



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS DIRIGIDAS  
MONOCROMÁTICAS Y  $H$ -NÚCLEOS EN  
DIGRÁFICAS  $m$ -COLOREADAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
MIGUEL EDUARDO LICONA VELÁZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ



Ciudad Universitaria  
CIUDAD DE MÉXICO

FEBRERO, 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas y  
*H*-núcleos en digráficas *m*-coloreadas.**

por

Miguel Eduardo Licona Velázquez

Tesis presentada para obtener el grado de

Matemático

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Febrero, 2017

# Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Licona  
Velázquez  
Miguel Eduardo  
(595) 92 8 11 54  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
412000483

2. Datos del tutor

Mat.  
Pastrana  
Ramírez  
Laura

3. Datos del sinodal 1

Dra.  
Galeana  
Sánchez  
Hortensia

4. Datos del sinodal 2

Dra.  
Sánchez  
López  
María del Rocío

5. Datos del sinodal 3

Dra.  
Zuazua  
Vega  
Rita Esther

6. Datos del sinodal 4

Dra.  
Guevara  
Aguirre  
Mucuy-Kak del Carmen

7. Datos del trabajo escrito

Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas y  
 $H$ -núcleos en digráficas  $m$ -coloreadas.

76. p  
2017

*A mis padres y hermanos.*

# Agradecimientos

A mi papá y a mi mamá por haberme dado algo que para mí es invaluable, una carrera universitaria, a mis hermanos, quienes siempre me han apoyado y aún les sorprende la carrera que elegí.

A mi directora de tesis Laura Pastrana, mi profesora desde los inicios de mi carrera que me enseñó casi todo lo que sé hasta el día de hoy de gráficas, gracias por todo el tiempo que me dedicaste guiándome en este trabajo.

A los sinodales: Dra. Hortensia Galeana, Dra. Rocío Sánchez, Dra. Rita Zuazua y Dra. Mucuy-Kak Guevara, por su tiempo y correcciones a este trabajo.

# Índice general

<b>1. Definiciones básicas.</b>	<b>5</b>
1.1. Gráficas. . . . .	5
1.2. Digráficas. . . . .	7
1.2.1. Digráficas $m$ – coloreadas por flechas. . . . .	12
<b>2. Producto Raíz.</b>	<b>16</b>
2.1. Definiciones . . . . .	16
2.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en el producto raíz . . . . .	18
<b>3. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en <math>L(D)</math>.</b>	<b>27</b>
3.1. Definiciones. . . . .	27
3.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en $L(D)$ coloreada interiormente. . . . .	29
<b>4. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en la digráfica <math>MSL(D)</math>.</b>	<b>34</b>
4.1. Digráfica $MSL(D)$ . . . . .	36
<b>5. <math>H</math> – núcleos por <math>H</math> – trayectorias.</b>	<b>48</b>
5.1. Definiciones. . . . .	48
5.2. Digráfica $L(D)$ . . . . .	50
5.3. Digráfica $MSL(D)$ . . . . .	52
<b>6. Producto cartesiano.</b>	<b>60</b>
6.1. Definiciones. . . . .	60
6.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en el producto cartesiano. . .	62
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Introducción

En 1944 J. Von Neumann y Oskar Morgenstern en el artículo “*The theory of games and economic behaviour*” [15] introducen el concepto de solución en el contexto de la teoría de juegos. Berge aplica la noción de solución a la teoría de digráficas y define lo que denominó un núcleo, un núcleo en una digráfica es un subconjunto  $N$  de vértices el cual es independiente, es decir, no existen flechas entre los elementos de  $N$  y absorbente, lo cual significa que para todo vértice que no pertenece a  $N$  existe una flecha de dicho elemento hacia algún vértice en  $N$ .

Continuando con esta idea Hortensia Galeana Sánchez [7] presenta los núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas para digráficas  $m$  – *coloreadas* de la siguiente manera:

Un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es un conjunto  $N$  de vértices de una digráfica  $m$  – *coloreada* independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas quiere decir que entre cada par de elementos de  $N$  no existe una trayectoria dirigida monocromática y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas que para todo vértice de la digráfica que no pertenezca a  $N$ , existe una trayectoria dirigida monocromática de dicho elemento a  $N$ .

Se sabe que no toda digráfica tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, sin embargo se han obtenido muchos resultados acerca de este concepto, algunos de ellos están relacionados en encontrar condiciones para la existencia de dichos conjuntos, por ejemplo, en 2009 Hortensia Galeana Sánchez [6] introduce lo que llamó la digráfica de clases cromáticas de una digráfica  $m$  – *coloreada*, con dicha digráfica prueba para el caso finito, una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow [14]: *Si  $D$  es una digráfica  $m$  – coloreada y su digráfica de clases cromáticas es bipartita, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Otros resultados que se han obtenido están relacionados con operaciones entre digráficas, las cuales preservan la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, por ejemplo, en 1998 Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez [8] demuestran que: *El número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica  $D$ , es igual al número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de su digráfica de líneas  $L(D)$ .*

En 2011 Pietra Delgado Escalante y Hortensia Galeana Sánchez en el artículo “*Independent Restricted Domination*” [3], generalizan el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y definen los  $H$  – *núcleos* por  $H$  – *trayectorias* de la siguiente manera:

Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos y  $D$  otra digráfica, diremos que  $D$  está  $H$  –



*coloreada* si los elementos de  $F(D)$  están coloreados con las etiquetas de los vértices de  $H$ . Denotaremos por  $c(u, v)$  el color que tiene la flecha  $(u, v)$  en  $D$ .

Dada una trayectoria  $T = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$  en  $D$ ,  $T$  es una  $v_0v_n - H$ -trayectoria si  $(c(v_{i-1}, v_i), c(v_i, v_{i+1})) \in F(H)$  para toda  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Es decir,  $(c(v_0, v_1), c(v_1, v_2), c(v_2, v_3), \dots, c(v_{n-1}, v_n))$  es un camino en  $H$ , con esta clase de trayectorias tenemos que si  $N$  es un conjunto de vértices independiente por  $H - \text{trayectorias}$ , es decir, dados dos elementos de  $N$  no existe una  $H - \text{trayectoria}$  entre ellos y absorbente por  $H - \text{trayectorias}$ , lo que significa que, para todo vértice que no pertenece a  $N$ , existe una  $H - \text{trayectoria}$  a  $N$ , entonces  $N$  es un  $H - \text{núcleo}$  por  $H - \text{trayectorias}$ .

Al igual que con los núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, se ha trabajado para encontrar operaciones entre digráficas que preserven la existencia de los  $H - \text{núcleos}$  por  $H - \text{trayectorias}$ , por ejemplo, Pietra Delgado Escalante, Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez [4] demuestran que: *El número de  $H - \text{núcleos}$  por  $H - \text{trayectorias}$  de una digráfica  $D$  es igual al número de  $H - \text{núcleos}$  por  $H - \text{trayectorias}$  de su digráfica de líneas  $L(D)$ .*

El objetivo de esta tesis es trabajar con núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en las siguientes operaciones: producto raíz, producto cartesiano y la super digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos, en ésta última trabajaremos también el concepto de  $H - \text{núcleos}$  por  $H - \text{trayectorias}$ .

Al inicio de esta tesis recopilaremos definiciones básicas sobre la teoría de gráficas y digráficas además de algunos resultados que nos serán de gran utilidad para el trabajo posterior.

En el segundo capítulo con base en el artículo de Godsil y McKay [10], donde definen el producto raíz para gráficas, generalizaremos esta operación para digráficas  $m - \text{coloreadas}$  y buscaremos condiciones para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en la operación definida.

En el tercer capítulo basándonos en el artículo de Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez “*Kernels in edge coloured line digraph*” [8], recopilaremos los resultados obtenidos en dicho trabajo de investigación los cuales nos serán de gran utilidad para el siguiente capítulo.

En el cuarto capítulo a partir de la definición de “super gráfica de líneas” presentada por K. S. Bagga [1], vamos a introducir una nueva digráfica, construida a partir de una digráfica inicial  $m - \text{coloreada}$ , la cual llamaremos “super digráfica de líneas  $m - \text{coloreada}$  de subconjuntos monocromáticos” ( $MSL(D)$ ) y mostraremos el siguiente resultado: *El número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica  $D$  es igual al número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de su super digráfica de líneas  $m - \text{coloreada}$  de subconjuntos monocromáticos ( $MSL(D)$ ).*

En el quinto capítulo recopilaremos algunos de los resultados obtenidos por Pietra Delgado Escalante, Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez en el artículo “*Independent restricted domination and the line digraph*” [4], utilizando dichos resultados y la digráfica

$MSL(D)$ , definida en el capítulo anterior demostraremos que: *El número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de una digráfica  $D$   $m$  – coloreada es igual al número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de su super digráfica de líneas  $m$  – coloreada de subconjuntos monocromáticos  $MSL(D)$ , este teorema generaliza el teorema obtenido en el cuarto capítulo.*

En el último capítulo estudiaremos el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en una operación binaria llamada producto cartesiano, trabajaremos una clase en particular de digráficas,  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$ . buscaremos condiciones sobre estas digráficas para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en la digráfica resultante de hacer dicha operación.

# Capítulo 1

## Definiciones básicas.

En este primer capítulo presentamos las definiciones básicas y algunos resultados de la teoría de gráficas y digráficas que necesitamos para desarrollar nuestro trabajo.

### 1.1. Gráficas.

**Definición 1.1.1.** Una **gráfica**  $G = (V(G), A(G))$  consiste de dos conjuntos finitos, uno no vacío de objetos llamados **vértices**, denotado por  $V(G)$ , y otro de pares no ordenados de distintos elementos de  $V(G)$ , denotado por  $A(G)$ . Representamos a los elementos de  $A(G)$  por  $(u, v)$  y los llamamos **aristas**.

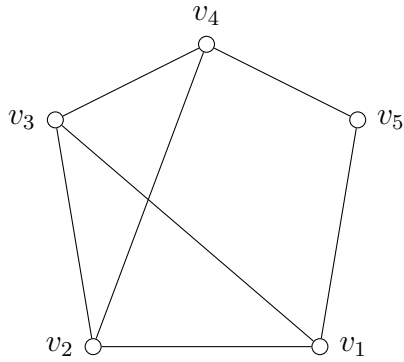
Dos vértices  $u$  y  $v$  de  $V(G)$  están relacionados si  $a = (u, v) \in A(G)$ ; en este caso, diremos que son **adyacentes**, que  $a$  incide en  $u$  y en  $v$  y que  $u$  y  $v$  son **vértices extremos** de  $a$ .

En este trabajo no se permitirán las multiaristas, es decir, sólo puede haber una arista entre cada par de vértices; tampoco se permitirán los lazos, esto quiere decir que,  $(u, u) \notin A(G)$ .

El **grado** de un vértice  $v$  es el número de aristas que inciden en él, lo denotaremos por  $\delta(v)$ . Al obtener el grado de cada  $v \in V(G)$  se puede definir el **grado mínimo**,  $\delta(G)$ , de la gráfica  $G$  como sigue:  $\delta(G) = \min\{\delta(v) : v \in V(G)\}$ . Análogamente, el **grado máximo**  $\Delta(G)$  de la gráfica  $G$  se define como  $\Delta(G) = \max\{\delta(v) : v \in V(G)\}$ .

El **orden** de la gráfica  $G$  es igual a  $|V(G)|$  y nos referiremos a él como  $p$  y el **tamaño** de  $G$  es igual a  $|A(G)|$  y lo denotaremos con la letra  $q$ .

El siguiente es un ejemplo de una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  tal que:  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $A(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$ . La siguiente figura es la representación geométrica de  $G$ , en la cual cada punto representa un vértice y cada línea una arista:



Ahora obtengamos los datos antes mencionados para ilustrar mejor lo que es una gráfica y sus propiedades. En primer lugar encontremos el grado de los vértices:

$$\begin{aligned} \delta(v_1) &= 3, \\ \delta(v_2) &= 3, \\ \delta(v_3) &= 3, \\ \delta(v_4) &= 3, \\ \delta(v_5) &= 2. \end{aligned}$$

Ya que tenemos el grado de cada vértice de  $G$ , podemos saber el grado mínimo y máximo de la gráfica, los cuales son:

$$\begin{aligned} \delta(G) &= 2, \\ \Delta(G) &= 3. \end{aligned}$$

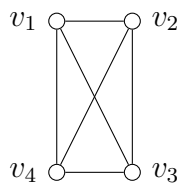
De la misma manera podemos saber el orden y el tamaño de  $G$ :

$$p = 5 \text{ y } q = 7.$$

De la definición 1.1.1 se derivan algunos tipos de gráficas como son:

1. Una gráfica  $G$  es **completa** si  $\delta(v) = p - 1$  para todo  $v \in V(G)$ .
2. Una gráfica  $G$  es **r-regular** si  $\delta(v) = r$  para todo  $v \in V(G)$ .

Veamos un ejemplo de una gráfica  $G$  completa y  $r$ -regular tal que:  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $A(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$ .



Observemos que  $G$  es completa pues,  $p = 4$  y  $\delta(v_i) = 3 = p - 1$  para todo  $i = (1, \dots, 4)$ , además es 3-regular ya que  $\delta(v_i) = 3$  para todo  $i = (1, \dots, 4)$ .

3. Una gráfica  $G$  es **bipartita** si existe una partición de  $V(G)$  en  $V_1$  y  $V_2$  tal que  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V(G)$  y para todo  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  si  $(u, v) \in A(G)$ , entonces  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$  o  $v \in V_1$  y  $u \in V_2$ .

4. El **complemento** de una gráfica, denotado por  $G^c$  es una gráfica tal que:

a)  $V(G) = V(G^c)$ .

b)  $(u, v) \in A(G)$  si y sólo si  $(u, v) \notin A(G^c)$ .

**Definición 1.1.2.** Una **subgráfica**  $H$  de una gráfica  $G$  es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ .

Se dice que  $H$  es una **subgráfica generadora** de una gráfica  $G$  si  $H$  es una subgráfica de  $G$  y  $V(G) = V(H)$ .

Sea  $S \subseteq V(G)$ , se dice que  $G[S]$  es una **subgráfica** de  $G$  **inducida** por  $S$  si  $V(G[S]) = S$  y  $(u, v) \in A(G[S])$  si y sólo si  $(u, v) \in A(G)$  con  $\{u, v\} \subseteq S$ .

**Definición 1.1.3.** Un **camino**  $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$  es una sucesión finita de vértices tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(G)$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , al cual llamamos un  $x_0x_n$ -camino. Además podemos definir la longitud de  $\mathcal{C}$  como  $n$  y la denotamos por  $\ell(\mathcal{C})$ .

Existen cuatro tipos de caminos:

1. Decimos que  $C$  es un **camino cerrado** si el primero y el último vértice son iguales.
2. Una **trayectoria**  $\mathcal{T} = (x_0, \dots, x_n)$  es un camino que no repite vértices.
3. Un **paseo**  $\mathcal{P} = (x_0, \dots, x_n)$  es un camino que no repite aristas.
4. Un **ciclo**  $\gamma = (x_0, \dots, x_n)$  es un camino cerrado que no repite vértices, excepto el primero y el último, tal que  $\ell(\gamma) \geq 3$ .

**Definición 1.1.4.** Una gráfica  $G$  es **conexa** si existe un  $uv$ -camino para todo  $\{u, v\} \subseteq V(G)$ .

## 1.2. Digráficas.

**Definición 1.2.1.** Una **digráfica**  $D = (V(D), F(D))$  está definida por dos conjuntos finitos, uno no vacío de objetos llamados vértices, denotado por  $V(D)$ , y otro de pares ordenados de distintos elementos de  $V(D)$ , denotado por  $F(D)$ .

Representamos a los elementos de  $F(D)$  por  $(u, v)$  y los llamamos flechas. Diremos que  $u$  es el **vértice inicial** y  $v$  el **vértice final** de dicha flecha.

Se dice que dos vértices  $u$  y  $v$  están relacionados o son **adyacentes** si  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ . Ahora definimos la vecindad de cada vértice de  $D$ , dado que  $F(D)$  es un conjunto de pares ordenados, tenemos la **invecindad** y la **exvecindad** de un vértice  $v$ . La invecindad la denotamos por  $N^-(v)$ , la cual es  $N^-(v) = \{u : (u, v) \in F(D)\}$ . La exvecindad denotada por  $N^+(v)$ , es  $N^+(v) = \{w : (v, w) \in F(D)\}$ . El **ingrado** de cada vértice de  $D$  es  $\delta^-(v) = |N^-(v)|$  y el **exgrado** de cada vértice de  $D$  es  $\delta^+(v) = |N^+(v)|$ .

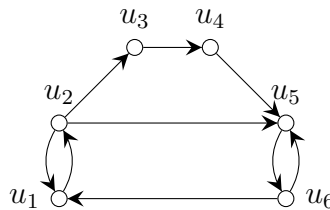
El **orden** de la digráfica  $D$  es igual a  $|V(D)|$  y nos referiremos a él como  $p$  y el **tamaño** de  $D$  es igual a  $|F(D)|$  y lo denotaremos con la letra  $q$ .

Veamos un ejemplo de una digráfica  $D = (V(D), F(D))$ :

$$V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} \text{ y}$$

$$F(D) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_1), (u_2, u_3), (u_2, u_5), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_6, u_1), (u_6, u_5)\}.$$

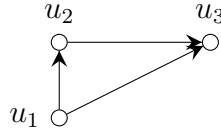
La siguiente figura es la representación geométrica en la cual cada punto representa un vértice y las flechas comienzan en el vértice inicial y terminan en el vértice final.



De igual manera que en gráficas, podemos tener varios tipos de digráficas como son:

- Una digráfica  $D$ , decimos que es **completa** si  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, u) \in F(D)$  para todo  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ .
- Una digráfica  $D$  es **semicompleta** si  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$  para todo  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ .
- Un **torneo** es una digráfica semicompleta, tal que existe una y sólo una flecha entre cada par de vértices.
- Una digráfica  $D$  es **transitiva** si para tres vértices distintos  $u, v, w$ , si  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$ , entonces  $(u, w) \in F(D)$ .
- Una **multidigráfica** es una digráfica que permite más de una flecha en una misma dirección, este tipo de digráfica sólo la usamos en casos especiales.

Daremos un ejemplo de una digráfica que es transitiva, torneo y semicompleta, sea  $D$  tal que:  $V(D) = \{u_1, u_2, u_3\}$  y  $F(D) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_1, u_3)\}$ .

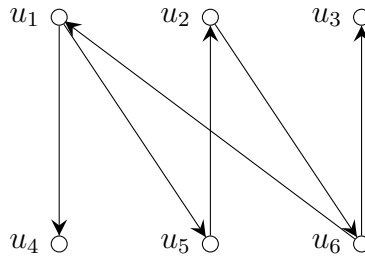


Una digráfica  $D$  es **r-regular** si  $\delta^-(v) = \delta^+(v) = r$  para todo  $v \in V(D)$ .

Una digráfica  $D$  es **bipartita** si existe una partición de  $V(D)$  en  $V_1$  y  $V_2$  tal que toda flecha en  $D$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ .

El siguiente es un ejemplo de una digráfica  $D$  bipartita tal que:

$V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$  y  $F(D) = \{(u_1, u_4), (u_1, u_5), (u_2, u_6), (u_5, u_2), (u_6, u_1), (u_6, u_3)\}$  y cuya partición es:  $V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$  y  $V_2 = \{u_4, u_5, u_6\}$ .



**Definición 1.2.2.** Una **subdigráfica**  $H$  de una digráfica  $D$  es una digráfica tal que:

$$V(H) \subseteq V(D) \text{ y } F(H) \subseteq F(D).$$

Se dice que  $H$  es una **subdigráfica generadora** de una digráfica  $D$  si es una subdigráfica de  $D$  y  $V(D) = V(H)$ .

Sea  $S \subseteq V(D)$ , decimos que  $D[S]$  es una **subdigráfica de  $D$  inducida** por  $S$  si  $V(D[S]) = S$  y  $(u, v) \in F(D[S])$  si y sólo si  $(u, v) \in F(D)$ .

**Definición 1.2.3.** Un **camino dirigido**  $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n)$  es una sucesión finita de vértices tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , lo llamamos un  $x_0x_n$ -camino dirigido. Además la longitud de  $\mathcal{C}$  la definimos como  $n$  y la denotamos por  $\ell(\mathcal{C})$ .

Existen cuatro tipos de caminos:

1. Diremos que  $\mathcal{C}$  es un **camino dirigido cerrado** si son iguales el primero y el último vértice.
2. Una **trayectoria dirigida**  $\mathcal{T} = (x_0, \dots, x_n)$  es un camino dirigido que no repite vértices.

3. Un **paseo dirigido**  $\mathcal{P} = (x_0, \dots, x_n)$  es un camino dirigido que no repite flechas.
4. Un **ciclo dirigido**  $\gamma = (x_0, \dots, x_n)$  es un camino cerrado dirigido que no repite vértices, excepto el primero y el último, tal que  $\ell(\gamma) \geq 2$ .

Cabe mencionar que en este trabajo de tesis omitiremos la palabra “dirigido” cuando hagamos referencia a una trayectoria dirigida, un ciclo dirigido, un paseo dirigido o un camino dirigido.

Dadas las definiciones de los diferentes tipos de caminos, las siguientes proposiciones nos serán de utilidad para resultados posteriores.

**Proposición 1.2.1.** *Todo  $uv$ -camino contiene una  $uv$ -trayectoria.*

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre la longitud del camino.

**Base de inducción.** Sea  $\mathcal{C}$  un camino, tal que  $\ell(\mathcal{C}) = 1$ , esto implica que  $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1 = v)$  es una trayectoria de longitud 1.

**Hipótesis de inducción.** Supongamos que para todo  $\mathcal{C}'$  un  $uv$ -camino, tal que  $\ell(\mathcal{C}') < n$ , contienen una  $uv$ -trayectoria.

**Paso inductivo:** Dado un camino  $\mathcal{C}$ , si  $\ell(\mathcal{C}) = n$ , entonces  $\mathcal{C}$  contiene una trayectoria.

Sea  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  un  $x_0x_n$ -camino de longitud  $n$ .

**Caso 1:** Si  $\mathcal{C}$  no repite vértices, entonces por definición  $\mathcal{C}$  es una  $uv$ -trayectoria.

**Caso 2:** Si  $\mathcal{C}$  repite vértices, entonces existen  $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n\}$ , tal que  $x_i = x_j$ , de esta manera podemos expresar a  $\mathcal{C}$  como  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$ , por lo que podemos construir  $\mathcal{C}' = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$  un camino tal que  $\ell(\mathcal{C}') < n$ , por hipótesis de inducción  $\mathcal{C}'$  contiene una trayectoria  $T$ , como  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  y  $T \subset \mathcal{C}'$ , todo  $uv$ -camino contiene una  $uv$ -trayectoria.  $\square$

**Proposición 1.2.2.** *Todo camino cerrado contiene un ciclo.*

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre la longitud del camino.

**Base de inducción.** Sea  $\mathcal{C}$  un camino cerrado, tal que  $\ell(\mathcal{C}) = 2$ , esto implica que  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_0)$ , lo cual por definición es un ciclo.

**Hipótesis de inducción.** Supongamos que para todo  $\mathcal{C}'$  camino cerrado, tal que  $\ell(\mathcal{C}') < n$ , contienen un ciclo.

**Paso inductivo:** Dado un camino cerrado  $\mathcal{C}$ , si  $\ell(\mathcal{C}) = n$ , entonces  $\mathcal{C}$  contiene un ciclo.

Sea  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$  un camino cerrado de longitud  $n$ .

**Caso 1:** Si  $\mathcal{C}$  sólo repite el primero y el último vértice, entonces por definición  $\mathcal{C}$  es un ciclo.

**Caso 2:** Si existen  $i \neq 0$  y  $j \neq 0$  con  $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ , tal que  $x_i = x_j$ , entonces podemos ver a  $\mathcal{C}$  como  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$ , por lo que podemos construir  $\mathcal{C}' = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$  un camino cerrado tal que  $\ell(\mathcal{C}') < n$ , por hipótesis de inducción  $\mathcal{C}'$  contiene un ciclo  $\gamma$ , como  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  y  $\gamma \subset \mathcal{C}'$ , todo camino cerrado contiene un ciclo.  $\square$



**Definición 1.2.4.** Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si existe un camino entre cada par de vértices de  $D$ .

**Definición 1.2.5.** Sean  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ , decimos que  $N$  es un conjunto **independiente** si  $\{(u, v), (v, u)\} \cap F(D) = \emptyset$  para todo  $\{u, v\} \subseteq N$ .

Notemos que toda digráfica contiene un conjunto independiente, por ejemplo  $\{v\}$  tal que  $v \in V(D)$ .

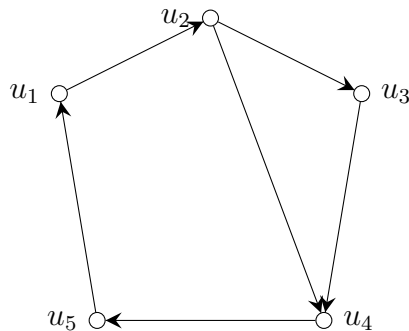
**Definición 1.2.6.** Sean  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ , decimos que  $N$  es **absorbente** si para todo  $x \in V(D) \setminus N$  existe  $u \in N$ , tal que  $(x, u) \in F(D)$  y diremos que  $x$  está absorbido por  $N$ .

Observemos que toda digráfica contiene un conjunto absorbente, a saber  $V(D)$ .

**Definición 1.2.7.** Si combinamos las dos últimas definiciones, es decir, si a  $N \subseteq V(D)$  le pedimos que sea un conjunto independiente y absorbente entonces diremos que  $N$  es un **núcleo** de  $D$ .

En la siguiente digráfica  $D$  encontraremos un conjunto  $N$  tal como se describe en las definiciones anteriores:

$$V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \text{ y } F(D) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_2, u_4), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_1)\}.$$

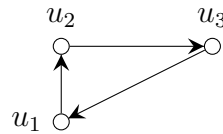


Primero encontremos un conjunto independiente de vértices. Consideremos  $N_1 = \{u_1, u_3\}$ , observemos que no existen flechas entre los vértices  $u_1$  y  $u_3$ , por lo tanto podemos decir que  $N_1$  es un conjunto independiente, sin embargo, no es absorbente, pues no hay una flecha del vértice  $u_4$  hacia  $N$ . Ahora busquemos entre los vértices de  $D$  un conjunto absorbente. Tomemos  $N_2 = \{u_1, u_3, u_4\}$ , notemos que existen  $(u_5, u_1) \in F(D)$  y  $(u_2, u_4) \in F(D)$ , es decir, que para cualquier otro vértice de  $D \setminus N_2$  existe un flecha entre el vértice y algún elemento de  $N_2$ , por lo tanto podemos concluir que  $N_2$  es absorbente, sin embargo, no es independiente ya que  $(u_3, u_4) \in F(D)$ .

Por último queremos un conjunto de vértices de  $D$  que denotaremos como  $N$ , el cual debe ser independiente y absorbente al mismo tiempo, tomemos  $N = \{u_1, u_4\}$ . Vemos que  $N$  es independiente ya que no existe ninguna flecha entre sus elementos, además absorbe a los demás vértices de  $D \setminus N$  pues  $u_1$  absorbe a  $u_5$  y  $u_4$  absorbe a  $u_2$  y a  $u_3$ , por lo tanto podemos decir que  $N$  es un núcleo de  $D$ .

Sin embargo, así como hay digráficas en las cuales se pueden encontrar varios conjuntos de vértices absorbentes e independientes, también existen digráficas que no poseen núcleo, la siguiente digráfica es un claro ejemplo de lo antes mencionado. Sea  $D$  tal que:

$$V(D) = \{u_1, u_2, u_3\} \text{ y } F(D) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_1)\}.$$



En esta digráfica el núcleo debe ser un sólo vértice ya que si no fuera así no se cumpliría la independencia:

- Si  $N = \{u_1\}$ , entonces no absorbe a  $u_2$ .
- Si  $N = \{u_2\}$ , entonces no absorbe a  $u_3$ .
- Si  $N = \{u_3\}$ , entonces no absorbe a  $u_1$ .

Por lo tanto  $D$  no tiene núcleo.

### 1.2.1. Digráficas $m$ – coloreadas por flechas.

**Definición 1.2.8.** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $D$  está  **$m$ -coloreada** si las flechas de  $D$  están coloreadas con  $m$  colores. Dado  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , una trayectoria dirigida de  $u$  hacia  $v$  en  $D$  es **monocromática** si todas sus flechas están coloreadas del mismo color, la denotamos como una  **$uv$ -tdm**. Dada  $(u, v) \in F(D)$  escribiremos como  $c(u, v)$  el color de dicha flecha.

Si en la definición anterior los  $m$  colores son todos distintos, diremos que la digráfica  $m$  – coloreada es **heterocromática**.

Los siguientes resultados son de gran importancia, ya que serán de utilidad para demostraciones posteriores.

**Proposición 1.2.3.** *Todo camino monocromático contiene una trayectoria monocromática.*

*Demostración.* Por la proposición 1.2.1 tenemos que todo camino  $\mathcal{C}$  contiene una trayectoria  $T$ , dado que  $\mathcal{C}$  es monocromático y las flechas de  $T$  están contenidas en  $\mathcal{C}$ ,  $T$  es una trayectoria monocromática.  $\square$

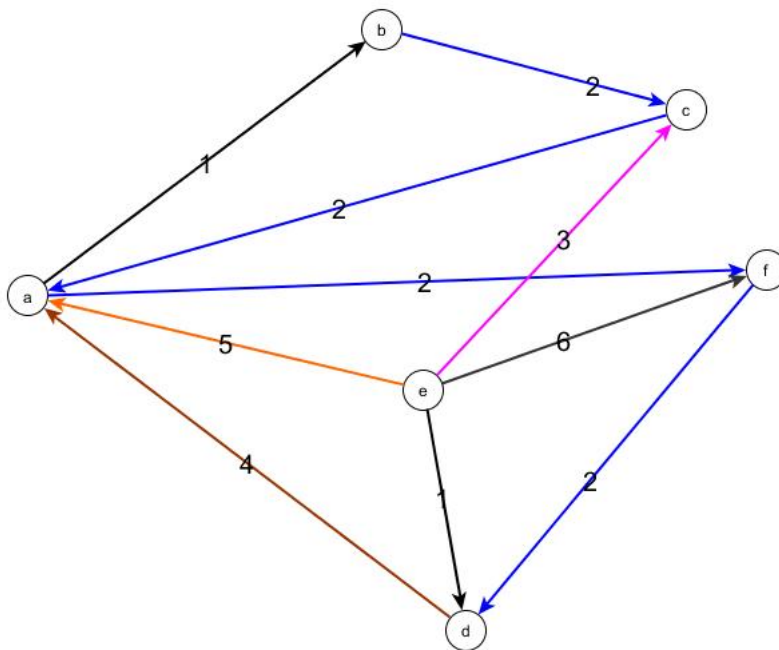
**Proposición 1.2.4.** *Todo camino cerrado monocromático contiene un ciclo monocromático.*

*Demostración.* Por la proposición 1.2.2 tenemos que todo camino cerrado  $\mathcal{C}$  contiene un ciclo  $\gamma$ , dado que  $\mathcal{C}$  es monocromático y las flechas de  $\gamma$  están contenidas en  $\mathcal{C}$ ,  $\gamma$  es un ciclo monocromático.  $\square$

La figura 1-1 es un ejemplo de una digráfica 6 – coloreada, donde:

$$V(D) = \{a, b, c, d, e, f\},$$

$$F(D) = \{(a, b), (a, f), (b, c), (c, a), (d, a), (e, a), (e, c), (e, f), (f, d)\}.$$



**Figura 1-1:**  $D$  una digráfica 6 – coloreada.

En  $D$  podemos hallar una  $bd$  –  $tdm$ ;  $T = (b, c, a, f, d)$ .

En la sección anterior definimos lo que es un núcleo en una digráfica, continuando con esta idea Hortensia Galeana Sánchez [7] generaliza esta definición para digráficas  $m$  – coloreadas, veremos lo que significa un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica  $m$  – coloreada. Este tipo de conjuntos inicialmente fueron trabajados por B. Sands, N. Sauer y R.E. Woodrow [14].

**Definición 1.2.9.** Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada y  $N \subseteq V(D)$ , decimos que  $N$  es un conjunto **independiente por trayectorias monocromáticas** o **independiente por  $tdm$**  de  $D$  si no existe una  $uv$  –  $tdm$  en  $D$  para todo  $\{u, v\} \subseteq N$ .

**Definición 1.2.10.** Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada y  $N \subseteq V(D)$ , decimos que  $N$  es **absorbente por trayectorias monocromáticas** o **absorbente por  $tdm$**  de  $D$  si existe una

$xv$ -tdm en  $D$  para todo  $x \in V(D) \setminus N$  y para algún  $v \in N$ . Decimos que  $N$  absorbe por tdm a  $x$ .

**Definición 1.2.11.** Si  $N \subseteq V(D)$  cumple con ser un conjunto independiente por tdm y absorbente por tdm, entonces decimos que  $N$  es un **núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas** de  $D$  y lo denotaremos NTDM.

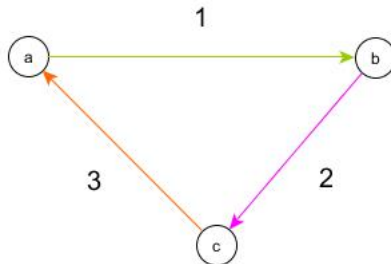
En la digráfica de la figura 1-1 encontraremos un conjunto  $N$  tal como se describe en las definiciones anteriores.

