = f(a)$ lo cual demuestra que $f(A) = B$. Por lo anterior f es suprayectiva, usando el inciso 1 concluimos que f es isomorfismo.

Teorema 1.22. *Sea $|D|$ un sistema lineal completo sobre X libre de puntos base. Sean $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ secciones que lo generan y φ el morfismo de X en $\mathbb{P}^n_k = \mathbb{P}$ asociado. Entonces se tiene que φ es inmersión cerrada si y sólo si $|D|$ separa puntos y separa puntos infinitamente cerca.*

Demostración.

Si φ es inmersión cerrada podemos suponer que X es un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n_k$.

Bajo este supuesto tenemos que $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|_X$ y $|D| = \{X \cap H | H$ es un hiperplano en $\mathbb{P}$ que no contiene a $X\}$.

Dados $x, y \in X$ dos puntos distintos, siempre podemos encontrar un hiperplano que no contenga a X pero que pase por x y no pase por y por lo cual $|D|$ separa puntos.

Que $|D|$ separa puntos infinitamente cerca se sigue de que el espacio vectorial en un punto cerrado $x \in X$, $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ es generado por formas lineales homogéneas.

Inversamente, supongamos que $|D|$ separa puntos y separa puntos infinitamente cerca.

Sean $x, y \in X$ puntos distintos, como $|D|$ separa puntos, existe $D' \in |D|$ tal que $x \in Sop(D)$ pero $y \notin Sop(D)$. Consideremos una sección $s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ cuyo divisor de ceros sea D', entonces $s'(x) = 0$ y $s'(y) \neq 0$. Como $s_0, \ldots s_n$ generan a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$, existen escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in k$ tales que $s' = \Sigma_{i=0}^n \lambda_i s_i$. Evaluando en x y y se tiene que $s'(x) = \Sigma_{i=0}^n \lambda_i s_i(x) = 0$ y $s'(y) = \Sigma_{i=0}^n \lambda_i s_i(y) \neq 0$ por lo cual

$$\varphi(x) = (s_0(x), \ldots, s_n(x)) \neq (s_0(y), \ldots, s_n(y)) = \varphi(y)$$

que prueba la inyectividad de φ.

Sea $\mathscr{I}$ el núcleo del homomorfismo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)$. Sea X' el subesquema cerrado de $\mathbb{P}$ definido por el ideal $\mathscr{I}$. Queremos probar que $\varphi : X \to X'$ es isomorfismo. Por construcción el morfismo $\mathcal{O}_{X'} \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)$ es inyectivo. Sea x un punto cerrado de X y $x' = \varphi(x)$. El hecho de que $|D|$ separe puntos infinitamente cerca nos dice que el morfismo inducido el los espacios tangentes $T_x \to T_{x'}$ es inyectivo, es decir, el mapeo $\mathfrak{M}_{x'}/\mathfrak{M}_{x'}^2 \to \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ es suprayectivo. Como X es propio sobre k, es propio sobre $\mathbb{P}$, es decir, φ es morfismo propio, lo cual nos dice que $\mathcal{O}_x$ es un $\mathcal{O}_{x'}$-módulo coherente, en particular $\mathcal{O}_x$ es un $\mathcal{O}_{x'}$-módulo finito y el lema anterior prueba el teorema.

1.2.2. El Teorema de Serre-Grothendieck

En esta sección se define lo que es un divisor amplio y muy amplio. Además de probar el teorema de Serre-Grothendieck. Este Teorema es de gran importancia , ya que nos permite tener tres formas distintas de verificar que un divisor de Cartier sea amplio, lo cual simplificara la prueba del criterio de amplitud de Nakai-Moishezon en el capítulo dos.

Definición 1.23. *Sea X una variedad. Un divisor de Cartier, se dice que es* ***muy amplio*** *si para algún $r \in \mathbb{N}$ existe una inmersión cerrada $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_k$ tal que $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k}(1)|_X$.*

Dada una variedad X, si además le pedimos que sea entera y completa, por el Teorema 1.22 se tiene que un divisor de Cartier en X es muy amplio si y sólo si, es libre de puntos base, separa puntos y separa puntos infinitamente cerca.

Definición 1.24. *Sea X una variedad. Un divisor de Cartier, se dice que es* ***amplio*** *si nD es muy amplio para algún entero positivo n.*

Observación 1.25. *Si X es un esquema entero, sabemos que cualquier gavilla invertible $\mathscr{L}$ en X es isomorfa a la gavilla asociada a un divisor de Cartier, es decir, existe un divisor de Cartier D en X, tal que $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$. Diremos que $\mathscr{L}$ es una gavilla amplia, si D es un divisor amplio.*

La existencia de divisores amplios en una variedad X implica en particular que X es un esquema proyectivo.

Teorema 1.26 (Serre-Grothendieck)**.** *Sea X un esquema entero y completo. Consideramos D un divisor de Cartier en X y $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(D)$ la gavilla invertible en X asociada a D. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) D es amplio

(2) Dada cualquier gavilla coherente $\mathscr{F}$ en X se tiene que para n lo suficientemente grande

$$H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0 \; \forall i > 0$$

(3) Dada cualquier gavilla coherente $\mathscr{F}$ en X se tiene que para n lo suficientemente grande $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales, es decir, existe una familia de secciones globales $\{s_i\}_{i \in I} \subseteq \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)$ cuyos gérmenes para cualquier punto $x \in X$ generan el tallo $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)_x$ como $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Si $\mathscr{L}$ es amplia, por definición tenemos que existe $s > 0$ tal que $\mathscr{L}^s$ es muy amplia. Si suponemos que (2) se cumple para $\mathscr{L}^s$ se tiene que dada una gavilla coherente $\mathscr{F}$ en X, entonces para cada $r \in \{0, \dots, s-1\}$ podemos encontrar un entero $n_r > 0$ tal que, para cualquier $n \geqslant n_r$ $H^i(X, (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^r) \otimes \mathscr{L}^{sn}) = 0$ para toda $i > 0$. Escogemos $N \geqslant \max_{r \in \{0,\dots,s-1\}}\{sn_r\}$, así para toda $n \geqslant N$ se cumple que $H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = H^i(X, (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^r) \otimes \mathscr{L}^{s(n_r+k)}) = 0$ para toda $i > 0$. Por lo tanto, podemos suponer que $\mathscr{L}$ es muy amplia.

Sea $\mathscr{L}$ una gavilla muy amplia, entonces tenemos una inmersión cerrada $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_k = \mathbb{P}$ para algún r, tal que $\mathscr{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|_X$. Dada cualquier gavilla coherente $\mathscr{F}$ en X tenemos que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n = \mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ y por un Teorema de Serre [H1, III, Teorema 5.2, pág. 228] se tiene que $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ para toda $i > 0$ y n lo suficientemente grande.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente en X. Para un punto $x \in X$ un punto cerrado, consideremos la gavilla de ideales $\mathscr{I}_x$ de $\mathcal{O}_X$ definido por el subesquema cerrado $\{x\}$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{I}_x\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{I}_x\mathscr{F} \to 0$$

lo cual nos da la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{I}_x\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n \to \mathscr{F}/\mathscr{I}_x\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n \to 0$$

la cual induce una sucesión exacta en cohomología

$$H^0(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) \to H^0(X, \mathscr{F}/\mathscr{I}_x\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) \to H^1(X, \mathscr{I}_x\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)$$

Como $\mathscr{I}_x\mathscr{F}$ es una gavilla coherente en X, para n lo suficientemente grande $H^1(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$, es decir, existe $n_0 > 0$ tal que, para cualquier $n \geqslant n_0$ el morfismo $H^0(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) \to H^0(X, \mathscr{F}/\mathscr{I}_x\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)$ es suprayectivo. Por el lema de Nakayama se tiene que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ es generado por secciones globales en x y por lo tanto en una vecindad abierta de x. En particular, tomando $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$ lo anterior nos dice que para n_1 lo suficientemente grande, $\mathscr{L}^{n_1}$ es generada por secciones globales en una vecindad abierta U de x.

Para cada $r \in \{0, \dots, n_1\}$ existe U_r vecindad abierta de x tal que la gavilla $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{n_0+r}$ es generada por secciones globales en U_r. Definimos

$$U_x = U \cap U_0 \cap \ldots \cap U_n$$

Entonces se tiene que para toda $m > 0$ la gavilla $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{n_0+r} \otimes \mathscr{L}^{n_1 m}$ es generada por secciones globales en U_x. Dado que cualquier n lo suficientemente grande puede ser escrita de la forma $n_0 + r + n_1 m$ entonces $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ puede ser generada por secciones globales en U_x para n lo suficientemente grande, digamos mayor que cierta n_x.

Si repetimos el proceso para cada punto cerrado de X obtenemos una cubierta abierta de X, pero como X es cuasi-compacto podemos cubrir a X con un número finito de estos abiertos, digamos $U_{x_1}, \dots, U_{x_t}$. Sea $N = \text{máx}_{i \in \{1,\dots,t\}}\{n_{x_i}\}$, entonces para cualquier $n \geqslant N$ la gavilla $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Si $\mathscr{L}^s$ es generada por secciones globales para cierta $s > 0$, remplazando $\mathscr{L}^s$ por $\mathscr{L}$ podemos suponer que $\mathscr{L}$ es generada por secciones globales y por lo tanto para cualquier $n > 0$ se tiene que $\mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales.

Sea $\varphi_n : X \to \mathbb{P}_k^{N_n}$ el morfismo definido por $\mathscr{L}^n$. Dado un punto cerrado $x \in X$, sea $\mathscr{I}_x$ la gavilla de ideales definida por $\{x\}$. Si φ_n es isomorfismo en x (es decir, el morfismo inducido entre los espacios tangentes del punto x y su imagen es isomorfismo) se tiene que $\mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales. Veamos que el regreso también es cierto. Si $\mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales, sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^n)$ entonces s es un elemento de $\Gamma(X, \mathscr{L}^n)$ tal que $s(x) = 0$. Por otro lado, dado cualquier punto $y \in X - \{x\}$ por hipótesis podemos escoger $s \in \Gamma(X, \mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^n)$ tal que $s(y) \neq 0$, es decir $|nD|$ separa a cualquier punto de x. De manera similar concluimos que φ_n separa puntos infinitamente cerca de x, si $\mathscr{I}_x/\mathscr{I}_x^2 \otimes \mathscr{L}^n$ es generado por secciones globales y por la prueba del Teorema 1.22 tenemos que φ_n es isomorfismo en x.

Dado cualquier punto cerrado $x \in X$, por hipótesis tenemos que para n lo suficientemente grande $\mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales, es decir, φ_n es isomorfismo en x. Para cualquier $n > 0$ definimos

$$U_n = \{y \in X | \varphi_n \quad es \quad isomorfismo \quad en \quad y\}$$

Que es un subconjunto abierto de X para toda $n > 0$. Además, para toda $n > 0$ se tiene que $U_n \subseteq U_{n+1}$ ya que dado $y \in U_n$ entonces φ_n es isomorfismo en y lo cual implica que $\mathscr{I}_y \otimes \mathscr{L}^n$ es generada por secciones globales, pero $\mathscr{L}$ es generada por secciones globales, por lo tanto $\mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^n \otimes \mathscr{L} = \mathscr{I}_x \otimes \mathscr{L}^{n+1}$ es generada por secciones globales, así φ_{n+1} es isomorfismo en y que por definición implica que $y \in U_{n+1}$.

Como para cualquier $x \in X$ existe n tal que $x \in U_n$ entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una cubierta abierta de X, pero X es cuasi-compacto por lo que existe N lo suficientemente grande tal que $X = U_N$, es decir, φ_N es inmersión cerrada, lo cual completa el teorema.

1.3. Producto de Intersección

Consideremos al anillo de polinomios en las variables $n_1, \ldots, n_t$ con coeficientes en el campo de los números racionales, $\mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$, decimos que un polinomio $f \in \mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$ es **numérico** si para cualquier elemento $(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{Z}^t$ su valor en f es un número entero.

Observación 1.27. *En toda la sección se supondrá que X es un esquema completo sobre un campo algebraicamente cerrado k.*

Teorema 1.28. *Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos. Para $t \geqslant 0$ consideremos $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ gavillas invertibles de $\mathcal{O}_X$-módulos. Entonces la función*

$$f_{\mathscr{F}}(n_1, \ldots, n_t) = \chi(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{L}^{n_t})$$

es un polinomio numérico en las variables $n_1, \ldots, n_t$ de grado menor igual a la dimensión del soporte de $\mathscr{F}$.

La prueba pude verse en [Ba, I, pág. 1].

La importancia del teorema anterior es que nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.29. *Dado $t \geqslant 0$ sean $\mathscr{L}_l, \ldots, \mathscr{L}_t$ gavillas invertibles en X y $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente tal que $dimSop(\mathscr{F}) \leqslant t$. Definimos el número de intersección de $\mathscr{L}_l, \ldots, \mathscr{L}_t$ con $\mathscr{F}$, denotado por $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F})_X = (\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F})$, como el coeficiente del monomio $n_1 \cdots n_t$ en el polinomio numérico de $\chi(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_l^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{L}_t^{n_t})$. En el caso de que $\mathscr{L}_l = \ldots = \mathscr{L}_t = \mathscr{L}$ escribiremos $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F})$ simplemente como $(\mathscr{L}^{\cdot t} \cdot \mathscr{F})$.*

Observación 1.30. *Por un criterio de polinomios numéricos se puede ver que este número siempre es un número entero.*

Definición 1.31. *Dado un subesquema cerrado W de X de dimensión t definimos el producto de intersección de $\mathscr{L}_l, \ldots, \mathscr{L}_t$ con W como $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot W) := (\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathcal{O}_W)$. En el caso $W = X$ escribimos $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot W)$ como $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t)$.*

Sea $f : Y \to X$ un morfismo de esquemas completos e irreducibles sobre k. Si $y \in Y$ y $x \in X$ son sus puntos genéricos. Entonces tenemos que:

a) $f(y) = x$ si y sólo si $dimf(Y) = dimX$

b) Si $f(y) = x$ entonces cualquier $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo M de longitud finita es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo de longitud finita si y sólo si $dimY = dimX$; en este caso se tiene la formula

$$long_{\mathcal{O}_{X,x}}(M) = [k(y) : k(x)] long_{\mathcal{O}_{Y,y}}(M)$$

Definición 1.32. *Sea $f : Y \to X$ un morfismo de esquemas completos e irreducibles sobre k, $y \in Y$ y $x \in X$ sus puntos genéricos. Definimos el grado de f como:*

$$grad(f) := \begin{cases} \frac{long_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,y})}{long_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})} & si \quad dimY = dimX = dimf(y) \\ \\ 0 & en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

Las siguientes propiedades determinan al producto de intersección. Las pruebas de estas propiedades y la unicidad del producto de intersección se pueden ver en [Ba, I].

P1 Si $dimSop(\mathscr{F}) < t$ entonces $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F}) = 0$ y $(\mathscr{F}) = dimH^0(X, \mathscr{F})$ si $dimSop(\mathscr{F}) = t = 0$.

P2 $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F})$ es una forma multilineal y simetrica en $\mathscr{L}_l, \ldots, \mathscr{L}_t$.

P3 Si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ es una sucesión exacta de gavillas coherentes de $\mathcal{O}_X$-módulos tales que $dimSop(\mathscr{F}) \leqslant t$ entonces

$$(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F}) = (\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F}') + (\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F}'')$$

P4 Si D es un divisor efectivo en X con $Sop(D) \cap Ass(\mathscr{F}) = \emptyset$ entonces:

$$(\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathscr{L}_2 \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F}) = (\mathscr{L}_2 \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_D)$$

P5 Si $Sop(\mathscr{F}) = Z$ está contenido en un subesquema cerrado W de X entonces Z es definido por la gavilla de ideales $Ann(\mathscr{F})$ y es un subesquema cerrado de W, por lo que podemos considerar a $\mathscr{F}$ como un $\mathcal{O}_W$-módulo coherente y se tiene que:

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{L}_t^{n_t} = (\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_W) \otimes \mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{L}_t^{n_t} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_{1,W}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{L}_{t,W}^{n_t}$$

Donde $\mathscr{L}_{i,W} = \mathscr{L}_i \otimes \mathcal{O}_W$ con $i \in \{1, \ldots, t\}$. Entonces tenemos que:

$$(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F})_X = (\mathscr{L}_{l,W} \cdots \mathscr{L}_{t,W} \cdot \mathscr{F})_W$$

En particular $(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t \cdot W)_X = (\mathscr{L}_{l,W} \cdots \mathscr{L}_{t,W})_W$.

P6 Sea $f : Y \to X$ morfismo de esquemas completos e irreducibles sobre k y suponemos que $t \geqslant dimY, dimX$. Si $\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t$ son gavillas invertibles de $\mathcal{O}_X$-módulos y $\mathscr{L}_i' = f^*(\mathscr{L}_i)$ para $i \in \{1, \ldots, t\}$, entonces:

$$(\mathscr{L}_l' \cdots \mathscr{L}_t')_Y = grad(f)(\mathscr{L}_l \cdots \mathscr{L}_t)_X$$

Para finalizar este capítulo, escribiremos la formula de proyección. La prueba de está formula puede consultarse en [Ba, I, pagina 7].

Teorema 1.33 (Formula de Proyección)**.** *Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo entre esquemas algebraicos completos é irreducibles. Sean $\mathscr{L}_1, \ldots \mathscr{L}_r$ gavillas invertibles en Y, con $r \geqslant dimX, dimY$. Se tiene que*

$$(\pi^* \mathscr{L}_1 \cdots \pi^* \mathscr{L}_r)_Y = grad(\pi)(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_r)_X$$

Capítulo 2

El Cono de Mori

En todo el capítulo, salvo que se indique lo contrario, X será un esquema completo sobre un campo algebraicamente cerrado k. Además, a partir de este capítulo cuando denotemos $\mathbb{R}^+$ nos estamos refiriendo al conjunto de los reales positivos unión el cero.

2.1. Criterio de Amplitud de Nakai-Moishezon

En esta sección, probaremos el criterio de Nakai-Moishezon. Este es un criterio de amplitud que sólo involucra números de intersección con todos los subesquemas cerrados del esquema. Eventualmente se quiere probar que la amplitud es una propiedad numérica, en el sentido de que sólo depende de los números de intersección con 1-ciclos.

Lema 2.1. *Sea $\mathscr{L}$ una gavilla invertible amplia en X, entonces para cualquier subesquema cerrado Y de X se tiene que $\mathscr{L}|_Y$ es amplia en Y.*

Demostración.
Primero observamos que $\mathscr{L}|_Y^n = \mathscr{L}^n|_Y$. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente en Y. Consideremos la gavilla coherente en X, $\overline{\mathscr{F}}$, dada por la extensión por 0 fuera de Y. Por lo tanto tenemos que $H^i(Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}|_y^n) = H^i(X, \overline{\mathscr{F}} \otimes \mathscr{L}^n)$ para toda $i > 0$. Como $\mathscr{L}$ es amplia en X, por el Teorema de Serre-Grothendieck 1.26, tenemos que para $i > 0$ y n lo suficientemente grande $H^i(X, \overline{\mathscr{F}} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$. Lo que implica que $\mathscr{L}|_Y$ es amplia.

Usaremos este Lema para probar dos equivalencias que reducen la demostración del criterio de Nakai-Moishezon, al caso cuando X es un esquema entero.

Proposición 2.2. *Sea $\mathscr{L}$ una gavilla invertible en X, entonces $\mathscr{L}$ es amplia en X y sólo si $\mathscr{L}_{red}$ es amplia en X_{red}.*

Demostración.

$\Rightarrow$

Como X_{red} es cerrado en X, por el Lema anterior concluimos que $\mathscr{L}_{red}$ es amplia en X_{red}.

$\Leftarrow$

Sea $\mathscr{F}$ gavilla coherente en X y N el nilradical de $\mathcal{O}_X$.

Como X es noetheriano, existe $r > 0$ tal que $N^r = 0$. Consideremos la siguiente filtración

$$\mathscr{F} \supseteq N\mathscr{F} \supseteq N^2\mathscr{F} \supseteq \ldots \supseteq N^r\mathscr{F} = 0.$$

Para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to N^k\mathscr{F} \to N^{k-1}\mathscr{F} \to N^{k-1}\mathscr{F}/N^k\mathscr{F} \to 0$$

que induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{aligned}\ldots \to H^i(X, N^k\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^i(X, N^{k-1}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^i(X, N^{k-1}\mathscr{F}/N^k\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n)\\ \to H^{i+1}(X, N^k\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^{i+1}(X, N^{k-1}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to \ldots \qquad (\star)\end{aligned}$$

$N^{k-1}\mathscr{F}/N^k\mathscr{F}$ es un $\mathcal{O}_{X_{red}}$-módulo finitamente generado para toda k. Por hipótesis $0 = H^i(X_{red}, N^{k-1}\mathscr{F}/N^k\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n_{red}) = H^i(X, N^{k-1}\mathscr{F}/N^k\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n)$ para toda $i > 0$ y n lo suficientemente grande. Por otro lado, para $s > r$ se tiene que $N^s = 0$ lo cual implica que para toda $i > 0$ y cualquier n, $H^i(X, N^s\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) = 0$. Aplicando esto en $(\star)$ para $k = r$ tenemos

$$\ldots \to 0 \to H^i(X, N^{r-1}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^i(X, N^{r-1}\mathscr{F}/N^r\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to 0 \to \ldots$$

entonces $H^i(X, N^{r-1}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) = 0$ para $i > 0$ y n lo suficientemente grande.

Por el mismo argumento tenemos que $H^i(X, N^{k-1}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) = 0$ para $k \in \{1, \ldots, r-1\}$. Por lo tanto, para $k = 1$ se tiene que $H^i(X, \mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) = 0$ para $i > 0$ y n lo suficientemente grande. Por el Teorema de Serre-Grothendieck 1.26 $\mathscr{L}$ es amplia.

Proposición 2.3. *Sean $X_1, \ldots, X_r$ las componentes irreducibles de X y $\mathscr{L}$ una gavilla invertible en X. Entonces $\mathscr{L}$ es amplia en X si y sólo si, $\mathscr{L}|_{X_k}$ es amplia en X_k para toda $k \in \{1, \ldots, r\}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$

Cada componente irreducible es un conjunto cerrado en X, por el Lema 2.1 se tiene que $\mathscr{L}|_{X_k}$ es amplia para toda k.

$\Leftarrow$

Sea $\mathscr{F}$ gavilla coherente en X. Por la Proposición anterior, podemos suponer que X es reducido. Sea $X = \bigcup_{k=1}^r X_k$, con X_k componente irreducible en X. La prueba se hará por inducción en r.

Si $r = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que es cierto para $k < r$.

Consideremos $\mathcal{I}$ el ideal de X_1. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n \to \mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n \to \mathscr{F}/\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n \to 0$$

que induce la sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{aligned}\ldots \to H^i(X, \mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^i(X, \mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^i(X, \mathscr{F}/\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to\\ H^{i+1}(X, \mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to H^{i+1}(X, \mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \to \ldots\end{aligned}$$

Como $Sop(\mathscr{F}/\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \subseteq X_1$, entonces $H^i(X, \mathscr{F}/\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) = H^i(X_1, \mathscr{F}/\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}|^n_{X_1})$ para toda i. Por hipótesis, $\mathscr{L}|_{X_1}$ es amplia en X_1. Por el Teorema de Serre- Grothendieck se tiene que para $i > 0$ y n lo suficientemente grande $H^i(X_1, \mathscr{F}/\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}|^n_{X_1}) = 0$.

Por otro lado, como $Sop(\mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \subseteq X_2 \cup \ldots \cup X_r$, por escisión, tenemos que $H^i(X, \mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) \cong H^i(X - X_1, \mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n)$. Aplicando la hipótesis de inducción en $X - X_1$ concluimos que $H^i(X - X_1, \mathcal{I}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^n) = 0$ para toda $i > 0$ y n lo suficientemente grande.