Veamos quién es el NTDM. Tomemos  $N = \{d\}$ , observemos que es independiente por tdm ya que consta de un sólo vértice. Dado que  $T = (b, c, a, f, d)$  es una tdm y además existe  $(e, d) \in F(D)$ , tenemos que  $N$  es absorbente por tdm y por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $D$ .

Como vimos anteriormente para núcleos, tenemos que no toda digráfica  $m$ -coloreada tiene NTDM y el siguiente ejemplo nos lo muestra.

Sea  $D$  una digráfica 3-coloreada tal que:  $V(D) = \{a, b, c\}$ ,  $F(D) = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ , figura 1-2.

Supongamos que  $D$  tiene un NTDM  $N$ , como  $D$  es completa, es decir, que todos sus vértices están relacionados,  $N$  debe de constar de un sólo elemento, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $N = \{a\}$ , notemos que el vértice  $a$  no absorbe por tdm a  $b$ , ya que no existe una trayectoria  $T$  monocromática de  $b$  hacia  $a$ ; lo mismo sucede si consideramos cualquiera de los otros dos vértices, por lo tanto  $D$  no tiene un NTDM.



**Figura 1-2:**  $D$  una digráfica sin NTDM.

Para relacionar los conceptos de núcleo y NTDM Hortensia Galeana Sánchez [6] introduce la siguiente definición, la cual a una digráfica  $D$  le asocia una nueva digráfica llamada la cerradura de  $D$ .

**Definición 1.2.12.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, **la cerradura** de  $D$ , denotada por  $\mathfrak{C}(D)$ , es la multidigráfica  $m$ -coloreada tal que:

- $V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$ ,
- $F(\mathfrak{C}(D)) = \bigcup_{i=1}^m \{(u, v) \text{ con color } i : \text{ existe una } uv\text{-tdm en } D \text{ con color } i\}$ .

**Teorema 1.2.1.** Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es  $NTDM$  de  $D$  si y sólo si  $N$  es núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ . Sea  $N \subseteq V(D) = V(\mathfrak{C}(D))$  tal que  $N$  es un  $NTDM$  en  $D$ , por lo que no existe una  $uv$  –  $tdm$  en  $D$  para todo  $\{u, v\} \subseteq N \cap V(\mathfrak{C}(D))$ , así por definición de  $\mathfrak{C}(D)$ , no existe  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ , de esta manera  $N$  es independiente en  $\mathfrak{C}(D)$ . Dado que para cada  $x \in V(D) \setminus N$ , existe  $v \in N$  tal que hay una  $xv$  –  $tdm$  en  $D$ , por definición de  $\mathfrak{C}(D)$ ,  $(x, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ , de esta forma  $N$  es absorbente en  $\mathfrak{C}(D)$ , por lo tanto  $N$  es núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ .

$\Leftarrow$ . Sean  $N \subseteq V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$  tal que  $N$  es núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$  y  $\{x, y\} \subseteq N$ , por la definición de núcleo,  $(x, y) \notin F(\mathfrak{C}(D))$  y por la definición de  $\mathfrak{C}(D)$  no existe una  $xy$  –  $tdm$  en  $D$ , entonces  $N$  es independiente por  $tdm$  en  $D$ .

Ahora, sea  $u \in V(\mathfrak{C}(D)) \setminus N$  sabemos que existe  $x \in N$  tal que  $(u, x) \in F(\mathfrak{C}(D))$  y por la definición de  $\mathfrak{C}(D)$ , tenemos una  $ux$  –  $tdm$  en  $D$ , así  $N$  es absorbente por  $tdm$  en  $D$ , por lo tanto  $N$  es un  $NTDM$  de  $D$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Producto Raíz.

La operación producto raíz en gráficas fue introducida por C.D Godsil y B.D McKay en 1978, en el artículo “*A new graph product and it’s spectrum*” [10] y la definen de la siguiente manera: Sean  $H = (V(H), A(H))$  con  $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$  una gráfica con  $n$  vértices y  $\mathfrak{G}$  una sucesión de  $n$  gráficas  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , donde cada  $G_i$  es una gráfica en la cual se ha distinguido un vértice como la raíz de dicha gráfica. El producto raíz, denotado por  $H(\mathfrak{G})$ , es la gráfica que resulta de identificar la raíz de  $G_i$  con  $v_i$ , el  $i$  – ésimo vértice de  $H$ .

En este capítulo definiremos de manera análoga el producto raíz de dos digráficas, es decir, sean  $D = (V(D), F(D))$ , tal que  $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$  una digráfica con  $n$  vértices y  $\alpha_H$  una sucesión de  $n$  copias de una digráfica  $H$ ,  $\alpha_H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ , donde  $H$  es una digráfica en la cual se ha distinguido un vértice como la raíz de dicha digráfica. El producto raíz, denotado por  $H_{\alpha_H}$ , es la digráfica que resulta de identificar la raíz de  $H_i$  con  $v_i$ , el  $i$  – ésimo vértice de  $D$ . Bajo esta operación nos podemos hacer las siguientes preguntas, ¿qué pasa con la operación para digráficas  $m$  – coloreadas?, ¿qué condiciones deben cumplir las digráficas, tales que al operarlas, la digráfica resultante tenga NTDM?. En este capítulo daremos respuesta a algunas de estas cuestiones.

### 2.1. Definiciones

Dada la idea del producto raíz para gráficas, definimos el producto raíz para digráficas  $m$  – coloreadas, para lo cual necesitamos las siguientes definiciones, cabe mencionar que para éste y futuros capítulos, cada vez que se haga una operación entre digráficas, éstas serán ajenas por vértices.

**Definición 2.1.1.** Sean  $H$  una digráfica y  $v$  un vértice distinguido de  $H$ ,  $v$  recibe el nombre de **vértice raíz** o simplemente **raíz** y la digráfica  $H$  la llamaremos **digráfica raíz**.

**Definición 2.1.2.** Sea  $H$  una digráfica tal que  $V(H) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ , denotamos por  $\alpha_H$  una sucesión de  $t$  – copias de  $H$ , es decir,  $\alpha_H = (H_i)_{i \in \{1, \dots, t\}}$  con  $H_i = H$  para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Los vértices de cada copia los representaremos de la siguiente manera:  $V(H_i) = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_p^i\}$ .

**Definición 2.1.3.** Sean  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada de orden  $n$ ,  $V(D) = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $H$  una digráfica  $k$ -coloreada de orden  $p$ ,  $V(H) = \{x_1, \dots, x_p\}$ , con raíz  $x_r$  y  $\alpha_H = (H_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  tal como en la definición 2.1.2, con  $x_r^i$  el vértice raíz de  $H_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . **El producto raíz** de  $D$  con  $\alpha_H$ , denotado por  $D_{\alpha_H}$ , está definido de la siguiente manera:

- $V(D_{\alpha_H}) = \bigcup_{i=1}^n V(H_i)$ ,
- $F(D_{\alpha_H}) = [\bigcup_{i=1}^n F(H_i)] \cup \{(x_r^i, x_r^j) \text{ si y sólo si } (y_i, y_j) \in F(D)\}$ .

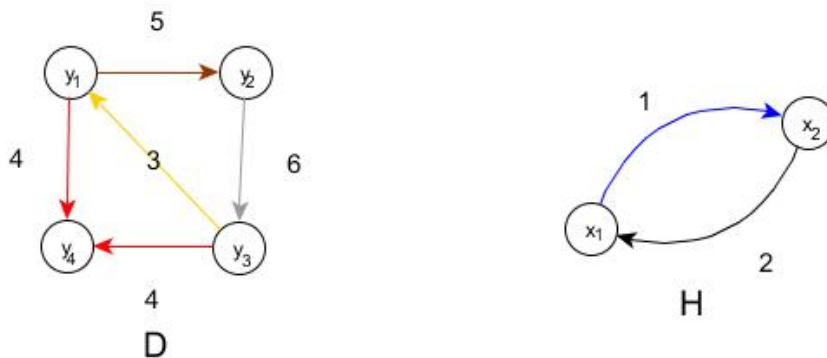
La coloración de las flechas de la digráfica es:

- $(x_i^t, x_s^t)$  tiene color  $j$  en  $D_{\alpha_H}$  si y sólo si  $(x_i, x_s)$  tiene color  $j$ , con  $t \in \{1, \dots, n\}$  y  $\{s, i\} \subseteq \{1, \dots, p\}$ .
- $(x_r^t, x_r^s)$  tiene color  $i$  si y sólo si  $(y_t, y_s)$  tiene color  $i$  en  $D$ , con  $\{y_t, y_s\} \subseteq V(D)$  y  $\{s, t\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

**Observación 2.1.1.** Por la definición de  $D_{\alpha_H}$  todas las  $x_i^t x_j^s$ -trayectorias en esta digráfica, con  $x_i^t \in V(H_t)$  y  $x_j^s \in V(H_s)$ , pasan por  $x_r^t$  el vértice raíz de  $H_t$  y  $x_r^s$  la raíz de  $H_s$ . Cuando  $t = s$  todas las  $x_i^s x_j^s$ -trayectorias, con  $\{x_i^s, x_j^s\} \subseteq H_s$ , están contenidas en  $H_s$ .

Notemos que la subdigráfica inducida por los vértices de la forma  $x_r^t$  en  $D_{\alpha_H}$ , con  $t \in \{1, \dots, n\}$ , es isomorfa a la digráfica  $D$ .

Veamos un ejemplo del producto raíz: sean  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  y  $F(D) = \{(y_1, y_2), (y_1, y_4), (y_2, y_3), (y_3, y_1), (y_3, y_4)\}$ ; y  $H$  la digráfica tal que  $V(H) = \{x_1, x_2\}$ ,  $F(H) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$  con raíz  $x_1$  (ver figura 2-1) y  $D_{\alpha_H}$  se puede ver en la figura 2-2.



**Figura 2-1:**  $D$  y  $H$ .

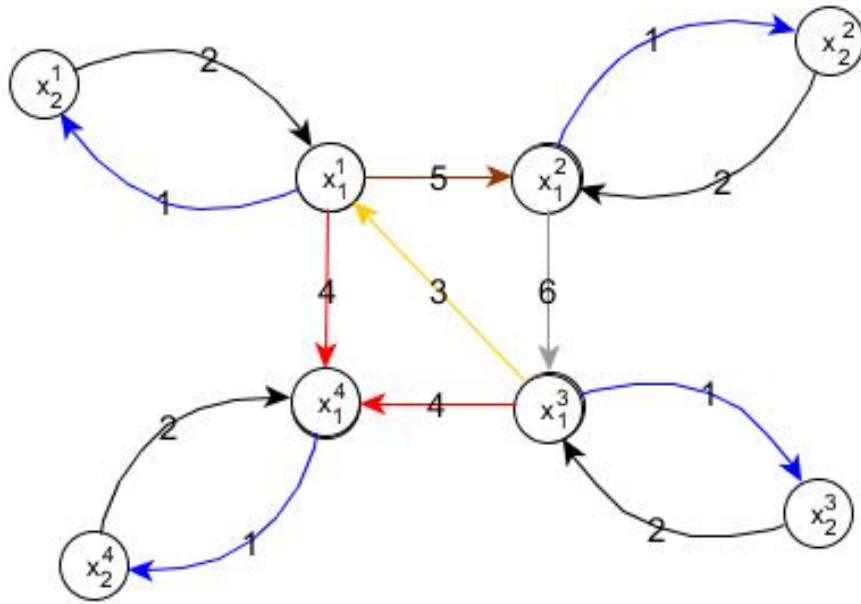


Figura 2-2: Ejemplo del producto raíz  $D_{\alpha_H}$ .

## 2.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en el producto raíz

Ya que definimos una nueva operación con la cual podemos trabajar, nos hacemos las siguientes preguntas: ¿qué condiciones deben cumplir  $D$  y  $H$  para que  $D_{\alpha_H}$  tenga NTDM?, ¿basta pedir que ambas digráficas tengan NTDM?.

Como respuesta a lo anterior obtuvimos los siguientes resultados:

**Lema 2.2.1.** Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada de orden  $n$ ,  $H$  una digráfica  $k$  – coloreada de orden  $p$  con raíz  $x_r$ , tal que la intersección de los conjuntos de colores de ambas digráficas es vacía y  $\alpha_H = (H_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  tal como en la definición 2.1.2. Si  $H$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas  $N$ , tal que  $x_r \notin N$ , entonces  $D_{\alpha_H}$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $H$  tiene un NTDM, denotamos por  $N_i$  el NTDM de cada copia  $H_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo que para todo  $x_s^t \in V(H_t) \setminus N_t$  existe una  $x_s^t N_t - tdm$ , de esta manera  $N = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} N_i$  es un conjunto absorbente por tdm en  $D_{\alpha_H}$ .

Ahora demostraremos que  $N$  es independiente por tdm. Sabemos que  $N_i$  es independiente por tdm en  $H_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dado que el conjunto de colores de las flechas de  $D$  y el conjunto



de colores de las flechas de  $H$  no se intersectan, se sigue de la observación 2.1.1 y de la definición de  $D_{\alpha_H}$  que para todo  $x_i^t$  y  $x_j^s$  con  $t \neq s$  no existen tdm, es decir, no existen  $N_i N_j - tdm$  en  $D_{\alpha_H}$ , por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $D_{\alpha_H}$ .  $\square$

Sin embargo, el resultado anterior no se cumple cuando el conjunto de colores de las flechas de  $D$  se intersecta con el conjunto de colores de las flechas de  $H$  pues encontramos el siguiente ejemplo:

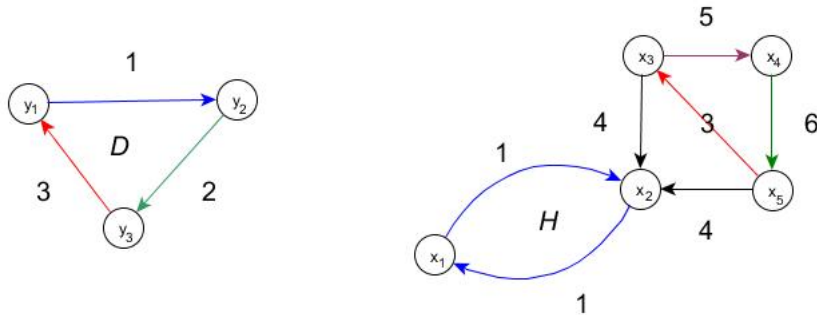
Sean  $D$  una digráfica 3 - coloreada tal que  $V(D) = \{y_1, y_2, y_3\}$ ,  $F(D) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1)\}$  y  $H$  una digráfica 5 - coloreada tal que  $V(H) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  con raíz  $x_1$ ,  $F(H) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_2), (x_5, x_3)\}$  y  $N = \{x_2, x_4\}$  un NTDM de  $H$  (figura 2-3).

De esta manera  $D_{\alpha_H}$  Se puede ver en la figura 2-4.

Afirmamos que  $D_{\alpha_H}$  no tiene un NTDM, lo demostraremos por contradicción, supongamos que existe  $N \subseteq V(D_{\alpha_H})$  tal que  $N$  es un NTDM de  $D_{\alpha_H}$ , si  $x_2^2 \in N$ , entonces absorbemos por tdm al conjunto  $\{x_1^2, x_1^1, x_2^1, x_3^2, x_5^2\}$ , esto implica que dichos vértices no pertenecen a  $N$ , como  $x_2^1 \notin N$ , entonces  $\{x_3^1, x_4^1, x_5^1\} \cap N \neq \emptyset$ , sin embargo, la subdigráfica inducida por dichos vértices es un triángulo heterocromático, por lo que no existe un conjunto independiente por tdm y absorbente por tdm en dicha subdigráfica. Por lo tanto  $x_2^2 \notin N$ .

Si  $x_2^2 \notin N$ , entonces  $\{x_3^2, x_4^2, x_5^2\} \cap N \neq \emptyset$ , ya que los colores de las trayectorias que inician en estos vértices tienen por lo menos dos colores, sin embargo, la subdigráfica inducida por dichos vértices es un triángulo heterocromático, por lo que no existe un conjunto independiente por tdm y absorbente por tdm en dicha subdigráfica. Por lo tanto,  $D_{\alpha_H}$  no tiene un NTDM.

Lo que observamos en este ejemplo es que  $H$  contiene un ciclo monocromático de longitud 2,  $\gamma = (x_1, x_2, x_1)$ , que incluye a un vértice del NTDM de  $H$  y al vértice raíz de  $H$ , por lo que si pedimos que  $H$  no contenga ciclos monocromáticos tenemos el siguiente teorema.



**Figura 2-3:**  $D$  3 - coloreada,  $H$  5 - coloreada y  $N = \{x_2, x_4\}$ .

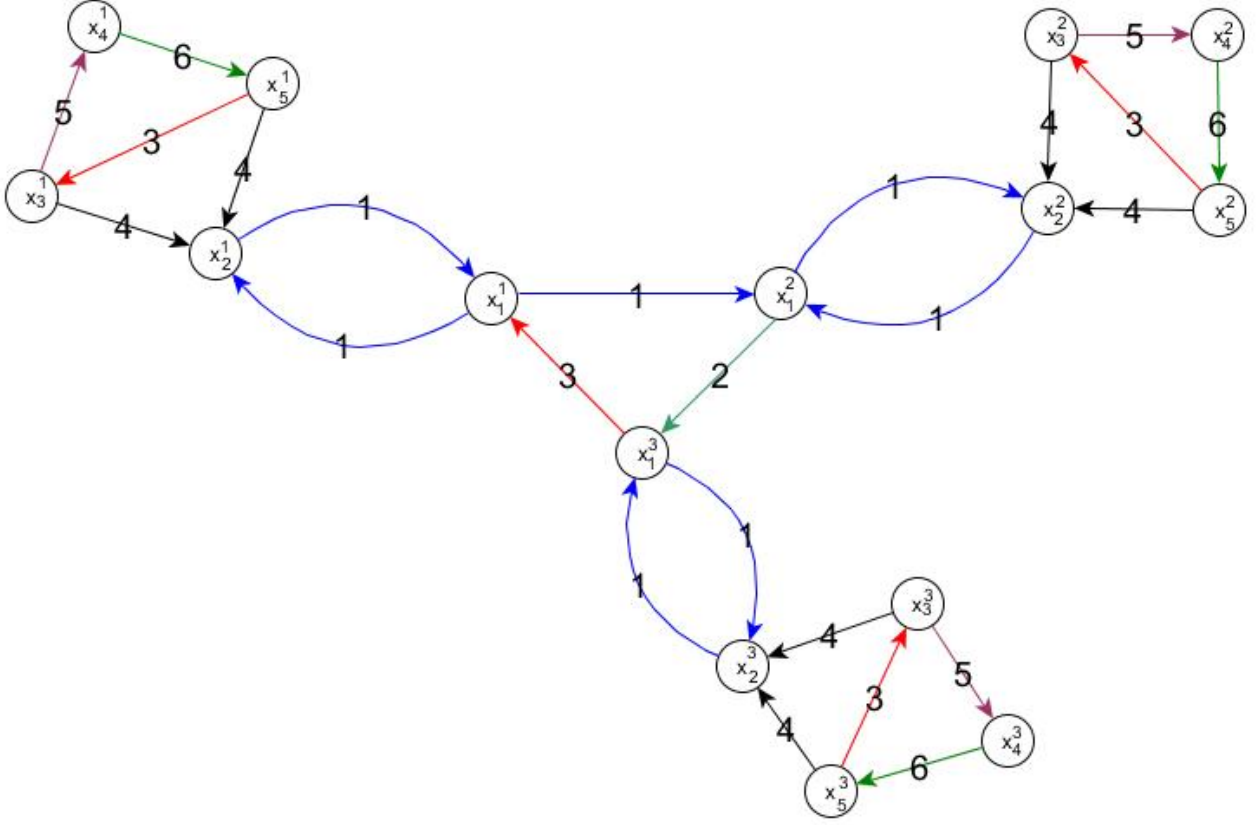


Figura 2-4:  $D_{\alpha_H}$  sin NTDM.

**Teorema 2.2.1.** Sean  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada de orden  $n$ ,  $H$  una digráfica  $k$ -coloreada de orden  $p$  con raíz  $x_r$ , que no contiene ciclos monocromáticos, y  $\alpha_H = (H_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  tal como en la definición 2.1.2. Si  $H$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas  $N_H$ , y  $x_r \notin N_H$ , entonces  $D_{\alpha_H}$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $H$  tiene un NTDM, denotamos por  $N_i$  el NTDM de cada copia  $H_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que para todo  $x_s^t \in V(H_t) \setminus N_t$  existe una  $x_s^t N_t$ -tdm, de esta manera  $N = \bigcup_{i=1, \dots, n} N_i$  es un conjunto absorbente por tdm en  $D_{\alpha_H}$ .

Ahora demostraremos que  $N$  es independiente por tdm. Lo probaremos por contradicción. Supongamos que existe  $\{x_s^t, x_j^l\} \subseteq N$  tal que  $(x_s^t, \dots, x_j^l)$  es una tdm, como  $x_r^t \notin N_t$ ,  $s \neq r$  y como  $x_r^l \notin N_l$ ,  $j \neq r$ , con  $s \in \{1, \dots, p\}$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$  y  $t \in \{1, \dots, n\}$ , tenemos dos casos:

**Caso 1:** Si  $t = l$ , entonces por la observación 2.1.1 existe una  $(x_s, \dots, x_j)$  tdm en  $H_{t=l}$ , lo cual es una contradicción, ya que  $N_{t=l}$  es independiente por tdm y  $\{x_s, x_j\} \subseteq N_{t=l}$ .

**Caso 2:** Si  $t \neq l$ , entonces  $T = (x_s^t, \dots, x_j^l)$  es una tdm de color  $i$ , por la observación 2.1.1  $T$  pasa por  $x_r^l$  y  $x_r^t$ , los vértices raíz de  $H_l$  y de  $H_t$ , respectivamente. Podemos expresar a  $T$  de la

siguiente manera:  $T = (x_s^t, \dots, x_r^t) \cup (x_r^t, \dots, x_r^l) \cup (x_r^l, \dots, x_j^l)$ . Analicemos los siguientes subcasos:

**Subcaso 1:** Si  $j = s$ , entonces  $(x_s^t, \dots, x_r^t)$  induce una  $x_s x_r$ -trayectoria de color  $i$  en  $H$ , de igual manera  $(x_r^l, \dots, x_j^l)$  proyecta una  $x_r x_j$ -trayectoria de color  $i$  en  $H$ , por lo que  $(x_s, \dots, x_r, \dots, x_j = x_s)$  es un camino cerrado monocromático de color  $i$  en  $H$ , el cual contiene un ciclo monocromático, lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis  $H$  no tiene ciclos monocromáticos.

**Subcaso 2:** Si  $j \neq s$ , entonces  $(x_s^t, \dots, x_r^t)$  induce una  $x_s x_r$ -trayectoria de color  $i$  en  $H$ , de igual manera  $(x_r^l, \dots, x_j^l)$  proyecta una  $x_r x_j$ -trayectoria de color  $i$  en  $H$ , por lo que  $(x_s, \dots, x_r, \dots, x_j)$  es un camino de color  $i$  en  $H$ , el cual contiene una  $x_s x_j - tdm$ , lo cual es una contradicción, ya que  $N$  es independiente por tdm en  $H$  y  $\{x_s, x_j\} \subseteq N_H$ .

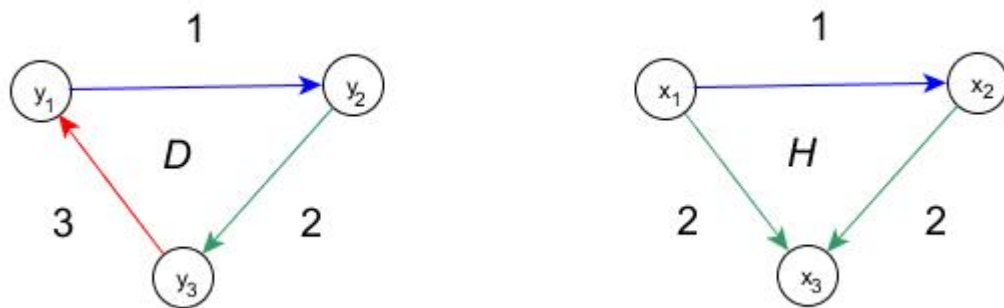
De este modo  $N$  es independiente por tdm, por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $D_{\alpha_H}$ . □

Observemos que en el lema 2.2.1, los conjuntos de colores de las flechas de las digráficas no se intersectan, por lo que la digráfica  $H$  puede tener ciclos monocromáticos, de esta manera el lema 2.2.1 y el teorema 2.2.1 no son el mismo resultado.

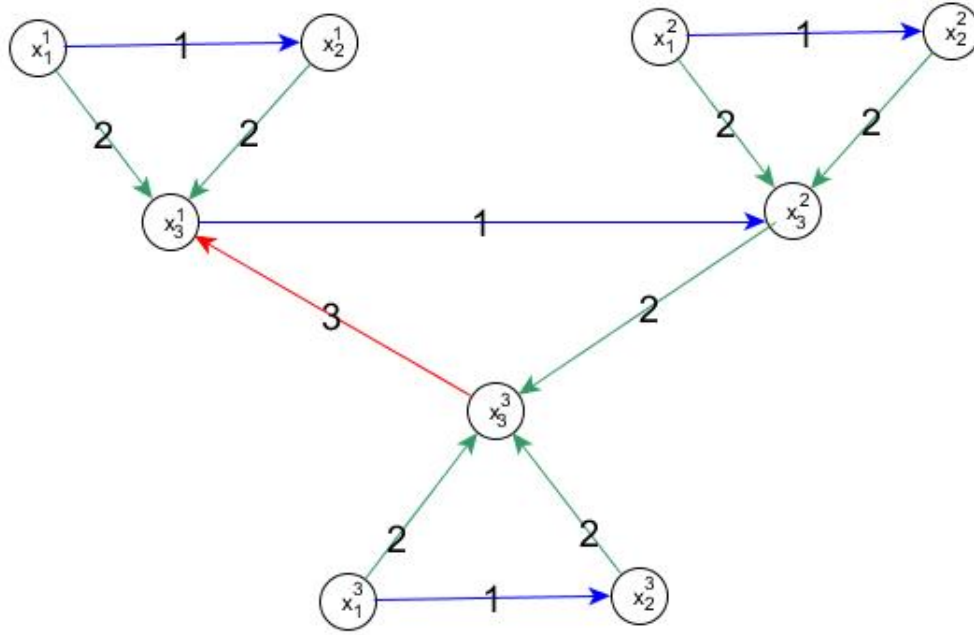
Sin embargo el teorema anterior no se cumple cuando el vértice raíz pertenece al NTDM de la digráfica raíz  $H$ , el siguiente ejemplo nos muestra este hecho.

Sea  $D$  una digráfica 3 - coloreada tal que  $V(D) = \{y_1, y_2, y_3\}$  y  $F(D) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1)\}$ , coloreada de la siguiente manera:  $(y_1, y_2)$  de color 1,  $(y_2, y_3)$  de color 2 y  $(y_3, y_1)$  de color 3. Sea  $H$  la digráfica 2 - coloreada, tal que  $V(H) = \{x_1, x_2, x_3\}$  con raíz  $x_3$ ,  $F(H) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)\}$ , con las flechas  $(x_1, x_3)$  y  $(x_2, x_3)$  de color 2,  $(x_1, x_2)$  de color 1 y  $N = \{x_3\}$  un NTDM de  $H$ .

Hacemos el producto raíz con las digráficas antes definidas y  $D_{\alpha_H}$  se puede ver en la figura 2-6.



**Figura 2-5:**  $D$ , 3 - coloreada y  $H$ , 2 - coloreada.



**Figura 2-6:**  $D_{\alpha_H}$  sin NTDM.

Afirmamos que  $D_{\alpha_H}$  no tiene NTDM. Para demostrarlo, supongamos que existe  $N \subseteq V(D_{\alpha_H})$  un NTDM, si  $x_3^1 \in N$ , entonces  $x_2^2 \notin N$  y  $x_3^3 \notin N$ , pero como  $N^+(x_2^2) = \{x_3^3\}$ , implica que  $x_3^3$  no es absorbido por tdm por nadie dentro de  $N$ , por lo tanto  $x_3^3 \notin N$ . Si  $x_3^1 \notin N$ , entonces  $x_2^2 \in N$ , puesto que  $N^+(x_3^1) = \{x_2^2\}$  y  $x_2^2$  es el único vértice hacia el cual hay una  $x_3^1 x_2^2$ -tdm, de esta manera  $x_3^3 \notin N$ , pero ningún vértice de  $N$  absorbe por tdm a  $x_3^3$ , por lo tanto  $D_{\alpha_H}$  no tiene NTDM.

Lo que observamos en el ejemplo anterior es que  $D$  no tiene NTDM, pero, ¿basta con agregar esta condición para que al hacer la operación la digráfica resultante tenga NTDM?

Sin embargo esto no es cierto, el siguiente ejemplo lo muestra:

Sean  $D$  una digráfica 2-coloreada, tal que  $V(D) = \{y_1, y_2, y_3\}$  y  $F(D) = \{(y_1, y_2), (y_3, y_2), (y_3, y_1)\}$ , las flechas  $(y_1, y_2)$  y  $(y_3, y_2)$  tienen color 1, la flecha  $(y_3, y_1)$  con color 4,  $N_1 = \{y_2\}$  un NTDM de  $D$ ,  $H$  la digráfica raíz tal que  $V(H) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $x_4$  la raíz,  $F(H) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_5, x_1), (x_3, x_5), (x_5, x_4)\}$ , con colores  $\{1, 2, 3\}$ ,  $N_2 = \{x_4\}$  un NTDM de  $H$ , ver figura 2-8 y  $D_{\alpha_H}$  se puede ver en la figura 2-7.

Veamos que la digráfica  $D_{\alpha_H}$  antes definida no tiene NTDM, supongamos por el contrario que  $N \subseteq D_{\alpha_H}$  es un NTDM. Si  $x_4^2 \in N$ , entonces  $x_4^1 \notin N$  y  $\{x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_5^1\} \cap N \neq \emptyset$ , como todos los vértices mencionados están relacionados o existe una tdm que los une, la intersección consta de un elemento. Si  $x_1^1 \in N$ ,  $x_3^1$  no es absorbido por tdm por  $N$ . Si  $x_2^1 \in N$ , entonces no existe una tdm de  $x_5^1$  hacia  $N$ . Si  $x_3^1 \in N$ , entonces  $x_5^1$  no es absorbido por tdm por algún elemento de  $N$ . Por último si  $x_5^1 \in N$ , entonces no existe una tdm de  $x_1^1$  hacia  $N$ , por lo tanto  $x_4^2 \notin N$ .

Si  $x_4^2 \notin N$ , entonces  $x_1^2 \in N$ , pues es el único vértice que absorbe por tdm a  $x_4^2$ , sin embargo, no existen tdm de  $x_3^2$  hacia  $N$ . Por lo tanto  $D_{\alpha_H}$  no tiene un NTDM.

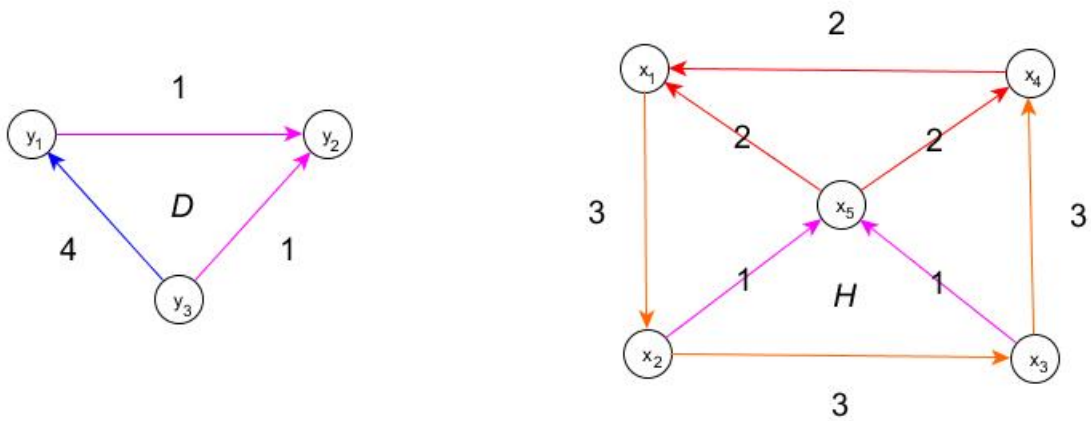


Figura 2-7:  $D$ , 2 – coloreada y  $H$ , 3 – coloreada sin ciclos monocromáticos.

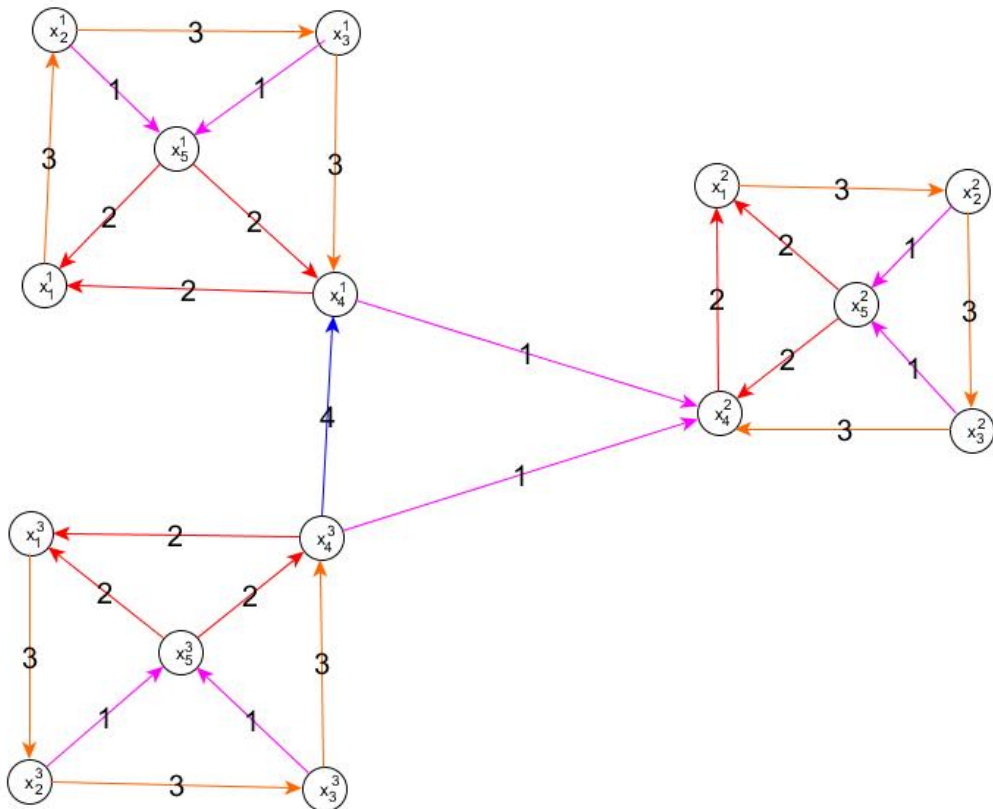


Figura 2-8:  $D_{\alpha_H}$  sin NTDM y sin ciclos monocromáticos.

Existe una operación entre digráficas llamada suma, denotada por  $\sigma(\alpha, D)$ , se han hecho diversas investigaciones en torno a ella, por ejemplo, I. Wloch [17] exhibe condiciones necesarias y suficientes para la existencia de NTDM, después Rocío Sánchez López [13] en su tesis de doctorado (dirigida por Hortensia Galeana Sánchez) generaliza los resultados obtenidos por Wloch para  $H - \text{núcleos}$  por  $H - \text{caminos}$  en la suma de dos digráficas  $H - \text{coloreadas}$ .

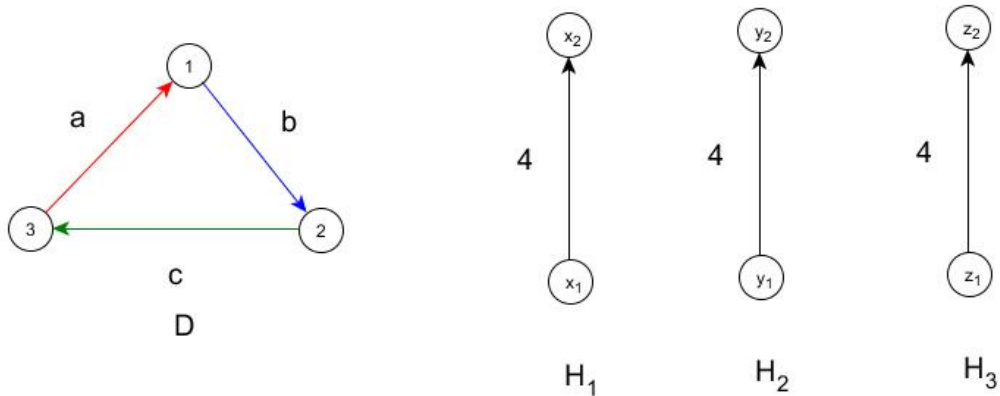
Podríamos pensar que el producto raíz es un caso particular de la suma entre digráficas, por lo cual los resultados de Galeana, Sánchez y Wloch son generalizaciones de los nuestros, sin embargo presentamos un ejemplo con el cual se aclara que se pueden lograr cosas distintas en ambas operaciones. Primero veamos la definición de suma entre dos digráficas  $m - \text{coloreadas}$ .

**Definición 2.2.1.** Sean  $D$  una digráfica  $m - \text{coloreada}$ , tal que  $V(D) = \{1, \dots, p\}$  con  $p \geq 2$ ,  $\alpha = (D_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  una sucesión de digráficas, coloreadas por flechas, ajenas por vértices dos a dos, con  $V(D_i) = \{i_1, \dots, i_{p_i}\}$  y  $p_i \geq 1$  para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ . La suma de  $D$  con la sucesión  $\alpha$  es la digráfica, coloreada por flechas,  $\sigma(\alpha, D)$ , tal que:

- $V(\sigma(\alpha, D)) = \cup_{i=1}^p (\{i\} \times V(D_i))$  y
- $F(\sigma(\alpha, D)) = \{((s, s_l)(r, r_t)) \text{ con color } k : (s = r \text{ y } (s_l, r_t) \in F(D_s) \text{ con color } k) \text{ o } (s, r) \in F(D) \text{ con color } k\}$ .

Definamos dos digráficas, sean  $D$  tal que:  $V(D) = \{1, 2, 3\}$  y  $F(D) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$  con colores  $\{a, b, c\}$  respectivamente,  $H_1$  con:  $V(H_1) = \{x_1, x_2\}$  y  $F(H_1) = \{(x_1, x_2)\}$  con color 4,  $H_2$  con:  $V(H_2) = \{y_1, y_2\}$  y  $F(H_2) = \{(y_1, y_2)\}$  con color 4 y  $H_3$  con:  $V(H_3) = \{z_1, z_2\}$  y  $F(H_3) = \{(z_1, z_2)\}$  con color 4. Sea  $\alpha = (H_1, H_2, H_3)$  y  $\sigma(\alpha, D)$  es:

$V(\sigma(\alpha, D)) = \{(1, x_1), (1, x_2), (2, y_1), (2, y_2), (3, z_1), (3, z_2)\}$  y  
 $F(\sigma(\alpha, D)) = \{((1, x_1), (1, x_2)), ((1, x_1), (2, y_1)), ((1, x_1), (2, y_2)), ((1, x_2), (2, y_1)), ((1, x_2), (2, y_2)), ((2, y_1), (2, y_2)), ((2, y_1), (3, z_1)), ((2, y_1), (3, z_2)), ((2, y_2), (3, z_1)), ((2, y_2), (3, z_2)), ((3, z_1), (3, z_2)), ((3, z_1), (1, x_1)), ((3, z_1), (1, x_2)), ((3, z_2), (1, x_1)), ((3, z_2), (1, x_2))\}$  (figura 2-9).



**Figura 2-9:**  $D$ , 3 - coloreada y  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$ , 1 - coloreadas.

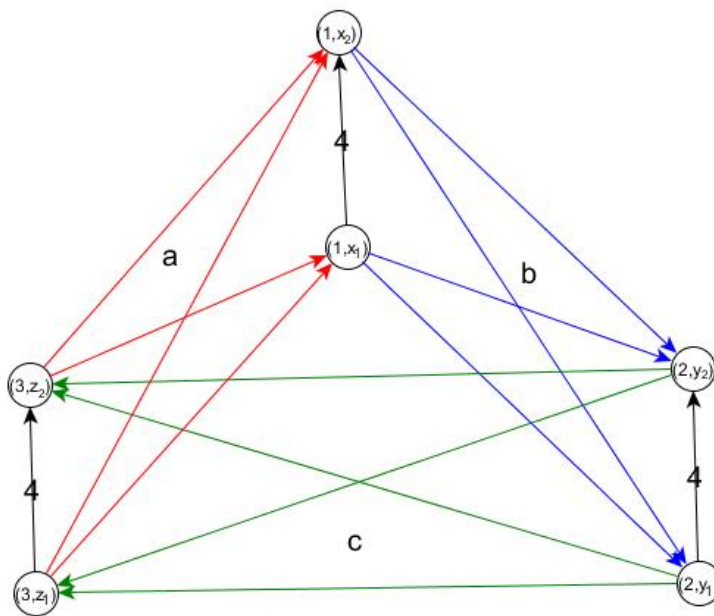


Figura 2-10:  $\sigma(\alpha, D)$ .

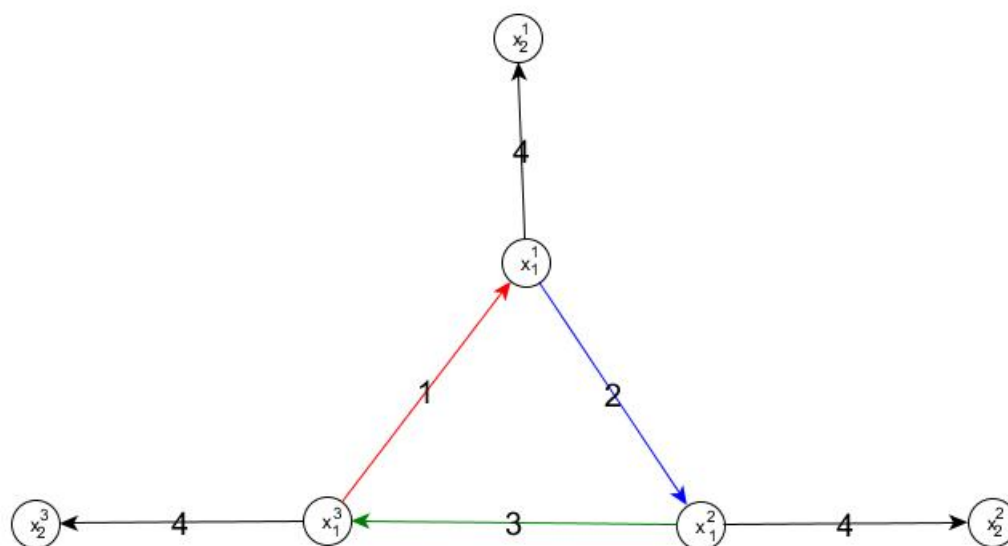
Observemos que  $D$  no tiene un NTDM, ya que es un triángulo heterocromático y la digráfica  $H$  si tiene un NTDM,  $N_1 = \{x_2\}$ , sin embargo,  $\sigma(\alpha, D)$  no tiene NTDM. Supongamos que tiene un NTDM, como todos los vértices están relacionados un NTDM consta de un sólo elemento, si  $N = \{(1, x_2)\}$ , entonces no existen  $(2, x_1)N$ -tdm, por lo tanto  $N \neq \{(1, x_2)\}$ .

Como  $N \neq \{(1, x_2)\}$ , implica que  $N = \{(2, x_1)\}$  o  $N = \{(2, x_2)\}$ . Si  $N = \{(2, x_1)\}$ , entonces el vértice  $(3, x_1)$  no es absorbido por  $N$ . Por último si  $(2, x_2) \in N$ , entonces no existen  $(3, x_2)N$ -tdm, por lo tanto  $\sigma(\alpha, D)$  no tiene un NTDM.

Ahora denotemos por  $V(D) = \{y_1, y_2, y_3\}$  y  $F(D) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1)\}$  con colores  $\{1, 2, 3\}$  respectivamente la digráfica  $D$ ,  $H$  con:  $V(H) = \{x_1, x_2\}$  y  $F(H) = \{(x_1, x_2)\}$  con color 4, con raíz  $x_1$ ,  $N_H = \{x_2\}$  un NTDM de  $H$ , figura 2-11, y  $D_{\alpha_H}$  es:  $V(D_{\alpha_H}) = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_2^1, x_2^2, x_2^3\}$  (figura 2-12)



Figura 2-11:  $D$  y  $H$  con un NTDM.



**Figura 2-12:**  $D_{\alpha_H}$  con un NTDM.

Como  $H$  no tiene ciclos monocromáticos y la raíz  $x_1 \notin N$ , por el teorema 2.2.1  $D_{\alpha_H}$  tiene un NTDM  $N = \{x_2^1, x_2^2, x_2^3\}$ , por lo tanto los resultados que se obtienen al hacer la suma y los que se consiguen al hacer el producto raíz entre dos digráficas  $m$  – coloreadas son distintos.



# Capítulo 3

## Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en $L(D)$ .

En la teoría de digráficas, existe una operación que consiste en asociarle a una digráfica  $D$  una nueva digráfica llamada la digráfica de líneas, donde los vértices de la digráfica de líneas corresponden a las flechas de  $D$  y dos vértices son adyacentes si en  $D$  el vértice final de una flecha es el inicial de la otra. Se han obtenido varios resultados sobre la digráfica de líneas, por ejemplo: Matúš Harminc, en el artículo “*Solutions and Kernels of a Directed Graph*” [11], demuestra que el número de núcleos de  $D$  es igual al número de núcleos en  $L(D)$ . Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez, en el artículo “*Kernels in edge coloured line digraph*” [8], demuestran que dada una digráfica  $D$   $m$ -coloreada y  $L(D)$  su digráfica de líneas  $m$ -coloreada interiormente, el número de núcleos por trayectorias monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos por trayectorias monocromáticas de  $L(D)$ . Los resultados de este artículo se presentan en esta parte de la tesis los cuales nos serán de gran utilidad para el siguiente capítulo.

### 3.1. Definiciones.

En esta sección empezaremos definiendo la digráfica de líneas de una digráfica  $D$ , después veremos la coloración interior de la digráfica de líneas de  $D$   $m$ -coloreada.

**Definición 3.1.1.** Sea  $D$  una digráfica, definimos como  $L(D)$  a la **digráfica de líneas** de  $D$  de la siguiente manera:

- $V(L(D)) = F(D)$ ,
- $t = (a, b) \in F(L(D))$  si y sólo si  $a = (x, y)$  y  $b = (y, z)$  con  $\{a, b\} \subseteq F(D)$ , es decir, el vértice final de la flecha  $a$  es igual al vértice inicial de la flecha  $b$  en  $D$ .

Veamos un ejemplo. Sea  $D$  un digráfica tal que:  $V(D) = \{v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{a = (x, y), b = (y, w), c = (v, y), d = (y, z), e = (z, w)\}$ , ahora por la definición 3.1.1, la digráfica de líneas de  $D$ ,  $L(D)$  está dada por:

$$\begin{aligned} V(L(D)) &= \{a, b, c, d, e\}, \\ F(L(D)) &= \{(a, b), (a, d), (c, b), (c, d), (d, e)\}. \end{aligned}$$

En la figura 3-1 damos un ejemplo de una digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$ .

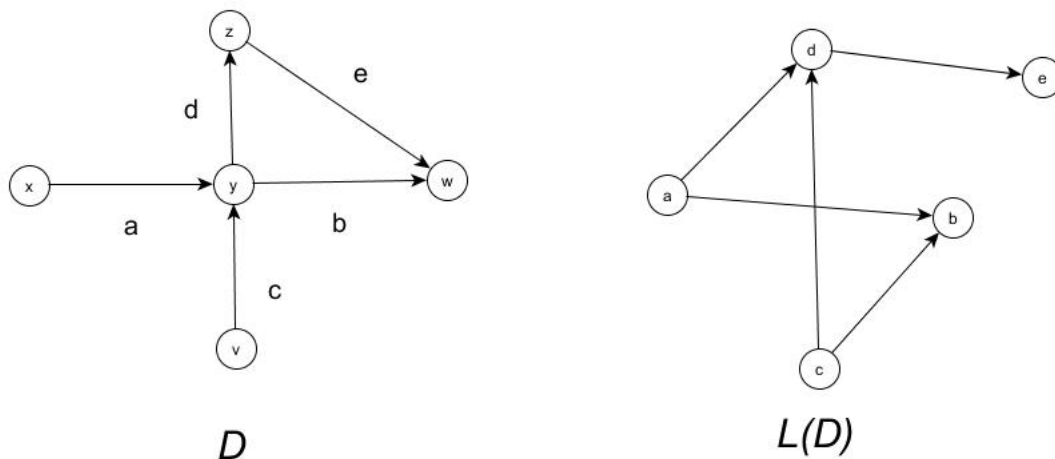


Figura 3-1:  $D$  y  $L(D)$ .

**Definición 3.1.2.** Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada y  $L(D)$  su digráfica de líneas. La **coloración interior** de  $L(D)$  es la coloración por flechas de esta digráfica que cumple la siguiente condición: si  $h \in F(D)$  tiene color  $c$  entonces cualquier flecha de la forma  $(x, h) \in F(L(D))$  tiene color  $c$ .

Notemos que  $L(D)$  también está  $m$  – coloreada.

Dada la siguiente coloración para  $D$  de la figura 3-1, donde las flechas,  $a$  y  $b$  tiene color 2,  $c$  y  $e$  color 3 y  $d$  tiene color 1, de esta forma  $L(D)$  está coloreada de la siguiente manera: las flechas  $(a, b)$  y  $(c, b)$  tiene color 2,  $(a, d)$  y  $(c, d)$ , color 1 y  $(d, e)$  tiene color 3 (figura 3-2).

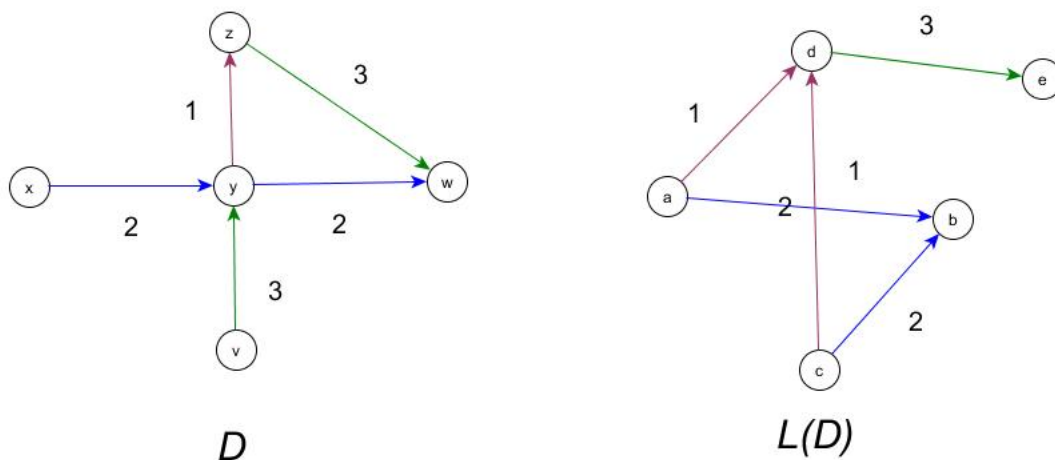


Figura 3-2:  $D$  3 – coloreada y  $L(D)$  3 – coloreada interiormente.

## 3.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en $L(D)$ coloreada interiormente.

Los siguientes dos lemas nos muestran cómo se relacionan las trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  y las de  $L(D)$  coloreada interiormente, cabe mencionar que en esta sección  $L(D)$  siempre tendrá dicha coloración.

**Lema 3.2.1.** *Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada y  $\{x_0, x_n\} \subseteq V(D)$ . Si  $T = (x_0, \dots, x_n)$  es una  $x_0x_n$  – tdm en  $D$  y  $a_0 = (x, x_0) \in F(D)$  tal que el vértice final de  $a_0$  es  $x_0$ , entonces existe una  $a_0a_n$  – tdm en  $L(D)$ , donde  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ .*

*Demostración.* Sea  $T = (x_0, \dots, x_n)$  una  $x_0x_n$  – tdm en  $D$ , denotemos por  $a_i = (x_{i-1}, x_i)$  para  $i = \{1, \dots, n\}$ , es decir,  $a_1 = (x_0, x_1), a_2 = (x_1, x_2), \dots$ , y  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ . Por la definición de  $L(D)$ ,  $(a_1, \dots, a_n)$  es una trayectoria en  $L(D)$  y por la elección de  $a_0 = (x, x_0)$ , tenemos que  $(a_0, a_1) \in F(L(D))$ , por lo tanto  $T' = (a_0, \dots, a_n)$  es una trayectoria en  $L(D)$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $T$  tiene color  $c$ , de esta manera  $a_{i+1}$  tiene color  $c$  para  $0 \leq i \leq n-1$ , por lo que  $(a_i, a_{i+1}) \in F(L(D))$  tiene color  $c$  para  $0 \leq i \leq n-1$ , por la definición de coloración interior. Por lo tanto  $T' = (a_0, \dots, a_n)$  es una  $a_0a_n$  – tdm en  $L(D)$  de color  $c$ .  $\square$

**Lema 3.2.2.** *Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada sin ciclos monocromáticos y  $\{a_0, a_n\} \subseteq V(L(D))$ . Si existe una  $a_0a_n$  – tdm en  $L(D)$ , entonces el vértice final de  $a_0$  es distinto al vértice final de  $a_n$  y existe una tdm entre el vértice final de  $a_0$  y el vértice final de  $a_n$  en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $(a_0, \dots, a_n)$  una tdm de color  $c$  en  $L(D)$  con  $a_i = (x_i, x_{i+1})$  para  $0 \leq i \leq n$ , es decir,  $a_0 = (x_0, x_1), a_1 = (x_1, x_2), \dots, a_{n-1} = (x_{n-1}, x_n)$  y  $a_n = (x_n, x_{n+1})$ . Por la definición de  $L(D)$   $(x_1, \dots, x_{n+1})$  es un camino en  $D$ . Como  $(a_i, a_{i+1}) \in F(L(D))$  tiene color  $c$  para todo  $0 \leq i \leq n-1$  por la definición de coloración interior  $a_{i+1}$  tiene color  $c$  con  $0 \leq i \leq n-1$  en  $D$ , por lo tanto  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  es un camino monocromático de color  $c$ . Como  $D$  no tiene ciclos monocromáticos tenemos que  $x_i \neq x_j$  para todo  $\{i, j\} \in \{1, \dots, n+1\}$ , en particular  $x_1 \neq x_{n+1}$ . Por lo tanto  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  es una  $x_1x_{n+1}$  – tdm en  $D$  de color  $c$ .  $\square$

La función que se define a continuación, la cual tiene como dominio el conjunto potencia de los vértices de  $D$ ,  $P(V(D))$ , y contradominio el conjunto potencia de las flechas de  $D$ ,  $P(F(D))$ , nos permite mandar conjuntos independientes por tdm de  $D$  a conjuntos independientes por tdm en  $L(D)$ , gracias a que sabemos, por los lemas anteriores, la relación entre las trayectorias de  $D$  y las de  $L(D)$ .

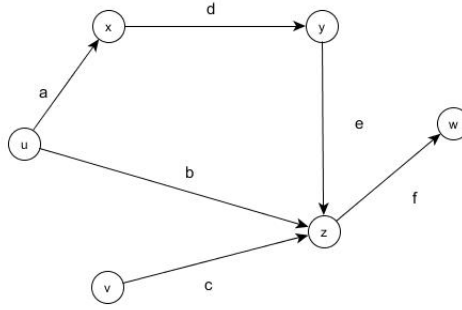
**Definición 3.2.1.** *Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica.  $f : P(V(D)) \rightarrow P(F(D))$  una función definida como sigue:*

*Para cada  $Z \subseteq V(D)$ ;  $f(Z) = \{(u, x) \in F(D) : x \in Z\}$ .*

El siguiente es un ejemplo a la definición anterior, primero construiremos una digráfica  $D$ :

$V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$ ,

$F(D) = \{a = (u, x), b = (u, z), c = (v, z), d = (x, y), e = (y, z), f = (z, w)\}$ , figura 3-3.



**Figura 3-3:**  $D$ .

Tal como nos dice la definición 3.2.1, si tomamos  $Z = \{v, x, y, z\}$  un conjunto de vértices de  $D$ , tenemos que  $f(Z) = \{a, b, c, d, e\}$  es el conjunto de las flechas cuyos vértices finales son los vértices del conjunto  $Z$ .

**Lema 3.2.3.** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada sin ciclos monocromáticos. Si  $Z \subseteq V(D)$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , entonces  $f(Z) \subseteq V(L(D))$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $L(D)$ .*

*Demostración.* La demostración se hará por contradicción. Sea  $Z \subseteq V(D)$ , tal que  $Z$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Supongamos que  $f(Z) \subseteq V(L(D))$  no es independiente por tdm en  $L(D)$ , ésto quiere decir que existe  $\{h, k\} \subseteq f(Z)$  tal que tenemos  $(h, \dots, k)$  una  $hk$ -tdm en  $L(D)$ . Por el lema 3.2.2 el vértice final de  $h$  es distinto al vértice final de  $k$  en  $D$ , además existe una tdm entre el vértice final de  $h$  y el vértice final de  $k$ . Como  $\{h, k\} \subseteq f(Z)$  se tiene que el vértice final de  $h$  y el vértice final de  $k$  son elementos de  $Z$  y sin embargo ésto no es posible ya que encontramos una tdm entre dos vértices en  $Z$  y por hipótesis  $Z$  es independiente por tdm. Por lo tanto  $f(Z)$  es independiente por tdm en  $L(D)$ .  $\square$

El siguiente resultado es el más importante en este capítulo, ya que si tenemos una digráfica  $D$  tal que tiene uno o varios NTDM, al obtener  $L(D)$  también tiene NTDM, más aún ambas digráficas poseen el mismo número de NTDM y lo demostraremos con ayuda de los lemas anteriores.

**Teorema 3.2.1.** *Sean  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada sin ciclos monocromáticos y  $L(D)$  su digráfica de líneas. El número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $L(D)$ .*

*Demostración.* Denotamos por  $\mathcal{K}$  el conjunto de todos los NTDM de  $D$  y  $\mathcal{K}^*$  el conjunto de todos los NTDM de  $L(D)$ .

Demostraremos que  $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}^*|$ , para lo cual primero veremos dos afirmaciones. La primera nos dice que si  $K \in \mathcal{K}$ , entonces  $f(K) \in \mathcal{K}^*$  y que  $f$  restringida a  $\mathcal{K}$  es inyectiva, con ésto concluimos que  $|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{K}^*|$ . En la segunda afirmación se define una nueva función  $g$  inyectiva con la cual dado  $H \subseteq V(L(D))$  si  $H \in \mathcal{K}^*$ , entonces  $g(H) \in \mathcal{K}$  y concluimos que  $|\mathcal{K}| \geq |\mathcal{K}^*|$ .

**Afirmación 1:** Si  $K \in \mathcal{K}$ , entonces  $f(K) \in \mathcal{K}^*$ .

Sea  $K \in \mathcal{K}$ , si aplicamos la función de la definición 3.2.1 a  $K \subseteq V(D)$ , tenemos por el lema 3.2.3 que  $f(K)$  es independiente por tdm en  $L(D)$ . Falta ver que  $f(K)$  es absorbente por tdm en  $L(D)$ .

Sea  $h = (u, v) \in V(L(D)) \setminus f(K)$ , como  $h \notin f(K)$ , por la definición 3.2.1 tenemos que  $v \notin K$ , ya que  $K$  es NTDM de  $D$  existe  $z \in K$  tal que  $z$  absorbe a  $v$  vía una tdm en  $D$ , a saber  $T = (v, x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ , por la definición de  $L(D)$ ,  $(x_{n-1}, z) \in V(L(D))$ . Así por el lema 3.2.1 existe una  $h(x_{n-1}, z) - tdm$  en  $L(D)$ . Y por la definición 3.2.1  $(x_{n-1}, z) \in f(K)$ . Por lo tanto,  $f(K)$  es absorbente por tdm y así  $f(K)$  es NTDM de  $L(D)$ .

Afirmamos que la función  $f' : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^*$ , donde  $f'$  es la restricción de la función  $f$  de la definición 3.2.1 a  $\mathcal{K}$ , es inyectiva. Sea  $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{K}$  tal que  $K_1 \neq K_2$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $K_1 - K_2 \neq \emptyset$ . Tomemos  $v \in V(D)$  tal que  $v \in K_1 - K_2$ . Como  $K_2 \in \mathcal{K}$ , en particular  $K_2$  es absorbente por tdm en  $D$ , entonces existe  $z \in K_2$  tal que  $z$  absorbe vía una tdm a  $v$ , denotemos por  $h = (x_{n-1}, x_n = z)$  la última flecha de dicha trayectoria, así por definición de  $L(D)$  y de  $f'$ , existe  $h \in V(L(D))$  tal que  $h \in f'(K_2)$ . Notemos que como  $v \in K_1$  y  $K_1$  es independiente por tdm en  $D$ , entonces  $z \notin K_1$  y de esta manera  $h \notin f'(K_1)$  y  $f'(K_1) \neq f'(K_2)$ , por lo tanto  $f'$  es una función inyectiva.

**Afirmación 2:** Definamos una función  $g : P(F(D)) \rightarrow P(V(D))$ , tal que dado  $H \subseteq F(D)$ ,  $g(H) = C(H) \cup J(H)$  donde:

- $C(H) = \{x \in V(D) : \text{existe } (z, x) \in H\}$ , es decir,  $C(H)$  es el conjunto de todos los vértices finales de las flechas de  $H$ .
- $J(H) = \{x \in V(D) : \delta_D^-(x) = 0 \text{ y no existe una tdm entre } v \text{ y los elementos de } C(H)\}$ .

Hay que demostrar que dado  $H \subseteq V(L(D))$ , si  $H \in \mathcal{K}^*$ , entonces  $g(H) \in \mathcal{K}$ .

- I. Por demostrar que si  $H \in \mathcal{K}^*$ , entonces  $g(H)$  es independiente por tdm en  $D$ . Sea  $\{u, v\} \subseteq g(H)$ , hay que ver que no existe una  $uv - tdm$  en  $D$  y no existe una  $vu - tdm$  en  $D$ , por la definición de  $g$  tenemos los siguientes casos:

Caso 1.  $\{u, v\} \subseteq C(H)$ . Procedemos por contradicción. Supongamos que existe  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una  $uv - tdm$  en  $D$ , como  $\{u, v\} \subseteq C(H)$  entonces  $u$  es vértice final de algún  $a \in H$  y de la misma forma  $v$  es vértice final de algún  $b \in H$ . Tenemos dos subcasos:

Subcaso 1.1.  $b = (x_{n-1}, x_n = v)$ , por el lema 3.2.1 se tiene que existe una  $a = (x, x_0 = u)b = (x_{n-1}, x_n = v) - tdm$  en  $L(D)$   $m - coloreada$  interiormente, lo cual es una contradicción, ya que  $\{a, b\} \subseteq H$  y  $H$  es un NTDM de  $L(D)$ .

Subcaso 1.2. Si  $b \neq t = (x_{n-1}, x_n = v)$ , entonces  $t \notin H$  pues si suponemos que  $t \in H$ , pasa lo mismo que en el subcaso anterior.

Como  $t = (x_{n-1}, x_n = v) \notin H$  y  $H$  es absorbente por tdm, entonces existe  $d \in H$  tal que tenemos una  $td - tdm$  en  $L(D)$ , de esta manera como el vértice final de  $b$  es  $v$ , entonces

por el lema 3.2.1 existe una  $bd - tdm$  en  $L(D)$   $m$  - coloreada interiormente y es una contradicción, pues  $\{b, d\} \subseteq H$  y  $H$  es un NTDM.

- Caso 2.  $u \in J(H)$  y  $v \in C(H)$ . Por la definición de  $g(H)$  sabemos que no existen tdm entre los elementos de  $J(H)$  y los elementos de  $C(H)$ , en particular no existe una  $uv - tdm$  en  $D$ .
- Caso 3.  $u \in C(H)$  y  $v \in J(H)$ . Como  $v \in J(H)$  por la definición de  $J(H)$  tenemos que  $\delta_D^-(v) = 0$ , entonces no hay ninguna trayectoria que llegue a  $v$ , en particular no existe una  $uv - tdm$  en  $D$ .
- Caso 4.  $u \in J(H)$  y  $v \in J(H)$ . Por un argumento análogo al del caso anterior, como  $v \in J(H)$  por la definición de  $J(H)$  tenemos que  $\delta_D^-(v) = 0$ , entonces no hay ninguna trayectoria que llegue a  $v$ , en particular no existe una  $uv - tdm$  en  $D$ .

Por lo tanto por los casos anteriores  $g(H)$  es independiente por tdm, ya que para cualquier  $\{u, v\} \subseteq g(H)$  no existen tdm entre ellos.

II. Demostraremos que  $g(H)$  es absorbente por tdm. Sea  $u \in V(D) \setminus g(H)$ , es decir,  $u \notin C(H) \cup J(H)$ , así por la definición de  $C(H) \cup J(H)$ ,  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b$  en  $H$  y se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\delta_D^-(u) > 0$ .
- Existe una tdm del vértice  $u$  a algún elemento de  $C(H)$ .

Analicemos dos casos.

Caso 1. Si  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b \in H$  y  $\delta_D^-(u) > 0$ .

Por hipótesis del caso sabemos que existe  $d \in F(D)$  tal que  $u$  es vértice final de  $d = (t, u)$ , también tenemos que  $d \in V(L(D)) \setminus H$ . Como  $H \in \mathcal{K}^*$ , en particular  $H$  es absorbente por tdm, entonces existe  $c \in H$  con  $c = (y, z)$  tal que hay una  $dc - tdm$  en  $L(D)$  y por el lema 3.2.2 existe una tdm entre el vértice final de  $d$  y el vértice final de  $c$ , es decir, una  $uz - tdm$  en  $D$  con  $u \neq z$ , además como  $c = (y, z) \in H$ , entonces  $z \in g(H)$ . Por lo tanto existe una  $uz - tdm$  con  $z \in g(H)$ .

Caso 2. Si  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b \in H$  y existe una tdm del vértice  $u$  a algún elemento de  $C(H)$ .