De esta manera, usando la sucesión exacta larga, tenemos que para n lo suficientemente grande

$$0 \to H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) \to 0$$

para $i > 0$, lo que implica que $H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$. Nuevamente por el Teorema 1.26 se tiene que $\mathscr{L}$ es amplia.

☽

Lema 2.4. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas enteros, finito y suprayectivo de grado m. Entonces para cualquier gavilla coherente $\mathscr{F}$ en Y, existe una gavilla coherente $\mathscr{G}$ en X y un isomorfismo genérico (isomorfismo en una vecindad del punto genérico de Y)*

$$u : f_*\mathscr{G} \to \mathscr{F}^{\oplus m}.$$

Demostración.

Sean $K(X)$ y $K(Y)$ los campos de funciones racionales de X y Y respectivamente. Como f es finito y suprayectivo, se tiene que $K(X)$ es una extensión algebraica de $K(Y)$ de grado m.

Sea $U = SpecA \subseteq X$. Como $K(X)$ es el campo de fracciones de A, podemos elegir $s_1, \ldots, s_m \in A$ que sean una base de $K(X)$ como $K(Y)$ espacio vectorial. Sea $\mathcal{M}$ la subgavilla de $K(X)$ generada por $s_1, \ldots, s_m$ como $\mathcal{O}_X$-módulo. Esta subgavilla es una gavilla coherente en X y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{M})$.

Consideremos el morfismo $u : \mathcal{O}_Y^{\oplus m} \to f_*\mathcal{M}$ definido por $e_i \mapsto s_i$, donde $\{e_1\}_{i=1}^m$ es la base canónica de $\mathcal{O}_Y^{\oplus m}$. Por construcción u es un isomorfismo genérico.

Para cada $\mathscr{F}$ gavilla coherente en Y, u induce un homomorfismo de gavillas

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{M}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^{\oplus m}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cong} \mathscr{F}^{\oplus m}$$

Como $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{M}, \mathscr{F})$ tiene estructura de $f_*\mathcal{O}_X$-módulo y f es finito, podemos escribir

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{M}, \mathscr{F}) = f_*\mathscr{G}$$

para alguna gavilla coherente $\mathscr{G}$ en X.

☽

Proposición 2.5. *Sean $f : X \to Y$ un morfismo finito y suprayectivo, y $\mathscr{L}$ una gavilla invertible en Y. Entonces $f^*\mathscr{L}$ es amplia en X si y sólo si, $\mathscr{L}$ es amplia en Y.*

Demostración.

$\Rightarrow$

Por las Proposiciones 2.2 y 2.3 podemos suponer que X y Y son esquemas enteros. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente en Y. Usaremos inducción noetheriana en el soporte de $\mathscr{F}$. Por el Lema anterior, existe un isomorfismo genérico $u : f_*\mathscr{G} \to \mathscr{F}^{\oplus m}$, con $\mathscr{G}$ una gavilla coherente en X y m el grado del morfismo f. Sean K y C el núcleo y conúcleo de u respectivamente. Entonces tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 \to K \to f_*\mathscr{G} \to Im(u) \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to Im(u) \to \mathscr{F}^{\oplus m} \to C \to 0 \tag{2}$$

Observamos que como u es un isomorfismo genérico, se tiene que $Sop(K) \subsetneq Sop(\mathscr{F})$ y $Sop(C) \subsetneq Sop(\mathscr{F})$. Además K y C son gavillas coherentes en Y. Así, por hipótesis de inducción $H^i(Y, K \otimes \mathscr{L}^n) = H^i(Y, C \otimes \mathscr{L}^n) = 0$ para $i > 0$ y n lo suficientemente grande. Usando las sucesiones (1) y (2) tenemos que

$$\ldots \to 0 \to H^i(Y, f_*\mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^n) \to H^i(Y, Im(u) \otimes \mathscr{L}^n) \to 0 \to \ldots$$

y

$$\ldots \to 0 \to H^{i+1}(Y, Im(u) \otimes \mathscr{L}^n) \to H^{i+1}(Y, \mathscr{F}^{\oplus m} \otimes \mathscr{L}^n) \to 0 \to \ldots$$

Por lo tanto $H^i(Y, f_*\mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^n) \cong H^i(Y, \mathscr{F}^{\oplus m} \otimes \mathscr{L}^n) \cong (H^i(Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n))^{\oplus m}$ para $i > 1$

Por otro lado, como f es un morfismo finito y suprayectivo, por [EGA, 1.3.3, pág. 432] se tiene que

$$H^i(Y, f_*\mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^n) = H^i(Y, f_*(f^*(f_*\mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^n))) \cong H^i(X, \mathscr{G} \otimes (f^*\mathscr{L})^n)$$

Como $\mathscr{G}$ es una gavilla coherente en X y por hipótesis $f^*\mathscr{L}$ es amplia en X, tenemos que para toda $i > 1$ y n lo suficientemente grande $H^i(X, \mathscr{G} \otimes (f^*\mathscr{L})^n) \cong (H^i(Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n))^{\oplus m} = 0$. El único caso que nos falta verificar es el caso $i = 1$, si bien, no podemos asegurar un isomorfismo de $H^1(Y, Im(u) \otimes \mathscr{L}^n)$ y $H^1(Y, \mathscr{F}^{\oplus m} \otimes \mathscr{L}^n)$, al menos podemos asegurar que si hay una función suprayectiva. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^1(Y, Im(u) \otimes \mathscr{L}^n) \arrow[r] & H^1(Y, \mathscr{F}^{\oplus m} \otimes \mathscr{L}^n) \arrow[r] & 0 \\ H^1(X, \mathscr{G} \otimes (f^*\mathscr{L})^n) \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

para $i = 1$ y n lo suficientemente grande $H^1(X, \mathscr{G} \otimes (f^*\mathscr{L})^n) = 0$, entonces

$$(H^1(Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n))^{\oplus m} = H^1(Y, \mathscr{F}^{\oplus m} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$$

por lo tanto, tenemos que para $i > 0$ y n lo suficientemente grande, $H^i(Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$, y por el Teorema de Serre-Grothendieck $\mathscr{L}$ es amplia en Y.

$\Leftarrow$

Supongamos que $\mathscr{L}$ es amplia en Y. Sea $\mathscr{F}$ gavilla coherente en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es una gavilla coherente en Y. Por la formula de proyección se tiene que

$$f_*(\mathscr{F} \otimes (f^*\mathscr{L})^n) \cong f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$$

como f es un morfismo finito por [EGA, 1.3.3, pág. 432] tenemos que

$$H^i(X, \mathscr{F} \otimes (f^*\mathscr{L})^n) \cong H^i(Y, f_*(\mathscr{F} \otimes (f^*\mathscr{L})^n)) = H^i(Y, f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)$$

pero $H^i(Y, f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$ para toda $i > 0$ y n lo suficientemente grande ya que $\mathscr{L}$ es amplia en Y. Por lo tanto, $f^*\mathscr{L}$ es amplia en X.

$\mathfrak{D}$

Teorema 2.6 (Criterio de Amplitud de Nakai-Moishezon). *Un divisor de Cartier D sobre X es amplio si y sólo si, para cualquier subesquema cerrado y entero Y de X se tiene que*

$$(D^{\cdot dim Y} \cdot Y) > 0$$

Demostración.

$\Rightarrow$

Si D es un divisor amplio en X, podemos suponer que D es muy amplio, reemplazándolo por un múltiplo nD. De esta manera, podemos ver a X como un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^r_k$ para algún $r > 0$, con $D = X \cap H$, donde $H \subseteq \mathbb{P}^r_k$ es un hiperplano. Sea Y un subesquema cerrado y entero de X. Entonces se tiene que

$$(D^{\cdot dimY} \cdot Y)_X = (H^{\cdot dimY} \cdot Y)_{\mathbb{P}^r_k} = grad(Y) > 0$$

$\Leftarrow$

Supongamos que $(D^{\cdot dimY} \cdot Y) > 0$ para cualquier subesquema cerrado y entero Y de X. Por las Proposiciones 2.2 y 2.3, podemos suponer que X es un esquema entero. Sea $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(D)$. Probaremos está implicación por inducción sobre $d = dimX$.

Si $d = 0$, entonces cualquier gavilla invertible sobre el punto X es un espacio vectorial de dimensión 1 y por lo tanto es amplia. Para $d = 1$, si X es una curva entera, en este caso tenemos que $Y = X$ y sabemos que $grad(\mathscr{L}) = (\mathscr{L})_X > 0$. Sea $f : X' \to X$ el morfismo de normalización (que es un morfismo birracional). Dado que X' es una curva proyectiva no singular, por la propiedad 6 del producto de intersección [capítulo 1, sección 3] se tiene que $grad(f^*\mathscr{L}) = grad(\mathscr{L}) > 0$. Por el Teorema de Riemann-Roch para la curva X' se tiene que $(f^*\mathscr{L})^n$ es muy amplia si $n > 2h^1(X', \mathcal{O}_{X'})+1$, es decir, $f^*\mathscr{L}$ es amplia. Como f es un morfismo finito, por la proposición 2.5 se tiene que $\mathscr{L}$ es amplia.

Supongamos que $d \geqslant 2$. Separaremos la prueba en varios pasos.

(1) *Se puede suponer que D es un divisor efectivo.*
Para probar esto, consideramos un encaje de $\mathscr{L}$ en $\mathscr{K}_X$. Sean $\mathscr{I}_1 = \mathcal{O}_X(-D) \cap \mathcal{O}_X$, $\mathscr{I}_2 = \mathscr{L} \cap \mathcal{O}_X$ y Y_j el subesquema cerrado de X definido por $\mathscr{I}_j$ con $j \in \{1, 2\}$. Por otro lado si descomponemos a D como resta de dos divisores efectivos $D = D_1 - D_2$ se tiene que $\mathscr{I}_i(nD) = \mathcal{O}_X(nD - D_i)$ de donde concluimos que $\mathscr{I}_1(nD) = \mathcal{O}_X(nD - D_1) = \mathcal{O}_X((n-1)D + D - D_1) = \mathcal{O}_X((n-1)D - D_2) = \mathscr{I}_2((n-1)D)$ y dado que X es de dimensión mayor que 1, podemos considerar las siguientes dos sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{I}_1(nD) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(nD) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y_1}(nD) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{I}_2((n-1)D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X((n-1)D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y_2}((n-1)D) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Por hipótesis de inducción $D|_{Y_1}$ y $D|_{Y_2}$ son divisores amplios, por lo que $H^i(Y_j, nD) = 0$ para $i > 0$, n lo suficientemente grande y $j \in \{1, 2\}$. De donde concluimos que para $i > 1$ y n lo suficientemente grande, $h^i(X, \mathcal{O}_X(nD)) = h^i(X, \mathscr{I}_1(nD)) = h^i(X, \mathscr{I}_2((n-1)D)) = h^i(X, \mathcal{O}_X((n-1)D))$. Como $D^{\cdot dimX} > 0$ se tiene que

$$\chi(X, nD) \to \infty \qquad cuando \qquad n \to \infty$$

dado que $\chi(X, nD) = h^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) - h^1(X, \mathcal{O}_X(nD)) + cte$, concluimos que

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \to \infty \qquad cuando \qquad n \to \infty$$

en particular, para n lo suficientemente grande se cumple que $H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \neq (0)$. Entonces podemos reemplazar a D por nD y suponer que D es efectivo.

(2) *Para n lo suficientemente grande $\mathscr{L}^n$ es generado por secciones globales.*
Por el paso uno, podemos suponer que D es un divisor efectivo y por lo tanto considerar la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{L}^{-1} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$$

tomando el producto tensorial con $\mathscr{L}^n$ tenemos

$$0 \to \mathscr{L}^{n-1} \to \mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^n_D \to 0$$

que induce una sucesión exacta en cohomología

$$\ldots \to H^0(X, \mathscr{L}^n) \to H^0(X, \mathscr{L}^n_D) \to H^1(X, \mathscr{L}^{n-1}) \to H^1(X, \mathscr{L}^n) \to H^1(X, \mathscr{L}^n_D) \to \ldots \tag{Δ}$$

Por hipótesis de inducción $\mathscr{L}_D$ es amplia, es decir, para $i > 0$ y n lo suficientemente grande se tiene que $H^i(X, \mathscr{L}^n_D) = 0$. Usando la sucesión (Δ) tenemos que

$$H^1(X, \mathscr{L}^{n-1}) \to H^1(X, \mathscr{L}^n) \to 0$$

Como la dimensión de $H^1(X, \mathscr{L}^n)$ es finita, se tiene la siguiente cadena descendiente de números naturales

$$h^1(X, \mathscr{L}^n) \geqslant h^1(X, \mathscr{L}^{n+1}) \geqslant h^1(X, \mathscr{L}^{n+2}) \geqslant \ldots$$

por lo tanto, para alguna n lo suficientemente grande se tiene un isomorfismo

$$H^1(X, \mathscr{L}^{n-1}) \to H^1(X, \mathscr{L}^n)$$

y por (Δ) se tiene que cuando el morfismo de arriba es isomorfismo, el morfismo

$$H^0(X, \mathscr{L}^n) = \Gamma(X, \mathscr{L}^n) \to H^0(X, \mathscr{L}^n_D) = \Gamma(X, \mathscr{L}^n_D)$$

es suprayectivo. Como $\mathscr{L}_D$ es amplio, por el Teorema de Serre-Grothendieck existe n tal que $\mathscr{L}^n_D$ es generado por secciones globales. Entonces para esta n lo suficientemente grande $\mathscr{L}^n$ es generado por secciones globales.

(3) *Conclusión.*
Por el paso dos, existe un morfismo $f : X \to \mathbb{P}^m$ con $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \cong \mathscr{L}^n$ para alguna $n > 0$. Entonces f es un morfismo finito, si no fuera el caso, podríamos encontrar una curva entera $C \subseteq X$ con $f(C)$ un punto y en consecuencia $(\mathscr{L} \cdot C)$ sería igual a 0, contradiciendo la hipótesis numérica de $\mathscr{L}$. Por lo tanto f es un morfismo finito y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ es amplia en $\mathbb{P}^m$, por la Proposición 2.5 se tiene que $\mathscr{L}^n$ es amplia y en consecuencia $\mathscr{L}$ es amplia.

$\mathfrak{D}$

Observación 2.7. *Un ejemplo de Mumford prueba que en el criterio anterior **no es suficiente** con suponer que $(D \cdot C) > 0$ para cualquier curva entera en X para que D sea un divisor amplio. En este ejemplo X es una superficie no singular pero D no es un divisor efectivo. Sin embargo, en una superficie no singular se cumple que si D es un divisor efectivo y $(D \cdot C) > 0$ para cualquier curva entera C en X entonces D es amplio. Por tanto, es natural preguntarse si en el caso general es valido, es decir, dado un esquema completo X de cualquier dimensión, si* *suponemos que D es un divisor efectivo en X que cumple la propiedad de que $(D \cdot C) > 0$ para cualquier curva entera C en X, entonces ¿ El divisor D es amplio? La respuesta es **NO**, el contraejemplo fue dado por Ramanujam. Ambos ejemplos pueden consultarse en [H2, I, §10, pág. 56-57]*

2.2. Divisores Numéricamente Efectivos

En vista del criterio de amplitud de Nakai-Moishezon, la siguiente definición es natural.

Definición 2.8. *Un divisor en X es **nef** (numéricamente efectivo) si para cualquier subesquema entero Y de X de dimensión r, se tiene que*

$$(D^{\cdot r} \cdot Y) \geqslant 0 \tag{$\Diamond$}$$

El termino nef, aunque ahora es estándar, no ha estado en uso hasta mediados de 1980. Antes de esto, el concepto apareció en la bibliografía con diversos nombres. Por ejemplo, en el articulo [Z], Zariski habla de divisores "aritméticamente efectivos", Kleiman en [K], usa el termino "numéricamente efectivo" , mientras que Goodman [Go] y Hartshorne [H2] usan el termino "pseudo-amplio".

La propiedad 1 del producto de intersección nos dice que la desigualdad ($\Diamond$) es cierta para cualquier subesquema cerrado Y de X de dimensión r si y sólo si, la desigualdad

$$(D^{\cdot r} \cdot \mathscr{F}) \geqslant 0$$

es cierta para cualquier gavilla coherente $\mathscr{F}$ en X cuyo soporte tenga dimensión a lo más r. Además, D es nef si y sólo si, la restricción a cada componente irreducible de X_{red} es nef. La restricción de un divisor nef a un subesquema cerrado es nef.

Lema 2.9. *Sean D un divisor en X y H un divisor amplio en X. Si la dimensión de X es n y $(D^{\cdot r} \cdot Y) \geqslant 0$ para todo subesquema entero Y de X de dimensión r, entonces*

$$(D^{\cdot r} \cdot H^{n-r}) \geqslant 0$$

Demostración.

Procederemos por inducción sobre la dimensión de X. Por lo anterior, podemos suponer que X es un esquema entero y que $r < n$.

Sea m un entero, tal que mH es muy amplio. Entonces el sistema lineal $|mH|$ contiene al menos un divisor efectivo Y, entonces

$$\begin{aligned}
(D^{\cdot r} \cdot H^{\cdot n-r}) &= (D^{\cdot r} \cdot H^{\cdot n-r-1} \cdot H) \\
&= \frac{1}{m}(D^{\cdot r} \cdot H^{\cdot n\text{-}r-1} \cdot mH) \\
&= \frac{1}{m}(D^{\cdot r} \cdot H^{\cdot n-r-1} \cdot Y) \\
&= ((D|_y)^{\cdot r} \cdot (H|_Y)^{\cdot n-r-1})
\end{aligned}$$

por hipótesis de inducción se tiene que $((D|_y)^{\cdot r} \cdot (H|_Y)^{\cdot n-r-1}) \geqslant 0$, lo cual prueba el Lema.

$\mathfrak{D}$

Usando este resultado, podemos ver que si X es proyectivo y D es un divisor nef, se cumple que para cualquier divisor amplio H en X y Y un subesquema entero de dimensión r la siguiente desigualdad es valida

$$(D^{\cdot s} \cdot H^{\cdot r-s} \cdot Y) \geqslant 0$$

para $0 \leqslant s \leqslant r$. Por la multilinealidad del producto de intersección, tenemos que

$$((D+H)^{\cdot r} \cdot Y) = (H^{\cdot r} \cdot Y) + \sum_{s=1}^{r} \binom{r}{s} (D^{\cdot s} \cdot H^{\cdot r-s} \cdot Y) \geqslant (H|_Y^{\cdot r}) > 0$$

porque H es amplio en Y. Por el criterio de Nakai-Moishezon, $D+H$ es amplio.

Como el producto tensorial de dos gavillas que son generadas por secciones globales vuelve a ser generada por secciones globales, la suma de dos divisores amplios es amplio. Dado un $\mathbb{Q}$-divisor amplio H y D cualquier $\mathbb{Q}$-divisor de Cartier, entonces para t lo suficientemente pequeño se tiene que $H + tD$ es un divisor amplio.

La suma de un divisor muy amplio y el divisor asociado a una gavilla invertible que es generada por secciones globales es muy amplio, esto puede verse usando el encaje de Segre. En particular, la suma de dos divisores muy amplios es muy amplio y, si H es un divisor muy amplio y D es cualquier divisor de Cartier, $mH + D$ es muy amplio para cualquier m lo suficientemente grande.

Sean D y E divisores nef en un esquema proyectivo X de dimensión n, y H un divisor amplio en X. Es claro que para cualquier racional positivo t se tiene que tH es amplio (basta con multiplicar la m que hace que H sea muy amplio por el denominador de t). Por lo anterior se tiene que $E + tH$ es amplio, y por lo tanto $D + (E + tH)$ es amplio. Usando el criterio de Nakai-Moishezon tenemos que, para cualquier subesquema entero Y de X de dimensión r se cumple que

$$(D|_Y + E|_Y + tH|_Y)^{\cdot r} > 0$$

si $t \to 0$, por la múltilinealidad del producto de intersección se tiene que

$$(D|_Y + E|_y)^{\cdot r} \geqslant 0$$

lo que nos dice que $D + E$ es nef.

En resumen de todo lo anterior tenemos lo siguiente:

Resumen de Propiedades

$$\binom{Divisor}{Amplio} \quad + \quad \binom{Divisor}{Amplio} \quad = \quad \binom{Divisor}{Amplio}$$

$$\binom{Divisor}{Amplio} \quad + \quad t(Divisor) \quad = \quad \binom{Divisor}{Amplio} \qquad \forall \quad t << 1$$

$$\binom{Divisor}{Muy \quad Amplio} \quad + \quad \binom{Divisor}{Muy \quad Amplio} \quad = \quad \binom{Divisor}{Muy \quad Amplio}$$

$$m\binom{Divisor}{Muy \quad Amplio} \quad + \quad (Divisor) \quad = \quad \binom{Divisor}{Muy \quad Amplio} \qquad \forall \quad m >> 0$$

$$\binom{Divisor}{Amplio} \quad + \quad \binom{Divisor}{Nef} \quad = \quad \binom{Divisor}{Amplio}$$

$$\binom{Divisor}{Nef} \quad + \quad \binom{Divisor}{Nef} \quad = \quad \binom{Divisor}{Nef}$$

Los divisores nef, tienen un mejor comportamiento que los divisores amplios, por ejemplo, el siguiente resultado nos dice que es suficiente verificar que la intersección con cualquier curva es no negativa para asegurar que el divisor es nef. Además, por la formula de proyección, este resultado implica que la imagen inversa de un divisor nef de cualquier morfismo en nef.

Teorema 2.10 (Caracterización de Divisores Nef)**.** *Sea X un esquema proyectivo. Un divisor en X es nef si y sólo si, tiene intersección no negativa con cualquier curva en X.*

Demostración.

$\Rightarrow$
Es directo de la definición.

$\Leftarrow$
Por los resultados anteriores, podemos suponer que X es un esquema entero. Supongamos que D es un divisor tal que, su intersección con cualquier curva es no negativa y $dimX = n$. La prueba se hará por inducción sobre la dimensión de X. La afirmación es clara si X es una curva. Si suponemos que $(D^{\cdot r} \cdot Y) \geqslant 0$ para cualquier subesquema de X de dimensión $r < n$, tenemos que probar que $(D^{\cdot n}) \geqslant 0$. Sea H un divisor amplio en X, definimos $D_t := D + tH$ y consideramos el polinomio de grado n

$$P(t) := (D_t^{\cdot n}) = (D^{\cdot n}) + \binom{n}{1}(D^{\cdot n-1} \cdot H)t + \ldots + (H^{\cdot n})t^n$$

queremos demostrar que $P(0) \geqslant 0$. Supongamos lo contrario, como H es un divisor amplio, por el criterio de Nakai-Moishezon el coeficiente líder de $P(t)$, $(H^{\cdot n})$ es estrictamente positivo, por lo tanto, existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $P(t_0) = 0$ y para cualquier $s > t_0$ se cumple que $P(s) > 0$.

Para cualquier subesquema Y de X de dimensión positiva $r < n$, el divisor $D|_Y$ es nef, por hipótesis de inducción. Por el Lema 2.9

$$((D|_Y)^{\cdot u} \cdot (H|_Y)^{\cdot r-u}) \geqslant 0$$

para $0 \leqslant u \leqslant r$. Como $((H|_Y)^{\cdot r-s}) > 0$ porque $H|_Y$ es amplio. Se satisface que para $s > 0$

$$((D_s|_Y)^{\cdot r}) = ((D|_Y)^{\cdot r}) + \binom{r}{1}((D|_Y)^{\cdot r-1} \cdot H|_Y)s + \ldots + ((H|_Y)^{\cdot r})s^r > 0$$

además, $(D_s^{\cdot n}) = P(s) > 0$ si $s > t_0$, por lo cual, el divisor $(D_s^{\cdot n})$ es amplio para toda $s > t_0$. Notemos que es posible descomponer a $P(t)$ como suma de dos polinomios $P(t) = Q(t) + R(t)$, donde

$$Q(t) := (D_t^{\cdot n-1} \cdot D) \qquad y \qquad R(t) := (D_t^{\cdot n-1} \cdot H)t$$

Como D_s es amplio para $s > t_0$ y el número de intersección de D con cualquier curva es no negativo, se satisface que $Q(s) \geqslant 0$ para toda $s > t_0$. Nuevamente por el Lema 2.9 y la hipótesis de inducción se cumple que

$$(D^{\cdot r} \cdot H^{\cdot n-r}) \geqslant 0$$

para $0 \leqslant r < n$, entonces

$$R(t_0) = (D^{\cdot n-1} \cdot H)t_o + \binom{n-1}{1}(D^{\cdot n-2} \cdot H^{\cdot 2})t_0^2 + \ldots + (H^{\cdot n})t_0^n > 0$$

por lo cual

$$0 = P(t_0) = Q(t_0) + R(t_0) > 0$$

esto es claramente una contradicción, por lo que $0 \leqslant P(0) = (D^{\cdot n})$.

2.3. El Cono de Curvas

Sea Z un esquema algebraico sobre k (no necesariamente completo). Una familia algebraica de gavillas invertibles en X sobre Z, $(\mathscr{L}_z)_{z\in Z}$ es una gavilla invertible $\mathscr{L}$ sobre $X \times Z$ tal que, para cualquier $z \in Z$, $\mathscr{L}$ induce una gavilla invertible $\mathscr{L}_z$ en la fibra sobre z. Se dice que una familia $(\mathscr{L}_z)_{z\in Z}$ es conexa, si el espacio parametrizante Z es un espacio topológico conexo.

Definición 2.11. *Dos gavillas invertibles en X, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ se dice que son* ***algebraicamente equivalentes*** *si están unidas por una familia algebraica conexa, es decir, si existe una familia algebraica conexa en X, $(\mathscr{L}_z)_{z\in Z}$ tal que $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}_z$ y $\mathscr{M} \cong \mathscr{L}_y$ para dos puntos cerrados $y, z \in Z$.*

Sea $Z_t = Z_t(X)$ el grupo abeliano libre generado por todas las gavillas coherentes $\mathscr{F}$ en X cuyo soporte es de dimensión t. Llamaremos a $W \in Z_t$ un t-ciclo. Si $W = \sum n_i\mathscr{F}_i$ con $n_i \geqslant 0$ diremos que W es un t-ciclo efectivo. Si $\mathscr{F}_i = \mathcal{O}_{Y_i}$ con Y_i subesquema cerrado, entonces escribimos $W = \sum n_iY_i$.

Se puede extender el producto de intersección a Z_t por linealidad, es decir, si $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ son gavillas invertibles en X y $W = \sum n_i\mathscr{F}_i \in Z_t$, entonces definimos:

$$(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_t \cdot W) := \sum n_i(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F}_i)$$

Sea $\mathscr{F} \in Z_t$ un generador. Si $Y_1, \ldots, Y_k$ son las componentes irreducibles de la estructura reducida del soporte de $\mathscr{F}$, y_i es el punto genérico de Y_i y $n_i = alt_{\mathcal{O}_{Y_i,y_i}}\mathscr{F}_{y_i}$ con $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces para cualesquiera $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ gavillas invertibles se tiene que:

$$(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_t \cdot (\sum n_iY_i)) = (\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_t \cdot \mathscr{F})$$

El caso que nos interesa estudiar es $t = 1$. A los elementos de Z_1, es decir, los 1-ciclos, los llamaremos curvas. Dado un divisor de Cartier D en X definimos el producto de intersección de D con cualquier curva C en Z_1 como $(D \cdot C) := (\mathcal{O}_X(D) \cdot C)$. En este caso se puede dar la siguiente definición:

Definición 2.12. *Sean $C_1, C_2 \in Z_1$ y D_1, D_2 divisores de Cartier en X, decimos que:*

1) C_1 y C_2 son numéricamente equivalentes si $(D \cdot C_1) = (D \cdot C_2)$ para cualquier divisor de Cartier D. Notación $C_1 \equiv C_2$

2) D_1 es numéricamente equivalente a 0 si $(D_1 \cdot C) = 0$ para cualquier curva C en Z_1. Notación $D_1 \equiv 0$

3) D_1 y D_2 son numéricamente equivalentes si su diferencia es numéricamente equivalente a 0. Notación $D_1 \equiv D_2$

Esta definición también se puede dar para gavillas invertibles. Definimos $Pic^{\tau}(X)$ como el subgrupo de $Pic(X)$ de todas las gavillas invertibles en X numéricamente equivalentes a 0 y $Pic^0(X)$ como el subgrupo de $Pic^{\tau}(X)$ de todas las gavillas invertibles en X que son algebraicamente equivalentes a $\mathcal{O}_X$. Sea $Z_1^n = Z_1^n(X)$ el subconjunto de todas las curvas $C \in Z_1$ que cumplen que $(\mathscr{L} \cdot C) = 0$ para cualquier gavilla invertible $\mathscr{L} \in Pic(X)$. Definimos:

$$N^1 = N^1(X) := Pic(X)/Pic(X)^{\tau} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

$$N_1 = N_1(X) := Z_1(X)/Z_1^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

Usando el producto de intersección podemos definir una forma bilineal:

$$(\ \cdot\ ) : N^1 \times N_1 \to \mathbb{R}$$

definida por $([\mathscr{L}] \cdot [C]) \mapsto (\mathscr{L} \cdot C)$, donde $\mathscr{L} \in [\mathscr{L}]$ y $C \in [C]$. Notemos que está bien definida por la definición de N^1 y N_1. Además, es claro que esta forma bilineal es no degenerada la cual recibe el nombre de **forma de intersección**.

Dado que las definiciones de divisor amplio y nef sólo dependen de la clase de equivalencia numérica podemos hablar de clases de divisores amplios y nef.

Observación 2.13. *Se puede probar que $N^1(X)$ (y en consecuencia $N_1(X)$) es un espacio vectorial de dimensión finita, la prueba de esto puede consultase en [K, IV, pag 323]*

Definición 2.14. *Denotamos por $\rho = \rho(X)$ a la dimensión como $\mathbb{R}$-espacio vectorial de $N^1(X)$ y lo llamamos el **número de Picard de X***

A partir de este momento, cuando hablemos de curvas nos estaremos refiriendo a la clase de un 1-ciclo en $N_1(X)$.

Dado un subconjunto K de un espacio vectorial real. Decimos que K es un **cono** si cumple que:

(i) $K + K \subseteq K$

(ii) $aK \subseteq K$ para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$.

Sea K un cono, observemos que dados x en el interior de K y y en la cerradura de K, entonces el el intervalo $[x, y) := \{rx + (r-1)y | r \in [0, 1)\}$ es un subconjunto del interior de K. Esta observación tiene como consecuencia que si K es un cono, entonces su interior y su cerradura en el espacio vectorial son nuevamente conos.

Definición 2.15 (el cono de curvas y el cono Nef)**.**

- *El **cono de curvas de X**, denotado por $NE(X)$, es el cono en $N_1(X)$ generado por todas las curvas efectivas.*

- *El **el cono Nef de X**, denotado por $Nef(X)$, es el cono en $N^1(X)$ es el cono de todas las clases de divisores nef de X.*

Observación 2.16.

(i) *El cono de curvas no siempre es cerrado, por lo que es conveniente considerar su cerradura en $N_1(X)$, denotado por $\overline{NE}(X)$. Más adelante veremos la forma de construir un ejemplo de un cono de curvas que no sea cerrado.*

(ii) *El cono $Nef(X)$ es cerrado y además contiene al cono de divisores amplios $Amp(X)$.*

(iii) *$\overline{NE}(X)$ es el cono dual de $Nef(X)$, es decir,*

$$\overline{NE}(X) = \{[C] \in N_1(X) | ([D] \cdot [C]) \geqslant 0 \quad \forall [D] \in Nef(X)\}$$

Lema 2.17 (Carathéodory)**.** *Cualquier elemento $[C] \in NE(X)$ puede ser escrito de la forma $\sum_{i=0}^{\rho} a_i[C_i]$ con $a_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\{[C_i]\}$ un conjunto linealmente independiente de curvas enteras (distintas) en $N_1(X)$ con $\rho = \rho(X)$.*

Demostración.

Por definición, $[C] = \sum_{i=1}^{n} a_i[C_i]$ con $a_i \in \mathbb{R}^+$ y $[C_i]$ curvas enteras. Consideremos un natural n minimal, tal que, $a_i > 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $n > \rho$ ó el conjunto de curvas $\{[C_i]\}$ es linealmente dependiente, entonces existe una combinación lineal no trivial $\sum_{i=1}^{n} b_i[C_i] = 0$. De está manera, podemos escribir $[C] = \sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)[C_i]$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos el conjunto

$$I_i = \{t \in \mathbb{R} | a_i + tb_i \geqslant 0\}$$

es claro que son intervalos cerrados que tienen al 0 en su interior, por lo tanto $I = \cap_{i=1}^{n} I_i$ es un intervalo cerrado no vacio, dado que para alguna i se tiene que $b_i \neq 0$ entonces $I \neq \mathbb{R}$. Sea t un extremo de I (existe al menos uno por lo anterior). Entonces existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tal que, t es el extremo de I_s. Así, $a_i + tb_i \geqslant 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero $a_s + tb_s = 0$, esto contradice la minimalidad de n. Por lo tanto, $n \leqslant \rho$. Si $n < \rho$, entonces podemos completar $\{[C_i]\}$ a una base de $N_1(X)$.

ↄ

2.3.1. Criterio de Amplitud de Kleiman

En esta sección se dará un criterio de numérico, es decir, nos permitirá saber si un divisor en una variedad proyectiva es amplio, analizando únicamente los números de intersección con los elementos no cero del cono de curvas cerrado.

Teorema 2.18 (Criterio de Amplitud de Kleiman)**.** *Si X es una variedad proyectiva, entonces*

(a) Un divisor D en X es amplio si y sólo si, para cualquier elemento z no cero de $\overline{NE}(X)$ se cumple que

$$(D \cdot z) > 0$$

(b) Para cualquier divisor amplio H en X y cualquier número entero k, el conjunto

$$\{z \in \overline{NE}(X) | (H \cdot z) \leqslant k\}$$

es compacto, y por lo tanto sólo contiene un número finito de clases de curvas irreducibles.

Demostración.

(a)

$\Rightarrow$

Si D es amplio en X, entonces $(D \cdot z) \geqslant 0$, para cualquier $z \in \overline{NE}(X) - \{0\}$. Suponemos que existe $z \in \overline{NE}(X) - \{0\}$ tal que $(D \cdot z) = 0$. Como el producto de intersección es una forma bilineal no degenerada, existe un divisor $E \in N^1(X)$ tal que $(E \cdot z) < 0$. De esta manera, se tiene que

$$((D + tE) \cdot z) < 0 \qquad \forall \quad t \in \mathbb{Q}^+$$

en particular, implica que $D + tE$ no es amplio, lo cual es una contradicción ya que D es amplio y por las observaciones hechas en la sección 2 de este capítulo, la suma de un amplio con un racional positivo por cualquier divisor es amplio. Por lo tanto $(D \cdot z) > 0$ para toda $z \in \overline{NE}(X) - \{0\}$.

$\Leftarrow$

Escojamos una norma $||.||$ en $N_1(X)$ y definamos el conjunto

$$K := \{z \in \overline{NE}(X) | \quad ||z|| = 1\}$$

que es un compacto en $N_1(X)$ (por ser la intersección de un cerrado y un compacto). El funcional lineal $z \mapsto (D \cdot z)$ es acotado en K y su imagen es estrictamente positiva por hipótesis, por lo que existe un racional positivo a que es cota inferior de la imagen de K bajo este funcional. Sea H un divisor amplio en X, entonces el funcional $z \mapsto (H \cdot z)$ es definido positivo, y además la imagen de K está acotada superiormente por un racional positivo b (por ser compacto), es decir, para todo $z \in K$ se tiene que $a \leqslant (D \cdot z)$ y $(H \cdot z) \leqslant b$. De estas dos desigualdades tenemos

$$a(H \cdot z) \leqslant (H \cdot z)(D \cdot z) \leqslant b(D \cdot z)$$

por lo tanto, para todo $z \in K$ se cumple que $b(D \cdot z) - a(H \cdot z) \geqslant 0$ lo que nos permite afirmar que el funcional $D - \frac{a}{b}H$ es no negativo en K y por lo tanto en todo el cono cerrado $\overline{NE}(X)$. Por el Teorema 2.10 concluimos que D es nef. Sabemos que la suma de un divisor nef más un racional positivo por un divisor amplio es un divisor amplio, por lo tanto el divisor

$$(D - \frac{a}{b}H) + \frac{a}{b}H = D$$

es amplio.

(b)
Sean $D_1, \ldots, D_r$ divisores de Cartier en X tales que $([D_1], \ldots, [D_r])$ es una base de $N^1(X)$. Sabemos que para algún entero lo suficientemente grande m se tiene que $mH \pm D_i$ son divisores amplios, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Así, por el inciso anterior, se tiene que $((mH \pm D_i) \cdot z) \geqslant 0$ para toda $z \in \overline{NE}(X)$. Por lo tanto $|(D \cdot z)| \leqslant (mH \cdot z)$. La condición $(H \cdot z) \leqslant k$ define un conjunto cerrado y lo anterior acota a cada una de las coordenadas de z y por tanto al conjunto, es decir, el conjunto que consideramos es cerrado y acotado, lo cual demuestra que es compacto. Como el conjunto de clases de curvas irreducibles es un conjunto discreto en $N_1(X)$ (por construcción) la segunda afirmación es clara.

Fijando la clase de un divisor $[D] \in N^1(X)$, tenemos un funcional lineal en $N_1(X)$

$$\phi_D : N_1(X) \to \mathbb{R}$$

$$[C] \mapsto ([D] \cdot [C])$$

Lo que nos permite definir los siguientes conjuntos

$$D^{\perp} := \{[C] \in N_1(X) | ([D] \cdot [C]) = 0\}$$

$$D_{>0} := \{[C] \in N_1(X) | ([D] \cdot [C]) > 0\}$$

$$D_{\geqslant 0} := D^{\perp} \cup D_{>0}$$

Así, $D^{\perp} = \ker(\phi_D)$ es un hiperplano y $D_{>0}$ es un semiespacio abierto de $N_1(X)$. Además la primera parte del criterio de Amplitud de Kleiman puede reescribirse de la siguiente manera: Un divisor es amplio y sólo si

$$\overline{NE}(X) - \{0\} \subseteq D_{>0}$$

Geométricamente, esto nos dice que D es amplio si y sólo si el cono de curvas cerrado (salvo el origen) está completamente contenido en el hiperplano determinado por D, como lo muestra la Figura 2.1.

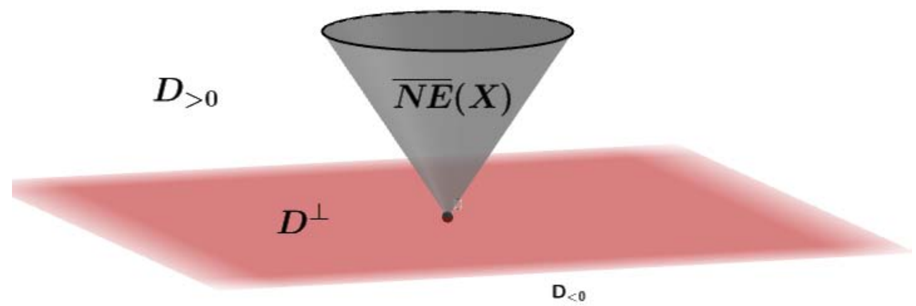


Figura 2.1: Criterio de Amplitud de Kleiman

2.3.2. El Cono de Curvas Relativo

Si $\pi : X \to Y$ es un morfismo de de variedades proyectivas y C es una curva entera en X, definimos $\pi_C : C \to \pi(C)$ la restricción de π a C. De esta manera podemos inducir morfismos

$$\pi^{(*)} : Pic(Y)/Pic^{\tau}(Y) \to Pic(X)/Pic^{\tau}(X) \qquad y \qquad \pi_{(*)} : Z_1(X)/Z_1^n(X) \to Z_1(Y)/Z_1^n(Y)$$

definidos por

$$\pi^{(*)}([D]) := [\pi^*(D)] \qquad y \qquad \pi_{(*)}([C]) := \begin{cases} 0 & si \quad \pi(C) \ \text{ es un punto} \\ grad(\pi_C)[\pi(C)] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que se pueden extender a mapeos $\mathbb{R}$-lineales

$$\pi^* : N^1(Y) \to N^1(X) \qquad y \qquad \pi_* : N_1(X) \to N_1(Y)$$

estos morfismos satisfacen la formula de proyección

$$(\pi^*[D] \cdot [C])_X = ([D] \cdot \pi_*[C])_Y$$

Cuando π es un morfismo suprayectivo, se tiene que para cualquier curva C' en Y, existe una curva C en X tal que $\pi(C) = C'$, entonces $\pi_*[C] = m[C']$ para algún entero positivo m, lo cual prueba que π_* es suprayectiva. Por la fórmula de proyección, el núcleo de π^* es ortogonal a la imagen de π_* lo que implica que π^* es inyectiva.

Definición 2.19. ***El cono de curvas relativo a π*** *es el subcono convexo $NE(\pi)$ de $NE(X)$ generado por las clases de curvas contraídas por π.*

De la definición del morfismo π_* , una curva irreducible C en X es contraída por π si y sólo si $\pi_*([C]) = 0$. Equivalentemente, por la fórmula de proyección y el criterio de Nakai-Moishezon, si H es un divisor amplio en Y, la curva C es contraída si y sólo si $(\pi^*[H] \cdot C) = 0$.

Así el cono $NE(\pi)$ es la intersección de $NE(X)$ con el hiperplano $(\pi^*H)^{\perp}$ y por lo tanto es un cerrado en $NE(X)$ y además

$$\overline{NE}(\pi) := \overline{NE(\pi)} \subseteq \overline{NE}(X) \cap (\pi^*H)^{\perp}$$

Estamos interesados en morfismos suprayetivos que estén caracterizados por las curvas que contraen. Este tipo de información sólo puede ser detectada en las componentes irreducibles de las fibras, por lo que pediremos que las fibras sean conexas. Una forma de asegurar esta condición es pidiendo que

$$\pi_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y \tag{$\clubsuit$}$$

Por otro lado, cualquier morfismo proyectivo $\pi : X \to Y$ tiene una factorización de Stein

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

tal que, $\pi'_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{Y'}$ y g es finito. Ambos resultados pueden ser consultados en [H1, III, pág. 279-280].

Para cualquier morfismo proyectivo con factorización de Stein $\pi : X \xrightarrow{\pi'} Y' \longrightarrow Y$, las curvas contraídas por π son las mismas que las contraídas por π' y por lo tanto, el cono relativo de π y el de π' son el mismo. Esto nos dice que pedir que el morfismo π cumpla la condición ($\clubsuit$) no es tan restrictivo.

Lema 2.20 (de Rigidez)**.** *Sean $\pi : X \to Y$ y $\pi' : X \to Y'$ morfismos propios entre variedades proyectivas y suponemos que π cumple la propiedad ($\clubsuit$). Entonces*

(1) Si π' contrae una fibra $\pi^{-1}(y_0)$ de π, entonces existe una vecindad abierta Y_0 de y_0 y una factorización

$$\pi'|_{\pi^{-1}(Y_0)} : \pi^{-1}(Y_0) \xrightarrow{\pi} Y_0 \longrightarrow Y'$$

(2) Si π' contrae todas las fibras de π, entonces se factoriza a través de π.

Demostración.

(1)
Observemos que, el hecho de que π cumpla la condición ($\clubsuit$) implica que es suprayectivo. Sean g el producto de π con π' y Z la imagen de g, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[ddrrr, bend left, "\pi'"] \arrow[dddrr, bend right, "\pi"'] & & & \\
& Z \arrow[dr, hook] & & \\
& & Y \times Y' \arrow[r, "\bar{p}'"] \arrow[d, "\bar{p}"] & Y' \\
& & Y &
\end{tikzcd}$$

sean p y p' las restricciones de las proyecciones $\bar{p}$ y $\bar{p}'$ a Z respectivamente, $\pi^{-1}(y_0) = g^{-1}(p^{-1}(y_0))$ es contraída por π' y por lo tanto por g. Así $p^{-1}(y_o) = g(g^{-1}(p^{-1}(y_0)))$ es un punto, por lo que podemos encontrar una vecindad afín Y_0 de y_0 en Y, donde el morfismo propio p es finito. Sean $X_0 = \pi^{-1}(Y_0)$, $Z_0 = p^{-1}(Y_0)$ y $p_0 : Z_0 \to Y_0$ la restricción de p, entonces $\mathcal{O}_{Z_0} \subseteq g_*\mathcal{O}_{X_0}$ y por lo tanto

$$\mathcal{O}_{Y_0} \subseteq p_{0*}\mathcal{O}_{Z_0} \subseteq p_{0*}g_*\mathcal{O}_{X_0} = \mathcal{O}_{Y_0}$$

por lo que $\mathcal{O}_{Y_0} \simeq p_{0*}\mathcal{O}_{Z_0}$, pero el morfismo p_0 es propio y por consiguiente Z_0 es afín y el isomorfismo $\mathcal{O}_{Y_0} \simeq p_{0*}\mathcal{O}_{Z_0}$ nos dice que p_0 induce un isomorfismo entre el anillo de coordenadas de Z_0 y Y_0. Por lo tanto, p_0 es un isomorfismo y

$$\pi'|_{X_0} = p' \circ p_0^{-1} \circ \pi|_{X_0}$$

(2)
Si π' contrae cada fibra de π, entonces el morfismo p del inciso anterior es finito y podemos tomar $Y_0 = Y$, de esta forma π' se factoriza mediante π.

El siguiente resultado prueba que un morfismo π definido en una variedad proyectiva X que satisface ($\clubsuit$), está caracterizado por su cono cerrado de curvas relativo, $\overline{NE}(\pi)$. Más aún, es un subcono convexo de $\overline{NE}(X)$ que tiene la propiedad geométrica de ser un cono extremal, es decir, si a, b son elementos de $\overline{NE}(X)$ tales que $a + b$ es un elemento de $\overline{NE}(\pi)$, entonces a y

b están en $\overline{NE}(\pi)$. Uno de los objetivos del programa de Mori es dar condiciones suficientes en un subcono extremal de $\overline{NE}(X)$ para que pueda ser el asociado a un morfismo, convirtiendo de este modo los datos geométricos de un objeto relativamente más "simple" en información acerca de X.

Proposición 2.21. *Sean $\pi : X \to Y$ un morfismo entre variedades proyectivas y Y' una variedad proyectiva. Entonces*

(a) El subcono $NE(\pi)$ de $NE(X)$ es extremal.

(b) Supongamos que π cumple la propiedad (♣) y sea $\pi' : X \to Y'$ otro morfismo, entonces

- *Si $NE(\pi)$ está contenido en $NE(\pi')$, existe un único morfismo $f : Y \to Y'$ tal que $\pi' = f \circ \pi$.*
- *El morfismo π está univocamente determinado por $NE(\pi)$ salvo isomorfismo.*

Demostración.