Por hipótesis del caso tenemos que existe una tdm del vértice  $u$  a algún elemento de  $C(H)$ , es decir, existe una  $ug(H) - tdm$  en  $D$ .

Por los casos anteriores  $g(H)$  es absorbente por tdm. Por lo tanto  $g(H)$  es un NTDM de  $D$ .

Afirmamos que la función  $g' : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}$ , donde  $g'$  es la restricción de  $g$  en  $\mathcal{K}^*$  es inyectiva. Sea  $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{K}^*$  tal que  $K_1 \neq K_2$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $K_1 - K_2 \neq \emptyset$ , tomemos  $h \in V(L(D))$  tal que  $h \in K_1 - K_2$  con  $h \in F(D)$  y  $u$  el vértice final de  $h$ , así  $h \in K_1$ , entonces por definición de  $g$ ,  $u \in g'(K_1)$ . Como  $K_2$  es NTDM de  $L(D)$ , en particular es absorbente por tdm y además  $h \notin K_2$ , entonces existe  $k \in K_2$  tal que  $k$  absorbe a  $h$  vía una tdm en  $L(D)$ . Sea  $z$  el vértice final de  $k$ , así  $z \in g'(K_2)$  y por

el lema 3.2.2 existe una  $tdm$  entre el vértice final de  $h$  y el vértice final de  $k$ , es decir, una  $uz - tdm$  en  $D$  con  $u \neq z$  pues  $D$  no tiene ciclos monocromáticos, de esta forma por lo demostrado anteriormente y la definición de NTDM tenemos que como  $u \in g'(K_1)$ , entonces  $z \notin g'(K_2)$ , así  $z \in g'(K_2) - g(K_1)$  y  $g'(K_1) \neq g'(K_2)$ , luego  $g'$  es inyectiva.

Por lo demostrado anteriormente tenemos que  $f'$  y  $g'$  son inyectivas, por lo tanto  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{N}^*|$ .

□

# Capítulo 4

## Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en la digráfica $MSL(D)$ .

En este capítulo construiremos la super digráfica de líneas  $m$  – *coloreada* interiormente de subconjuntos monocromáticos, que denotaremos como  $MSL(D)$ . Mencionaremos algunas propiedades que posee  $MSL(D)$  y con ayuda de los resultados del capítulo 4 daremos condiciones para que dada una digráfica  $D$   $m$  – *coloreada*,  $MSL(D)$  tenga NTDM. La idea para la construcción de esta digráfica surgió a partir de la gráfica construida por K. S. Bagga, L. W. Beineke y V. N. Varma en 1994 en [1] a la cual llamaron super gráfica de líneas y la definieron de la siguiente manera:

**La super gráfica de líneas de índice  $r$** , denotada por  $G_r$ , es definida para cualquier gráfica  $G$  con al menos  $r$  aristas, los vértices son conjuntos de  $r$  aristas de  $G$  y dos vértices  $A$  y  $B$  son adyacentes en  $G_r$  si y sólo si existen  $a \in A$  y  $b \in B$  tales que  $a$  y  $b$  son adyacentes como aristas en  $G$ .

Daremos un ejemplo de esta gráfica. Sea  $G$  tal que,  $V(G) = \{w, x, y, z\}$  y  $A(G) = \{(x, y) = a, (y, z) = b, (z, w) = c, (w, x) = d\}$  y construimos a  $G_2$  de la siguiente manera:

$V(G_2) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ ,  $A(G_2) = \{(\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{b, d\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{c, d\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{a, c\}, \{b, d\}), (\{a, c\}, \{c, d\}), (\{a, d\}, \{a, b\}), (\{a, d\}, \{a, c\}), (\{b, c\}, \{a, d\}), (\{b, c\}, \{b, d\}), (\{b, c\}, \{c, d\}), (\{b, d\}, \{c, d\}), (\{c, d\}, \{a, d\})\}$ , ver figura 4-1.

En 1996 Biao Zhao y Xueliang Li en el artículo [18] y en el 2007 D. Ferrero en [5] trabajan la super digráfica de líneas con la siguiente definición: Dada una digráfica  $D = (V(D), F(D))$  y un entero positivo  $k$ , **la super digráfica de líneas de índice  $k$**  de  $D$  es la digráfica  $S_k(D)$  la cual tiene por vértices todos los subconjuntos de  $k$  elementos de  $F(D)$  y  $(A, T) \in F(S_k(D))$  si y sólo si existen  $a \in A$  y  $b \in T$  tal que  $a = (u, v)$  y  $b = (v, w)$ , Ferrero en su trabajo obtiene algunas propiedades de dicha digráfica. Por su parte, Biao Zhao y Xueliang Li trabajan con núcleos, seminúcleos y cuasinúcleos.



Mostraremos un ejemplo de la super digráfica de líneas definida anteriormente. Sea  $D$  una digráfica tal que:  $V(D) = \{x, y, z\}$  y  $F(D) = \{a = (x, y), b = (y, z), c = (z, x)\}$ , dada esta digráfica construyamos su super digráfica de líneas denotada por  $S_2(D)$  como sigue:  $V(S_2(D)) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$  y  $F(S_2(D)) = \{(\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{a, b\}), (\{b, c\}, \{a, c\})\}$  ver figura 4-2.

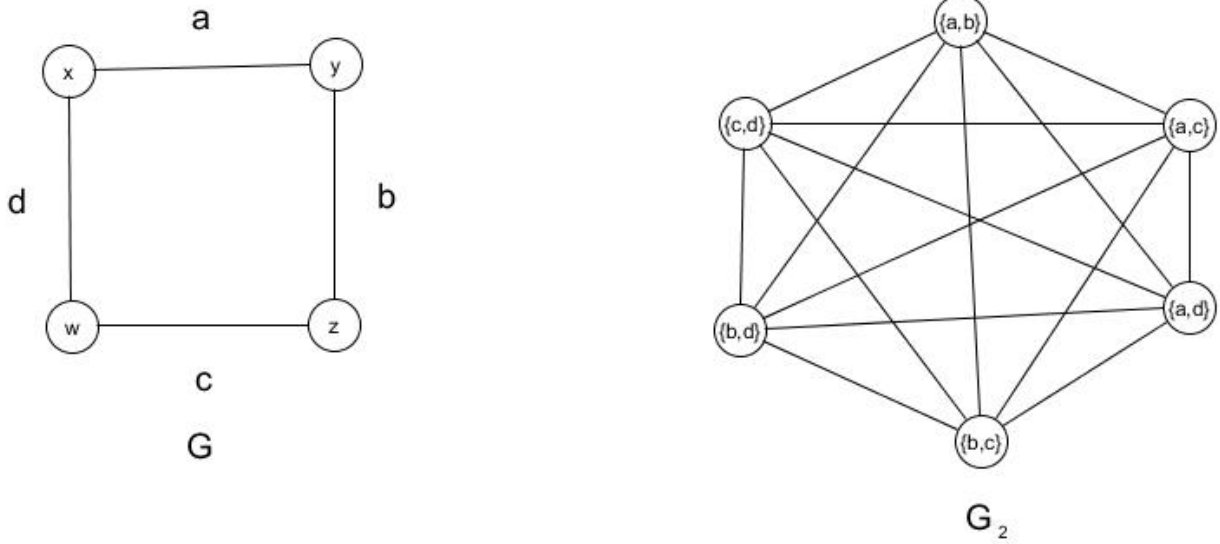


Figura 4-1: Ejemplo de  $G$  y  $G_2$ .

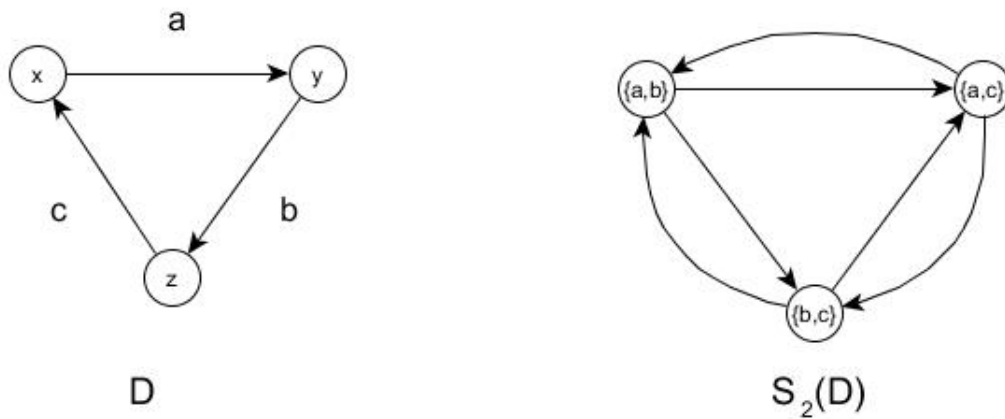


Figura 4-2: Ejemplo de  $D$  y  $S_2(D)$ .

## 4.1. Digráfica $MSL(D)$ .

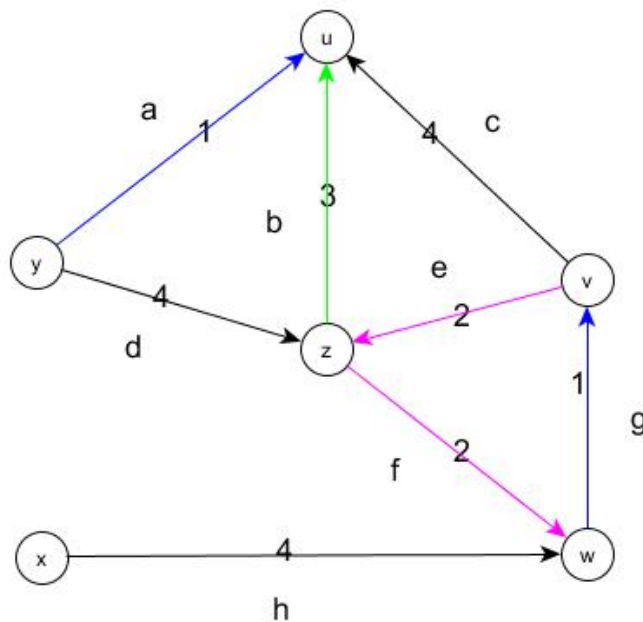
La siguiente definición nos ayudará para construir más fácilmente la digráfica  $MSL(D)$ .

**Definición 4.1.1.** Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$ -coloreada, definimos  $A_j^i = \{A \subseteq F(D) : |A| = i \text{ y } c(a) = j \text{ para cada } a \in A\}$ , un elemento en  $A_j^i$  lo denotamos por  $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ . Observemos que son subconjuntos monocromáticos de flechas de  $D$  de cardinalidad  $i$ .

En la figura 4-3 mostraremos como se forman los conjuntos antes definidos. Sea  $D$  una digráfica 4-coloreada tal que:

$$V(D) = \{u, v, w, x, y, z\},$$

$$F(D) = \{a = (y, u), b = (z, u), c = (v, u), d = (y, z), e = (v, z), f = (z, w), g = (w, v), h = (x, w)\} \text{ y con colores } 1, 2, 3, \text{ y } 4.$$



**Figura 4-3:**  $D$ , 4-coloreada.

De acuerdo con la digráfica tenemos que las flechas  $a$  y  $g$  tienen color 1, las flechas  $e$  y  $f$  tienen color 2,  $c$ ,  $d$  y  $h$  color 4 y la flecha  $b$  color 3, ahora construyamos los conjuntos  $A_j^i$  de la definición 4.1.1:

- $A_1^1 = \{\{a\}, \{g\}\}$  y  $A_1^2 = \{\{a, g\}\}$ .
- $A_2^1 = \{\{e\}, \{f\}\}$  y  $A_2^2 = \{\{e, f\}\}$ .
- $A_3^1 = \{\{b\}\}$ .
- $A_4^1 = \{\{c\}, \{d\}, \{h\}\}$ ,  $A_4^2 = \{\{c, d\}, \{c, h\}, \{d, h\}\}$  y  $A_4^3 = \{\{c, d, h\}\}$ .

**Definición 4.1.2.** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$  – coloreada, donde  $F(D) = \{a_1, \dots, a_s\}$  y  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , definimos **la super digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos de  $D$  con a lo más  $k$  elementos**, denotada por  $MSL(D)$ , de la siguiente manera:

1.  $V(MSL(D)) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, m\}} A_j^i = A_1^1 \cup A_1^2 \cup \dots \cup A_1^k \cup A_2^1 \cup \dots \cup A_2^k \cup \dots \cup A_m^1 \cup \dots \cup A_m^k$ .
2. Sean  $\{a_r, \dots, a_q\} \in A_j^i$  y  $\{a_p, \dots, a_t\} \in A_s^l$ .  $(\{a_r, \dots, a_q\}, \{a_p, \dots, a_t\}) \in F(MSL(D))$  si y sólo si existen  $a_u \in \{a_r, \dots, a_u, \dots, a_q\}$  y  $a_v \in \{a_p, \dots, a_v, \dots, a_t\}$  tal que  $a_u = (x, y)$  y  $a_v = (y, z)$ , es decir, el vértice final de  $a_u$  es igual al vértice inicial de  $a_v$  en  $D$ .  
Para facilitar la notación  $\{a_r, \dots, a_u, \dots, a_q\} = \{\dots, a_u, \dots\}$  y  $\{a_p, \dots, a_v, \dots, a_t\} = \{\dots, a_v, \dots\}$ , es decir, sólo escribiremos los elementos que nos dan la adyacencia entre los vértices de  $MSL(D)$ .

**Definición 4.1.3.** **La coloración interior** de  $MSL(D)$  es la coloración por flechas de esta digráfica definida como sigue: sea  $h \in F(D)$  con color  $c$ , entonces toda flecha de  $MSL(D)$  de la forma  $(\{a_i, \dots, a_r\}, \{\dots, h, \dots\})$ , tiene color  $c$ .

Note que la coloración interior de  $MSL(D)$  está bien definida porque  $\{\dots, h, \dots\}$  es un conjunto monocromático de flechas.

El siguiente ejemplo nos muestra como se construye la super digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos de un digráfica dada. Sean  $D$  una digráfica 2 – coloreada tal que,  $V(D) = \{w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{a = (w, x), b = (x, y), c = (y, z), d = (z, w)\}$ , donde la flecha  $a$  tiene color 1, los elementos del conjunto  $\{d, c, d\} \subseteq F(D)$  tienen color 2 y  $k = 3$  así obtengamos los conjuntos de la definición 4.1.1.

- $A_1^1 = \{\{a\}\}$ .
- $A_2^1 = \{\{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ ,  $A_2^2 = \{\{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$  y  $A_2^3 = \{\{b, c, d\}\}$ .

De esta manera  $MSL(D)$  es la digráfica:

$$V(MSL(D)) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

$$F(MSL(D)) = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{a\}, \{b, d\}), (\{a\}, \{b, c, d\}), (\{b\}, \{c\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{b\}, \{c, d\}), (\{b\}, \{b, c, d\}), (\{c\}, \{d\}), (\{c\}, \{b, d\}), (\{c\}, \{c, d\}), (\{c\}, \{b, c, d\}), (\{d\}, \{a\}), (\{b, c\}, \{c\}), (\{b, c\}, \{d\}), (\{b, c\}, \{b, d\}), (\{b, c\}, \{c, d\}), (\{b, c\}, \{b, c, d\}), (\{b, d\}, \{a\}), (\{b, d\}, \{c\}), (\{b, d\}, \{b, c\}), (\{b, d\}, \{c, d\}), (\{b, d\}, \{b, c, d\}), (\{c, d\}, \{a\}), (\{c, d\}, \{d\}), (\{c, d\}, \{b, c\}), (\{c, d\}, \{b, d\}), (\{c, d\}, \{b, c, d\}), (\{b, c, d\}, \{a\}), (\{b, c, d\}, \{c\}), (\{b, c, d\}, \{d\}), (\{b, c, d\}, \{b, d\}), (\{b, c, d\}, \{c, d\})\}.$$

Dado que  $D$  está 2 – coloreada,  $MSL(D)$  también está 2 – coloreada interiormente, tenemos que las flechas que conforman la vecindad interior de  $a$  tienen color 1 y el resto de las flechas tienen color 2 en  $D$ .

La figura 4-4 representa la digráfica  $D$  y la 4-5 la digráfica  $MSL(D)$ .

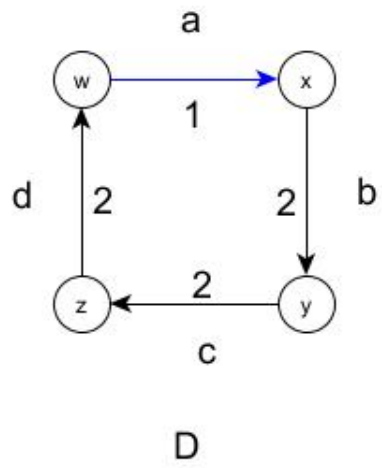


Figura 4-4:  $D$ .

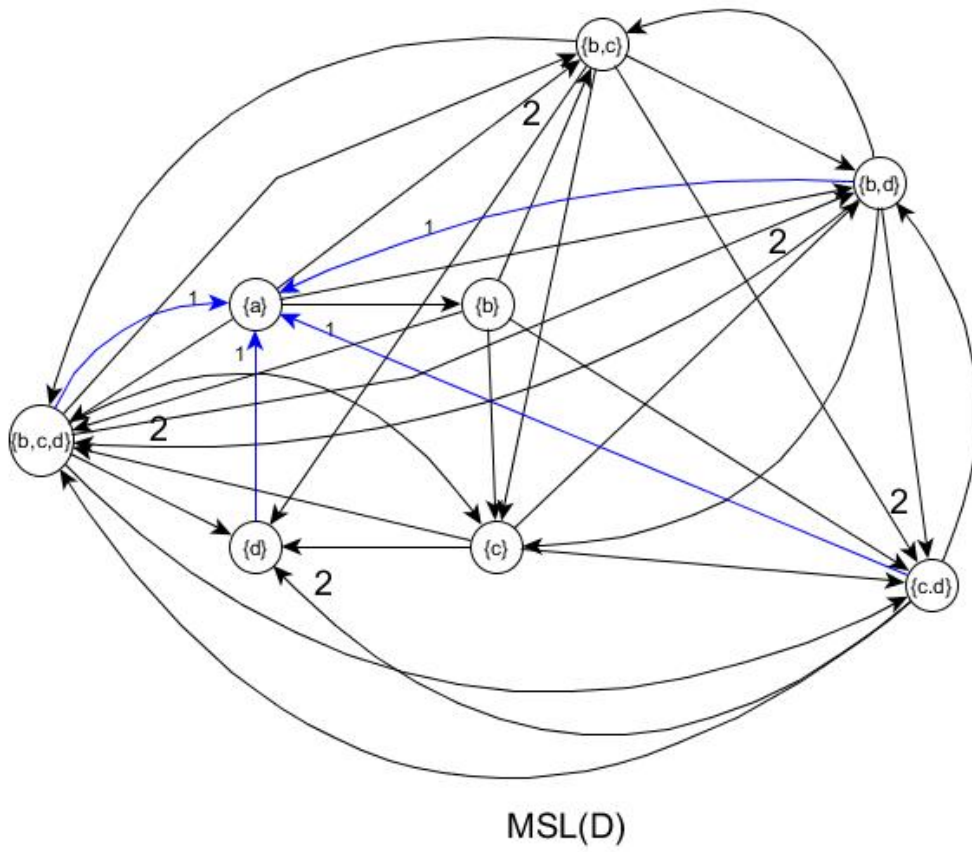


Figura 4-5:  $MSL(D)$ .

**Proposición 4.1.1.** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$  – coloreada,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $MSL(D)$  su super digráfica de líneas coloreada interiormente de subconjuntos monocromáticos con a lo más  $k$  elementos. Si  $L(D)$  es la digráfica de líneas coloreada interiormente de  $D$ , entonces  $L(D)$  es isomorfa a una subdigráfica inducida de  $MSL(D)$ .

*Demostración.* Note que para  $a \in V(L(D))$  de color  $j \in \{1, \dots, m\}$ , se tiene que  $\{a = (u, v)\} \in A_j^1$  y por la definición de  $V(MSL(D))$ ,  $\{a\} \in V(MSL(D))$ .

Por otro lado, sea  $h = (a, b) \in F(L(D))$  con  $\{a, b\} \subseteq V(L(D))$ , por lo anterior tenemos que  $\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq V(MSL(D))$ ; como el vértice final de  $\{a\}$  es igual al vértice inicial de  $\{b\}$ , tenemos que  $(\{a\}, \{b\}) \in F(MSL(D))$ . Consideremos  $D'$  la subdigráfica de  $MSL(D)$  inducida por  $\{\{a\} : a \in F(D)\}$ . Notemos que por lo anterior  $f : V(L(D)) \rightarrow V(D')$  dada por  $f(a) = \{a\}$  es un isomorfismo que preserva adyacencias. Por lo observado anteriormente  $L(D) \cong D'$ .  $\square$

**Lema 4.1.1.** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$  – coloreada,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $\{x_0, x_n\} \subseteq V(D)$ . Si  $T = (x_0, \dots, x_n)$  es una tdm en  $D$  y  $a_0 = (x, x_0) \in F(D)$  cuyo vértice final es  $x_0$ , entonces existe una  $\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}$ -tdm en  $MSL(D)$  con la coloración interior, tal que  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ .

*Demostración.* Por la proposición 4.1.1 tenemos que  $L(D)$  es isomorfa a una subdigráfica inducida de  $MSL(D)$ , por hipótesis, por el lema 3.2.1 y por la definición del isomorfismo entre  $L(D)$  y la subdigráfica inducida de  $MSL(D)$ , existe una  $(\{a_1\}, \dots, \{a_{n-1}\})$  tdm con  $a_i = (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , supongamos que tiene color  $j$ ; esto implica que  $\{\{a_1\}, \dots, \{a_{n-1}\}\} \subseteq A_j^1$ . Por la definición de  $MSL(D)$  para todo  $\{\dots, a_0, \dots\} \in A_i^1$  con  $1 \leq i \leq k$  existe la  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}) \in F(MSLD)$ , ya que  $a_0 = (x, x_0)$  y  $a_1 = (x_0, x_1)$ , es decir, el vértice final de  $a_0$  es igual al vértice final de  $a_1$ . De igual forma, para todo  $\{\dots, a_n, \dots\} \in A_j^1$  con  $1 \leq i \leq k$  existe la  $(\{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\}) \in F(MSLD)$ , ya que  $a_{n-1} = (x_{n-2}, x_{n-1})$  y  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ . Por lo tanto,  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{n-2}\}, \{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\})$  es una trayectoria en  $MSL(D)$ .

Como  $\{a_1\}$  tiene color  $j$ , entonces  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}) \in F(MSL(D))$  también tiene color  $j$ , de la misma manera tenemos por hipótesis que  $\{\dots, a_n, \dots\} \in A_j^1$ , de este modo  $(\{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\}) \in F(MSL(D))$  tiene color  $j$ . Por lo tanto  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}, \dots, \{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\})$  es una  $\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}$  – tdm de color  $j$  en  $MSL(D)$ .  $\square$

**Lema 4.1.2.** Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$  – coloreada sin ciclos monocromáticos,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $\{\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}\} \subseteq V(MSL(D))$ , tal que  $\{\dots, a_0, \dots\} \in A_i^j$  y  $\{\dots, a_n, \dots\} \in A_l^s$  con  $\{i, s\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ ,  $\{j, l\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ . Si existe una  $\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}$  – tdm en  $MSL(D)$ , entonces el vértice final de  $a_0$  es distinto del vértice final de  $a_n$  y existe en  $D$  una tdm entre el vértice final de  $a_0$  y el vértice final de  $a_n$ .

*Demostración.* Sea  $T = (\{\dots, a_0, \dots\}, \{\dots, a_1, \dots\}, \dots, \{\dots, a_{n-1}, \dots\}, \{\dots, a_n, \dots\})$  una tdm en  $MSL(D)$ , donde  $a_i = (x_i, x_{i+1})$  con  $i \in \{0, \dots, n\}$ , es decir,  $a_0 = (x_0, x_1)$ ,  $a_1 = (x_1, x_2)$ , ...,  $a_{n-1} = (x_{n-1}, x_n)$  y  $a_n = (x_n, x_{n+1})$ . Por la definición de  $L(D)$  y de  $MSL(D)$ ,  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  es un camino monocromático en  $L(D)$  y por la proposición 1.2.3 contiene una  $a_0 a_n$  – tdm. Por lo tanto, por la proposición 4.1.1, como  $D$  no tiene ciclos monocromáticos y por el lema 3.2.2,  $x_0 \neq x_{n+1}$  y existe una  $(x_0, \dots, x_{n+1})$  tdm en  $D$ .  $\square$

**Definición 4.1.4.** Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$ -coloreada, denotamos por  $P(V)$  al conjunto potencia de  $V(D)$  y por  $P(V(MSL(D)))$  al conjunto potencia de  $V(MSL(D))$ . Definimos la función  $f : P(V(D)) \rightarrow P(V(MSL(D)))$  de la siguiente manera: Para cada  $Z \subseteq V(D)$ ,  $f(Z) = \{b = \{a_1, \dots, a_r\} \in V(MSL(D)) : \text{para todo } a_i = (v, x_i) \in b, x_i \in Z, i \in \{1, \dots, r\}\}$ , es decir, los conjuntos de flechas monocromáticas que inciden en algún vértice de  $Z$ .

Veamos un ejemplo de la definición. Sean  $D$  tal que,  $V(D) = \{v, w, x, y, z\}$ ,  $F(D) = \{(w, y) = e, (v, y) = a, (x, y) = b, (y, z) = c, (z, w) = d\}$ ,  $k = 2$ , figura 4-6 y  $MSL(D)$  se observa en la figura 4-7.

Tomemos  $Z = \{y, z\}$ , de acuerdo con la definición 4.1.4,  $f(Z) = \{\{a\}, \{e\}, \{a, e\}, \{b\}, \{c\}\}$ , notemos que los elementos de  $f(Z)$  son vértices de  $MSL(D)$ .

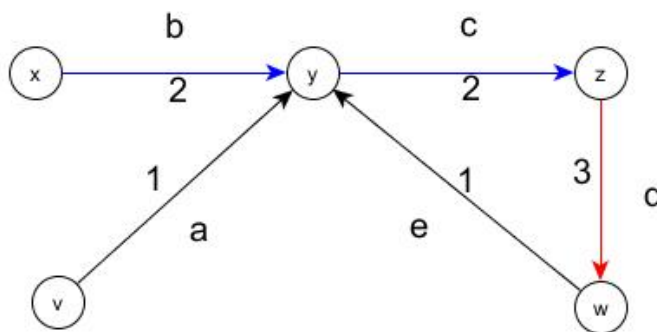


Figura 4-6:  $D$ .

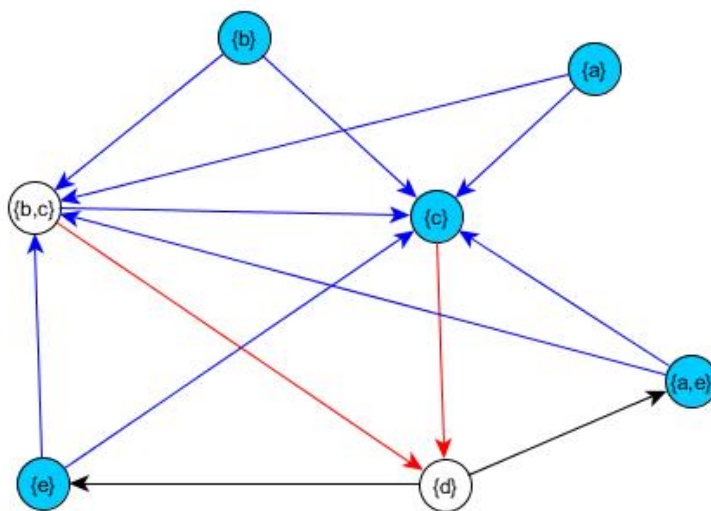


Figura 4-7:  $MSL(D)$ .

**Lema 4.1.3.** *Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica  $m$  – coloreada sin ciclos monocromáticos. Si  $Z \subseteq V(D)$  es independiente por tdm en  $D$  entonces  $f(Z)$  es independiente por tdm en  $MSL(D)$  coloreada interiormente.*

*Demostración.* La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que  $f(Z)$  no es independiente por tdm, sea  $\{\{\dots, a_i = (v, x), \dots\}, \{\dots, b_h = (w, y), \dots\}\} \subseteq f(Z)$ , con  $\{x, y\} \subseteq Z$ , tal que existe una  $\{\dots, a_i, \dots\}\{\dots, b_h, \dots\} - tdm$  en  $MSL(D)$ , por la definición de  $MSL(D)$  y por el lema 4.1.2 existe en  $D$  una tdm entre el vértice final de  $a_i$  y el vértice final de  $b_h$ , es decir, una  $xy - tdm$ , lo cual es una contradicción, ya que  $\{x, y\} \subseteq Z$  y por hipótesis  $Z$  es independiente por tdm en  $D$ .  $\square$

**Teorema 4.1.1.** *Sean  $D$  una digráfica  $m$  – coloreada sin ciclos monocromáticos,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $MSL(D)$  su super digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos con a lo más  $k$  elementos. El número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $MSL(D)$  coloreada interiormente.*

*Demostración.* Denotamos por  $\mathcal{N}$  el conjunto de todos los NTDM de  $D$  y  $\mathcal{N}^*$  el conjunto de todos los NTDM de  $MSL(D)$ .

Demostraremos que  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{N}^*|$ ; primero veremos dos afirmaciones, la primera nos dice que si  $N \in \mathcal{N}$ , entonces  $f(N) \in \mathcal{N}^*$  y que  $f$  restringida a  $\mathcal{N}$  es inyectiva, con ésto concluimos que  $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{N}^*|$ .

En la segunda afirmación se define una nueva función  $g$  inyectiva con la cual dado  $H \subseteq V(MSL(D))$  si  $H \in \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(H) \in \mathcal{N}$  y concluimos que  $|\mathcal{N}| \geq |\mathcal{N}^*|$ .

**Afirmación 1:** Si  $N \in \mathcal{N}$ , entonces  $f(N) \in \mathcal{N}^*$ .

Sea  $N \in \mathcal{N}$ , si aplicamos la función de la definición 4.1.4 a  $N \subseteq V(D)$ , tenemos que por el lema 4.1.3  $f(N)$  es independiente por tdm en  $MSL(D)$ . Falta ver que  $f(N)$  es absorbente por tdm.

Sea  $\{\dots, d_i, \dots\} \in V(MSL(D)) \setminus f(N)$  tal que  $d_i = (u, v) \in F(D)$  y  $v \notin N$ . Como  $N$  es NTDM de  $D$  existe  $z \in N$  tal que  $z$  absorbe a  $v$  vía una tdm, es decir, existe una  $vz - tdm$  en  $D$ , a saber  $T = (v, x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ , tomemos  $(x_{n-1}, z) \in F(T)$ , por la definición de  $MSL(D)$ ,  $\{(x_{n-1}, z)\} \in V(MSL(D))$ , por el lema 4.1.1 para cualquier flecha de  $D$  que tenga a  $v$  como vértice final, en particular  $d_i = (u, v)$  existe una  $\{\dots, d_i, \dots\}\{(x_{n-1}, z)\} - tdm$  en  $MSL(D)$  coloreada interiormente y por la definición 4.1.4  $\{(x_{n-1}, z)\} \in f(N)$ , por lo que  $f(N)$  es absorbente por tdm. Por lo tanto,  $f(N)$  es un NTDM de  $MSL(D)$ .

Afirmamos que la función  $f' : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^*$ , donde  $f'$  es la restricción de la función  $f$  de la definición 4.1.4 a  $\mathcal{N}$  es inyectiva. Sea  $\{N_1, N_2\} \subseteq \mathcal{N}$  tal que  $N_1 \neq N_2$ , supongamos que  $N_1 - N_2 \neq \emptyset$ , tomamos  $v \in V(D)$ , tal que  $v \in N_1 - N_2$ . Como  $N_2$  es absorbente por tdm en  $D$ , entonces existe  $z \in N_2$ , tal que existe una  $vz - tdm$ , denotemos por  $h = (x_{n-1}, x_n = z)$  la última flecha de dicha trayectoria, por definición de  $MSL(D)$  y de  $f$  existe  $\{a_t, \dots, h, \dots, a_s\} \in V(MSL(D))$  tal que  $\{a_t, \dots, h, \dots, a_s\} \in f'(N_2)$ . Notemos que como  $v \in N_1$  y  $N_1$  es independiente por tdm y existe una  $vz - tdm$  en  $D$ , implica que  $z \notin N_1$  y de esta manera  $\{a_t, \dots, h, \dots, a_s\} \notin f'(N_1)$ , por

lo que  $f'(N_1) \neq f'(N_2)$ , por lo tanto  $f'$  es inyectiva.

**Afirmación 2:** Definamos una función  $g : P(V(MSL(D))) \rightarrow P(V(D))$ , tal que dado  $H \subseteq V(MSL(D))$ ,  $g(H) = R(H) \cup J(H)$  donde:

Para  $\{a_1, \dots, a_s\} \in H$  tal que  $\{a_1, \dots, a_s\} \in V(MSL(D))$ , tenemos que:

- $R(H) = \{x_i \in V(D) : \text{para toda } a_i \in \{a_1, \dots, a_s\}, a_i = (u, x_i) \text{ con } 1 \leq i \leq s\}$ , es decir, es el conjunto de los vértices finales de todas las flechas del subconjunto  $\{a_1, \dots, a_s\} \in V(MSL(D))$ , en  $D$ .
- $J(H) = \{v \in V(D) : \delta_D^-(v) = 0 \text{ y no existe una tdm entre } v \text{ y los elementos de } R(H)\}$ .

Hay que demostrar que dado  $H \subseteq V(MSL(D))$ . Si  $H \in \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(H) \in \mathcal{N}$ .

I. Por demostrar que si  $H \in \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(H)$  es independiente por tdm en  $D$ .

Sea  $\{u, v\} \subseteq g(H)$ , hay que ver que no existe una  $uv - tdm$ , ni una  $vu - tdm$  en  $D$ , por la definición de  $g(H)$ , tenemos los siguientes casos:

Caso 1.  $\{u, v\} \subseteq R(H)$ . Procedemos por contradicción. Supongamos que existe  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una tdm en  $D$ , como  $\{u, v\} \subseteq R(H)$ ,  $u$  es vértice final de algún  $a_i$  con  $a_i \in \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_s\}$  tal que  $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_s\} \in H$  y de la misma forma  $v$  es vértice final de algún  $b_i$  tal que  $b_i \in \{b_1, \dots, b_i, \dots, b_t\}$  con  $\{b_1, \dots, b_i, \dots, b_t\} \in H$ , denotaremos los vértices anteriores de la siguiente manera:  $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_s\} = \{\dots, a_i, \dots\}$  y  $\{b_1, \dots, b_i, \dots, b_t\} = \{\dots, b_i, \dots\}$ . Tenemos dos subcasos:

Subcaso 1.1. Si  $b_i = (x_{n-1}, x_n = v) \in F(T)$  por el lema 4.1.1 se tiene que existe una:  $(\{\dots, a_i = (x, x_0 = u), \dots\}, \dots, \{\dots, b_i = (x_{n-1}, x_n = v), \dots\}) - tdm$  en  $MSL(D)$ , es decir, una tdm entre  $\{\dots, a_i, \dots\}$  y  $\{\dots, b_i, \dots\}$  en  $MSL(D)$ , lo cual es una contradicción, ya que  $\{\{\dots, a_i, \dots\}, \{\dots, b_i, \dots\}\} \subseteq H$  y  $H$  es un NTDM de  $MSL(D)$ .

Subcaso 1.2. Si  $b_i \neq (x_{n-1}, x_n = v)$ , entonces  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\} \notin H$  pues si suponemos que  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\} \in H$ , pasa lo mismo que en el subcaso anterior.

Como  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\} \notin H$  y  $H$  es absorbente por tdm, entonces existe  $\{\dots, d_i, \dots\} \in H$  tal que  $\{\dots, d_i, \dots\}$  absorbe a  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\}$  vía una tdm en  $MSL(D)$  coloreada interiormente, de esta manera como en  $\{\dots, b_i, \dots\}$  el vértice final de  $b_i$  es  $v$ , entonces por el lema 4.1.1 existe una  $\{\dots, b_i, \dots\}\{\dots, d_i, \dots\} - tdm$  en  $MSL(D)$  coloreada interiormente y esto es una contradicción pues  $\{\{\dots, b_i, \dots\}, \{\dots, d_i, \dots\}\} \subseteq H$  y  $H$  es un NTDM.

Caso 2.  $u \in J(H)$  y  $v \in R(H)$ . Por la definición de  $g(H)$  sabemos que no existen tdm entre los elementos de  $J(H)$  y los elementos de  $R(H)$ , en particular no existe una  $uv - tdm$  en  $D$ .

Caso 3.  $u \in R(H)$  y  $v \in J(H)$ . Como  $v \in J(H)$  por la definición de  $J(H)$  tenemos que  $\delta_D^-(v) = 0$ , entonces no hay ninguna trayectoria que llegue a  $v$ , en particular no existe una  $uv - tdm$  en  $D$ .

Caso 4.  $u \in J(H)$  y  $v \in J(H)$ . Por un argumento análogo al del caso anterior, como  $v \in J(H)$  por la definición de  $J(H)$  tenemos que  $\delta_D^-(v) = 0$ , entonces no hay ninguna trayectoria que llegue a  $v$ , en particular no existe una  $uv - tdm$  en  $D$ .



Por lo tanto por los casos anteriores  $g(H)$  es independiente por tdm, ya que para cualquier  $\{u, v\} \subseteq g(H)$  no existen tdm entre ellos.

II. Se demostrará que  $g(H)$  es absorbente por tdm. Sea  $u \in V(D) \setminus g(H)$ , es decir,  $u \notin R(H) \cup J(H)$ , así por la definición de  $R(H) \cup J(H)$ ,  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b_i$  con  $b_i \in \{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\}$  y se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\delta_D^-(u) > 0$ .
- Existe una tdm del vértice  $u$  a algún elemento de  $R(H)$ . Analicemos dos casos.

Caso 1.  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b_i$ , tal que  $b_i \in \{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\}$ , con  $\{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\} \in H$  y  $\delta_D^-(u) > 0$ .

Por hipótesis del caso sabemos que existe  $d_i \in F(D)$  tal que  $u$  es vértice final de  $d_i = (t, u)$ , también tenemos que  $\{\dots, d_i, \dots\} \in V(MSL(D)) \setminus H$ , como  $H \in \mathcal{N}^*$  y por el lema 4.1.1  $L(D)$  es isomorfa a una subdigráfica inducida de  $MSL(D)$ , entonces existe  $\{c_i\} \in H$  con  $\{c_i\} = (y, z)$  tal que hay una  $\{\dots, d_i, \dots\}\{c_i\} - tdm$  en  $MSL(D)$  coloreada interiormente y por el lema 4.1.2 existe una tdm entre el vértice final de  $d_i$  y el vértice final de  $c_i$ , es decir, una  $uz - tdm$  en  $D$  con  $u \neq z$ , además como  $\{c_i = (y, z)\} \in H$ , entonces  $z \in g(H)$ . Por lo tanto existe una  $uz - tdm$  con  $z \in g(H)$ .

Caso 2.  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b_i$ , tal que  $b_i \in \{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\}$ , con  $\{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\} \in H$  y existe una tdm del vértice  $u$  a algún elemento de  $R(H)$ .

Por hipótesis del caso tenemos que existe una tdm del vértice  $u$  a algún elemento de  $R(H)$ , es decir, existe una  $ug(H) - tdm$  en  $D$ .

Por los casos anteriores  $g(H)$  es absorbente por tdm. Por lo tanto  $g(H)$  es un NTDM de  $D$ .

Afirmamos que la función  $g' : \mathcal{N}^* \rightarrow \mathcal{N}$ , donde  $g'$  es la restricción de  $g$  en  $\mathcal{N}^* \subseteq V(MSL(D))$  es inyectiva. Sea  $\{N_1, N_2\} \subseteq \mathcal{N}^*$  tal que  $N_1 \neq N_2$ , supongamos que  $N_1 \setminus N_2 \neq \emptyset$ . Tomemos  $\{\dots, h_i, \dots\} \in V(MSL(D))$  tal que  $\{\dots, h_i, \dots\} \in N_1 \setminus N_2$  con  $h_i \in F(D)$  y  $u$  el vértice final de  $h_i$ , entonces por definición de  $g$ ,  $u \in g'(N_1)$ . Vamos a demostrar que  $u \notin g'(N_2)$ , como  $N_2$  es un NTDM de  $MSL(D)$ , en particular es absorbente por tdm y además  $\{\dots, h_i, \dots\} \notin N_2$ , entonces existe  $\{\dots, k_i, \dots\} \in N_2$  tal que  $\{\dots, k_i, \dots\}$  absorbe a  $\{\dots, h_i, \dots\}$  vía una tdm, es decir, existe una  $\{\dots, h_i, \dots\}\{\dots, k_i, \dots\} - tdm$  en  $MSL(D)$  coloreada interiormente.

Sea  $z$  el vértice final de  $k_i \in F(D)$ , así  $z \in g'(N_2)$  y por el lema 4.1.2 existe una tdm entre el vértice final de  $\{\dots, h_i, \dots\}$  y el vértice final de  $\{\dots, k_i, \dots\}$ , es decir, una  $uz - tdm$  en  $D$  con  $u \neq z$  pues  $D$  no tiene ciclos monocromáticos, como  $g'(N_2)$  es independiente por tdm, tenemos que  $u \notin g'(N_2)$ ,  $u \in g'(N_1) - g'(N_2)$  y  $g'(N_1) \neq g'(N_2)$ , luego  $g'$  es inyectiva. Por lo tanto como  $f'$  y  $g'$  son inyectivas, entonces  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{N}^*|$ .

□

Así como definimos la coloración interior de  $MSL(D)$ , también podemos definir **la coloración exterior** de  $MSL(D)$  que es la coloración por flechas definida como sigue: sea  $h \in F(D)$  con color  $c$ , entonces toda flecha de  $MSL(D)$  de la forma  $(\{a_r, \dots, h, \dots, a_r\}, \{a_1, \dots, a_s\})$  tiene color  $c$ .

Dada la definición de coloración exterior surge la pregunta, ¿qué pasa si en las hipótesis del teorema 4.1.1 consideramos a  $MSL(D)$  coloreada exteriormente?. El enunciado no siempre se cumple, ya que existen digráficas sin ciclos monocromáticos con NTDM para las cuales al construir  $MSL(D)$  coloreada exteriormente, la digráfica no posee un NTDM.

Presentaremos un ejemplo de una digráfica que le sucede lo dicho anteriormente. Sea  $D$  una digráfica 3 – coloreada tal que  $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{(u, v) = a, (v, w) = b, (w, x) = c, (y, x) = d, (z, y) = e, (v, z) = f, (z, u) = g\}$ , la coloración de la digráfica la podemos ver en la figura 4-8. Ahora, sea  $k = 2$ , definimos  $MSL(D)$  con la coloración exterior:

$V(MSL(D)) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\},$   
 $F(MSL(D)) = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{f\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{a\}, \{b, d\}), (\{a\}, \{b, e\}), (\{b\}, \{c\}),$   
 $(\{b\}, \{b, c\}), (\{b\}, \{c, e\}), (\{b\}, \{c, d\}), (\{e\}, \{d\}), (\{e\}, \{b, d\}), (\{e\}, \{c, d\}), (\{e\}, \{d, e\}),$   
 $(\{f\}, \{e\}), (\{f\}, \{g\}), (\{f\}, \{b, e\}), (\{f\}, \{c, e\}), (\{f\}, \{d, e\}), (\{g\}, \{a\}), (\{b, c\}, \{c\}),$   
 $(\{b, c\}, \{c, e\}), (\{b, c\}, \{c, d\}), (\{b, d\}, \{c\}), (\{b, d\}, \{c, e\}), (\{b, d\}, \{c, d\}), (\{b, d\}, \{b, c\}),$   
 $(\{b, e\}, \{c\}), (\{b, e\}, \{d\}), (\{b, e\}, \{b, c\}), (\{b, e\}, \{c, d\}), (\{b, e\}, \{c, e\}), (\{b, e\}, \{b, d\}),$   
 $(\{b, e\}, \{d, e\}), (\{c, e\}, \{d\}), (\{c, e\}, \{b, d\}), (\{c, e\}, \{c, d\}), (\{c, e\}, \{d, e\}), (\{d, e\}, \{d\}),$   
 $(\{d, e\}, \{c, d\}), (\{d, e\}, \{b, d\})\}$ . La figura 4-9 observamos a  $MSL(D)$ .

Afirmamos que  $N = \{u, x\}$  es un NTDM de  $D$ , notemos que de los vértices  $v, w, y$  y  $z$  existe una tdm de color 4 hacia  $x \in N$ , por lo que  $N$  es absorbente por tdm. Dado que  $\delta^+(x) = 0$  tenemos que no existen trayectorias que tengan como vértice inicial a  $x$ , de esta manera no existe una tdm de  $x$  a  $u$ . Tampoco existe una  $ux$  – tdm, ya que  $\delta^+(u) = 1$ ,  $(u, v) \in F(D)$  tiene color 1 y todas las flechas que tienen como vértice final  $x$  son de color 4, por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $D$ .

Ahora veamos que  $MSL(D)$  no tiene NTDM. Supongamos que si, sea  $N^* \subseteq V(MSL(D))$  tal que  $N^*$  es un NTDM de  $MSL(D)$ .

Notemos que  $\delta^+(\{c\}) = \delta^+(\{d\}) = \delta^+(\{c, d\}) = 0$  con  $\{\{c\}, \{d\}, \{c, d\}\} \subseteq V(MSL(D))$ , por lo que no existen trayectorias que tengan como vértice inicial alguno de los vértices que mencionamos, por lo que  $\{\{c\}, \{d\}, \{c, d\}\} \subseteq N^*$ , por definición de  $MSL(D)$  tenemos que  $\{(\{b\}, \{c\}), (\{e\}, \{d\}), (\{b, c\}, \{c\}), (\{b, d\}, \{c\}), (\{b, e\}, \{c\}), (\{c, e\}, \{d\}), (\{d, e\}, \{d\})\} \subseteq F(MSL(D))$ , entonces  $\{\{b\}, \{e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\} \in V(MSL(D))$  están absorbidos por  $N^*$ , sin embargo faltan arreglar los vértices  $\{\{a\}, \{f\}, \{g\}\}$ . Notemos que los vértices  $\{\{a\}, \{f\}, \{g\}\}$  inducen una subdigráfica completa, por lo que  $\{\{a\}, \{f\}, \{g\}\} \cap N^* = 1$ , pero los vértices  $\{\{a\}, \{f\}, \{g\}\}$  nos inducen un triángulo dirigido heterocromático, por lo tanto  $MSL(D)$  no tiene NTDM.

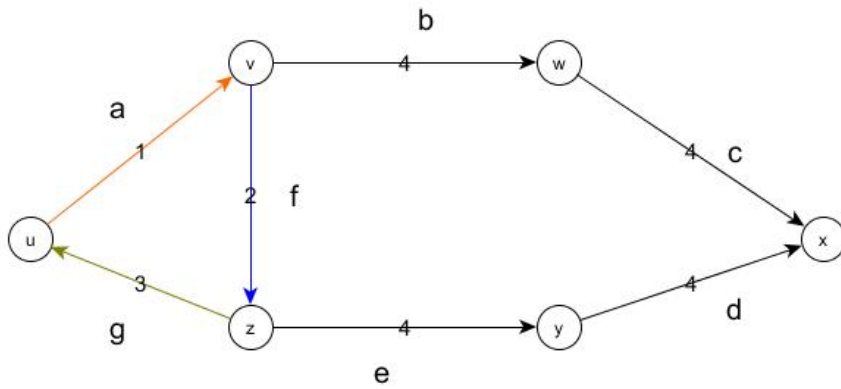


Figura 4-8:  $D$ , 4 – coloreada.

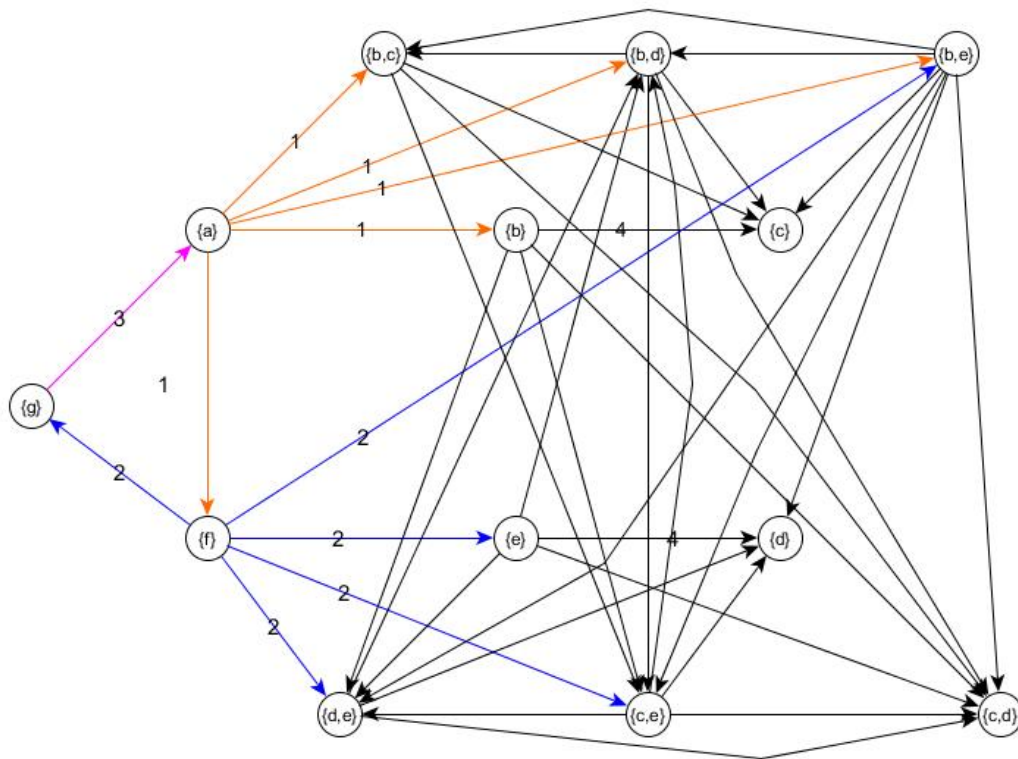


Figura 4-9:  $MSL(D)$ , coloreada exteriormente.

En el teorema 4.1.1 la hipótesis de que  $D$  no contiene ciclos monocromáticos es necesaria, ya que encontramos una digráfica  $D$  la cual tiene un único NTDM y el número de NTDM de  $MSL(D)$  es mayor.

Sea  $D$  una digráfica 3 – coloreada con colores 1, 2 y 3 tal que,  $V(D) = \{v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{(v, w) = a, (w, x) = b, (y, w) = c, (x, y) = d, (y, z) = e, (z, y) = f\}$ . Donde  $a$  y  $b$  tienen color 2,

$c, e$  y  $f$  color 1 y  $d$  color 3.

Sea  $k = 3$ ,  $MSL(D)$  es:

$$V(MSL(D)) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{e, f\}, \{c, e, f\}\}.$$

$$F(MSL(D)) = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{d\}), (\{d\}, \{c\}), (\{d\}, \{e\}), (\{d\}, \{c, e\}), (\{d\}, \{c, f\}), (\{d\}, \{e, f\}), (\{d\}, \{c, e, f\}), (\{e\}, \{f\}), (\{e\}, \{c, f\}), (\{e\}, \{e, f\}), (\{e\}, \{c, e, f\}), (\{f\}, \{c\}), (\{f\}, \{e\}), (\{f\}, \{c, e\}), (\{f\}, \{c, f\}), (\{f\}, \{e, f\}), (\{f\}, \{c, e, f\}), (\{c, e\}, \{b\}), (\{c, e\}, \{f\}), (\{c, e\}, \{a, b\}), (\{c, e\}, \{c, f\}), (\{c, e\}, \{e, f\}), (\{c, e\}, \{c, e, f\}), (\{c, f\}, \{b\}), (\{c, f\}, \{c\}), (\{c, f\}, \{e\}), (\{c, f\}, \{a, b\}), (\{c, f\}, \{c, e\}), (\{c, f\}, \{e, f\}), (\{c, f\}, \{c, e, f\}), (\{e, f\}, \{c\}), (\{e, f\}, \{e\}), (\{e, f\}, \{f\}), (\{e, f\}, \{c, e\}), (\{e, f\}, \{c, f\}), (\{e, f\}, \{c, e, f\}), (\{c, e, f\}, \{b\}), (\{c, e, f\}, \{a, b\}), (\{c, e, f\}, \{c\}), (\{c, e, f\}, \{e\}), (\{c, e, f\}, \{f\}), (\{c, e, f\}, \{c, e\}), (\{c, e, f\}, \{c, f\}), (\{c, e, f\}, \{e, f\})\}.$$

Debido a la coloración interior, podemos afirmar que los colores de las flechas que llegan a los vértices  $\{b\}$  y  $\{a, b\}$  tienen color 2, a  $\{d\}$  son color 3 y a los demás vértices son color 1. Figuras 4-10 y 4-11.

Notemos que la digráfica  $D$  tiene un único NTDM,  $N = \{x, z\}$ , es independiente ya que no existen tdm entre sus elementos, además es absorbente ya que el vértice  $x$  absorbe vía una trayectoria de color 2 a  $\{v, w\}$  y  $z$  absorbe a  $y$  ya que  $(y, z) \in F(D)$ .

Ahora veamos que  $N$  es único, supongamos que hay otro NTDM distinto de  $N$  y lo denotaremos por  $N'$ , si  $z \in N'$  y  $x \notin N'$  nos quiere decir que  $y \in N'$ , ya que es el único vértice que absorbe a  $x$  vía una tdm, pero  $(x, y) \in F(D)$ .

Si  $x \in N'$  y  $z \notin N'$ , entonces  $y \notin N'$  y  $w \notin N'$  pues  $\{(x, y), (w, x)\} \subseteq F(D)$ , entonces el vértice  $z$  no es absorbido por ningún vértice.

Si  $x \notin N'$  y  $z \notin N'$ , entonces  $y$  es el único vértice que absorbe a  $x$ , entonces  $y \in N'$ , faltan arreglar a los vértices  $\{v, w\}$ , pero  $w \notin N'$  pues  $(y, w) \in F(D)$ , de esta manera  $w$  no es absorbido por  $N'$  ya que el único vértice que lo absorbe vía una tdm es  $x$  y  $x \notin N'$ .

Por lo dicho anteriormente,  $N$  es el único NTDM de  $D$ .

Sin embargo  $MSL(D)$  tiene más de un NTDM:  $N_1 = \{\{b\}, \{e\}\}$ , es independiente por tdm pues no existen tdm entre estos vértices y también es absorbente por tdm ya que  $\{(\{a\}, \{b\}), (\{c\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{b\}), (\{c, e\}, \{b\}), (\{c, f\}, \{b\}), (\{c, e, f\}, \{b\})\} \subseteq F(MSL(D))$  y  $\{(\{f\}, \{e\}), (\{d\}, \{e\}), (\{e, f\}, \{e\})\} \subseteq F(MSL(D))$ ,  $N_2 = \{\{b\}, \{f\}\}$ , es independiente por tdm, ya que no existen tdm entre los vértices de  $N_2$  y es absorbente por tdm, pues como también el vértice  $\{b\} \in N_2$  tenemos las mismas adyacencias que ya mencionamos anteriormente. Falta absorber por tdm al conjunto de vértices  $\{\{e\}, \{d\}, \{e, f\}\}$  pero tenemos que  $\{(\{e\}, \{f\}), (\{e, f\}, \{f\})\} \subseteq F(MSL(D))$ , la trayectoria monocromática  $T = (\{d\}, \{e\}, \{f\})$  en  $MSL(D)$  y  $N_3 = \{\{b\}, \{e, f\}\}$ , observemos que es independiente por tdm, por un argumento análogo a los anteriores, sólo falta ver que  $\{\{d\}, \{e\}, \{f\}\}$  son absorbidos por  $N_3$ , notemos que  $\{(\{e\}, \{e, f\}), (\{f\}, \{e, f\})\} \subseteq F(MSL(D))$  y  $T' = (\{d\}, \{e\}, \{e, f\})$  monocromática en  $MSL(D)$ , de esta manera  $N_1, N_2, N_3$  son NTDM de  $MSL(D)$ , por lo tanto el número de NTDM de  $D$  es menor al número de NTDM de  $MSL(D)$ .

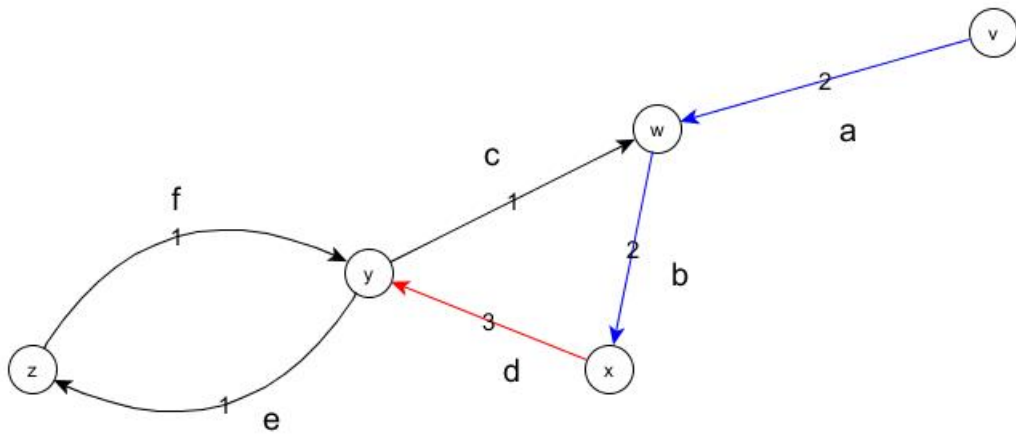


Figura 4-10:  $D$  con un ciclo monocromático.

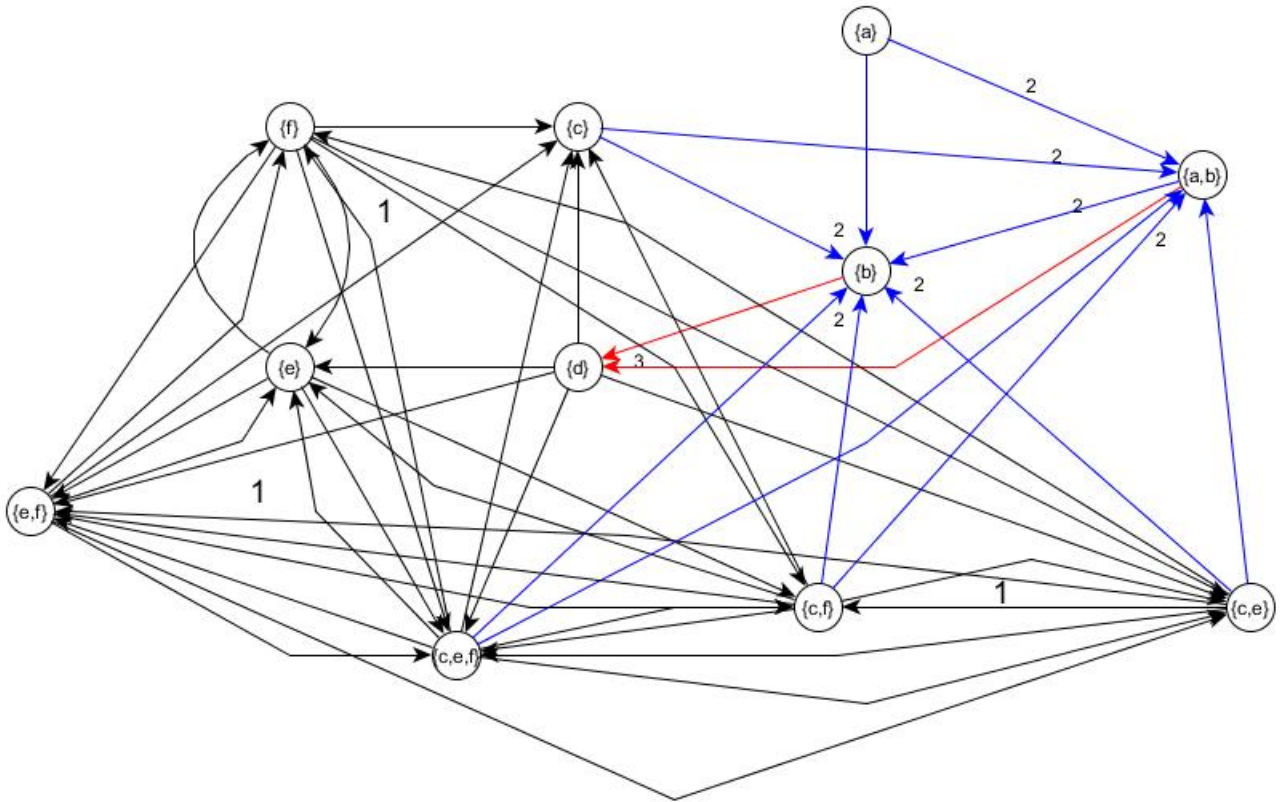


Figura 4-11:  $MSL(D)$ .

# Capítulo 5

## *H* – núcleos por *H* – trayectorias.

En este capítulo trabajaremos con el concepto de *H* – núcleo por *H*-trayectorias, el cual es introducido por Delgado Escalante y Galeana Sánchez en el artículo “*Restricted domination in arc-colored digraphs*” [3]. Recopilaremos algunos de los resultados obtenidos por Pietra Delgado Escalante, Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez en el artículo “*Independent restricted domination and the line digraph*” [4], los cuales nos servirán para demostrar que: *El número de H – núcleos por H-trayectorias de una digráfica D m – coloreada es igual al número de H – núcleos por H-trayectorias de su super digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos MSL(D) coloreada interiormente.* Cabe mencionar que a lo largo de este capítulo si permitiremos que algunas digráficas tengan lazos.

### 5.1. Definiciones.

En esta sección presentamos las definiciones necesarias para los resultados de este capítulo.

**Definición 5.1.1.** Sean *H* una digráfica posiblemente con lazos y *D* otra digráfica, diremos que *D* está *H* – coloreada si los elementos de  $F(D)$  están coloreados con las etiquetas de los vértices de *H*.

Consideremos *D* una digráfica coloreada por flechas, para toda  $(u, v) \in F(D)$  denotaremos por  $c(u, v)$  el color que tiene la flecha  $(u, v)$  en *D*.

Dada una trayectoria  $T = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$  en *D*, *T* es una  $v_0v_n$  – ***H*-trayectoria** si  $(c(v_{i-1}, v_i), c(v_i, v_{i+1})) \in F(H)$  para toda  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Es decir,  $(c(v_0, v_1), c(v_1, v_2), c(v_2, v_3), \dots, c(v_{n-1}, v_n))$  es un camino en *H*.

Un camino *W* en *D* es llamado un **camino del tipo A** si con a lo más una excepción toda trayectoria de longitud dos en *W* es una *H*-trayectoria en *D*.

La demostración del siguiente lema la usaremos para resultados posteriores.

**Lema 5.1.1.** Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos y  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada. Todo  $H$ -camino cerrado en  $D$ , contiene un camino cerrado del tipo A.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$  un  $H$ -camino cerrado.

**Caso 1:**  $\mathcal{C}$  repite sólo el primero y el último vértice. Por la definición de camino de tipo A,  $\mathcal{C}$  es un camino cerrado del tipo A.

**Caso 2:**  $\mathcal{C}$  repite dos o más vértices. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $x_i = x_j$  con  $i \neq j$ ,  $i \leq j$ ,  $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , por lo que a  $\mathcal{C}$  lo podemos expresar de la siguiente forma,  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$ . Consideremos  $\mathcal{C}' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i)$ , como  $\mathcal{C}$  está  $H$ -coloreado, tenemos que  $(c(x_t, x_{t+1}), c(x_{t+1}, x_{t+2})) \in F(H)$  con  $t \in \{i, i+1, \dots, j-3, j-2\}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{C}'$  es un camino cerrado del tipo A.  $\square$

Con las siguientes digráficas ejemplificamos las definiciones antes mencionadas.

Sean  $H$  una digráfica con lazos donde:  $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $F(H) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 7)\}$ , figura 5-1,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada con  $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{(u, v), (v, w), (w, z), (x, v), (x, y), (y, v), (z, y)\}$ .

Donde las flechas de  $D$  están coloreadas con las etiquetas de los vértices de  $H$  de la siguiente manera:  $(u, v)$  tiene color 1,  $(v, w)$  color 2,  $(w, z)$  color 3,  $(x, v)$  color 7,  $(x, y)$  color 6 y  $(y, v)$  y  $(z, y)$  color 4.

La trayectoria  $T = (u, v, w, z, y)$  en  $D$  es una  $H$ -trayectoria, ya que si analizamos la sucesión de colores (1, 2, 3, 4) de las flechas de dicha trayectoria, tenemos que  $(1, 2) \in F(H)$ ,  $(2, 3) \in F(H)$  y  $(3, 4) \in F(H)$ .

Por último el camino  $\mathcal{C} = (v, w, z, y, v)$  es un camino cerrado del tipo A ya que  $(v, w, z)$ ,  $(w, z, y)$  y  $((z, y, v))$  son  $H$ -trayectorias de longitud 2 con excepción de la trayectoria  $(y, v, w)$ , ya que no existe  $(4, 2) \in F(H)$ . Figura 5-2.

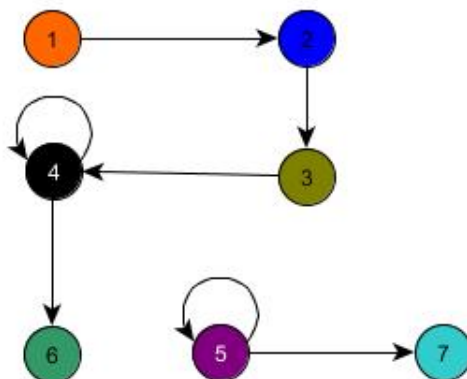
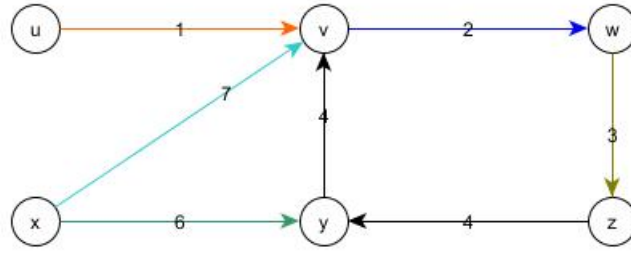


Figura 5-1:  $H$ .