(a)
Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ elementos en $NE(X)$ tales que $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \in NE(\pi)$. Por el lema de Carathéodory podemos escribir $\mathfrak{a} = \sum a_i[A_i]$ y $\mathfrak{b} = \sum b_j[B_j]$ con $a_i, b_j \in \mathbb{R}^+$ y A_i, B_j curvas enteras. Por la definición de $NE(\pi)$, existe una descomposición para $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ de la forma

$$\sum a_i[A_i] + \sum b_j[B_j] = \sum c_k[C_k]$$

donde $c_k \in \mathbb{R}^+$ y $[C_k]$ son curvas irreducibles contraídas por π. Aplicando π_* tenemos que

$$\sum a_i\pi_*[A_i] + \sum b_j\pi_*[B_j] = 0$$

en $N_1(X)$. Como Y es proyectiva se tiene que A_i, B_j son contraídas por π para toda i, j, lo cual, por definición implica que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in NE(\pi)$.

(b)
Las hipótesis del inciso (b) implican que toda curva irreducible de π es contraída por π' y por lo tanto, toda fibra de π es contraída por π' y el inciso (2) de el lema anterior nos asegura la existencia de f.
Para probar la unicidad, supongamos que existe otro morfismo $h : Y \to Y'$ que satisface que $\pi' = h \circ \pi$, con la notación de la prueba del lema anterior, tenemos que la composición $Z \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{h} Y'$ es la segunda proyección, es decir, $h \circ p = p'$, por lo tanto, $h = (p' \circ p) = f$ ☽

2.4. El Cono de Curvas de una Superficie Reglada

En esta sección estudiaremos el cono de curvas de una superficie reglada. Antes de dar la definición correspondiente observemos que si la dimensión de X es 2, además es entero y localmente factorial (por ejemplo una variedad proyectiva no singular) por la proposición 1.9 sabemos que los divisores de Cartier coinciden con los divisores de Weil, que son exactamente los 1-ciclos. En estos casos $N_1(X) = N^1(X)$, lo que en particular nos indica que la forma de intersección es simétrica.

Definición 2.22. *Una* ***superficie geométricamente reglada*** *o simplemente una* ***superficie reglada****, es una superficie* X *junto con un morfismo suprayectivo a una curva no singular,* $\pi : X \to C$*, tal que:*

(i) Para cualquier punto $y \in C$*, la fibra* $X_y := X \times_Y Spec(k(y))$ *es isomorfa a* $\mathbb{P}^1_k$*,*

(ii) el morfismo π *admite una sección, es decir, existe un morfismo* $\sigma : C \to X$ *tal que* $\pi \circ \sigma = Id_C$*.*

Ejemplo 2.1. *Si* C *es una curva no singular, entonces* $C \times \mathbb{P}^1_k$ *junto con la primera proyección, es una superficie reglada.*

Denotaremos una superficie reglada como $\pi : X \to C$, para tener en cuenta el morfismo de la definición. Observemos que dadas cualesquiera dos fibras de π son curvas algebraicamente equivalentes en X, ya que están parametrizadas por la curva C y por lo tanto son numéricamente equivalentes.

Teorema 2.23 (Grauert)**.** *Sean* $\pi : X \to Y$ *un morfismo de esquemas noetherianos, con* Y *entero y* $\mathscr{F}$ *una gavilla coherente en* X*. Si para algún* i *se tiene que la función*

$$h^i(y, \mathscr{F}) := dim_{k(y)} H^i(X_Y, \mathscr{F}_y)$$

es constante en Y*. Entonces* $R^i\pi_*(\mathscr{F})$ *es localmente libre en* Y *y para cualquier* $y \in Y$ *el mapeo natural*

$$R^i\pi_*(\mathscr{F}) \otimes k(y) \to H^i(X_y, \mathscr{F}_y)$$

es un isomorfismo.

La prueba puede consultarse en [H1, III, Teorema 12.9, pág. 289]

Lema 2.24. *Sean* $\pi : X \to C$ *una superficie reglada y* D *un divisor en* X*. Si* $(D \cdot f) = n \geqslant 0$*, donde* f *es una fibra de* π*. Entonces* $\pi_*\mathcal{O}_X(D)$ *es una gavilla localmente libre de rango* $n+1$ *en* C*. En particular* $\pi_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_C$*.*

Demostración.

Por lo observado anteriormente, la intersección $(D \cdot f)$ no depende de la elección de la fibra.

Sea $y \in C$, consideremos la gavilla $\mathcal{O}_X(D)_y$ en la fibra X_y, que es una gavilla de invertible de grado n en $X_y \cong \mathbb{P}^1_k$, entonces la dimensión de $H^0(X_y, \mathcal{O}_X(D)_y)$ es $n+1$ que es independiente de y. Por el teorema de Grauert, $R^0\pi_*(\mathcal{O}_X(D)) \cong \pi_*\mathcal{O}_X(D)$ es una gavilla localmente libre de rango $n+1$.

En el caso $D = 0$, $\pi_*\mathcal{O}_X$ es localmente libre de rango 1 y por la segunda parte del Teorema de Grauert nos da un isomorfismo

$$\pi_*\mathcal{O}_X \otimes k(y) \to H^0(X_y, \mathcal{O}_{X,y})$$

para cada $y \in C$, además el lado derecho es canónicamente isomorfo a k. Por lo tanto la imagen del 1 bajo el mapeo natural $\mathcal{O}_C \to \pi_*\mathcal{O}_X$ genera al tallo en cada punto, probando que $\pi_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_C$.

Recordemos que dada una gavilla localmente libre $\mathscr{E}$ sobre X, podemos definir el **espacio proyectivo asociado a** $\mathscr{E}$ como $\mathbb{P}(\mathscr{E}) := \mathbb{P}roj(S(\mathscr{E}))$, donde $S(\mathscr{E})$ es el álgebra simétrica de $\mathscr{E}$. La construcción de este esquema y propiedades pueden consultarse en [H1, II, §7].

Proposición 2.25. *Si $\pi : X \to C$ es una superficie reglada, entonces existe una gavilla localmente libre $\mathscr{E}$ de rango 2 en C tal que $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ sobre C. Inversamente, para cualquier gavilla localmente libre $\mathscr{E}$ de rango 2 en C, el esquema $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ es una superficie reglada sobre C.*

Demostración.

Dada cualquier superficie reglada $\pi : X \to C$, por definición existe una sección σ. Definimos $D := \sigma(C)$. Este conjunto es un divisor en X que cumple que $(D \cdot f) = 1$ para cualquier fibra. Por el lema anterior, $\mathscr{E} := \pi_* \mathcal{O}_X(D)$ es una gavilla localmente libre de rango 2 sobre C. Más aún, existe un morfismo suprayectivo en X

$$\pi^* \mathscr{E} = \pi^* \pi_* \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X(D) \to 0$$

que determina un morfismo $g : X \to \mathbb{P}(\mathscr{E})$ sobre C, tal que $\mathcal{O}_X(D) \cong g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1)$, como $\mathcal{O}_X(D)$ es muy amplio en cada fibra, g es un isomorfismo en cada fibra y por lo tanto g es un isomorfismo.

Inversamente, si $\mathscr{E}$ es una gavilla localmente libre de rango 2 en C. Sea $X := \mathbb{P}(\mathscr{E})$ y $\pi : X \to C$ la proyección. Entonces, X es una superficie proyectiva sobre k y cada fibra es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$. Para probar la existencia de una sección, sea $U \subseteq C$ un abierto donde $\mathscr{E}$ es libre, entonces, $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$, definimos la sección $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ dada por $y \mapsto (y, p_0)$. Como X es variedad proyectiva, existe una extensión de σ a un mapeo de C en X que es necesariamente una sección.

Una superficie se dice que es una **superficie birracionalmente reglada** si es birracionalmente equivalente a $C \times \mathbb{P}^1$ para alguna curva C. Esto incluye a las superficies racionales, ya que $\mathbb{P}^2$ es birracional a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. El Lema anterior, nos dice que toda superficie reglada es birracionalmente reglada.

Proposición 2.26. *Sean $\pi : X \to C$ una superficie reglada, $C_0 \subseteq X$ una sección y f una fibra. Entonces se cumple que $(C_0 \cdot f) = 1$ y $f^2 := (f \cdot f) = 0$, además*

$$PicX \cong \pi^* PicC \oplus \mathbb{Z}[C_0]$$

Demostración.

$(C_0 \cdot f) = 1$ ya que C_0 y f se intersectan transversalmente en un único punto. Se tiene que $f^2 = 0$ porque dos fibras distintas no se intersectan.

Si $D \in PicX$, sean $n = (D \cdot f)$ y $D' = D - nC_0$, entonces $(D' \cdot f) = (D \cdot f) - n(C_0 \cdot f) = n - n = 0$. Por el Lema 2.24 $\pi_* \mathcal{O}_X(D') = \mathscr{G}$ es una gavilla invertible en C y es claro que $\pi^* \pi_* \mathcal{O}_X(D') \cong \mathcal{O}_X(D') \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(C_0)^{-n}$. Así, $\pi^* \mathscr{G} \otimes \mathcal{O}_X(C_0)^n \cong \mathcal{O}_X(D)$. Como $\pi^* : PicC \to PicX$ es inyectiva, lo anterior prueba la última afirmación.

Corolario 2.27. $N^1(X) \cong \mathbb{R}[f] \oplus \mathbb{R}[C_0]$.

Demostración.

Se sigue de la proposición anterior y de que cualesquiera dos fibras de π son numéricamente equivalentes.

Si $\pi : X \to C$ es una superficie reglada, es posible escribir $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ con $\mathscr{E}$ una gavilla localmente libre en C con la propiedad de que $H^0(C, \mathscr{E}) \neq 0$, pero para cualquier gavilla invertible $\mathscr{L}$ en C de grado estrictamente menor que cero se cumple que $H^0(C, \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) = 0$. En este caso, el entero $e = -grad(\mathscr{E})$ es un invariante de X. Más aún, existe una sección $\sigma_0 : C \to X$, cuya imagen $\sigma_0(C) = C_0$ cumple que $\mathcal{O}_X(C_0) \cong \mathcal{O}_X(1)$. Con estas condiciones, decimos que $\mathscr{E}$ está **normalizada**. Sea $\mathfrak{e}$ el correspondiente divisor en C asociado a la gavilla invertible $\wedge^2 \mathscr{E}$, entonces $e = -grad(\mathfrak{e})$. Si $\mathfrak{a}$ es cualquier gavilla invertible en C, denotamos a $\pi^* \mathfrak{a}$ por $\mathfrak{a} f$. Entonces, por la proposición anterior, cualquier elemento de $PicX$ puede ser escrito de la forma $\mathfrak{a} f + bC_0$ con $b \in \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{a} \in PicC$. Con un abuso de notación ($f = [f]$ y $C_0 = [C_0]$) podemos escribir cualquier elemento de $N^1(X)$ como $af + bC_0$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

El divisor canónico de X está representado por $K_X \equiv (2g - 2 - e)f + 2C_0$ donde g es el genero de C. Lo cual implica que $K_X^2 = 8(1 - g)$. Además se tiene que $e \geqslant -g$. Más detalles de la discusión anterior se puede encontrar en [H1, V, §2 , pág. 372-376].

Proposición 2.28. *Sea $\pi : X \to C$ una superficie reglada con invariante $e \geqslant 0$.*

(a) Si $Y \equiv af + bC_0$ es una curva irreducible distinta de C_0 y cualquier fibra f, entonces $b > 0$ y $a \geqslant be$.

(b) El divisor $D \equiv cf + dC_0$ es amplio si y sólo si $d > 0$ y $c > de$.

Demostración.

(a)

Como $Y \neq f$ para cualquier fibra f, el morfismo $\pi|_Y : Y \to C$ es suprayectivo, así

$$0 < (Y \cdot f) = ((af + bC_0) \cdot f) = af^2 + b(C_0 \cdot f) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$$

Por otro lado, como $Y \neq C_0$ se tiene que

$$0 \leqslant (Y \cdot C_0) = ((af + bC_0) \cdot C_0) = a(f \cdot C_0) + bC_0^2 = a \cdot 1 + b \cdot (-e) = a - be$$

(b)

$\Rightarrow$ Supongamos que D es un divisor amplio, por el criterio de Nakai-Moishezon se tiene que el producto intersección de D con cualquier curva irreducible es positivo, en particular para cualquier fibra y la curva C_0, de donde tenemos que

$$0 < (D \cdot f) = ((cf + dC_0) \cdot f) = cf^2 + d(C_0 \cdot f) = c \cdot 0 + d \cdot 1 = d$$

$$0 < (D \cdot C_0) = ((cf + dC_0) \cdot C_0) = c(f \cdot C_0) + dC_0^2) = c \cdot 1 + d \cdot (-e) = c - de$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $d > 0$ y $c > de$. Sea Y curva irreducible en X, por el inciso anterior, $Y \equiv af + bC_0$ con $b > 0$ y $a > be$. Calculando su producto de intersección con D tenemos que

$$(D \cdot Y) = ((cf + dC_0) \cdot (af + bC_0)) = caf^2 + cb(f \cdot C_0) + da(C_0 \cdot f) + dbC_0^2 = cb + da - dbe > 0$$

por el criterio de Nakai-Moishezon, se tiene que D es amplio.

$\mathfrak{D}$

Por ejemplo, para el caso $e = 0$, la proposición anterior nos dice que el cono de curvas es cerrado, más aún se tiene que

$$NE(X) = \overline{NE}(X) = (\mathbb{R}^+)[f] + (\mathbb{R}^+)[C_0]$$

Además en las coordenadas dadas por la base ordenada $\{[f], [C_0]\}$, el cono de curvas se ve como en la Figura 2.2.

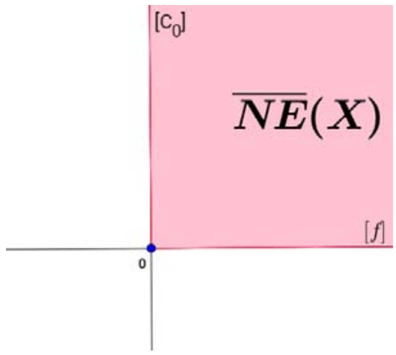


Figura 2.2: Cono de curvas de una Superficie Reglada con invariante $e = 0$

Proposición 2.29. *Sea $\pi : X \to C$ una superficie reglada, sobre una curva C de genero g con invariante $e < 0$. Si la característica de k es 0, entonces*

(a) Si $Y \equiv af + bC_0$, es una curva irreducible distinta de C_0 y de cualquier fibra f, entonces ($b = 1$ y $a \geqslant 0$) ó ($b \geqslant 2$ y $2a \geqslant be$).

(b) El divisor $D \equiv cf + dC_0$ es amplio, si y sólo si $d > 0$ y $2c > de$.

Demostración.

(a)
Sea $\mathscr{E}$ una la gavilla localmente libre y normalizada tal que $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$. Como $Y \neq f$ para cualquier fibra f, se tiene que $0 < (Y \cdot f) = af^2 + b(C_0 \cdot f) = b$.

Si $b = 1$, entonces Y es una sección de X y por [H1, V, Proposición 2.9, pág. 373] se corresponde con un mapeo suprayectivo $\mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$ tal que

$$-e = grad(\mathscr{E}) \leqslant grad(\mathscr{L}) = (C_0 \cdot Y) = a(C_0 \cdot f) + b(C_0 \cdot C_0) = a - e$$

de donde concluimos que $a \geqslant 0$.

Supongamos que $b \geqslant 2$. Sea $\tilde{Y}$ la normalización de Y, consideremos la composición de el mapeo natural $\tilde{Y} \to Y$ con π. Como la característica del campo es 0, por el Teorema de Hurwitz [H1, IV, Corolario 2.4, pág. 301] el mapeo anterior es finito, separable, grado b y además

$$2g(\tilde{Y}) - 2 = b(2g - 2) + grad(R)$$

donde R es el divisor (efectivo) de Ramificación. Por otro lado, tenemos que $P_a(Y) \geqslant g(\tilde{Y})$, por lo que

$$2P_a(Y) - 2 \geqslant b(2g - 2) \tag{2.1}$$

Usando la fórmula de adjunción se tiene que

$$2P_a(Y) - 2 = (Y \cdot (Y + K))$$

sustituyendo $Y \equiv af + bC_0$ y $K \equiv (2 - 2g - e)f - 2C_0$ en (1) tenemos que

$$\begin{aligned} b(2g-2) \leqslant 2P_a(Y) - 2 &= ((af + bC_0) \cdot (af + bC_0 + (2 - 2g - e)f - 2C_0)) \\ &= ((af + bC_0) \cdot ((a + 2 - 2g - e)f + (b - 2)C_0)) \\ &= a(a + 2 - 2g - e)f^2 + a(b-2)(f \cdot C_0) + b(a + 2 - 2g - e)(C_0 \cdot f) + b(b-2)C_0^2 \\ &= ab - 2a + ba + 2b - 2bg - eb - eb^2 + 2be \\ &= 2ab - 2a + 2b - 2gb + eb - eb^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$4b(g-1) \leqslant 2ab - 2a + eb - eb^2$$

La condición $e < 0$ nos implica en particular que $g \geqslant 1$ (ya que $-2g \leqslant e$), de donde concluimos que $4b(g-1) \geqslant 0$, así

$$eb(b-1) = eb^2 - eb \leqslant 2ab - 2a = 2a(b-1)$$

como $b \geqslant 2$ se tiene que

$$eb \leqslant 2a$$

(b)

$\Rightarrow$ Si D es amplio, entonces $(D \cdot f) = d > 0$ y $D^2 = (D \cdot D) = 2cd - d^2e > 0$, dividiendo entre d tenemos que $2c > de$.

$\Leftarrow$ Si $d > 0$ y $2c > de$, entonces $(D \cdot f) = d > 0$, $D^2 = 2cd - d^2e > 0$, $(D \cdot C_0) = c - de > -\frac{de}{2} > 0$ y si $Y \equiv af + bC_0$ es cualquier curva irreducible distinta de C_0 y cualquier fibra f, entonces

$$(D \cdot Y) = cb + da - dbe$$

Si $b = 1$ y $a \geqslant 0$ entonces

$$(D \cdot Y) \geqslant \frac{de}{2} - de = -\frac{de}{2} > 0$$

Si $b \geqslant 2$ y $2a \geqslant be$, entonces

$$(D \cdot Y) > \frac{bde}{2} + \frac{bde}{2} - dbe = 0$$

por el criterio de Nakai-Moishezon, D es amplio.

ↁ

Consideremos el caso $e = -1$, y supongamos que $g \geqslant 2$ y que el campo base es $\mathbb{C}$. Por la proposición anterior, los divisores numéricamente equivalentes a $-(d-1)f + 2dC_0$ son amplios para $d > 1$ $(2d > 0$ y $2(-(d-1)) > -2d)$ lo cual, nos dice que para m lo suficientemente grande, el sistema lineal $|-m(d-1) + 2md|$ tiene divisores efectivos.

Así, las semirectas que unen a estos divisores con el origen están contenidas en el cono de curvas de X. Estas semirectas tienen pendiente $\frac{2md}{-m(d-1)} = \frac{2d}{1-d}$, haciendo tender d a infinito, notamos que estas semirectas tienden a la semirecta con pendiente -2. De esta forma la cerradura del cono de curvas en la base ordenada $\{[f], [C_0]\}$ queda como en la Figura 2.3.

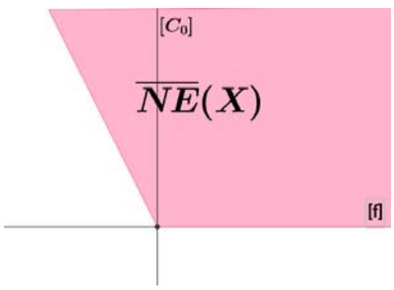


Figura 2.3: Cono de curvas de una Superficie Reglada con invariante $e = -1$

Usando el razonamiento anterior, para construir un ejemplo de un cono de curvas que no sea cerrado es necesario que la semirecta por el origen de pendiente -2 no esté contenida en el cono de curvas, es decir, que para cualquier $m > 0$ el sistema lineal $|-mf+2mC_0|$ no tenga divisores efectivos. Esto es equivalente a que el divisor $D \equiv -f+2C_0$ no sea amplio. Un ejemplo de esto es una modificación de el ejemplo de Mumford, que construye una superficie reglada con un divisor, que de hecho, es numéricamente equivalente a $-f+2C_0$ que no es amplio usando la noción de estabilidad. Los detalles de esta construcción pueden ser consultados en [H2, I,§10, pág. 50-58].

Capítulo 3

El Teorema del Cono

El principal propósito de este capítulo es demostrar el Teorema del Cono (en el caso suave). La prueba que se dará en este trabajo es una combinación de la prueba dada en [KoMo] y [De].

En este capítulo no se consideraran esquemas arbitrarios y por ello se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. Todos los esquemas considerados en este capítulo son noetherianos y separados.
2. Al usar el término variedad estamos pensando en un esquema entero y de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k.
3. Una subvariedad siempre es cerrada.

3.1. Curvas Racionales en el Lugar Geométrico Excepcional

Dado un mapeo racional entre variedades $f : X \dashrightarrow Y$ definido sobre un abierto denso $V \subseteq X$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed, "\Gamma"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dddr, bend right, "Id"'] & & \\
& V \times Y \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[dd] & Y \\
& & X \times Y \arrow[d, "p"] \\
& V \arrow[r, hook, "j"] & X
\end{tikzcd}
$$

definimos la **gráfica** de f como $X' = \overline{i(\Gamma(V))} \subseteq X \times Y$. De esta manera, se tiene que $p : X' \to X$ es un morfismo birracional y existe un abierto $U \subseteq X$ máximo con la propiedad de que f está definido sobre U; este abierto también es el máximo abierto donde p es un isomorfismo.

Si X es normal y Y es propio, entonces p es un morfismo propio y tiene fibras conexas por el Teorema Principal de Zariski [H1, III, §11, pág. 280]. Si la fibra $p^{-1}(x)$ es un único punto, por [Sh, I, §6, pág. 79] x tiene una vecindad V en X tal que el mapeo inducido por p, $\bar{p} : p^{-1}(V) \to V$ es finito. Como p es birracional y X es normal $\bar{p}$ es un isomorfismo. Por lo tanto $X - U$ es el conjunto de puntos de X que tienen fibras de dimensión positiva, por lo que $X - U$ tiene codimensión al menos 2 en X.

Definición 3.1. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo birracional entre variedades. El **lugar geométrico excepcional** de f, denotado por $Exc(f)$, es el conjunto de puntos de X donde f no es un isomorfismo.*

Si Y es normal y f es un morfismo propio, las fibras son conexas por el Teorema Principal de Zariski. Dado $y \in Exc(f)$ se tiene que $f^{-1}(f(y))$ tiene al menos dos puntos y por lo tanto tiene dimensión positiva por lo que está contenido en $Exc(f)$, esto implica que $Exc(f) = f^{-1}(f(Exc(f))$ y que $f(Exc(f))$ tiene codimensión al menos 2 en Y. El abierto más grande sobre el cual $f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ está definido es $Y - f(Exc(f))$.

Proposición 3.2. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo birracional y propio entre variedades que no es isomorfismo. Si Y es suave, entonces para cada punto general en cada una de las componentes irreducibles de $Exc(f)$ existe una curva racional que pasa por el punto y es contraída por f.*

Demostración.

Considerando la normalización de X, se tiene que el morfismo canónico $\tilde{X} \to X$ es un morfismo birracional y propio, por lo que podemos suponer que X es no singular en codimensión 1. Así cada componente de $E := Exc(f)$ tiene codimensión 1, tomando una restricción de f a un subconjunto adecuado de X (quitando las singularidades de X y E) podemos suponer que E y X son irreducibles y suaves. De tal forma que, si $U_0 := Y - Sing(\overline{f(E)})$ entonces la cerradura en U_0 de $f(E \cap f^{-1}(U_0))$ es suave y de codimensión al menos 2.

Sea $\mathcal{E}_1 : Y_1 \to U_0$ el blow-up de $\overline{f(E \cap f^{-1}(U_0))}$, por la propiedad universal del blow-up, existe un morfismo f_1 que factoriza a f, es decir, que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, dashed, "f_1"] \arrow[dr, "f"'] & Y_1 \arrow[d, "\mathcal{E}_1"] \\ & U_0 \end{tikzcd}$$

y cumple que $\overline{f_1(E \cap V_1)} \subseteq Sop(E_1)$, donde E_1 es el divisor excepcional de $\mathcal{E}_1$ y $V_1 := f^{-1}(U_0)$. Si la codimensión de $\overline{f_1(E \cap V_1)}$ en Y_1 es al menos 2 entonces $E \cap V_1$ está contenido en $Exc(f_1)$.

Remplazando f por f_1 repetimos la construcción, de esta manera siempre que la codimensión de $\overline{f_{i-1}}$ en Y_{i-1} sea al menos 2, obtenemos una factorización

$$f : V_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{\mathcal{E}_i} U_{i-1} \subseteq Y_{i-1} \xrightarrow{\mathcal{E}_{i-1}} U_{i-2} \subseteq Y_{i-2} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\mathcal{E}_2} U_1 \subseteq Y_1 \xrightarrow{\mathcal{E}_1} U_0 \subseteq Y$$

Sea $E_j \subseteq Y_j$ el divisor excepcional de $\mathcal{E}_j$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} K_{Y_i} &\equiv \mathcal{E}_i^* K_{Y_{i-1}} + c_i E_i \\ &\equiv (\mathcal{E}_1 \circ \dots \circ \mathcal{E}_{i-1})^* K_Y + C_i E_i + c_{i-1} E_{i,i-1} + \dots c_1 E_{i,1} \end{aligned}$$

con $E_{i,j}$ la imagen inversa de E_j en Y_i y $C_j = codim_{Y_{j-1}}(\overline{f_{j-1}(E \cap V_{i-1})}) - 1 > 0$.

Dado que f_i es birracional, se tiene que $f_i^* \mathcal{O}_{Y_i}(K_{Y_i})$ es una subgavilla de $\mathcal{O}_{V_i}(K_{V_i})$. Más aún. como $f_j(E \cap V_j) \subseteq Sop(E_j)$, el divisor $f_j^* E_j - E|_{V_j}$ es efectivo, de manera que el divisor $E_{i,j} - E_{Vi}$ es un divisor efectivo y por lo tanto la gavilla $\mathcal{O}_X(f^* K_y + (c_i + \dots C_1)E)|_{V_i}$ es una subgavilla de $\mathcal{O}_{V_i}(K_{V_i}) = \mathcal{O}_X(K_X)|_{V_i}$. Como X es noetheriano, la gavilla coherente $\mathcal{O}_X(K_X)$ no puede tener una cadena ascendente de subgavillas, por lo que esta construcción no puede realizarse una infinidad de veces, es decir, existe un natural i tal que $\overline{f_i(E \cap V_i)}$ es un divisor de Y_i y por tanto $E \cap V_i$ no está contenido en $Exc(f_i)$. Así f_i induce un isomorfismo birracional entre $E \cap V_i$ y E_i lo cual implica que $E \cap V_i$ es reglado de donde se deduce la proposición.

$\mathfrak{D}$

Corolario 3.3. *Sean X y Y variedades. Supongamos que X es suave y Y es propio y no contiene curvas racionales, entonces cualquier mapeo racional $f : X \dashrightarrow Y$ esta definido en todas partes, es decir, es un morfismo.*

Demostración.

Sea $X' \subseteq X \times Y$ la gráfica de f, como vimos anteriormente, el abierto más grande donde f esta definido es igual al abierto más grande donde el morfismo inducido por la proyección $p : X' \to X$ es isomorfismo. Por lo tanto, si queremos probar que f es un morfismo, es suficiente con probar que el morfismo birracional p es un isomorfismo, es decir, $Exc(p) = \emptyset$.

Supongamos que p no es un isomorfismo, de manera que $Exc(p) \neq \emptyset$. Por la proposición anterior, existe una curva racional $C \subseteq Exc(p) \subseteq X'$ que es contraída por p.

Considerando la segunda proyección $q : X \times Y \to Y$, se tiene que $q(C)$ es una curva racional en Y ó un punto, por hipótesis Y no contiene curvas racionales, por lo que $q(C)$ debe ser un punto, es decir, C es contraída por q.

Como C es contraída por p y por q se tiene que $C \subseteq \{p(C)\} \times \{q(C)\} \subseteq X \times Y$ lo cual es una contradicción ya que C es una curva, por lo que $Exc(p) = \emptyset$.

Cualquier morfismo $f : X \to Y$ entre variedades suaves tiene asociado un mapeo en los espacios tangentes $Tf : T_X \to f^*T_Y$. Además si X y Y tienen la misma dimensión se induce un morfismo de gavillas invertibles $\wedge^n : T_X \to f^*(\wedge^n T_Y)$ y por lo tanto una sección no cero de $\mathcal{O}_X(K_X - f^*K_Y)$. Esta sección se anula en un divisor efectivo $Ram(f)$, llamado el divisor de ramificación de f. En particular se tiene que

$$K_X \equiv f^*K_Y + Ram(f) \tag{$*$}$$

Si f es birracional, el soporte de $Ram(f)$ es el lugar geométrico excepcional $Exc(f)$.

Proposición 3.4. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo birracional entre variedades proyectivas suaves que no es isomorfismo, entonces existe una curva racional C en X que es contraída por f tal que*

$$(K_X \cdot C) < 0$$

Demostración.

Sea $E := Exc(f)$, como vimos anteriormente $f(E)$ tiene codimensión al menos 2 en X. Sea $x \in f(E)$, por el Teorema de Bertini [H1, II, Teorema 8.18, pág. 179] casi cualquier sección hiperplana de Y es suave y conexa, en particular, casi cualquier sección hiperplana que pasa por x tiene esta propiedad. De esta manera podemos intersectar $(dim X - 2)$ secciones hiperplanas que pasen por x que tengan esta propiedad para obtener una superficie suave S en Y que contiene a x, más aún, por dimensión se tiene que $S \cap f(E)$ es un número finito de puntos. Tomando una sección hiperplana más obtenemos una curva suave C_0 en S que intersecta a $f(E)$ únicamente en x y una curva C que no intersecta a $f(E)$. Por construcción

$$(K_Y \cdot C_0) = (K_Y \cdot C) \tag{3.1}$$

Como $C \cap f(E) = \emptyset$, la curva $C' := f^{-1}(C)$ no intersecta a E de manera que $(Ram(f) \cdot C^{-1}) = 0$, más aún, por la equivalencia $(*)$ y la fórmula de proyección se tiene que

$$(K_X \cdot C') = (f^*K_Y \cdot C') + (Ram(f) \cdot C') = (K_Y \cdot f_*C') = (K_Y \cdot C) \tag{3.2}$$

Por otro lado, como la curva C_0 intersecta a $f(E)$ se tiene que la curva $C_0' := \overline{f^{-1}(C_0 - f(E))}$ cumple que $(Ram(f) \cdot C_0') > 0$. Nuevamente, usando la equivalencia $(*)$ y la fórmula de proyección junto con las igualdades (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned} (K_X \cdot C_0') = (f^*K_Y \cdot C_0') + (Ram(f) \cdot C_0') > (f^*K_Y \cdot C_0') = \\ (K_Y \cdot f_*C_0') = (K_Y \cdot C_0) = (K_Y \cdot C) = (K_Y \cdot C') \end{aligned} \tag{3}$$

El mapeo racional $f^{-1} : S \dashrightarrow X$ no es un morfismo pero por el Corolario 4.5 sus indeterminadas pueden ser resueltas con un número finito de blow-up sobre los puntos en el conjunto $S \cap f(E)$, así, obtenemos un morfismo birracional $g : \widetilde{S} \to X$, que es la composición de un número finito de blow-ups $(\mathcal{E} : \widetilde{S} \to S)$ con f^{-1}, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

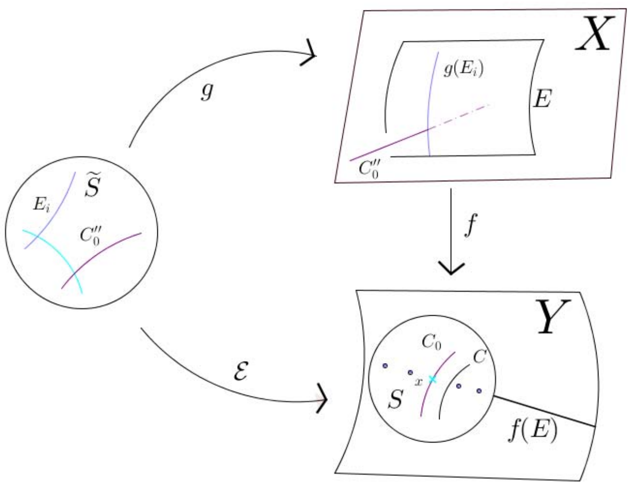


Figura 3.1: Construcción de curvas racionales en el $Exc(f)$

La curva $C'' := \mathcal{E}^*C$ cumple que $g_*C'' = C'$. Como la curva C_o pasa por un punto en $S \cap f(E)$ se tiene que existen enteros positivos $m_i \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathcal{E}^*C_0 = C_0'' + \sum m_i E_i$$

con E_i los divisores excepcionales de $\mathcal{E}$ que en particular, son curvas racionales, además se tiene que $g_*C_0'' = C_0'$. Como C_0 y C son linealmente equivalentes en S se tiene que $C'' \equiv C_0'' + \sum m_i E_i$ en $\widetilde{S}$, aplicando g_* resulta que

$$C' \equiv C_0' + \sum m_i g_* E_i$$

De esta manera,tomando intersecciones con K_X se tiene que

$$(K_X \cdot C') = (K_X \cdot C_0') + \sum m_i (K_X \cdot g_* E_i)$$

de la igualdad anterior y (4) concluimos que debe de existir al menos un indice i_o tal que $(K_X \cdot g_* E_{i_0}) < 0$. En particular $g_* E_{i_0}$ no es un punto y es una curva racional en X, más aún, $f(g(E_{i_0})) = \mathcal{E}(E_{i_0})$ y por lo tanto la curva $g_* E_i$ es contraída por f.

Dada una clase de equivalencia birracional $\mathscr{C}$ el Corolario 3.3 nos dice que si existe una variedad suave X en $\mathscr{C}$ que no tiene curvas racionales, esta variedad es *minimal* en el siguiente sentido: para cualquier miembro X' de $\mathscr{C}$ existe un morfismo birracional $X' \to X$. Más aún, por la proposición anterior esta variedad es única (salvo isomorfismo), de existir otra variedad suave Y en $\mathscr{C}$ *mínima*, el morfismo $X \to Y$ (existe porque Y es minimal) necesariamente es isomorfismo, de lo contrario existiría una curva racional en X contraída por dicho morfismo por la Proposición 3.4 lo cual no puede pasar.

Por otro lado, si $\mathscr{C}$ contiene a una variedad suave Z tal que el divisor K_Z es nef, la Proposición 3.4 sólo nos asegura que no existe ningún morfismo birracional de Z en cualquier otro representante que no sea un isomorfismo. Estas observaciones nos permiten ver que, una manera de encontrar una variedad *minimal* dado un representante de la clase de equivalencia es contrayendo las curvas racionales de dicho representante cuya intersección con su divisor canónico sea negativa.

Una herramienta para este propósito es el Teorema del Cono, el cual descompone la parte del cono de curvas efectivas de la variedad cuya intersección con el divisor canónico es negativa en suma de rayos extremales con cierta restricción numérica. Teniendo esta descomposición lo que se busca es contraer dichos rayos extremales.

Los siguientes Lemas fueron demostrados por Shigefumi Mori en [Mo], la idea geométrica detrás de estos Lemas es, como su nombre lo indica, a partir de una curva dada, esta se deforma dentro de la variedad (bajo ciertas condiciones en el espacio de deformación de la curva dadas en las hipótesis) para producir curvas racionales dentro de esta.

Lema 3.5 (Bend and Break I)**.** *Sean X una variedad propia, C una curva propia y suave, $p \in C$ un punto y $g_0 : C \to X$ un morfismo no constante. Suponer que existe una curva conexa y suave junto con un punto fijo $0 \in D$ y un morfismo $G : C \times D \to X$ que cumple:*

1. $G|_{C\times\{0\}} = g_0$,
2. $G(\{p\} \times D) = g_0(p)$ *y*
3. $G|_{C\times\{t\}}$ *diferente de* g_0 *para casi todo* $t \in D$.

Entonces existe un morfismo (posiblemente constante) $g_1 : C \to X$ y una combinación lineal de curvas racionales $Z = \sum a_i Z_i$, con $a_i > 0$ y $Z_i \subseteq X$ tal que:

(a) $(g_0)_*(C)$ *es algebraicamente equivalente a* $(g_1)_*(C) + Z$ *y*

(b) $g_0(p) \in Sop(Z) = \bigcup Z_i$.

En particular X contiene una curva racional que pasa por $g_0(p)$.

Demostración.

Consideremos la compactificación de D en una curva propia $\bar{D}$, entonces se tiene un mapeo racional $\bar{G} : C \times \bar{D} \to X$. Si $\bar{G}$ esta definido en el conjunto $\{p\} \times \bar{D}$, consideramos una vecindad abierta U de p en C y la proyección $q : U \times \bar{D} \to U$, entonces $q^{-1}(p)$ va a dar a un único punto bajo $\bar{G}$, por el Lema de rigidez [Lema 2.20, capítulo II] sucede lo mismo para las demás fibras de U de manera que $G(z,t) = g_0(z)$ para casi todo $t \in D$ lo cual contradice (3). Por lo que $\bar{G}$ no puede estar definido en todo en todo el conjunto $\{p\} \times \bar{D}$.

Sean S la normalización de la gráfica de $\bar{G}$, $\pi : S \to C \times \bar{D}$ y $G_S : S \to X$ las proyecciones y definimos $h : S \to C \times \bar{D} \to \bar{D}$ la composición de π con la segunda proyección del producto. Por lo anterior, existe un punto $(p,d) \in C \times \bar{D}$ en el que π no es un isomorfismo, por lo cual, podemos escribir $h^{-1}(d) = C' + E$ con $C \cong C' \subseteq S$ la transformada birracional de $C \times \{d\}$, es decir, la cerradura de $\pi^{-1}(C_0)$ con $C_0 \subseteq C \times \{d\}$ un abierto denso donde está definido π^{-1} y $E = Exc(\pi)$.

Definimos $g_1 : C \to X$ como la restricción de G_S a C' y $Z := G_S(E)$. Por (1) podemos identificar a g_0 con $G_S|_{h^{-1}(0)}$ entonces $(g_0)_*(C)$ es algebraicamente equivalente con $(g_1)_*(C) + Z$. En la Proposición 3.2 se probo que E es birracionalmente equivalente a una superficie reglada (en este caso) y por lo tanto es unión de curvas racionales, por lo que Z es unión de curvas racionales y además alguna pasa por $g_0(p)$.

Si la curva C del Lema anterior es racional, podemos tomar $g_1 := g_0$ y la conclusión no produce nada nuevo. El siguiente Lema es una variante del anterior y prueba que se pueden tener degeneraciones no triviales de curvas racionales.

Lema 3.6 (Bend and Break II)**.** *Sean X una variedad proyectiva y $g_0 : \mathbb{P}^1 \to X$ un morfismo no constante. Suponer que existe una curva suave y conexa D con un punto fijo $0_D \in D$ y un morfismo $G : \mathbb{P}^1 \times D \to X$ tal que:*

1. *$G|_{\mathbb{P}^1 \times \{0_D\}} = g_0$,*

2. *$G(\{0\} \times D) = g_0(0)$, $G(\{\infty\} \times D) = g_0(\infty)$ y*

3. *$G(\mathbb{P}^1 \times D)$ es una superficie.*

Entonces $(g_0)_*(\mathbb{P}^1)$ es algebraicamente equivalente en X a una curva reducible ó a un múltiplo (es decir, de la forma aC para algún $a > 1$).

Demostración.

Sea $\overline{D}$ una compactificación suave de D y $q : S \to \overline{D}$ una superficie reglada que contiene a $\mathbb{P}^1 \times D$ como abierto. Sea $\overline{G} : S \dashrightarrow X$ el mapeo racional que extiende a G. Como vimos en la prueba de la Proposición 3.4 podemos resolver las indeterminadas de $\overline{G}$ con un número finito de blow-up, es decir, existe un morfismo $\mathcal{E} : \tilde{S} \to S$ que es composición de blow-up tal que $\tilde{G} := \overline{G} \circ \mathcal{E}$ es morfismo. Lo anterior se resume en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1 \times D \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_2"] \arrow[rr, bend left, "G"] & S \arrow[r, dashed, "\overline{G}"'] \arrow[d, "q"'] & X \\
D \arrow[r, hook] & \overline{D} & \tilde{S} \arrow[ul, "\mathcal{E}"] \arrow[u, "\tilde{G}"']
\end{tikzcd}$$

La prueba de este Lema se hará por inducción sobre el número de blow-up que componen a $\mathcal{E}$.

Primero trataremos el caso en el que $\overline{G}$ es un morfismo. Sea H un divisor amplio en X, entonces se tiene que $\overline{G}^* H^2 > 0$. Por otro lado, si C_0, C_∞ son las cerraduras en S de los conjuntos $\{0\} \times D$ y $\{\infty\} \times D$ respectivamente, la hipótesis dos de este Lema implica que $(\overline{G}^* H \cdot C_0) = 0 = (\overline{G}^* H \cdot C_\infty)$. Por el Teorema de el Indice de Hodge [H1, V, Teorema 1.9, pág. 364] se tiene que $C_0^2 < 0$ y $C_\infty^2 < 0$, por lo que $\overline{G}^* H, C_0$ y C_∞ son linealmente independientes en $N_1(S)$, es decir, el número de Picard de S es mayor o igual a 3, esto es una contradicción, ya que por el Corolario 2.27 el número de Picard de una superficie reglada siempre es 2.

Supongamos que $\overline{G}$ no es un morfismo y descomponemos a $\mathcal{E}$ en $\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r, "r'"] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{E}"] & S' \arrow[r, "r"] & S \end{tikzcd}$, con r el blow-up sobre un punto $p \in q^{-1}(y)$ necesario para resolver las indeterminadas de $\overline{G}$. Sea F_1 la curva excepcional de r (la cual sabemos tiene autointersección -1). Por [H1, V, Proposición 3.6, pág. 389] sabemos que $(q \circ r)^*(y) = F_1 + F_2$ con F_2 otra curva con autointersección -1 que se intersecta a F_1 en un punto $Q \in F_1 \cap F_2$. Sea $\overline{G'} : S' \dashrightarrow X$ el mapeo inducido por r.

Afirmamos que $\overline{G'}$ es un morfismo a lo largo de F_2. Primero observemos que la hipótesis uno de este Lema implica que $(g_0)_*(\mathbb{P}^1)$ es algebraicamente equivalente con $\tilde{G}_*((q \circ \mathcal{E})^*(y))$, podemos suponer que este 1-ciclo es irreducible y reducido, de lo contrario ya habríamos terminado. Si G no esta definido en otro punto $P' \in q^{-1}(y) - \{P\}$ entonces

$$\tilde{G}_*((q \circ \mathcal{E})^*(y)) = \tilde{G}_*(\mathcal{E}^{-1}(P)_{red}) + \tilde{G}_*(\mathcal{E}^{-1}(P')_{red}) + (\text{ciclo efectivo})$$

lo cual es una contradicción a lo supuesto anteriormente. Resta probar es que $\overline{G'}$ esta definido en Q. Para ver esto, observemos que cada componente irreducible de $((r')^{-1}(Q))_{red}$ tiene multiplicidad al menos 2 en $(q \circ \mathcal{E})^*(y)$ por lo que debe ser contraída por $\tilde{G}$ lo cual prueba la afirmación.

Si $S' \dashrightarrow S''$ es la contracción de la curva F_2, entonces el mapeo $\overline{G''} : S'' \dashrightarrow X$ necesita un blow-up menos para resolver la indeterminación. Aplicando la hipótesis de inducción a $\overline{G''}$ hemos terminado.

Ɑ

Sean X, Y variedades, $(T, 0)$ un esquema punteado (T es un esquema conexo y $0 \in T$ es un punto cerrado) y un morfismo $f : X \to Y$. Una deformación de f parametrizada por T es por definición, un morfismo $\tilde{f} : T \times X \to Y$ tal que $\tilde{f}|_{\{0\} \times X} \equiv f$. Cuando T es reducido escribimos $\tilde{f} = \{f_t : X \to Y\}_{t \in T}$. Dado un subesquema cerrado B de X, se tiene una noción de deformación con punto base el conjunto B, esto es, una deformación $\tilde{f} : T \times X \to Y$ tal que $\tilde{f}|_{T \times B} \equiv f|_B$.

3.2. Encontrando Curvas Racionales cuando K_X no es nef

En esta sección se demostrará un Teorema que nos garantiza la existencia de curvas racionales en una variedad proyectiva suave, X, con ciertas condiciones numéricas respecto al divisor canónico de X y una curva irreducible. Un resultado necesario para la prueba del Teorema viene de la Teoría de deformación, el cual puede ser consultado en el articulo original de Mori [Mo, Proposición 3, pág. 597] o en [Ko1, II, Teorema 1.2, pág. 92] y [MP, II, Teorema 1.8, pág. 32], este resultado nos dice que:

Un morfismo f de $(C, 0)$ una curva (punteada) y suave en X tiene un espacio de deformación de dimensión mayor o igual a

$$h^0(C, f^*TX) - h^1(C, f^*TX) = (-K_X \cdot f_*C) + (1 - g(C))dimX$$

Una de las consecuencias de este resultado es que; tener un espacio de deformación de dimensión m implica que existe $(Z, 0)$ una variedad afín punteada m-dimensional y un morfismo $F : Z \times C \to X$ tal que $F|_{\{0\} \times C} \equiv f$ y $F|_{\{z\} \times C} \neq F|_{\{0\} \times C}$ para $0 \neq z \in Z$, de donde podemos concluir lo siguiente:

Observación 3.7. *Cuando $(-K_X \cdot f_*C) - g(C)dimX$ es positivo, existe una familia de deformaciones no triviales del mapeo f que mantienen la imagen del 0 fijo. En el caso de que C no sea una curva racional, aplicamos el Lema 3.5 para obtener una curva racional en X que pasa por la imagen de 0. En el caso de que C sea una curva racional podemos aplicar el Lema 3.6 para mover a la curva con dos puntos fijos y degenerarla en una suma de dos o más curvas racionales (no necesariamente distintas).*

Para poder aplicar este resultado, necesitamos que $(-K_X \cdot f_*C)+(1-g(C))dimX > 0$. Una forma de asegurar que la condición se satisfaga es utilizando el morfismo de Frobenius. Desafortunadamente este morfismo sólo esta definido sobre variedades proyectivas sobre campos de característica positiva, para solucionar este problema se consideran reducciones modulo p de la variedad en cuestión. A continuación daremos una pequeña descripción de que es la reducción de una variedad modulo p, algunas de las propiedades aquí descritas se pueden consultar en [H1], [Ko1] y [MP].

($\star$) Sean X una variedad proyectiva suave y $f : C \to X$ un morfismo de $(C, 0)$ una curva punteada proyectiva y suave en X. Fijando encajes podemos describirlas por medio de ecuaciones, es decir, existen polinomios homogéneos $h_1, \dots, h_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ que definen a X en $\mathbb{P}^n_k$ y $c_1, \dots c_s \in k[y_1, \dots, y_m]$ que definen a C en $\mathbb{P}^m_k$.