**Figura 5-2:**  $D$   $H$  – coloreada.

**Definición 5.1.2.** Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos y  $D$  una digráfica  $H$ –coloreada. Diremos que un conjunto  $N \subseteq V(D)$  es un  $H$  – núcleo por  $H$ -trayectorias si cumple con lo siguiente:

- Para todo  $\{u, v\} \subseteq N$  no existe una  $uv$  –  $H$ -trayectoria, es decir,  $N$  es independiente por  $H$ -trayectorias.
- Para todo  $x \in V(D) \setminus N$  existe  $v \in N$  tal que  $v$  absorbe vía una  $H$ -trayectoria a  $x$ , es decir,  $N$  es absorbente por  $H$ -trayectorias.

Notemos que si en una digráfica  $H$  el conjunto  $F(H)$  consiste únicamente de los lazos de cada vértice, las  $H$ -trayectorias en  $D$  son trayectorias dirigidas monocromáticas, por lo que la definición de  $H$  – núcleo por  $H$ -trayectorias es una generalización de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

## 5.2. Digráfica $L(D)$ .

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos por Pietra Delgado Escalante, Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez en el artículo “*Independent restricted domination and the line digraph*” [4]. En este capítulo un objeto coloreado interiormente, se refiere a la coloración de la definición 3.1.2.

Los siguientes lemas nos muestran como se relacionan las  $H$ -trayectorias de  $D$  y de  $L(D)$  coloreada interiormente, en esta sección  $L(D)$  siempre tendrá dicha coloración.

**Lema 5.2.1.** Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada y  $\{x_0, x_n\} \subseteq V(D)$ . Si  $T = (x_0, \dots, x_n)$  es una  $x_0x_n$  –  $H$ -trayectoria en  $D$  y  $a_0 = (x, x_0) \in F(D)$  tal que el vértice final de  $a_0$  es  $x_0$ , entonces existe una  $a_0a_n$  –  $H$ -trayectoria en  $L(D)$ , donde  $a_n = (x_{n-1}, x_n) \in F(D)$ .

*Demostración.* Sea  $T = (x_0, \dots, x_n)$  una  $x_0x_n$  –  $H$ -trayectoria en  $D$ , denotemos por  $a_i = (x_{i-1}, x_i)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , es decir,  $a_1 = (x_0, x_1), a_2 = (x_1, x_2), \dots$ , y  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ . Por la definición de  $L(D)$ ,  $(a_1, \dots, a_n)$  es una trayectoria en  $L(D)$  y por la elección de  $a_0 = (x, x_0)$  tenemos que  $(a_0, a_1) \in F(L(D))$ , ya que el vértice final de  $a_0$  es igual al vértice inicial de  $a_1$ .



Por lo tanto,  $T' = (a_0, \dots, a_n)$  es una trayectoria en  $L(D)$ .

Ahora por la definición de coloración interior, para toda  $1 \leq i \leq n$ , tenemos que la flecha  $(a_{i-1}, a_i)$  tiene el color de  $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ , como  $T$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ , entonces  $(c(x_{i-1}, x_i), c(x_i, x_{i+1})) \in F(H)$ , por lo tanto  $T' = (a_0 = (x, x_0), a_1 = (x_0, x_1), \dots, a_n = (x_{n-1}, x_n))$  es una  $H$ -trayectoria en  $L(D)$ .  $\square$

**Lema 5.2.2.** *Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada sin caminos cerrados del tipo A y  $\{a_0, a_n\} \subseteq V(L(D))$ . Si existe una  $a_0 a_n$  –  $H$ -trayectoria en  $L(D)$ , entonces el vértice final de  $a_0$  es distinto al vértice final de  $a_n$  y en  $D$  existe una  $H$ -trayectoria del vértice final de  $a_0$  al vértice final de  $a_n$ .*

*Demostración.* Sean  $T = (a_0, \dots, a_n)$  una  $H$  – trayectoria en  $L(D)$  y  $a_i = (x_i, x_{i+1})$  para  $0 \leq i \leq n$ , tenemos que por la definición de  $L(D)$ ,  $a_0 = (x_0, x_1), a_1 = (x_1, x_2), \dots, a_{n-1} = (x_{n-1}, x_n)$  y  $a_n = (x_n, x_{n+1})$ , por lo que  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  es un camino en  $D$ . Por otro lado para toda  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $(c(a_{i-1}, a_i), c(a_i, a_{i+1})) \in F(H)$ , ya que  $T$  es una  $H$ -trayectoria en  $L(D)$  y por la definición de coloración interior  $c(a_{i-1}, a_i) = c(a_i)$  y  $c(a_i, a_{i+1}) = c(a_{i+1})$ , por lo que  $(c(a_i), c(a_{i+1})) = (c(x_i, x_{i+1}), c(x_{i+1}, x_{i+2})) \in F(H)$ , por lo tanto  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  es un  $H$ -camino en  $D$ .

Por el lema 5.1.1 sabemos que cualquier  $H$ -camino cerrado contiene un camino cerrado del tipo A y por hipótesis del lema  $D$  no contiene caminos cerrados del tipo A, por lo que para todo  $\{x_i, x_j\} \subseteq V(D)$   $x_i \neq x_j$  con  $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n + 1\}$ , en particular para  $x_0 \neq x_{n+1}$ , es decir,  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ .  $\square$

Recordemos la función de la definición 3.2.1 del cuarto capítulo. Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica.  $f : P(V(D)) \rightarrow P(F(D))$  una función definida como sigue:

$$\text{Para cada } Z \subseteq V(D) \quad f(Z) = \{(u, x) \in F(D) : x \in Z\}.$$

Notemos que  $f(Z)$  está contenido en  $V(L(D))$ .

**Lema 5.2.3.** *Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos y  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada sin caminos cerrados del tipo A. Si  $Z \subseteq V(D)$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ , entonces  $f(Z) \subseteq V(L(D))$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $L(D)$ .*

*Demostración.* La demostración se hará por contradicción. Sea  $Z \subseteq V(D)$ , tal que  $Z$  es independiente por  $H$ -trayectorias. Supongamos que  $f(Z)$  no es independiente por  $H$  – trayectorias en  $L(D)$ , ésto quiere decir que existe  $\{h, k\} \subseteq f(Z)$  tal que  $(h, \dots, k)$  es una  $hk$  –  $H$ -trayectoria en  $L(D)$  coloreada interiormente. Por el lema 5.2.2 el vértice final de  $h$  es distinto al vértice final de  $k$  y además existe una  $H$  – trayectoria entre estos vértices. Como  $\{h, k\} \subseteq f(Z)$ , se tiene que el vértice final de  $h$  y el vértice final de  $k$  son elementos de  $Z$ , sin embargo ésto es una contradicción ya que encontramos una  $H$  – trayectoria entre dos vértices de  $Z$  y por hipótesis  $Z$  es independiente por  $H$  – trayectorias. Por lo tanto  $f(Z)$  es independiente por  $H$  – trayectorias en  $L(D)$ .  $\square$

### 5.3. Digráfica $MSL(D)$ .

En esta sección vamos a generalizar los resultados del capítulo 4, utilizando el concepto de  $H$  – núcleo por  $H$ -trayectorias.

Los siguientes lemas nos muestran como se relacionan las  $H$ -trayectorias de  $D$  y de  $MSL(D)$  coloreada interiormente, cabe mencionar que a lo largo de este capítulo  $MSL(D)$  tendrá dicha coloración.

**Lema 5.3.1.** *Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $\{x_0, x_n\} \subseteq V(D)$ . Si  $T = (x_0, \dots, x_n)$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$  y  $a_0 = (x, x_0) \in F(D)$  cuyo vértice final es  $x_0$ , entonces existe una  $\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}$  –  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$ , tal que  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ .*

*Demostración.* Por la proposición 4.1.1,  $L(D)$  es isomorfa a una subdigráfica inducida de  $MSL(D)$ , sea  $a_i = (x_{i-1}, x_i)$  con  $1 \leq i \leq n$ , por hipótesis, por el lema 5.2.1 y por la definición del isomorfismo entre  $L(D)$  y la subdigráfica inducida de  $MSL(D)$ , existe una  $(\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{n-2}\}, \{a_{n-1}\})$  –  $H$ -trayectoria, por la definición de  $MSL(D)$  sabemos que para todo  $\{\dots, a_0, \dots\} \in A_t^l$  con  $1 \leq l \leq k$  existe  $(\{\dots, a_0, \dots\}\{a_1\}) \in F(MSL(D))$  pues el vértice final de  $a_0$  es igual al vértice inicial de  $a_1$ , de igual forma, para todo  $\{\dots, a_n, \dots\} \in A_s^s$  con  $1 \leq s \leq k$  existe  $(\{a_{n-1}\}\{\dots, a_n, \dots\}) \in F(MSL(D))$ , ya que  $a_{n-1} = (x_{n-2}, x_{n-1})$  y  $a_n = (x_{n-1}, x_n)$ , por lo tanto  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{n-2}\}, \{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\})$  es una trayectoria en  $MSL(D)$ .

Por la definición de coloración interior tenemos que para toda  $1 \leq i \leq n$   $(\{\dots, a_{i-1}, \dots\}, \{\dots, a_i, \dots\}) \in F(MSL(D))$  tiene el color de  $\{\dots, a_i, \dots\} = \{\dots, (x_{i-1}, x_i), \dots\}$  en particular  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}) \in F(MSL(D))$  tiene el color de  $\{a_1\}$ , por lo que  $(c(\{\dots, a_0, \dots\}) = \{\dots, (x, x_0), \dots\}, c(\{a_1\} = \{(x_0, x_1)\}) \in F(H)$ , de igual manera  $(\{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\}) \in F(MSL(D))$  tiene el color de  $\{\dots, a_n, \dots\}$ , tenemos que  $(c(\{a_{n-1}\} = \{(x_{n-2}, x_{n-1})\}), c(\{\dots, a_n, \dots\} = \{\dots, (x_{n-1}, x_n), \dots\}) \in F(H)$  y como por hipótesis  $T$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ , tenemos que  $(\{\dots, a_0, \dots\}, \{a_1\}, \dots, \{a_{n-1}\}, \{\dots, a_n, \dots\})$  es una  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$ .  $\square$

**Lema 5.3.2.** *Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada sin caminos cerrados del tipo  $A$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $\{\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}\} \subseteq V(MSL(D))$ , tal que  $\{\dots, a_0, \dots\} \in A_j^i$  y  $\{\dots, a_n, \dots\} \in A_l^s$  con  $\{i, s\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ . Si existe una  $\{\dots, a_0, \dots\}\{\dots, a_n, \dots\}$  –  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$ , entonces el vértice final de  $a_0$  es distinto del vértice final de  $a_n$  y existe en  $D$  una  $H$ -trayectoria entre el vértice final de  $a_0$  y el vértice final de  $a_n$ .*

*Demostración.* Sean  $T = (\{\dots, a_0, \dots\}, \{\dots, a_1, \dots\}, \{\dots, a_2, \dots\}, \dots, \{\dots, a_{n-1}, \dots\}, \{\dots, a_n, \dots\})$  una  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$  y  $a_i = (x_{i-1}, x_i)$  para  $1 \leq i \leq n$ , por la definición de  $MSL(D)$ ,  $a_0 = (x_0, x_1)$ ,  $a_1 = (x_1, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1} = (x_{n-1}, x_n)$  y  $a_n = (x_n, x_{n+1})$ , por lo que podemos reescribir a  $T$  como:  $T = (\{\dots, (x_0, x_1), \dots\}, \{\dots, (x_1, x_2), \dots\}, \dots, \{\dots, (x_{n-1}, x_n), \dots\}, \{\dots, (x_n, x_{n+1}), \dots\})$ , por la definición de  $L(D)$  y de  $MSL(D)$ ,  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  es un camino en  $D$ . Por otro lado para toda  $1 \leq i \leq n$ ,  $(c(\{\dots, a_{i-1}, \dots\}, \{\dots, a_i, \dots\}), c(\{\dots, a_i, \dots\}, \{\dots, a_{i+1}, \dots\})) \in F(H)$ , ya que  $T$  es una  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$  y por la definición de coloración interior  $c(\{\dots, a_{i-1}, \dots\}, \{\dots, a_i, \dots\}) = c(\{\dots, a_i, \dots\})$  y  $c(\{\dots, a_i, \dots\}, \{\dots, a_{i+1}, \dots\}) = c(\{\dots, a_{i+1}, \dots\})$ , por lo que  $c(\{\dots, a_i, \dots\}, \{\dots, a_{i+1}, \dots\}) = (c(\{\dots, (x_{i-1}, x_i), \dots\}), c(\{\dots, (x_i, x_{i+1}), \dots\})) \in F(H)$ . Por lo tanto,

$(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  es un  $H$ -camino en  $D$ .

Por el lema 5.1.1 sabemos que cualquier  $H$ -camino cerrado contiene un camino cerrado del tipo A y por hipótesis del lema  $D$  no contiene caminos cerrados del tipo A, esto quiere decir que para todo  $\{x_i, x_j\} \subseteq V(D)$   $x_i \neq x_j$  con  $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n+1\}$ , en particular para  $x_0 \neq x_{n+1}$ , es decir,  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ .  $\square$

Recordemos la función de la definición 4.1.4.  $f : P(V(D)) \rightarrow P(V(MSL(D)))$  definida como sigue. Para cada  $Z \subseteq V(D)$ :

$$f(Z) = \{b = \{a_1, \dots, a_r\} \in V(MSL(D)) : \text{para todo } a_i = (v, x_i) \in b, x_i \in Z, i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Notemos que  $f(Z)$  está contenido en  $V(MSL(D))$ .

**Lema 5.3.3.** *Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada sin caminos cerrados del tipo A. Si  $Z \subseteq V(D)$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$  entonces  $f(Z)$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $MSL(D)$ .*

*Demostración.* La demostración la haremos por contradicción. Sea  $Z \subseteq V(D)$  un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ , supongamos que  $f(Z)$  no es independiente por  $H$ -trayectorias en  $MSL(D)$ .

Sea  $\{\{\dots, a_i = (v, x), \dots\}, \{\dots, b_h = (w, y), \dots\}\} \subseteq f(Z)$ , con  $\{x, y\} \subseteq Z$ , tal que existe una  $\{\dots, a_i, \dots\}\{\dots, b_h, \dots\}$  –  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$ , por la definición de  $MSL(D)$  y por el lema 4.1.2 existe en  $D$  una  $H$ -trayectoria entre el vértice final de  $a_i$  y el vértice final de  $b_h$ , es decir, una  $xy$  –  $H$ -trayectoria, lo cual es una contradicción, ya que  $\{x, y\} \subseteq Z$  y por hipótesis  $Z$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ . Por lo tanto,  $f(Z)$  es independiente por  $H$ -trayectorias.  $\square$

**Teorema 5.3.1.** *Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada sin caminos cerrados del tipo A,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $MSL(D)$  su súper digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos con a lo más  $k$  elementos. El número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $D$  es igual al número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ .*

*Demostración.* Denotamos por  $\mathcal{N}$  el conjunto de todos los  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $D$  y  $\mathcal{N}^*$  el conjunto de todos los  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ .

Demostraremos que  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{N}^*|$ , primero veremos dos afirmaciones, la primera nos dice que si  $N \in \mathcal{N}$ , entonces  $f(N) \in \mathcal{N}^*$  y que  $f$  restringida a  $\mathcal{N}$  es inyectiva, con ésto concluimos que  $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{N}^*|$ .

En la segunda afirmación se define una nueva función  $g$  inyectiva con la cual dado  $I \subseteq V(MSL(D))$  si  $I \in \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(I) \in \mathcal{N}$  y concluimos que  $|\mathcal{N}| \geq |\mathcal{N}^*|$ .

**Afirmación 1:** Si  $N \in \mathcal{N}$ , entonces  $f(N) \in \mathcal{N}^*$ .

Sea  $N \in \mathcal{N}$ , si aplicamos la función de la definición 4.1.4 a  $N \subseteq V(D)$ , tenemos que por el lema 5.3.3  $f(N)$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $MSL(D)$ . Falta ver que  $f(N)$  es absorbente por  $H$ -trayectorias. Sea  $\{\dots, d_i, \dots\} \in V(MSL(D)) \setminus f(N)$  tal que  $d_i = (u, v) \in F(D)$ .

Note que  $v \notin N$ . Como  $N$  es un  $H$  – núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ , hay un  $z \in N$  tal que  $T = (v, x_1, \dots, x_{n-1}, z)$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ , por el lema 5.3.1 para cualquier flecha de  $D$  que tenga a  $v$  como vértice final, en particular  $d_i = (u, v)$ , existe una  $\{\dots, d_i, \dots\}\{(x_{n-1}, z)\}$  –  $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$  y por la definición 4.1.4  $\{(x_{n-1}, z)\} \in f(N)$ . Por lo tanto  $f(N)$  es absorbente por  $H$  – trayectorias y  $f(N)$  es un  $H$  – núcleo por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ .

Afirmamos que la función  $f' : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^*$ , donde  $f'$  es la restricción de la función  $f$  de la definición 4.1.4 a  $\mathcal{N}$  es inyectiva. Sea  $\{N_1, N_2\} \subseteq \mathcal{N}$  tal que  $N_1 \neq N_2$ , supongamos que  $N_1 - N_2 \neq \emptyset$ , tomamos  $v \in V(D)$  tal que  $v \in N_1 - N_2$ . Como  $N_2$  es absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ , entonces existe  $z \in N_2$  tal que  $T = (v, x_1, \dots, x_{n-1}, z)$  es una  $H$ -trayectoria, es decir, existe una  $vz$  –  $H$ -trayectoria, denotemos por  $h = (x_{n-1}, z)$  la última flecha de dicha trayectoria, por definición de  $MSL(D)$  y de  $f$ ,  $\{h\} \in V(MSL(D))$  y además  $\{h\} \in f'(N_2)$ . Notemos que como  $v \in N_1$ ,  $N_1$  es independiente por  $H$ -trayectorias y existe una  $vz$  –  $H$ -trayectoria en  $D$ , tenemos que  $z \notin N_1$  y de esa manera  $\{h\} \notin f'(N_1)$ , por lo que  $f'(N_1) \neq f'(N_2)$ . Por lo tanto  $f'$  es una función inyectiva.

**Afirmación 2:** Definamos una función  $g : P(V(MSL(D))) \rightarrow P(V(D))$ , tal que dado  $I \subseteq V(MSL(D))$ ,  $g(I) = R(I) \cup J(I)$  donde:

Dado  $\{a_1, \dots, a_s\} \in I$  tal que  $\{a_1, \dots, a_s\} \in A_j^l$  con  $l \in \{1, \dots, k\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ , tenemos que.

- $R(I) = \{x_i \in V(D) : a_i = (u, x_i) \text{ para toda } a_i \in \{a_1, \dots, a_s\} \text{ con } i \in \{1, \dots, s\}\}$ , es decir,  $R(I)$  es el conjunto de los vértices finales de todas las flechas del subconjunto  $\{a_1, \dots, a_s\}$ , en  $D$ .
- $J(I) = \{v \in V(D) : \delta_D^-(v) = 0 \text{ y no existe una } H\text{-trayectoria entre } v \text{ y los elementos de } R(I)\}$ .

Hay que demostrar que dado  $K \subseteq V(MSL(D))$ . Si  $K \in \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(K) \in \mathcal{N}$ .

I. Por demostrar que si  $K \in \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(K)$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .

Sea  $\{u, v\} \subseteq g(K)$ , hay que ver que no existe una  $uv$  –  $H$ -trayectoria, ni una  $vu$  –  $H$ -trayectoria en  $D$ . Por la definición de  $g(K)$ , tenemos los siguientes casos:

Caso 1.  $\{u, v\} \subseteq R(K)$ .

Procederemos por contradicción. Supongamos que existe  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una  $H$ -trayectoria en  $D$ , como  $\{u, v\} \subseteq R(K)$  entonces  $u$  es vértice final de algún  $a_i \in \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_s\}$ , con  $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_s\} \in K$ , de la misma forma  $v$  es vértice final de algún  $b_i \in \{b_1, \dots, b_i, \dots, b_t\}$ , con  $\{b_1, \dots, b_i, \dots, b_t\} \in K$ , denotaremos los vértices anteriores de la siguiente manera:  $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_s\} = \{\dots, a_i, \dots\}$  y  $\{b_1, \dots, b_i, \dots, b_t\} = \{\dots, b_i, \dots\}$  y tales que por la definición del conjunto  $R(K)$ ,  $\{\{\dots, a_i, \dots\}, \{\dots, b_i, \dots\}\} \subseteq K$ . Tenemos dos subcasos:

Subcaso 1.1.  $b_i = (x_{n-1}, x_n = v)$ .

Por el lema 5.3.1 se tiene una  $\{\dots, (x, x_0 = u), \dots\}\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\}$  –  $H$ -trayectoria, en particular, como el vértice

final de  $a_i$  también en  $u$ , entonces existe una  $H$ -trayectoria entre  $\{\dots, a_i, \dots\}$  y  $\{\dots, b_i, \dots\}$  en  $MSL(D)$ , lo cual es una contradicción, ya que  $\{\{\dots, a_i, \dots\}, \{\dots, b_i, \dots\}\} \subseteq K$  y  $K$  es  $H$ -núcleo por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ .

Subcaso 1.2.  $b_i \neq (x_{n-1}, x_n = v)$ .

Tenemos que  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\} \notin K$  pues si suponemos que  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\} \in K$ , pasa lo mismo que en el subcaso anterior. Dado que  $K$  es un  $H$ -núcleo por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ , en particular  $K$  es absorbente por  $H$ -trayectorias, por lo que existe  $\{\dots, d_i, \dots\} \in K$  tal que se tiene una  $\{\dots, (x_{n-1}, x_n = v), \dots\}\{\dots, d_i, \dots\}$  - $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$ , como en  $\{\dots, b_i, \dots\}$  el vértice final de  $b_i$  es  $v$ , por la definición de  $MSL(D)$  y de coloración interior, existe una  $\{\dots, b_i, \dots\}\{\dots, d_i, \dots\}$  - $H$ -trayectoria en  $MSL(D)$  lo cual es una contradicción, puesto que,  $\{\{\dots, b_i, \dots\}, \{\dots, d_i, \dots\}\} \subseteq K$  y  $K$  es un  $H$ -núcleo por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ .

Caso 2.  $u \in J(K)$  y  $v \in R(K)$ .

Por la definición de  $g(K)$  sabemos que no existen  $uR(K)$  - $H$ -trayectorias, en particular no existe una  $uv$  - $H$ -trayectoria en  $D$ .

Caso 3.  $u \in R(K)$  y  $v \in J(K)$ .

Como  $v \in J(K)$  por la definición de  $J(K)$  tenemos que  $\delta_D^-(v) = 0$ , entonces no hay ninguna trayectoria que llegue a  $v$ , en particular no existe una  $uv$  - $H$ -trayectoria en  $D$ .

Caso 4.  $u \in J(K)$  y  $v \in J(K)$ .

Por un argumento análogo al del caso anterior, como  $v \in J(K)$  por la definición de  $J(K)$  tenemos que  $\delta_D^-(v) = 0$ , entonces no hay ninguna trayectoria que llegue a  $v$ , en particular no existe una  $uv$  - $H$ -trayectoria en  $D$  y análogamente no existe una  $vu$  - $H$ -trayectoria en  $D$ .

Por lo tanto, por los casos anteriores  $g(K)$  es independiente por  $H$ -trayectorias, ya que para cualesquiera  $\{u, v\} \subseteq g(K)$  no existen  $H$ -trayectorias entre  $u$  y  $v$ .

II. Se demostrará que  $g(K)$  es absorbente por  $H$ -trayectorias.

Sea  $u \in V(D) \setminus g(K)$ , es decir,  $u \notin R(K) \cup J(K)$ , por la definición de  $R(K) \cup J(K)$ ,  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b_i$  con  $b_i \in \{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\}$  y se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\delta_D^-(v) > 0$ .
- Existe una  $H$ -trayectoria del vértice  $u$  a algún elemento de  $R(K)$ .

Analícemos dos casos.

Caso 1.  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b_i$  con  $b_i \in \{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\}$ , tal que  $\{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\} \in K$  y  $\delta_D^-(v) > 0$ .

Por hipótesis del caso sabemos que existe  $d_i \in F(D)$  tal que  $u$  es vértice final de  $d_i = (t, u)$ , también tenemos que  $\{\dots, d_i, \dots\} \in V(MSL(D)) \setminus K$ , como  $K \subseteq \mathcal{N}^*$  en particular  $K$  es absorbente por  $H$ -trayectorias, entonces existe  $\{\dots, c_i, \dots\} \in K$  con  $c_i = (y, z)$  tal que hay una  $\{\dots, d_i, \dots\}\{\dots, c_i, \dots\} - H$ -trayectoria en  $MSL(D)$  y por el lema 5.3.2 existe una  $H$ -trayectoria entre el vértice final de  $d_i$  y el vértice final de  $c_i$ , es decir, una  $uz - H$ -trayectoria en  $D$  con  $u \neq z$ , además como  $\{\dots, c_i, \dots\} = \{\dots, (y, z), \dots\} \in K$ , entonces  $z \in g(K)$ . Por lo tanto existe una  $uz - H$ -trayectoria con  $z \in g(K)$ .

Caso 2.  $u$  no es vértice final de alguna flecha  $b_i$  con  $b_i \in \{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\}$ , tal que  $\{b_r, b_s, \dots, b_i, \dots\} \in K$  y existe una  $H$ -trayectoria del vértice  $u$  a algún elemento de  $R(K)$ .

Por hipótesis del caso tenemos que existe una  $H$ -trayectoria del vértice  $u$  a algún elemento de  $R(K)$ , es decir, una  $ug(K) - H$ -trayectoria en  $D$ .

Por los casos anteriores  $g(K)$  es absorbente por  $H$ -trayectorias. Por lo tanto  $g(K)$  es  $H - \text{núcleo}$  por  $H$ -trayectorias de  $D$ .

Afirmamos que la función  $g' : \mathcal{N}^* \rightarrow \mathcal{N}$ , donde  $g'$  es la restricción de  $g$  en  $\mathcal{N}^* \subseteq V(MSL(D))$  es inyectiva.

Sea  $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{N}^*$  tal que  $K_1 \neq K_2$ , supongamos que  $K_1 \setminus K_2 \neq \emptyset$ . Tomemos  $\{\dots, h_i, \dots\} \in V(MSL(D))$  tal que  $\{\dots, h_i, \dots\} \in K_1 \setminus K_2$  con  $h_i \in F(D)$  y  $u$  el vértice final de  $h_i$ , como  $u$  es vértice final de una flecha en  $\{\dots, h_i, \dots\}$  y  $\{\dots, h_i, \dots\} \in K_1$ , por definición de  $g$ ,  $u \in g(K_1)$ . Hay que demostrar que  $u \notin g(K_2)$ , como  $K_2$  es  $H - \text{núcleo}$  por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$ , en particular es absorbente por  $H$ -trayectorias y además  $\{\dots, h_i, \dots\} \notin K_2$ , de esta manera existe  $\{\dots, t_i, \dots\} \in K_2$  tal que  $\{\dots, t_i, \dots\}$  absorbe a  $\{\dots, h_i, \dots\}$  vía una  $H$ -trayectoria, es decir, existe una  $\{\dots, h_i, \dots\}\{\dots, t_i, \dots\} - H$ -trayectoria en  $MSL(D)$ . Sea  $z$  el vértice final de  $t_i \in F(D)$ ,  $z \in g(K_2)$ , por el lema 5.3.2 existe una  $H$ -trayectoria entre el vértice final de  $\{\dots, h_i, \dots\}$  y el vértice final de  $\{\dots, t_i, \dots\}$ , es decir, una  $uz - H$ -trayectoria en  $D$  con  $u \neq z$  pues  $D$  no tiene caminos cerrados del tipo A. Como  $g$  manda conjuntos independientes en conjuntos independientes, tenemos que  $g(K_2)$  es independiente por  $H$ -trayectorias, como  $K_2 \subseteq \mathcal{N}^*$ , entonces  $g(K_2) \subseteq \mathcal{N}$ , por lo demostrado anteriormente y la definición de  $H - \text{núcleo}$  tenemos que  $u \notin g(K_2)$ , por lo que  $u \in g(K_1) - g(K_2)$  y  $g(K_1) \neq g(K_2)$ , de esta manera  $g'$  es inyectiva. Por lo tanto como  $f'$  y  $g'$  son inyectivas y  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{N}^*|$ .

□

Al igual que en el capítulo de NTDM en la sección de la digráfica  $MSL(D)$ , podemos colorear exteriormente cualquier digráfica y la definición es análoga, sin embargo, si a una digráfica  $D$  la coloreamos exteriormente, al obtener a  $MSL(D)$  la digráfica podría no tener  $H - \text{núcleo}$  por

$H$ -trayectorias.

Con el siguiente ejemplo mostramos lo dicho anteriormente:

Sean  $H$  una digráfica tal que,  $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $F(H) = \{(4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 7)\}$  y  $D$  la digráfica,  $V(D) = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{a = (u, v), b = (v, w), c = (w, x), d = (x, s), e = (t, s), f = (y, t), g = (z, y), h = (v, z), i = (z, u)\}$ , como  $D$  está  $H$ -coloreada tenemos que  $a$  tiene color 1,  $b$  y  $c$  color 4,  $d$  color 6,  $e$  color 7,  $f$  y  $g$  color 5,  $h$  color 2 e  $i$  color 3. Sea  $k = 2$ ,  $MSL(D)$  es:

$$V(MSL(D)) = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{f, g\}, \{h\}, \{i\}\} \text{ y}$$

$$F(MSL(D)) = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{h\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{b\}, \{c\}), (\{b, c\}, \{c\}), (\{b, c\}, \{d\}), (\{c\}, \{d\}), (\{f\}, \{e\}), (\{g\}, \{f\}), (\{g\}, \{g, f\}), (\{g, f\}, \{f\}), (\{g, f\}, \{e\}), (\{h\}, \{g\}), (\{h\}, \{i\}), (\{h\}, \{f, g\}), (\{i\}, \{a\})\}.$$

Dada la  $H$ -coloración de  $D$ ,  $MSL(D)$  está coloreada exteriormente de la siguiente manera: las flechas con vértice inicial  $\{a\}$  son color 1, las flechas que salen de los vértices  $\{b\}$ ,  $\{c\}$  y  $\{b, c\}$  son de color 4, las flechas que tienen como vértice inicial los vértices  $\{f\}$ ,  $\{g\}$  y  $\{f, g\}$  de color 5, las flechas que inician en  $\{h\}$  de color 2 y por último las flechas que tienen como vértice inicial a  $\{i\}$  son de color 3. Figuras 5-3, 5-4 y 5-5.

Notemos que  $D$  tiene un  $H$ -núcleo por  $H$ -trayectorias,  $N = \{s, u\}$ , sin embargo  $MSL(D)$  no tiene un  $H$ -núcleo, ya que, si suponemos que tiene un  $H$ -núcleo,  $N'$ , debe estar conformado por los vértices  $\{\{d\}, \{e\}\}$  ya que su exgrado es igual a cero por lo que no hay trayectorias que inicien en estos vértices, con este conjunto se absorben a los vértices  $\{b\}, \{b, c\}, \{c\}, \{f\}, \{f, g\}$  y  $\{g\}$ .

Faltan arreglar los vértices  $\{a\}, \{h\}$  e  $\{i\}$ , notemos que no existen  $H$ -trayectorias entre estos vértices y los vértices  $\{d\}$  y  $\{e\}$ , sin embargo, la subdigráfica inducida por  $\{a\}, \{h\}$  e  $\{i\}$  es completa, por lo que sólo un vértice puede pertenecer a  $N'$ , pero uno de ellos no es suficiente para arreglar la absorbencia del conjunto. Por lo tanto  $MSL(D)$  no tiene  $H$ -núcleo por  $H$ -trayectorias.

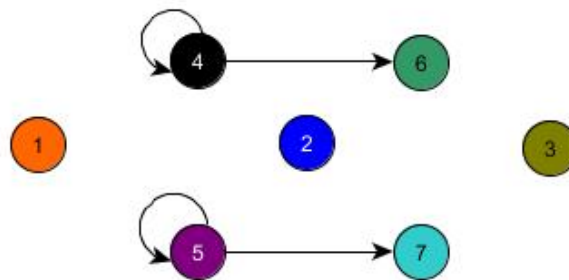


Figura 5-3:  $H$ .

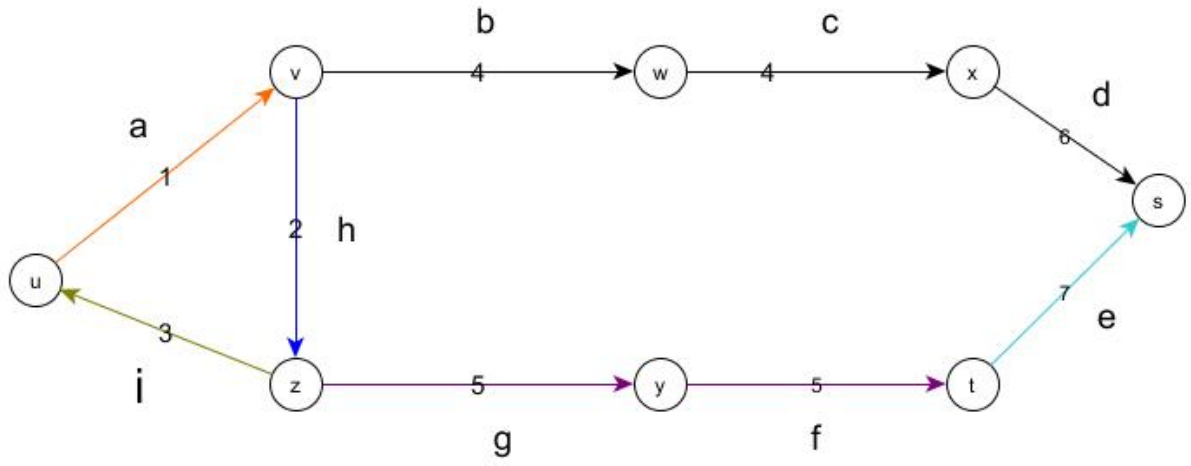


Figura 5-4:  $D, H$  – coloreada.