Teniendo dichas ecuaciones en cuenta, se tienen dos tipos de reducciones, las cuales se desprenden de los siguientes casos:

a) Si las coordenadas de $0 \in C$ y los coeficientes de los elementos c_j, h_i son enteros (para todo $j \in \{1, \dots s\}, i \in \{1, \dots, r\}$), consideramos la cerradura algebraica del campo $\mathbb{F}_p$ de p elementos (p número primo). Entonces las ecuaciones c_j, h_i definen variedades C_p y X_p en los espacios proyectivos $\mathbb{P}^m_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ y $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ respectivamente. Estas variedades son no singulares y C_p es una curva para casi todo número primo p. Consideremos el mapeo

$$(y_0, \dots, y_m) \mapsto (y_1^p, \dots, y_m^p)$$

el cual es un endomorfismo de C_p en C_p, este endomorfismo es conocido como **el morfismo de Frobenius**, además es inyectivo, de grado p y $(K_{X_p} \cdot (f_p)_*(C_p))$ y $g(C_p)$ son constantes para casi todo número primo p.

b) Sean $b_1, \dots, b_t \in k[y_1, \dots, y_m, x_1, \dots x_n]$ las ecuaciones que definen a la gráfica de f. Si los coeficientes de c_j, h_i, b_k y las coordenadas de $0 \in C \subseteq \mathbb{P}^m$ no son necesariamente enteros, consideramos al anillo R generado como $\mathbb{Z}$-módulo por los coeficientes de dichos polinomios, (es de generación finita ya que sólo hay una cantidad finita de estos coeficientes). Sea P un ideal maximal de R, como R es finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo, R/P es un campo finito, es decir, es isomorfo a $\mathbb{F}_{p^a}$ (el campo finito de p^a elementos) para algún p número primo y $a \in \mathbb{N} - \{0\}$. En este caso, también podemos definir variedades $C_p := Spec(\mathbb{F}_{p^a}) \otimes C$ y $X_p := Spec(\mathbb{F}_{p^a}) \otimes X$. Además, el conjunto de ideales maximales de R es un conjunto denso de Zariski en $Spec(R)$ y al igual que en el caso anterior las variedades C_p y X_p son no singulares y C_p es una curva para casi todo ideal maximal P. En este caso, el morfismo de Frobenius esta definido en coordenadas por

$$(y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1^{p^a}, \dots, y_m^{p^a})$$

Este método nos ayudara a encontrar curvas racionales en la reducción modulo p, para asegurar la existencia de una curva racional con las mismas condiciones en la variedad original nos apoyaremos en el siguiente principio:

Principio 3.8 (Reducción modulo p).
Si un sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros tiene una solución no trivial en $\overline{\mathbb{F}}_p$ para un número infinito de números primos p (en el caso general, para un subconjunto denso de Zariski de $Spec(R)$), entonces tiene una solución no trivial en cualquier campo algebraicamente cerrado.

Demostración.

En el caso en el que los coeficientes son números enteros es un resultado de la Teoría de Eliminación, el cual puede ser consultado en [vW, XI, §80, pág. 8].

En el caso general, las ecuaciones definen un subesquema $Z \subseteq \mathbb{P}^N_R$, como la proyección $\pi : \mathbb{P}^N_R \to Spec(R)$ es propia se tiene que $\pi(Z) \subseteq Spec(R)$ es cerrado. Si $\pi(Z)$ contiene un conjunto denso de Zariski entonces contiene al punto genérico.

Por último consideremos un lema sencillo sobre los números reales.

Lema 3.9. *Para cualesquiera números reales a, b, c, d, si $c, d > 0$ entonces* $\frac{a+b}{c+d} \leqslant \max\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\}$.

Usando inducción matemática, este Lema puede ser generalizado de la siguiente manera: dados un subconjunto finito de indices I y subconjuntos de números reales $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{c_i\}_{i\in I}$ tales que $c_i > 0$ para toda $i \in I$, se tiene que:

$$\frac{\sum_{\in I} a_i}{\sum_{\in I} c_i} \leqslant \max_{i\in I}\left\{\frac{a_i}{c_i}\right\}$$

Considerando lo anterior, ahora si podemos demostrar el Teorema de esta sección, el cual es una de las partes centrales de la prueba del Teorema del Cono.

Teorema 3.10. *Sean X una variedad proyectiva suave y H un divisor amplio en X. Suponer que existe una curva irreducible $C' \subseteq X$ tal que $(-K_X \cdot C') > 0$. Entonces existe una curva racional $E \subseteq X$ tal que*

$$dimX + 1 \geqslant (-K_X \cdot E) > 0 \qquad y \qquad \frac{(-K_X \cdot E)}{(H \cdot E)} \geqslant \frac{(-K_X \cdot C')}{(H \cdot C')}$$

Demostración.
Separaremos la prueba de este Teorema en varios pasos:

(1) Sea $f : C \to X$ la normalización de C', si

$$(-K_X \cdot f(C)) > g(C) \cdot dimX \qquad (I)$$

por la observación 3.7, C se deforma con un punto fijo, es decir, se degenera en $f_1(C) +$ (suma de curvas racionales).

(2) Si la desigualdad (I) no se satisface, pasamos a característica positiva (considerando la reducción modulo p) y componemos a f con una potencia del morfismo de Frobenius (lo denotamos por f_m). Para m lo suficientemente grande se tiene que $(-K_{X_p} \cdot (f_m)_*(C_p)) - g(C_p)dimX = p^m(-K_{X_p} \cdot f_p(C_p)) - g(C_p)dimX > 0$ y nuevamente por la observación 3.7 podemos degenerar a $(f_m)_*(C_p)$ en:

$$f^1_m(C_p) + Z^1_{p,m} \sim p^m \cdot f(C_p) \qquad (II)$$

donde $Z^1_{p,m}$ es suma de curvas racionales. Sea $M := \frac{(-K_X \cdot C')}{(H \cdot C')}$. Para casi todos los números primos se tiene que $\frac{(-K_{X_p} \cdot f(C_p))}{(H_p \cdot f(C_p))} = M$ y no cambia si sustituimos f por su composición con una potencia del morfismo de Frobenius. Si $(-K_{X_p} \cdot f^1_m(C_p)) > g(C_p) \cdot dimX_p$, podemos mover a $f^1_m(C_p)$ como en el paso 1. Repitiendo este proceso, en cada paso el número de intersección de H_p con $f^j_m(C_p)$ es menor, y por lo tanto se debe terminar en algún momento, de manera que, para cierto $s \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^s_m(C_p) + Z^s_{p,m} \sim p^m f(C_p)$$

con $Z^s_{p,m}$ suma de curvas racionales y $(-K_{X_p} \cdot f^s_m(C_p)) \leqslant g(C_p) \cdot dimX_p$.
Definimos $a := (-K_{X_p} \cdot f^s_m(C_p)); b := (-K_{X_p} \cdot Z^s_{p,m}); c := (H_p \cdot f^s_m(C_p)); d := (H_p \cdot Z^s_{p,m})$. Para m lo suficientemente grande se tiene que $(c+d)$ es grande y además $M = \frac{(a+b)}{(c+d)}$, lo cual nos dice que $(a+b)$ también debe ser grande, como a está acotado, tenemos que b debe de ser grande.

(3) Afirmamos que para cada $\epsilon > 0$, si m es lo suficientemente grande existe una componente irreducible E_p de $Z^s_{p,m}$ tal que

$$\frac{(-K_{X_p} \cdot E_p)}{(H_p \cdot E_p)} > M - \epsilon \qquad (III)$$

Para probar esto,dado que a está acotado, podemos considerar las siguientes posibilidades:

- Si c es lo suficientemente grande se tiene que $\frac{a}{c} < M$ y por el Lema 3.9 se tiene que $\frac{b}{d} \geqslant M$, aplicando la generalización del mismo Lema se tiene que existe dicha componente que cumple la desigualdad.
- Si c permanece acotado entonces b y d se pueden tomar lo suficientemente grandes de manera que $\frac{b}{d} + \epsilon > \frac{(a+b)}{(c+d)} = M$, es decir para m lo suficientemente grande $\frac{b}{d} > M - \epsilon$, nuevamente, aplicando la generalización del Lema 3.9 cumple lo deseado.

(4) Sea E_p una de las curvas racionales que satisface (III). Si $(-K_{X_p} \cdot E_p) > dimX + 1$, consideramos la inclusión $i : E_p \to X_p$ tenemos que el espacio de deformación tiene dimension mayor o igual a $(-K_{X_p} \cdot E_p) + dimX > 2dimX + 1 > 0$ por hipótesis y por la observación 3.7, E_p puede descomponerse en una suma de curvas racionales. Nuevamente, aplicando el paso anterior existe al menos una de las componentes E'_p de esta suma que cumple la desigualdad (III). Si $(-K_p \cdot E') > dimX + 1$ podemos repetir este proceso, encontrando una curva E''_p que cumpla la desigualdad (III). Este proceso no puede continuar indefinidamente, ya que en cada paso la intersección de estas curvas con el divisor H_p va descendiendo. De esta manera, eventualmente obtenemos una curva racional (a la cual llamamos nuevamente E_p) tal que

$$dimX + 1 \geqslant (-K_p \cdot E_p) > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{(-K_p \cdot E_p)}{(H_p \cdot E_p)} \geqslant M - \epsilon$$

de estas desigualdades tenemos que $(H_p \cdot E_p) \leqslant (dimX + 1)/(M - \epsilon)$. Y por lo tanto la expresión de la izquierda de la segunda igualdad esta acotada y es valida para cualquier ϵ lo suficientemente pequeño, así, podemos considerar a ϵ igual a 0. Más aún, $(H_p \cdot E_p)$ está acotada independientemente de el primo p considerado.

(5) En este último paso, concluiremos la existencia de una curva racional en la variedad X con las propiedades numéricas requeridas.
Fijando encajes, podemos considerar ecuaciones como en $(\star)$, por los pasos anteriores tenemos curvas racionales E_p que cumplen las condiciones numéricas buscadas para casi todo número primo p (ideal maximal de R) de manera que, se tienen formas homogéneas $g_{p,0}, \ldots, g_{p,n}$ de grado $m(dimX + 1)$ en las coordenadas (t_0, t_1) que definen un mapeo $\mathbb{P}^1 \to X \subseteq \mathbb{P}^n$ tales que:

$$h_i(g_{p,0}, \ldots, g_{p,n}) = 0$$

para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$ y para todo $(s, t) \in \mathbb{P}^1$. Esta condición se puede ver como un sistema de ecuaciones que tiene solución en característica p para un subconjunto denso de Zariski de números primos p (en el caso de que la reducción sea de tipo a) ó ideales maximales de R (en el caso de una reducción de tipo b), por el principio 3.8 se tiene el resultado deseado.

$\mathfrak{D}$

3.3. Prueba de El Teorema del Cono en el caso suave

3.3.1. Propiedades Elementales de los Conos

Antes de demostrar el Teorema principal de este trabajo, demostraremos un lema que nos da propiedades elementales de los Conos en $\mathbb{R}^m$, algunas de estas propiedades serán utilizadas en la prueba del Teorema.

Dado un cono $V \subseteq \mathbb{R}^m$, definimos el cono dual por

$$V^* := \{h \in (\mathbb{R}^m)^* | h \geqslant 0 \quad \text{en} \quad V\}$$

Recordemos que un subcono W de V es extremal si es cerrado y tiene la propiedad de que si la suma de dos elementos en V está en W, entonces ambos elementos están en W. Un subcono extremal de dimensión uno es llamado **rayo extremal**. Una forma lineal $h \in V^*$ es la función soporte de un subcono extremal si W se anula en W.

Lema 3.11. *Sea V un cono cerrado en $\mathbb{R}^m$, entonces:*

(a) V no contiene lineas $\Leftrightarrow$ V^* genera a $\mathbb{R}^m$.
Además, el interior de V^* es el conjunto

$$\{h \in V^* | h > 0 \quad en \quad V - \{0\}\}$$

(b) Si V no contiene lineas, entonces es la envolvente conexa de sus rayos extremales.

(c) Cualquier subcono extremal propio de V tiene una función soporte.

(d) Si V no contiene lineas y W es un subcono cerrado propio de V, entonces existe una forma lineal en V^* que es positiva en $W - \{0\}$ y se anula en algún rayo extremal de V.

Demostración.

Identificando $(\mathbb{R}^m)^{**}$ con $\mathbb{R}^m$ con el isomorfismo canónico se tiene que $V = V^{**}$.

(a)

Si suponemos que V contiene una linea $\mathcal{L}$, como cualquier elemento de V^* es no negativo en V, entonces debe anularse en toda la linea, lo cual implica que V^* se queda contenido en $\mathcal{L}^\perp$. Inversamente, si V^* está contenido en algún hiperplano H, su dual contiene al subespacio $H^\perp \subseteq \mathbb{R}^m$ que es una linea.

Para la segunda parte, dado $h \in Int(V^*)$, sabemos que existe un vector $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $h = \langle w, \_ \rangle$ con $\langle \_, \_ \rangle$ un producto interno en $\mathbb{R}^m$. Sean $z \in V - \{0\}$ y $\epsilon > 0$ tal que $1 >> \alpha := \frac{\langle w,z \rangle}{\langle z,z \rangle} - \epsilon > 0$ y definimos $h' := \langle w - \alpha z, \_ \rangle$ que cumple que

$$h'(z) = \langle w - \alpha z, z \rangle = \langle w, z \rangle - \alpha \langle z, z \rangle = \langle w, z \rangle - \frac{\langle w, z \rangle}{\langle z, z \rangle} \langle z, z \rangle + \epsilon \langle z, z \rangle = \epsilon \langle z, z \rangle > 0$$

y

$$h - h'(v) = h(v) - h'(v) = \langle w - \alpha z, v \rangle = \langle w, v \rangle - \langle w, v \rangle + \langle \alpha z, v \rangle = \langle \alpha z, v \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in V$$

Por lo cual $h - h' \in V^*$ y además se tiene que $h - h'(z) = h(z) - h'(z) \geqslant 0$, es decir, $h(z) \geqslant h'(z) > 0$, lo cual prueba que

$$Int(V^*) \subseteq \{h \in V^* | h > o \quad \text{en} \quad V - \{0\}\}$$

que es un conjunto abierto contenido en V^*, como $Int(V^*)$ es el abierto más grande contenido en V^* se sigue el resultado.

(b)

Suponemos que V no contiene lineas, probaremos por inducción sobre m que cualquier punto v es combinación lineal de rayos extremales.

Observación: Por el inciso (a) se tiene que para cualquier punto z en la frontera de V, existe un elemento no cero $h \in V^*$ que se anula en v. Un rayo extremal $\mathbb{R}^+R$ en $\ker(h) \cap V$ es extremal en V ya que si $r_1 + r_2 = \alpha R \in \mathbb{R}^+R$ con $r_1, r_2 \in V$ se tiene que $h(r_i) \geqslant 0$ y $h(\alpha R) = \alpha h(R) = 0$ por lo que $r_1, r_2 \in Ker(h) \cap V$ y por lo tanto $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+R$, es decir, $\mathbb{R}^+R$ es un rayo extremal de V.

Sean $z \in \partial V$ y $h \in V^* - \{0\}$ tal que $h(v) = 0$, por hipótesis de inducción, existe $\mathbb{R}^+R$ rayo extremal de $\ker(h) \cap V$ y por la observación anterior también es rayo extremal de V. Dado $v \in V$, definimos el conjunto $A_v := \{\lambda \in \mathbb{R}^+ | v - \lambda R \in V\}$ el cual es un intervalo cerrado y no vacio, más aún A_v es un conjunto acotado, ya que de no ser así se tendría que $-R = \lim_{\lambda \to \infty^+} \lambda^{-1}(v - \lambda R) \in V$, que es una contradicción a la hipótesis de que V no contiene lineas. Si λ_0 es el máximo del conjunto A_v se tiene que $v - \lambda_0 R \in \partial V$ y por el inciso (a) existe un elemento $h' \in V^* - \{0\}$ que se anula en $v - \lambda_0 R$, además

$$v = \lambda_0 R + (v - \lambda_0 R)$$

aplicando la hipótesis de inducción al cono $\ker(h') \cap V$ se tiene que $v - \lambda_0 R$ es generado por rayos extremales.

(c)

Supongamos que V genera a $\mathbb{R}^m$ (de lo contrario nos podemos restringir al subespacio generado por V). Sea $W \subsetneq V$ un subcono extremal de V. Si existe $v \in Int(V) \cap W$, entonces para x lo suficientemente cerca de v tal que $v + x, v - x \in V$ se tiene que $(v + x) + (v - x) = 2v \in W$. Entonces W es un abierto en el interior de V y por hipótesis W es cerrado en V lo cual implica que $W = V$ pero esto no puede pasar, de donde concluimos que $Int(V) \cap W = \emptyset$.

En particular el interior de W es vacio (en $\mathbb{R}^m$) y por lo tanto $\langle W \rangle$ no puede generar a $\mathbb{R}^m$. Sea w un punto en el interior de W (en $\langle W \rangle$), por lo anterior w está en el la frontera de V y por el inciso (a) existe un elemento no cero $h \in V^*$ que se anula en w. Nuevamente, aplicando el inciso (a) al cono W^* en $\langle W \rangle$ se tiene que h se anula en $\langle W \rangle$ y por lo tanto, es una función soporte de W.

(d)

Como W no contiene lineas por el inciso (a) existe un punto en el interior de W^*. Este punto es una forma lineal h que es positiva en $W - \{0\}$ y se anula en un punto de $V - \{0\}$. Por el inciso (b) se tiene que el cono cerrado $ker(h) \cap V$ tiene un rayo extremal $\mathbb{R}^+R$ que también es extremal en V (por la observación hecha en el inciso (b)), de esta manera, se tiene que $\mathbb{R}^+R$ es un rayo extremal en V que se anula en h.

Observación 3.12. *Como vimos en el capítulo dos, el producto de intersección define una forma bilineal no degenerada en $N^1(X) \times N_1(X)$. Así, podemos dar una reinterpretación al inciso (d) del Lema anterior usando el Lema de representación de Riesz de la siguiente manera: Si $V \subseteq N_1(X)$ es un cono que no contiene lineas y W es un subcono cerrado y propio de V, entonces existe un divisor D en $N^1(X) - \{0\}$ de manera que el producto de intersección de D con cualquier curva en W es positivo y se anula en algún rayo extremal de V.*

3.3.2. Demostración de el Teorema del Cono

Teorema 3.13 (Teorema del Cono). *Sea X una variedad proyectiva y suave, entonces:*

1. *Existe una familia numerable de curvas $C_i \subseteq X$ tales que*

$$0 < (-K_X \cdot C_i) \leqslant dimX + 1 \qquad y$$

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geqslant 0} + \sum \mathbb{R}^+[C_i]$$

donde $\mathbb{R}^+[C_i]$ son todos rayos extremales distintos de $\overline{NE}(X)$ contenidos en $(K_X)_{<0}$.

2. *Para cualquier $\epsilon > 0$ y H divisor amplio en X se tiene que*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X+\epsilon H)\geqslant 0} + \sum_{finita} \mathbb{R}^+[C_i]$$

Demostración.
Observemos que como X es variedad proyectiva, existe un divisor amplio H en X y por el criterio de Amplitud de Kleiman 2.18, para cualquier entero k existe un número finito de curvas irreducibles tales que su intersección con H es menor o igual que k, de donde deducimos que a lo más hay una cantidad numerable de curvas irreducibles en X. Para cada clase de equivalencia numérica tal que $0 < (-K_X \cdot [C]) \leqslant dimX + 1$, escogemos una curva racional C_i (si existe) de esta manera podemos considerar el conjunto indexado

$$\{C_i\}_{i\in I} := \{C_i | C_i \text{ es una curva racional y } 0 < (-K_X \cdot C_i) \leqslant dimX + 1\}$$

y definimos el conjunto

$$W := \overline{(\overline{NE}(X)_{K_X\geqslant 0} + \sum \mathbb{R}^+[C_i])}$$

(♠) Primero probaremos que para cualquier conjunto de indices J el cono

$$V_J := \overline{NE}(X)_{K_X\geqslant 0} + \sum_{j\in J} \mathbb{R}^+[C_i]$$

es cerrado. Por el Lema 3.11 es suficiente probar que para cualquier rayo extremal $\mathbb{R}^+[T] \subseteq \overline{V_J}$ tal que $(K_X \cdot T) < 0$ se tiene que $\mathbb{R}^+[T] \subseteq V_J$. Escribamos a T como límite de de dos sucesiones $\{R_m + S_m\}$ con $(K_X \cdot R_m) \geqslant 0$ y $S_m \in \sum_{j\in J} \mathbb{R}^+[C_i]$. Sea H divisor amplio en X, entonces las sucesiones $\{(H\cdot R_m)\}$ y $\{(H\cdot S_m)\}$ están acotadas por $(H\cdot T)+1$ así, podemos suponer (tomando subsucesiones) que ambas tienen límite en $\overline{V_J}$. Como T genera un rayo extremal de $\overline{V_J}$ estos limites deben ser un múltiplo no negativo de T. Dado que $(K_X \cdot T) < 0$, el límite de $\{R_m\}$ debe ser cero. Sean $\epsilon > 0$ tal que $((K_X+\epsilon H)\cdot T) < 0$ y $[C_{j_\alpha}] \in \{[C_j]\}_{j\in J}$, entonces $((K_X+\epsilon H)\cdot C_{j_\alpha}) < 0$ si y sólo si $(H \cdot C_{j_\alpha}) \leqslant \frac{(-K_X\cdot C_{j_\alpha})}{\epsilon} \leqslant \frac{dimX+1}{\epsilon}$, por el criterio de amplitud de Kleiman se tiene que existen sólo una cantidad finita de estas curvas, digamos $\{[C_{j_1}], \dots, [C_{j_q}]\} \subseteq \{[C_j]\}_{j\in J}$ de esta manera, podemos descomponer a la sucesión $\{S_m\}$ como suma de dos sucesiones $\{S'_m + S''_m\}$ donde

$$S'_m = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_{\alpha,m}[C_{j_\alpha}]$$

y $((K_X+\epsilon H)\cdot S''_m) \geqslant 0$. Además podemos suponer (tomando subsucesiones) que $\{S'_m\}$ y $\{\lambda_{\alpha,m}\}$ convergen a un múltiplo no negativo de T. Como $((K_X+\epsilon H)\cdot T) < 0$, el límite de la sucesión $\{S''_m\}$ es cero y por lo tanto $T \in V_J$.

Lo anterior prueba que $(\overline{NE}(X)_{K_X\geqslant 0} + \sum \mathbb{R}^+[C_i]) = \overline{(\overline{NE}(X)_{K_X\geqslant 0} + \sum \mathbb{R}^+[C_i])} = W$

De esta manera, para probar el primer inciso de este Teorema es suficiente con probar que $W = \overline{NE}(X)$. Supongamos que esto no pasa, es decir, $W \subsetneq \overline{NE}(X)$, por la observación 3.12 existe un divisor D tal que la intersección con cualquier elemento de $W - \{0\}$ es positiva y la intersección con algún subconjunto de $\overline{NE}(X) - W$ es negativa.

Sean H un divisor amplio en X y $\mu > 0$ el real más grande tal que $H + \mu D$ es nef, entonces existe $z \in \overline{NE}(X) - W$ tal que $((H + \mu D) \cdot z) = 0$. Por definición del cono de curvas, existen 1-ciclos efectivos $Z_k = \sum_j a_{kj} Z_{kj}$ en X tales que $[Z_k] \to z$ cuando $k \to \infty$. En la siguiente figura se muestra geométricamente la situación planteada en este párrafo.

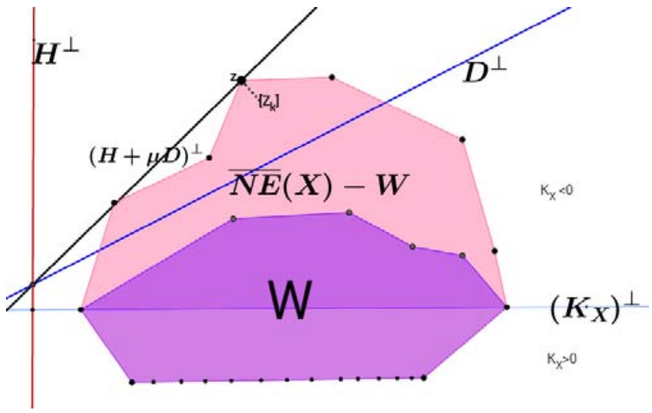


Figura 3.2: Teorema del Cono

Para cualquier racional $0 < \mu' < \mu$, se tiene que el $\mathbb{Q}$- divisor $H + \mu' D$ es amplio en X, y por la generalización del Lema 3.9 se tiene que

$$\frac{(-K_X \cdot Z_k)}{((H + \mu' D) \cdot Z_k)} \leqslant \max_j \left\{ \frac{(-K_X \cdot Z_{kj})}{((H + \mu' D) \cdot Z_{kj})} \right\}$$

Sea Z_{k0} tal que $\frac{(-K_X \cdot Z_{k0})}{((H+\mu' D)\cdot Z_{k0})} = \max_j \left\{ \frac{(-K_X \cdot Z_{kj})}{((H+\mu' D)\cdot Z_{kj})} \right\}$, por el Teorema 3.10 existe una curva racional $E_{i(k)}$ en X tal que $0 < (-K_X \cdot E_{i(k)}) \leqslant dimX + 1$ y

$$\frac{(-K_X \cdot E_{i(k)})}{((H + \mu' D) \cdot E_{i(k)})} \geqslant \frac{(-K_X \cdot Z_{k0})}{((H + \mu' D) \cdot Z_{k0})} \geqslant \frac{(-K_X \cdot Z_k)}{((H + \mu' D) \cdot Z_k)}$$

Por construcción $E_{i(k)}$ debe estar en la clase de alguna C_i y por lo tanto está en W, lo que nos dice en particular que $(D \cdot E_{i(k)}) > 0$ de manera que se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{(-K_X \cdot E_{i(k)})}{(H \cdot E_{i(k)})} \geqslant \frac{(-K_X \cdot E_{i(k)})}{((H + \mu' D) \cdot E_{i(k)})} \geqslant \frac{(-K_X \cdot Z_k)}{((H + \mu' D) \cdot Z_k)}$$

Por otro lado, por las propiedades de sumas de divisores vistas en el capítulo dos, se tiene que existe una constante positiva M tal que el divisor $MH + K_X$ es amplio y por el criterio de Nakai-Moishezon se tiene que $((MH + K_X) \cdot E_{i(k)}) = M(H \cdot E_{i(k)}) + (K_X \cdot E_{i(k)}) > 0$, es decir

$$M > \frac{(-K_X \cdot E_{i(k)})}{(H \cdot E_{i(k)})} \geqslant \frac{(-K_X \cdot Z_k)}{((H + \mu' D) \cdot Z_k)}$$

Así, si $k \to \infty$ y $\mu' \to \mu$ se tiene que

$$M > \frac{(-K_X \cdot Z_k)}{((H + \mu' D) \cdot Z_k)} \to \frac{(-K_X \cdot z)}{((H + \mu D) \cdot z)} = \frac{(-K_X \cdot z)}{0} = +\infty$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $\overline{NE}(X) = W$.

Para el segundo inciso, sean H un divisor amplio y $\epsilon > 0$, como se vio anteriormente ($\spadesuit$) , sólo hay un número finito de curvas $[C_i]$ que cumplen que $(K_X + \epsilon H) \cdot C_i) < 0$, además el cono

$$V_{H,\epsilon} := \overline{NE}(X)_{(K_X+\epsilon H)\geqslant 0} + \sum_{((K_X+\epsilon H)\cdot C_i)<0} \mathbb{R}^+[C_i] \subseteq \overline{NE}(X)$$

es cerrado y contiene a W, por el primer inciso, se sigue el resultado.

El inciso (2) de este teorema nos dice en particular que los rayos extremales de $\overline{NE}(X)$ son localmente discretos en $(K_X)_{<0}$, nos referiremos a estos rayos como rayos K_X-negativos.

Corolario 3.14. *Sea X una variedad proyectiva suave y R un rayo K_X-negativo, entonces existe un divisor M_R en X tal que:*

(a) $R = \{z \in \overline{NE}(X) | (M_R \cdot z) = 0\}$ y

(b) El divisor $mM_R - K_X$ es amplio para m lo suficientemente grande.

El divisor M_R es llamado el divisor soporte de R.

Demostración.

Usando la notación de la prueba del Teorema del Cono, tenemos que existe $i_0 \in I$ tal que $R = \mathbb{R}^+[C_{i_0}]$. De igual manera, en la prueba de este Teorema (en ($\spadesuit$)) se probo que el cono

$$V := V_{I-\{i_0\}} = \overline{NE}(X)_{K_X\geqslant 0} + \sum_{i\in I-\{i_0\}} \mathbb{R}^+[C_i]$$

es cerrado y está propiamente contenido en $\overline{NE}(X)$. Por 3.11 inciso (d) existe una forma lineal no negativa en $\overline{NE}(X)$ que es positiva en $V - \{0\}$ y se anula en un punto no cero de $\overline{NE}(X)$, como $\overline{NE}(X) = V + R$, se tiene que esta forma lineal se anua en R. Por la observación 3.12 existe un divisor M_R que se corresponde con la forma lineal, es decir, es positivo en $V - \{0\}$ y se anula en R. En particular es nef, lo cual prueba la primera parte de este Corolario.

Considerando una norma $||.||$ en $N_1(X)$, sean $0 < a := \text{mín}\{(M_R \cdot z) | z \in V \text{ y } ||z|| = 1\}$ y $b := \text{máx}\{(K_X \cdot z) | z \in V \text{ y } ||z|| = 1\}$. Observemos que para cualquier $m \geqslant 0$ se tiene que $mM_R - K_X$ es positivo, así, si consideramos a los enteros $m > \text{máx}\{\frac{b}{a}, 0\}$ se tiene que la intersección de cualquier elemento de $\overline{NE}(X) - \{0\}$ con $mM_R - K_X$ es positiva, y por el criterio de amplitud de Kleiman 2.18 se tiene que $mM_R - K_X$ es amplio, lo cual prueba la segunda parte del Corolario.

El Teorema del Cono nos da una descripción interesante del cono de curvas de una variedad proyectiva y una pregunta que podríamos hacernos es: ¿Que relación tiene esta descripción con las propiedades geométricas de la variedad?. Como vimos en el capítulo dos, dado un morfismo $\pi : X \to Y$ entre variedades proyectivas cuyas fibras son conexas, entonces su cono relativo es un subcono extremal del cono de curvas de la variedad X. Uno de los pasos claves del Programa de Mori es la observación de que los rayos extremales se corresponden con subconos extremales asociados a morfismos de la variedad. Por ello, consideramos la siguiente definición:

Definición 3.15. *Sean X una variedad proyectiva y $F \subseteq \overline{NE}(X)$ un subcono extremal. Un morfismo $Cont_F : X \to Z$ es llamado* ***contracción de*** *F si se cumple lo siguiente:*

1. *$Cont_F(C) = pto$ para una curva irreducible $C \subseteq X$ si y sólo si $[C] \in F$.*

2. *Con_F cumple la propiedad ($\clubsuit$), es decir, $(Con_F)_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$.*

En característica cero, se sabe que siempre existe la contracción de un rayo extremal K_X-negativo, el cual viene del siguiente Teorema:

Teorema 3.16 (Kawamata). *Sean X una variedad proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$ y D un divisor nef en X tal que $aD - K_X$ es nef y grande (si $\limsup_{m \to +\infty} \dfrac{h^0(X, m(aD - K_X))}{m^n} > 0$) para alguna $a \in \mathbb{Q}^+ - \{0\}$. Entonces el divisor mD es generado por secciones globales para m lo suficientemente grande.*

La Prueba de este Teorema puede consultarse en [KMM, 3, Teorema 3.1.1, pág. 315]

Corolario 3.17. *Sean X una variedad proyectiva suave sobre $\mathbb{C}$ y R un rayo extremal K_X-negativo, entonces:*

a) La contracción $C_R := Cont_R : X \to Y$ de R existe, además Y es una variedad proyectiva normal que viene dada por la factorización de Stein definida por cualquier múltiplo lo suficientemente grande de un divisor soporte de R.

b) Dada cualquier curva entera C en X con clase en R, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Pic(Y) \xrightarrow{(C_R)_*} Pic(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[D] \mapsto (D \cdot C)$$

y además $\rho(Y) = \rho(X) - 1$.

3.3.3. Contracción de Rayos Extremales

En la sección 1 de este capítulo vimos que las variedades con un divisor canónico nef tienen un estructura birracional simple. Si el divisor canónico no es nef, por el Teorema del Cono existe un rayo extremal K_X-negativo. La idea central del Programa de Mori es contraer estos rayos extremales para ver si se obtienen variedades más sencillas y repetir el proceso terminando en una variedad con un divisor canónico nef. Desafortunadamente, esto no es tan simple. La contracción de un rayo extremal R que sea K_X-negativo en una variedad X siempre existe en característica cero por el Corolario 3.17 y en cualquier característica cuando X es una superficie (esto lo veremos con más detalle en el capítulo 4). Por la Proposición 2.21 inciso (b) esta contracción esta univocamente determinada y contrae a todas las curvas cuyas clases están en R, a la unión de todas estas curvas es llamado el lugar geométrico de R y se denota por $locus(R)$.

- Tipos de Contracción: Hay tres casos

  † Si lugar geométrico de R es X, la contracción es llamada **contracción fibrada**.

  † Si lugar geométrico de R es un divisor irreducible, la contracción es llamada **contracción divisorial**.

  † El lugar geométrico de R tiene codimensión al menos 2, la contracción es llamada **contracción pequeña**.

Capítulo 4

Superficies

En todo el capítulo S representara una superficie proyectiva suave, es decir, una variedad proyectiva suave de dimensión dos. En este caso se tiene que $Div(S) \cong WDiv(S) = Z_1(S)$, es decir, es indistinto hablar de divisores o de curvas en S y por tanto, la forma de intersección es simétrica.

Definimos el género aritmético una variedad completa X de dimensión arbitraria como sigue:

$$P_a(X) := (-1)^{dimX}(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$$

en el caso de una superficie S el género aritmético queda de la siguiente manera:

$$P_a(S) := \chi(\mathcal{O}_S) - 1 = h^2(S, \mathcal{O}_S) - h^1(S, \mathcal{O}_S)$$

Usando el Teorema de Riemann-Roch para superficies se puede probar que dado un divisor efectivo D en S, se tiene la siguiente fórmula, llamada **fórmula de adjunción**;

$$2P_a(D) - 2 = (D \cdot (D + K_S))$$

4.1. El Teorema de Castelnuovo

Dado un mapeo birracional $f : S \dashrightarrow R$ entre superficies proyectivas suaves y un subconjunto cerrado $Z \subseteq S$, definimos la transformada total de Z como:

$$f(Z) := p_R(p_S^{-1}(Z))$$

donde p_S, p_R son las proyecciones de $S \times R$ en S y R respectivamente. Cuando $Z = \{p\}$, escribimos $f(P)$ en lugar de $f(\{p\})$.

Observación 4.1. *Como vimos en el capítulo tres, el conjunto de puntos donde f no esta definido tiene codimensión al menos 2, como S y R son superficies, esto implica que este conjunto consta de sólo una cantidad finita de puntos. Además, por una variante del Teorema Principal de Zariski [H1, V, Teorema 5.2, pág. 410] se tiene que si p es uno de estos puntos, entonces el conjunto $T(p)$ tiene dimensión mayor o igual a 1, nuevamente, por dimensión, esto implica que $T(p)$ tiene dimensión 1.*

Proposición 4.2. *Sea $f : S \to R$ un morfismo birracional entre superficies proyectivas suaves. Sea $p \in Exc(f^{-1})$, entonces f se factoriza a través de un blow-up con centro en p.*

Demostración.

Sea $\pi : \tilde{R} \to R$ el blow-up con centro en p; definimos $T := \pi^{-1} \circ f : S \to R$, afirmamos que T es un morfismo.

Si T no es morfismo, existe $p' \in Exc(T)$, como π^{-1} es un morfismo en $R - \{p\}$, se tiene que $f(p') = p$, por la observación 4.1, $T(p')$ tiene dimensión uno en $\tilde{R}$, y por tanto, debe ser la curva excepcional de π.

Por otro lado, 4.1 también implica que T^{-1} está definida en todo salvo un número finito de puntos, de manera que, podemos escoger un punto $q \in E$ en donde T^{-1} este definido, tal que $T^{-1}(q) = p'$. Probaremos que esta situación es una contradicción.

Sea $\mathfrak{M}$ la gavilla de ideales de p es R, entonces $\tilde{R}$ esta definido en una vecindad de p como $\mathbb{P}roj(\mathscr{I})$, donde $\mathscr{I}$ es la gavilla de álgebras graduadas $\mathscr{I} := \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathfrak{M}^d$. Sean x, y para metros locales de p, entonces, x, y generan a $\mathfrak{M}$ en una vecindad (la cual podemos considerar afín) $U = SpecA$ de p, por [H1, III, Teorema 7.10, pág. 245] se tiene una resolución de $\mathfrak{M}$ sobre U

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_U^2 \xrightarrow{g} \mathfrak{M} \longrightarrow 0$$

Como g es suprayectivo, existen $t, u \in \mathcal{O}_U^2$ tales que $g(t) = x$ y $g(u) = y$, y por tanto el núcleo de g es generado por $ty - ux$, por lo que $\mathscr{I}$ en U es la gavilla asociada a el A-álgebra $A[t, u]/(ty - ux)$, de donde concluimos que $\pi^{-1}(U) \subseteq \tilde{R}$ es el subesquema cerrado de $\mathbb{P}_A^1$ definido por la ecuación $ty - ux$, con t, u coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}_A^1$. Por un cambio lineal de las variables x, y, t, u podemos suponer que q es el punto $t = 0$, $u = 1$ en E, lo que implica que las coordenadas de q en $\tilde{R}$ son t, y. La ecuación local de E es $y = 0$ y $x = ty$.

Como $p \in Exc(f^{-1})$ nuevamente, por la observación 4.1 $f^{-1}(p)$ es conexo y de dimensión 1, por lo que existe $C \subseteq f^{-1}(p)$ curva irreducible que contiene a p'. Sea $z = 0$ la ecuación local de C en p'. Dado que $f^{-1}(p)$ esta definida por $x = y = 0$, las imágenes de x, y en $\mathcal{O}_{p'}$ están en el ideal generado por z y los podemos escribir como $x = az$ y $y = bz$ con $a, b \in \mathcal{O}_{p'}$.

Por otro lado,considerando a $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_{p'}$ y $\mathcal{O}_q$ subanilllos del campo de funciones de $R, \tilde{R}, S$, se tiene que $\mathcal{O}_q$ domina a $\mathcal{O}_{p'}$. Además, t, y son las coordenadas locales de q, por lo que $y \notin \mathfrak{M}_q^2$ y por lo tanto $y \notin \mathfrak{M}_{p'}$ en $\mathcal{O}_{p'}$, esto nos prueba que b es una unidad en $\mathcal{O}_{p'}$ y $t = \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ en $\mathcal{O}_{p'}$, entonces $t \in \mathfrak{M}_q$ que tiene como consecuencia que $t \in \mathfrak{M}_{p'}$.

$T(p') = E$ y por tanto, para cualquier $w \in \mathfrak{M}_{p'}$, la imagen de w en $\mathcal{O}_q$ debe de estar contenido en el ideal generado por y, pues y es la ecuación local de E, en particular si $w = t$ tenemos que $t \in \langle y \rangle$, que es una contradicción, ya que t, y son las coordenadas locales de q.

Por lo tanto, T es morfismo y por construcción, se tiene que $f = \pi \circ T$.

$\mathfrak{D}$

Corolario 4.3 (Factorización de Morfismos Birracionales)**.** *Sean $f : S \to R$ un morfismo birracional entre superficies proyectivas suaves y $n(f)$ el número de curvas irreducibles en S que son contraídas por f. Entonces, $n(f) \in \mathbb{N}$ y f puede ser factorizado como composición de exactamente $n(f)$ blow-up y un isomorfismo.*

Demostración.

Si $f(C) = p$, entonces p es un punto donde f^{-1} no está definido, por la observación 4.1 el conjunto de puntos donde f^{-1} no está definido es finito y en cada uno su imagen inversa es un subconjunto cerrado de S, el cual sólo puede tener un número de componentes irreducibles, por lo tanto, el conjunto de curvas contraídas por f es finito.

Sea $p \in Exc(f)$ por la Proposición 4.2 f se factoriza a través de $\pi_1 : \tilde{R} \to R$ (blow-up con centro en p_1), es decir, $f = \pi_1 \circ f_1$, con $f_1 : S \to \tilde{R}$ un morfismo.

Afirmación $n(f_1) = n(f) - 1$. Sea C una curva irreducible en S, si $f_1(C)$ es contraída por f_1, entonces es contraída por f, por lo que $n(f_1) \leqslant n(f)$. Inversamente, si C es contraída por f, entonces es contraída por f_1 o $f_1(C)$ es una curva excepcional de π_1. Más aún, como f_1^{-1} es morfismo salvo en un número finito de puntos, existe una única curva irreducible E en S tal que $f_1(E) = f_1(C)$ y por lo tanto $n(f_1) = n(f) - 1$.

Aplicando el mismo razonamiento a f_1 podemos factorizarlo como composición de un blow-up y un morfismo f_2 tal que $n(f_2) = n(f_1) - 1 = n(f) - 2$, repitiendo el proceso $n(f)$ veces, tenemos que $f = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \ldots \circ \pi_{n(f)} \circ g$ con π_i blow-up con centro en p_i con $i \in \{1, \ldots, n(f)\}$ y $n(g) = 0$.

Como $n(g) = 0$, entonces $Exc(g) = \emptyset$, por lo que g es un isomorfismo.

Teorema 4.4 (Resolución de Indeterminadas)**.** *Sea* $f : S \dashrightarrow R$ *un mapeo birracional entre superficies proyectivas suaves. Entonces es posible factorizar a* f *en un número finito de Blow-ups e inversas de blow-ups (conocidos como blowdown).*

Demostración.

Usando el Corolario 4.3 es suficiente con probar que existe una superficie S' y morfismos birracionales $g : S' \to S$ y $h : S' \to R$ tales que $f = h \circ g^{-1}$.

Sea H un divisor amplio en R y C_R una curva irreducible no singular en el sistema lineal $|2H|$ que no pasa por ningún punto de $Exc(f^{-1})$. En otras palabras, C_R está contenida en el abierto más grande donde f^{-1} está definido, por lo que tiene sentido considerar a la curva $C_S := f^{-1}(C_R) \subseteq S$. Definimos $m(f) := P_a(C_S) - P_a(C_R)$. Como tenemos un morfismo birracional finito de C_R en C_S, se cumple que $m(f) \geqslant 0$ y $m(f) = 0$ si y sólo si C_R es isomorfo a C_S.

Observemos que si C_R' es una curva linealmente equivalente a C_R que no pasa por $Exc(f^{-1})$, entonces $C_S' := f^{-1}(C_R')$ es linealmente equivalente con C_S. De hecho, si $C_R - C_R' = (g)$ para alguna función racional en R, entonces $C_S - C_S' = (g)$ en S (identificando los campos de funciones racionales por medio de f). Dado que el género aritmético de una curva depende únicamente de la clase de equivalencia lineal, el entero $m(f)$ depende únicamente de f y H, no de la curva particular $C_R \in |2H|$ elegida.

Fijemos una curva $C_R \in |2H|$. Si $m(f) > 0$, entonces C_S es un curva singular. Sean p un punto singular de C_S, $\pi : \tilde{S} \to S$ el blow-up con centro en p y $\tilde{C_S}$ la transformada estricta de C_S. Por [H1, V, Corolario 3.7, pág. 389] tenemos que $P_a(\tilde{C_S}) < P_a(C_S)$ lo que prueba que si $\tilde{f} := f \circ \pi$, entonces $m(\tilde{f}) < m(f)$.

Continuando de esta manera, vemos que existe un morfismo $g : S' \to S$ obtenido por un número finito de blow-ups tal que si $f' = f \circ g$ entonces $m(f') = 0$.

Demostraremos que f' es un morfismo. Si no es así, entonces existe un punto $p \in Exc(f')$, por la observación 4.1 se tiene que $f'(p)$ contiene a una curva irreducible $E \subseteq R$. Como H es amplio, por el criterio de Nakai-Moishezon 2.6 se tiene que $(H \cdot E) > 0$ y por lo tanto $(C_R \cdot E) \geqslant 2$ para cualquier $C_R \in |2H|$. Sea $C_R \in |2H|$ una curva que no contenga ningún punto de $Exc(f'^{-1})$, tal que C_R intersecta transversalmente a E, esto es posible por [H1, V, Lema 1.2, pág. 359], entonces C_R intersecta a E en dos puntos distintos, y por lo tanto, la curva C en S' correspondiente tiene al menos un punto doble en p, esto es una contradicción, ya que $m(f') = 0$.

Por lo tanto f' es un morfismo. Definimos $h := f'$ y aplicamos el Corolario 4.3 g y h; como $f = h \circ g^{-1}$ se tiene el resultado.

Corolario 4.5 (Eliminación de Indeterminadas). *Sea $\pi : S \dashrightarrow Y$ un mapeo racional con S superficie proyectiva suave y Y variedad proyectiva, entonces existe un morfismo birracional $\mathcal{E} : \tilde{S} \to S$ que es composición de blow-ups de puntos tal que $\pi \circ \mathcal{E} : \tilde{S} \to Y$ es un morfismo.*

Demostración.

Basta con aplicar el teorema anterior a la proyección de gráfica de f en S.

☽

Definición 4.6. *Si $E \subseteq S$ es una curva tal que $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$ decimos que E es una (-1)-curva.*

Teorema 4.7 (Teorema de Contracción de Castelnuovo). *Si E es una (-1)-curva en una superficie S, entonces existe un morfismo $f : S \to S_0$ a una superficie proyectiva suave S_0 tal que S es isomorfa al blow-up con centro en un punto $p \in S_0$, con E la curva excepcional.*

Demostración.

Construiremos a S_0 usando la imagen de S de cierto morfismo al espacio proyectivo.

Sea H un divisor muy amplio en S tal que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$, este divisor existe por el Teorema Serre-Grothendieck 1.26. Consideremos $k = (H \cdot E)$, como H es amplio, por el criterio de Nakai-Moishezon 2.6 se tiene que $k > 0$, de ser necesario podemos considerar un múltiplo más grande de manera que $k \geqslant 2$, definimos $\mathscr{M} := \mathcal{O}_S(H + kE)$. La prueba del Teorema se hará en varios pasos:

(1) Primero probaremos por inducción sobre i que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H + iE)) = 0$ para toda $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Por hipótesis es cierto para $i = 0$. Supongamos que es cierto para $i - 1$ y consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-E) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_E \to 0$$

de la cual obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_S(-E) \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \arrow[r] & 0 \\
& \mathcal{O}_S(H+(i-1)E) & \mathcal{O}_S(H+iE) & &
\end{tikzcd}$$

Como por hipótesis $E \cong \mathbb{P}^1$ y además $((H + iE) \cdot E) = (H \cdot E) + i(E \cdot E) = k - i$ por lo que $\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_S(H + iE) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - i)$, de donde obtenemos la siguiente sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \to H^1(S, \mathcal{O}_S(H + (i - 1)E)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(H + iE)) \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - i)) \to \cdots$$

Por hipótesis de inducción $H^1(S, \mathcal{O}_S(H + (i-1)E)) = 0$ y sabemos que para $i \leqslant k$ se tiene que $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - i)) = 0$ lo que prueba la afirmación.