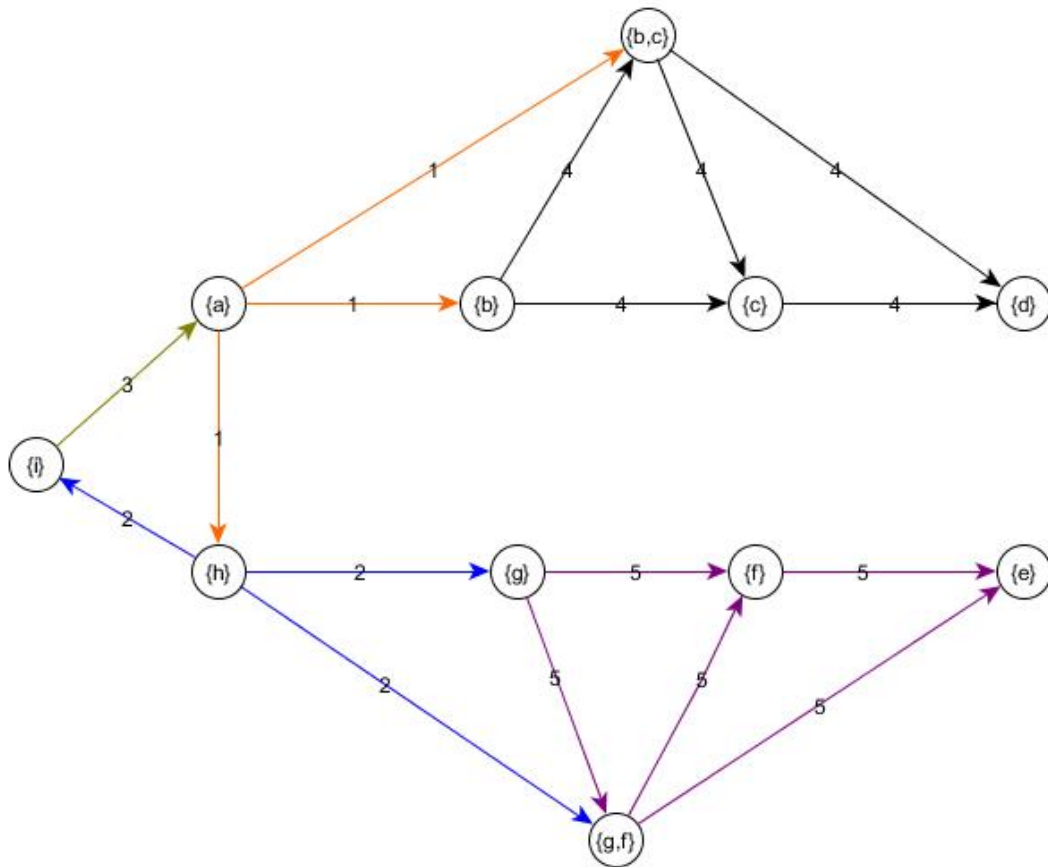


Figura 5-5:  $MSL(D), H$  – coloreada exteriormente.



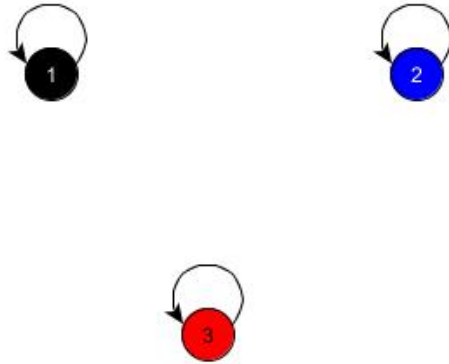
Si en el teorema 5.3.1 omitimos la hipótesis acerca de los caminos cerrados del tipo A, el teorema no se cumple, en el sentido en el que aumentan o disminuyen el número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$  con respecto a  $D$ . El siguiente ejemplo muestra este hecho: Sean  $H$  una digráfica tal que:  $V(H) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $F(H) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ,  $D$  una digráfica  $H$  – coloreada tal que:

$V(D) = \{v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{(v, w) = a, (w, x) = b, (y, w) = c, (x, y) = d, (y, z) = e, (z, y) = f\}$ . Donde  $a$  y  $b$  tienen color 2,  $c, e$  y  $f$  color 1 y  $d$  color 3 y  $k = 3$ ,  $MSL(D)$ :

$V(MSL(D)) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{e, f\}, \{c, e, f\}\}$ .

$F(MSL(D)) = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{d\}), (\{d\}, \{c\}), (\{d\}, \{e\}), (\{d\}, \{c, e\}), (\{d\}, \{c, f\}), (\{d\}, \{e, f\}), (\{d\}, \{c, e, f\}), (\{e\}, \{f\}), (\{e\}, \{c, f\}), (\{e\}, \{e, f\}), (\{e\}, \{c, e, f\}), (\{f\}, \{c\}), (\{f\}, \{e\}), (\{f\}, \{c, e\}), (\{f\}, \{c, f\}), (\{f\}, \{e, f\}), (\{f\}, \{c, e, f\}), (\{c, e\}, \{b\}), (\{c, e\}, \{f\}), (\{c, e\}, \{a, b\}), (\{c, e\}, \{c, f\}), (\{c, e\}, \{e, f\}), (\{c, e\}, \{c, e, f\}), (\{c, f\}, \{b\}), (\{c, f\}, \{c\}), (\{c, f\}, \{e\}), (\{c, f\}, \{a, b\}), (\{c, f\}, \{c, e\}), (\{c, f\}, \{e, f\}), (\{c, f\}, \{c, e, f\}), (\{e, f\}, \{c\}), (\{e, f\}, \{e\}), (\{e, f\}, \{f\}), (\{e, f\}, \{c, e\}), (\{e, f\}, \{c, f\}), (\{e, f\}, \{c, e, f\}), (\{c, e, f\}, \{b\}), (\{c, e, f\}, \{a, b\}), (\{c, e, f\}, \{c\}), (\{c, e, f\}, \{e\}), (\{c, e, f\}, \{f\}), (\{c, e, f\}, \{c, e\}), (\{c, e, f\}, \{c, f\}), (\{c, e, f\}, \{e, f\})\}$ .

Debido a la coloración interior, podemos afirmar que las flechas que llegan a los vértices  $\{b\}$  y  $\{a, b\}$  es de color 2, a  $\{d\}$  son color 3 y de los demás vértices son de color 1. Figuras 4-10 y 4-11 del capítulo de NTDM en  $MSL(D)$  y figura 5-6.



**Figura 5-6:**  $H$ .

Notemos que en las digráficas  $D$  y  $MSL(D)$ , toda  $H$ -trayectoria es una tdm lo cual nos muestra que los NTDM son un caso particular de los  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias, por lo que la explicación de este ejemplo es la misma a la que dimos para la figura 4-11 en el capítulo de NTDM en la digráfica  $MSL(D)$ .

# Capítulo 6

## Producto cartesiano.

Uno de los objetivos de esta tesis es trabajar con operaciones entre digráficas  $m$  – coloreadas y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. En este capítulo continuaremos con esta línea de trabajo, veremos una operación binaria entre digráficas llamada producto cartesiano. Se han realizado varias investigaciones sobre el tema de conjuntos absorbentes y conjuntos independientes, principalmente, Andrzej Wloch e Iwona Wloch [16] con  $(k, l)$  – núcleos en productos generalizados y recientemente Eduardo Pereyra [12], en su tesis de licenciatura dirigida por Laura Pastrana con cuasinúcleos ajenos.

Aplicaremos esta operación a dos digráficas  $m$  – coloreadas con NTDM, primero colorearemos la digráfica resultante y después analizaremos que sucede cuando hacemos el producto de dos ciclos  $m$  – coloreados.

### 6.1. Definiciones.

Presentaremos las definiciones básicas para este capítulo.

**Definición 6.1.1.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas de orden  $m_1$  y  $n_1$  respectivamente, donde,  $V(D_1) = \{x_1, \dots, x_{m_1}\}$  y  $V(D_2) = \{y_1, \dots, y_{n_1}\}$ , definimos el producto cartesiano de  $D_1$  y  $D_2$  denotado por  $(D_1 \times D_2)$  de la siguiente manera:

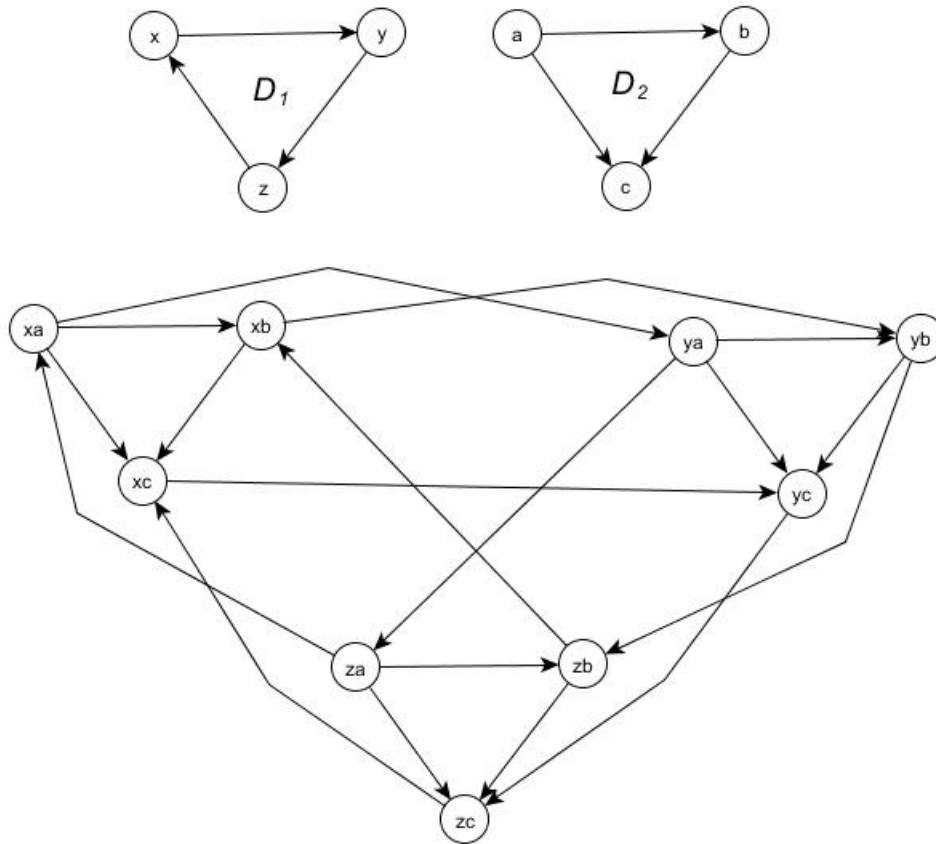
- $V((D_1 \times D_2)) = \{x_i y_j : x_i \in V(D_1) \text{ y } y_j \in V(D_2)\}$ , es decir, el producto cartesiano del conjunto de vértices de  $D_1$  y el conjunto de vértices de  $D_2$ .
- $(x_i y_s, x_j y_t) \in F((D_1 \times D_2))$  si y sólo si  $x_i = x_j$  y  $(y_s, y_t) \in F(D_2)$  o  $(x_i, x_j) \in F(D_1)$  y  $y_s = y_t$ .

Observemos que al hacer esta operación la digráfica  $D_1$  es isomorfa a una subdigráfica inducida de  $(D_1 \times D_2)$  y lo mismo ocurre con  $D_2$ , por lo que de manera natural tenemos la siguiente definición:

Un **nivel**  $H_x$  en  $(D_1 \times D_2)$ , es una subdigráfica inducida por el conjunto de los vértices de la forma  $x y_i$  con  $i = \{1, \dots, n_1\}$  de  $(D_1 \times D_2)$ . Es decir:

$V(H_x) = \{xy_i \in V((D_1 \times D_2)) : x \in V(D_1), y_i \in V(D_2) \text{ con } i = \{1, 2, \dots, n_1\}\}$  y  $F(H_x) = \{(xy_i, xy_j) \in F((D_1 \times D_2)) : (y_i, y_j) \in F(D_2)\}$ . Notemos que  $H_x \cong D_2$ .

Ejemplo: sean  $D_1$  tal que  $V(D_1) = \{x, y, z\}$  y  $F(D_1) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$  y  $D_2$  tal que  $V(D_2) = \{a, b, c\}$  y  $F(D_2) = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ , de acuerdo con la definición de  $(D_1 \times D_2)$ :  $V((D_1 \times D_2)) = \{xa, xb, xc, ya, yb, yc, za, zb, zc\}$ ,  $F((D_1 \times D_2)) = \{(xa, xb), (xa, xc), (xb, xc), (ya, yb), (ya, yc), (yb, yc), (za, zb), (za, zc), (zb, zc), (xa, ya), (ya, za), (za, xa), (xb, yb), (yb, zb), (zb, xb), (xc, yc), (yc, zc), (zc, xc)\}$ , (figura 6-1).



**Figura 6-1:**  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_1 \times D_2$ .

El nivel  $H_z$  en  $(D_1 \times D_2)$  es la subdigráfica inducida por los vértices  $\{za, zb, zc\} \subseteq V((D_1 \times D_2))$  con las flechas  $\{(za, zb), (za, zc), (zb, zc)\} \subseteq F((D_1 \times D_2))$ . Notemos que  $H_z \cong D_2$ .

Ahora si  $D_1$  está  $m$ -coloreada y  $D_2$  está  $n$ -coloreada, ¿Cómo se colorea la digráfica  $(D_1 \times D_2)$ ? Una manera natural y de acuerdo con la definición de  $F((D_1 \times D_2))$ , el color de la flecha  $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  es igual al color de la flecha  $(y_1, y_2)$  si  $x_1 = x_2$  y  $(y_1, y_2) \in F(D_2)$  o es igual al color de la flecha  $(x_1, x_2)$  si  $(x_1, x_2) \in F(D_1)$  y  $y_1 = y_2$ . De acuerdo con lo dicho anteriormente, colorearemos la digráfica  $(D_1 \times D_2)$  de la figura 6-1, (figura 6-2).

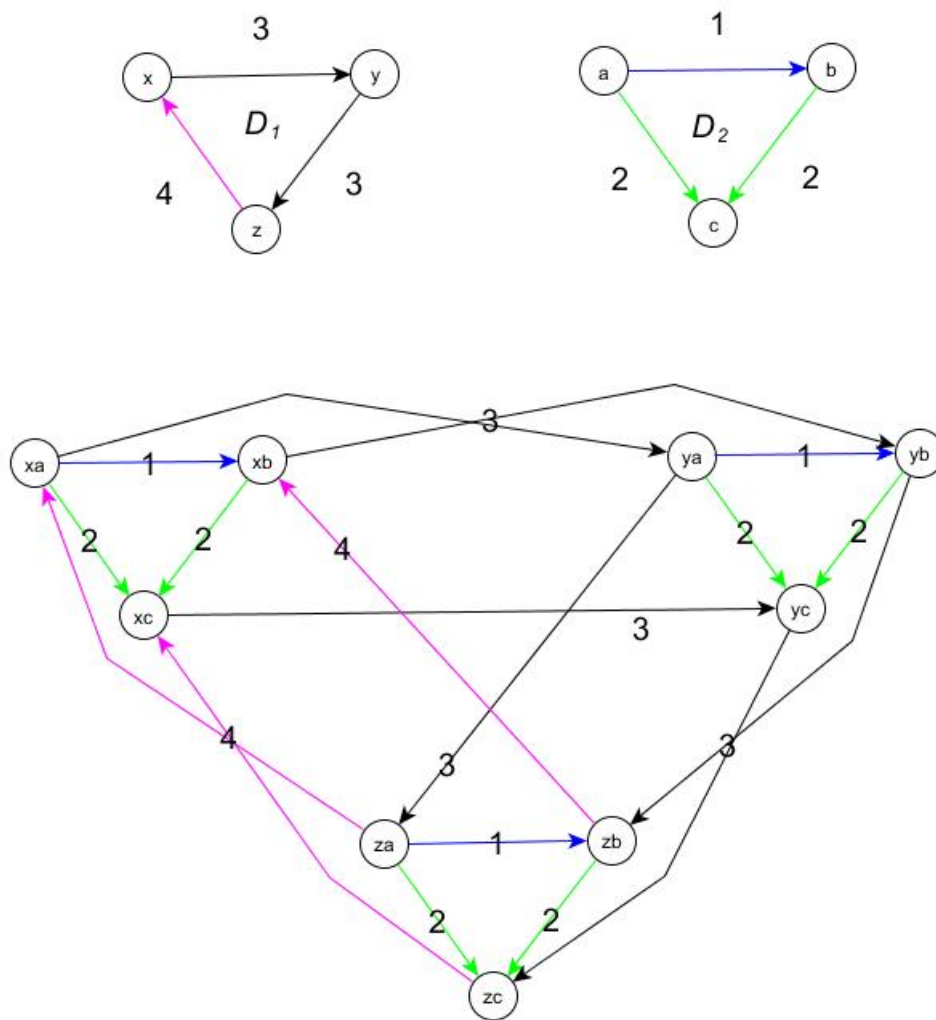


Figura 6-2:  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_1 \times D_2$   $m$ -coloreado.

## 6.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en el producto cartesiano.

Con la coloración definida en la sección anterior, nos podemos preguntar: ¿cuándo  $(D_1 \times D_2)$  tiene NTDM?

Observemos que no siempre es cierto que, si  $D_1$  y  $D_2$  tienen NTDM entonces  $(D_1 \times D_2)$  tiene NTDM. La siguiente digráfica es un ejemplo de lo dicho anteriormente.

Sean  $D_1$  tal que:  $V(D_1) = \{x, y, z\}$  y  $F(D_1) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$  y  $D_2$  definida como:  $V(D_2) = \{a, b, c, d, e\}$  y  $F(D_2) = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, d), (d, a), (e, a), (e, c), (e, d)\}$  (figura 6-3).

Ahora  $(D_1 \times D_2)$  es tal que:  $V(D_1 \times D_2) = \{xa, xb, xc, xd, xe, ya, yb, yc, yd, ye, za, zb, zc, zd, ze\}$ ,  $F(D_1 \times D_2) = \{(xa, xb), (xb, xc), (xb, xe), (xc, xd), (xd, xa), (xe, xa), (xe, xc), (xe, xd), (ya, yb), (yb, yc), (yb, ye), (yc, yd), (yd, ya), (ye, ya), (ye, yc), (ye, yd), (za, zb), (zb, zc), (zb, ze), (zc, zd), (zd, za), (ze, za), (ze, zc), (ze, zd), (xa, ya), (xa, za), (ya, za), (xb, yb), (xb, zb), (yb, zb), (xc, yc), (xc, zc), (yc, zc), (xd, yd), (xd, zd), (yd, zd), (xe, ye), (xe, ze), (ye, ze)\}$  (figura 6-4).

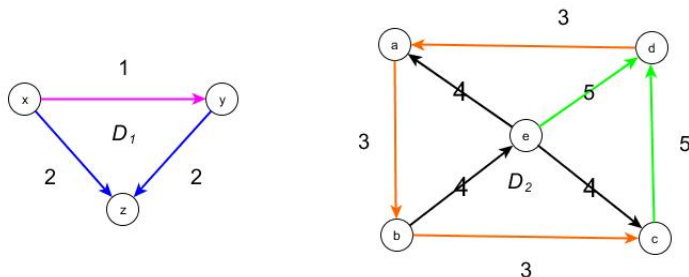


Figura 6-3:  $D_1$  y  $D_2$ .

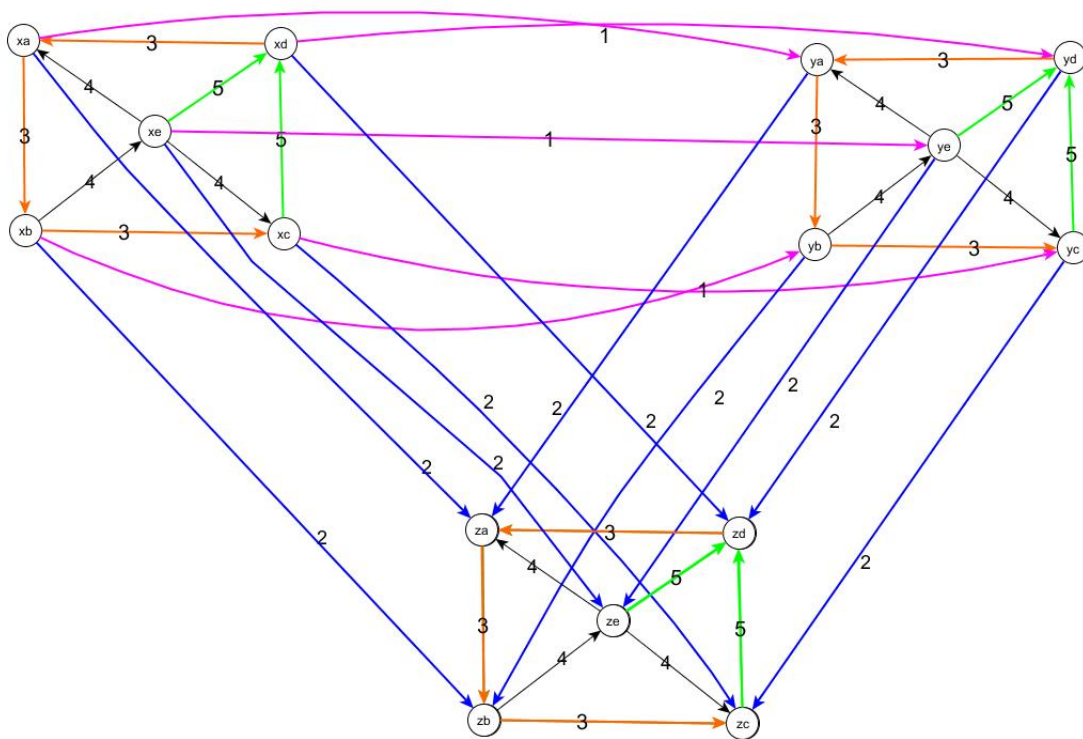


Figura 6-4:  $D_1 \times D_2$ .

Notemos que en  $D_1$ ,  $N_1 = \{z\}$  es un NTDM, pues  $(x, z) \in F(D_1)$  y  $(y, z) \in F(D_1)$ , también tenemos que  $N_2 = \{c\}$  es un NTDM en  $D_2$ , ya que existe  $T = (d, a, b, c)$  una tdm y  $(e, c) \in F(D_2)$ . Además es único, ya que, si suponemos que  $N_2'$  es un NTDM distinto, entonces

$N'_2$  debe constar de un elemento, ya que podemos observar en la figura 6-4 que para cualesquiera dos vértices de  $D_2$  existe una tdm de ida que los une o una tdm de regreso, además podemos ver que ningún vértice en  $V(D_2) \setminus \{c\}$  es absorbente por tdm, por lo tanto  $D_2$  tiene un único NTDM.

Sin embargo,  $(D_1 \times D_2)$  no tiene un NTDM, supongamos que si tiene, sea  $N$  un NTDM de  $(D_1 \times D_2)$ , notemos que no existen flechas de  $V(H_z)$  a los demás niveles, por lo que  $H_z \cap N \neq \emptyset$ , como  $H_z \cong D_2$  y  $\{c\}$  es el único NTDM de  $D_2$ ,  $zc \in N$ , por lo que  $V(H_z) \setminus \{zc\} \cap N = \emptyset$  y  $yc \notin N$ .

Consideremos el nivel  $H_y$ , como  $N^+(V(H_y) \setminus \{yc\}) \subset V(H_z) \setminus \{zc\} \cup V(H_y)$ , tenemos que  $V(H_y) \setminus \{yc\} \cap N \neq \emptyset$ . Como  $T = (yd, ya, yb)$  es una tdm,  $ye$  es adyacente a  $ya$ ,  $yb$  y a  $yd$ , por lo que un conjunto independiente por tdm en  $H_y \setminus \{yc\}$  consta de un sólo elemento, pero el vértice  $ya$  no absorbe a  $yb$  vía una tdm, el vértice  $yd$  a  $ya$ ,  $yb$  a  $ye$  y el vértice  $ye$  a  $ya$ , por lo tanto  $(D_1 \times D_2)$  no tiene un NTDM.

También notemos que no siempre es cierto que si  $(D_1 \times D_2)$  tiene un NTDM entonces  $D_1$  y  $D_2$  tienen un NTDM respectivamente. La digráfica siguiente es un ejemplo.

Sean  $D_1$  una digráfica 3-coloreada tal que:  $V(D_1) = \{x, y, z\}$  y  $F(D_1) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ ,  $D_2$  una digráfica 3-coloreada definida como:  $V(D_2) = \{a, b, c, d, e\}$  y  $F(D_2) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$  (figura 6-5).

$(D_1 \times D_2)$  es:  $V(D_1 \times D_2) = \{xa, xb, xc, xd, xe, ya, yb, yc, yd, ye, za, zb, zc, zd, ze\}$   
 $F(D_1 \times D_2) = \{(xa, xb), (xb, xc), (xc, xd), (xd, xe), (xe, xa), (ya, yb), (yb, yc), (yc, yd), (yd, ye), (ye, ya), (za, zb), (zb, zc), (zc, zd), (zd, ze), (ze, za), (xa, ya), (ya, za), (za, xa), (xb, yb), (yb, zb), (zb, xb), (xc, yc), (yc, zc), (zc, xc), (xd, yd), (yd, zd), (zd, xd), (xe, ye), (ye, ze), (ze, xe)\}$  (figura 6-6).

Notemos que  $(D_1 \times D_2)$  tiene un NTDM,  $N = \{yb, ye, xa, xd, zc\}$ .

Primero veamos que  $N$  es independiente por tdm. No existe una tdm entre  $yb$  y  $ye$ , ya que  $\{yb, ye\} \subseteq V(H_y)$  y  $H_y \cong D_2$  y en  $D_2$  no existen tdm entre  $e$  y  $b$ , además  $D_1$  es heterocromática. No existen tdm entre los vértices  $xa$  y  $xd$ , ya que  $\{xa, xd\} \subseteq V(H_x)$  y  $H_x \cong D_2$  y en  $D_2$  no existen tdm entre  $a$  y  $d$ , además  $D_1$  es heterocromática.

En la figura 6-6, podemos notar que no existen tdm entre los vértices de  $N$  que están en los niveles  $H_y$  y  $H_z$ , puesto que  $D_1$  es heterocromática, por lo que no existen tdm con vértice inicial  $zc$  y vértice final  $yb$  o  $ye$ .

No existen  $(zc)(xd) - tdm$ , ya que  $T = (zc, xc, xd)$  no es una tdm pues,  $c(zc, xc) = 1$  y  $c(xc, xd) = 3$ ,  $T = (zc, zd, xd)$  tampoco es monocromática ya que  $c(zc, zd) = 3$  y  $c(zd, xd) = 1$ . Por un argumento análogo no existen  $(zc)(xa) - tdm$ .

En la figura 6-6, podemos notar que no existen tdm entre los vértices de  $N$  que están en los niveles  $H_x$  y  $H_z$ , puesto que  $D_1$  es heterocromática, por lo que no existen tdm con vértice inicial  $xa$  o  $xd$  y vértice final  $zc$ .

No existen  $(yb)(zc) - tdm$ , ya que  $T = (yb, zb, zc)$  no es una tdm, ya que  $c(yb, zb) = 6$  y  $c(zb, zc) = 2$ ,  $T = (yb, yc, zc)$  no es una tdm, ya que  $c(yb, yc) = 2$  y  $c(yc, zc) = 6$ . Por un argumento análogo no existen  $(ye)(zc) - tdm$ .

Ahora veamos que  $N$  es absorbente por tdm. Los vértices  $ye$  y  $yb$  absorben por tdm a los vértices del conjunto  $\{yc, yd, ya, xb, xe\}$ ;  $xa$  y  $xd$  absorben por tdm a los vértices del conjunto

$\{xc, za, zd, ze\}$  y  $zc$  absorbe por tdm a  $zb$ . Por lo tanto,  $N$  es un NTDM de  $(D_1 \times D_2)$ .

Sin embargo tenemos que  $D_1$  no tiene un NTDM ya que es un ciclo de longitud tres heterocromático. En cambio  $D_2$  sí tiene un NTDM,  $N_1 = \{b, e\}$ , ya que es independientes por tdm y absorbe por tdm a todo vértice de  $V(D_2) \setminus N$  como se puede observar en la figura 6-6.

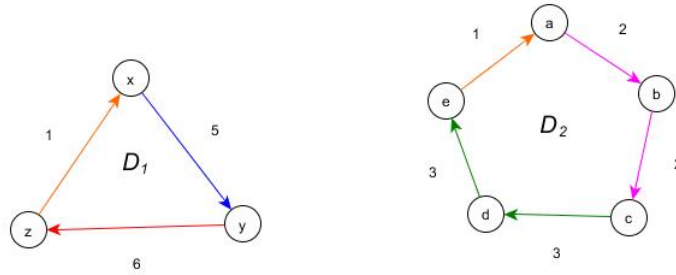


Figura 6-5:  $D_1$  y  $D_2$ .

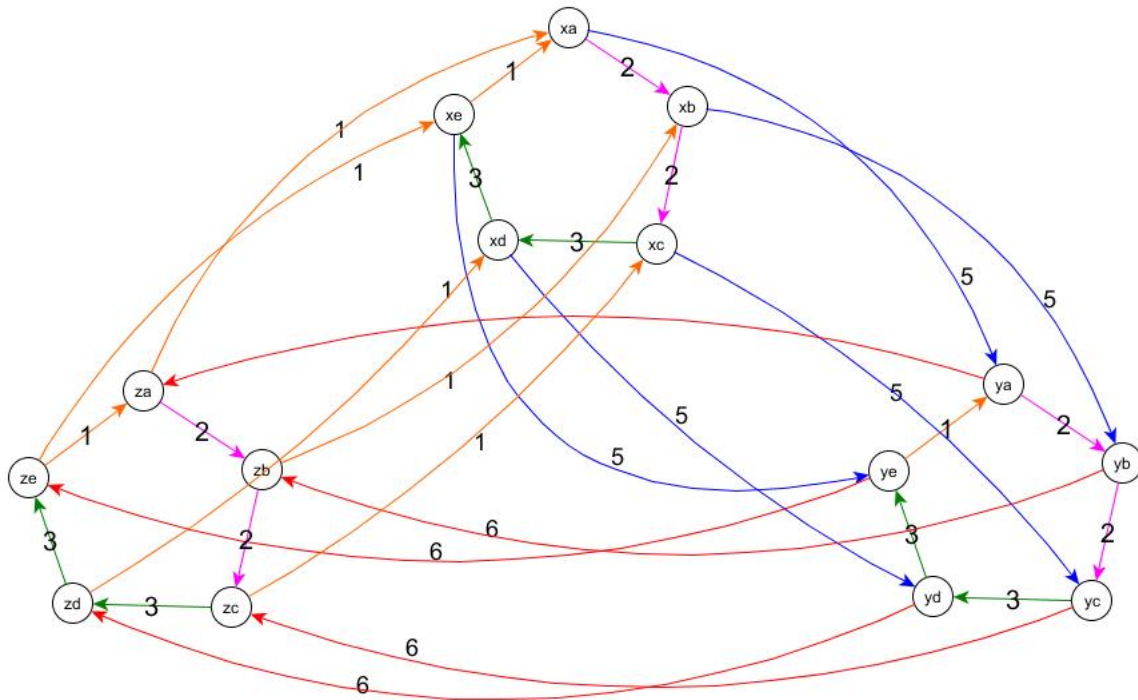
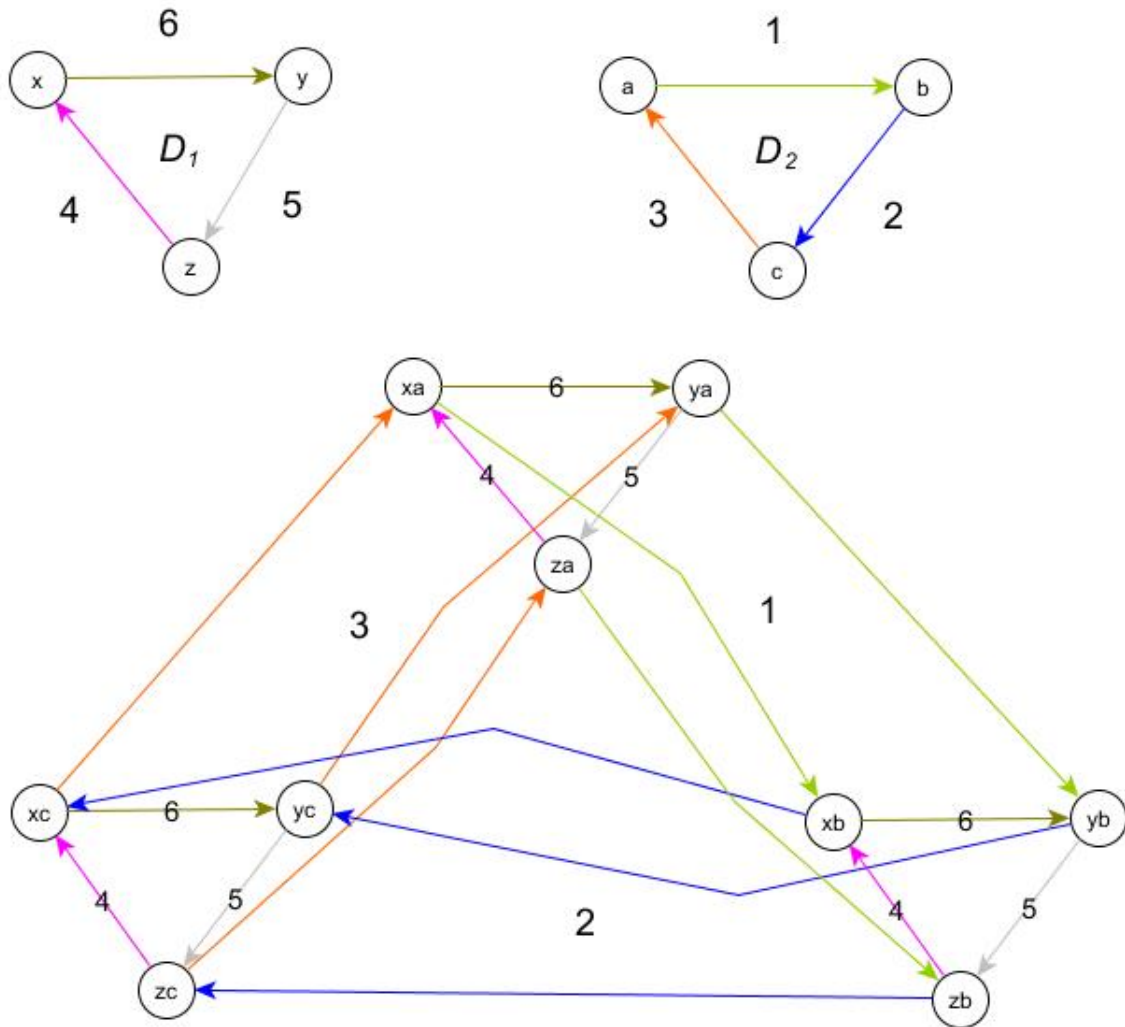


Figura 6-6:  $D_1 \times D_2$ .

Observemos también que no siempre se cumple que, si  $D_1$  y  $D_2$  no tienen un NTDM respectivamente, entonces  $(D_1 \times D_2)$  no tiene un NTDM. Las siguientes digráficas son un ejemplo de esto.

Sean  $D_1$  una digráfica 3-coloreada tal que  $V(D_1) = \{x, y, z\}$  y  $F(D_1) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ ,  $D_2$  una digráfica 3-coloreada definida como sigue:  $V(D_2) = \{a, b, c\}$ ,  $F(D_2) = \{(a, b), (b, c)$ ,

$(c, a)$  y el conjunto colores de las flechas de  $D_1$  es distinto al conjunto de colores de las flechas de  $D_2$ .  $(D_1 \times D_2)$  es la digráfica:  $V((D_1 \times D_2)) = \{xa, xb, xc, ya, yb, yc, za, zb, zc\}$  y  $F((D_1 \times D_2)) = \{(xa, xb), (xb, xc), (xc, xa), (ya, yb), (yb, yc), (yc, ya), (za, zb), (zb, zc), (zc, za), (xa, ya), (ya, za), (za, xa), (xb, yb), (yb, zb), (zb, xb), (xc, yc), (yc, zc), (zc, xc)\}$  (figura 6-7).



**Figura 6-7:**  $D_1 \times D_2$   $m$ -coloreada.

Sabemos que  $D_1$  y  $D_2$  no tienen un NTDM ya que son dos triángulos heterocromáticos, sin embargo  $(D_1 \times D_2)$  si tiene un NTDM,  $N = \{xa, yb, zc\}$ , este conjunto de vértices es independiente por tdm, ya que, no son adyacentes, los colores de ambas digráficas son distintos y  $D_1$  y  $D_2$  son heterocromáticas.

Es absorbente por tdm, dado que, el vértice  $xa$  absorbe por tdm a los vértices  $xc$  y  $za$ , el vértice  $yb$  a  $ya$  y a  $xb$ , por último  $zc$  a  $zb$  y a  $yc$ , por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $(D_1 \times D_2)$ .



Recopilando lo que vimos con los ejemplos anteriores, obtuvimos las siguientes tablas 6-1 y 6-2.

$D_1$	$D_2$	$(D_1 \times D_2)$	Referencia.
Con NTDM.	Con NTDM.	Sin NTDM	Ejemplo 1.
Sin NTDM.	Sin NTDM.	Con NTDM.	Ejemplo 2.

**Tabla 6-1:** Tabla 1.

$(D_1 \times D_2)$	$D_1$	$D_2$	Referencia.
Con NTDM.	Sin NTDM.	Con NTDM.	Ejemplo 3.

**Tabla 6-2:** Tabla 2.

Por lo anterior nos preguntamos, ¿qué clase de digráficas si cumplen con que su producto cartesiano si tiene un NTDM?

Con respecto a nuestra cuestión veremos algunos casos para los ciclos  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$ , vamos a obtener un NTDM del producto cartesiano de  $\gamma_3$  con  $\gamma_4$ , considerando algunas coloraciones para ambos ciclos, de tal manera que los ciclos mencionados tengan un NTDM.

**Proposición 6.2.1.** Sean  $\gamma_3$  un ciclo 1 – coloreado y  $\gamma_4$  un ciclo 1 – coloreado, tal que  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ . Si  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  tienen un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas respectivamente, entonces  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

*Demostración.* Sean  $\gamma_3$  un ciclo 1 – coloreado tal que  $V(\gamma_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $F(\gamma_3) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$ , tal que las flechas  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_3, x_1)$  tiene color 1,  $N_1 = \{x_3\}$  es un NTDM de  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  un ciclo 1 – coloreado tal que  $V(\gamma_4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ,  $F(\gamma_4) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_4, y_1)\}$ , tal que las flechas  $(y_1, y_2)$ ,  $(y_2, y_3)$ ,  $(y_3, y_4)$  y  $(y_4, y_1)$  tiene color 3,  $N_2 = \{y_4\}$  es un NTDM de  $\gamma_4$ , figura 6-8,  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  y  $N = \{x_3y_4, x_2y_3, x_1y_2\}$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  (figura 6-9).



**Figura 6-8:**  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$ .

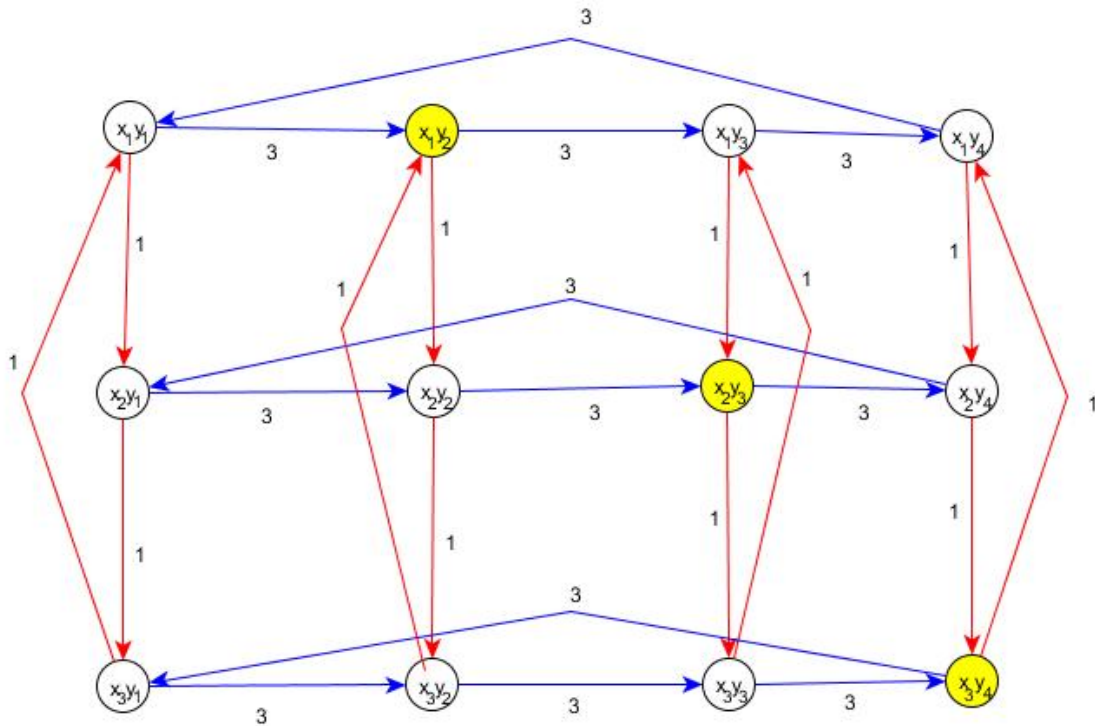


Figura 6-9:  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

Notemos que  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  está dos coloreado. Sands, Sauer y Woodrow [14], demuestran que toda digráfica 2 – coloreada tiene un NTDM. Por lo tanto  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  tiene un NTDM.  $\square$

**Proposición 6.2.2.** Sean  $\gamma_3$  un ciclo 2 – coloreado y  $\gamma_4$  un ciclo 2 – coloreado, tal que  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ . Si  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  tienen un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas respectivamente, entonces  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

*Demostración.* Sean  $\gamma_3$  un ciclo 2 – coloreado tal que  $V(\gamma_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $F(\gamma_3) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$ , sin pérdida de generalidad supongamos que las flechas  $(x_1, x_2)$  y  $(x_2, x_3)$  tienen color 2 y  $(x_3, x_1)$  color 1,  $N_1 = \{x_3\}$  es un NTDM de  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  un ciclo 2 – coloreado tal que  $V(\gamma_4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ,  $F(\gamma_4) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_4, y_1)\}$ , tenemos que  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ .

**Caso 1:** Las flechas de  $\gamma_4$ ,  $(y_1, y_2)$ ,  $(y_2, y_3)$ ,  $(y_3, y_4)$  tienen color 4 y  $(y_4, y_1)$  tiene color 3,  $N_2 = \{y_4\}$  es un NTDM de  $\gamma_4$ , figura 6-10 y  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  se observa en la figura 6-11.

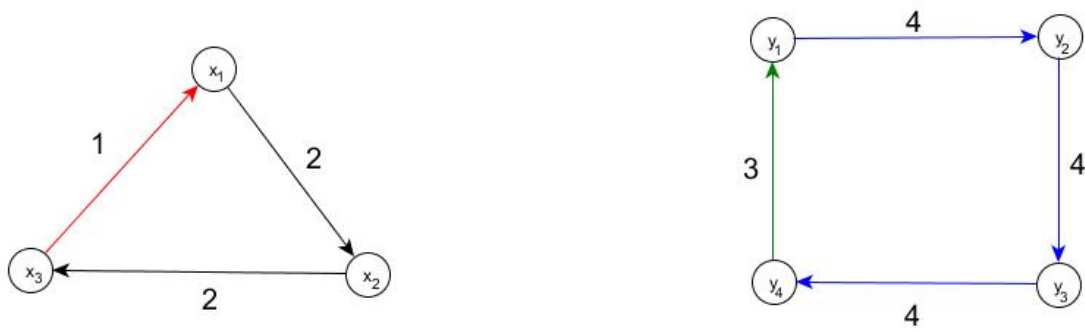


Figura 6-10:  $\gamma_3$  2 – coloreado y  $\gamma_4$  2 – coloreado.

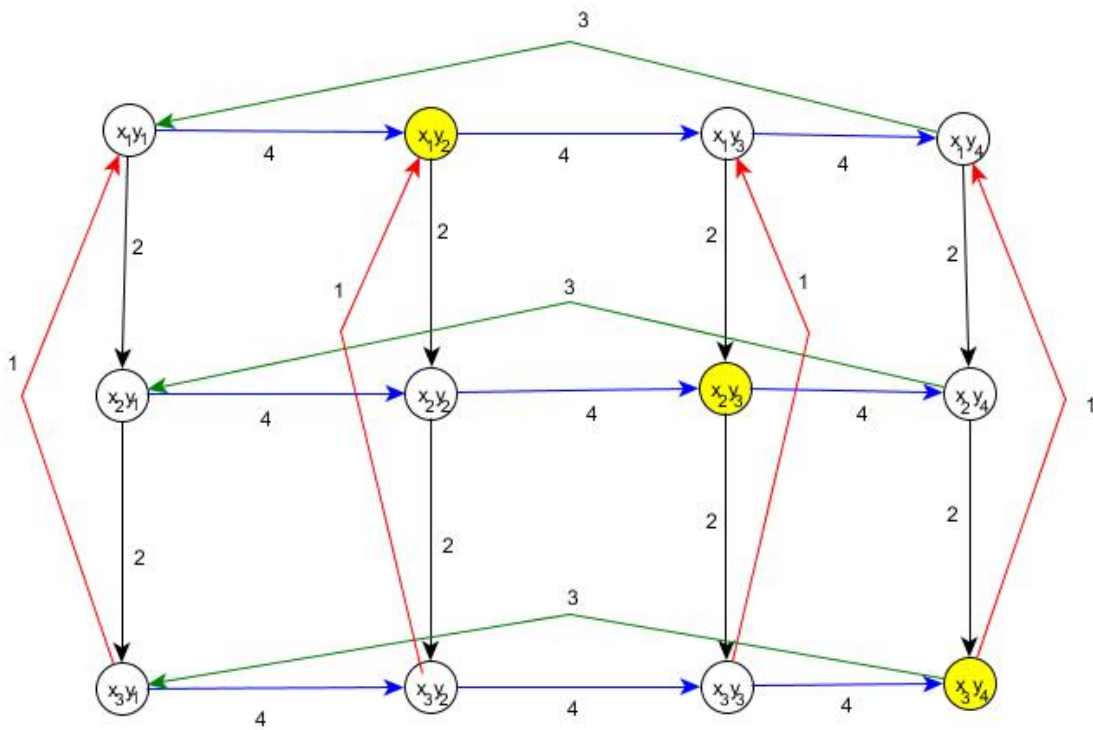
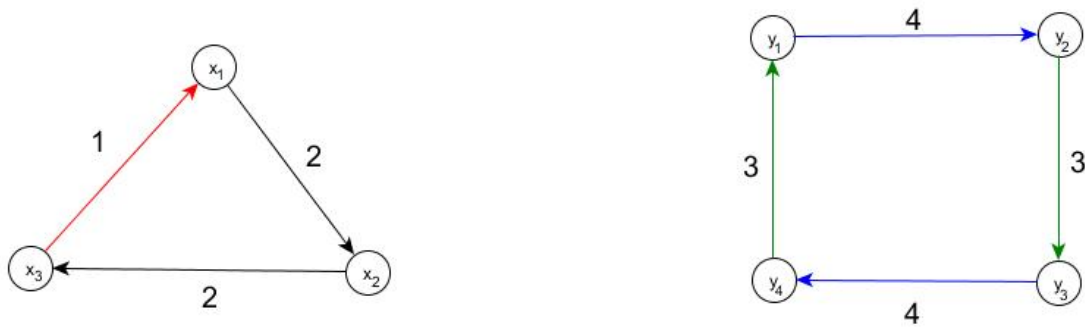


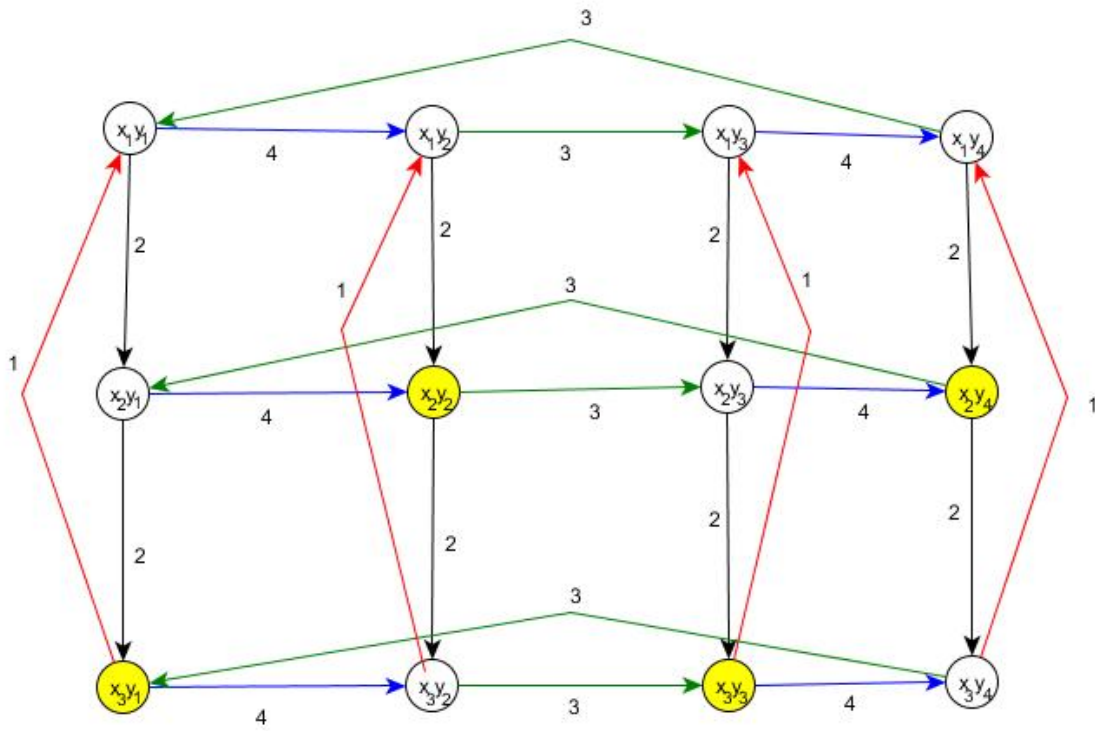
Figura 6-11:  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

Afirmamos que  $N = \{x_3y_4, x_2y_3, x_1y_2\}$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ . Observemos que  $T_1 = (x_3y_1, x_3y_2, x_3y_3, x_3y_4)$  es una tdm de color 4,  $T_2 = (x_1y_4, x_2y_4, x_3y_4)$  es una tdm de color 2,  $T_3 = (x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3)$  es una tdm de color 4, además  $(x_1y_3, x_2y_3) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$  y por último  $(x_1y_1, x_1y_2) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$ . Por lo que  $N$  es absorbente por tdm. Por definición de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ , no existen flechas entre cada par de vértices en  $N$  y como  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ , tenemos que no existen tdm entre los vértices de dicho conjunto. Por lo tanto,  $N$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

**Caso 2:** Las flechas de  $\gamma_4$ ,  $(y_1, y_2)$  y  $(y_3, y_4)$  tienen color 4,  $(y_2, y_3)$ ,  $(y_4, y_1)$  tienen color 3, tenemos ahora que  $N_2 = \{y_1, y_3\}$  es un NTDM de  $\gamma_4$ , figura 6-12 y  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  se observa en la figura 6-13.



**Figura 6-12:**  $\gamma_3$  2 – coloreado y  $\gamma_4$  2 – coloreado.

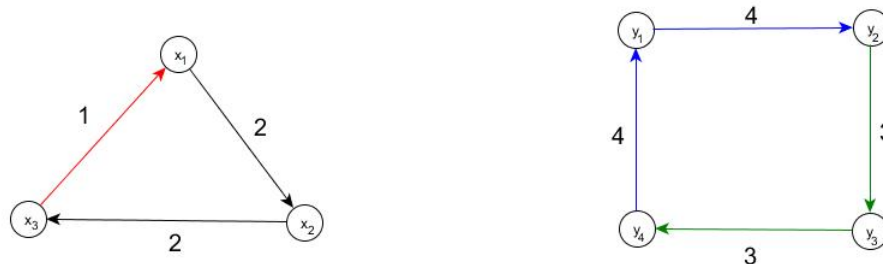


**Figura 6-13:**  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

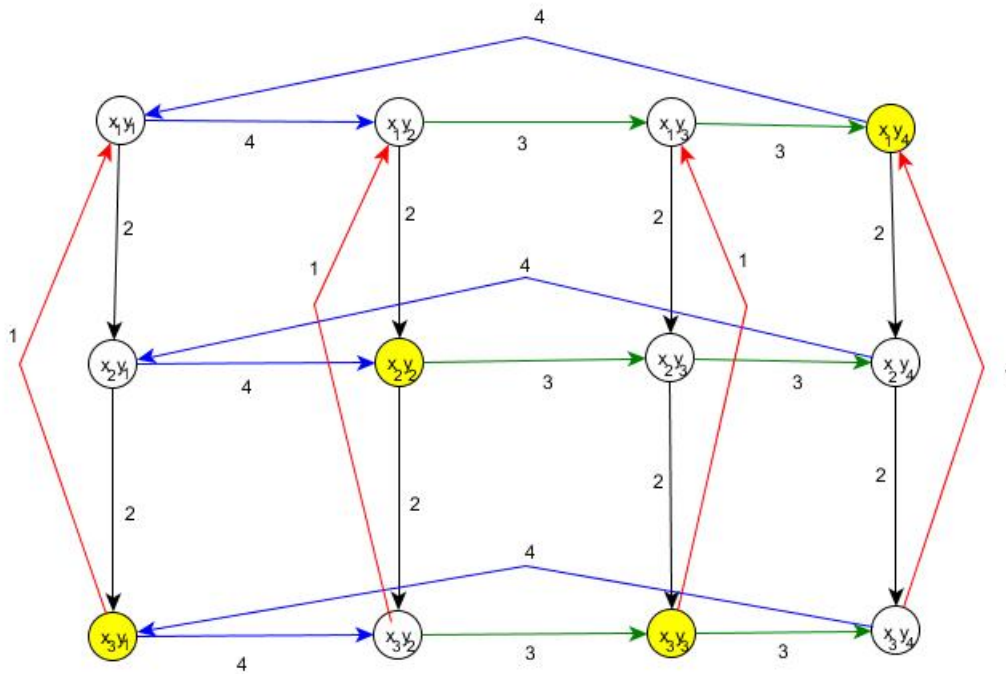
Afirmamos que  $N = \{x_3 y_1, x_3 y_3, x_2 y_2, x_2 y_4\}$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ . Observemos que  $(x_3 y_2, x_3 y_3) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$ ,  $(x_3 y_4, x_3 y_1) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$ ,  $T_1 = (x_1 y_1, x_2 y_1, x_3 y_1)$  es una tdm

de color 2,  $T_2 = (x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3)$  es una tdm de color 2,  $(x_1y_2, x_2y_2) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$  y  $(x_1y_4, x_2y_4) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$ . Por lo que  $N$  es absorbente por tdm. Por definición de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  no existen flechas entre cada par de vértices en  $N$ , como el nivel  $H_{x_3} \cong \gamma_4$  no existe una  $(x_3y_1)(x_3y_3)$ -tdm o una  $(x_3y_3)(x_3y_1)$ -tdm en  $H_{x_3}$ , ocurre lo mismo con  $\{x_2y_2, x_2y_4\} \subseteq H_{x_2}$  y como  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ , tenemos que no existen tdm entre los vértices de dicho conjunto. Por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

**Caso 3:** Las flechas de  $\gamma_4$ ,  $(y_1, y_2)$  y  $(y_4, y_1)$  tienen color 4,  $(y_2, y_3)$  y  $(y_3, y_4)$  tienen color 3, tenemos ahora que  $N_2 = \{y_1, y_3\}$  es un NTDM de  $\gamma_4$ , figura 6-14 y  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  se observa en la figura 6-15.



**Figura 6-14:**  $\gamma_3$  2 – coloreado y  $\gamma_4$  2 – coloreado.



**Figura 6-15:**  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

Afirmamos que  $N = \{x_3y_1, x_3y_3, x_2y_2, x_1y_4\}$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ . Observemos que  $(x_3y_2, x_3y_3) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$ ,  $(x_3y_4, x_3y_1) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$ ,  $T_1 = (x_1y_1, x_2y_1, x_3y_1)$  es una tdm de color 1,  $T_2 = (x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3)$  es una tdm de color 1,  $(x_1y_2, x_2y_2) \in F((\gamma_3 \times \gamma_4))$  y  $(x_2y_4, x_2y_1, x_2y_2)$  es una tdm. Por lo que  $N$  es absorbente por tdm.

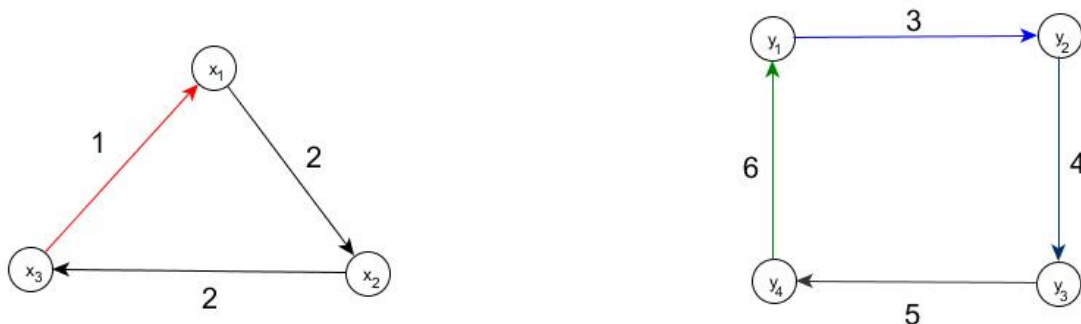
Por definición de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ , no existen flechas entre cada par de vértices en  $N$  y como  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ , tenemos que no existen tdm entre los vértices de dicho conjunto. Por lo tanto  $N$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ . □

**Proposición 6.2.3.** Sean  $\gamma_3$  un ciclo 2 – coloreado y  $\gamma_4$  un ciclo 4 – coloreado, tal que  $\gamma_3$  no usa los colores de  $\gamma_4$ . Si  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  tienen un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas respectivamente, entonces  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

*Demostración.* Sean  $\gamma_3$  un ciclo 2 – coloreado tal que  $V(\gamma_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $F(\gamma_3) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$ , tal que las flechas  $(x_1, x_2)$  y  $(x_2, x_3)$  tiene color 2 y  $(x_3, x_1)$  color 1,  $N_1 = \{x_3\}$  es un NTDM de  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  un ciclo 4 – coloreado tal que  $V(\gamma_4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ,  $F(\gamma_4) = \{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_4, y_1)\}$ , tal que las flechas,  $(y_1, y_2)$  de color 3,  $(y_2, y_3)$  tiene color 4,  $(y_3, y_4)$  con color 5 y  $(y_4, y_1)$  color 6, tenemos ahora que  $N_2 = \{y_1, y_3\}$  es un NTDM de  $\gamma_4$ , figura 6-16.  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  se observa en la figura 6-17.

Afirmamos que  $N = \{x_3y_1, x_3y_3, x_2y_2, x_2y_4\}$  es un NTDM de  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$  y la prueba es la misma que en la proposición 6.2.2 en el caso 2. □

Analizando los casos anteriores podemos notar que depende completamente de la coloración del ciclo para poder encontrar un NTDM en el producto cartesiano de dos ciclos. Por lo que la pregunta, ¿cuándo el producto cartesiano de dos ciclos de cualquier longitud tiene un NTDM? sigue abierta.



**Figura 6-16:**  $\gamma_3$  2 – coloreado y  $\gamma_4$  4 – coloreado.

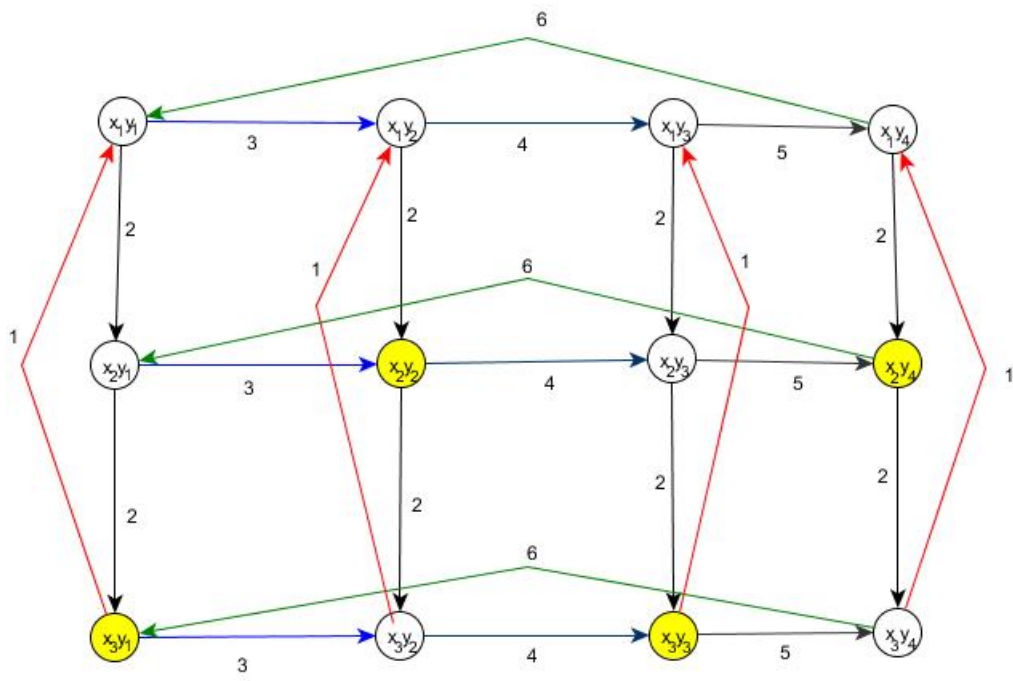


Figura 6-17:  $(\gamma_3 \times \gamma_4)$ .

# Conclusiones

En esta tesis estudiamos la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas y de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias en operaciones entre digráficas coloreadas por flechas. En conclusión, con el desarrollo de este trabajo de investigación, constatamos la dificultad de garantizar la presencia de dichos conjuntos.

En el producto raíz encontramos condiciones necesarias para probar cuando el producto raíz de dos digráficas tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, sin embargo, la generalización de los resultados obtenidos para  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias quedan por hacer.

En el producto cartesiano trabajamos con una digráfica en particular,  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$ , sin embargo no conseguimos resultados en el producto cartesiano de ciclos de cualquier longitud y aun nos quedan muchas preguntas abiertas, principalmente, ¿cuándo el producto cartesiano de dos digráficas tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Por el contrario, para la súper digráfica de líneas de subconjuntos monocromáticos los objetivos fueron alcanzados, ya que demostramos que *el número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $D$  es igual al número de  $H$  – núcleos por  $H$ -trayectorias de  $MSL(D)$* . Con respecto a las operaciones entre digráficas coloreadas por flechas, queda un camino largo por recorrer en torno a los fascinantes conceptos de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas y de  $H$  – núcleos.



# Bibliografía

- [1] K. S. Bagga, L. W. Beineke y B. N. Varma (1993): Super line graphs and their properties, *Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, 1-6.
- [2] G. Chartrand, L. Lesniak (2005): *Graphs and digraphs*, 4th edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [3] P. Delgado Escalante y H. Galeana Sánchez (2011): Restricted domination in arc-colored digraphs, *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, Vol.11 No.1, 95-104, 2011.
- [4] P. Delgado Escalante, H. Galeana Sánchez y L. Pastrana Ramírez (2012): Independent restricted domination and the line digraph, *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, Vol.9, No.1, 31-42.
- [5] D. Ferrero (2007): Some properties of superline digraphs, *IEEE International Conference on Information Technology*, (ITNG'07), San Marcos, Texas.
- [6] H. Galeana Sánchez (2011): Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph, *Discussiones Mathematicae, Graph Theory* Vol.31, No.2, 273-281.
- [7] H. Galeana Sánchez (1996): On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments, *Discrete Math*, Vol. 156, 103–112.
- [8] H. Galeana Sánchez y L. Pastrana Ramírez (1998): Kernels in edge coloured line digraph, *Discussiones Mathematicae, Graph Theory* Vol.18, No.1, 91–98.
- [9] H. Galeana Sánchez y M. R. Sánchez López (2012): H-kernels in infinite digraphs, *Graphs and combinatorics*, Vol. 29, 913-920.
- [10] C. D. Godsil y B.D. McKay (1978): A new graph product and its spectrum, *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 18, 21-28.
- [11] M. Harminc (1982): Solutions and Kernels of a Directed Graph, *Math Slovaca*, Vol. 32, No. 3, 263-267.
- [12] J. E. Pereyra Zamudio (2016): Cuasinúcleos ajenos en digráficas, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [13] M. R. Sánchez López (2013): *H*-trayectorias y *H*-caminos en digráficas *H* – coloreadas, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM.

- [14] Sands B., N. Sauer y R.E. Woodrow (1982): On Monochromatic paths in edge-colored digraphs., J. Combin. Theory., 271-275.
- [15] Von Neumann J., y O. Morgenstern (1994): Theory of games and economics behaviour, Princeton University Press, Princeton.
- [16] Wloch A., e I. Wloch (1997), On  $(k, \ell)$ -kernels in generalized products, Discrete Mathematics, Vol. 164, 295-301.
- [17] Wloch I.,(2011): On kernels by monochromatic paths in D-join, Ars Combinatoria, Vol.99, 215-224. 120,123.
- [18] Zhao B., y X. Li (1996): Kernels, semikernels and quasi-kernels in super line digraphs., Graph Theory Notes N. Y. Vol. 30, 11–13.