(2) Probaremos que $\mathscr{M}$ está generada por secciones globales. Dado que H es muy amplio, el sistema lineal $|H + kE|$ no tiene puntos base lejos de E, por lo que es suficiente con probar que $\mathscr{M}$ es generado por secciones globales en los puntos de E. Por otro lado, como $\mathscr{M} \otimes \mathscr{I}_E \cong \mathcal{O}_S(H + (k - 1)E)$ y por el paso uno $H^1(S, \mathcal{O}_S(H + (k - 1)E)) = 0$, se tiene que el mapeo natural

$$H^0(S, \mathscr{M}) \to H^0(E, \mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_E)$$

es suprayectivo. Además $((H+kE)\cdot E) = (H\cdot E)+k(E\cdot E) = k-k = 0$ por lo que $\mathscr{M}\otimes\mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ que es generado por la sección global 1. Levantando esta sección a $H^0(S, \mathscr{M})$ y usando el Lema de Nakayama tenemos que $\mathscr{M}$ es generado por secciones globales en todo punto de E.

(3) Probaremos que $\mathscr{M}$ determina un morfismo de S es un espacio proyectivo que es un isomorfismo entre $S - E$ y su imagen menos un punto. Por el paso anterior y la Proposición 1.18 se tiene que $|H+kE|$ es libre de puntos base, y por la Proposición 1.19 $\mathscr{M}$ determina un morfismo $f_1 : S \to \mathbb{P}^N$. Sea S_1 la imagen de S bajo este morfismo. Dado que $f_1^*\mathcal{O}(1) \cong \mathscr{M}$ y el grado de $\mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_E$ es 0, f_1 contrae a E a un punto $p_1 \in S_1$. Por otro lado, H es muy amplio, por lo que $|H + kE|$ separa puntos y separa puntos infinitamente cerca (lejos de E), además separa los puntos de E de puntos que no están en E, por el Teorema 1.22 se tiene que f_1 es un isomorfismo de $S - E$ en $S_1 - \{p_1\}$.

(4) Determinaremos a S_0 y al morfismo $f : S \to S_0$ del Teorema. Sea S_0 la normalización de S_1 y $g : S_0 \to S_1$ el morfismo que cumple la propiedad universal de la normalización. Como S es suave y por lo tanto normal, la propiedad universal de la normalización nos dice que el morfismo f_1 se factoriza como

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & S_0 \arrow[d, "g"] \\ & S_1 \end{tikzcd}$$

Dado que E es irreducible, se tiene que $f(E)$ se contrae en un punto $p \in S_0$, además $S_1 - \{p_1\}$ es no singular, lo que implica que f es un isomorfismo entre $S - E$ y $S_0 - \{p\}$.

(5) Probaremos que S_0 es no singular en p. Dado que S es normal y f birracional, tenemos que $f_*\mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_{S_0}$ y por lo tanto, podemos aplicar el Teorema sobre funciones formales [H1, III, Teorema 11.1, pág. 277] y concluir que la completación del anillo $\mathcal{O}_p$ es:

$$\widehat{\mathcal{O}_p} \cong \lim_{\leftarrow} H^0(E_n, \mathcal{O}_{E_n})$$

donde E_n es un subesquema cerrado de S definido por $\mathfrak{M}_p^n\mathcal{O}_S$, como $f^{-1}(p) = E$, esta sucesión de ideales es cofinal con la sucesión de ideales $\mathscr{I}_E^n$, donde $\mathscr{I}_E$ es el ideal de E, por [H1, II, Observación 9.3.1, pág. 194] podemos considerar estos ideales en lugar de los de la definición de E_n.

Probaremos por inducción que para cada $n > 0$, $H^0(E_n, \mathcal{O}_{E_n})$ es isomorfo al anillo de series de potencias truncado $A_n := k[[x,y]]/(x,y)^n$. Si $n = 1$, por hipótesis $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$ de donde concluimos que $H^0(E, \mathcal{O}_E) = k$ y $\mathscr{I}_E/\mathscr{I}_E^2 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Por [H1, II, Teorema 8.21, pág. 184] se tiene que $\mathscr{I}_E^n/\mathscr{I}_E^{n+1} \cong S^n(\mathscr{I}_E/\mathscr{I}_E^2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Considerando la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{I}_E^n/\mathscr{I}_E^{n+1} \to \mathcal{O}_{E_{n+1}} \to \mathcal{O}_{E_n} \to 0$$

al pasar a cohomología sabemos que $H^i(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = 0$ para toda $i > 0$ y $n > 0$ lo que nos da las siguientes sucesiones exactas

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \to H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}}) \to H^0(\mathcal{O}_{E_n}) \to 0$$

para $n = 1$, $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ es un k-espacio vectorial de dimensión 2. Tomando una base x, y se tiene que $H^0(\mathcal{O}_{E_2})$ contiene a k y es isomorfo a A_2. Inductivamente, si $H^0(\mathcal{O}_{E_n})$ es isomorfo a A_n, levantando los elementos x, y en $H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}})$. Como $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ es un espacio vectorial con base $x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n$ se tiene que $H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}}) \cong A_{n+1}$ lo que prueba la afirmación.

De esta manera, se tiene que

$$\widehat{\mathcal{O}_p} \cong \lim_{\leftarrow} H^0(E_n, \mathcal{O}_{E_n}) \cong \lim_{\leftarrow} A_n = k[[x,y]]$$

el cual es un anillo local y por lo tanto regular, por [AM, 10, Proposición 10.15, pág.121] se tiene que $\mathcal{O}_p$ es un anillo regular, por lo tanto, p es un punto no singular.

(6) Probaremos que S es el blow-up de S_0 en p. Como S_0 es una superficie suave y por construcción $n(f) = 1$ por el Corolario 4.3 $f : S \to S_0$ es composición de un blow-up, que como se vio en la prueba de ese mismo Corolario tiene centro en p, con un isomorfismo, lo cual prueba el Teorema.

El morfismo $f : S \to S_0$ del Teorema anterior nos da un isomorfismo

$$Pic(S) \cong Pic(S_0) \oplus \mathbb{Z}[E]$$

de donde concluimos que

$$N_1(S) \cong N_1(S_0) \oplus \mathbb{R}[E]$$

en particular, este isomorfismo implica que $\rho(S_0) = \rho(S) - 1$. Dado que el número de Picard de una superficie proyectiva suave es finito, una consecuencia del Teorema de Contracción de Castelnuovo es el siguiente:

Corolario 4.8. *Dada una superficie S, existe una sucesión finita de blow-up de puntos en superficies no singulares tales que*

$$S = S_n \to S_{n-1} \to \cdots \to S_1 \to S_0$$

con S_0 una superficie que no contiene (-1)-curvas.

4.2. El Cono de Curvas de una Superficie Suave

Escribiendo el Teorema del Cono para una superficie proyectiva suave, tenemos que existe una familia numerable de curvas racionales irreducibles C_i tales que $0 < (-K_S \cdot C_i) \leqslant 3$ y

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geqslant 0} + \sum \mathbb{R}^+[C_i]$$

donde los rayos $\mathbb{R}^+[C_i]$ son extremales y sólo se acumulan en el hiperplano $K_S^\perp$.

Lema 4.9. *Si D es un divisor en una superficie proyectiva suave S con $D^2 > 0$, entonces $|nD| \neq \emptyset$ ó $|-nD| \neq \emptyset$ para n lo suficientemente grande.*

Demostración.

Dada $n \in \mathbb{N}^*$ por dualidad de Serre [H1, III, Teorema 7.1, pág. 240] tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(nD)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(nD)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(K_S - nD)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - nD)) \leqslant \\ h^0(S, \mathcal{O}_S(nD)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - nD)) \\ \chi(\mathcal{O}_S(-nD)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(-nD)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(K_S + nD)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + nD)) \leqslant \\ h^0(S, \mathcal{O}_S(-nD)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + nD)) \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado, por el Teorema de Riemann-Roch [H1, V, Teorema 1.6, pág. 362] se tiene que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(nD)) &= \frac{n^2}{2} D^2 - \frac{n}{2}(D \cdot K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) \\ \chi(\mathcal{O}_S(-nD)) &= \frac{n^2}{2} D^2 + \frac{n}{2}(D \cdot K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) \end{aligned} \tag{2}$$

juntando ambas expresiones tenemos que

$$\frac{n^2}{2}D^2 - \frac{n}{2}(D \cdot K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) \leqslant h^0(S, \mathcal{O}_S(nD)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - nD))$$
$$\frac{n^2}{2}D^2 + \frac{n}{2}(D \cdot K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) \leqslant h^0(S, \mathcal{O}_S(-nD)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + nD))$$

Como por hipótesis $D^2 > 0$, para n lo suficientemente grande la parte izquierda de ambas desigualdades es grande, pero no puede pasar que $h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - nD))$ y $h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + nD))$ se hagan grandes simultáneamente ya que ambos divisores suman el sistema lineal fijo $|2K_S|$. Por lo tanto $h^0(S, \mathcal{O}_S(nD))$ ó $h^0(S, \mathcal{O}_S(-nD))$ crece junto con n, lo que prueba la afirmación del Lema.

Corolario 4.10. *Sea S una superficie proyectiva suave y H divisor amplio en S. Entonces el conjunto $Q := \{z \in N_1(S) | z^2 > 0\}$ tiene dos componentes conexas*

$$Q^+ := \{z \in Q | (H \cdot z) > 0\} \quad y \quad Q^- := \{z \in Q | (H \cdot z) < 0\}$$

más aún $Q^+ \subseteq \overline{NE}(S)$.

Demostración.

Por el Teorema del Indice de Hodge [H1, V, Teorema 1.9, pág. 364], la forma de intersección en $N_1(S)$ sólo tiene un valor propio positivo, de manera que, escogiendo una base adecuada se puede escribir como $x_1^2 - \sum_{i \geqslant 2} x_i^2$, además la podemos escoger de tal manera que $[H] = (\sqrt{(H \cdot H)}, 0, \ldots, 0)$ esto nos da las dos componentes conexas

$$Q^+ = \{x_1 > (\sum_{i \geqslant 2} x_i^2)^{\frac{1}{2}}\} \quad \text{y} \quad Q^- = \{x_1 < -(\sum_{i \geqslant 2} x_i^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

Por otro lado, para cualquier $z = [D] \in Q$ se tiene que D ó $-D$ es efectivo por el Lema anterior y una curva efectiva tiene intersección positiva con H por el Criterio de Kleiman. Por lo que las curvas efectivas en Q son precisamente las que están en Q^+.

Lema 4.11. *Sea S superficie proyectiva y $C \subseteq S$ una curva irreducible. Si $C^2 \leqslant 0$ entonces $[C]$ está en la frontera de $\overline{NE}(S)$. Más aún, $C^2 < 0$ entonces $R := \mathbb{R}^+[C]$ es un rayo extremal de $\overline{NE}(X)$.*

Demostración.

Primero observemos que

$$\overline{NE}(S) = \mathbb{R}^+[C] + \overline{NE}(S)_{C \geqslant 0}$$

Si $C^2 < 0$ entonces $[C] \notin \overline{NE}(S)_{C \geqslant 0}$ por lo que $[C]$ está en la frontera de $\overline{NE}(S)$ y genera a un rayo extremal.

Si $C^2 = 0$ entonces el funcional lineal $D \mapsto (D \cdot C)$ es no negativo en $\overline{NE}(S)$ y vale 0 en C por el Lema 3.11 inciso (a) se tiene que $[C]$ está en la frontera de $\overline{NE}(S)$.

Teorema 4.12. *Sea S una superficie proyectiva suave y $R \subseteq \overline{NE}(S)$ un rayo extremal K_X-negativo. Entonces el morfismo de contracción $Cont_R : S \to Z$ existe y es uno de los siguientes casos:*

1. *Z es una superficie suave y S se obtiene de Z con el blow-up de un punto cerrado $p \in Z$, $\rho(Z) = \rho(S) - 1$.*
2. *Z es una curva proyectiva suave y S es una superficie reglada sobre Z, $\rho(S) = 2$.*
3. *Z es un punto y $-K_X$ es amplio, $\rho(S) = 1$.*

Demostración.

Sea $C \subseteq S$ una curva racional irreducible tal que $R = \mathbb{R}^+[C]$ y $0 < (-K_S \cdot C) \leqslant 3$ que existe por el Teorema del cono. Probaremos que los tres casos posibles del Teorema se corresponden con el valor de C^2.

$C^2 < 0$

Por hipótesis $C^2 < 0$ y $(C \cdot K_S) < 0$, usando la fórmula de adjunción se tiene que

$$0 \leqslant h^1(C, \mathcal{O}_C) =: P_a(C) = \frac{(C \cdot (C + K_S))}{2} + 1 = \frac{C^2 + (C \cdot K_S)}{2} + 1$$

de donde concluimos que $(C \cdot K_S) = C^2 = -1$ lo que nos implica que C es una (-1)-curva y el Teorema de contracción de Castelnuovo 4.7 implica el inciso 1.

$C^2 > 0$

Por el Corolario 4.10 $[C]$ está en el interior de $\overline{NE}(S)$, además $[C]$ genera a un rayo extremal, lo que implica que $N_1(S) = \mathbb{R}[C] \cong \mathbb{R}$, es decir, $\rho(S) = 1$. Por otro lado, la hipótesis de que $(C \cdot K_S) < 0$ implica que K_S es negativo en $\overline{NE}(S) - \{0\}$, por el criterio de Kleiman 2.18 se tiene que $-K_S$ es amplio.

$C^2 = 0$

Por la hipótesis y el Teorema de Riemann-Roch [H1, V, Teorema 1.6, pág. 362] se tiene que para $m \in \mathbb{N}^*$

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) + \frac{-m(C \cdot K_S)}{2} = \chi(S, \mathcal{O}_S(mC)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(mC)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(mC)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(mC))$$
$$\leqslant h^0(S, \mathcal{O}_S(mC)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(mC))$$

Como C es efectivo, para m lo suficientemente grande $H^2(S, \mathcal{O}_S(mC)) = 0$, por esto y la desigualdad de arriba concluimos que para m lo suficientemente grande

$$2 \leqslant h^0(S, \mathcal{O}_S(mC))$$

Por otro lado, cualquier componente fija es multiplo de C, por lo que existe $m' > 0$ tal que $|m'C|$ no tiene componentes fijas, dado que $C^2 = 0$, un miembro general es disjunto de C y por lo tanto $|m'C|$ no tiene puntos base. Por lo anterior, tenemos un morfismo $\varphi : S \to \mathbb{P}^N$. Usando la factorización de Stein [H1, III, Corolario 11.4, pág. 280] podemos factorizar a φ en

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

con f morfismo proyectivo con fibras conexas y g morfismo finito. Definimos

$$Cont_R := f : S \to Z$$

.

Sea $\sum a_i C_i$ la fibra de $Cont_R$, por construcción $\sum a_i[C_i] = [C] \in R$, como R es rayo extremal $[C_i] \in R$ para toda i, lo cual implica que $C_i^2 = 0$ y $(C_i \cdot K_S) < 0$ para toda i. Por la fórmula de adjunción se tiene que $C_i \cong \mathbb{P}^1$ y $(C_i \cdot K_S) = -2$, de manera que

$$-2 = (C \cdot K_S) = (\sum a_i C_i \cdot K_S) = \sum a_i (C_i \cdot K_S) = -2 \sum a_i$$

esto prueba que $\sum a_i C_i$ es una curva irreducible y reducida isomorfa a $\mathbb{P}^1$, por lo tanto S es una superficie reglada sobre Z y por el Corolario 2.27 el número de Picard es 2.

☽

Cuando se cumple la condición 3 del Teorema anterior se puede probar además que $S \cong \mathbb{P}^2$, la prueba de esto se puede consultar en [Ko1, III, Teorema 3.7, pág. 175] para campos algebraicamente cerrados de cualquier característica o para superficies sobre $\mathbb{C}$ en [Ma, Teorema 1.4.4, pág 43] o [MP, II, Teorema 7.1.1, pág. 178]. Usando este resultado, se tiene que los casos 2 y 3 del Teorema anterior, dan un Teorema de estructura para S, pero el caso 1 nos introduce a una nueva superficie Z a la cual le podemos aplicar nuevamente el Teorema. En cada paso, el número de Picard disminuye y por lo tanto el proceso debe terminar en algún momento. Esto nos prueba el siguiente Teorema:

Teorema 4.13. *Sea S una superficie proyectiva suave, entonces existe una sucesión de contracciones*

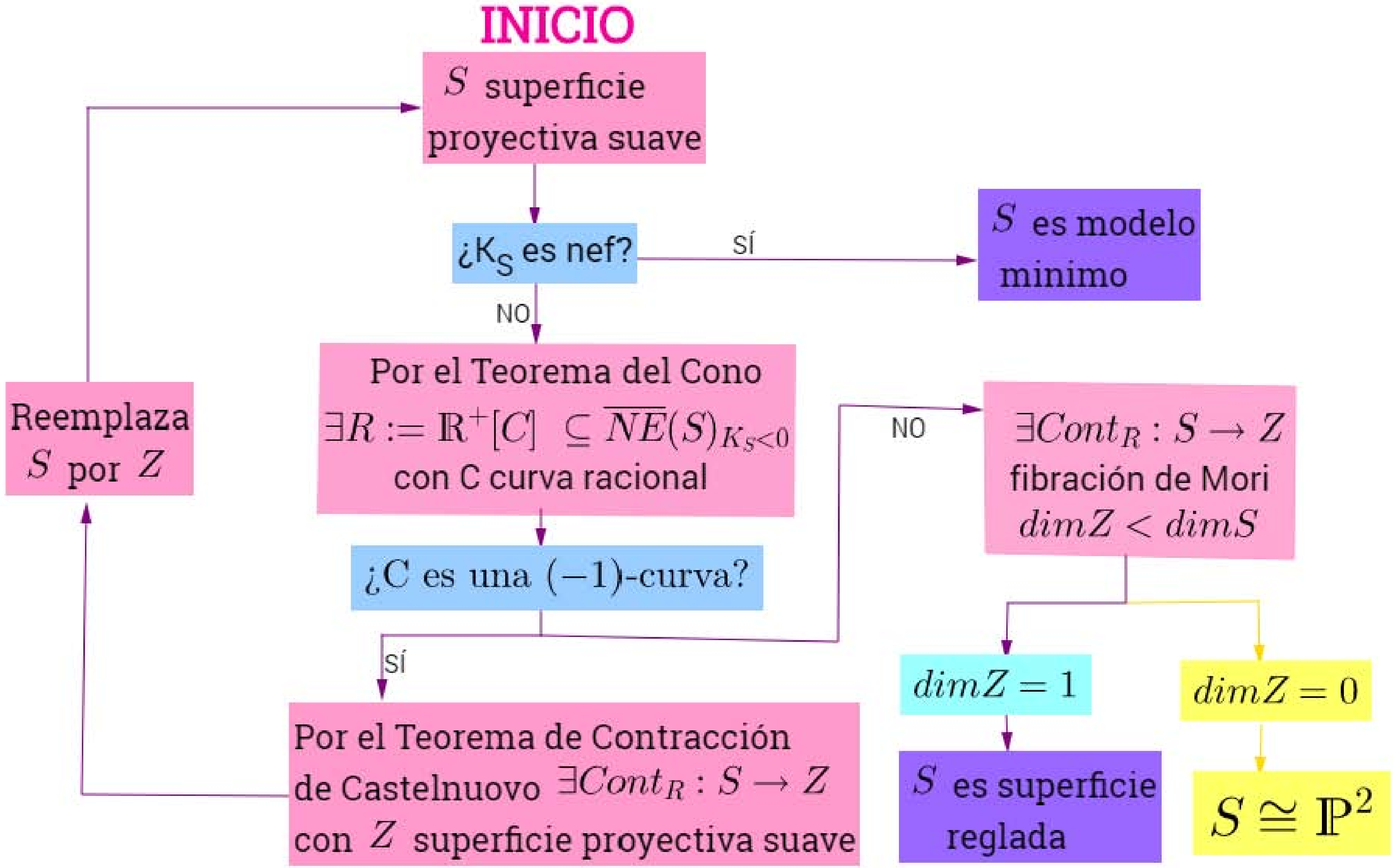
$$S \to S_1 \to \cdots \to S_n = S'$$

tal que S' satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

1. *$K_{S'}$ es nef*
2. *S' es una superficie reglada sobre una curva C*
3. *$S' \cong \mathbb{P}^2$.*

Definición 4.14. *Si $K_{S'}$ es nef, llamamos a S' un* ***modelo mínimo*** *para S. En este caso, el morfismo $S \to S'$ es único y por lo tanto S' está determinado por S.*

Lo anterior nos da un método para encontrar el modelo mínimo para una superficie S y podemos resumirlo en el siguiente diagrama:


INICIO
S superficie proyectiva suave
¿K_S es nef?
SÍ
S es modelo minimo
NO
Por el Teorema del Cono
$\exists R := \mathbb{R}^+[C] \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S<0}$
con C curva racional
¿C es una (-1)-curva?
NO
$\exists Cont_R : S \to Z$
fibración de Mori
$dimZ < dimS$
SÍ
Reemplaza S por Z
Por el Teorema de Contracción de Castelnuovo $\exists Cont_R : S \to Z$
con Z superficie proyectiva suave
$dimZ = 1$
$dimZ = 0$
S es superficie reglada
$S \cong \mathbb{P}^2$

Bibliografía

[AM] M. F. Atiyah/ I. G. Macdonald, Introducción al Álgebra Conmutativa, Reverté, Barcelona, 1978.

[Ba] L. Badescu, Algebraic Surfaces, Springer Velarg, New York, 2001.

[Be] A. Beauville, Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

[De] O. Debarre, Higher-dimensional algebraic geometry, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[EGA] A. Grothendieck, Élements de Géometrie Algébrique III, Étude Cohomologique des Faisceaux Cohérents (Première Partie), Publications Mathématiques No. 11, Paris.

[Go] J. Goodman, Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors, Ann. of Math. (2) 89 (1969), 160-183.

[H1] Hartshorne R., Algebraic Geometry, Springer, Graduate Texts in Mathematics 52, Berlin, 1977.

[H2] Hartshorne R., Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, Lecture Notes in Mathematics 156, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1970.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, _ , Sendai, 1985.

[K] S. Kleiman, Towards a numerical theory of ampleness, Ann. of Math. 84 (1966), pp. 293-344.

[Ko1] J. Kollár, Rational Curves on Algebraic Varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 32, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[KoMo] J. Kollar and S. Mori, Birational Geometry of Algebraic Varieties, Cambridge University Press, 1998. 1982.

[L] R. Lazarsfeld, Positivity in Algebraic Geometry I & II, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 48 & 49, Springer Verlag, Berlin, 2004.

[Ma] K. Matsuki, Introduction to the Mori Program, Springer Verlag, New York,2000.

[Mo] S. Mori, Projective Manifolds with Ample Tangent Bundles, Ann. of Math. 110 (1979), pp. 593-606.

[MP] Y. Miyaoka and T. Peternell, Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties, Birkhäuser Verlag, 1997.

[Sh] I. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry I, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1977.

[vW] B.L. van der Waerden, Modern Algebra, Vol. 2,segunda edición, Springer Verlag, Berlin Herdelberg, 1937.

[Z] O. Zariski, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math. (2) 76 (1962), pp. 560-615.